II – Espectros
Representação de um sinal no domínio da Frequência

Processamento Digital de Sinais

André Lourenço
GonçaloMarques
Isabel Rodrigues

Sumário

- Espectro de soma de sinusóides
- Exemplos (Batimentos, Modelação em amplitude)
- Sinais periódicos
  - Série de Fourier
- Onda Quadrada e Triangular
- Propriedades da Série de Fourier
- Espectro de sinais não periódicos
- FFT
- Representação Tempo-Frequência
- Transformada de Fourier

Espectro de Somas de Sinusóides

- Sinusóides: importantes como “*building blocks*” para a síntese de sinais mais complicados.

- Sinais mais complicados descritos como soma de sinusoides com diferentes frequências :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos\left(2\pi f_k\, t + \phi_k\right)$$

ou usando *fasores*

$$X_0 = A_0 \in \mathbb{R}$$

$$X_k = A_k e^{j\phi_k}$$

$$x(t) = X_0 + \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{N} X_k e^{j 2\pi f_k\, t} \right\}$$

Esta forma de representação permite ver a relação entre as componentes de diferentes frequências e amplitudes.

Espectro de Somas de Sinusóides

- Forma alternativa, empregando fórmula de Euler inversa:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right\}$$

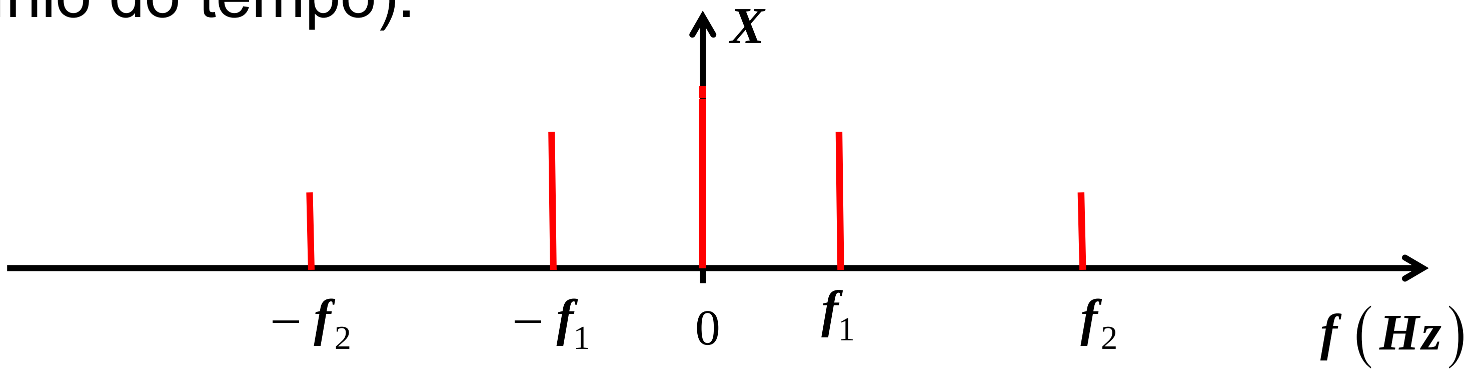
- Cada sinusóide presente na soma decompõe-se em **dois *fasores rotativos***:
  - um com uma frequência positiva f_k
  - e outro com uma frequência negativa $-f_k$

Espectro de Somas de Sinusóides

- Define-se o espectro (**bilateral**) deste sinal como sendo o conjunto dos 2N+1 pares (*frequência*, *fasor*), N frequências negativas, N positivas e uma nula:

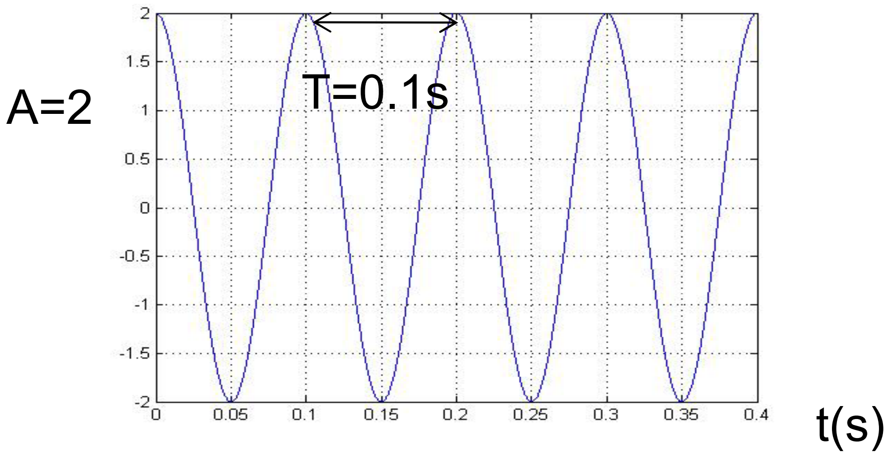
$$\left\{ \left(0, \boldsymbol{X}_0\right); \left(\boldsymbol{f}_1, \frac{\boldsymbol{X}_1}{2}\right); \left(-\boldsymbol{f}_1, \frac{\boldsymbol{X}_1^*}{2}\right); \ \cdots \ ; \left(\boldsymbol{f}_N, \frac{\boldsymbol{X}_N}{2}\right); \left(-\boldsymbol{f}_N, \frac{\boldsymbol{X}_N^*}{2}\right) \right\}$$

- Diz-se que o espectro fornece a representação do sinal no domínio da frequência (alternativa à representação do sinal no domínio do tempo).



Espectro de Somas de Sinusóides

- Domínio do Tempo



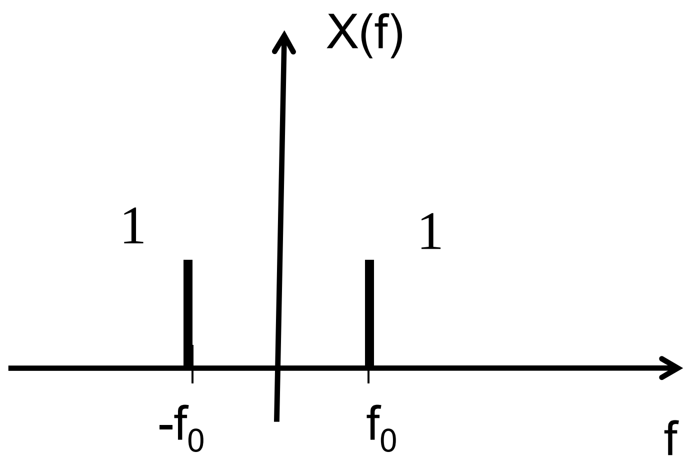
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

S.Freq. $\downarrow$

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\boldsymbol{A}}{2}\boldsymbol{e}^{j\theta} \quad , \quad \boldsymbol{X}_{-1} = \frac{\boldsymbol{A}}{2}\boldsymbol{e}^{-j\theta}$$

- Domínio da Frequência

Espectro



f – frequencia em Hz (ciclos/s)
w=2πf frequencia angular

$f_0 = 1/\ T_0 = 10\text{Hz}$

Exemplo

- Obtenha a representação gráfica do espectro do sinal:

$$x(t) = 10 + 14\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(500\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exprimir o sinal por meio de fasores:

$$x(t) = 10 + 14\cos\left(2\pi 100 t - \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(2\pi 250 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

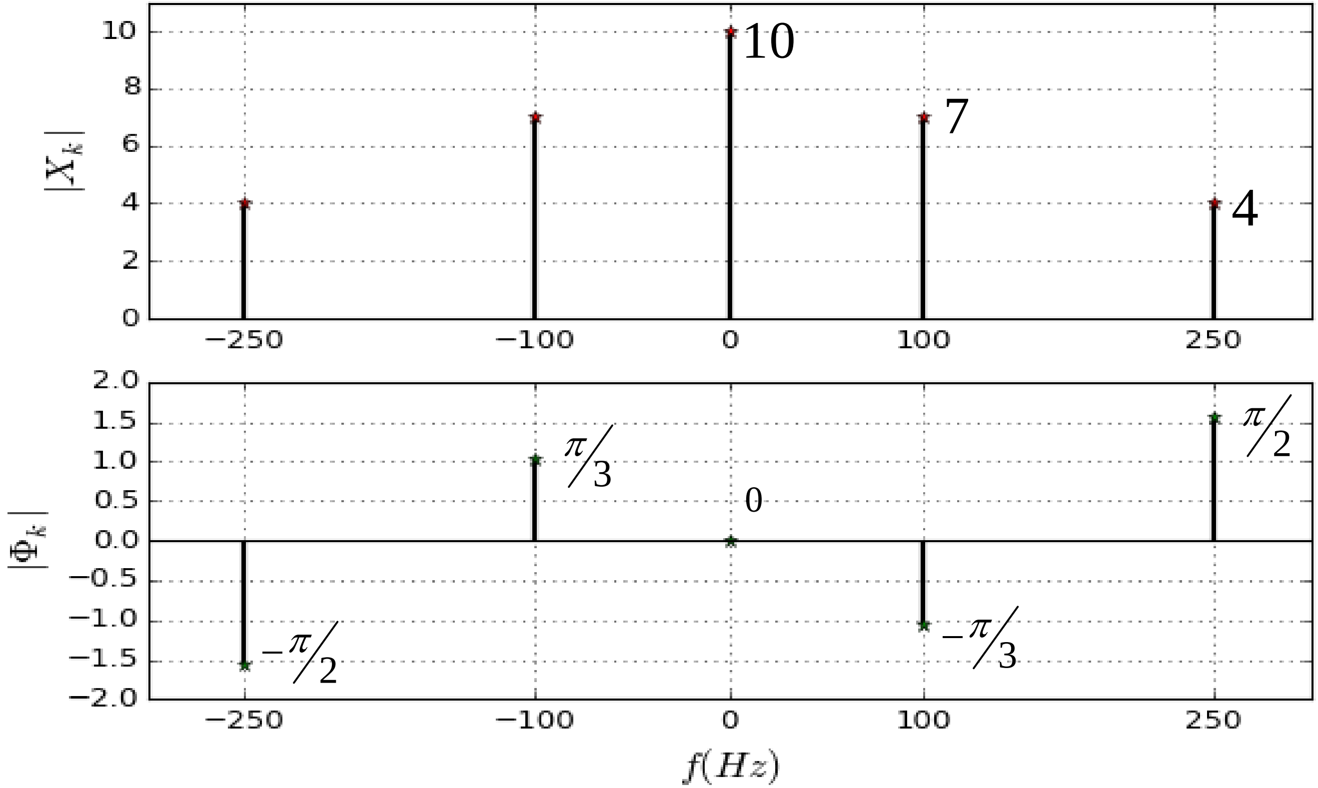
$$x(t) = 10e^{j0} + \frac{14}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi 100 t} + \frac{14}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi 100 t} +$$
$$+ \frac{8}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi 250 t} + \frac{8}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\pi 250 t}$$

Espectro

$$\left\{(10,0),\left(7e^{-j\frac{\pi}{3}},100\right),\left(7e^{j\frac{\pi}{3}},-100\right),\left(4e^{j\frac{\pi}{2}},250\right),\left(4e^{-j\frac{\pi}{2}},-250\right)\right\}$$

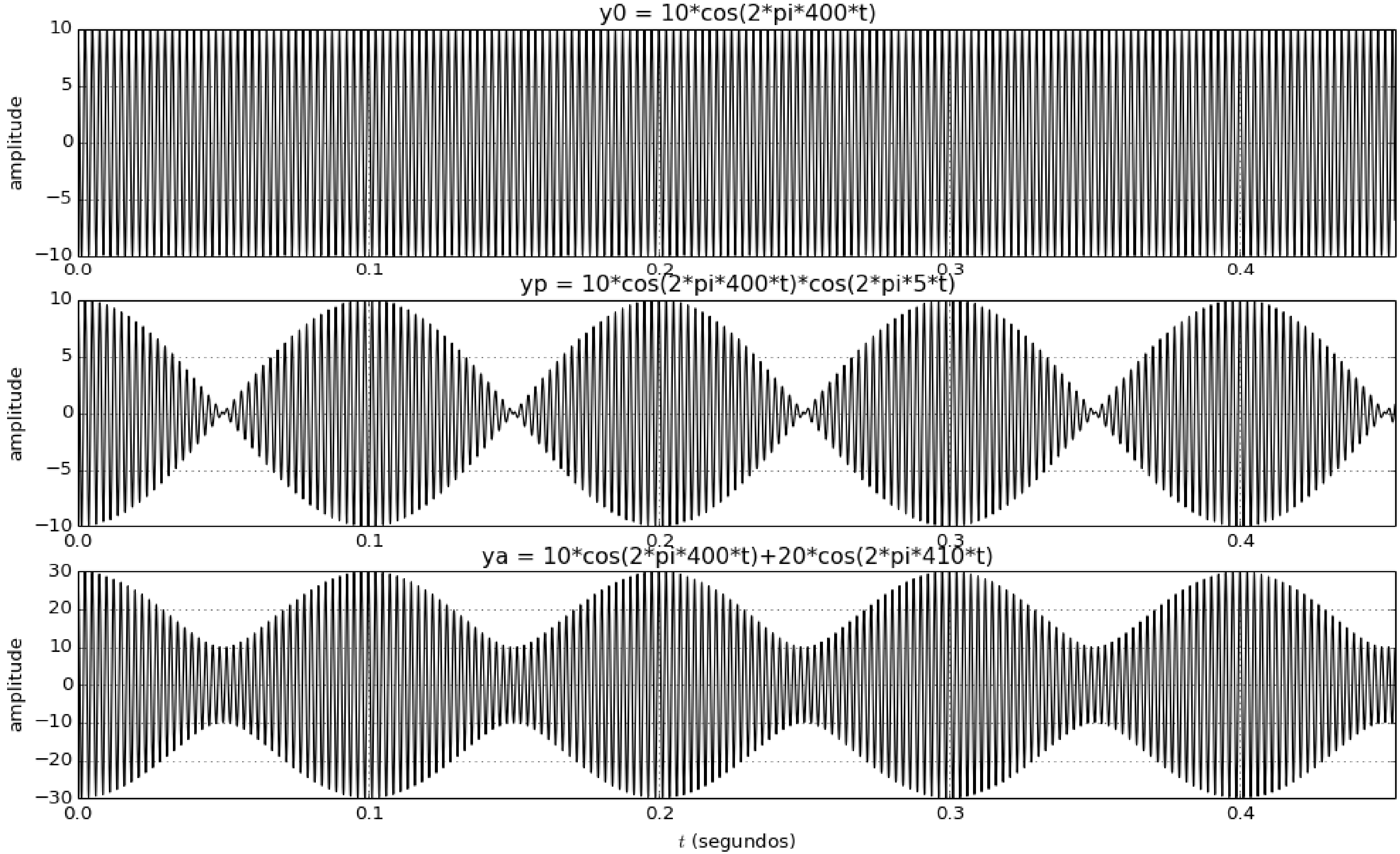
Componente contínua $\longrightarrow$ DC (direct current) comp. com freq nula: $10 = 10e^{j0t}$

Representação gráfica dos espectros de amplitude e fase



- É possível representar qualquer sinal ondulatório, mesmo descontínuo, como uma soma de exponenciais complexas, cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência chamada **frequência fundamental.**
- Também sinais não periódicos podem ser representados por sobreposição de exponenciais complexas: base da análise de Fourier.

- Notas:
  - Beat note (batimento) – produto de 2 sinusoides com frequências de ordens de grandeza muito diferentes (sendo a mais alta a portadora) ou soma de 2 sinusoides com frequências quase iguais
  - O produto de sinusoides é usado na modulação AM de rádio.


y0 = 10*cos(2*pi*400*t)
yp = 10*cos(2*pi*400*t)*cos(2*pi*5*t)
ya = 10*cos(2*pi*400*t)+20*cos(2*pi*410*t)
amplitude
10
5
0
−5
−10
30
20
−20
−30
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
t (segundos)

Exemplo:
Ex_ouve_cos_beat.py

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Feb 24 19:54:51 2016
@author: Isabel
"""

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.io.wavfile as wav
from soundPlay  import soundPlay #módulo para aceder
#PDS- ouvir sinais                #ao porto de áudio
fs=11025
t=np.arange(0, 75371)/np.float(fs)
#puro
y0 = 10*np.cos(2*np.pi*500*t)
#com batimento modul AM
yp = 10*np.cos(2*np.pi*500*t)*np.cos(2*np.pi*5*t)
#com batimento aditivo
ya = 10*np.cos(2*np.pi*500*t)+20*np.cos(2*np.pi*510*t)

y_sound0=np.int8(np.round(y0*(2**15)))
y_soundp=np.int8(np.round(yp*(2**15)))
y_sounda=np.int8(np.round(ya*(2**15)))

fig = plt.figure('cos1',facecolor='w',figsize=(15,10))

ay1 = fig.add_subplot(311)
plt.plot(t[0:5000], y0[0:5000], 'k');
plt.grid('on')    #grelha
plt.title('y0 = 10*cos(2*pi*500*t)')

```

```
ayp = fig.add_subplot(312)
plt.plot(t[0:5000], yp[0:5000], 'k');
plt.grid('on')     #grelha
plt.title('yp = 10*cos(2*pi*500*t)*cos(2*pi*5*t)')

aya = fig.add_subplot(313)
plt.plot(t[0:5000], ya[0:5000], 'k');
plt.grid('on')     #grelha
plt.title('ya = 10*cos(2*pi*500*t)+20*cos(2*pi*510*t)')

