III – Amostragem

Processamento Digital de Sinais

2011/12 © ISEL-DEETC
André Lourenço
Gonçalo Valadão

Sumário

- Amostragem
- Teorema da Amostragem
- Aliasing
- Interpolação

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAL

Objectivo deste capítulo

Entender o teorema da amostragem:

Quando um sinal é amostrado a uma taxa superior a duas vezes a frequência mais alta do espectro do sinal, então é possível reconstruir exatamente o sinal original a partir das amostras.

Ex: CDs ónde a música é guardada no forma digital e o leitor de CDs reconstroi o sinal que se ouve (sinal contínuo) na forma analógica.

O processo de reconstrução é basicamente **interpolação** (ligar as bolinhas do stem por uma linha de plot)

Os computadores não lidam com sinais continuos diretamente: manipulam-nos simbolicamente ou numericamente, mas sempre na forma discreta.

Um sinal discreto é uma sucessão de índice n que só por si não tem informação sobre o tempo.
Estes índices estão relacionados com instantes de tempo através do período de amostragem T_S do sinal:

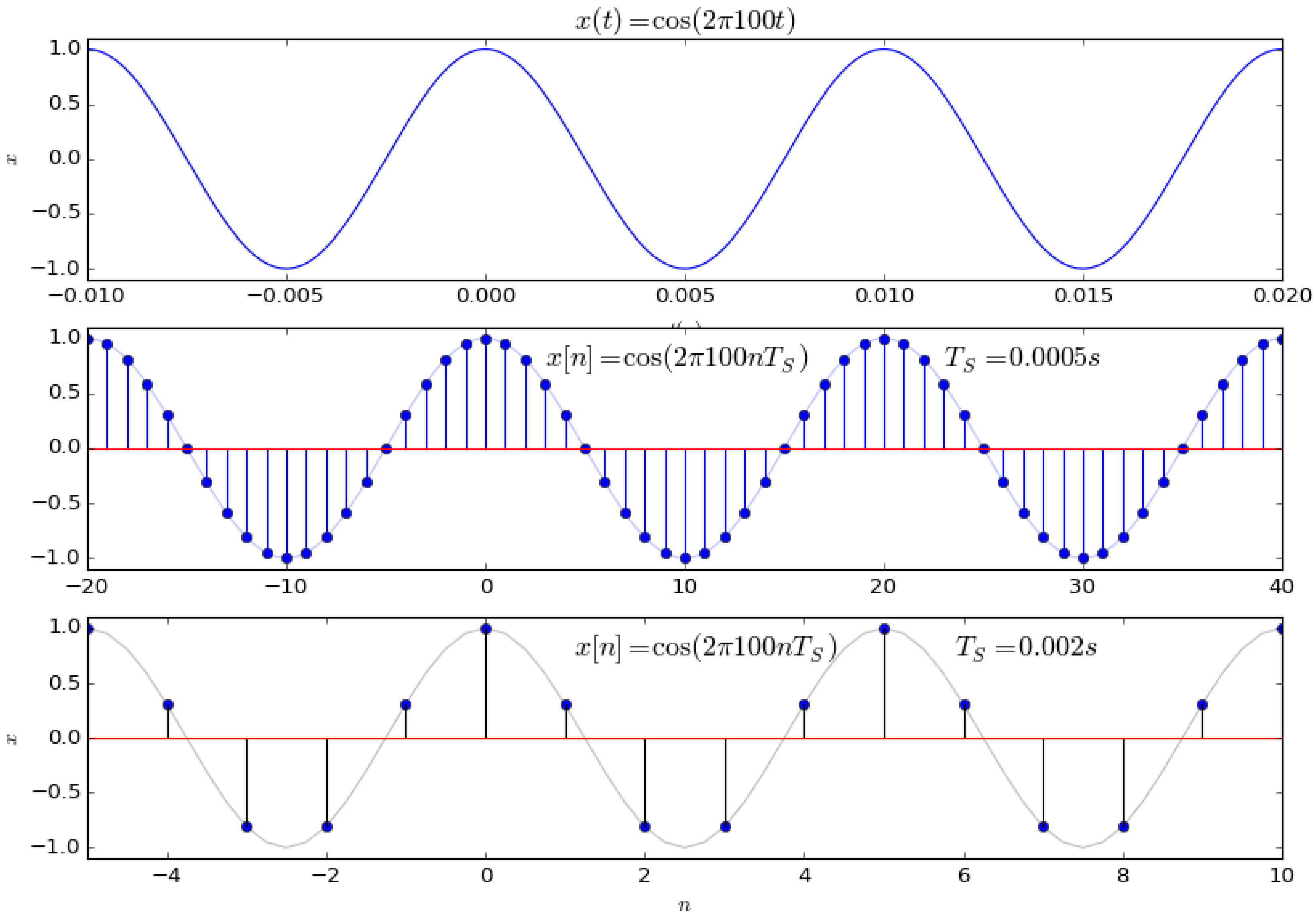
$$x[n] = x(nT_S) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Seja o sinal contínuo:

