Universidade Federal de Santa Catarina
Campus de Joinville
Departamento de Engenharias da Mobilidade
EMB 5016: Cálculo Numérico
Prof. Alexandre Zabot

Roteiro do Trabalho Prático

1 Enunciado do Problema

Você trabalha em um Centro de Monitoramento de Satélites e recebeu um conjunto de dados com as posições de um Satélite. É solicitado que a partir destas posições você:

1. Determine os parâmetros da órbita
2. Faça uma figura com a órbita
3. Faça uma figura mostrando a órbita com 30 posições equidistantes em tempo deste satélite
4. Verifique a segunda lei de Kepler

2 Itens para entregar pelo Moodle

Tanto no trabalho Parcial quanto no Final deve ser entregue:

Roteiro (arquivo PDF digitado no computador):

- Cabeçalho com nome e matrícula do aluno
- Solicitações específicas de cada etapa: figuras, tabelas ou valores, etc

Programas (em arquivos de texto):

- Os programas devem conter todas as bibliotecas e dados necessários

Atenção:

- Devem ser usados os algoritmos indicados no roteiro
- Os algoritmos precisam ser desenvolvidos pelo aluno
- Não pode usar as bibliotecas do professor, apenas para estudo e consulta
- Será feita análise de plágio usando software específico para isso

2.1 Trabalho Parcial

- Itens a serem desenvolvidos: 1 a 3
- Entregáveis:
  - Figuras
  - Programas que criam figuras
  - Programas que fazem as contas para chegar aos valores
  - Tabela com valores do item 1
  - Roteiro com figuras e tabelas

2.2 Trabalho Final

- Itens a serem desenvolvidos: 4
- Entregáveis:
  - Figura mostrando a interpolação
  - Programas que criam figuras
  - Programas que fazem as contas para chegar aos valores
  - Valores das áreas comprovando a 2° Lei de Kepler
  - Roteiro com figuras e tabelas

3 Base Teórica

3.1 Elipse

Considere a elipse da figura 1, alinhada ao eixo x e centrada na posição $(x_c, 0)$. Sua equação geral é:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

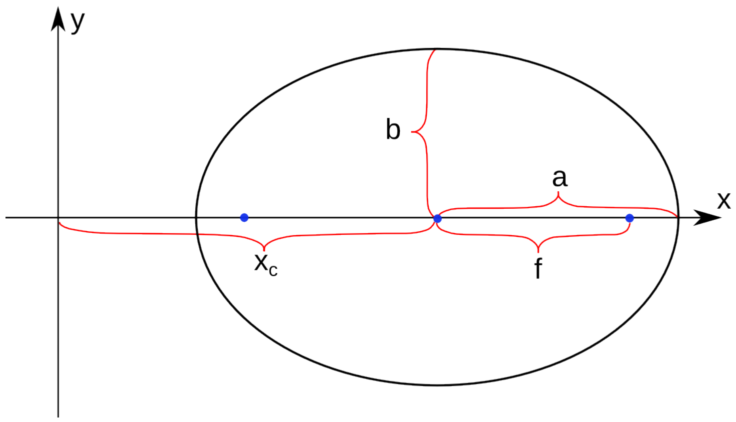

Figura 1: Elipse

Os parâmetros a e b são conhecidos como "semi-eixo maior" e "semi-eixo menor", respectivamente, da elipse. É muito útil definir um parâmetro adimensional chamado de excentricidade, que dá uma medida do "achatamento" da elipse:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad (2)$$

Também é importante definir a distância focal da elipse, que é a distância do centro a qualquer um dos focos:

$$f = ae \qquad (3)$$

3.2 Leis de Kepler

As três leis de Kepler estabelecem que:

1. O satélite descreverá uma órbita eliptica em torno da Terra, que ocupa um dos focos da elipse.

2. O segmento que une a Terra ao satélite descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais (ver fig. 2).

3. Lei do Período orbital:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}. \tag{4}$$

onde G é a Constante Gravitacional e M_T a massa da Terra.