plt.show()
soundPlay(y0,fs)
soundPlay(yp,fs)
soundPlay(ya,fs)
wav.write('cos0.wav',fs ,y_sound0)
wav.write('cosp.wav',fs ,y_soundp)
wav.write('cosa.wav',fs ,y_sounda)
```

Batimentos-beat note

- Quando se somam duas sinusoides com frequências praticamente idênticas:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

$$f_1 = f_c - f_\Delta, \quad f_2 = f_c + f_\Delta$$

$$f_\Delta \ll f_c$$

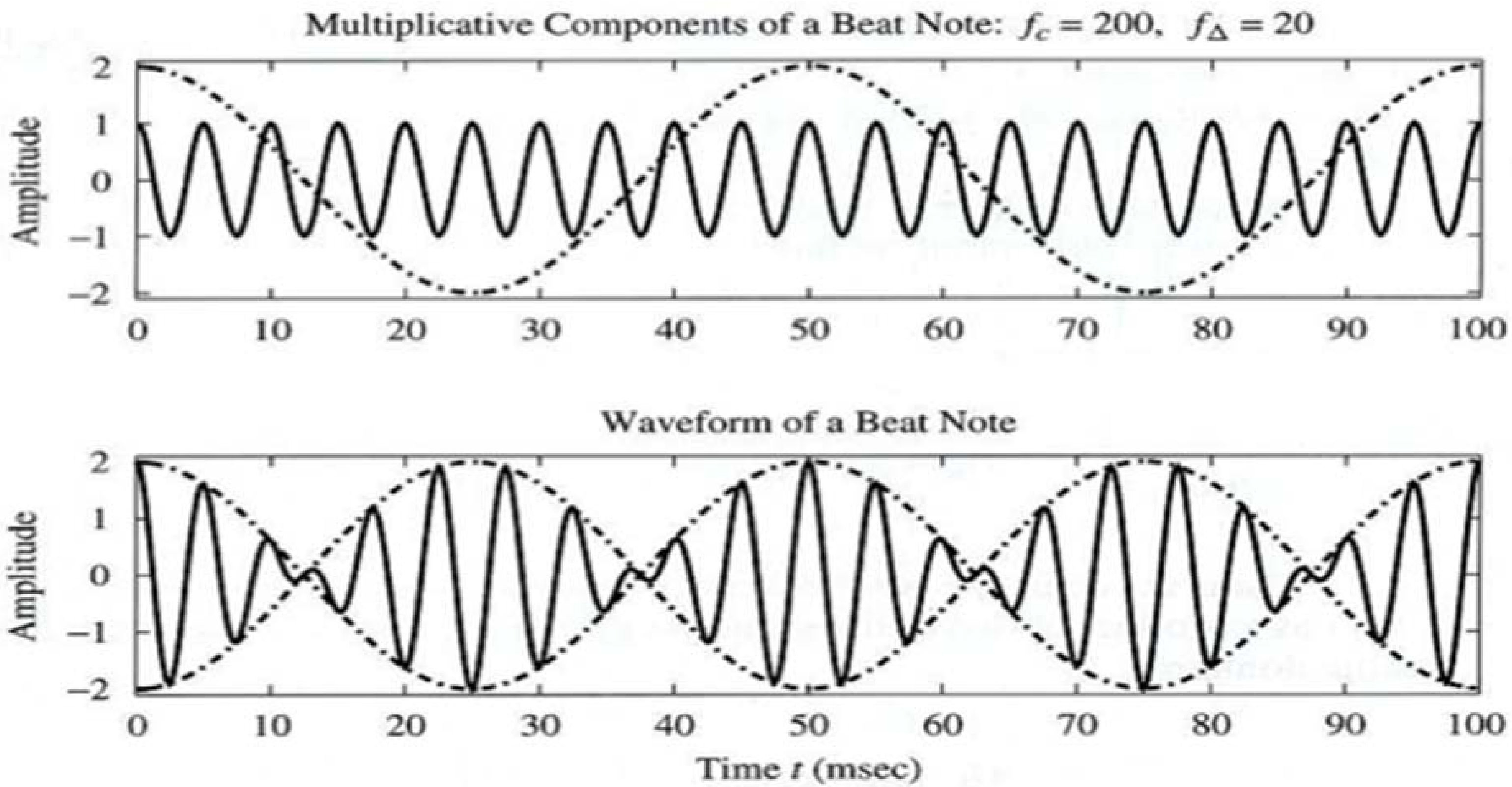


Figure 3.3 Beat note with $f_c = 200$ Hz and $f_\Delta = 20$ Hz. The time interval between nulls is $\frac{1}{2}(1/f_\Delta) = 25$ msec, which is dictated by the frequency difference.

Batimentos

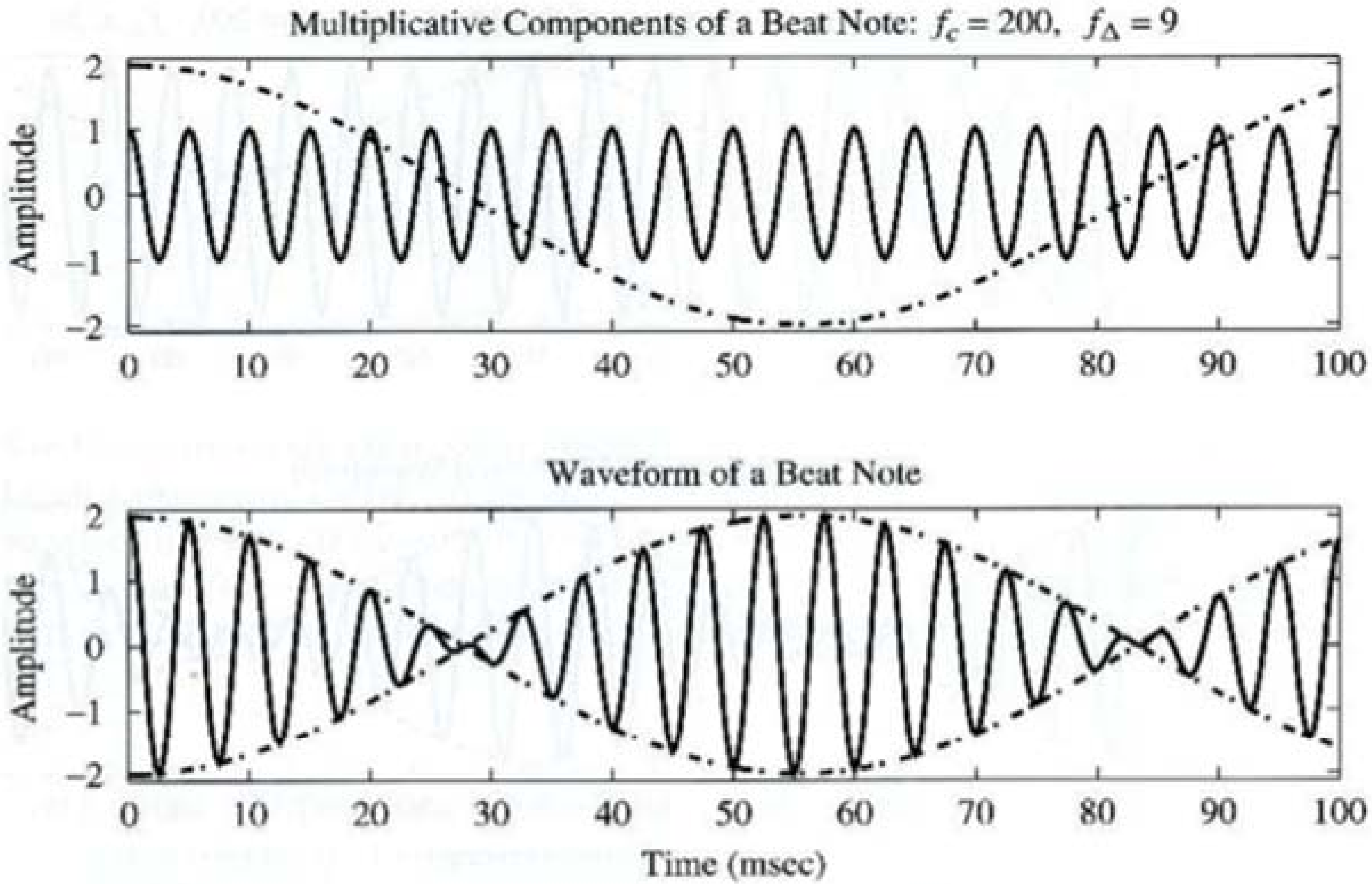


Figure 3.4 Beat note with $f_c = 200$ Hz and $f_\Delta = 9$ Hz. Nulls are now $\frac{1}{2}(1/f_\Delta) = 55.6$ msec. apart.

Modulação em Amplitude (AM)

- Técnica usada para difusão radiofónica (banda AM):

$$x(t) = v(t) \times \cos(2\pi f_c t)$$

- Uso de uma frequência mais elevada f_c (portadora), para transmitir um sinal $v(t)$ de música ou voz de frequência mais baixa .
- Exemplo:

$$x(t) = \overbrace{\left(5 + 2\cos(40\pi t)\right)}^{v(t)} \cos(400\pi t)$$

$$f_c = 200Hz$$

O efeito deste produto é modular a amplitude do envelope da onda portadora.
A principal diferença entre este sinal AM e o batimento é que o envelope nunca vai a zero.

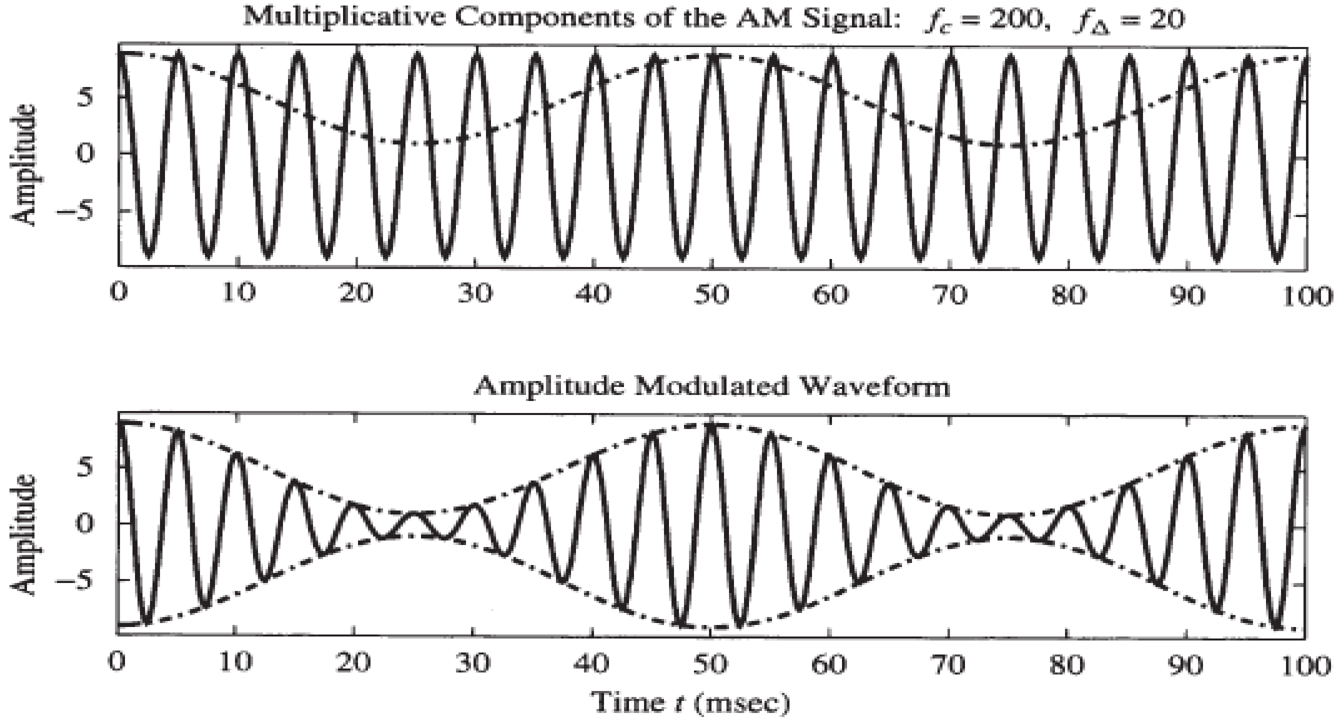


Figure 3.5 AM signal $\boxed{f_c = 200 \text{ Hz and } f_\Delta = 20 \text{ Hz.}}$ The modulating signal is clearly visible.

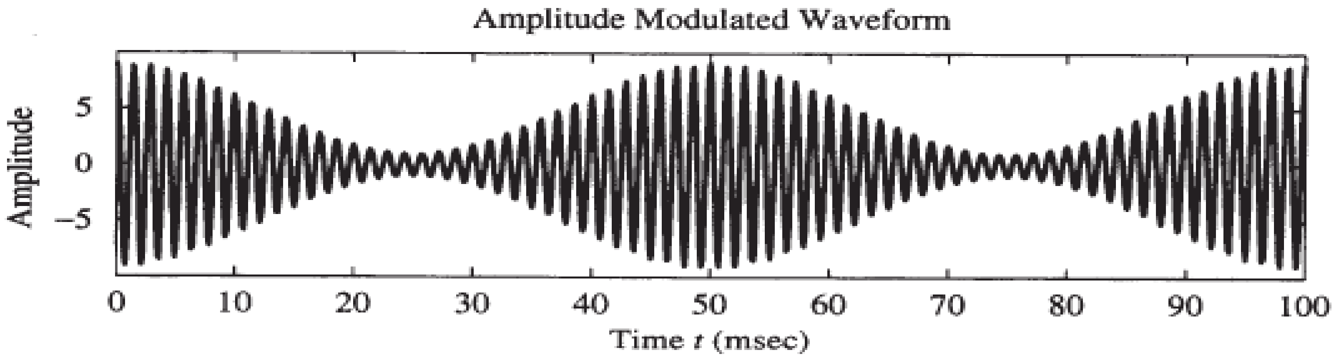


Figure 3.6 AM signal $\boxed{f_c = 700 \text{ Hz and } f_\Delta = 20 \text{ Hz.}}$ The higher carrier frequency makes it possible to see the outline of the modulating cosine without drawing the envelope.

Exemplo:

- Calcule e represente o **espectro** do sinal:

$$x(t) = \sin(10\pi t)\cos(\pi t)$$

- Para calcular o espectro temos que definir o sinal como uma soma:

$$x(t) = \sin(10\pi t)\cos(\pi t) = \cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi t) =$$

$$= \left(\frac{e^{j10\pi t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j10\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}}}{2}\right)\left(\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}\right) =$$

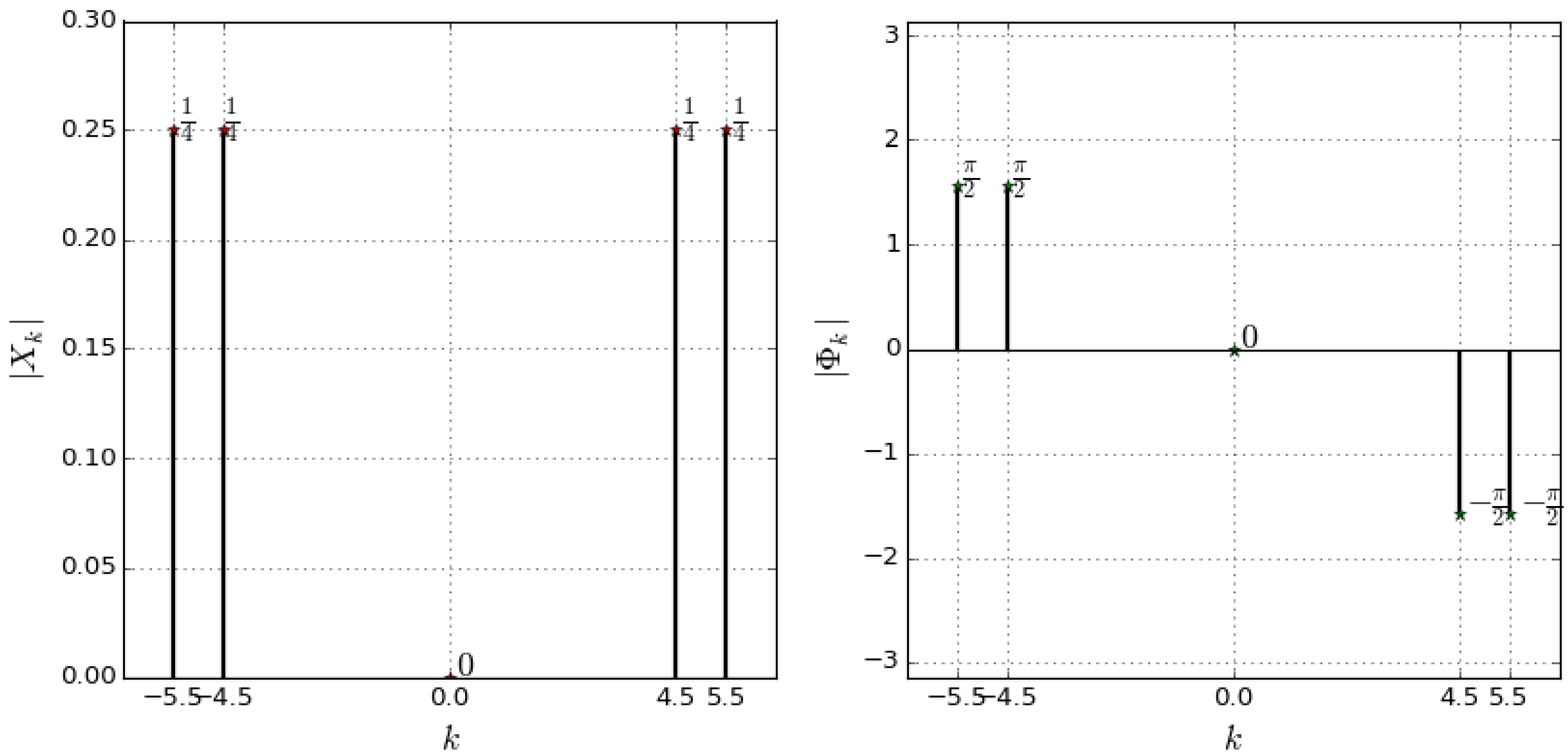
$$= \frac{1}{4}\left[e^{j11\pi t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{j9\pi t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j9\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{-j11\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j11\pi t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j11\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{e^{j9\pi t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j9\pi t} e^{j\frac{\pi}{2}}}{2}\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(11\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(9\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

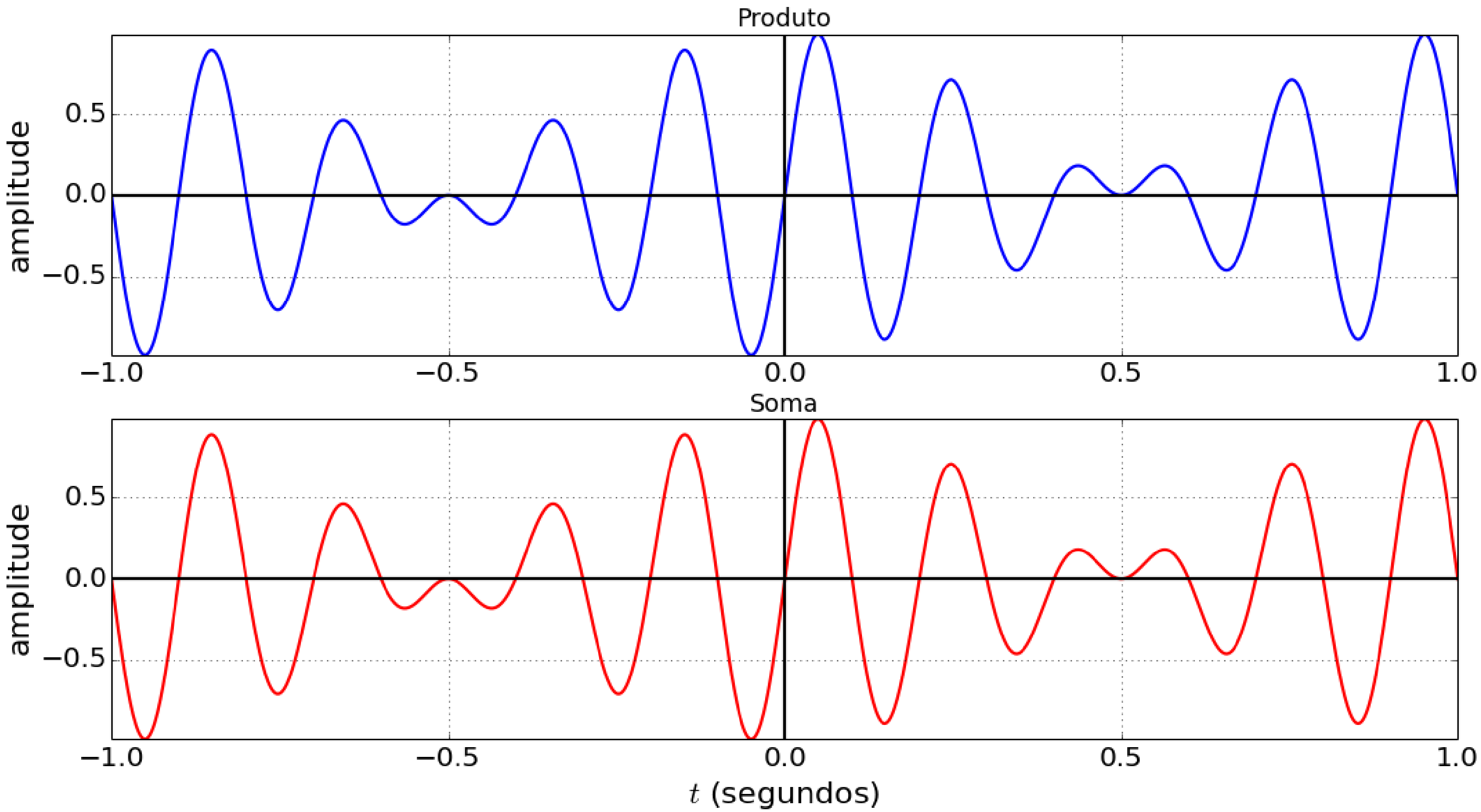
$$=\frac{1}{2}\cos\left(2\pi(5.5)t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi(4.5)t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left\{(0,0),\left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}},5.5\right),\left(\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}},-5.5\right),\left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}},4.5\right),\left(\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}},-4.5\right)\right\}$$



- Usando a representação gráfica (plot), verifique que:

$$\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi t)=\frac{1}{2}\cos\left(2\pi(5.5)t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi(4.5)t-\frac{\pi}{2}\right)$$



são iguais

Script deste plot nos 2 slides seguintes

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
#representar versão amostrada de sinusóide
font = {'family' : 'serif',
        'color'  : 'darkred',
        'weight' : 'bold',
        'size'   : 18,
        }

t_start=-1
t_end=1
t=np.linspace(t_start,t_end,1000) #1000pts
fc1=5 #frequência da sinosóide
fc2=0.5 #frequência da sinosóide
A1=1
x_t1=A1*np.cos(2*np.pi*fc1*t-0.5*np.pi) #fc Hz
x_t2=A1*np.cos(2*np.pi*fc2*t) #fc Hz
x_t=x_t1*x_t2

fc=440 #frequência da sinosóide
fc3=5.5 #frequência da sinosóide
fc4=4.5 #frequência da sinosóide
A2=0.5
y_t1=A2*np.cos(2*np.pi*fc3*t-0.5*np.pi) #fc Hz
y_t2=A2*np.cos(2*np.pi*fc4*t-0.5*np.pi) #fc Hz
y_t=y_t1+y_t2

plt.figure(facecolor='w',figsize=(12,8))
ax1=plt.subplot(211)
plt.plot(t,x_t,'b',lw=2)
plt.plot([t_start, t_end],[0.0, 0.0],'k',lw=2)
plt.plot([0.0, 0.0],[np.min(x_t), np.max(x_t)],'k',lw=2)
for label in ax1.xaxis.get_ticklabels():
```

```
    # label is a Text instance
    label.set_color('black')
    label.set_rotation(0)
    label.set_fontsize(18)
for label in ax1.yaxis.get_ticklabels():
    # label is a Text instance
    label.set_color('black')
    label.set_rotation(0)
    label.set_fontsize(18)
plt.axis([t_start,t_end,np.min(x_t),np.max(x_t)])  #eixo
plt.grid('on')     #grelha
plt.ylabel('amplitude',fontsize=20)
plt.title('Produto' ,fontsize=16)

ax2=plt.subplot(212)
plt.plot(t,y_t,'r',lw=2)
plt.plot([t_start, t_end],[0.0, 0.0],'k',lw=2)
plt.plot([0.0, 0.0],[np.min(y_t), np.max(y_t)],'k',lw=2)
for label in ax2.xaxis.get_ticklabels():
    label.set_color('black')
    label.set_rotation(0)
    label.set_fontsize(18)
for label in ax2.yaxis.get_ticklabels():
    # label is a Text instance
    label.set_color('black')
    label.set_rotation(0)
    label.set_fontsize(18)
plt.axis([t_start,t_end,np.min(x_t),np.max(x_t)])  #eixo
plt.grid('on')     #grelha
plt.xlabel(r'$t$ (segundos)',fontsize=20)
plt.ylabel('amplitude',fontsize=20)
plt.title('Soma' ,fontsize=16)
```

Em resumo:

•Quando sinusoides da mesma frequência são adicionadas, a soma é uma onda sinusoidal da mesma frequência.

•Somar sinais sinusoidais da mesma frequência faz-se facilmente adicionando os respectivos fasores complexos e convertendo para a forma de cosseno.

Nova situação:

•Somar ondas sinusoidais com frequências diferentes mas relacionadas harmonicamente:

•Frequência fundamental f_0 e suas harmónicas $f_k = kf_0$

Nota: Se z se puder escrever como z=ax+by, com a,b reais e x e y funções, vetores do plano ou espaço, etc, diz-se que z é combinação linear de x e y por meio dos escalares a e b.

Sinais Periódicos

- Combinação de sinusóides com frequências harmónicas:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Frequência fundamental: f_o
- Frequência da componente k (ou harmónica-k): $f_k = k f_0$

- Em termos de fasores:

$$\boldsymbol{x(t) = X_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\}} \qquad \boldsymbol{X_k = A_k e^{j\phi_k}}$$

Sinais Periódicos

- Esta combinação representa um sinal periódico com período fundamental T_0

$$x\left(t+T_0\right)=x\left(t\right)$$

- Qualquer sinal periódico pode ser representado a partir desta combinação linear que pode ter infinitas parcelas, que se denomina *Série de Fourier.*

Jean Baptiste Joseph Fourier

(1768-1830)

Ex.: Som ah

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ X_2 e^{j2\pi 2 f_0 t} + X_4 e^{j2\pi 4 f_0 t} + X_5 e^{j2\pi 5 f_0 t} + \right.$$

$$\left. + X_{16} e^{j2\pi k 16 f_0 t} + X_{17} e^{j2\pi 17 f_0 t} \right\}$$

com: $f_0 = 100\,Hz$

A onda resultante da soma tem período $T_0 = \frac{1}{100} = 10\,ms$

Script ouve_ahh

ouve_ahh

Sinais Periódicos

- É possível sintetizar uma onda periódica através da soma de sinusoides com frequências harmónicas da frequência fundamental.
- Este é o princípio da série de Fourier.

- Equação de **Síntese**: partir dos $\boldsymbol{X_k}$ para obter $\boldsymbol{x(t)}$

  (Síntese de Fourier)

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \Leftrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Equação de **Análise**: partir de $x(t)$ e obter X_k (Análise de Fourier)

- Com a escolha conveniente de X_k é possível aproximar ondas quadradas, triangulares, etc. pela série de Fourier

- **Quais os X_k convenientes tais que**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

???

