Modelagem em programção linear para o problema de Transporte de Produção

Luis Felipe Risch[1]

[1] Departamento de informática(DINF)
Universidade Federal do Paraná (UFPR) – Curitiba, PR – Brasil

lfr20@inf.ufpr.br

1. Contextualização

O professor da matéria de otimização(CI1238) do departamento de informática da Universidade Federal do Paraná(UFPR) propôs ao seus alunos a resolverem o problema ”Transporte de Produção”, o qual será descrito na seção seguinte, utilizando programação linear(PL). O objetivo deste artigo está em descrever e explicar a modelagem feita para o desafio proposto.

2. Problema

O desafio ”Transporte de Produção” a ser resolvido, utilizando PL, está descrito da seguinte forma:

Uma determinada empresa, que produz um certo produto, possui algumas fábricas, cada uma com a sua capacidade de produção. O desafio da empresa está em suprir as cidades da região, sendo que cada cidade tem a sua demanda. Além do mais, existe um custo de transporte da fábrica para a cidade e este é linear no peso, em toneladas, da carga.

3. Modelagem

Para começar, é importante entender o que se espera obter com a resolução do problema e, pela interpretação feita, o objetivo está em minimizar o custo do transporte das fábricas para as cidades, de forma que a capacidade de produção de cada unidade da empresa não seja extrapolada e a demanda de cada cidade seja suprida.

Tendo entendido o objetivo, é preciso estabelecer algumas variáveis para o problema, pois facilitará montar a função de minimização de custo com as suas restrições. Sendo assim, segue a lista:

- m: Quantidade de fábricas;
- n: Quantidade de cidades;
- $c_{1,2,3...m}$: Capacidade de produção de cada empresa;
- $d_{1,2,3...n}$: Demanda de cada cidade;
- $t_{11,12,13...ij}$: Custo de transporte de uma fábrica i para uma cidade j
- $k_{11,12,13...ij}$: Quantidade, em toneladas, enviada da fábrica i para a cidade j

3.1. Obtenção da função de minimização

Como já havíamos dito, o objetivo da resolução do problema está em minimizar o custo do transporte das fábricas para as cidades. Sendo assim, a função que descreve esse comportamento está em torno das variáveis t e k. Por esse motivo, com o intuito de facilitar a visualização das variáveis de custo de transporte e quantidade enviada, as tabelas 1 e 2, descrevem melhor os seus comportamentos. Em que, cada célula da tabela, retirando o cabeçalho e a primeira coluna, representa o custo do transporte ou a quantidade enviada de uma fábrica de índice da linha para uma cidade de índice da coluna.

Table 1. Custo constante do transporte entre uma fábrica e uma cidade

Fábricas / Cidades	1	2	3	n
1	T11	T12	T13	T1n
2	T21	T22	T23	T2n
3	T31	T32	T33	T3n
m	Tm1	Tm2	Tm3	Tmn

Table 2. Quantidade, em toneladas, enviada de uma fábrica para uma cidade

Fábricas / Cidades	1	2	3	n
1	K11	K12	K13	K1n
2	K21	K22	K23	K2n
3	K31	K32	K33	K3n
m	Km1	Km2	Km3	Kmn

Tendo essa visão e sabendo que o custo do transporte é linear na quantidade enviada, fica fácil visualizar que para a obtenção da função objetivo, basta multiplicar as respectivas células das tabelas 1 e 2 somando os resultados. De forma genérica, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
&min: t_{11}k_{11} + t_{12}k_{12} + t_{13}k_{13} + ... + t_{1n}k_{1n} + \\
&t_{21}k_{21} + t_{22}k_{22} + t_{23}k_{23} + ... + t_{2n}k_{2n} + \\
&t_{31}k_{31} + t_{32}k_{32} + t_{33}k_{33} + ... + t_{3n}k_{3n} + \\
&t_{m1}k_{m1} + t_{m2}k_{m2} + t_{m3}k_{m3} + ... + t_{mn}k_{mn}.
\end{aligned} \tag{1}$$

3.2. Obtenção das equações de restrição

Sabe-se que uma das restrições está em cima da capacidade de produção de cada fábrica. Sendo assim, observa-se que ao somar individualmente as linhas da tabela 2, obtém-se a quantidade total enviada de cada fábrica. Desta forma, basta limitar superiormente essas quantidades obtidas pela capacidade máxima de produção da respectiva fábrica. De forma genérica, obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
&k_{11} + k_{12} + k_{13} + ... + k_{1n} \leq c_1 \\
&k_{21} + k_{22} + k_{23} + ... + k_{2n} \leq c_2 \\
&k_{31} + k_{32} + k_{33} + ... + k_{3n} \leq c_3 \\
&k_{m1} + k_{m2} + k_{m3} + ... + k_{mn} \leq c_m
\end{aligned} \tag{2}$$

De forma análoga a análise feita acima, é possível obter a quantidade total enviada para cada cidade somando as colunas. Desta forma, basta limitar inferiormente essas quantidades obtidas pela demanda da respectiva cidade. De forma genérica, obtém-se as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
&k_{11} + k_{21} + k_{31} + ... + k_{m1} \geq d_1 \\
&k_{12} + k_{22} + k_{32} + ... + k_{m2} \geq d_2 \\
&k_{13} + k_{23} + k_{33} + ... + k_{m3} \geq d_3 \\
&k_{1n} + k_{2n} + k_{3n} + ... + k_{mn} \geq d_n
\end{aligned} \tag{3}
$$