$$x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$$

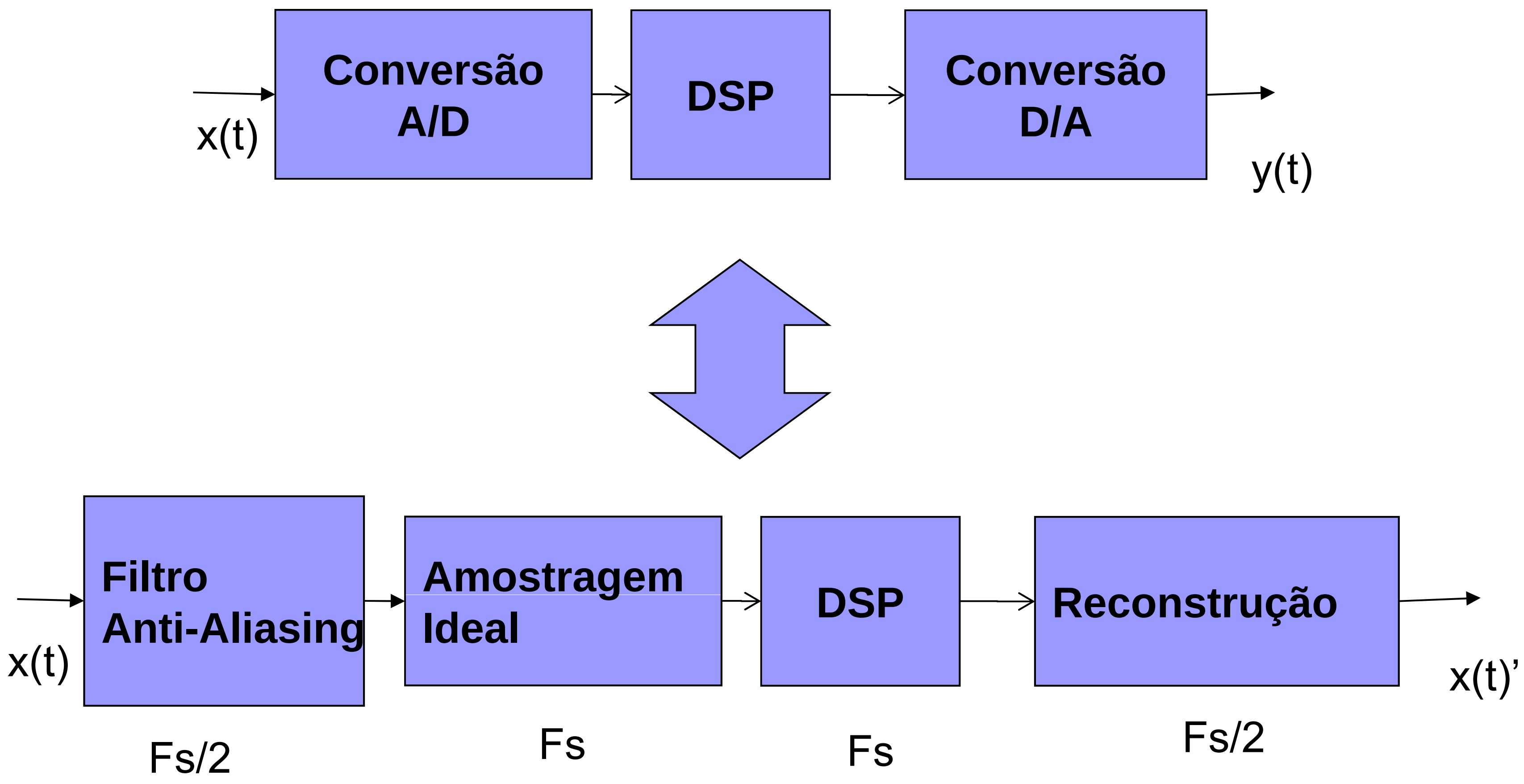
Se amostramos este sinal à taxa $F_S = \dfrac{1}{T_S}$ obtém-se:

$$x[n] = x(nT_S) = A\cos(2\pi fnT_S + \phi)$$



$x(t) = \cos(2\pi 100 t)$
$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$
$T_S = 0.0005s$
$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$
$T_S = 0.002s$
x
n

Processamento Digital de Sinal



Conversão Analógico/Digital (A/D)

Os dispositivos digitais armazenam a informação usando bits.

Como se transformam sinais em números?

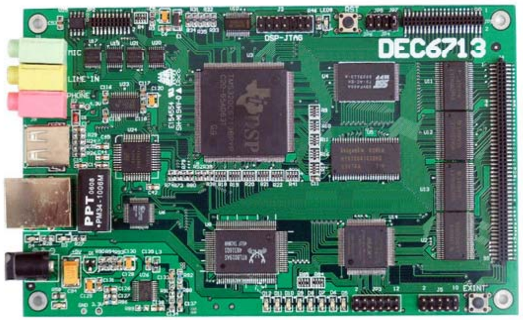
Converter um sinal contínuo no tempo e amplitude para um conjunto de números representados por conjunto limitado de bits.

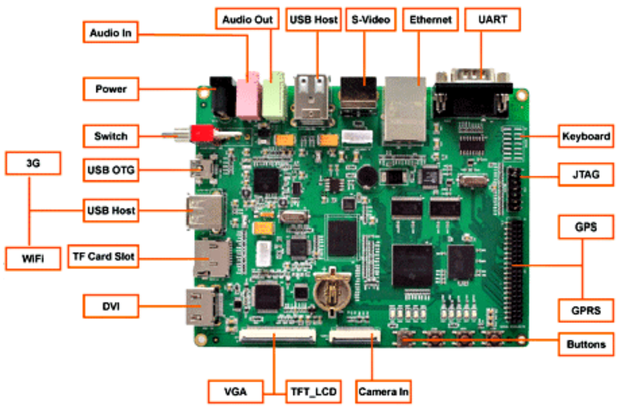
Resposta: ***Digitalização***

Amostragem (contínuo → discreto no tempo);
Quantificação (contínuo → discreto na amplitude).

DSP – Digital Signal Processing

- Processamento/transformação das amostras no domínio digital

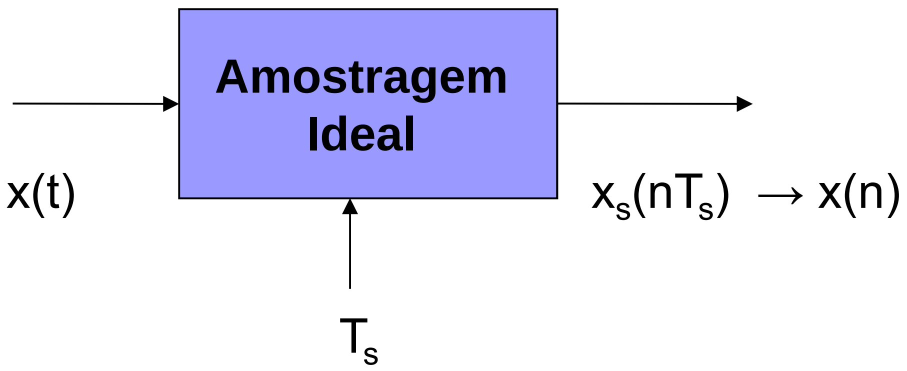


Conversão Digital/Analógico (D/A)

- Realiza-se convertendo as amostras na forma digital em valores analógicos, a partir de um processo denominado de reconstrução ou interpolação

AMOSTRAGEM

Amostragem



- Conversão de um sinal contínuo num sinal discreto
  - Período de Amostragem: T_s
  - Frequência de Amostragem: F_s

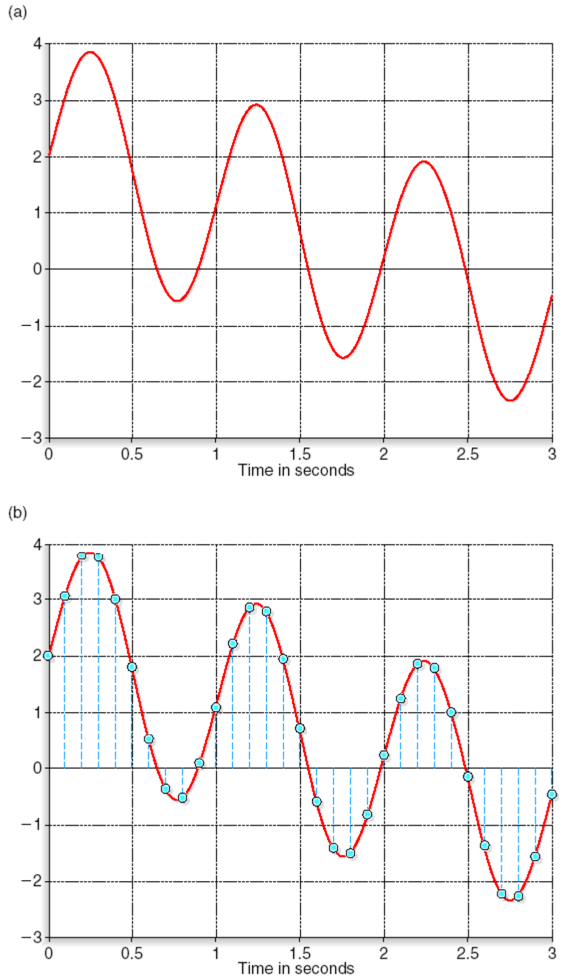
$$T_s = 1/F_s$$

Amostragem

- Amostragem: retirar valores do sinal em intervalos de tempo equi-espaçados
- Formula:

$$s[n] = s(nT_s)$$
$$s(t) = \{\text{sinal original}\}$$
$$s[n] = \{\text{sinal amostrado}\}$$