▪Equação de Análise: partir de $x(t)$ e obter X_k

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

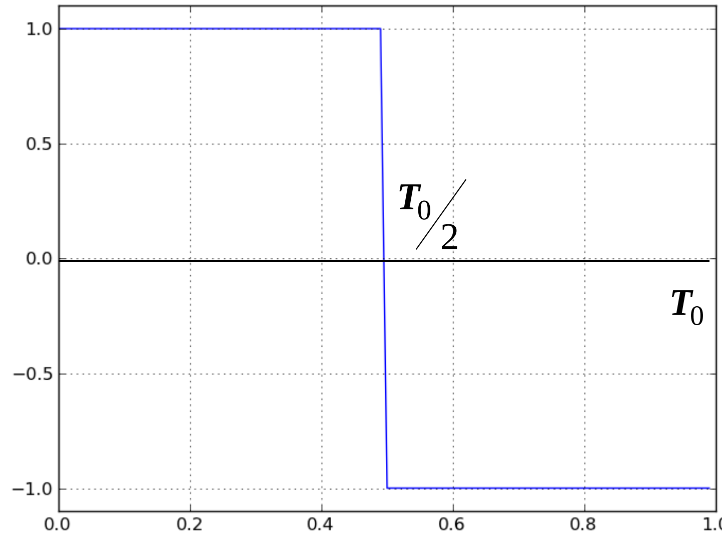
$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt$$

Para k=0 tem-se a componente contínua (DC) que é o valor médio de x(t) entre 0 e T_0 (lembrar MAE…)

Equação de Análise: Onda Quadrada

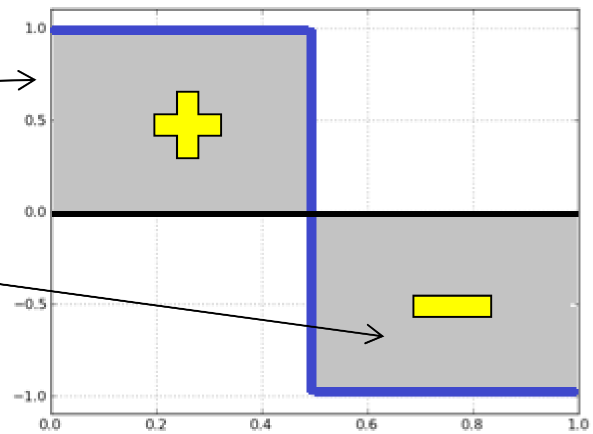
- Definição de um período

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le t < \frac{1}{2} T_0 \\ -1 \ , & \frac{1}{2} T_0 \le t < T_0 \end{cases}$$



Cálculo de X_0

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{T_0/2} 1 dt + \int_{T_0/2}^{T_0} -1 dt \right) = 0$$

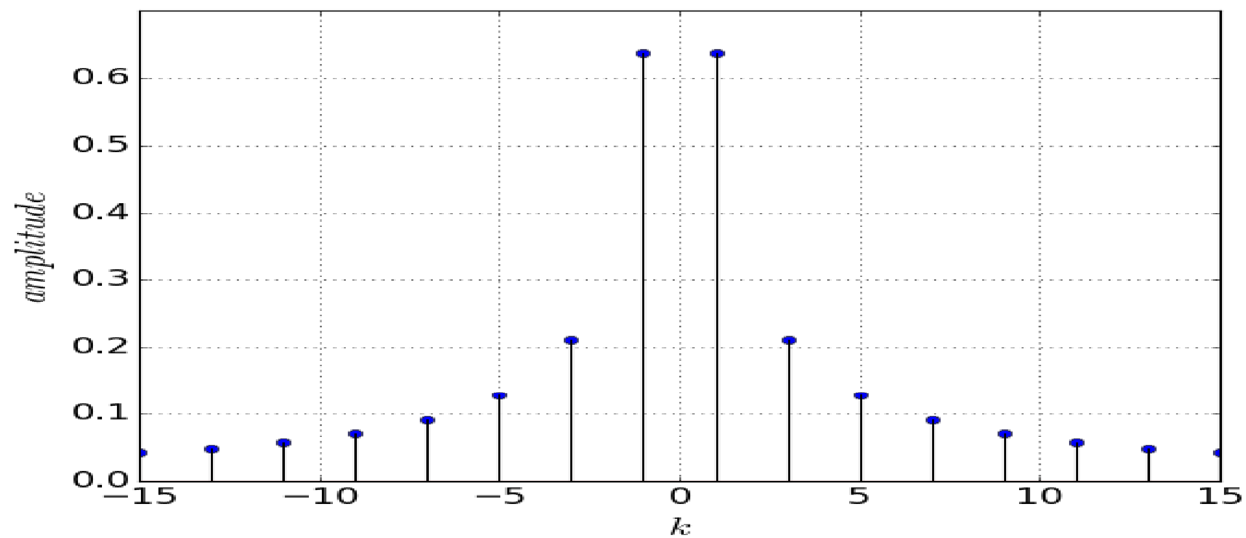


Onda Quadrada (cont.)

Cálculo de X_k

$$X_k = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{T_0/2} (1) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \int_{T_0/2}^{T_0} (-1) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) =$$

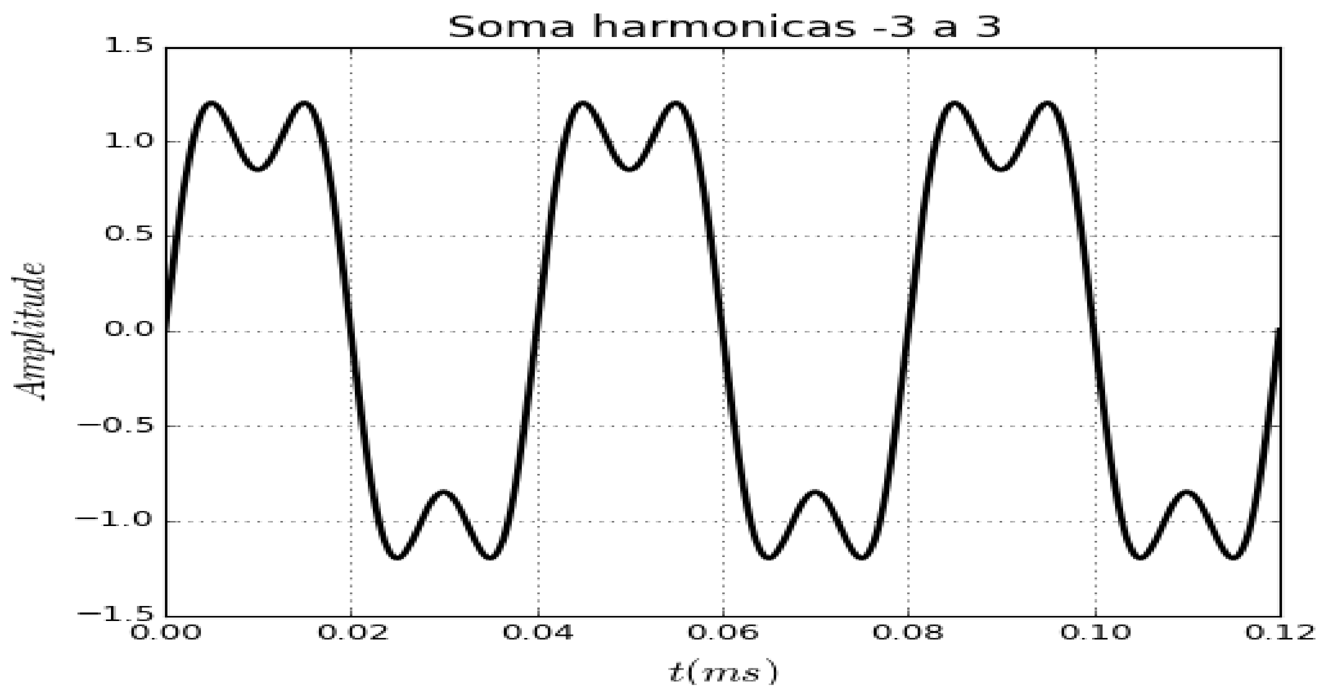
$$= \frac{\left(1-(-1)^k\right)}{j\pi k} = \begin{cases} \dfrac{2}{j\pi k} & , \quad k = \pm 1, \pm 3, \ldots \\ 0 & , \quad k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{cases}$$



$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$

- Soma da 1ª e 3ª harmónicas com $f_0 = 25Hz$

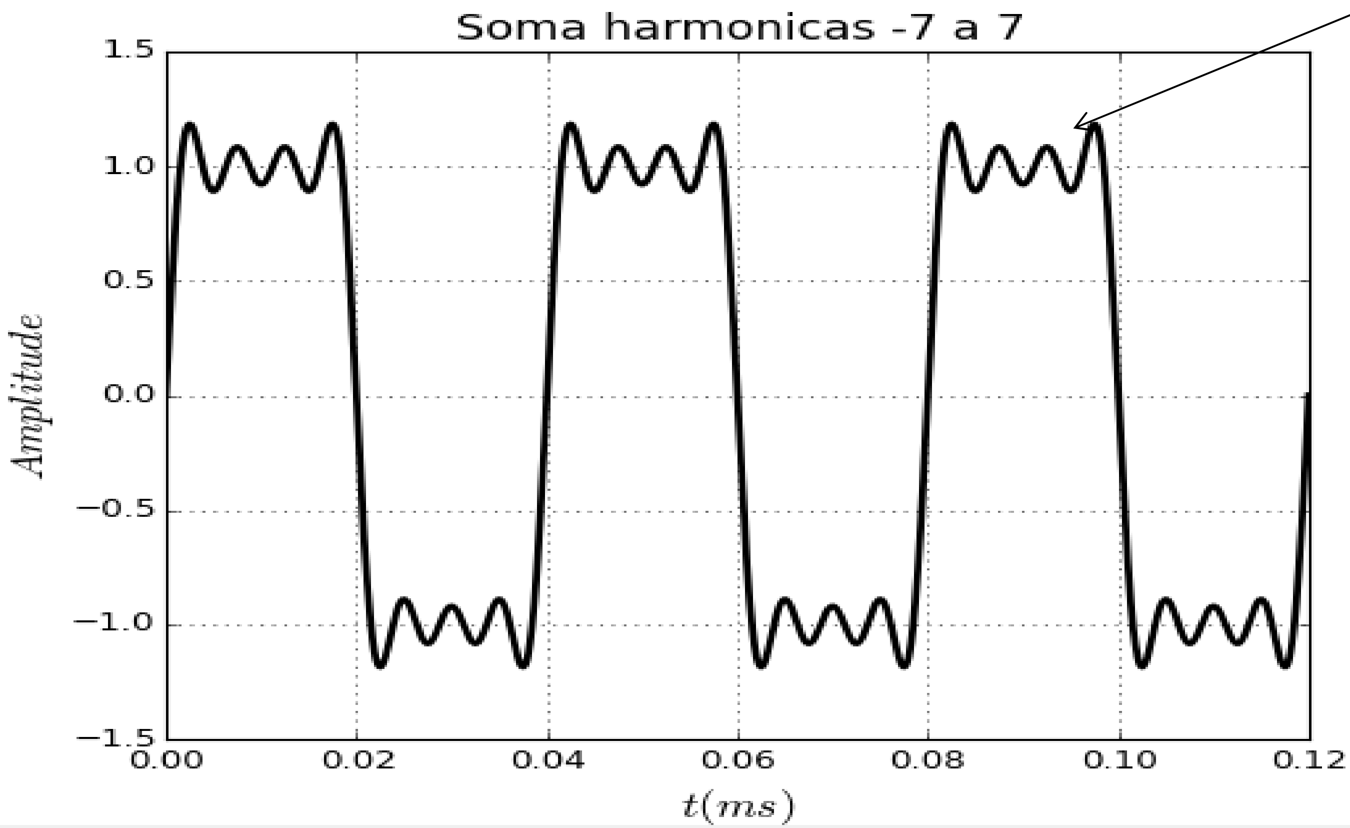
$$x_{1+3}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-3 \\ k \text{ ímpar}}}^{3} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$



- Soma das harmónicas -7 a 7 com

$$x_{-7a7}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-7 \\ k \text{ impar}}}^{7} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \qquad f_0 = 25Hz$$

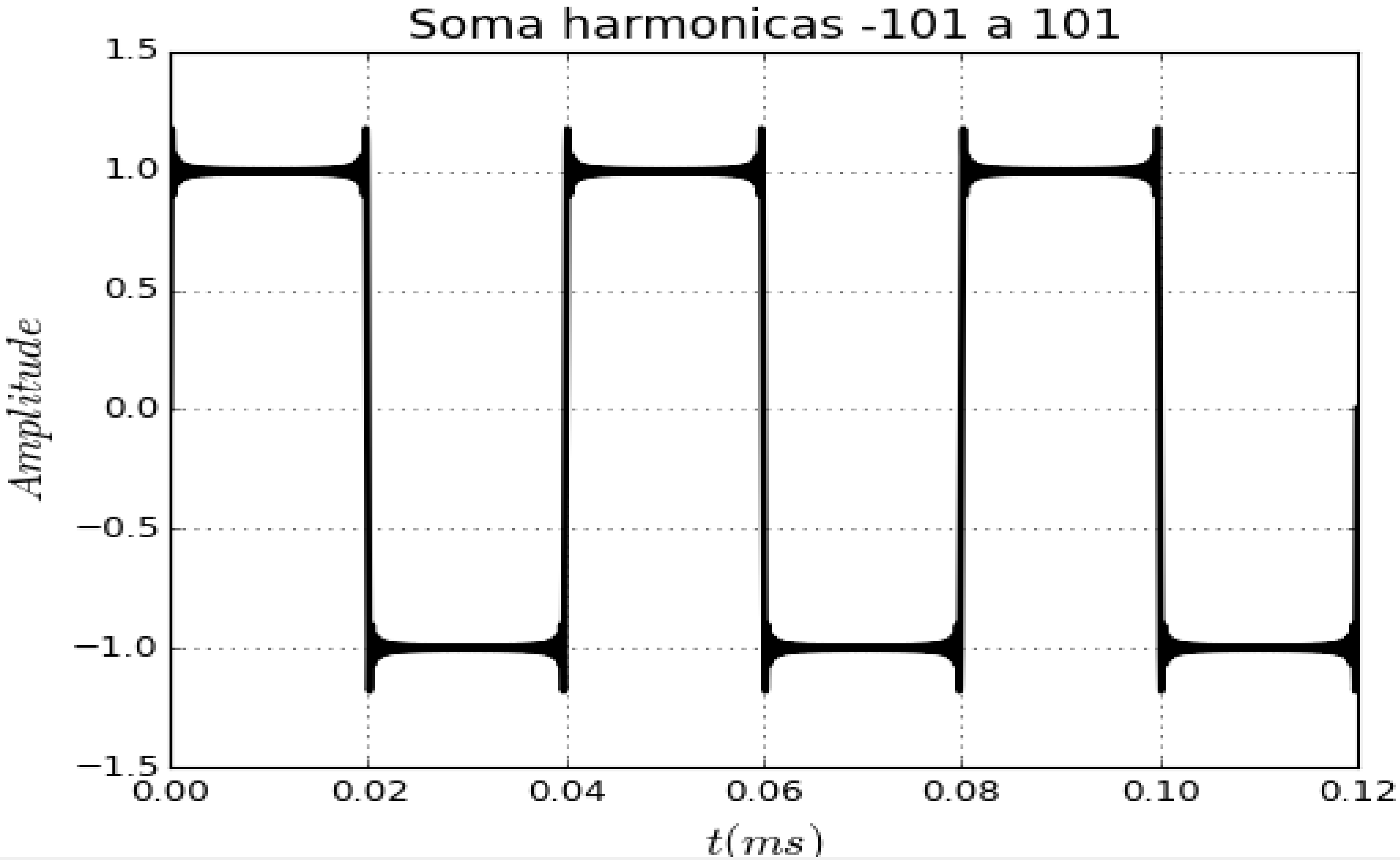
Efeito de Gibbs



The Gibbs phenomenon involves both the fact that Fourier sums overshoot at a jump discontinuity, and that this overshoot does not die out as more terms are added to the sum.

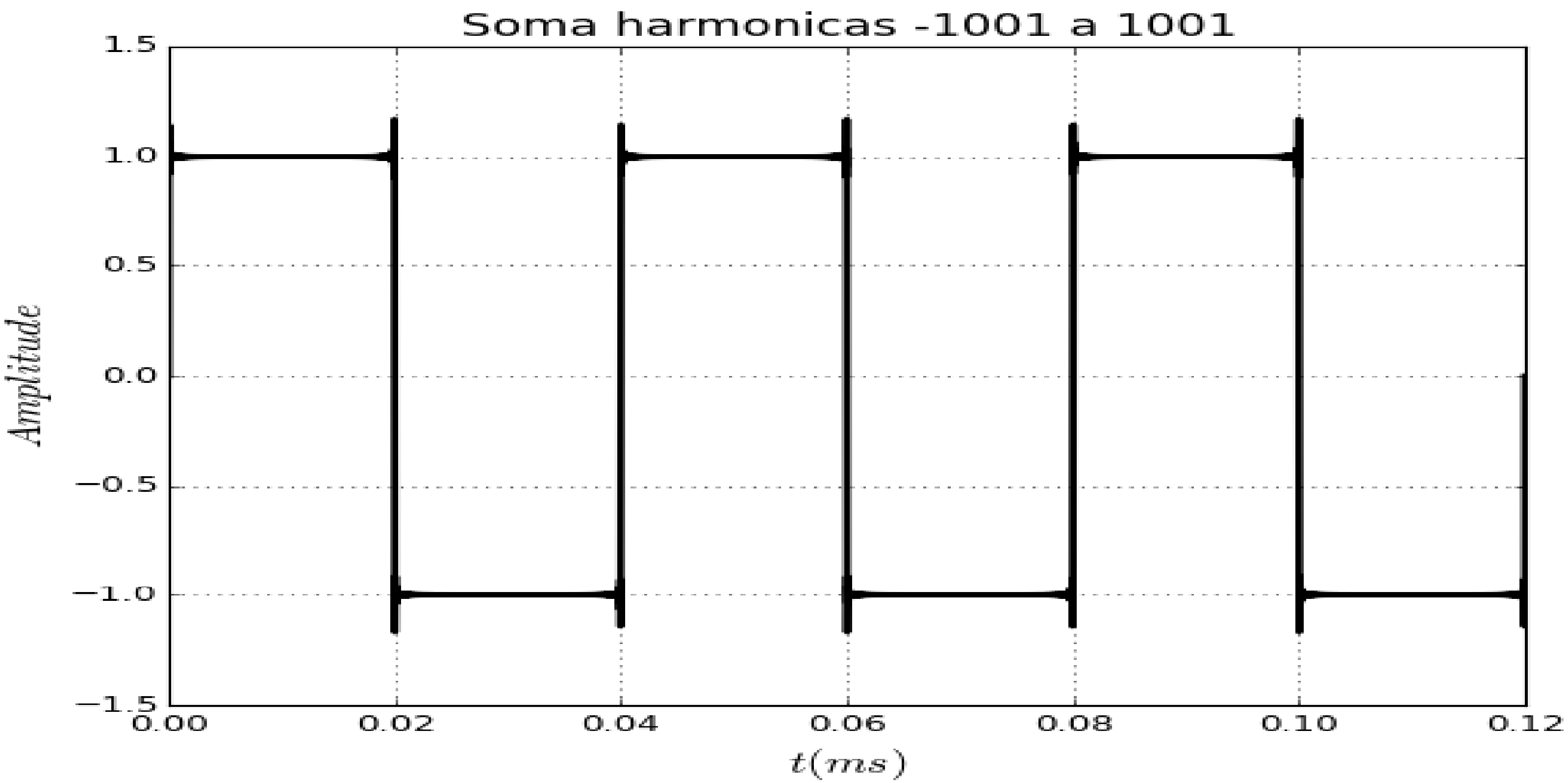
- Soma das harmónicas -101 a 101 com

$$x_{-101a101}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-101 \\ k \text{ impar}}}^{101} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \qquad f_0 = 25Hz$$



- Soma das harmónicas -1001 até à 1001 com

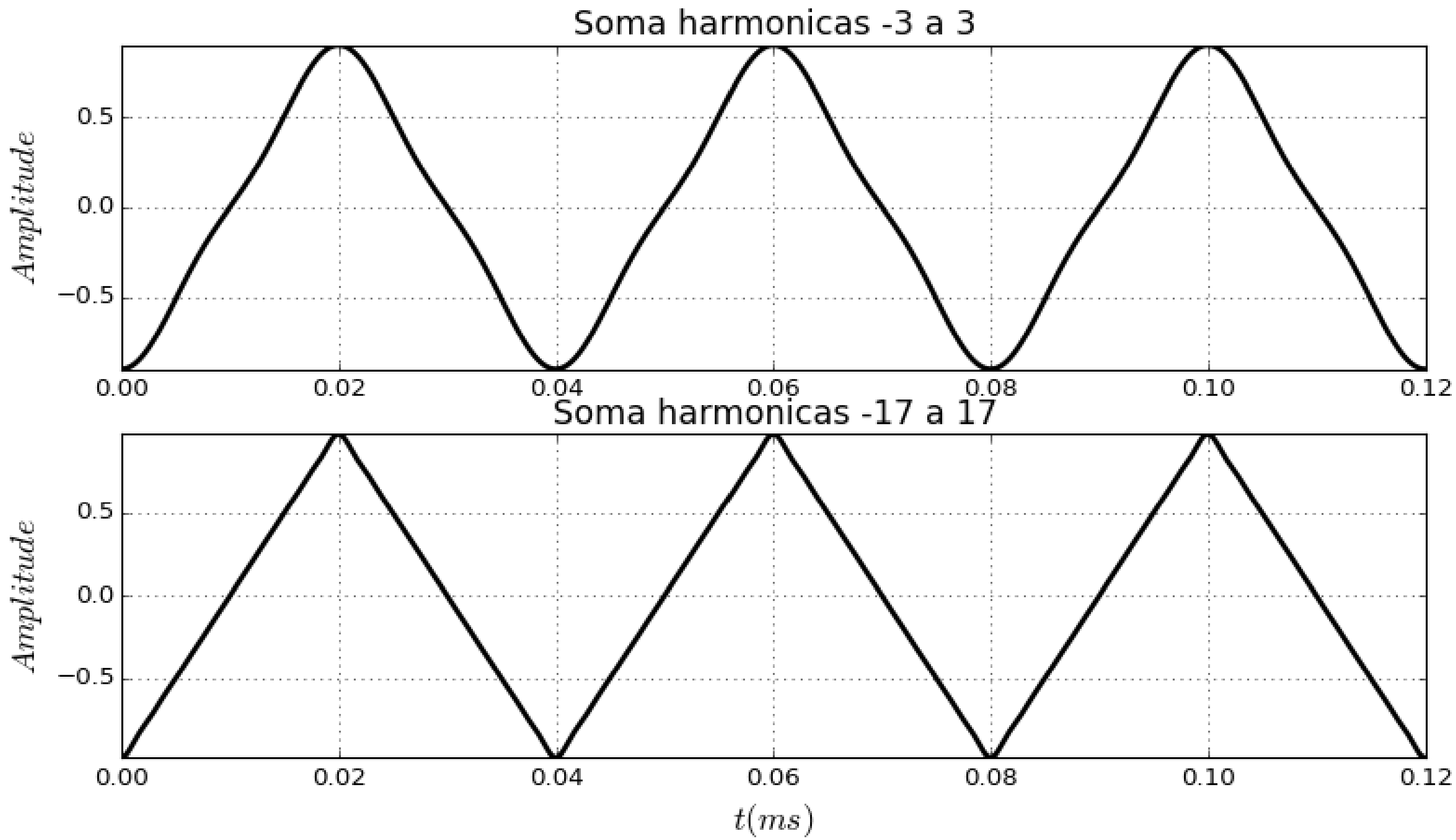
$$x_{-1001a1001}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-1001 \\ k \text{ impar}}}^{1001} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \qquad f_0 = 25Hz$$



