V – Resposta em Frequência

Processamento Digital de Sinais

Sumário

- Resposta em Frequência
  - Definição
  - Propriedades
- Resposta a uma sinusóide
  - Noção de Filtragem
  - Relações no domínio do tempo e frequência
  - Representação Gráfica (noção de dB)
- Associação entre Sistemas
- Filtros ideais

Resposta em Frequência

- Este capítulo é a continuação do estudo dos filtros FIR, agora do ponto de vista da resposta em frequência.

- Assume-se para já que a entrada x[n] é uma exponencial complexa.

- Neste caso, a saída y[n] é também uma exponencial complexa mas afectada pela resposta em frequência do sistema $H(\omega)$

Resposta de um filtro FIR a uma exponencial complexa

Considere um FIR em que o sinal de entrada é uma exponencial complexa: $x[n] = Ae^{j\hat{\omega}_0 n} \quad , \quad -\infty \leq n \leq \infty$

e que esta exponencial foi obtida por amostragem do sinal contínuo:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \quad , \quad \hat{\omega}_0 = \omega_0 T_S$$

Então à saída:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k A e^{j\hat{\omega}_0 (n-k)}$$

$$= Ae^{j\hat{\omega}_0 n} \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}_0 k} = Ae^{j\hat{\omega}_0 n} H\left(e^{j\hat{\omega}_0}\right)$$

Resposta em frequência do filtro

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

É habitual usar $\boldsymbol{H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)}$ por razões que têm a ver com a **transformada z**, mas também se pode escrever $H(\hat{\omega})$:

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

Quando a entrada é uma exponencial complexa com frequência $\hat{\omega}$, à saída tem-se também uma exponencial complexa de frequência $\hat{\omega}$.

O filtro altera apenas a amplitude do sinal de entrada e a fase ou seja a amplitude complexa do sinal.

Resposta a uma sinusóide - Filtragem

$$H(\hat{\omega}) = |H(\hat{\omega})| e^{j\measuredangle(H(\hat{\omega}))} = Re\big(H(\hat{\omega})\big) + jImag\big(H(\hat{\omega})\big)$$

$$x[n] \xrightarrow{\quad} \boxed{H(\hat{\omega})} \xrightarrow{\quad} y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x[n] = cos[\hat{\omega}n] \qquad y[n] = |H(\hat{\omega})| \cos[\hat{\omega}n + \angle H(\hat{\omega})]$$

- Sistemas: **não geram novas frequências**, são filtros que **amplificam ou atenuam** frequências presentes no sinal de entrada.

Relações no domínio do tempo e no domínio da frequência

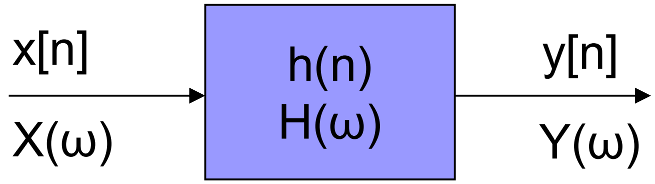
- **Convolução no tempo equivale a produto na frequência**:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \xleftrightarrow{\text{TF}} \quad Y(\hat{\omega}) = X(\hat{\omega}) \times H(\hat{\omega})$$

- Relação com a Transformada de Fourier:

$$TF\ \{y[n]\} = TF\ \{x[n] * h[n]\} = TF\ \{x[n]\} \times TF\ \{h[n]\}$$

Sumário: SLITs Discretos



- **No tempo:**

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)$$

- **Na frequência:**

$$Y(\hat{\omega}) = X(\hat{\omega})H(\hat{\omega})$$

$$H(\hat{\omega}) = TF\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\hat{\omega}n}$$

Exercício 1:

Seja $\{b_k\} = \{1,1,3,1,1\}$ o conjunto de coeficientes de um FIR.
Determine a resposta em frequência deste FIR.

Res.

$$H(\hat{\omega}) = TF\{h[n]\}$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{4} b_k e^{-j\hat{\omega}k} =$$

$$= 1 + e^{-j\hat{\omega}} + 3e^{-j2\hat{\omega}} + e^{-j3\hat{\omega}} + e^{-j4\hat{\omega}} =$$

$$= e^{-j2\hat{\omega}}\left[e^{j2\hat{\omega}} + e^{j\hat{\omega}} + 3 + e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}}\right]$$

$$= e^{-j2\hat{\omega}}\left[2\frac{e^{j2\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}}}{2} + 2\frac{e^{j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}}}{2} + 3\right] =$$

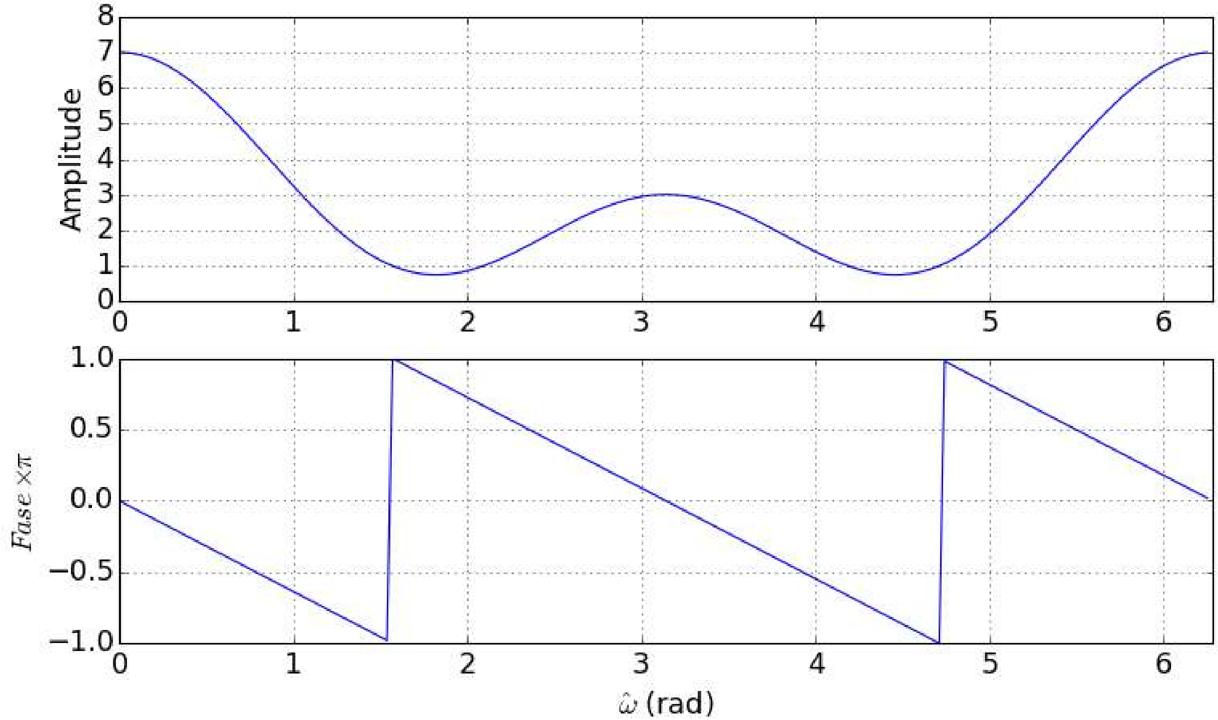
$$= e^{-j2\hat{\omega}}\left[2\cos(2\hat{\omega}) + 2\cos(\hat{\omega}) + 3\right]$$

$$H(\hat{\omega}) = \underbrace{e^{-j2\hat{\omega}}}_{\substack{\text{modulo1} \\ \text{fase=}\mathbf{-2}\hat{\omega}}} \underbrace{\left[2\cos(2\hat{\omega}) + 2\cos(\hat{\omega}) + 3\right]}_{\text{real}}$$