- T_s = {período de amostragem}
- $f_s = 1/T_s$ define a frequência ou ritmo de amostragem.



Time (s)	Sample Values
0.0	2.0000
0.1	3.1674
0.2	3.8694
0.3	3.8289
0.4	3.0465
0.5	1.8006
0.6	0.5412
0.7	−0.2814
0.8	−0.3885
0.9	0.2217
1.0	1.2732
1.1	2.3188
1.2	2.9112
1.3	2.7748
1.4	1.9113
1.5	0.6002
1.6	−0.7078
1.7	−1.5621
1.8	−1.6835
1.9	−1.0707
2.0	0.0000
2.1	1.0807
2.2	1.7233
2.3	1.6508
2.4	0.8637
2.5	−0.3601
2.6	−1.5718
2.7	−2.3223
2.8	−2.3346
2.9	−1.6092
3.0	−0.4244

Amostragem de uma Sinusóide

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\downarrow$$

Amostragem Ideal

$$\downarrow$$

$$x[n] = x(nT_s) = A\cos(\omega nT_s + \phi) = A\cos(\hat{\omega} n + \phi)$$

- Frequência Normalizada

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{F_s}$$

Frequência Normalizada

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{F_s}$$

$$\hat{f} = f T_s = \frac{f}{F_s}$$

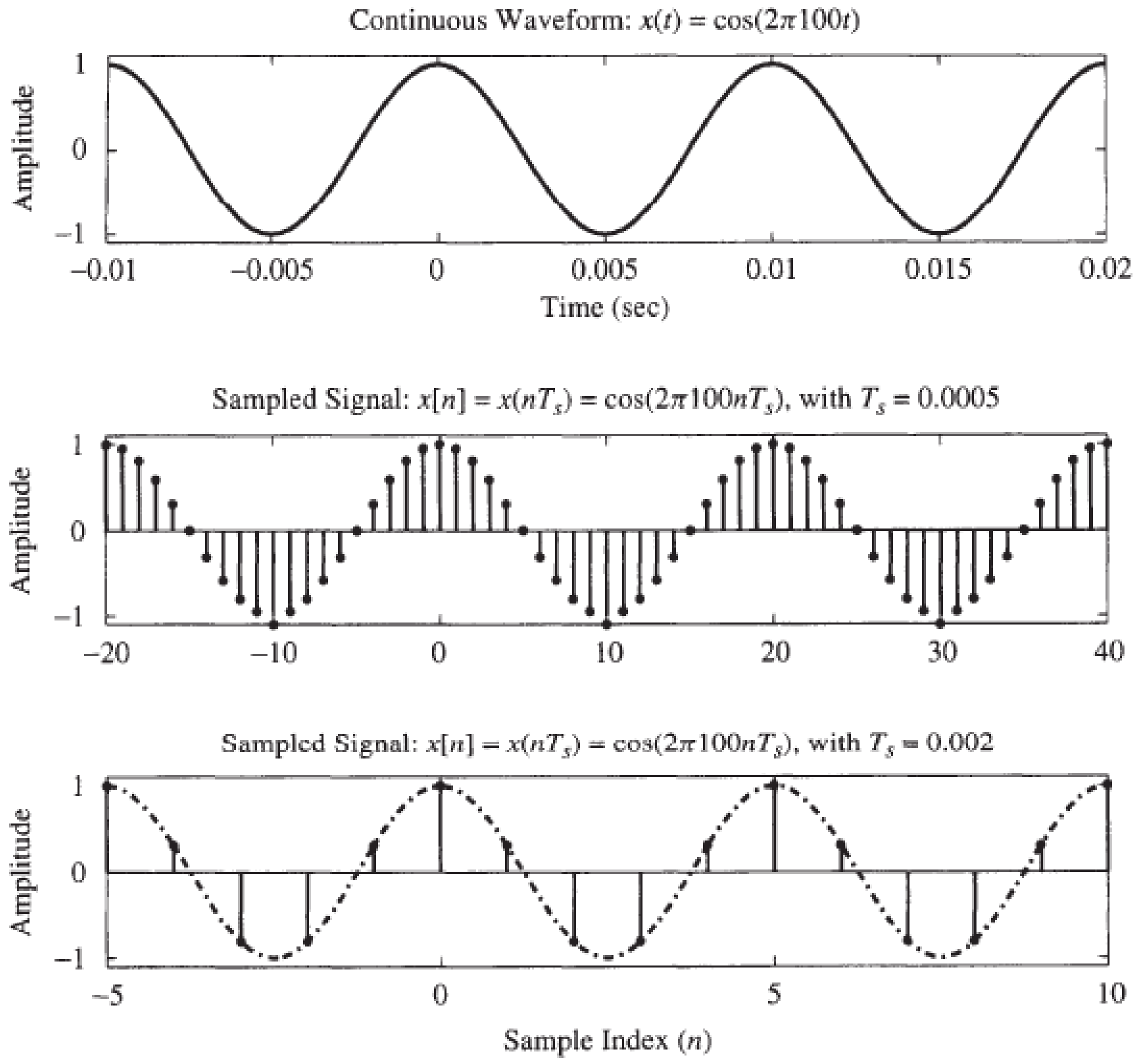
Expressa em radianos