Onda Triangular:
Quadrado das amplitude da onda quadrada

$$X_k = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 k^2}, & k = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \ldots \\ 0, & k = 0,\ \pm 2,\ \pm 4, \ldots \end{cases}$$

$$x_{-3a3}(t) = \mathbf{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-3 \\ k \text{ impar}}}^{3} \frac{-4}{\pi^2 k^2} e^{j2\pi k f_0 t} \right\} \qquad x_{-17a17}(t) = \mathbf{Re}\left\{ \sum_{\substack{k=-17 \\ k \text{ impar}}}^{17} \frac{-4}{\pi^2 k^2} e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$



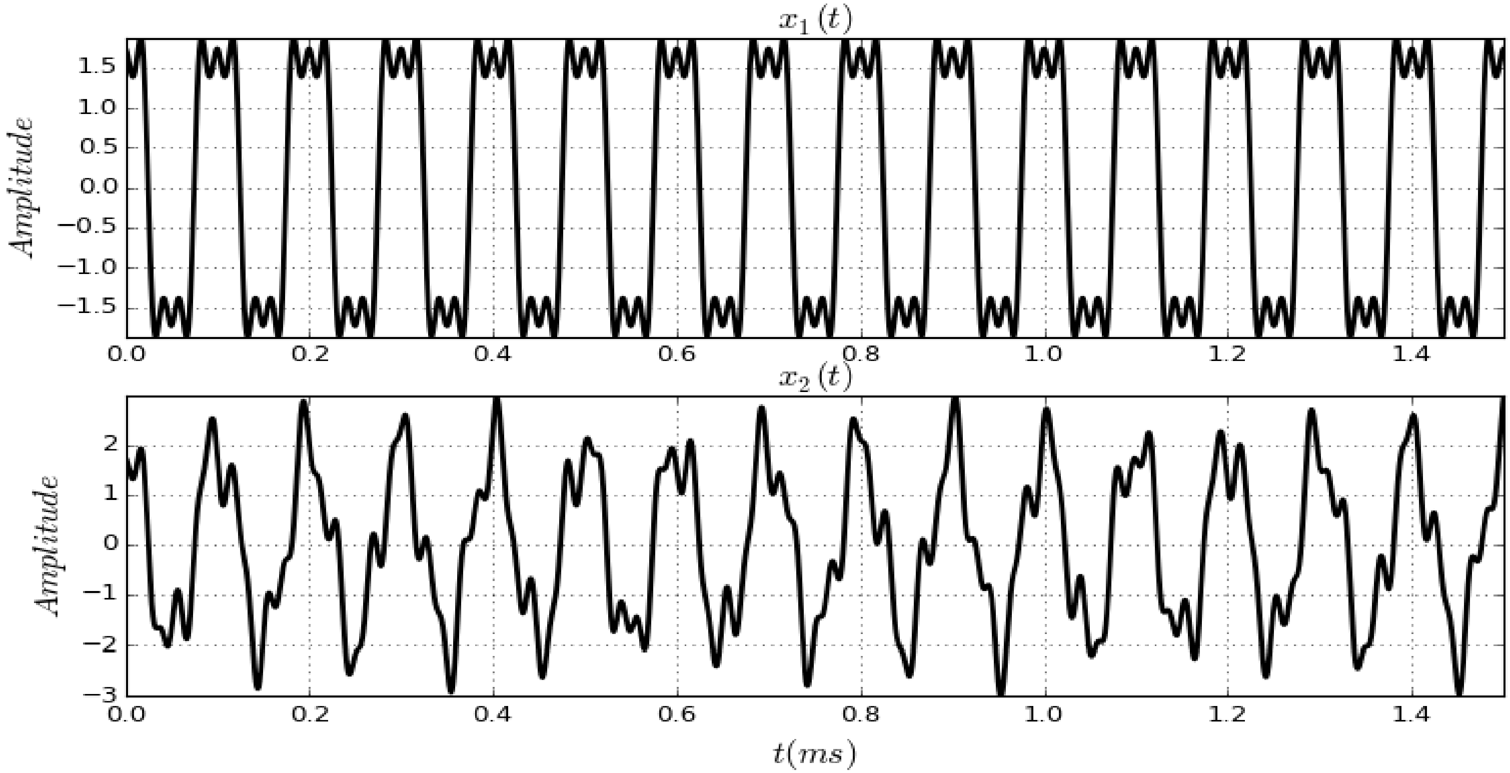
- Sinal periódico como soma de periódicos: freqs. harmónicas
- Sinal não periódico como soma de periódicos: freqs.não harmónicas

1 $$x(t) = 2\cos(20\pi t) - \frac{2}{3}\cos(20\pi(3)t) + \frac{2}{5}\cos(20\pi(5)t)$$

2 $$x(t) = 2\cos(20\pi t) - \frac{2}{3}\cos\left(20\pi\sqrt{8}t\right) + \frac{2}{5}\cos\left(20\pi\sqrt{27}t\right)$$

periódico (1)

não periódico (2)



Exercício: Considere o seguinte sinal:

$$x(t) = 10 + 20\cos\left(2\pi(100)t + \frac{\pi}{4}\right) + 10\cos\left(2\pi(250)t\right)$$

- Exprima-o na forma: $x(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\}$

- O sinal é periódico? Em caso afirmativo determine o período.
- Desenhe o espectro do sinal.

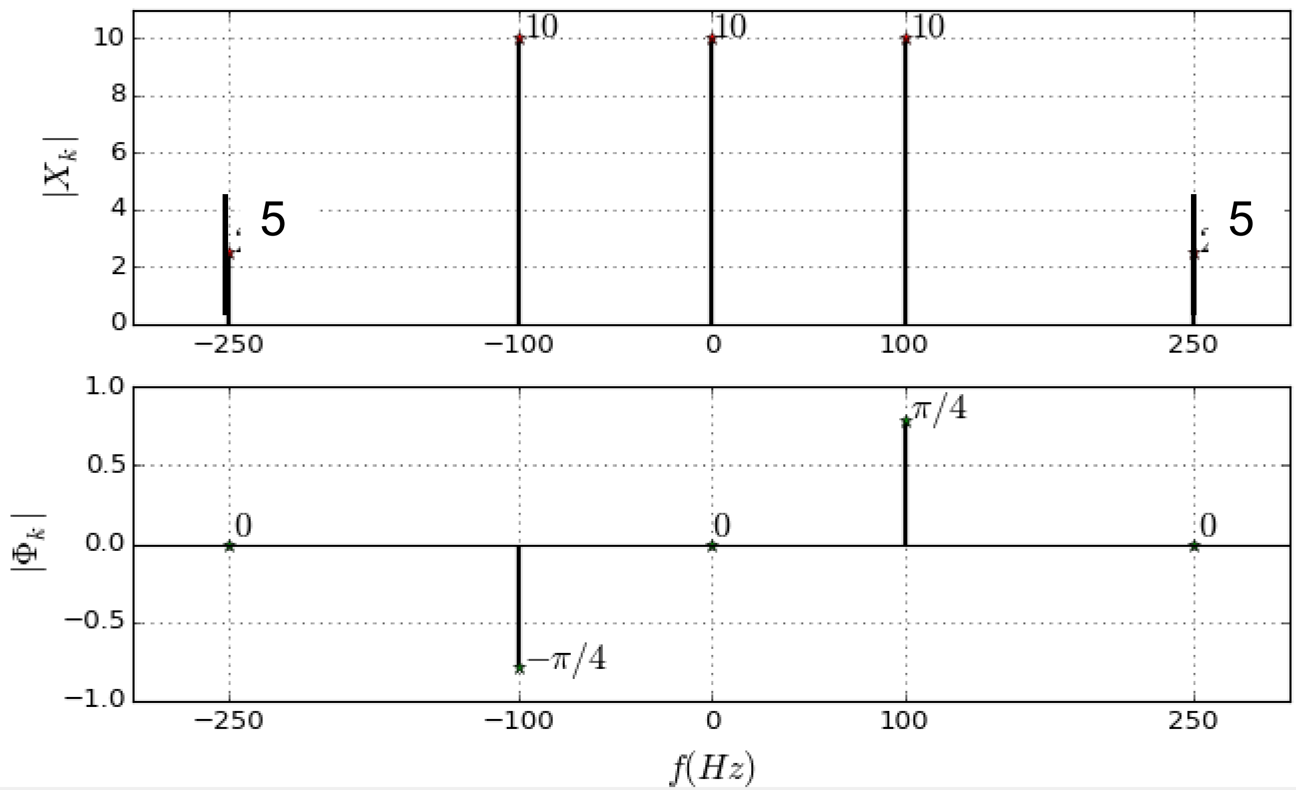
10	$10e^{j0}$	$f_0 = 0\,Hz$
$20\cos\left(2\pi(100)t + \frac{\pi}{4}\right)$	$10e^{j2\pi k100t}e^{j\pi/4} +$ $10e^{-j2\pi k100t}e^{-j\pi/4}$	$f_0 = 100\,Hz$
$10\cos\left(2\pi(250)t\right)$	$5e^{j2\pi k250t} +$ $5e^{-j2\pi k250t}$	$f_0 = 250\,Hz$

$$x(t) = 10e^{j0} + \mathrm{Re}\left\{10e^{j\pi/4}e^{j2\pi k100t} + 10e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi k100t} + 5e^{j2\pi k250t} + 5e^{-j2\pi k250t}\right\}$$

$$\left\{(10,0),\left(10e^{j\frac{\pi}{4}},100\right),\left(10e^{-j\frac{\pi}{4}},-100\right),(5,250),(5,-250)\right\}$$

Neste caso não foi necessário calcular integrais...

$$X_0 = 10$$
$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 10e^{j\pi/4}$$
$$X_3 = 0$$
$$X_4 = 0$$
$$X_5 = 10$$



100=2*50

250=5*50

$$f_0 = 50Hz$$

O sinal é periódico com freq. fundamental $f_0 = 50Hz \rightarrow T_0 = \frac{1}{50}s$

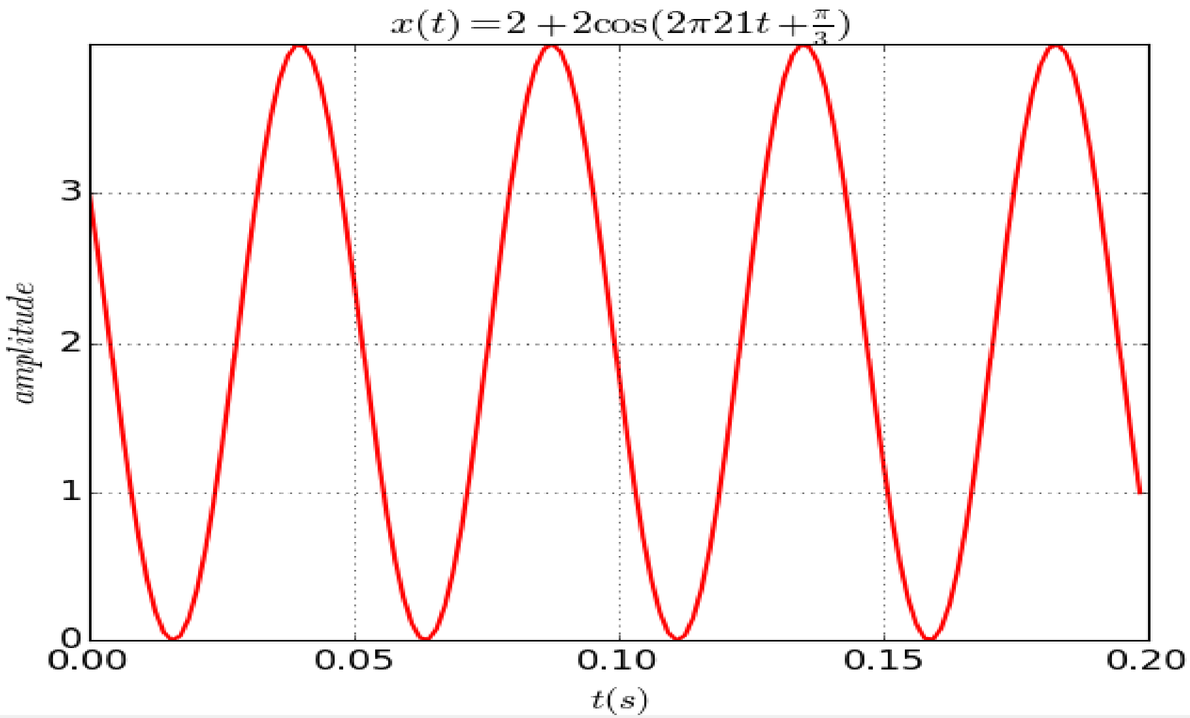
Exercício: 1º Teste 20/4/2015

1. Considere o sinal contínuo, $x(t) = 2 + 2\cos(2\pi 21t + \frac{\pi}{3})$.

{2.0v} (a) Represente graficamente $x(t)$. Qual o período de $x(t)$?

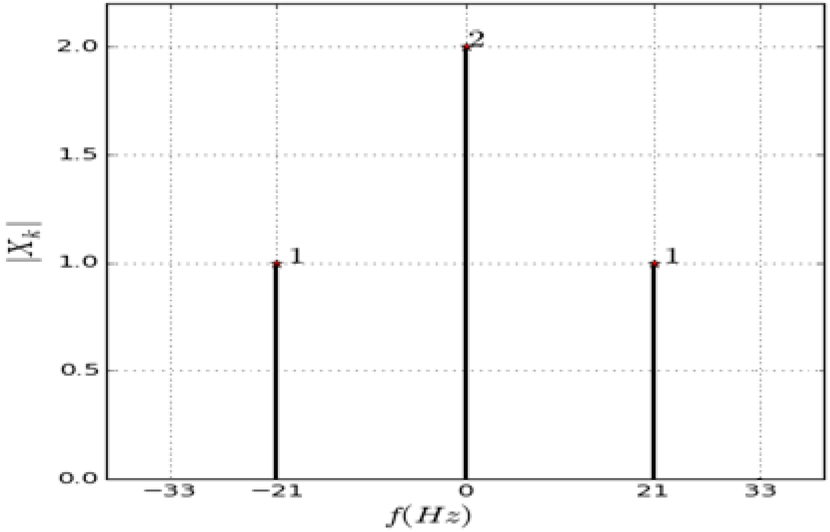
{2.0v} (b) Represente graficamente o espectro de amplitude, $|X(f)|$ e de fase $\angle X(f)$ do sinal $x(t)$.

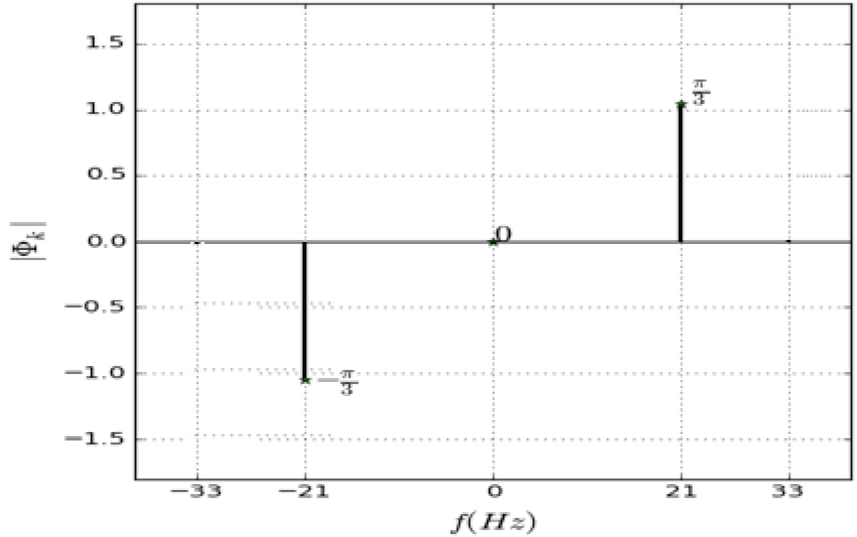
{2.0v} (c) Considere agora o sinal $y(t) = x(t) - \sin(2\pi 33t)$. Qual o periódo fundamental de $y(t)$? Represente graficamente espectro de amplitude de $y(t)$.



a) Periodo: $f_0 = 21Hz \rightarrow T_0 = \frac{1}{21}s \approx 0.0479s$

b) $x(t) = 2e^{j0} + \mathrm{Re}\left\{2e^{j\pi/3}e^{j2\pi k21t}\right\}$ Espectro $\left\{(2,0),\left(1e^{j\frac{\pi}{3}},21\right),\left(1e^{-j\frac{\pi}{3}},-21\right)\right\}$

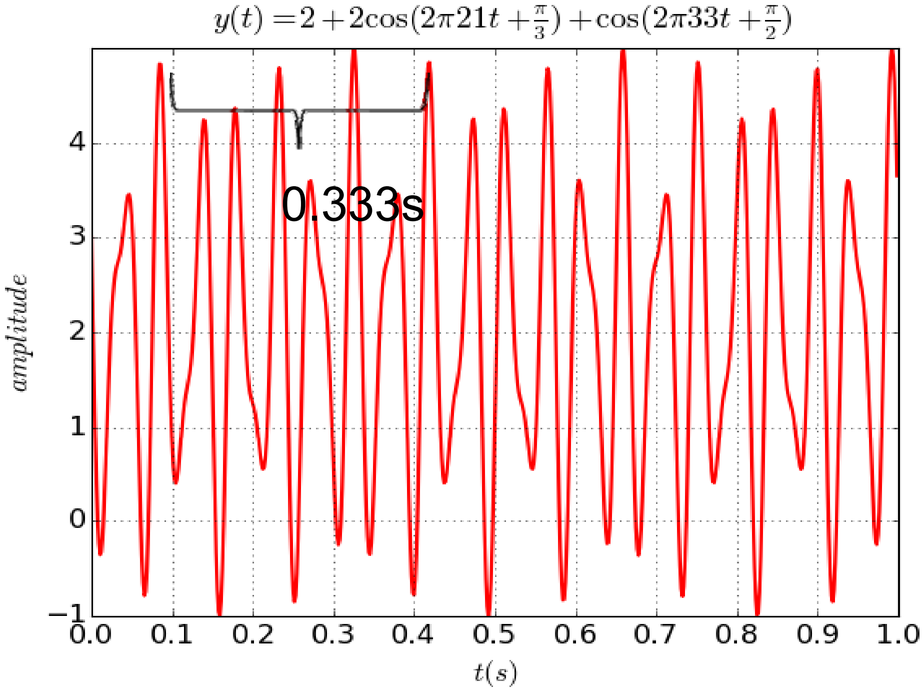




c)

$$x(t) = 2 + 2\cos\left(2\pi(21)t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\pi(33)t\right) = 2 + 2\cos\left(2\pi(21)t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi(33)t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Espectro $\left\{(2,0),\left(1e^{j\frac{\pi}{3}},21\right),\left(1e^{-j\frac{\pi}{3}},-21\right),\boxed{\left(0.5e^{j\frac{\pi}{2}},33\right),\left(0.5e^{-j\frac{\pi}{2}},-33\right)}\right\}$

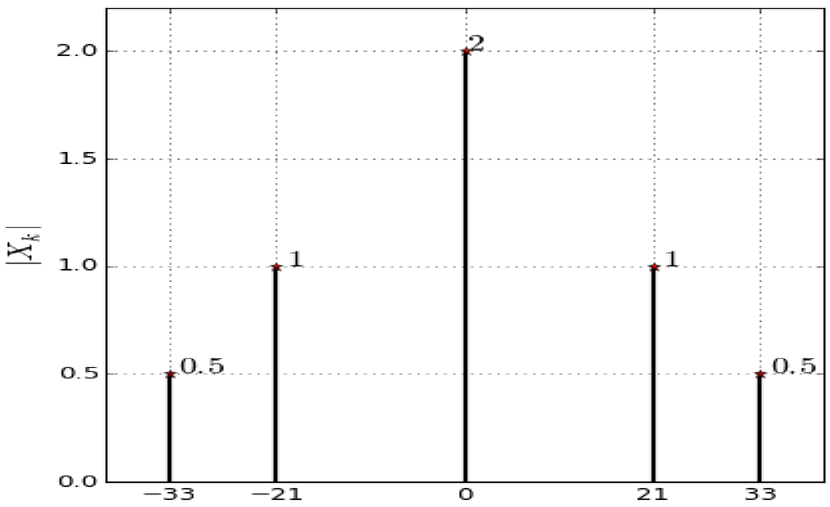


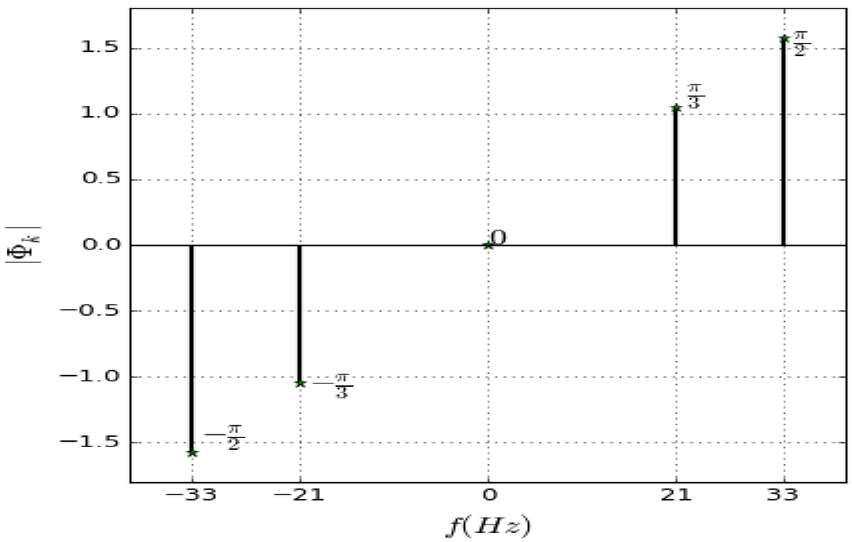
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 33 = 3\times 11 \\ f_2 &= 21 = 3\times 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow T_0 = \frac{1}{3}s = 0.333s$$

O sinal y(t) é periódico com período 0.333s.

A frequência fundamental é

$$f_0 = 3Hz$$





- **Exercício**: Um sinal periódico não sinusoidal $x(t) = x(t+T_0)$ é definido durante um período $-T_0/2 \le t \le T_0/2$ como:

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ , & |t| < T_0/4 \\ 0 \ , & T_0/4 < |t| \le T_0/2 \end{cases}$$

a) Faça o gráfico do sinal para $-2T_0 \le t \le 2T_0$.