Assim

$$\left|H(\hat{\omega})\right| = 2\cos(2\hat{\omega}) + 2\cos(\hat{\omega}) + 3$$

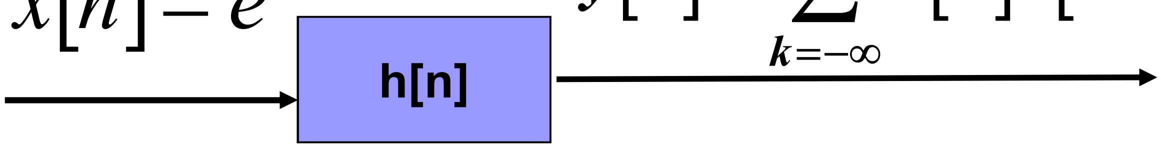
$$\angle H(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega}$$



Resposta em Frequência

- Este capítulo é a continuação do estudo dos filtros FIR, agora do ponto de vista da resposta em frequência.
- Assume-se para já que a entrada x[n] é exponencial complexa.
- Neste caso, a saída y[n] é também uma exponencial complexa mas afectada por H(ω)

$$x[n] = e^{j\hat{w}n}$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\hat{\omega}(n-k)}$$

$$y[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\hat{\omega}k}\right)e^{j\hat{\omega}n} = H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)e^{j\hat{\omega}n} = H(\hat{\omega})e^{j\hat{\omega}n}$$

$\hat{\omega} = \omega T_s = \dfrac{\omega}{F_s}$ é a frequência normalizada

Exercício 2:

Determine a saída $y[n]$ do FIR de coeficientes $\{b_k\} = \{1,1,3,1,1\}$ quando o sinal de entrada é $x[n] = 5e^{j(1n)}$

Res.

Do exercício anterior temos:

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{4} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = e^{-j2\hat{\omega}}\left[2\cos(2\hat{\omega}) + 2\cos(\hat{\omega}) + 3\right]$$

Como $x[n] = 5e^{j(1n)}$, $\hat{\omega} = 1 rad$ e a fase é zero.

$$y[n] = |H(1)| e^{-j2\times 1} x[n] =$$

$$= \left(2\cos(2\times 1) + 2\cos(1) + 3\right) e^{-j2\times 1} 5e^{j(1n)} =$$

$$= 3.248 \times e^{-j2} 5e^{jn} \quad = 16.24 \times e^{j(n-2)}$$

A resposta em **amplitude** ou ganho em $\hat{\omega} = 1 rad$ é $|H(1)| = 3.248$

O ganho expresso em decibel (ver adiante) é:

$$|H(\hat{\omega})|_{dB} = 20\log_{10}(3.248) = 10.232\ dB$$

Desenho gráfico da Resposta em Frequência

- Resposta em Amplitude: $\left|H(\hat{\omega})\right| = \left|H(-\hat{\omega})\right|$

$$\left|H(\hat{\omega})\right| = \left|\frac{Y(\hat{\omega})}{X(\hat{\omega})}\right|$$

- Resposta de fase:

$$\arg(H(\hat{\omega})) = -\arg(H(-\hat{\omega}))$$

$$\arg\{H(\hat{\omega})\} = \arg\{Y(\hat{\omega})\} - \arg\{X(\hat{\omega})\}$$

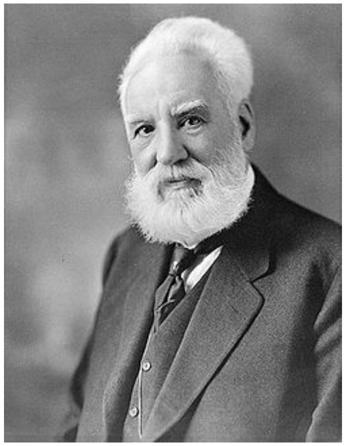
Desenho gráfico da Resposta em Frequência

- Usando dB
  - Resposta em Amplitude: $\left|H(\hat{\omega})\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|H(\hat{\omega})\right|$

• dB = deciBel, em homenagem a Alexander Bell é uma unidade de ganho em escala logarítimica
• A função logaritmo goza das seguintes propriedades:

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$



Alexander G. Bell (1847 - 1922)

dBs

Unidades de Ganho (I) **dB**

Ganho de potência em dB (deciBel)

$$Ganho = \frac{P_o}{P_i}$$

$$G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_o}{P_i}\right)$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$$

Linear	Log (dB)
2	3
4	6
10	10
20	13
100	20
1000	30
0,5	-3
0,1	-10
0,01	-20

Ganho de amplitude (tensão eléctrica) em dB (deciBel)

dBs

Ganhos de potência

$$G = 10\log_{10}(g)$$

$$g = 10^{\frac{G}{10}}$$

Ganhos de amplitude

$$G = 20\log_{10}(g)$$

$$g = 10^{\frac{G}{20}}$$

Exemplo: Duas exponenciais à entrada:

Determine a saída $y[n]$ de um FIR quando o sinal de entrada é uma sinusóide real $x[n] = A\cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$

Res.

Usando a formula de Euler ficamos com a soma de exponenciais complexas:

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j(\hat{\omega}_0 n + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \phi)}$$

Usando o princípio da sobreposição:

$$y[n] = \frac{A}{2} H(\hat{\omega}_0) e^{j(\hat{\omega}_0 n + \phi)} + \frac{A}{2} H(-\hat{\omega}_0) e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \phi)}$$

Usando a simetria Hermitiana:

$$|H(\hat{\omega})| = |H(-\hat{\omega})|$$

$$\angle(H(-\hat{\omega})) = -\angle(H(\hat{\omega}))$$

Tem-se:

$$y[n] = A|H(\hat{\omega}_0)| \left[\frac{e^{j(\hat{\omega}_0 n + \phi + \angle H(\hat{\omega}_0))} + e^{-j(\hat{\omega}_0 n + \phi + \angle H(\hat{\omega}_0))}}{2} \right]$$

Generalização
Resposta de um SLIT a uma soma de sinusoídes

Entrada:

$$\boxed{x[n] = X_0 + \sum_{k=1}^{N} |X_k| \cos\left(\hat{\omega}_k n + \angle X_k\right)}$$

Saída:

$$\boxed{y[n] = X_0 H(0) + \sum_{k=1}^{N} |X_k| \left|H(\hat{\omega}_k)\right| \cos\left(\hat{\omega}_k n + \angle X_k + \angle H(\hat{\omega}_k)\right)}$$

Exercício 3:
Determine a resposta em frequência do FIR de média móvel de ordem 10.
Represente graficamente a amplitude e fase da resposta em frequência.