Adimensional

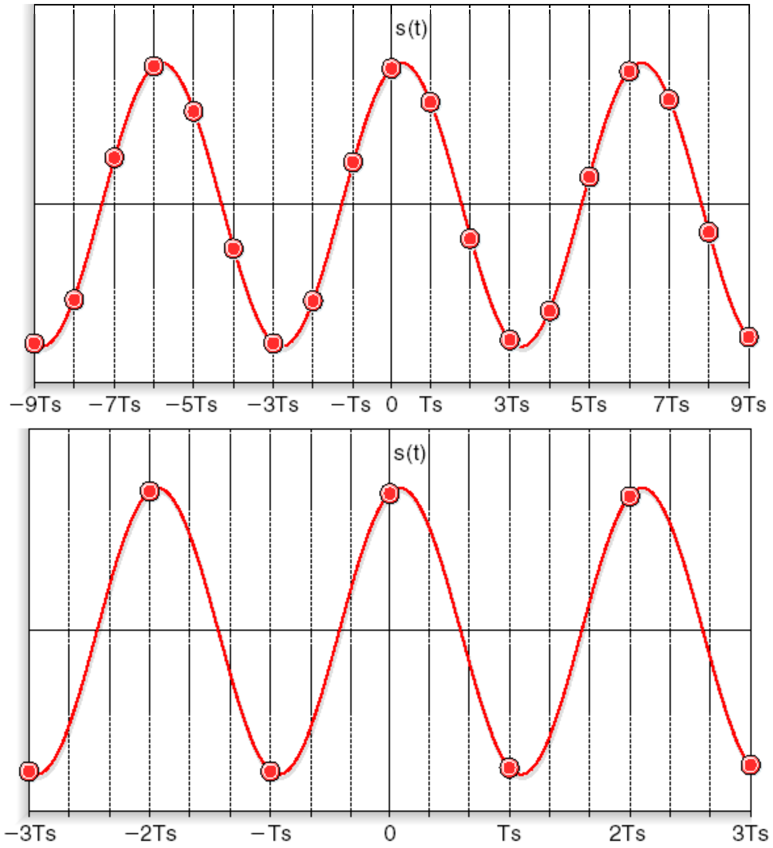
$$0 < \hat{\omega} < 2\pi$$

$$0 < \hat{f} < 1$$

Amostragem de uma Sinusóide



Amostragem - Compromisso



- Um valor pequeno de T_s gera demasiadas amostras
- Um valor grande de T_s destrói o sinal original

- Como se *calcula* T_s?

- Resposta: O Ritmo de *Nyquist.*

Teorema da Amostragem

Seja x(t) um sinal contínuo com frequências f não superiores a f_{max}. Então esse sinal poderá ser reconstruído a partir das suas amostras $x[n]= x(nT_s)$, se estas forem retiradas com um ritmo $F_s = 1/T_s$ maior que $2 \times f_{max}$

- Frequência de Nyquist:

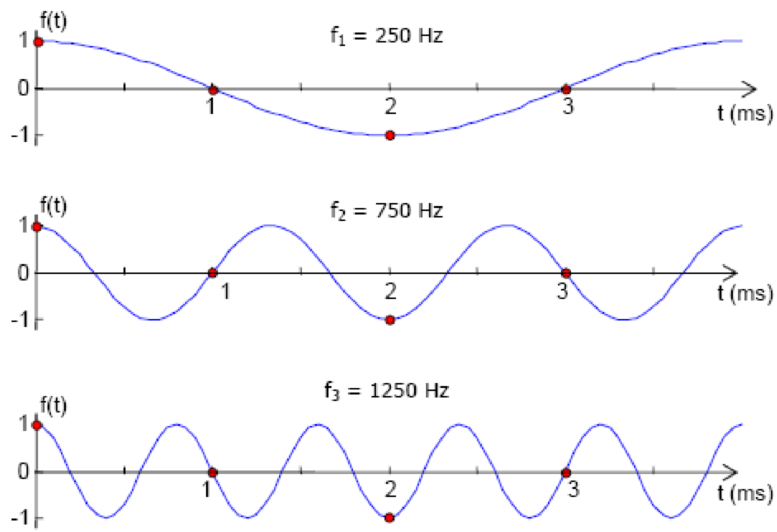
$F_{nyquist}=2 \times f_{max}$

$F_s > F_{nyquist}$

Nyquist-Shannon
(1889-1976)/(1916-2001)

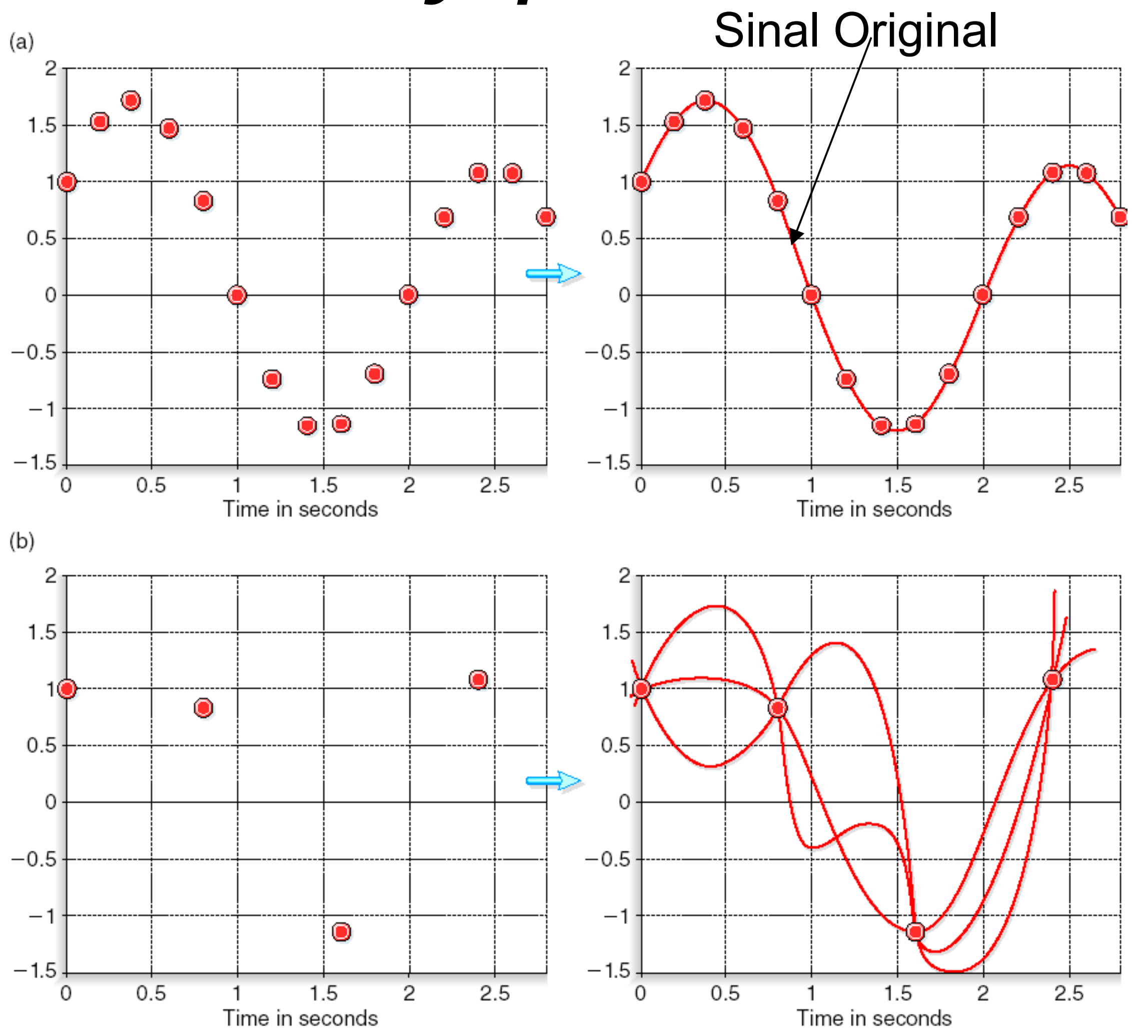
Amostragem

- A mesma sequência de amostras foi obtida em três sinusóides diferentes.
- Poderá servir para recuperar essas três sinusóides?
- Claro que não!!



