UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
CTJ – Centro Tecnológico de Joinville
EMB5016 – Cálculo Numérico

Relatório do Trabalho Parcial

Luís Eduardo Fernandes Costa Lima
20101965

Joinville

Outubro/2021

1) Determine os parâmetros da órbita

Para determinar o que este item solicita, deve utilizar dos três pontos fornecidos no roteiro, junto com os conhecimentos das Leis de Kepler e da descrição analítica de uma elipse.

O primeiro passo para obter os parâmetros da órbita xc, a e b – parâmetros que possibilitam descrever qualquer ponto do movimento – é reescrever a equação geral da elipse afim de isolar a incógnita y. Dessa forma obtemos uma equação adequada para nosso objetivo, equação a qual foi fornecida pelo roteiro (equação 6); e então é possível montar um sistema linear com os três pontos fornecidos de forma que seja possível e determinado e sua solução corresponda aos parâmetros auxiliares A, B E C, os quais usaremos posteriormente para encontrar os parâmetros da órbita pela relação fornecida pelo roteiro (8) e para calcular a área do percorrida pela linha que liga o satélite e a terra, buscando verificar a 2◦ lei de Kepler, para armazenar esses dados para serem usados em um script diferente foram colocados no arquivo “ParametrosABC.bin”.

Em seguida, após termos montado o sistema linear, é preciso escrever um programa utilizando Python que tem a função de resolver o sistema linear, obtendo A, B e C e, após isso, determinar xc, a e b. Para tal função foi utilizado o método da eliminação gaussiana, o qual recebe a matriz aumentada e aplica a eliminação gaussiana, conseguindo então uma matriz escalonada, a partir dessa matriz é feito a regressão e então se obtém a solução para o sistema linear. Logo, feito o algoritmo da Eliminação Gaussiana, a próxima etapa é fazer um programa que utilizará o anterior e terá o papel de ter os pontos fornecidos, construir a matriz aumentada de acordo com a equação fornecida, utilizar a Eliminação Gaussiana para obter A, B e C e, por fim, determinar os parâmetros de órbita através dos resultados anteriores e então armazena-los em um arquivo externo. Dessa forma atendendo a solicitação.

Tabela 1 – Valores em km dos parâmetros de órbita obtidos

xc	17665.165095806275
a	21386.412945812823
b	5264.737829520467

Fonte: Elaborado pelo autor

2) Faça uma figura com a órbita

Para essa solicitação deve ser usado os parâmetros da órbita determinados na etapa anterior, e a partir delas e das equações (9 - 13) fornecidas pelo roteiro obter os pontos x e y para qualquer tempo t dado.

Então, o primeiro passo para plotar essa figura é escrever um programa que contém o método da Bissecção, o qual é responsável por obter a raiz aproximada de uma função dada de acordo com um certo erro de tolerância, esse programa será usado posteriormente para o cálculo

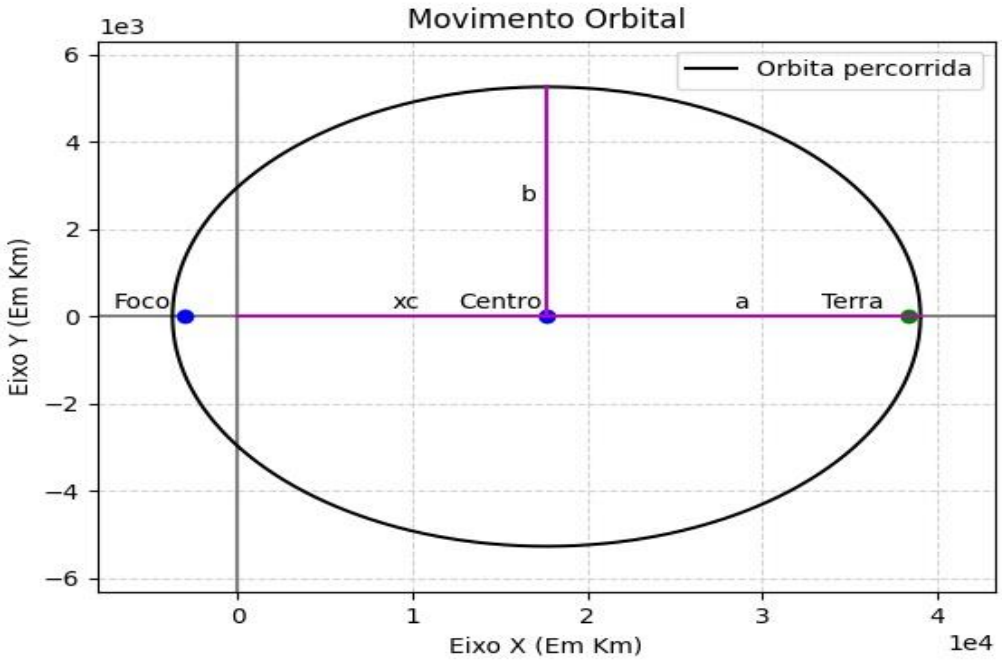
da Anomalia excêntrica, já que não há como calcular de forma direta essa grandeza.