Res.
Resposta em frequência do filtro

$$\{b_k\} = \frac{1}{11}\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$$

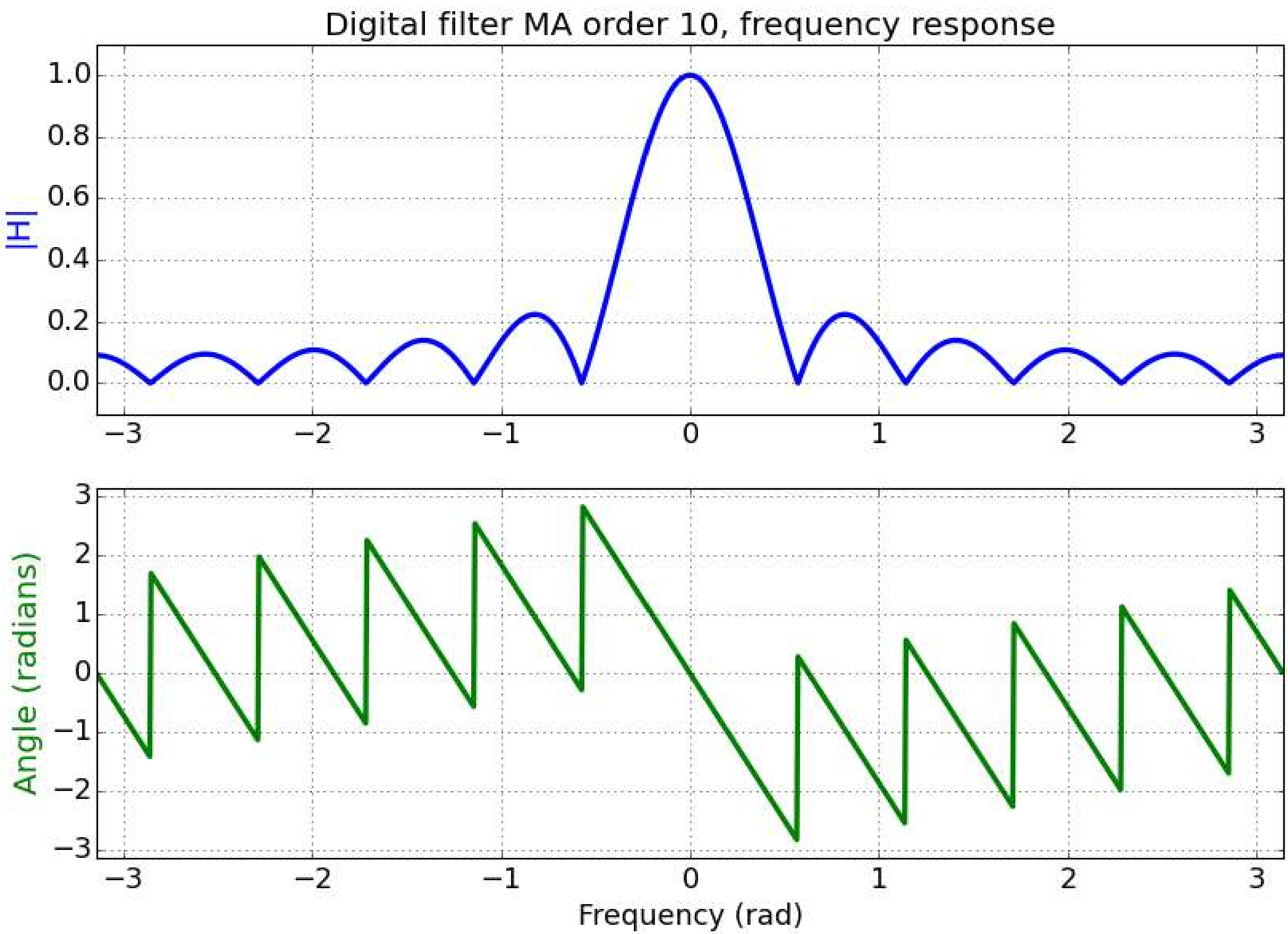
$$H(\hat{\omega}) = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} e^{-j\hat{\omega}k} = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10}\left(e^{-j\hat{\omega}}\right)^k = \frac{1}{11}\frac{1-e^{-j\hat{\omega}11}}{1-e^{-j\hat{\omega}}} =$$

NOTA: $\sum_{k=0}^{L-1} r^k = \frac{1-r^L}{1-r}$ **soma dos L primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r. Neste caso** $r = e^{-j\omega}$

$$=\frac{1}{11}\frac{e^{-j\hat{\omega}\frac{11}{2}}\left(\frac{e^{j\hat{\omega}\frac{11}{2}}-e^{-j\hat{\omega}\frac{11}{2}}}{2j}\right)\times 2j}{e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\hat{\omega}}{2}}-e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}}{2j}\right)\times 2j}=\frac{1}{11}\frac{e^{-j\hat{\omega}\frac{11}{2}}\sin\left(\hat{\omega}\frac{11}{2}\right)}{e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{11}e^{-j\hat{\omega}\frac{10}{2}}\boxed{\frac{\sin\left(\hat{\omega}\frac{11}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}}=\frac{1}{11}e^{-j\hat{\omega}\frac{10}{2}}D_{11}\left(\hat{\omega}\right)=\frac{1}{11}e^{-j\hat{\omega}5}D_{11}\left(\hat{\omega}\right)$$

Função de Dirichlet: $$D_L\left(\hat{\omega}\right)=\frac{\sin\left(\hat{\omega}\frac{L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}$$


Digital filter MA order 10, frequency response
|H|
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
Angle (radians)
Frequency (rad)

Exercício 4:

Determine a saída $y[n]$ do FIR de coeficientes $\{b_k\} = \{1, -1, 1\}$ quando o sinal de entrada é

$$x[n] = 10 + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

Represente graficamente a amplitude e fase da resposta em frequência do FIR

Exercício 5

Considere um SLIT cuja resposta impulsional é:

$$h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

Calcule a resposta em frequência do sistema.

Exercício 6

Considere um SLIT cuja resposta em frequência é:

$$H(\hat{\omega}) = 2j\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}$$

Determine a sua resposta impulsional

Exercício 7

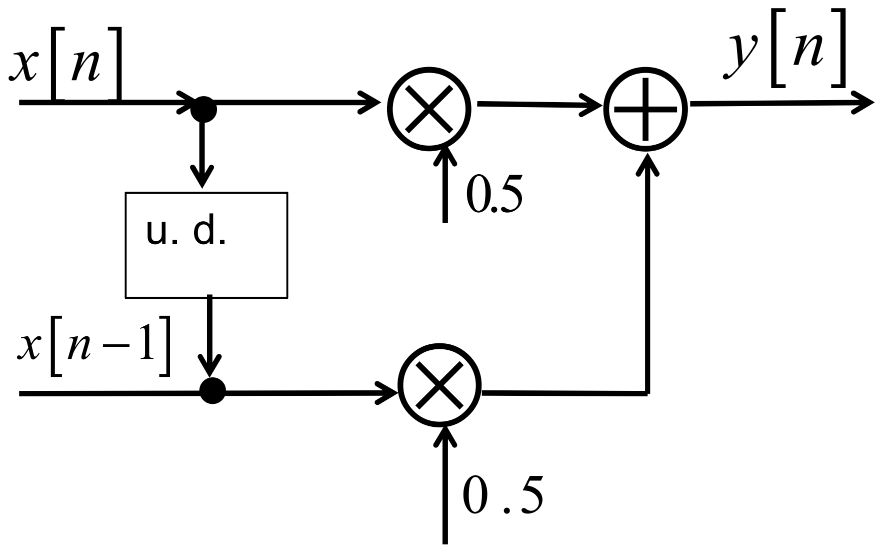
Considere um SLIT que é um filtro passa-baixo:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Calcule a resposta em frequência do sistema.

Exercício 8

- Considere o seguinte diagrama de blocos



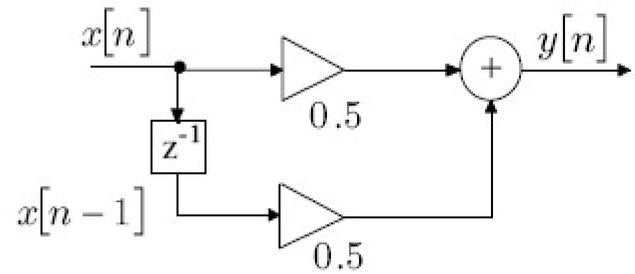
a) Qual a resposta em frequência?

b) Desenhe a resposta em amplitude e de fase do sistema.

