INSTITUTO TECNOLÓGICO DE QUERÉTARO
VERANO 2021

ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES
CLAVE: ACF-0905

2ª EVALUACIÓN

Docente: Dra. Yolanda Jiménez Flores

INSTRUCCIONES GENERALES: La presente evaluación consta de 5 reactivos, los cuales serán evaluados considerando el resultado y el procedimiento para llegar al mismo, el valor de cada problema será de 2.0 puntos. Tiene un tiempo de 120 minutos para contestar la evaluación.

A. Lea cuidadosamente los reactivos antes de resolverlos.
B. Verifique en forma previa a su resolución, que este completa la evaluación por lo que a sus partes constitutivas y de impresión se refiere.
C. Anote sus respuestas con letra clara y legible, sin borrones, enmendaduras y tachaduras, (se recomienda uso de lápiz)
D. Al término de la evaluación, envíela al docente.

1. La función indicada como $y_1(x)$ es una solución de la ecuación dada. Use reducción de orden para encontrar la segunda solución proponiendo $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ y usando un cambio de variable $u(x) = v'(x)$. También verifique que $y_1(x)$ y $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ son soluciones.

$$y'' - 25y = 0 \quad ; y_1 = e^{5x}$$

2. La función indicada como $y_1(x)$ es una solución de la ecuación dada. Use la fórmula de reducción de orden para encontrar la segunda solución. También verifique que $y_1(x)$ y $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ son soluciones.

$$xy'' + y' = 0 \quad ; y_1 = \ln x$$

3. Dada la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes considere a y=e^rx como una.

$$3y'' + 2y' + y = 0$$

4. Resuelva usando coeficientes indeterminados

$$y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$$

5. Resolver la ecuación NO HOMOGÉNEA usando variación de parámetros

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

Sánchez Jurado Andrea Jaqueline

Examen unidad 2

05/07/2021

1.- $y'' - 25y = 0$; $y_1 = e^{5x}$

$25e^{5x} - 25e^{5x} = 0$

$0 = 0$ si es solución y_1

$y_2 = ve^{5x}$ $y_2' = 5ve^{5x} + e^{5x}v'$ $y_2'' = 25ve^{5x} + 5e^{5x}v' + 5e^{5x}v' + e^{5x}v''$

sustituyendo

$25ve^{5x} + 10e^{5x}v' + e^{5x}v'' - 25ve^{5x} = 0$

$e^{5x}v'' + 10e^{5x}v' + v(25e^{5x} - 25e^{5x}) = 0$

$e^{5x}v'' + 10e^{5x}v' + v(0) = 0$

$e^{5x}v'' + 10e^{5x}v' = 0$

$u = v'$ $u' = v''$

$u'e^{5x} + 10ue^{5x} = 0$

$e^{5x}(u' + 10u) = 0$

$u' + 10u = 0$

$u' = -10u$

$\frac{du}{dx} = -10u$

$\frac{du}{u} = -10\,dx$

$\int \frac{du}{u} = -10 \int dx$

$\ln u = -10x$

$e^{\ln u} = e^{-10x}$

$u = e^{-10x}$

$v' = e^{-10x}$

$\int dv = \int e^{-10x} dx$

$v = -\frac{1}{10} e^{-10x}$

$\therefore y_2 = -\frac{1}{10} e^{-10x} e^{5x} = -\frac{1}{10} e^{-5x}$

Comprobacion y_2

$-\frac{25}{10} e^{-5x} + \frac{25}{10} e^{-5x} = 0$

$0 = 0$

y_2 si es solución

Solución general:

$C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$

2.- $x y'' + y' = 0$; $y_1 = \ln x$ $y_1' = \frac{1}{x}$ $y_2' = -x^{-2}$

$$\downarrow$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} = \ln x \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{(\ln x)^2} dx$$

$$= \ln x \int \frac{e^{\ln x^{-1}}}{(\ln x)^2} dx$$

$$= \ln x \int (\ln x)^{-2} x^{-1} dx \qquad u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$= \ln x \left[-\frac{1}{\ln x} \right] = -1$$

Comprobación y_2

$$0 + \frac{1}{x}(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Comprobación y_1

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Solución general:

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

3.- $3y'' + 2y' + y = 0$; $y = e^{rx}$

$$y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}y = 0$$

$$r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{4}{9} - \frac{4}{3} = \frac{4-12}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$r = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 4\left(\frac{1}{3}\right)}}{2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{3}}}{2}$$

$$r = \frac{-\frac{2}{3}}{2} \pm \frac{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}i}{2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}}i = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$y = e^{-x/3}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{3}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$$

4.- $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

y_h

$r^2 + 3 = 0$ $y = e^{rx}$

$r^2 = -3$ $r = \pm\sqrt{3}i$

$$y_h = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$$

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$y' = (Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$y'' = (A)e^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$Ae^{3x} + 6(Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} = -48x^2e^{3x}$$

$$A\cancel{e^{3x}} + (6Ax + 6B)\cancel{e^{3x}} + (12Ax^2 + 12Bx + 12C)\cancel{e^{3x}} = -48x^2\cancel{e^{3x}}$$

$$A + 6Ax + 6B + 12Ax^2 + 12Bx + 12C = -48x^2$$

$$12Ax^2 + 6Ax + 12Bx + A + 6B + 12C = -48x^2$$

$$12Ax^2 + (6A+12B)x + A + 6B + 12C = -48x^2$$

$$12Ax^2 = -48x^2$$
$$12A = -48$$
$$A = -\frac{48}{12} = -4$$

$$(6A+12B)x = 0$$
$$6A + 12B = 0$$
$$-24 + 12B = 0$$
$$12B = 24$$
$$B = \frac{24}{12} = 2$$

$$A + 6B + 12C = 0$$
$$-4 + 12 + 12C = 0$$
$$12C = -8$$
$$C = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

$$y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x + \left(-4x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right)e^{3x}$$

$5 \therefore y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

y_h

$r^2 + 3r + 2 = 0 \qquad y = e^{rx}$

$(r+2)(r+1) \qquad r_1 = -2 \qquad r_2 = -1$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$y_p = U_1 e^{-x} + U_2 e^{-2x}$

$$w = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-x}(-2e^{-2x}) - e^{-2x}(-e^{-x})$$

$w = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$

$$U_1 = -\int \frac{e^{-2x}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) dx}{-e^{-3x}} = \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad u = 1+e^x \quad du = e^x dx$$

$U_1 = \ln|1+e^x|$

$$U_2 = \int \frac{e^{-x}}{-e^{-3x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) dx = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$= -e^x + \ln(1+e^x)$

$y_p = \ln|1+e^x|\, e^{-x} + (-e^x + \ln(1+e^x))e^{-2x}$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \ln|1+e^x| e^{-x} + e^{-2x}(-e^x + \ln|1+e^x|)$