Após a construção desse programa, o próximo passo é construir outro programa principal que tem a função de ler os valores dos parâmetros de órbita obtidos anteriormente, obter os pontos que formam a elipse e então, com uso da biblioteca matplotlib, plotar a imagem solicitada. Para executar a primeira parte, o programa busca por um arquivo nomeado de “Parametros.bin”, criado pelo programa que encontrou xc, a, b e então lê linha a linha, cada um contendo um dos parâmetros e os salva em variáveis. Então, após fazer a leitura, o programa faz a chamada de uma função chamada “PontosElipse” que recebe o número de pontos equidistantes em tempo que será retornado; isso se dá, pois, a órbita elíptica é plotada através da ligação de vários pontos consecutivos pertencentes a ela e não por uma infinidade de pontos, logo quanto maior esse número, mais perfeita será a elipse; e recebe os três parâmetros salvos anteriormente. Então, dentro da função, a primeira etapa é calcular o período orbital, a excentricidade e a distância focal, sendo essas obtidas utilizando os parâmetros xc, a e b, após isso é criado uma lista de elementos que vai de 0 até o período orbital, os números de elementos é igual ao número de pontos fornecidos a função e todos eles são espaçados igualmente, essa lista corresponde a um tempo que vai desde do inicio da órbita (t=0) até o ponto final (t=P), nesse caso temos que o período vale 0.9843.

Então, ainda dentro da função, para cada elemento t da lista citada é obtido uma coordenada de um ponto, para isso é usado a função “MValor” que retorna um M (Anomalia média), então com esse valor é calculado um E (Anomalia excêntrica), que utiliza do método da bissecção e a função “EValor” para encontrar uma raiz, então é obtido o ângulo e a distancia em relação a terra pelas funções “AnguloValor” e “DistValor”, respectivamente, sendo essas funções as equações fornecidas no roteiro. Após obter a distância e o ângulo é utilizado a relação fornecida em 13 para se obter as coordenadas dos pontos. Por fim, essa função coloca cada uma dessas coordenadas em listar e as retorna.

O último passo para plotar a figura é, utilizando as listar obtidas na função e a biblioteca matplotlib, plotar a elipse em uma figura através da função plot, e então foi plotado também, usando os parâmetros, o semieixo maior(a), o semieixo menor (b) e o deslocamento (xc). Então é estilizada as cores, legendas e escala da figura e então ela é salva em um arquivo jpg.

