Aprendizagem Automática

FICHA N. 1 ENUNCIADO

Nome: Luis Carlos Semedo Da Fonseca
Número: A45125

1. Considere um conjunto de N realizações de uma variável aleatória $\mathbf{x}$, bi-dimensional. Considere ainda que este conjunto está num `numpy` array `X` de dimensão $2\times N$. Assuma que os seguintes comandos já foram executados:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import sqrtm
```

   (a) Estas instruções calculam a matriz de covariância dos dados (guardada em `Cx`)

      i. `Cx=np.cov(X,ddof=1)`

      ii.
      ```
      mx=np.mean(X,axis=1)
      Xn=(X.T-mx).T
      Ctmp=Xn*Xn
      Cx=Ctmp/(X.shape[1]-1)
      ```

      iii. `Cx=np.cov(X.T,rowvar=False,ddof=0)`

      iv.
      ```
      mx=np.mean(X,axis=0)
      Xn=X-mx
      Ctmp=np.dot(Xn,Xn.T)
      Cx=Ctmp/(X.shape[1]-1)
      ```

   (b) Assuma que o conjunto de N realizações de $\mathbf{x}$ foi obtido com o seguinte comando: `X=np.random.randn(2,N)` onde `N` é um inteiro previamente definido (com $N >> 2$). Considere uma transformação linear deste conjunto de modo a que os dados transformados tenham uma distribuição gaussiana com média $\mu_{\mathbf{y}} = [1, 2]^\top$ e matriz de covariância $\Sigma_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 73.56 & 13.92 \\ 13.92 & 57.34 \end{bmatrix}$. Os seguintes comandos geram os dados pretendidos (guardados em `Y`).

      i.
      ```
      A=np.array([[8.53,0.87],[0.87,7.52]])
      m=np.array([1, 2])
      Y=np.dot(A,X)+m[:,np.newaxis]
      ```

      ii.
      ```
      Cy=np.array([[73.56,13.92],[13.92,57.34]])
      A=sqrtm(Cy)
      m=np.array([1, 2])
      Y=np.dot(A,X)+m[:,np.newaxis]
      ```

      iii. Todas as respostas anteriores.

      iv. Nenhuma das respostas anteriores.

2. Considere o conjunto de 7 vetores bi-dimensionais, divididos em duas classes $\Omega = \{\varpi_0, \varpi_1\}$, representados na matriz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -5 & -3 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (os 4 primeiros vetores do conjunto pertencem à classe ϖ_0).

   (a) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

      i. O produto, $\Sigma_1\mu_1$, entre a matriz de covariância da classe ϖ_1 e o vetor de média da classe ϖ_1 é: $\mathbf{x} = [1.89, 4.33]^\top$.

ii. O produto, $\Sigma_1\mu_0$, entre a matriz de covariância da classe ϖ_1 e o vetor de média da classe ϖ_0 é: $\mathbf{x} = [-10.67, -14.50]^\top$.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

(b) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. O produto interno entre as médias das duas classes é: -12.83.

ii. A norma da média da classe ϖ_1 é: 5.00.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

(c) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. Considere a matriz $\mathbf{X}_1$ de 2×3, composta pelos vetores da classe ϖ_1. O resultado do produto matricial $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top$ é $\begin{bmatrix} 65.70 & -1.49 \\ -1.49 & 9.17 \end{bmatrix}$.

ii. A matriz de covariância da classe ϖ_0 é: $\begin{bmatrix} 2.89 & 0.68 \\ 0.68 & 5.20 \end{bmatrix}$.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

3. No ficheiro `A45125_Q003_data.p`, encontram-se um conjunto de dados bi-dimensionais divididos em 4 classes (índices de `0` a `3`). Há duas variáveis num dicionário: a chave `trueClass` contém os índices das classes dos dados, enquanto a chave `dados` contém os dados bidimensionais. Verificam-se as seguintes condições no conjunto de dados disponibilizado:

(a) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. A média dos dados é: $\begin{bmatrix} 1.84 \\ 1.64 \end{bmatrix}$.

ii. A matriz de covariância dos dados é: $\begin{bmatrix} 12.89 & 0.93 \\ 0.93 & 17.65 \end{bmatrix}$.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

(b) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. A probabilidade aprior da classe `0` é: 0.19.

ii. A matriz de covariância da classe `2` é: $\begin{bmatrix} 0.87 & -0.00 \\ -0.00 & 4.08 \end{bmatrix}$.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

(c) Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. A média da classe `0` é: $\begin{bmatrix} -1.31 \\ 3.75 \end{bmatrix}$.

ii. A média da classe `2` é: $\begin{bmatrix} 3.64 \\ -5.81 \end{bmatrix}$.

iii. Todas as respostas anteriores.

iv. Nenhuma das respostas anteriores.

(d) Considere que μ_i e Σ_i com $i = 0, \ldots, 3$ são os vetores de média e as matrizes de covariância das classes. Para esta alínea, arredonde os valores pedidos a 2 casas décimais.

i. O vetor resultante do protudo $\Sigma_0 \mu_2$, entre a matriz de covariância da classe $\texttt{0}$ e o vetor de média da classe $\texttt{2}$ é: $\begin{bmatrix} 1.94 \\ -5.03 \end{bmatrix}$.

ii. O produto interno entre as médias das classes $\texttt{0}$ e $\texttt{2}$ é: -15.42.

iii. O resultado do produto matricial $\mu_0^\top \Sigma_1 \mu_2$ é: -17.65.

iv. O determinante do produto matricial entre as matrizes de covariância das classes $\texttt{0}$ e $\texttt{3}$ é: 4.24.