Amostragem Superior ou Inferior ao Ritmo de *Nyquist*

- $f_s > 2\ f_{max}$
- $f_s < 2\ f_{max}$



Ritmos de Amostragem para alguns Sinais Importantes

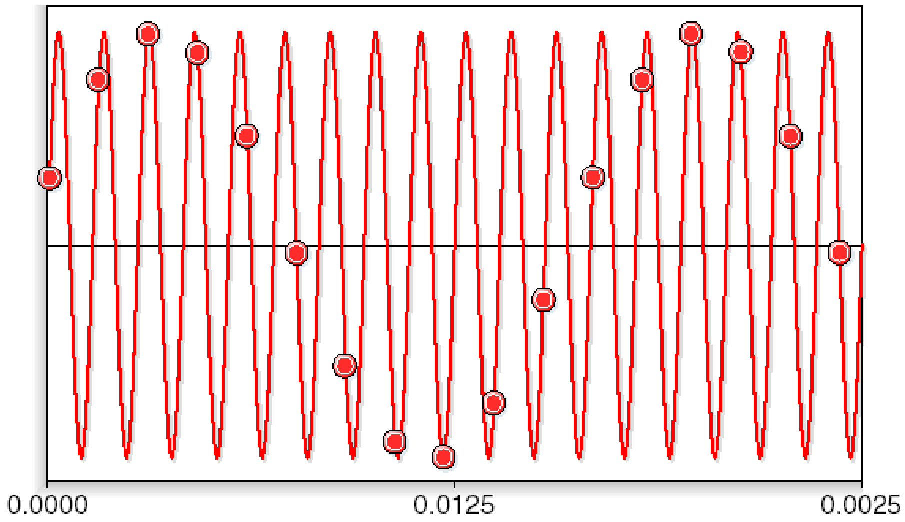
Signal Type	Signal Bandwidth	Minimum Sampling Rate	Rate Actually Used
Telephone quality speech	3.5 kHz	7000 samples/s	8000 samples/s
Music	20 kHz	40,000 samples/s	44,100 samples/s
FM radio	200 kHz	400,000 samples/s	400,000 samples/s
Standard definition television	6 MHz	12,000,000 samples/s	14,400,000 samples/s

- Os projectistas utilizam estes ritmos de amostragem para projectar leitores de CD ou DVD, telemóveis, rádios para automóveis e satélites de TV.

ALIASING

Amostragem Inferior ao Ritmo de *Nyquist* Produz *Aliasing*

- Exemplo: Uma sinusóide com 720Hz amostrada a um ritmo de 660Hz…



…gera uma sinusóide que parece ter 60Hz!

- Como explicar este fenómeno?

Aliasing

- As sinusoides x(t) e y(t) produzem a mesma sequência de amostras quando amostradas à frequência Fs

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$y(t) = A\cos\left(2\pi\left(f_0 + mf_s\right)t + \phi\right)$$

$$x[n] = x(nT_s) = A\cos(2\pi f_0 nT_s + \phi)$$

$$y[n] = y(nT_s) = A\cos\left(2\pi\left(f_0 + mf_s\right)nT_s + \phi\right) =$$

$$= A\cos\left(2\pi f_0 nT_s + 2\pi n\cancel{T_s} m\cancel{f_s} + \phi\right) =$$

$$= A\cos\left(2\pi f_0 nT_s + \phi\right) = x[n]$$

Folding

- Outra fonte de aliasing advém das frequências negativas do espectro

$$w(t) = A\cos\left(2\pi\left(-f_0 + mf_s\right)t - \phi\right)$$

$$w[n] = w(nT_s) = \quad A\cos\left(2\pi\left(-f_0 + mf_s\right)nT_s - \phi\right) =$$

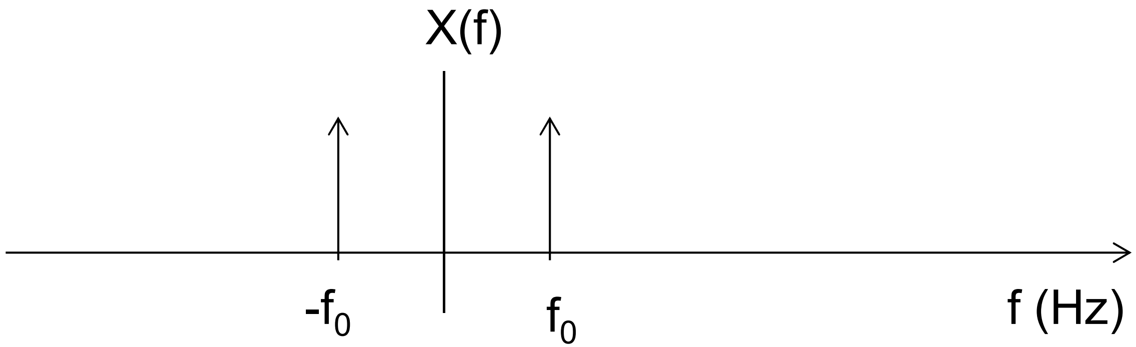
$$= A\cos\left(2\pi f_0 nT_s + \phi\right) = x[n]$$