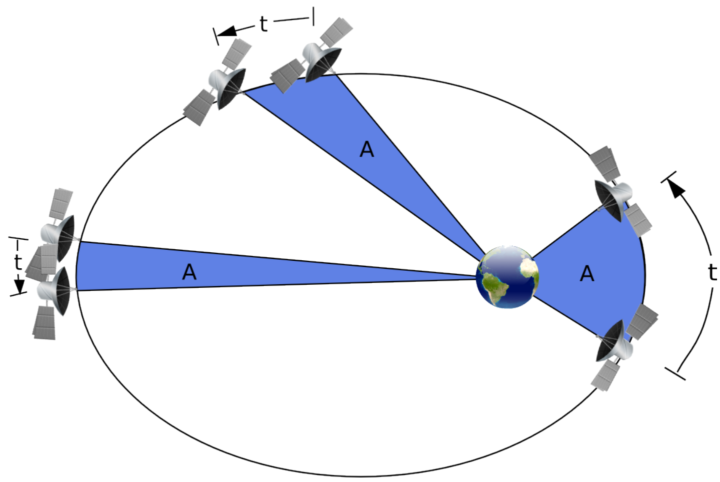

Figura 2: 2ł lei de Kepler

4 Determinação dos Parâmetros Orbitais

Como a equação 1 tem 3 parâmetros livres, conclui-se que dados 3 pontos pertencentes a uma elipse, podemos determinar a equação dessa elipse.

Para nossos objetivos é melhor reescrever a equação 1 como

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{2b^2c}{a^2}x + \frac{b^2(a^2 - x_c^2)}{a^2}, \tag{5}$$

ou ainda,

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C. \tag{6}$$

De fato, considere que sejam conhecidos os pontos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, então usamos a equação 6 para montar o Sistema Linear

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = y_1^2 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = y_2^2 \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = y_3^2 \end{cases} \tag{7}$$

e resolvendo-o obtemos (A, B, C).

Da comparação entre as equações 5 e 6 determina-se os parâmetros da elipse:

$$\begin{cases} x_c = -\dfrac{B}{2A} \\ a = \sqrt{x_c^2 - \dfrac{C}{A}} \\ b = a\sqrt{-A} \end{cases} \tag{8}$$

5 Desenhando o Movimento Orbital

A partir da 1ł lei de Kepler podemos afirmar que a órbita de um Satélite ao redor da Terra será uma elipse com a Terra ocupando um dos focos, como mostrado na figura 3.

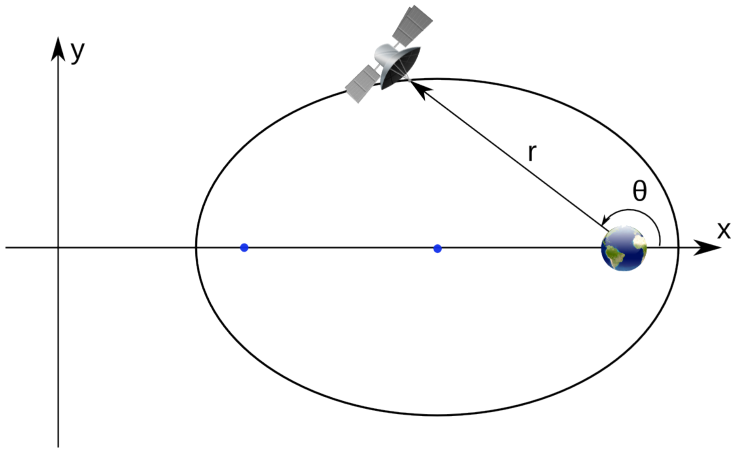

Figura 3: Órbita do satélite no sistema de coordenadadas adotado.

A velocidade do Satélite ao longo da órbita não é constante. Ele movimenta-se mais rápido quando está mais perto da Terra. Sendo assim, para identificar a posição do Satélite em um dado instante de tempo, precisamos usar as equações de Kepler para o movimento orbital.

Para evitar o uso de uma Equação Diferencial, podemos lançar mão de algumas grandezas usadas na Mecânica Celeste para calcular a posição (r) e o ângulo do Satélite (θ) para um dado instante (t).