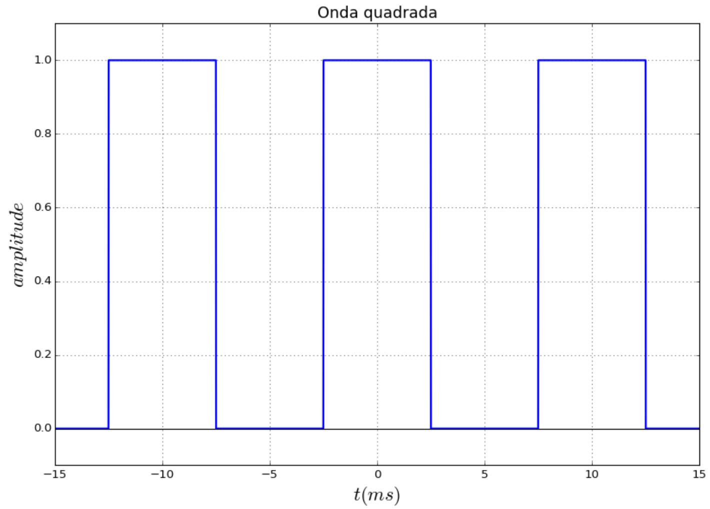
b) Determine X_0

c) Determine uma fórmula para os coeficientes de Fourier X_k em

$$x(t) = \mathbf{Re}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right\}$$

d) Esboce o espectro de amplitude de $x(t)$ com $\omega_0 = 2\pi(100)$, para frequências no intervalo $-10\omega_0 \le \omega \le 10\omega_0$

a)



b)

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = $$
$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/4} 1dt + \frac{1}{T_0}\int_{3T_0/4}^{T_0} 1dt = $$
$$= \frac{1}{T_0}\left([t]_0^{T_0/4} + [t]_{3T_0/4}^{T_0}\right) = 0.5$$

c)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{T_0/4} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \int_{3T_0/4}^{T_0} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right) = \frac{1}{\cancel{T_0}}\left(\frac{1}{-j2\pi k\cancel{f_0}}\right)\left(\left[e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_0^{T_0/4} + \right.$$

$$\left.\left[e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_{3T_0/4}^{T_0}\right) = \frac{1}{-j2\pi k}\left[e^{-j\frac{2\pi k}{4}} - 1 + e^{-j2\pi k} - e^{j\frac{2\pi k 3}{4}}\right] = \frac{1}{\pi k}\left[\frac{-e^{-j\frac{\pi k}{2}} + \overbrace{e^{-j2\pi k}}^{1} e^{j\frac{\pi k}{2}}}{2j}\right] = $$

$$= \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{se k par } \neq 0 \\ \dfrac{1}{\pi k} \quad \text{se k} = \pm 1, \pm 5, \pm 9, \ldots. \\ -\dfrac{1}{\pi k} \quad \text{se k} = \pm 3, \pm 7, \ldots. \end{cases}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{T_0/4} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \int_{3T_0/4}^{T_0} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right) =$$

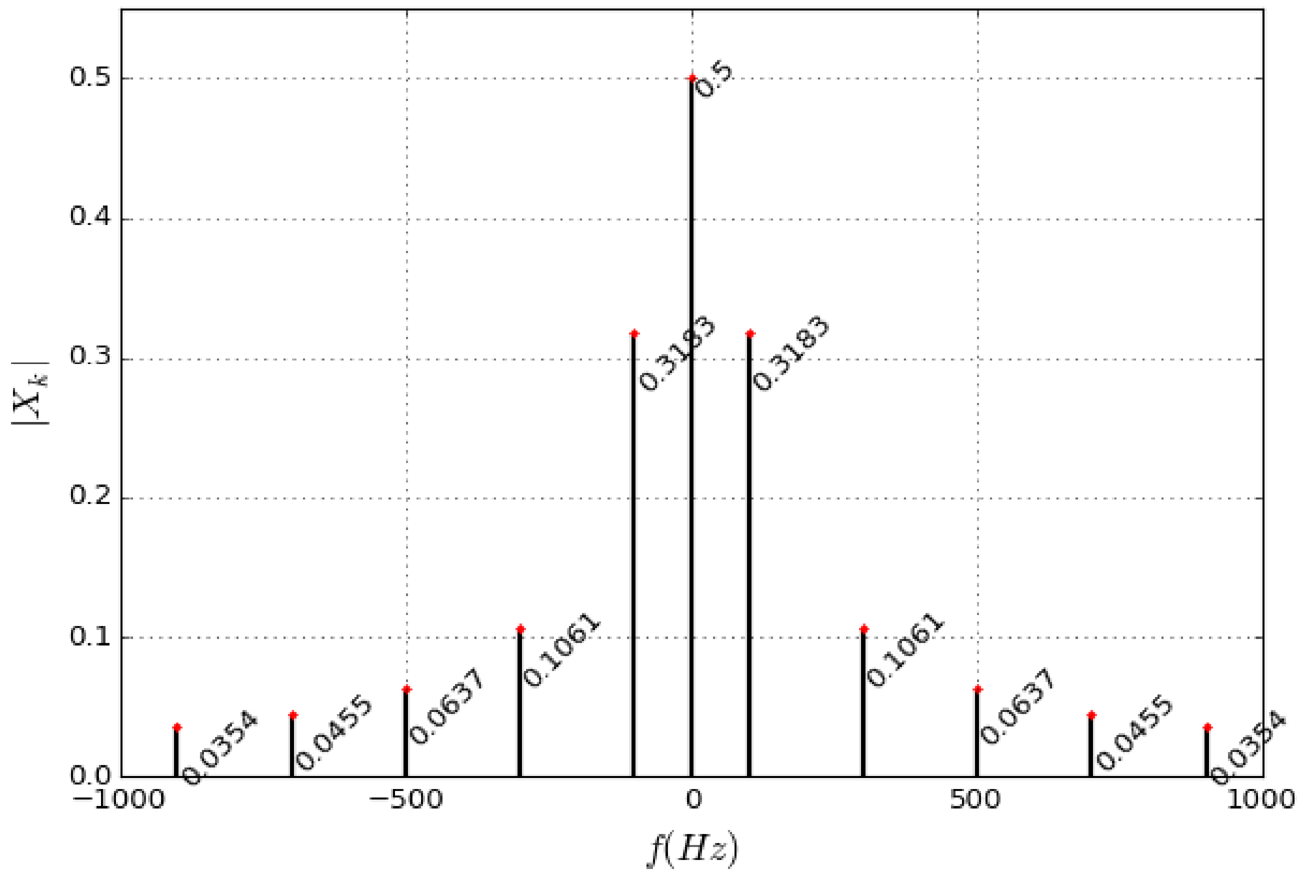
$$= \frac{1}{\cancel{T_0}}\left(\frac{1}{-j2\pi k\cancel{f_0}}\right)\left(\left[e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_0^{T_0/4} + \left[e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_{3T_0/4}^{T_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}\left[e^{-j\frac{2\pi k}{4}} - 1 + e^{-j2\pi k} - e^{j\frac{2\pi k3}{4}}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left[\frac{-e^{-j\frac{\pi k}{2}} + \overbrace{e^{-j2\pi k}}^{1} e^{j\frac{\pi k}{2}}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{se k par } \neq 0 \\ \dfrac{1}{\pi k} \quad \text{se k} = \pm 1, \pm 5, \pm 9, ... \\ -\dfrac{1}{\pi k} \quad \text{se k} = \pm 3, \pm 7, ... \end{cases}$$

$$\omega_0 = 2\pi(100) \Leftrightarrow f_0 = 100\,Hz \Leftrightarrow T_0 = 0.01s$$

d) Espectro para $-10\omega_0 \le \omega \le 10\omega_0 \Leftrightarrow -1000\times 2\pi \le \omega \le 1000\times 2\pi$



```python
Created on Wed Mar 16 18:59:56 2016
@author: Isabel Rodrigues
"""
# -*- coding: latin-1 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T0=0.01
k1 = np.arange(-9, 0, 2)
k2 = np.arange(1, 10, 2)
k3=[0]
s1=(np.sin(np.pi*k1/2)/(np.pi*k1))
s2=(np.sin(np.pi*k2/2)/(np.pi*k2))
s3=[0.5]
s=np.abs(np.concatenate((s1,s3,s2),axis=1))
k=100*np.concatenate((k1,k3,k2),axis=1)
plt.close('all')
plt.figure(facecolor='w',figsize=(7,5))
plt.vlines(k, [0], s,linewidth=2)
plt.plot(k, s , 'r.')
plt.axis([-10/T0,10/T0,0,0.55])
#plt.xticks(k,fontsize=12)
plt.xlabel('$f(Hz)$',fontsize=16);
plt.ylabel('$|X_k|$',fontsize=16);

for l in np.arange(0,np.size(s),1):
#    ss=str((s[l],'%f'))
    plt.text(k[l],s[l],np.round(s[l],4),rotation=45)
plt.grid()
```

Exercício: 1º Teste 20/4/2015

2. Considere que Y_k representa os coeficientes da série de Fourier do sinal $y(t)$

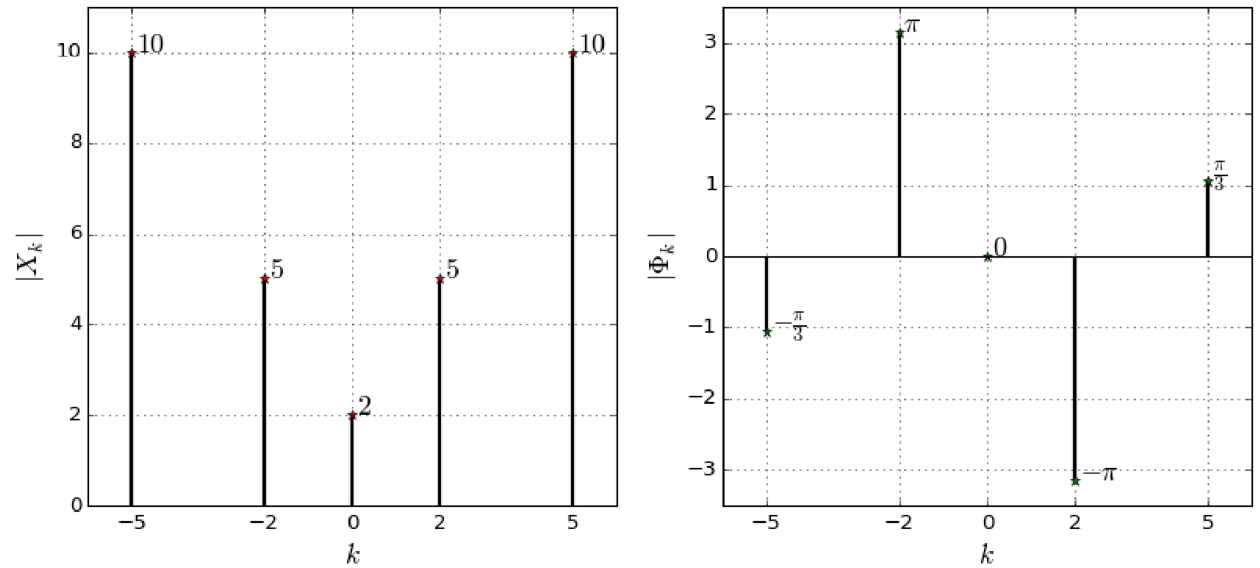
$$Y_k = \begin{cases} -5 & , \quad k = 2 \text{ e } -2 \\ 10e^{j\frac{\pi}{3}} & , \quad k = 5 \\ 10e^{-j\frac{\pi}{3}} & , \quad k = -5 \\ 2 & , \quad k = 0 \end{cases}$$

{2.0v} (a) Represente graficamente em função de k, $|Y_k|$ e $\angle Y_k$.

{2.0v} (b) Considerando que a frequência fundamental, f_0, é 50Hz, determine a expressão analítica de $y(t)$.

{2.0v} (c) Calcule a potência de $y(t)$ através da relação de Parseval.

a)



b) Equação de **Síntese** $f_0 = 50Hz$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k\in\{-5,-2,0,2,5\}} Y_k e^{j2\pi k 50t} =$$

$$= 10e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi(-5)50t} + 5e^{j\pi} e^{j2\pi(-2)50t} + 2 + 5e^{-j\pi} e^{j2\pi(2)50t} + 10e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi(5)50t}$$

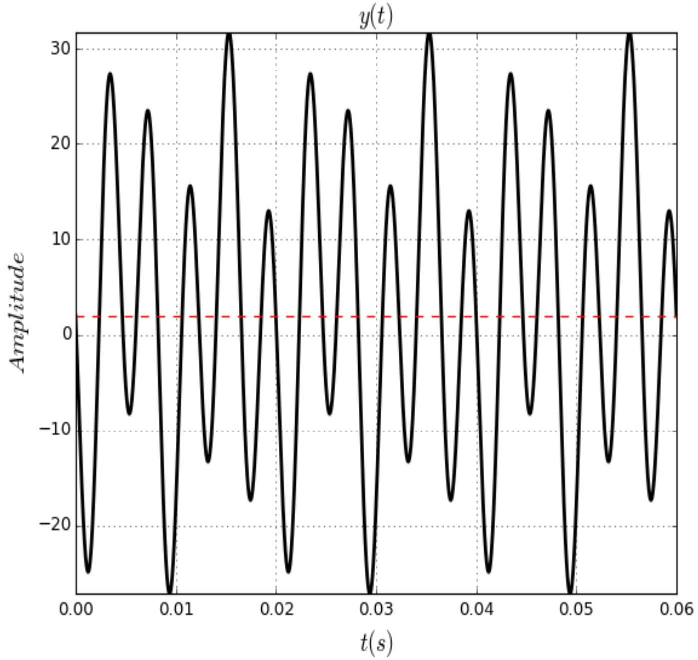
$$= 2 + 20\cos\left(2\pi(-250)t - \frac{\pi}{3}\right) + 10\cos\left(2\pi(-100)t - \pi\right)$$

c)

$$P_Y = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |y(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Y_k|^2 =$$

$$= \left(\left|10e^{-j\pi/3}\right|\right)^2 + (-5)^2 + 2^2 + (-5)^2 + \left(\left|10e^{j\pi/3}\right|\right)^2 =$$

$$= 100 + 25 + 4 + 25 + 100 = 254$$



Propriedades da Série de Fourier (SF)

Sendo $x(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} X_k$ e $y(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} Y_k$

- Linearidade $ax(t) + by(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} aX_k + bY_k$

- Deslocamento no tempo $x(t - t_0) \overset{SF}{\leftrightarrow} X_k e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}$

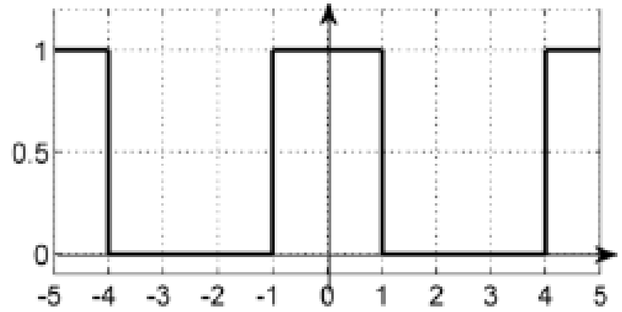
- Deslocamento na frequência $e^{j\frac{2\pi}{T}k_0 t}x(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} X_{k-k_0}$

3. Considere o sinal contínuo e periódico, $z(t)$ de período $T_0 = 5$ segundos, do qual se representa um troço na figura.

{2.0v} (a) Determine a série de Fourier de $z(t)$.

{2.0v} (b) Represente graficamente o espectro de amplitude e de fase.

{2.0v} (c) Seja $w(t) = 2z(t+2)+2$. Represente graficamente $w(t)$. Calcule W_k.



$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad Z_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} z(t)\,dt \qquad Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} z(t)\,e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Sinal:

$$z(t) = \begin{cases} 1\,, & -1 \le t \le 1 \\ 0\,, & 1 < t \le 4 \end{cases} \qquad Z_0 = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} z(t)\,dt = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1} 1\,dt = \frac{2}{5}$$

$$Z_k = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1} 1e^{-\frac{j2\pi kt}{5}} dt = \frac{1}{5}\frac{1}{(-j2\pi k0.2)}\left[e^{-\frac{j2\pi kt}{5}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{(-j2\pi k)}\left(e^{-\frac{j2\pi k}{5}} - e^{\frac{j2\pi k}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(\frac{e^{\frac{j2\pi kt}{5}} - e^{-\frac{j2\pi kt}{5}}}{2j}\right) = \frac{0.2\times 2}{(2\pi k0.2)}\sin(2\pi k0.2) = 0.4\mathrm{sinc}(2k0.2)$$

c) Aplicamos as propriedades da série de Fourier, produto por escalar e deslocamento no tempo

$$ax(t) + by(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} aX_k + bY_k$$

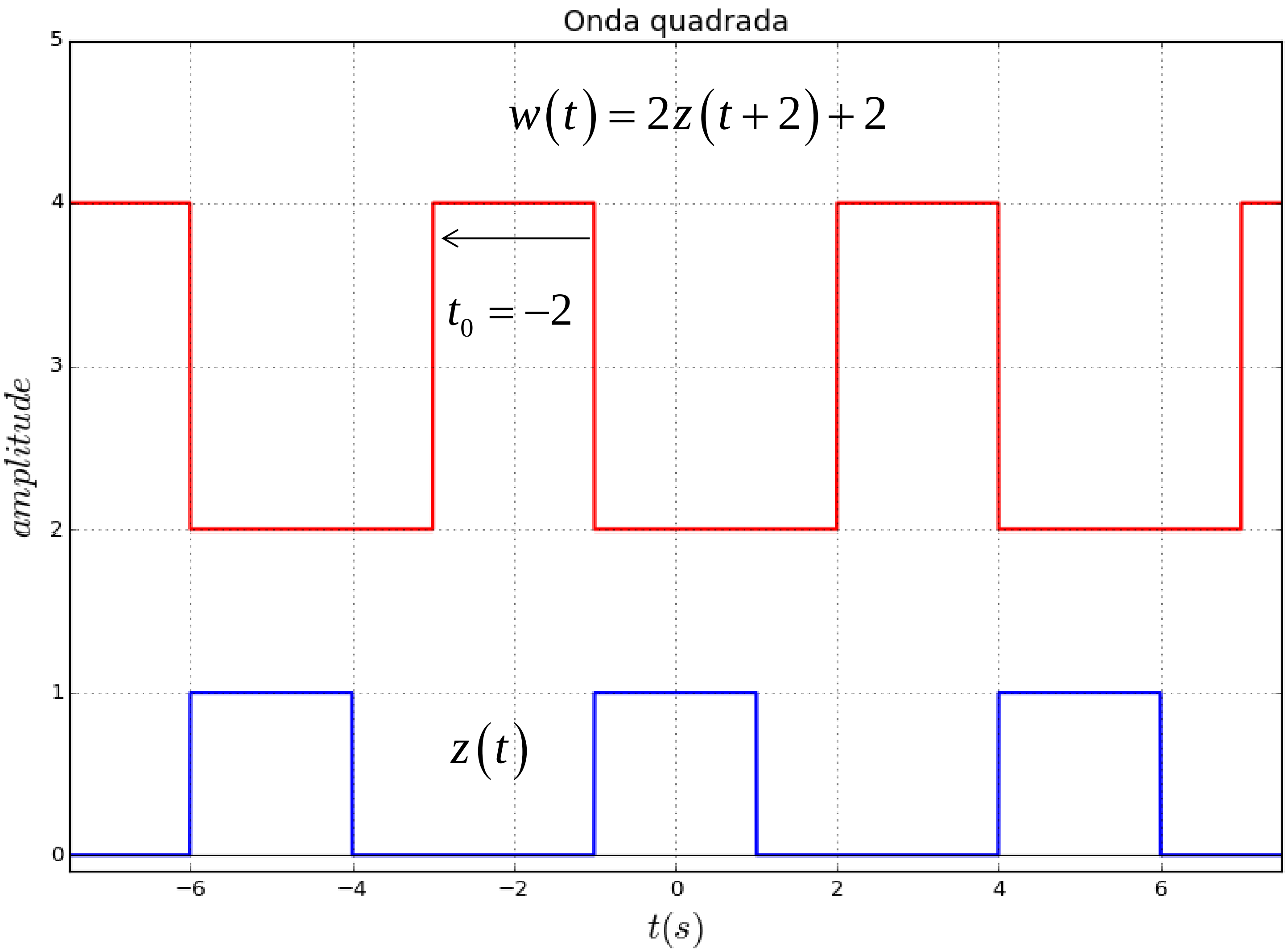
$$w(t) = 2z(t+2) + 2 \rightarrow t_0 = -2$$

$$x(t - t_0) \overset{SF}{\leftrightarrow} X_k e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}$$

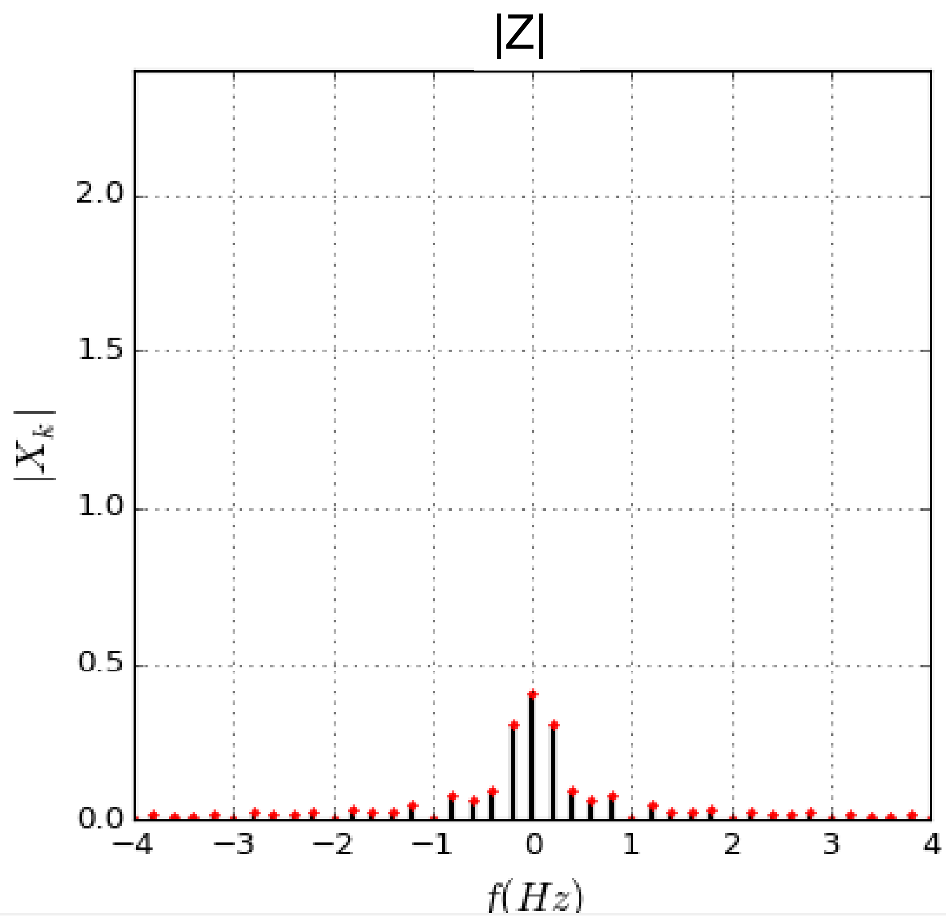
$$2z(t+2)+2 = \begin{cases} 4\ , & -1 \le t+2 \le 1 \\ 2\ , & 1 < t+2 \le 4 \end{cases} = \begin{cases} 4\ , & -3 \le t \le -1 \\ 2\ , & -1 < t \le 2 \end{cases}$$