Exercício

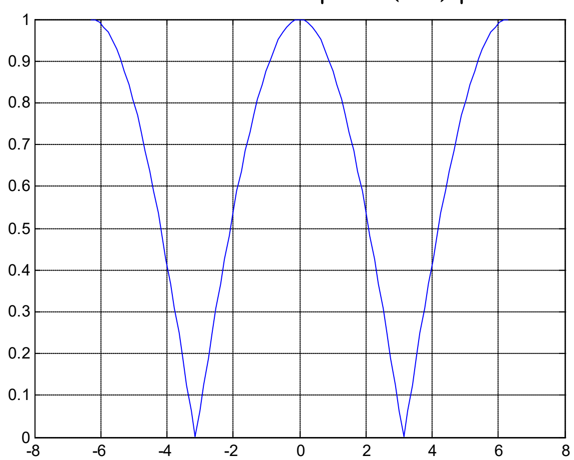
- H(ω) periódica de período 2π

$$H(\hat{\omega}) = 0.5 + 0.5e^{-j\hat{\omega}}$$



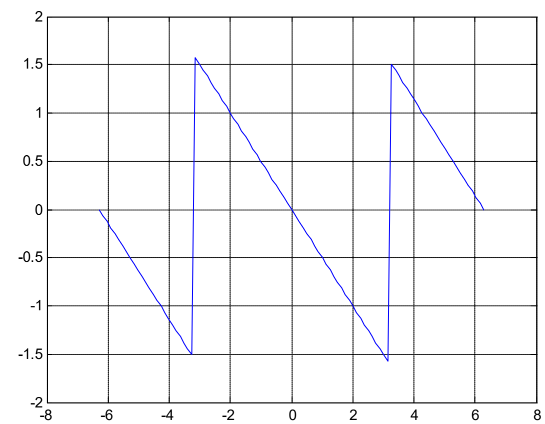
- Resposta em Amplitude

$$|H(\hat{\omega})| = \left|\frac{Y(\hat{\omega})}{X(\hat{\omega})}\right|$$



- Resposta de fase

$$\arg\{H(\hat{\omega})\} = \arg\{Y(\hat{\omega})\} - \arg\{X(\hat{\omega})\}$$



@Python

```
import scipy.signal as sp
import numpy as np

b = [0.5,0.5]
w, h = sp.freqz(b)
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
plt.title('Resposta em Amplitude |H(w)|')
ax1 = fig.add_subplot(111)
#plt.semilogy(w, np.abs(h), 'b')
#plt.ylabel('Amplitude (dB)', color='b')
plt.plot(w, np.abs(h), 'b')
plt.xlabel('Frequency (rad/sample)')
plt.grid()
plt.legend()

fig = plt.figure()
plt.title('Resposta de Fase')
ax1 = fig.add_subplot(111)
plt.plot(w, np.angle(h), 'b')
```

Transformada Z

- Definição:

$$TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

onde z é um número complexo.

- Transformação do domínio n para o domínio Z:

$$x[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z)$$

A **transformada z** é estudada neste curso pela sua utilidade

•A convolução é equivalente à multiplicação de polinómios .

•Operações algébricas habituais tais como **multiplicação**, **divisão** e **factorização** de **polinómios** podem ser interpretadas como **composição** ou decomposição de **SLITs.**

•As **raízes dos polinómios** envolvidos são muito importantes porque a sua **localização** permite-nos o conhecimento de grande parte das propriedades dos filtros digitais.

3 domínios de representação dos sinais e sistemas:

Domínio – n (do tempo).
Este é o domínio das sucessões temporais(digitalizadas), das respostas impulsionais e das equações às diferenças.

Domínio – f ou ω (da frequência)
Este é o domínio das respostas em frequência e das representações espectrais

Domínio – z
Este é o domínio das transformadas-z, dos polinómios, funções racionais, dos zeros e pólos e dos operadores.

Estes domínios coexistem porque determinada análise que seja difícil num dos domínios, torna-se mais fácil noutro.

Transformada Z

- Seja $x[n]$ um sinal de comprimento M+1 finito. Então a sua transformada z é dada por:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M} x[k]\left(z^{-1}\right)^{k}$$

Representação do sinal:

Domínio – n	Domínio – ω	Domínio - z
$x[n] = \sum_{k=0}^{M} x[k]\delta[n-k]$	$X(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} x[k]e^{-j\hat{\omega}k}$	$X(z) = \sum_{k=0}^{M} x[k]\left(z^{-1}\right)^{k}$

Exemplos

1

$$x[n] = \delta[n-2] \xrightarrow{\text{Tz}} X(z) = z^{-2}$$

2

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$$

$$\Big\downarrow \text{ Tz}^{-1}$$

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

3 Filtro FIR

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \xrightarrow{\text{Tz}} H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Exemplo: Factorização

Considere um SLIT definido pela equação às diferenças:

$$y[n] = 6x[n] - 5x[n-1] + x[n-2]$$

Determine a transformada z na forma de uma função racional (onde não aparecem potências negativas de z), com os termos factorizados.

$$H(z) = 6 - 5z^{-1} + z^{-2}$$

função racional

$$6 - 5z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2\left(6 - 5z^{-1} + z^{-2}\right)}{z^2} = \frac{6z^2 - 5z + 1}{z^2}$$

Factorização do numerador

$$6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \vee z = \frac{1}{3}$$

$$6z^2 - 5z + 1 = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)$$

$$H(z) = \frac{6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}{z^2}$$

Esta é uma das formas mais convenientes de escrever a transformada z da resposta impulsional de um SLIT, porque permite calcular zeros (zeros do mumerador) e pólos (zeros do denominador).

Sabendo que $X(z)$ é a tranformada z de $x[n]$ determine a transformada z de $x[n-5]$

$$x[n-5] \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-5}X(z)$$

Exercício 9

ISEL - DEETC - LERCM
Processamento Digital de Sinais
5º Mini-teste - 2009/06/19
Duração: 30 minutos

Nome:
Número:

---

1. Considere o SLIT discreto dado pela seguinte equação às diferenças: $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 1.5x[n-2] - 0.5x[n-3]$

   (a) Calcule a resposta impulsional que caracteriza o sistema.

   (b) Calcule a resposta em frequência.

   (c) Qual a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada esta presente o sinal $x[n] = 10 + 5\cos[\frac{2\pi}{3}n] + \cos[\pi n]$?

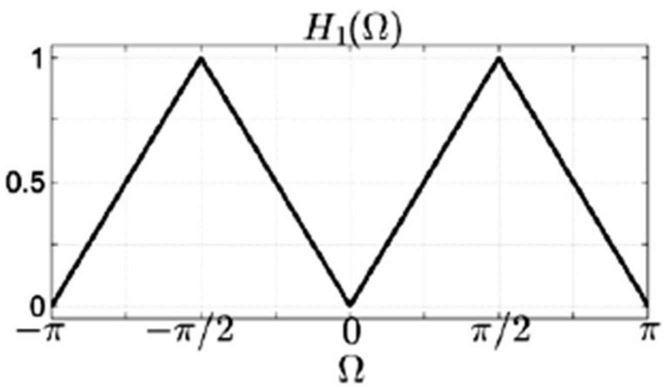
   (d) Classifique o sistema quanto às seguintes propriedades: causalidade, estabilidade e invertibilidade.