Interpretação Espectral

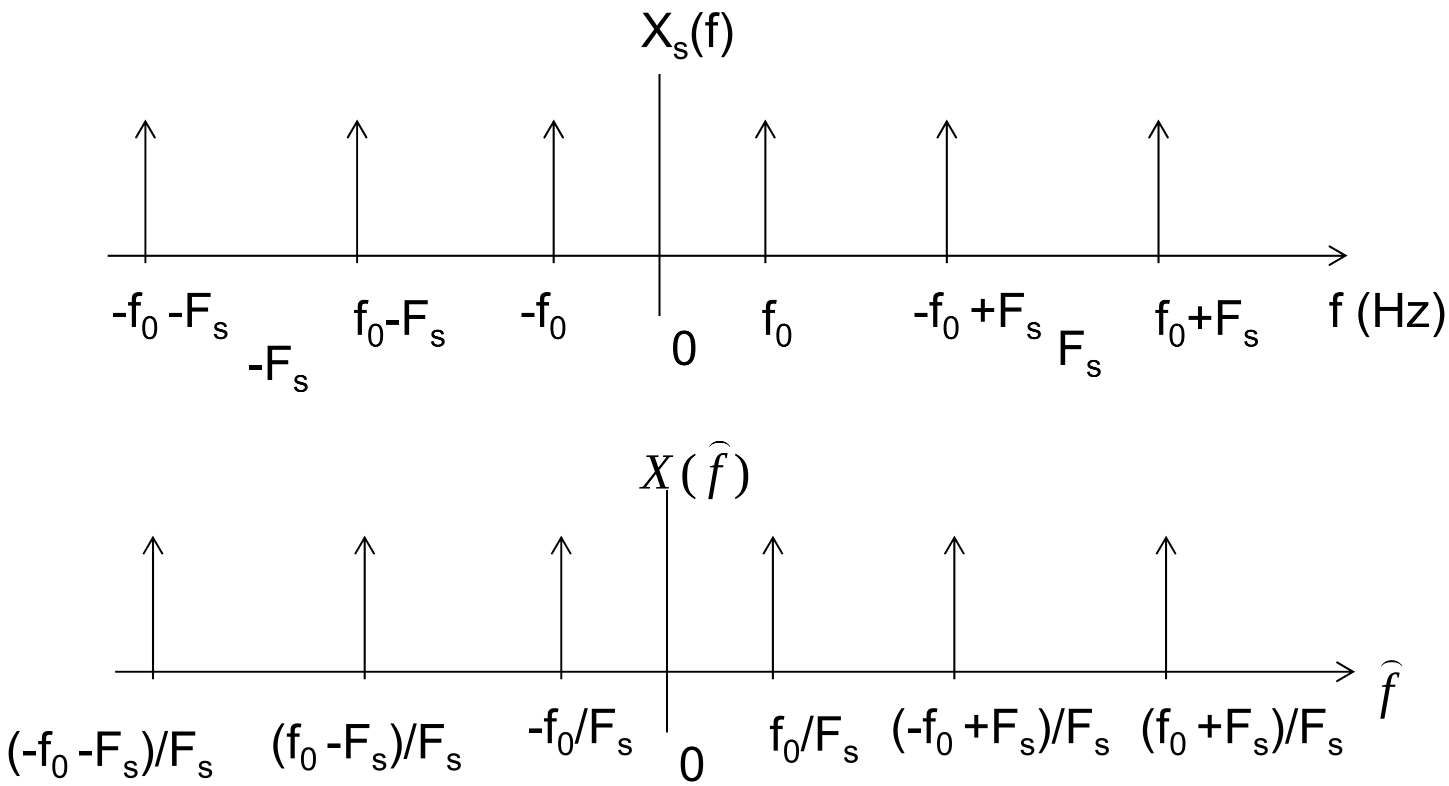
$$x(t) \xleftrightarrow[TF]{} X(f)$$

$$x(n) \xleftrightarrow[TF]{} X(\hat{\omega})$$

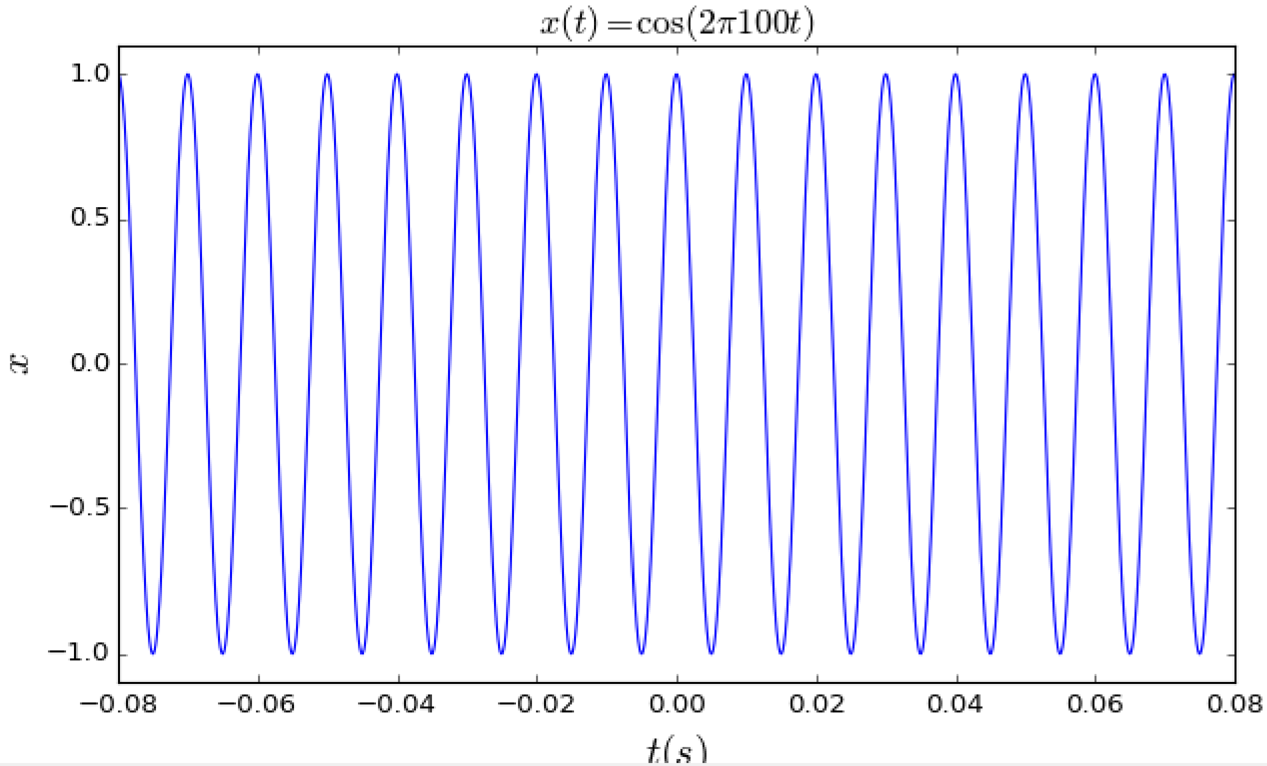
$$x(n) \xleftrightarrow[TF]{} X(\widehat{f})$$