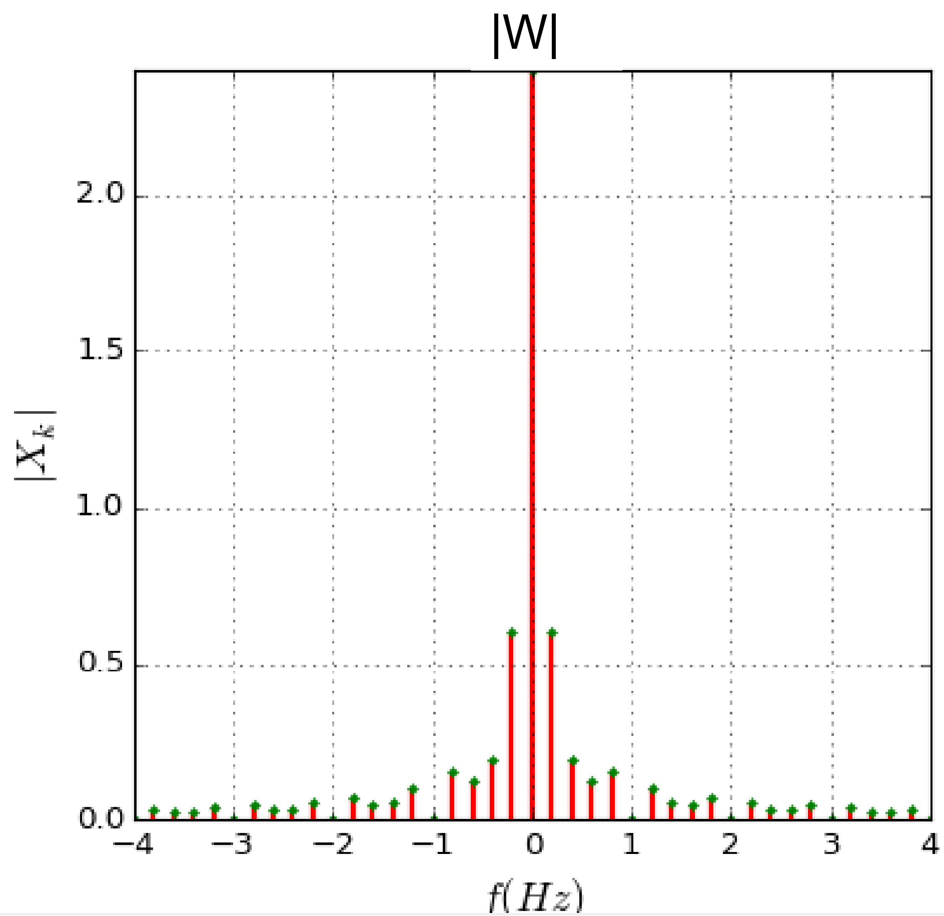
$$W_0 = 2Z_0 + 2 = \frac{14}{5}$$

$$W_k = 2\times Z_k e^{-j2\pi\frac{k}{5}\times(-2)} = 2\times 0.4\mathrm{sinc}(2k0.2)e^{\frac{j4\pi k}{5}}$$



Onda quadrada
$w(t) = 2z(t+2) + 2$
$t_0 = -2$
$z(t)$
amplitude
t(s)


|Z|
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$|X_k|$
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
$f(Hz)$


|W|
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$|X_k|$
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
$f(Hz)$

Potência de um sinal e Teorema de Parseval

- Potência de um sinal periódico

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt$$

- Teorema de Parseval

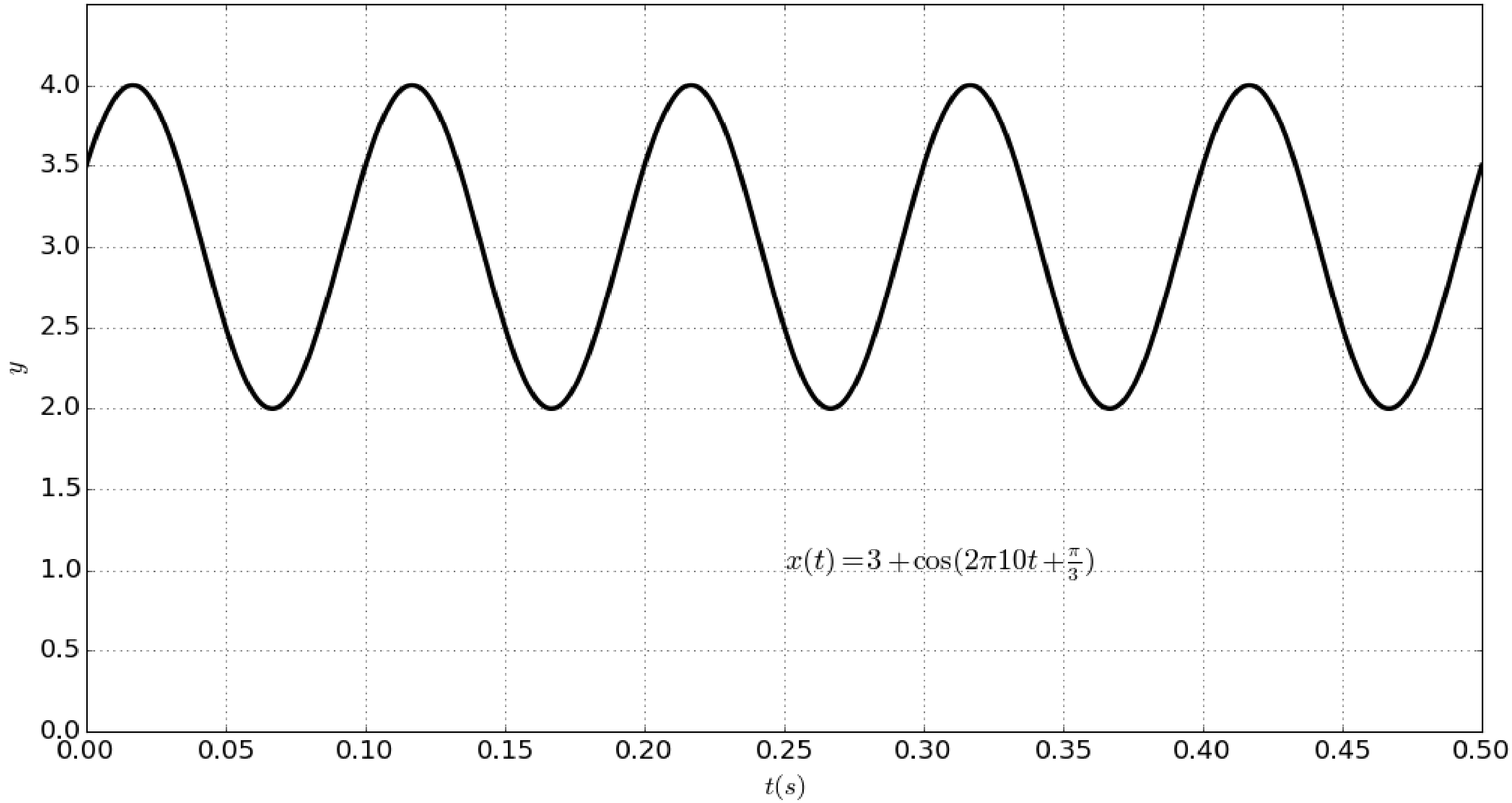
$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|X_k\right|^2$$

1. Considere o sinal contínuo, $x(t) = 3 + \cos(2\pi 10 t + \frac{\pi}{3})$.

   (a) {1v} Represente graficamente $x(t)$. Qual o período de $x(t)$?

   (b) {2.5v} Represente graficamente o espectro de amplitude, $|X(f)|$ e de fase $\angle X(f)$ do sinal $x(t)$.

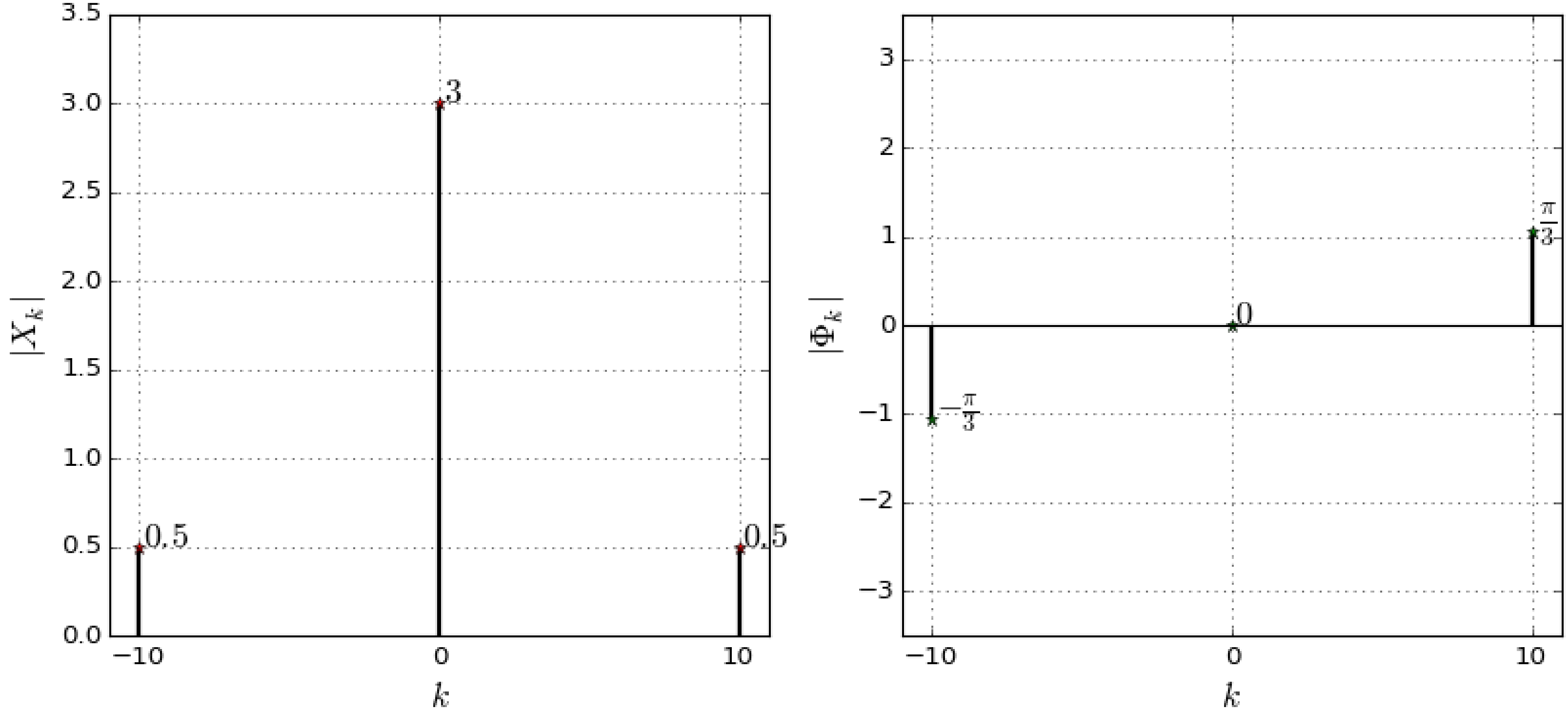
   (c) {2.5v} Considere agora o sinal $v(t) = x(t) + \sin(2\pi 25 t)$. Será $v(t)$ periódico? Se sim, qual o período? Qual o espectro de $v(t)$?



Período do sinal: $f_c = 10Hz \rightarrow T = 0.1s$

$$x(t) = 3 + 1\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

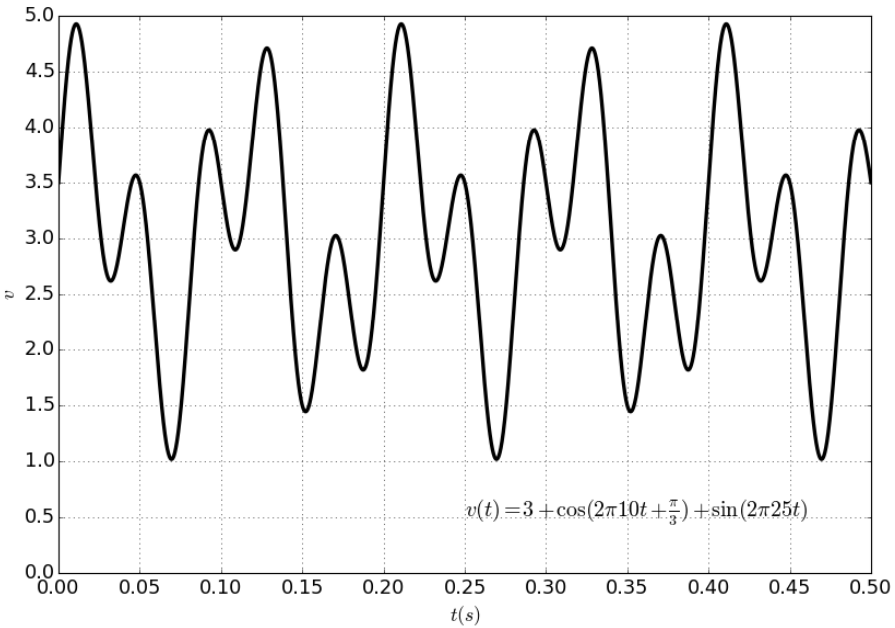
$$\left\{(3,0),\left(0.5e^{j\frac{\pi}{3}},10\right),\left(0.5e^{-j\frac{\pi}{3}},-10\right)\right\}$$



$$v(t) = 3 + 1\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2\pi 25t\right)$$

$$f_0 = mdc\{0,10,25\} = 5Hz$$

O novo sinal é periódico com período $T_0 = \frac{1}{5} = 0.2s$



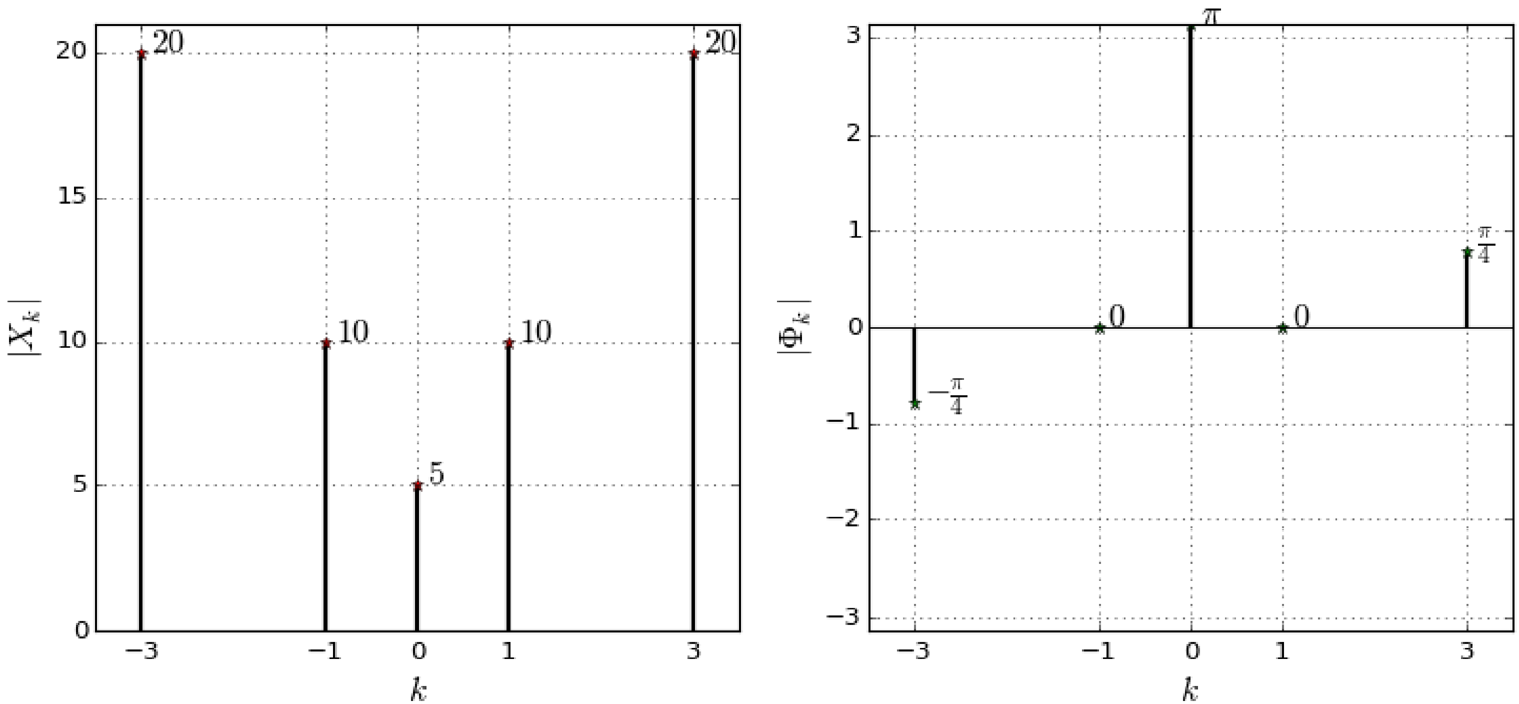
3. Considere que Y_k representa os coeficientes da série de Fourier do sinal $y(t)$

$$Y_k = \begin{cases} 10 & , \quad k = 1 \text{ e } -1 \\ 20e^{j\frac{\pi}{4}} & , \quad k = 3 \\ 20e^{-j\frac{\pi}{4}} & , \quad k = -3 \\ -5 & , \quad k = 0 \quad \rightarrow -5 = 5e^{j\pi} \end{cases}$$

(a) {2v} Represente graficamente em função de k, $|Y_k|$ e $arg(Y_k)$.

(b) {2v} Considerando que a frequência fundamental, f_0, é 50Hz, determine a expressão analítica de $y(t)$.

$k \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$



b) Equação de **Síntese** $f_0 = 50Hz$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k\in\{-3,-1,0,1,3\}} Y_k e^{j2\pi k 50t} =$$

$$= 20e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi(-3)50t} + 10e^{j2\pi(-1)50t} + 2e^{j\pi} + 10e^{j2\pi(1)50t} + 20e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi(3)50t}$$

$$= -2 + 40\cos\left(2\pi(-150)t - \frac{\pi}{4}\right) + 20\cos\left(2\pi(-50)t\right)$$

2. Considere o sinal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ e que: $f_1 = f_c - f_\Delta$ e $f_2 = f_c + f_\Delta$, com $f_c >> f_\Delta$.

(a) {2v} Expresse o sinal x(t) como sendo o produto de duas sinusóides de frequências f_c e f_Δ.

(b) {1v} Qual o fenómeno que a expressão obtida ilustra?

a)

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{cos}\left(2\pi\left(\boldsymbol{f_c} - \boldsymbol{f_\Delta}\right)\boldsymbol{t}\right) + \mathbf{cos}\left(2\pi\left(\boldsymbol{f_c} + \boldsymbol{f_\Delta}\right)\boldsymbol{t}\right) = \mathbf{Re}\left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi(\boldsymbol{f_c}-\boldsymbol{f_\Delta})\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi(\boldsymbol{f_c}+\boldsymbol{f_\Delta})\boldsymbol{t}}\right] =$$

$$= \mathbf{Re}\left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_c t}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_c t}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}}\right] = \mathbf{Re}\left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_c t}}\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{Re}\left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\pi \boldsymbol{f_c t}}\left(\mathbf{cos}\left(2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}\right) - \boldsymbol{j}\,\mathbf{sin}\left(2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}\right) + \mathbf{cos}\left(2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathbf{sin}\left(2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}\right)\right)\right] =$$

$$= 2\,\mathbf{cos}\left(2\pi \boldsymbol{f_c t}\right)\mathbf{cos}\left(2\pi \boldsymbol{f_\Delta t}\right)$$

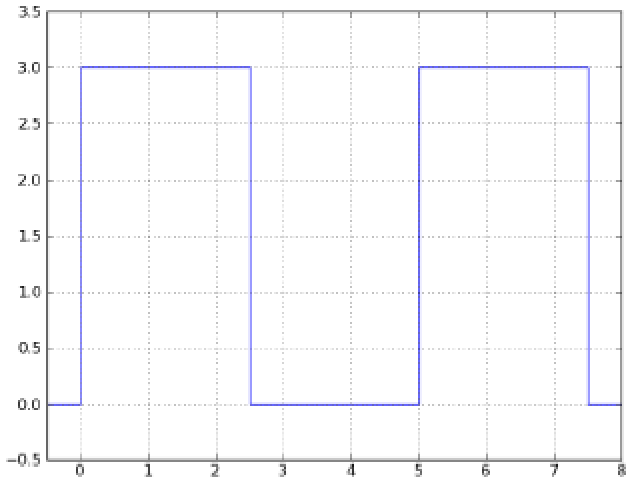
b) É o batimento ou beat note waveform

4. Considere o sinal contínuo e periódico, $z(t)$ de período $T = 5$ s, do qual se representa um troço na figura.

(a) {2v} Determine a série de Fourier de $z(t)$.

(b) {3v} Represente graficamente o espectro de amplitude e de fase.

(c) {2v} Seja $w(t) = 5z(t-1)+2$. Represente graficamente $w(t)$. Calcule W_k.