Figura 1- Movimento Orbital



Fonte: Elaborado pelo autor

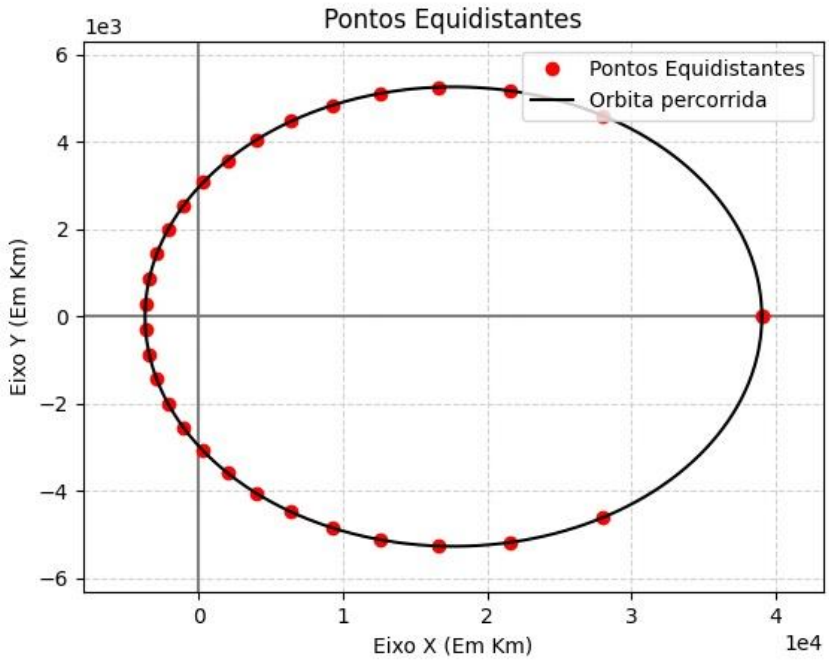
3) Faça uma figura mostrando a órbita com 30 posições equidistantes em tempo deste satélite

Está solicitação usa do programa escrito no item passado com algumas implementações, sendo que todos seus requisitos já foram adicionados pelo item anterior.

Então, a primeira etapa para plotar essa imagem é adicionar no corpo principal do programa anterior, comandos que utilizaram da função “PontosElipse”, anteriormente explicada, para produzir um conjunto de 30 pontos equidistante em tempo. Logo é chamado essa função e é colocado como 30 os números de pontos a serem calculador, já que, como citado, a lista de elementos de t é construída de forma que todos os seus elementos tenham o mesmo módulo da diferença entre seu ele e seus vizinhos. E através dessa chamada é obtido as listas que terão as coordenadas x e y dos pontos.

Após isso, é iniciado a plotagem da figura, que consistem em usar a função “clf” da biblioteca matplotlib para limpar os dados da figura anterior, começando do zero uma nova figura, e então plotar os pontos 30 pontos obtidos na última chamada da função “PontosElipse” e também plotar, novamente, a elipse como foi feito no item anterior. Em seguida é feito a estilização das cores, legenda e escala da figura e então ela é salva em um arquivo jpg.

Figura 2- Pontos Equidistantes em tempo



Fonte: Elaborado pelo autor

4) Verifique a segunda lei de Kepler

Está última etapa tem como objetivo calcular as áreas feitas pela linha que liga o satélite e a terra em uma determinada variação de tempo para dois tempos iniciais diferentes, verificando se essas áreas são iguais, assim como prevê a segunda lei de Kepler.

Antes da criação do programa que calculará essa área, foi feita a análise da Figura 5 fornecida pelo roteiro. Dessa análise é possível observar que a área a qual se pretende calcular é a área abaixo da curva no ponto inicial ao final somada a área abaixo da reta 2 e subtraída da área abaixo da reta 1, sendo essas áreas, formadas pelas retas, triângulos retângulos.

Assim, foi possível o desenvolvimento do programa responsável por calcular essas áreas, o qual faz uso de técnicas de integração numérica, nesse caso foi utilizado o método de Newton-Cotes. Logo o primeiro passo a ser tomado foi a codificação de um módulo que contém duas funções que usam esse método, porém umas delas é adaptada ao uso da Spline Cúbica; método numérico de interpolação de pontos que também foi desenvolvido nesse processo.

Então, o próximo passo foi o desenvolvimento do programa principal, o “LeiDeKepler.py”. Ele importa os módulos citados anteriormente e também faz uso de parte do código dos itens 2 e 3, pois

ele utiliza as funções que calculam os pontos da elipse para ser possível plotar a trajetória da orbita do satélite. No começo do programa são lidos os dados dos parâmetros de orbita escritos no primeiro item e então são usados para calcular o período de órbita e, a partir desse valor, é escolhido um intervalo de tempo e os tempos inicias os quais serão calculadas as respectivas áreas. Então usando as equações dadas (9-13) foi criado a função que calcula a coordenadas de um ponto de órbita para dado tempo e com essa função calculamos os pontos iniciais e os pontos finais dos intervalos de tempo.