Exercício 10: **1ª Chamada** – 7 de Julho de 2015

5. Considere os sistemas S_1, cuja resposta em frequência está representada na Figura (assuma fase nula) e S_2 com resposta em frequência dada por $H_2(\Omega) = 1 - H_1(\Omega)$. Considere ainda o sinal $x[n] = 2 + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]$

   (a) Qual o sinal à saída de S_1 quando à sua entrada está $x[n]$?

   (b) Qual o sinal à saída de S_2 quando à sua entrada está $x[n]$?



Exercício 11: 1ª Chamada - Semestre Verão 2013/14 - 04/07/2014

5. Considere um SLIT S, cuja função de transferência é dada por:

$$H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2},$$

(a) Qual a equação às diferenças que caracteriza este sistema?

(b) Determine a resposta impulsional do sistema.

(c) Esboce a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada está presente o sinal $x[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1]$.

(d) Esboce a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada está presente o sinal $x[n] = 1 + 2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$.

a) $H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$

Comparando com a forma da resposta em frequência de um FIR

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} b_k z^{-k}$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -\sqrt{2}$$

$$b_2 = 1$$

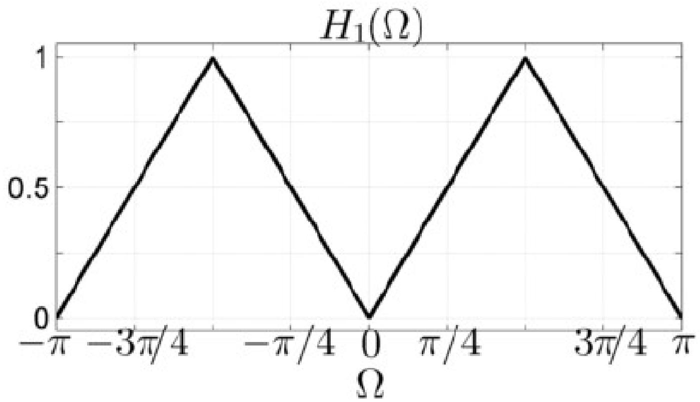
$$y[n] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2]$$

Exame de Época Especial 14 de Setembro de 2015

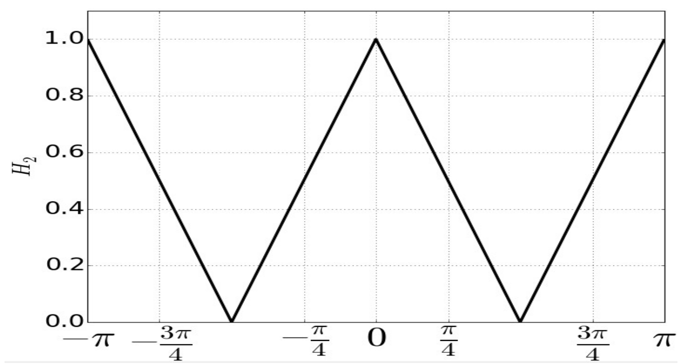
5. Considere o sistema discreto S_1, cuja resposta em frequência está representada na figura (assuma fase nula) e o sistema S_2 com resposta em frequência dada por $H_2(\Omega) = 1 - H_1(\Omega)$. Considere ainda o sinal $x[n] = 2 + \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{3\pi}{4}n\right]$

(a) {1.0 v} Esboce a resposta em frequência $H_2(\Omega)$.

(b) {1.0 v} Qual o sinal à saída de S_2 quando à sua entrada está $x[n]$?



a)

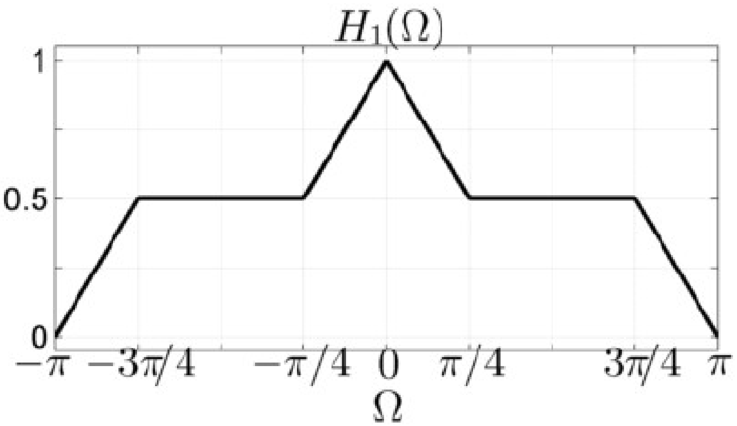


Exame Nº 2 23 de Julho de 2015

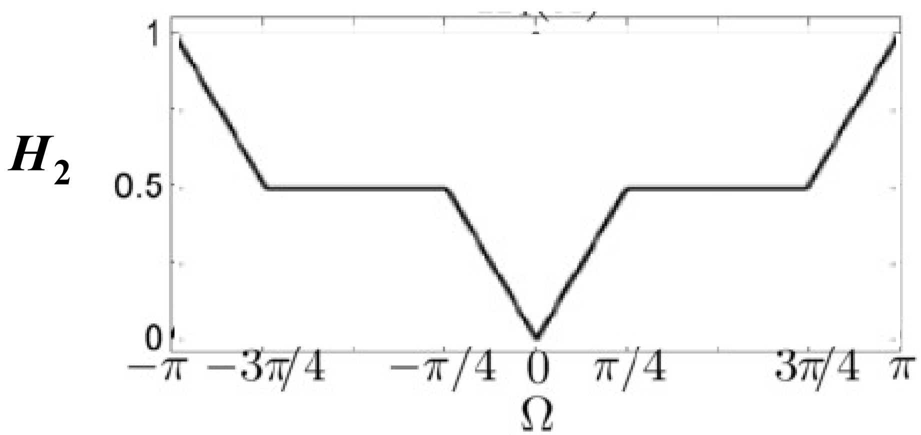
5. Considere o sistema discreto S_1, cuja resposta em frequência está representada na figura (assuma fase nula) e o sistema S_2 com resposta em frequência dada por $H_2(\Omega) = 1 - H_1(\Omega)$. Considere ainda o sinal $x[n] = 2 + \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{3\pi}{4}n\right]$

(a) {1.0 v} Esboce a resposta em frequência $H_2(\Omega)$.

(b) {1.0 v} Qual o sinal à saída de S_2 quando à sua entrada está $x[n]$?



a)

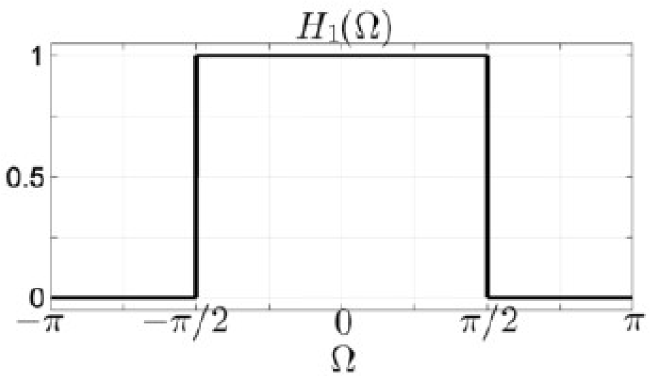


Teste Nº 2 8 de Junho de 2015

3. Considere os sistemas S_1, cuja resposta em frequência está representada na Figura (assuma fase nula) e S_2 com resposta em frequência dada por $H_2(\Omega) = 1 - H_1(\Omega)$. Considere ainda o sinal $x[n] = 1 + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] - \frac{3}{4}\cos\left[\frac{3\pi}{4}n\right]$

(a) {1.5v} Qual o sinal à saída de S_1 quando à sua entrada está $x[n]$?

(b) {1.5v} Qual o sinal à saída de S_2 quando à sua entrada está $x[n]$?