$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$Z_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} z(t)\,dt$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Sinal:

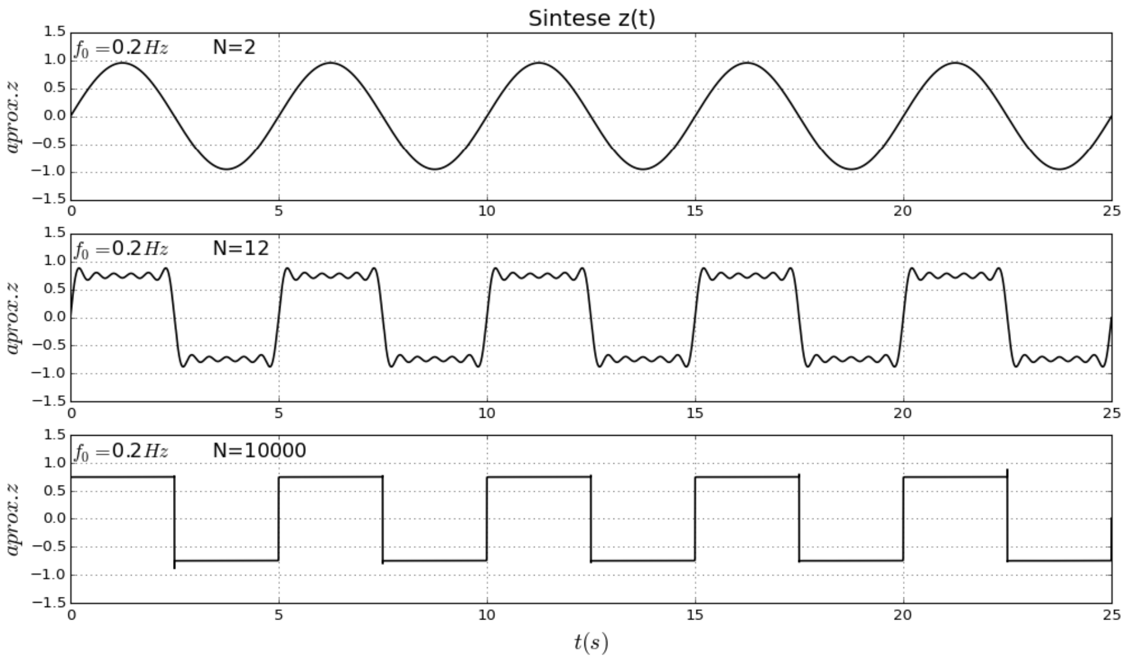
$$z(t) = \begin{cases} 3\ , & 0 \le t \le 2.5 \\ 0\ , & 2.5 < t \le 5 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{1}{5}\int_0^5 z(t)\,dt = \frac{1}{5}\left[\int_0^{2.5} 3dt + \int_{2.5}^{5} 0dt\right] = \frac{3\times 2.5}{5} = 1.5$$

$$Z_k = \frac{1}{5}\left[\int_0^{2.5} 3e^{-j2\pi k0.2t}dt\right] = \frac{3}{5}\frac{1}{(-j2\pi k0.2)}\left[e^{-j2\pi k0.2t}\right]_0^{2.5}$$

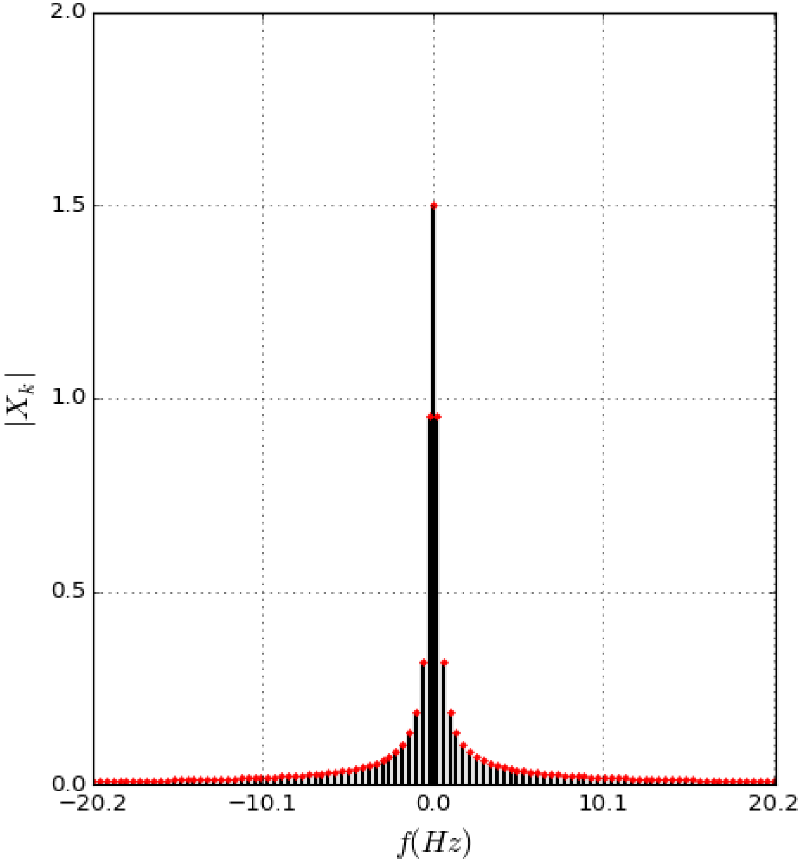
$$= \frac{3}{(-j2\pi k)}\left(e^{-j2\pi k0.5}-1\right) = -\frac{3}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k}-1\right) = \frac{3}{j2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$$

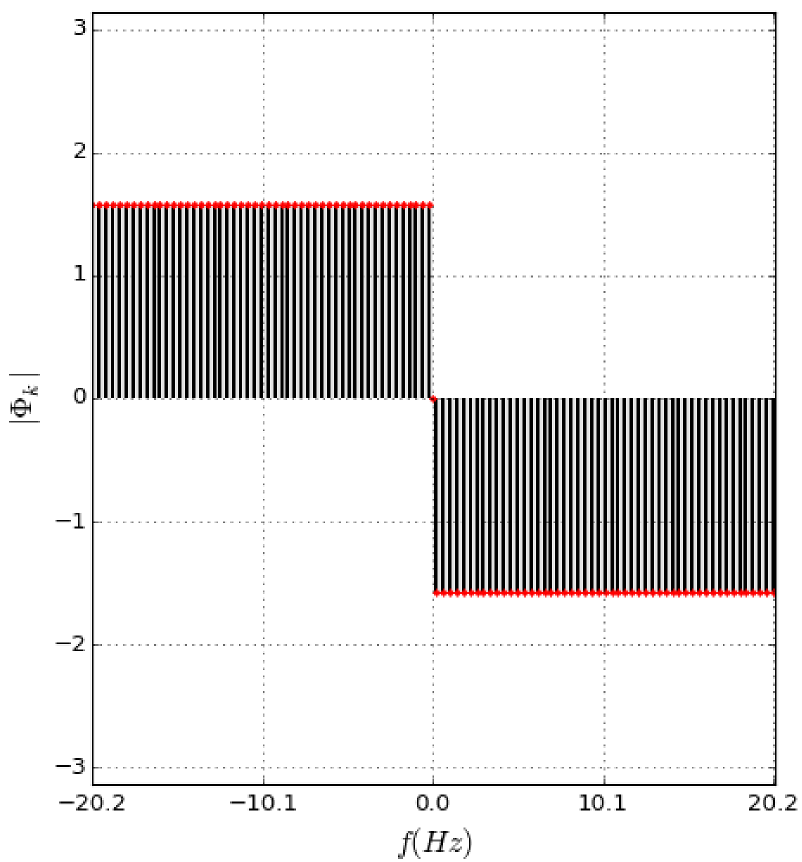
$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{j2\pi k f_0 t} = Z_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} Z_k e^{j2\pi k f_0 t} = 1.5 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{3}{j2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)e^{j2\pi k 0.2t}$$



$$Z_k = \frac{1}{5}\left[\int_0^{2.5} 3e^{-j2\pi k0.2t}dt\right] = \frac{3}{5}\frac{1}{(-j2\pi k0.2)}\left[e^{-j2\pi k0.2t}\right]_0^{2.5}$$

$$= \frac{3}{(-j2\pi k)}\left(e^{-j2\pi k0.5}-1\right) = -\frac{3}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k}-1\right) = \frac{3}{j2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$$



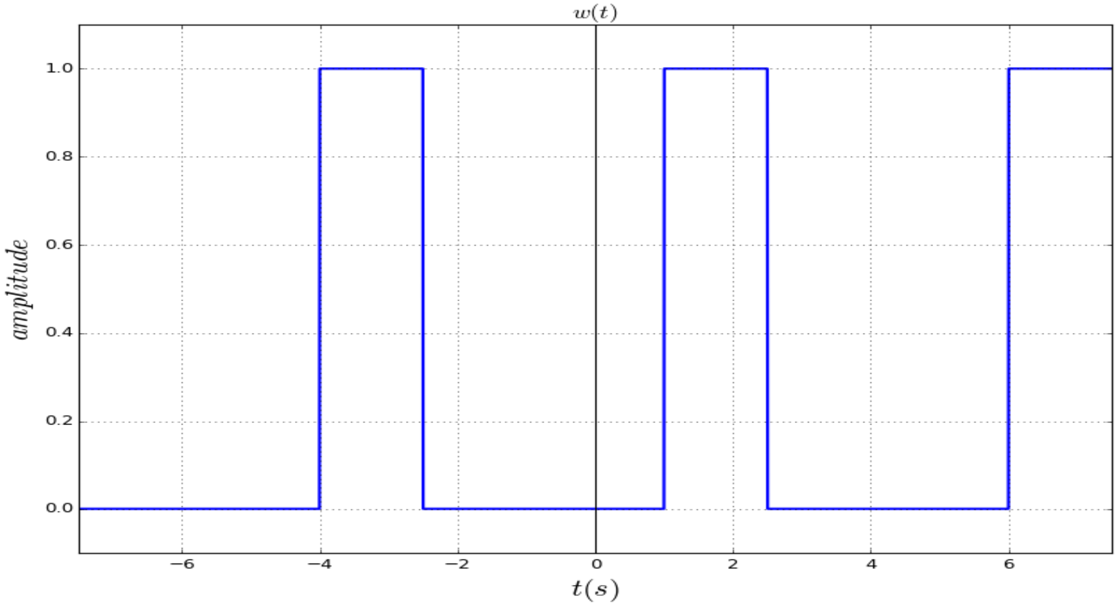


c) Aplicamos as propriedades da série de Fourier_produto por escalar e deslocamento no tempo

$$w(t) = 5z(t-1) + 2 \rightarrow t_0 = 1$$

$$ax(t) + by(t) \overset{SF}{\leftrightarrow} aX_k + bY_k$$

$$x(t - t_0) \overset{SF}{\leftrightarrow} X_k e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}$$



$$w(t) = \begin{cases} 17\ , & 1 \le t \le 3.5 \\ 2\ , & 3.5 < t \le 6 \end{cases}$$

$$W_0 = \frac{1}{5}\int_0^5 w(t)\,dt = \frac{1}{5}\left[\int_0^1 2dt + \int_1^{3.5} 17dt + \int_{3.5}^{6} 2dt\right] = 47.5$$

$$W_k = 5 \times Z_k e^{-j2\pi\frac{k}{5}\times(1)} = \frac{15}{j2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)e^{-j2\pi\frac{k}{5}}$$

1. Considere o sinal contínuo e periódico $x(t)$, com uma frequência fundamental de $f_0 = 5$ Hz, cujos coeficientes da série de Fourier são dados por:

$$X_k = \begin{cases} 2 & , \quad k = 0 \\ +3j/2 & , \quad k = -1 \\ -3j/2 & , \quad k = 1 \\ 1/2 & , \quad k = \pm 2 \end{cases}$$

(a) {2.0 v} Determine a expressão analítica de $x(t)$, agregando ao máximo todos os termos em funções sinusoidais.

(b) {1.5 v} Utilizando o teorema de Parseval, calcule a potência de $x(t)$.

a)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k\in\{-2,-1,0,1,2\}} X_k e^{j2\pi k5t} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi(-2)5t} + \frac{3j}{2} e^{j2\pi(-1)5t} + 2 - \frac{3j}{2} e^{j2\pi(1)5t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(2)5t} =$$

$$= 2 + \frac{e^{-j2\pi10t} + e^{j2\pi10t}}{2} + 3\frac{e^{-j2\pi5t+\frac{\pi}{2}} + e^{j2\pi5t-\frac{\pi}{2}}}{2} =$$

$$= 2 + \cos(2\pi10t) + 3\cos\left(2\pi5t - \frac{\pi}{2}\right)$$

b)

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left|x\left(t\right)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|X_k\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 9W$$

Espectro e FFT

- Existem algoritmos rápidos para o cálculo do espectro de um sinal:
  - Fast Fourier Transform (FFT)

    - J.W. Cooley and J.W. Tukey apresentaram ao Mundo a FFT no paper: "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series," *Mathematics Computation, Vol. 19, 1965, pp 297-301.*

    - A técnica foi descoberta anteriormente por exemplo pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), não tendo então aplicação prática...

FFT

- A FFT permite determinar eficientemente a *Discrete Fourier Transform* (Discrete Fourier Transform) que está relacionada com série de Fourier de sinais discretos (DiscreteTime Fourier Transform).

- A DTFT é dada por

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad n \in [0, N-1]}$$

- DFT é definida por:

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad k \in [0, N-1]}$$

- A DFT relaciona-se com a DTFT por:

$$c_k = \frac{1}{N} X[k]$$

Podemos recorrer ao PC para obter o espetro de um sinal.
O método mais conhecido é a Fast Fourier Transform FFT que é uma ferramenta muito eficiente ($N \log_2 N$ em vez de N^2 operações) para proceder à análise espetral.

Espectrograma

A análise tempo-frequência é outra forma de análise de sinais.
Nesta análise tempo-frequência analiza-se um sinal em geral longo e consideramo-lo dividido em troços mais curtos nos quais calculamos a FFT que no final são acopladas formando uma imagem em escala cinza chamada espectrograma.
Assim obtém-se a informação de como a frequência evolui ao longo do tempo

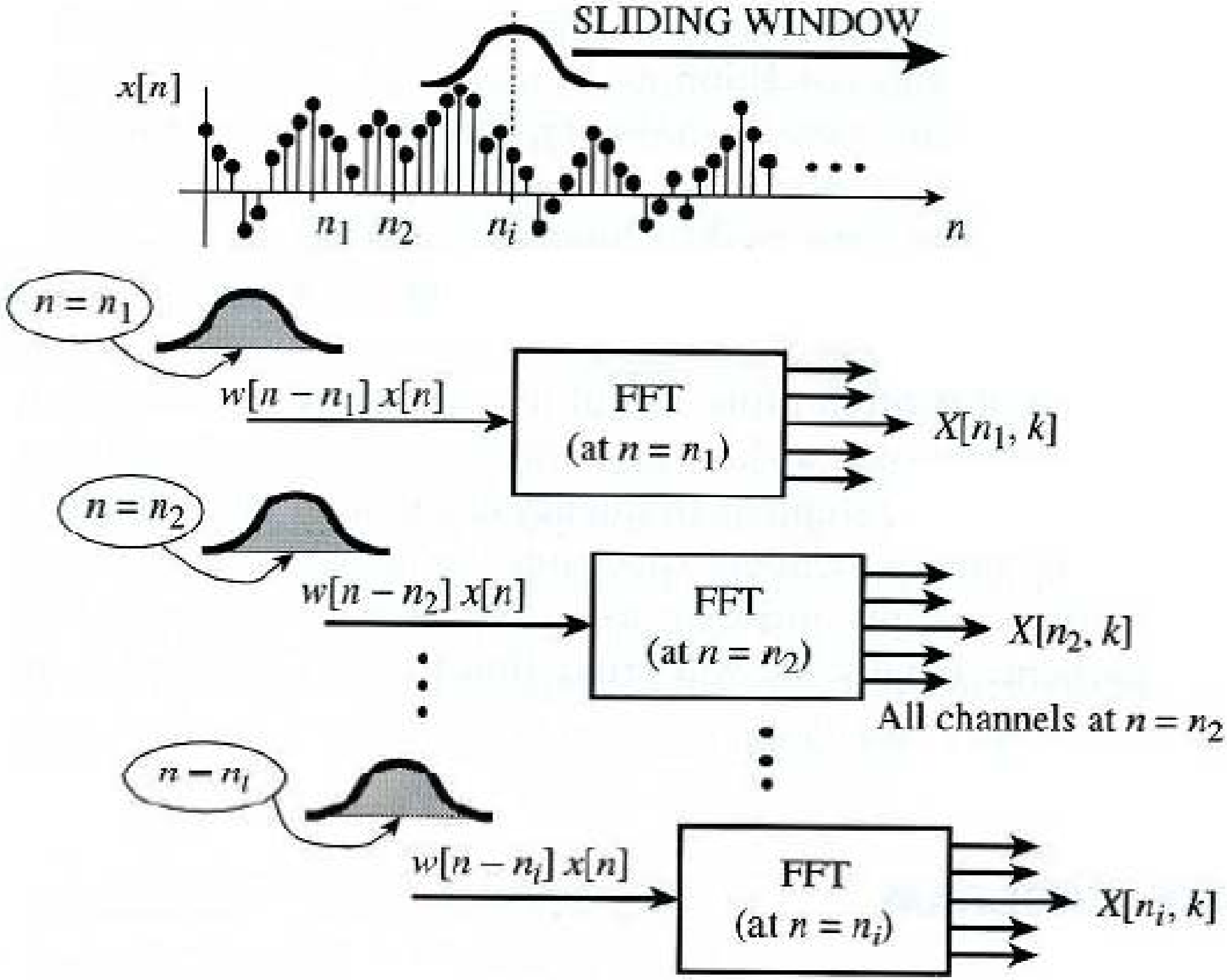


Figure 9.26 Digital spectrum analysis using FFTs of successive data blocks. The kth output of each FFT corresponds to the output signal from a single channel of the spectrum analyzer.

With either the sliding FFT or the filter-bank interpretation, we see that $X[k, n]$ is a two-dimensional sequence. The k dimension represents frequency (since $\hat{\omega}_k = 2\pi k/N$ is the analysis frequency of the kth channel), and the n dimension represents time. Since the result is a function of both time and frequency, we cannot plot *the* spectrum, because there is a different *local spectrum* for each time. To deal with this additional complexity, a three-dimensional graphical display is needed. This is done by plotting $|X[k, n]|$ (or $\log|X[k, n]|$) as a function of both k and n using perspective plots, contour plots, or gray-scale images. The preferred form is the *spectrogram*, which is a gray-scale image where the gray level at point (k, n) is proportional to $|X[k, n]|$ or $\log|X[k, n]|$; large values are black, and small ones white. Examples of the spectrogram can be seen in Figs. 9.27, 9.31, and 9.32. The horizontal axis is time and the vertical axis is frequency, starting with zero frequency at the bottom. Note

Interpretação da FFT

- Seja x[n] um sinal no domínio do tempo, e Y a DFT de x[n]

- Y é uma sequência de N pontos, onde cada elemento, Y[k], contém um número complexo, que representa a amplitude e fase no domínio da frequência.

- Y = fft(x)

$$\boxed{f_k = \frac{F_s \cdot k}{N}}$$

F_s Frequência de amostragem do sinal

No **python** a fft está disponível nas bibliotecas numpy e scipy:
Y=numpy.fft.fft(x)
Y=scipy.fft(x)

$$\boxed{\omega_k = \frac{2\pi k}{N} F_s}$$

Exemplo: Seja o sinal discreto:

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi k_0}{N}n} \quad , \quad n = 0,\dots,N-1$$

A frequência deste sinal é múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{N}$

A DFT é:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k_0}{N}n} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k_0-k)}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi(k_0-k)}{N}}\right)^n$$

Soma dos elementos de uma progressão geométrica de razão A

$$\sum_{n=0}^{N-1} A^n = \frac{1-A^N}{1-A}$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi(k_0-k)}{N}}\right)^n=\frac{1-e^{j2\pi(k_0-k)}}{1-e^{j\frac{2\pi(k_0-k)}{N}}}=0 \quad \textbf{se} \quad k\neq k_0$$

Se $k=k_0$ podemos calcular diretamente a soma

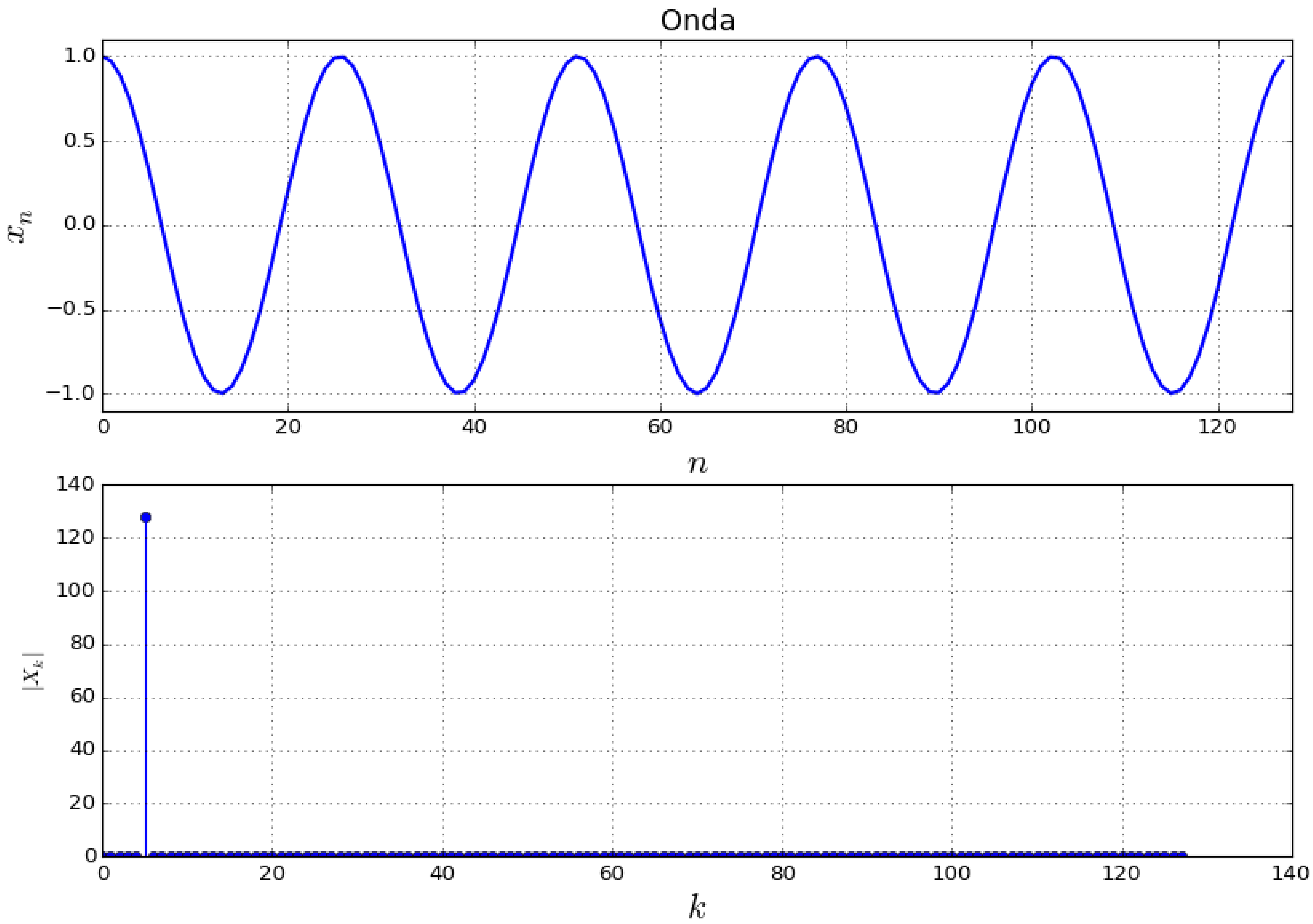
$$X[k_0]=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi(k_0-k)}{N}}\right)^n=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j0}\right)^n=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$$