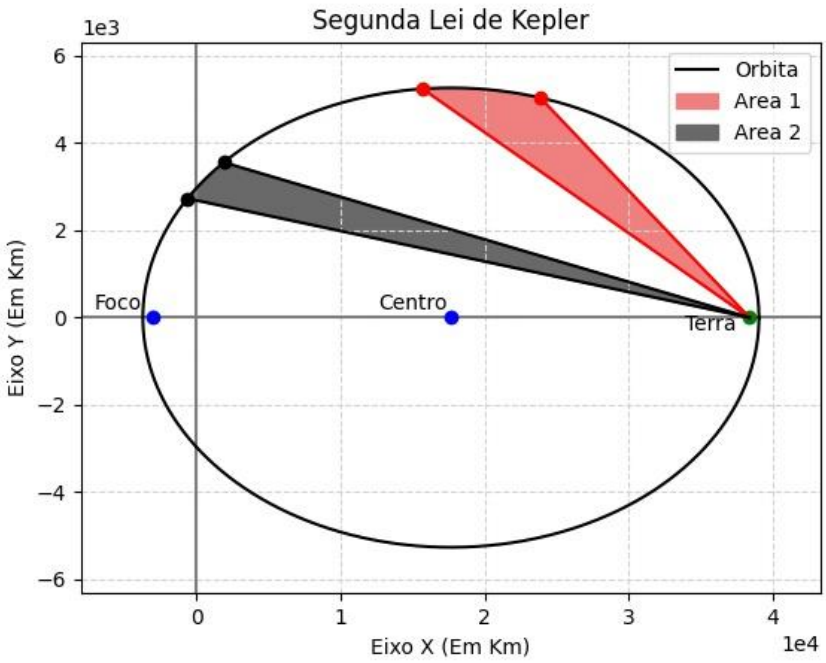
Logo o próximo passo foi a passagem desses pontos para a função que tem como papel o cálculo da área feita entre esses pontos, como citado anteriormente. Essa função recebe como parâmetro uma matriz que contém em uma linha as coordenadas do ponto inicial e na segunda as coordenadas do ponto final e, também, recebe a coordenada x do planeta terra e o números de pontos que serão usados para a interpolação. Então a função verifica quais desses pontos estão mais distantes da terra no eixo x, e o ponto mais distante é aquele o qual a reta 1 liga ele e a terra e o outro ponto forma a reta 2. Em seguida, com essa informação e relembrando que as retas formam triângulos retângulos e usando as bases e alturas, são calculadas as áreas abaixo das duas retas e armazenadas em variáveis. Após isso, é calculada a área abaixo da curva da elipse de duas formas diferentes, a primeira utiliza a equação 6 dada e os valores dos parâmetros armazenados no arquivo “ParametrosABC.bin” no item 1 e a segunda usa um conjunto de pontos dentro desse intervalo para fazer a interpolação, ambas formas utilizam o módulo de Newton-Cotes citados anteriormente e através das funções disponíveis nele calculam a área das curvas, logo é calculado e retornando as áreas da trajetória das duas formas somando a respectiva área da curva a do triângulo 2 e subtraindo da do triângulo.

Os dados obtidos utilizando a equação 6 que descreve a elipse foram de 19651331.44794 km² e 19651332.47002 km², uma diferença menor que 0,0001% em relação à média dessas áreas, logo é possível inferir que essa pequena diferença é fruto dos erros de cálculo causados pelas aproximações do computador e então verificar, através dos resultados, a segunda lei de Kepler.

Já utilizando a Spline Cúbica para descrever a trajetória do satélite nos pontos, os resultados de área foram 19651331.44799 km² e 19651332.47004 km², uma diferença de 5 casas decimais em relação ao cálculo anterior, essa diferença pode ser maior dependendo dos intervalos escolhidos e de quantos pontos foram usados para a interpolação, para atingir essa precisão foram usados 100 pontos. E desses dados podemos verificar, também, a segunda lei de Kepler levando em consideração ao erro computacional, como feito com os dados anteriores.

Esses dados são escritos e armazenados no arquivo “Area.bin” e, em seguida, usando eles e a biblioteca “matplotlib”, é construído a figura q mostras as duas áreas e a trajetória da elipse, assim como os focos da elipse e o centro dela.

Figura 4- Segunda Lei de Kepler



Fonte: Elaborado pelo autor