(c) Considere o sistema S_s resultante dos dois sistemas S_1 e S_2 colocados em série.

i. {1v} Represente graficamente a resposta em frequência, $H_s(\Omega)$, do sistema S_s.

ii. {1v} Qual o sinal à saída de S_s quando à sua entrada está $x[n]$?

2º Teste - Semestre Verão 2012/13 - 07/06/2013

2. Considere os SLITs S_1 e S_2 descritos pelas respostas impulsionais:

$$h_1(n) = -\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3),$$

$$h_2(n) = 2\delta(n) + \delta(n-2)$$

   (a) {2v} Desenhe o diagrama de blocos que implemente o sistema S_1.

   (b) {2v} Considerando que se coloca os sistemas S_1 e S_2 em paralelo determine a resposta impulsional equivalente.

   (c) {2v} Determine a saída dos sistemas $S_2[n]$, quando na entrada está presente o sinal $x[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1]$.

Exercício

Suponha que a resposta em frequência de um sistema é dada por:

$$H[\omega]=\left(1-e^{-j\omega}\right)\left(1-e^{-j2\omega}\right)\left(1+e^{-j\omega}\right)$$

a) Escreva a equação às diferenças do sistema.
b) Determine a amplitude e a fase da resposta em frequência do sistema. O resultado não pode apresentar números complexos nem raízes quadradas.
c) Este sistema pode anular certos sinais de entrada. Para que frequências a resposta ao sinal de entrada é zero?

d) Quando o sinal de entrada é :

$$x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{3}n\right]$$

determine o sinal de saída na forma $y[n]=A\cos\left[\Omega_0 n+\phi\right]$

Exercício

Suponha que a resposta em frequência de um SLITé dada por:

$$H(\Omega) = 1 - 2e^{-j2\Omega} - 4e^{-j4\Omega}$$

Determine o sinal de saída quando o sinal de entrada é :

$$x[n] = 20 - 20\delta[n] + 20\cos\left[\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right], \quad -\infty < n < \infty$$

Exercicio

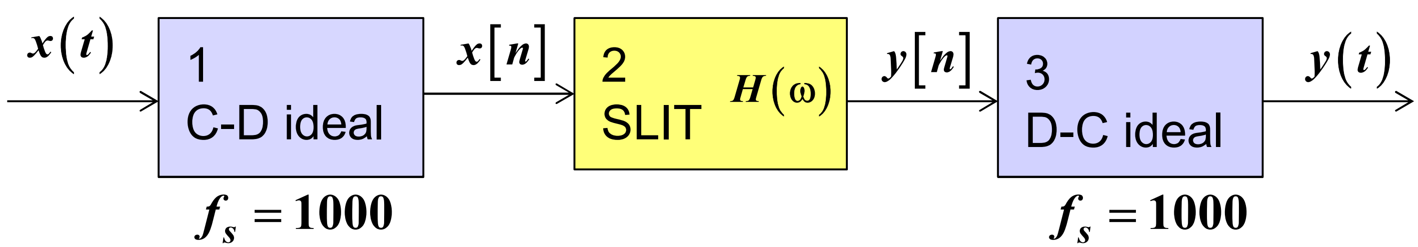
Um conversor analógico-digital (C-D) tem como sinal de entrada:

$$x(t) = 4 + \cos\left(250\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\left(2000\frac{\pi}{3}t\right)$$

A resposta em frequência do sistema é:

$$H(\omega) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right)$$

Sabendo que a frequência de amostragem é $f_s = 1000$, determine uma expressão para a saída do conversor digital-analógico(D-C) , $y(t)$.



5. Considere um SLIT S, cuja função de transferência é dada por:

$$H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2},$$

(a) Qual a equação às diferenças que caracteriza este sistema?

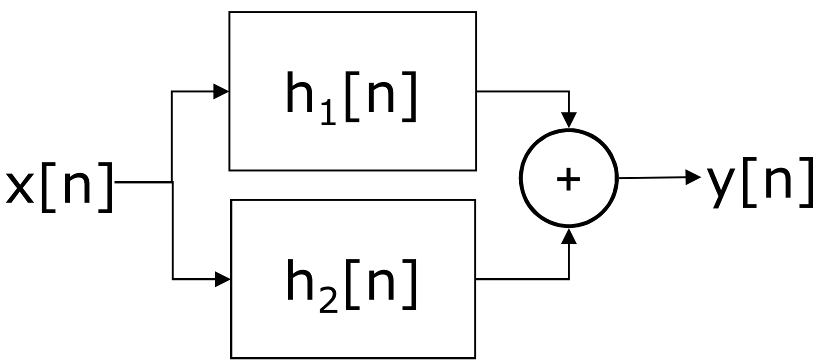
(b) Determine a resposta impulsional do sistema.

(c) Esboce a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada está presente o sinal $x[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1]$.

(d) Esboce a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada está presente o sinal $x[n] = 1 + 2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$.

Associação entre Sistemas

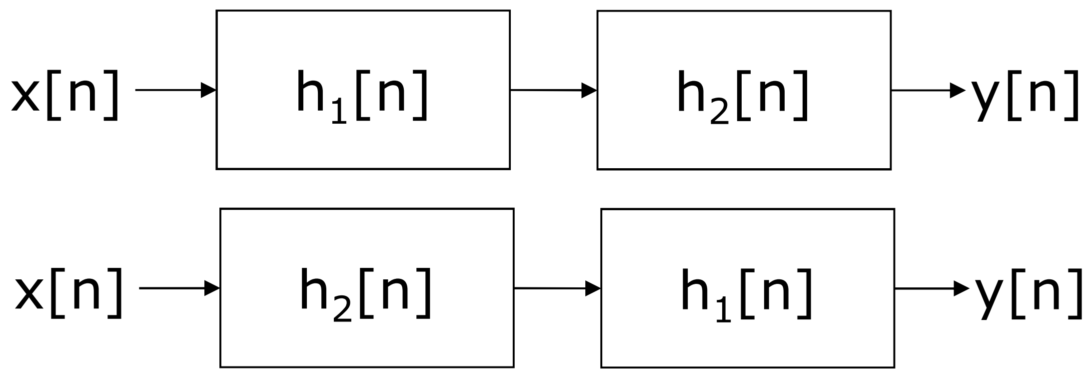
- Paralelo



$$h_{eq}[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H_{eq}(\widehat{w}) = H_1(\widehat{w}) + H_2(\widehat{w})$$

- Série

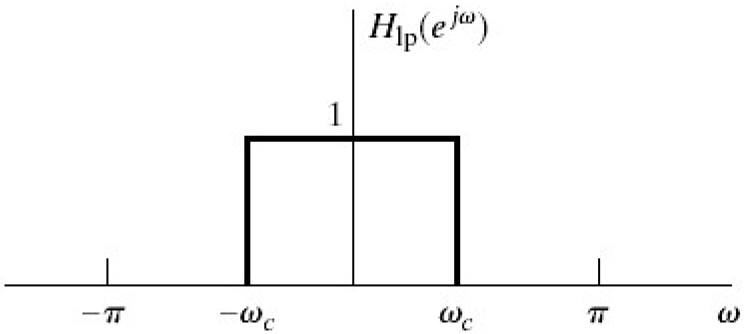


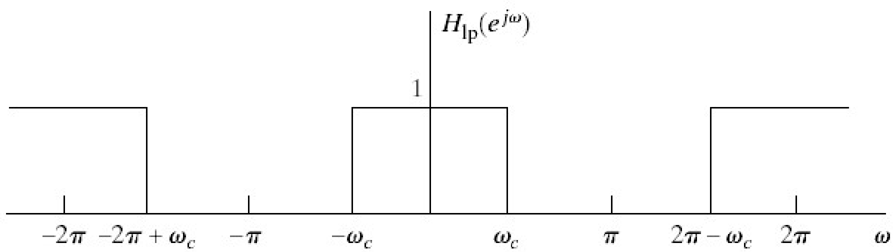
$$h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H_{eq}(\widehat{w}) = H_1(\widehat{w}) H_2(\widehat{w})$$