Assim **Se** $k=k_0$ $\quad X[k]=N$

$$\Rightarrow X[k]=N\delta[k-k_0]$$

Se $k\neq k_0$ $\quad X[k]=0$

$$\delta[k-k_0]=\begin{cases}1, & k=k_0\\ 0, & k\neq k_0\end{cases}$$

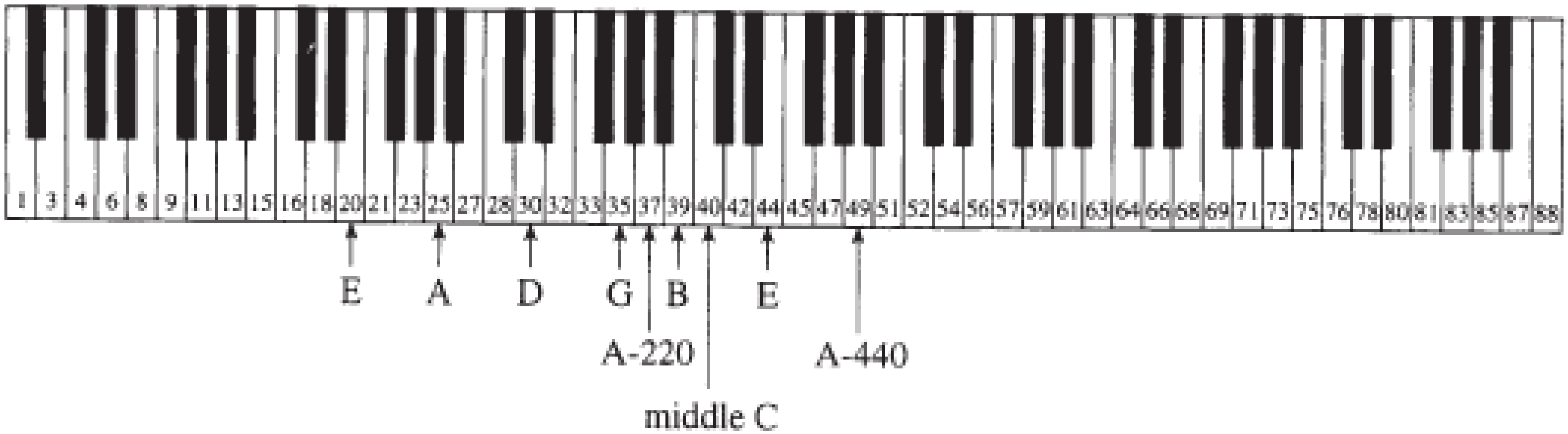


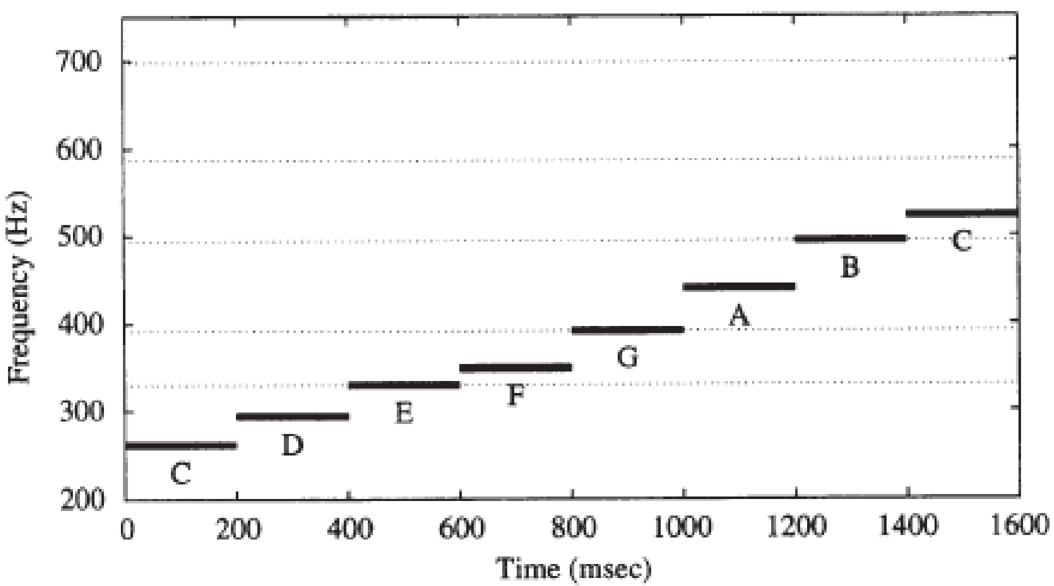
Onda
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
x_n
0
20
40
60
80
100
120
n
140
120
100
80
60
40
20
0
$|X_k|$
0
20
40
60
80
100
120
140
k

Representação Tempo-Frequência

- Motivação

Representação Tempo-Frequência

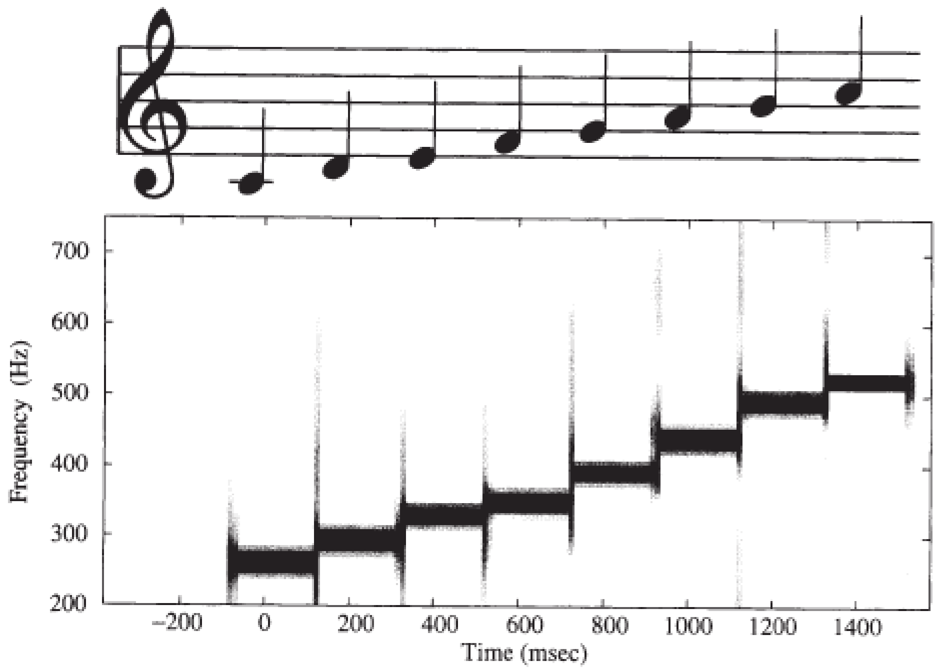




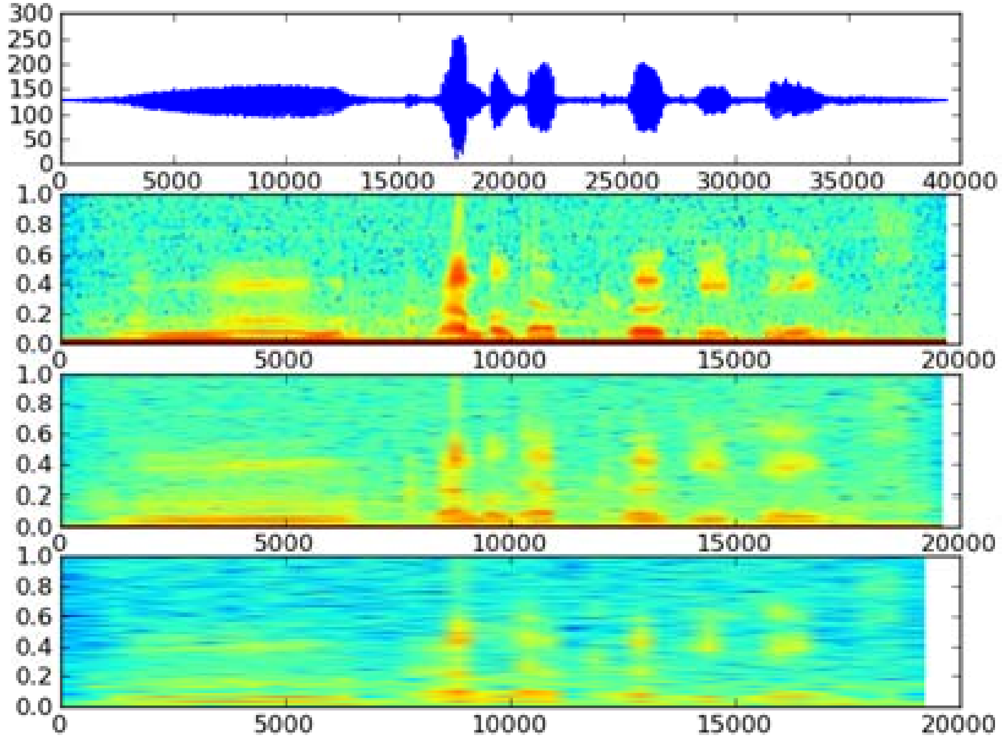
Representação Tempo-Frequência

- Espectrograma

  Representação gráfica da densidade espectral em função do tempo.



Espectrograma



No **python** o espectrograma está disponível na biblioteca pylab:

```
rate,data = read('mcrumble.wav')

subplot(411)
plot(range(len(data)),data)

subplot(412)
specgram(data, NFFT=128,
noverlap=0)

subplot(413)
specgram(data, NFFT=512,
noverlap=0)

subplot(414)
specgram(data, NFFT=1024,
noverlap=0)
```

NFFT: comprimento dos segmentos
noverlap: número de amostras sobrepostas entre segmentos consecutivos

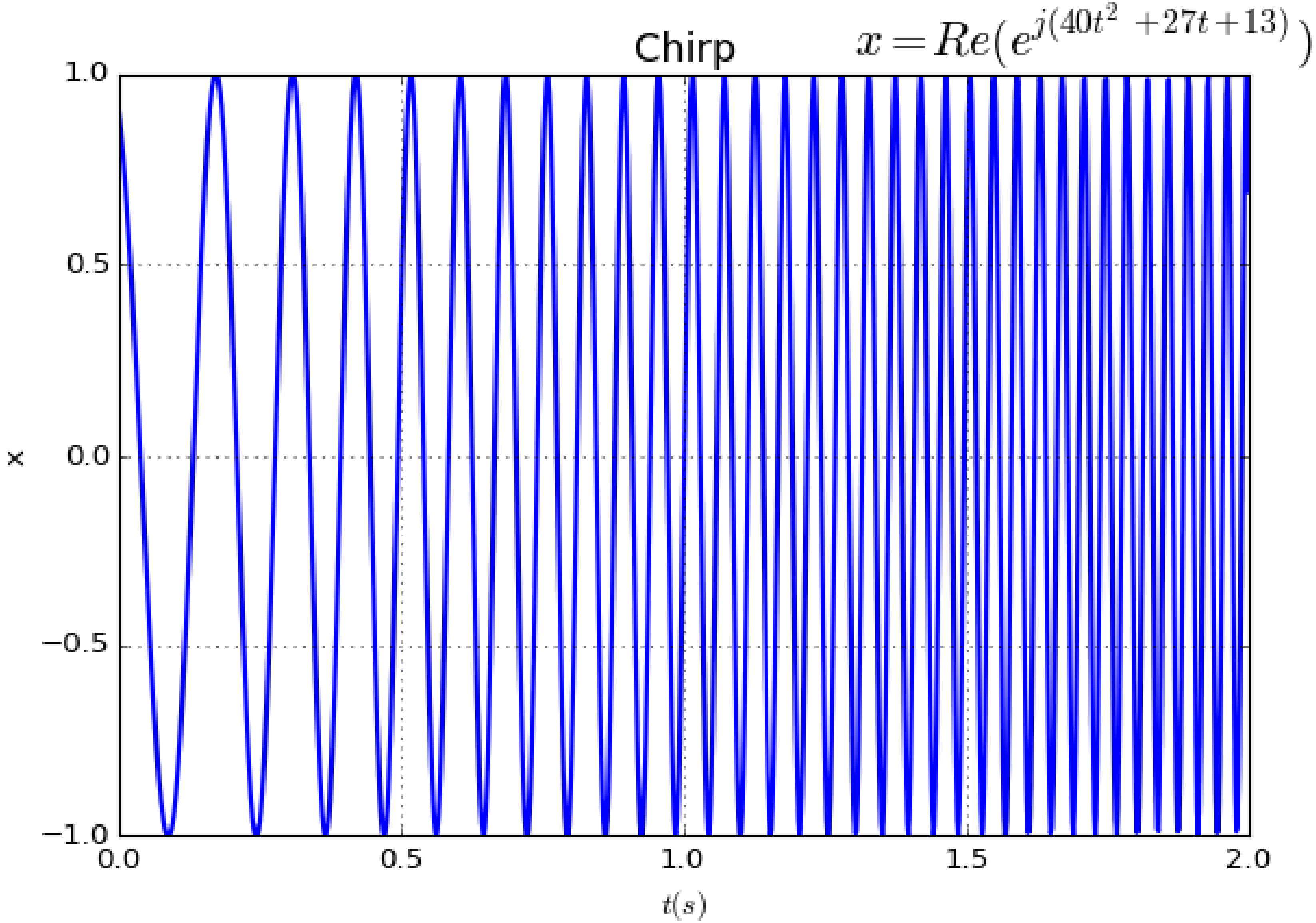
Segmentos compridos (NFFT grande):
- Boa definição na frequência (riscas horizontais finas)
- Má definicção no tempo (começo de notas “esborratadas”)

Segmentos curtos (NFFT pequeno):
- Má definição na frequência (riscas horizontais largas)
- Boa definição no tempo (começo de notas bem assinalado)

noverlap: valores entre [0; NFFT - 1]

- Valores altos suavizam as transições temporais (colunas)
- Valores típicos: 0 , NFFT/2

Chirp: Sinal em que a frequência varia com o tempo



Podemos ouvir o chirp....

- Ouve chirp
- Para ouvir este sinal foi necessário fazer uma conversão do tipo analógico para digital

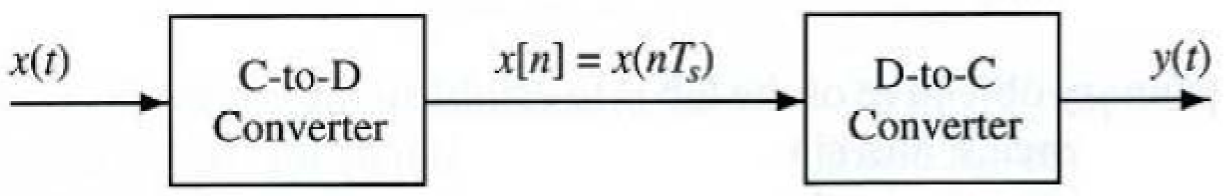


Figure C.1 Sampling and reconstruction of a continuous-time signal.

- É necessário amostrar o sinal a uma taxa compatível com a aparelhagem disponível e de modo a que o sinal mantenha as suas características.
- Em python uma boas taxas de amostragem são :

$$f_s = 11025 Hz \qquad f_s = 22050 Hz$$

$$T_s = \frac{1}{11025} s \qquad T_s = \frac{1}{22050} s$$

- Esta não é a única restrição à taxa de amostragem.
- **Teorema da amostragem**:
- Se o sinal x(t) é uma soma de sinusoides, o sinal reconstruído y(t) é igual a x(t) se a taxa de amostragem for maior que o dobro da maior frequência presente no sinal x(t):

$$f_s > 2\,f_{\max}$$

```python
Created on Wed Feb 24 19:54:51 2016
@author: Isabel
"""
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.io.wavfile as wav
from soundPlay  import soundPlay #módulo para aceder
#PDS- ouvir sinais               #ao porto de áudio
#fs=11025
fs=11025
# Para ouvir
t=np.arange(100000, 400000)/np.float(fs)
x=np.real(np.exp(1j*(40*t**2+27*t+13)))
# para fazer plot
t0=np.arange(0, 50000)/np.float(fs)
x0=np.real(np.exp(1j*(40*t0**2+27*t0+13)))
# para criar o sinal sonoro
y_sound_r=np.int16(np.round(x*(2**15)))

fig1 = plt.figure('Chirp',facecolor='w',figsize=(15,9))
plt.plot(t0, x0, 'k');
plt.grid('on')
plt.title('Chirp')
plt.axis('tight')
plt.xlabel(r'$t$ (segundos)')
plt.ylabel('amplitude')
plt.show()
# Para ouvir o som
soundPlay(x,fs)
# Para gravar o som
wav.write('chirp1.wav',fs ,y_sound_r)
```

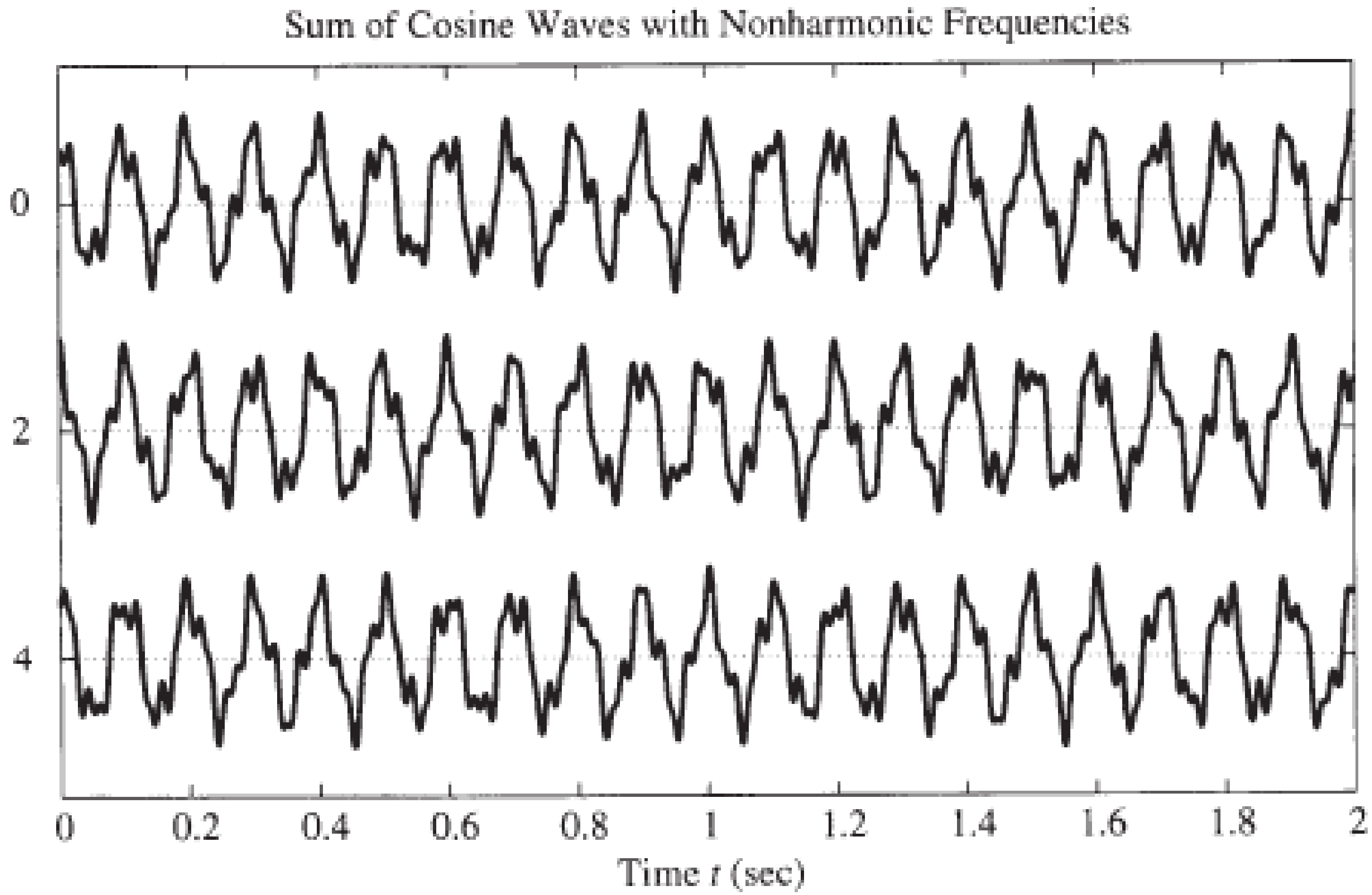
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.io.wavfile as wav
from soundPlay  import soundPlay #módulo para aceder

Fs = 11025.
Fs1=Fs
#Fs1=2.*Fs
#Fs1=25000.
Fo = 660.
T_total = 1.2;
tt = np.arange(0,T_total,1./Fs1)
#==================================
#--- make a scale for C major
#---
keys =   [ 40,  42,  44,  45,  47,  49,  51,  52 ];
#--NOTES:   C    D     E     F   G    A(la)    B    C
#      key #40 is middle-C

duration = 0.5;
tt = np.arange(0.,duration,1./Fs1)
y2 = [0.0];
for kk in np.arange(0,np.size(keys)):
   keynum = keys[kk]+7;      #<--- add 12 to move up one octave
   freq = 440 * (2. **((keynum-49)/12.))
   y2 = np.concatenate((y2, np.cos( 2*np.pi*freq*tt - np.pi/2 )),axis=1)
#y_sound0=np.int8(np.round(y2*(2**15)))#---
y_sound0=np.int16(np.round(y2))#---
plt.figure('1',facecolor='w',figsize=(15,10))
soundPlay(y_sound0,Fs)
wav.write('scale.wav',Fs ,y_sound0)

Fmax = Fs;
N_fft = 1024;   Nover = 512;
#[B,F,T] = specgram(y2,Nfft,Fmax,[],Nover);
plt.specgram(y2,NFFT=N_fft,Fs=Fmax,noverlap=Nover)
```

Transformada de Fourier

Os sinais não periódicos:

- Não apresentam padrões de repetição;
- Não têm frequência fundamental (nem período fundamental);
- São representados no domínio da frequência por um espectro contínuo.

Espectro de sinais não períodicos



Transformada de Fourier

- Um sinal não periódico pode ser visto como um sinal periódico com período fundamental T_o a tender para infinito

$$x(t) = X_0 + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

com

$$X'_k = \frac{X_k}{2}, k > 0$$

$$X'_k = \frac{X_k^*}{2}, k < 0$$

$$X'_0 = X_0$$

Com f_o a tender para zero (infinitesimal)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Transformada de Fourier

- Na série de Fourier bastava considerar exponenciais com frequências múltiplas da frequência fundamental;

- na transformada é necessário considerar todas as frequências

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- onde X(f) é uma amplitude complexa que se obtém calculando:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Chama-se um par de Fourier a: $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier (**TF**) mapeia um sinal no tempo na sua representação no domínio da frequência a que se chama **espectro**

- A transformada de Fourier Inversa mapeia o espectro novamente no domínio do tempo:

$$X(f) = TF\{\mathrm{x}(\mathrm{t})\}$$

e

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) = TF^{-1}\{X(f)\}$$

Pares Típicos da TF

$$
\begin{array}{ccc}
rect(at) & \leftrightarrow & \frac{1}{|a|} sinc(\frac{\omega}{2\pi a}) \\
sinc(at) & \leftrightarrow & \frac{\pi}{|a|} rect(\frac{\omega}{2a}) \\
e^{-at}u(t)\ a > 0 & \leftrightarrow & \frac{1}{a+j\omega} \\
e^{-at^2} & \leftrightarrow & \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \\
1 & \leftrightarrow & 2\pi\delta(\omega) \\
\delta(t) & \leftrightarrow & 1 \\
e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow & 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
\delta(t - t_0) & \leftrightarrow & e^{j\omega_0 t} \\
cos(\omega_0 t) & \leftrightarrow & \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \\
cos(\omega_0 t) & \leftrightarrow & \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)
\end{array}
$$