Interpretação Espectral

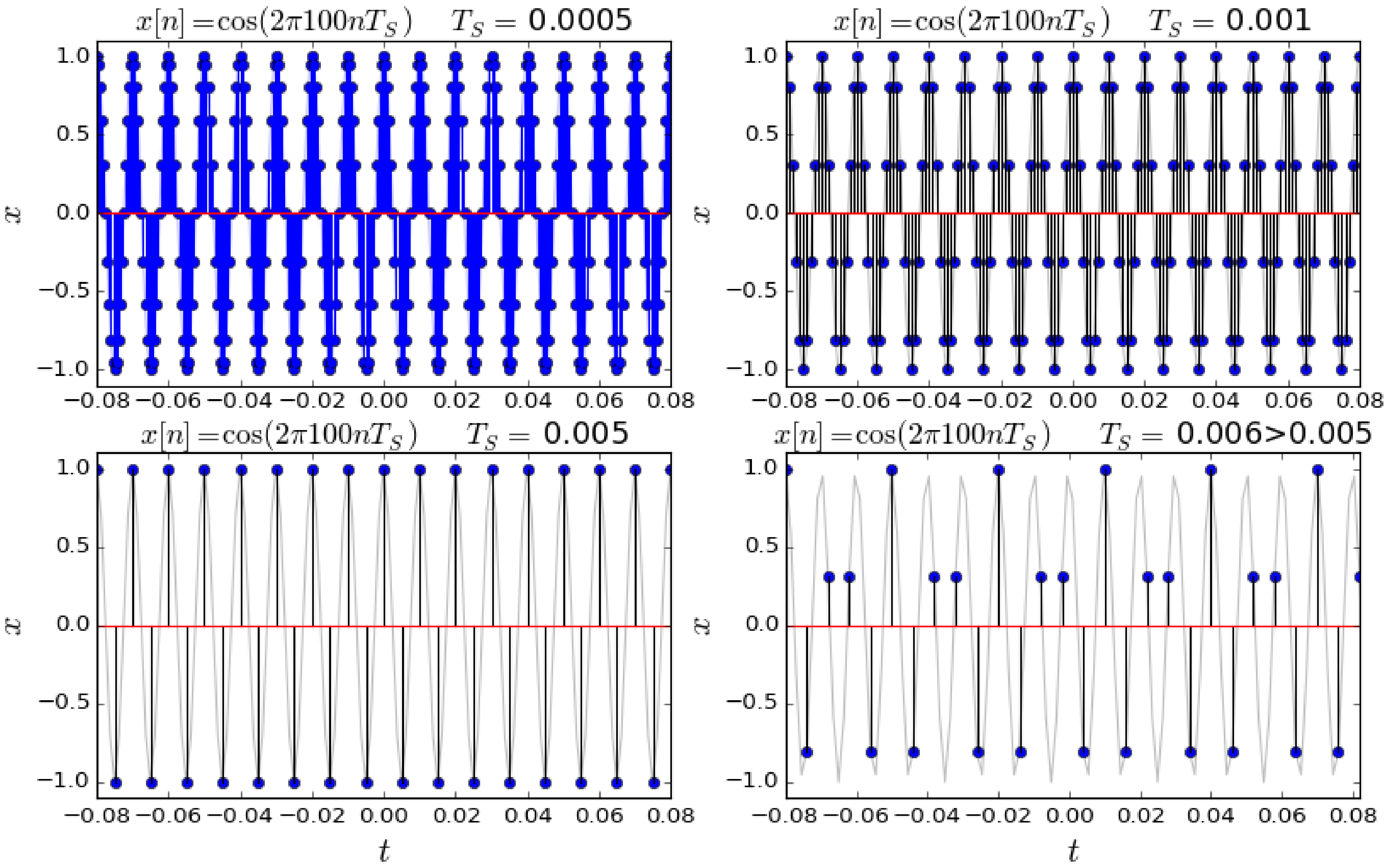


Sinal analógico original



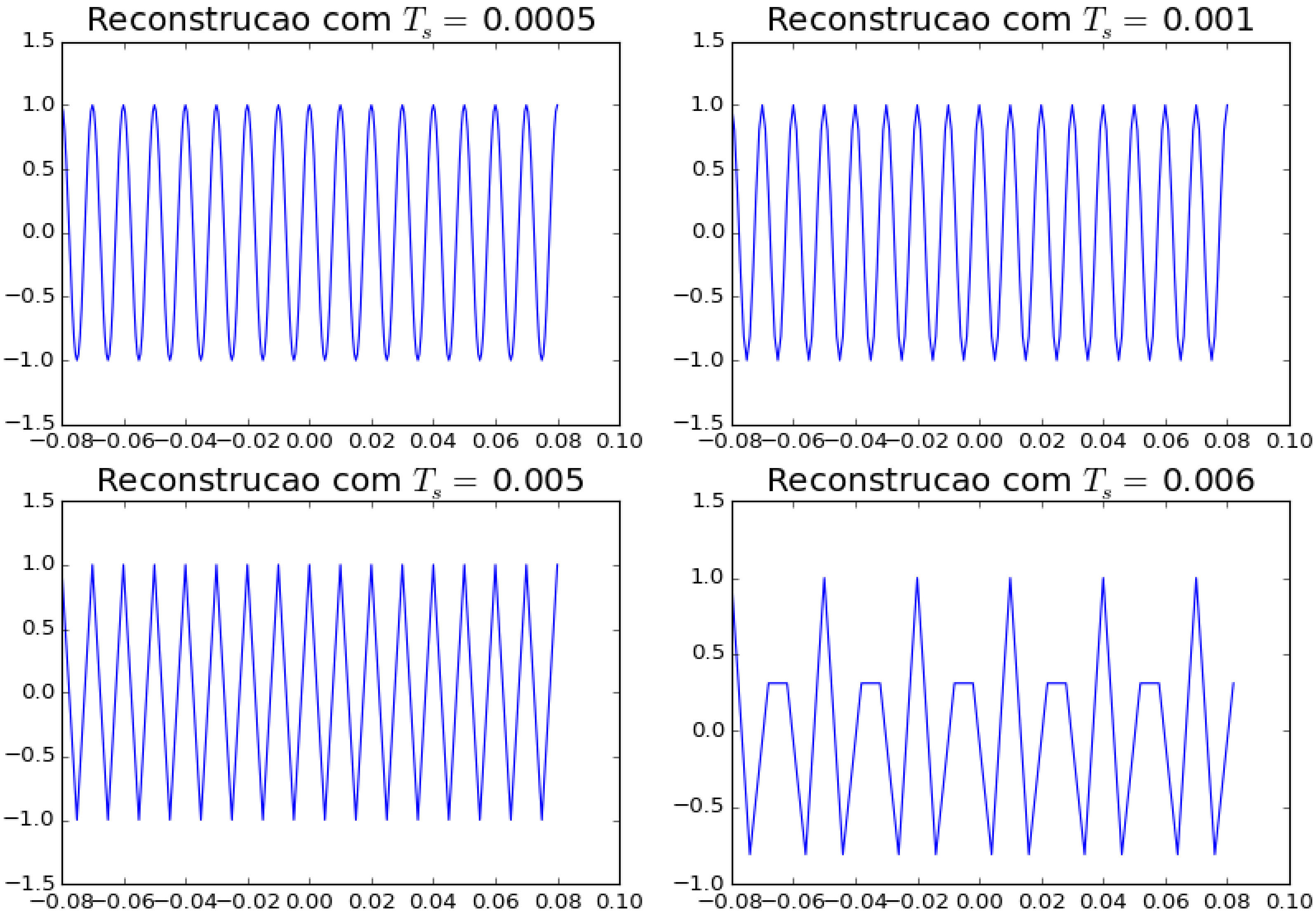
$$T = 0.01s \quad \overset{\text{teorema amostragem}}{\overbrace{\rightarrow}} \quad f_s > 2f \Rightarrow f_s > 200 \quad \Rightarrow \quad T_s < 0.005s$$