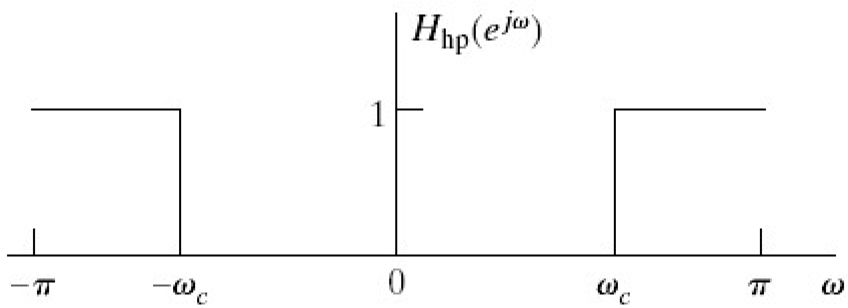
Filtros Ideais

- Passa Baixo



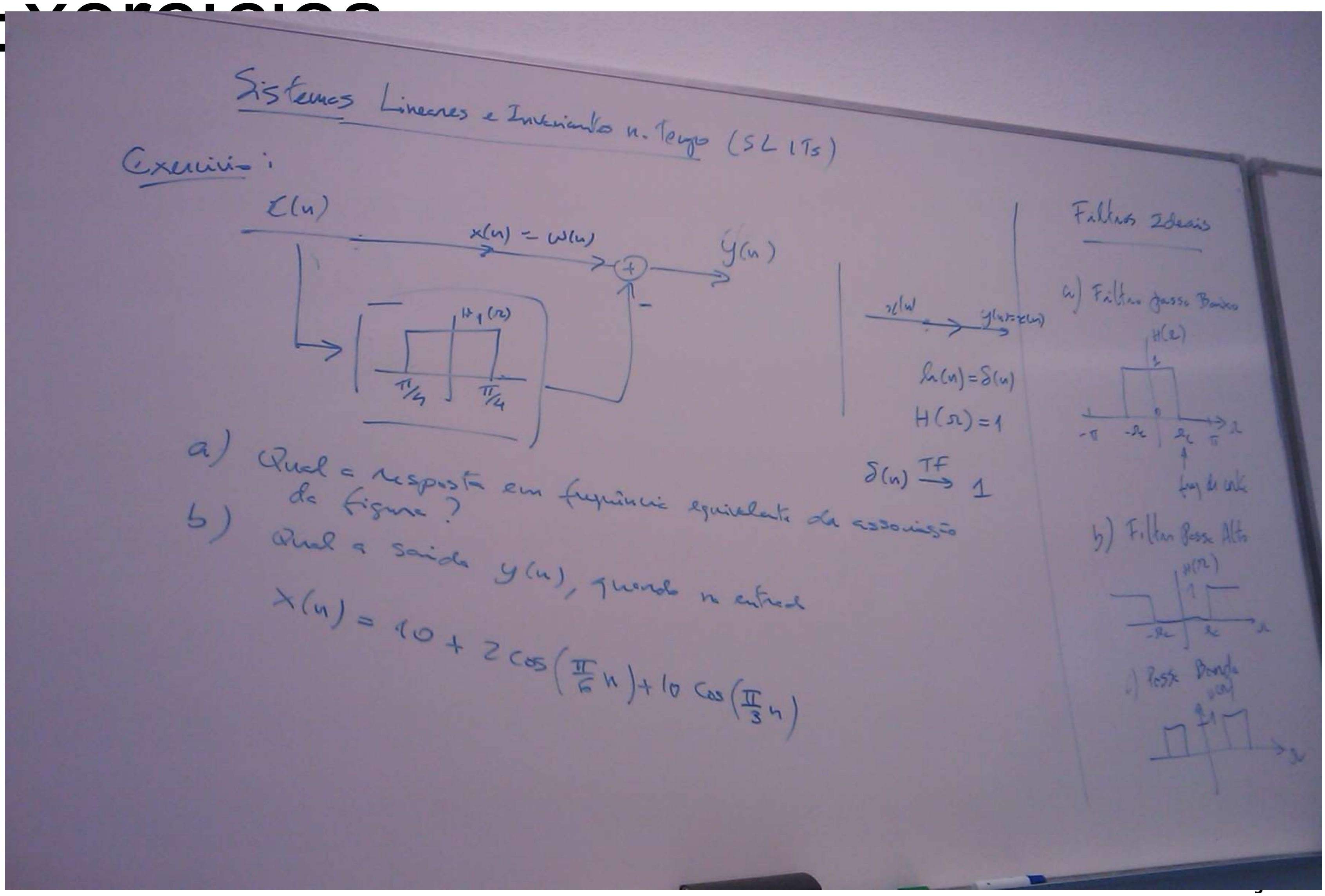


- Passa Alto



$$H_{hp}(\Omega) = 1 - H_{lp}(\Omega)$$

Exercícios



Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (SLITs)
Exercício:
x(n)
y(n)
a) Qual a resposta em frequência equivalente da associação da figura?
b) Qual a saída y(n), quando a entrada
x(n) = 10 + 2 cos(π/6 n) + 10 cos(π/3 n)
h(n) = δ(n)
H(Ω) = 1
Filtros Ideais

Exercícios

ISEL - DEETC - LERCM
Processamento Digital de Sinais
Exame de 1ª Época - 2010/01/15
Duração: 2h 30m

3. Considere o SLIT discreto caracterizado pela resposta em frequência $H(\Omega)$, para $-\pi < \Omega < \pi$.

$$H(\Omega) = 1 - u\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) + u\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

(a) Represente graficamente $H(\Omega)$.

(b) Trata-se de um sistema passa-baixo, passa-banda ou passa-alto? Justifique.

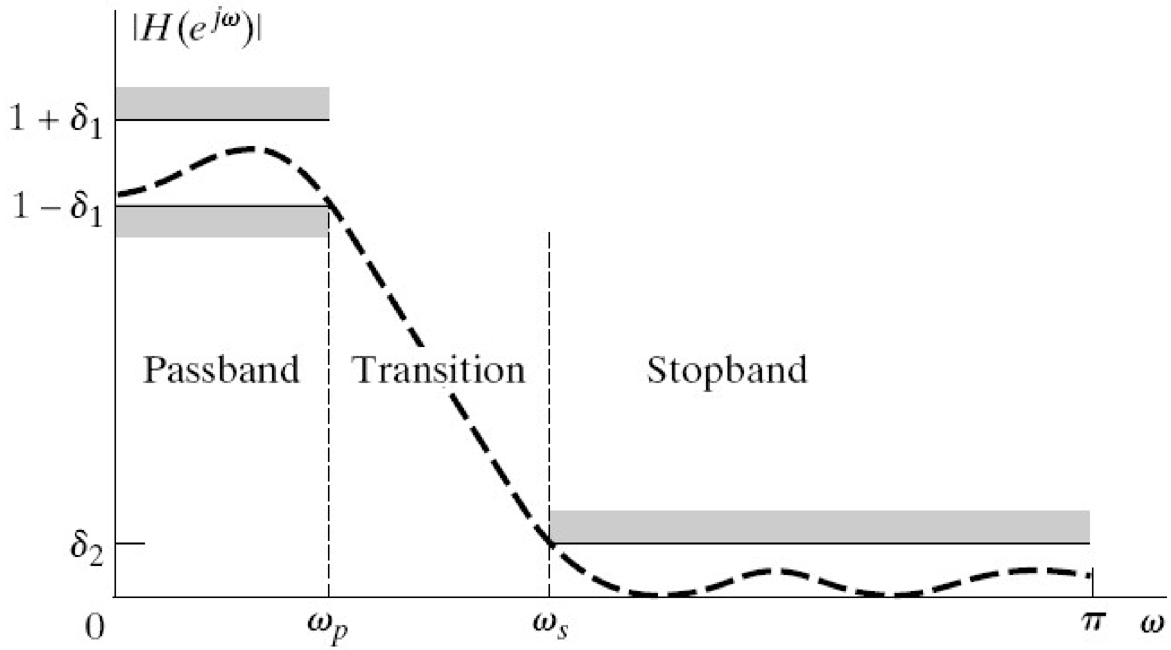
(d) Qual a saída do sistema, $y_1[n]$, quando a entrada é o sinal $x_1[n]$:

$$x_1[n] = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

(e) Qual a saída do sistema, $y_2[n]$, quando a entrada é o sinal $x_2[n]$:

$$x_2[n] = 3\cos(\pi n)$$

Características dos Filtros



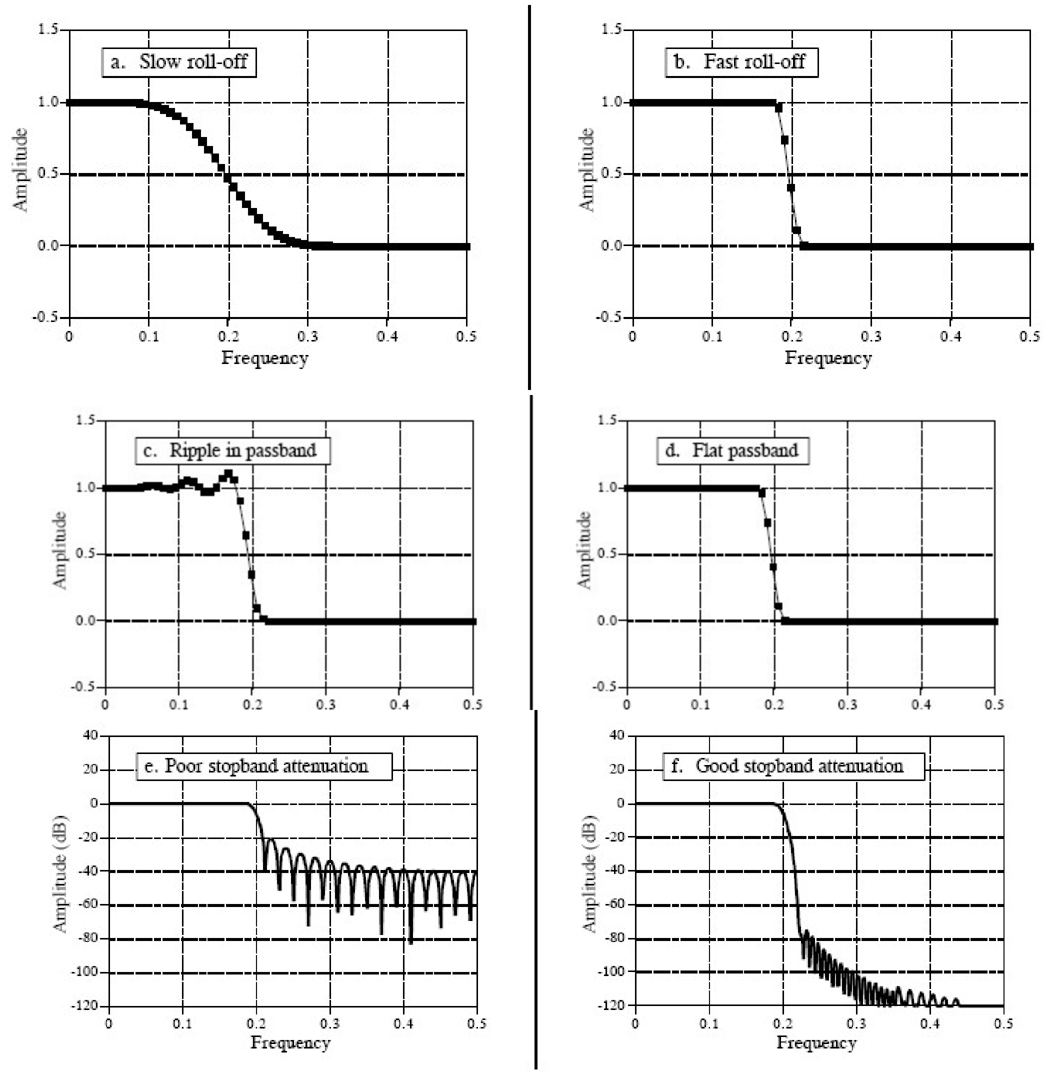
Passband
edge freq

Stopband
edge freq

- Frequência de corte
- Banda de passagem, transição e de corte
- Atenuações

Características dos Filtros

- Banda de Transição (Transition Band)
  - Roll – off
- Banda de Passagem (PassBand)
  - Ripple
- Banda de Corte (StopBand)
  - Atenuação



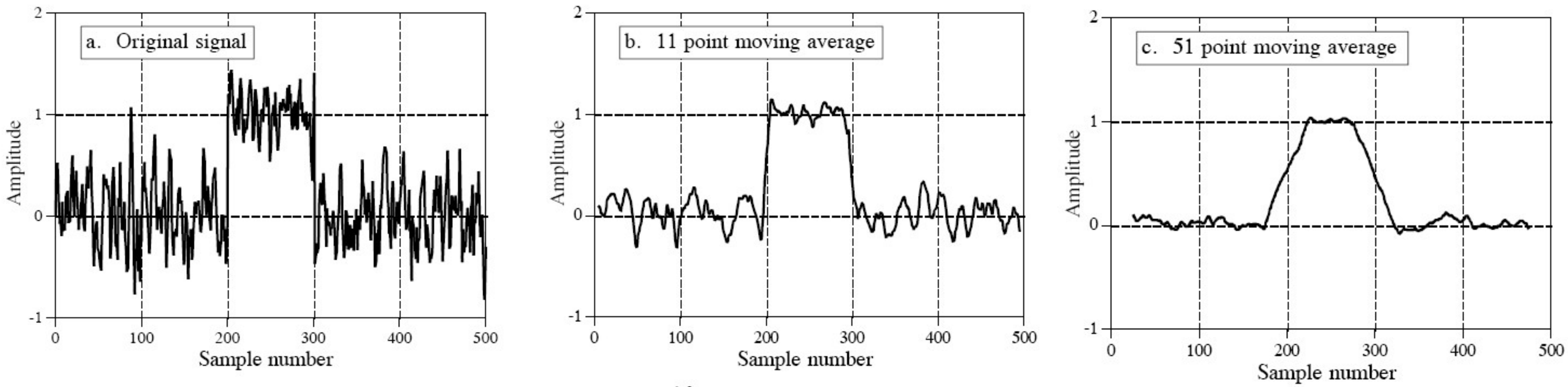
Exemplo: Filtros Média Móvel (Moving Average)

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j]$$

$$y[i] = y[i-1] + x[i+p] - x[i-q]$$

where: $p = (M-1)/2$

$q = p + 1$



$$H[f] = \frac{\sin(\pi f M)}{M \sin(\pi f)}$$