O Procedimento consiste de 4 etapas:

1. Calcular a Anomalia média ($0 \leq M \leq 2\pi$):

$$M = \frac{2\pi}{P} t \tag{9}$$

2. Calcular a Anomalia excêntrica ($0 \leq E \leq 2\pi$)

$$M = E - e \sin E \tag{10}$$

utilizando alguma técnica numérica estudada para encontrar raízes de funções:

3. Calcular a Anomalia verdadeira ($0 \leq \theta \leq 2\pi$):

$$\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan(E/2) \tag{11}$$

4. Calcular a distância:

$$r = a\left(\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right) \tag{12}$$

5. Calcular a posição do satélite:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + x_c + f \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{13}$$

6 Verificando a 2° lei de Kepler

Para verificar a 2° lei de Kepler você precisará identificar duas regiões traçadas pelo satélite, como mostrado na figura 4

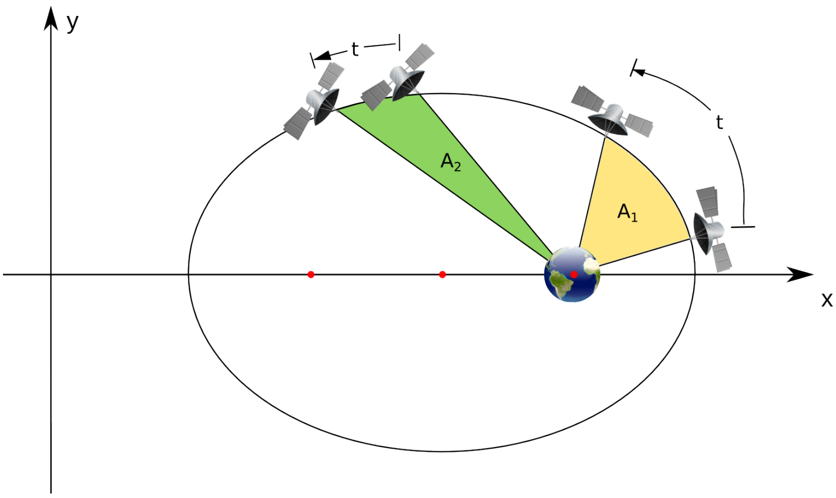

Figura 4: Verificação da 2ł lei de Kepler

e calcular a área das regiões A_1 e A_2 e verificar que são iguais. O cálculo da área deve ser feito através de algum dos algoritmos estudados na disciplina.

Para o cálculo da área, pede-se que se faça de dois modos:

1. Utilizando a equação 6
2. Interpolando pontos por meio de Spline Cúbica

A figura 5 mostra o detalhe para o cálculo das integrais.

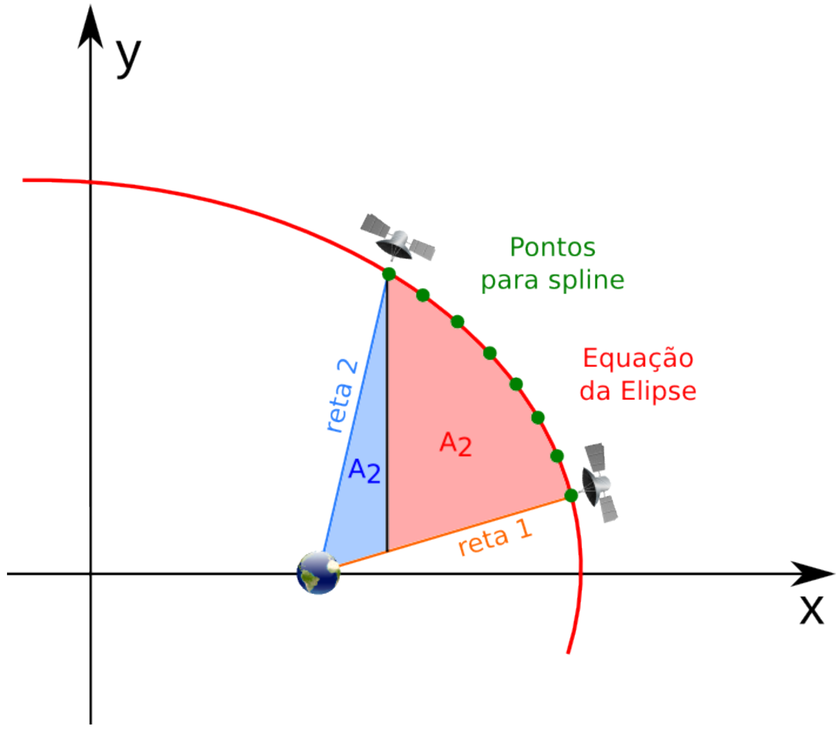

Figura 5: Detalhe para o cálculo das integrais.

7 Dados

Use os seguintes dados:

x	y
20621.3	5214.2009061
34642.3	3201.7095080
21168.5	5193.6201775