Por fim, como as quantidades enviadas das fábricas para as cidades não podem ser uma valor negativo, é preciso limitar elas inferiormente. De forma genérica, obtém-se as seguintes equações:

$$k_{11,12,13,...,1n,21,22,23,...} \geq 0 \tag{4}$$

3.3. Modelagem final

Para finalizar, o problema ”Transporte de produção” fica modelado, de forma genérica, em programação linear da seguite forma:

$$
\begin{aligned}
&min : t_{11}k_{11} + t_{12}k_{12} + t_{13}k_{13} + ... + t_{1n}k_{1n} + \\
&t_{21}k_{21} + t_{22}k_{22} + t_{23}k_{23} + ... + t_{2n}k_{2n} + \\
&t_{31}k_{31} + t_{32}k_{32} + t_{33}k_{33} + ... + t_{3n}k_{3n} + \\
&t_{m1}k_{m1} + t_{m2}k_{m2} + t_{m3}k_{m3} + ... + t_{mn}k_{mn}. \\
&S.A. \\
&k_{11} + k_{12} + k_{13} + ... + k_{1n} \leq c_1 \\
&k_{21} + k_{22} + k_{23} + ... + k_{2n} \leq c_2 \\
&k_{31} + k_{32} + k_{33} + ... + k_{3n} \leq c_3 \\
&k_{m1} + k_{m2} + k_{m3} + ... + k_{mn} \leq c_m \\
&k_{11} + k_{21} + k_{31} + ... + k_{m1} \geq d_1 \\
&k_{12} + k_{22} + k_{32} + ... + k_{m2} \geq d_2 \\
&k_{13} + k_{23} + k_{33} + ... + k_{m3} \geq d_3 \\
&k_{1n} + k_{2n} + k_{3n} + ... + k_{mn} \geq d_n \\
&k_{11,12,13,...,1n,21,22,23,...} \geq 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

4. Exemplo de resolução

Para concretizar a modelagem criada, segue um problema de exemplo:

Considere uma empresa com 3 fábricas, com capacidades 1100, 2000 e 1500, respectivamente. Essas fábricas precisam suprir 4 cidades, com demandas 900, 1000, 750 e 950, respectivamente. Os custos de transporte são dados pela tabela abaixo.

Table 3. Custo do transporte

Fábricas / Cidades	1	2	3	4
1	60	100	50	150
2	100	120	80	60
3	80	70	100	80

4.1. Resolução

Seguindo a modelagem descrita na seção acima, é possível traduzir o problema de exemplo para as seguintes equações de programação linear:

$$
\begin{aligned}
& min : 60k_{11} + 100k_{12} + 50k_{13} + 150k_{14} + \\
& 100k_{21} + 120k_{22} + 80k_{23} + 60k_{24} + \\
& 80k_{31} + 70k_{32} + 100k_{33} + 80k_{34} \\
& S.A. \\
& 60k_{11} + 100k_{12} + 50k_{13} + 150k_{14} \leq 1100 \\
& 100k_{21} + 120k_{22} + 80k_{23} + 60k_{24} \leq 2000 \\
& 80k_{31} + 70k_{32} + 100k_{33} + 80k_{34} \leq 1500 \\
& 60k_{11} + 100k_{21} + 80k_{31} \geq 900 \\
& 100k_{12} + 120k_{22} + 70k_{32} \geq 1000 \\
& 50k_{13} + 80k_{23} + 100k_{33} \geq 750 \\
& 150k_{14} + 60k_{24} + 80k_{34} \geq 950 \\
& k_{11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44} \geq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Tendo o problema modelado em programação linear, é fácil obter a solução, basta utilizar o software LPSOLVE, que implementa o algoritmo siplex. Sendo assim, o ponto ótimo do problema acima é:

- $k_{11} = 400$
- $k_{12} = 0$
- $k_{13} = 700$
- $k_{14} = 0$
- $k_{21} = 0$
- $k_{22} = 0$
- $k_{23} = 50$
- $k_{24} = 950$
- $k_{31} = 500$
- $k_{32} = 1000$
- $k_{33} = 0$
- $k_{34} = 0$

Ou seja, para esse exemplo, um plano ótimo para a empresa é de 230.000,00 reais, onde a fábrica 1 envia 400 toneladas para a cidade 1 e 700 para a cidade 3. A fábrica 2 envia 50 toneladas para a cidade 3 e 950 para a cidade 4. Por fim, a fábrica 3 envia 500 toneladas para a cidade 1 e 1000 para a cidade 2.

5. Conclusão

A modelagem apresentada neste trabalho foi construída em cima de conceitos de programação linear aprendidos em sala de aula e no livro Understanding and using linear programming [Matousek and Gärtner 2006]. A modelagem feita é genérica suficiente para traduzir qualquer possível caso do problema ”Transporte de Produção” para um modelo de programação linear, além de garantir que todas as restrições de quantidade de produto produzido e enviado esteja dentro dos limites permitidos.

6. Referência

Matousek, J., Gärtner, B. (2006). Understanding and using linear programming. Springer Science Business Media.