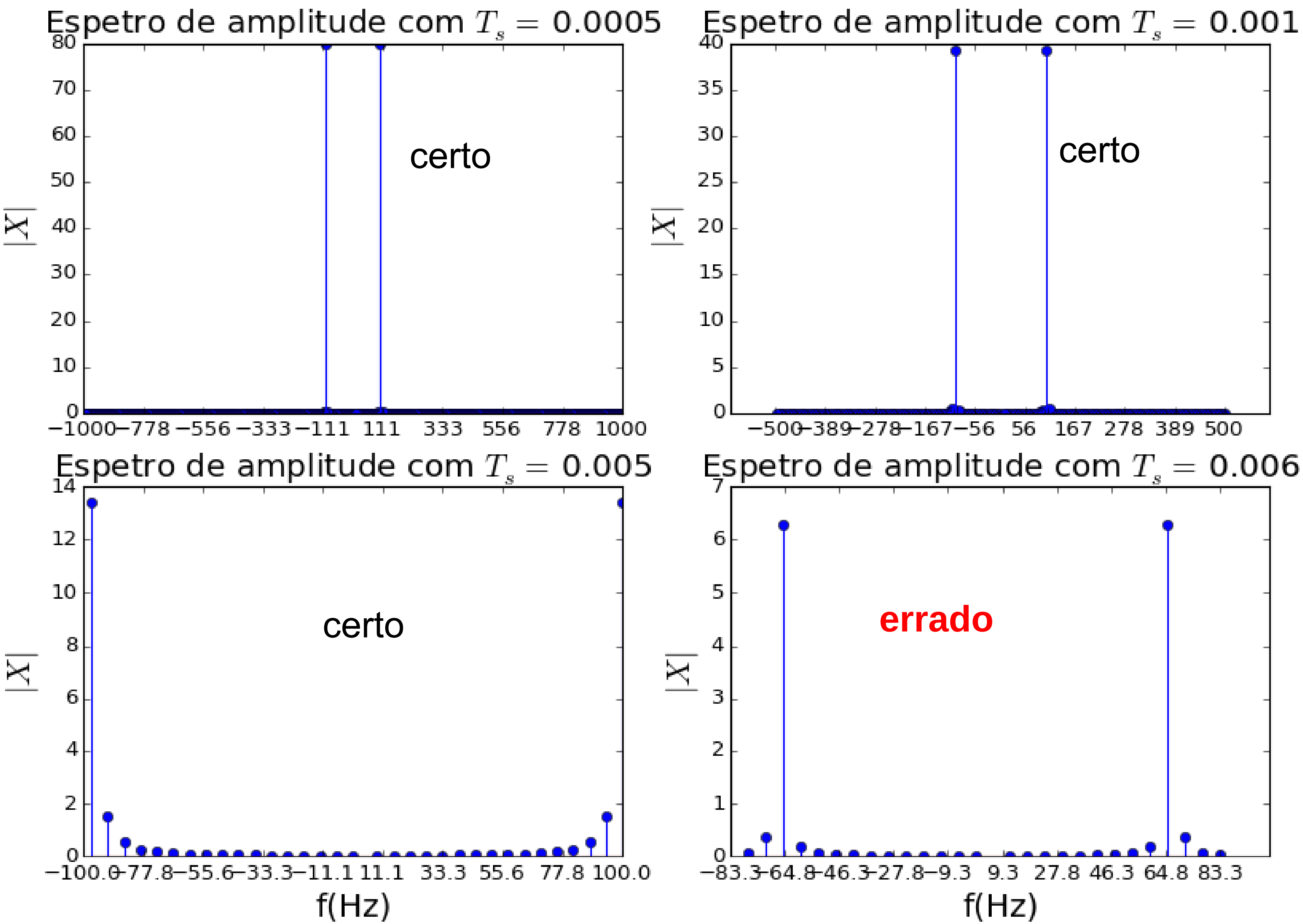
Amostragem



$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$ $T_S =$ 0.0005
$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$ $T_S =$ 0.001
$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$ $T_S =$ 0.005
$x[n] = \cos(2\pi 100 n T_S)$ $T_S =$ 0.006>0.005
x
t
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−0.08 −0.06 −0.04 −0.02 0.00 0.02 0.04 0.06 0.08

FFT + IFFT → Reconstrução




Espetro de amplitude com $T_s = 0.0005$
certo
Espetro de amplitude com $T_s = 0.001$
certo
Espetro de amplitude com $T_s = 0.005$
certo
Espetro de amplitude com $T_s = 0.006$
errado
$|X|$
f(Hz)

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Mar 16 18:59:56 2016

@author: Isabel Rodrigues
"""

# -*- coding: latin-1 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Ts1=0.0005
Ts2=0.001
Ts3=0.005
Ts4=0.006

tI=[-0.08,0.08]
t=np.linspace(tI[0],tI[1],1e4)

n1=np.arange(tI[0]/Ts1,tI[1]/Ts1+1,1)
n2=np.arange(tI[0]/Ts2,tI[1]/Ts2+1,1)
n3=np.arange(tI[0]/Ts3,tI[1]/Ts3+1,1)
n4=np.arange(tI[0]/Ts4,tI[1]/Ts4+1,1)

nn1=np.arange(tI[0]/Ts1,tI[1]/Ts1+1,0.
nn2=np.arange(tI[0]/Ts2,tI[1]/Ts2+1,0.
nn3=np.arange(tI[0]/Ts3,tI[1]/Ts3+1,0.
nn4=np.arange(tI[0]/Ts4,tI[1]/Ts4+1,0.


x_t=np.cos(2*np.pi*100*t)

x_n1=np.cos(2.*np.pi*100*n1*Ts1)
x_n2=np.cos(2.*np.pi*100*n2*Ts2)
x_n3=np.cos(2.*np.pi*100*n3*Ts3)
x_n4=np.cos(2.*np.pi*100*n4*Ts4)
```

```python
x_nn1=np.cos(2.*np.pi*100*nn1*Ts1)
x_nn2=np.cos(2.*np.pi*100*nn2*Ts2)
x_nn3=np.cos(2.*np.pi*100*nn3*Ts3)
x_nn4=np.cos(2.*np.pi*100*nn4*Ts4)

#plot
plt.close('all')
plt.figure(facecolor='w',figsize=(9,5))
plt.title(r'$x(t)=\cos(2 \pi 100t)$', fontsize=16)
plt.plot(t,x_t)
plt.xlabel('$t(s)$', fontsize=18);
plt.ylabel('$x$', fontsize=18);
plt.axis([t.min(),t.max(),-1.1,1.1])


plt.figure(facecolor='w',figsize=(12,7))

plt.subplot(221)
plt.title(r'$x[n]=\cos(2 \pi 100nT_S)$    $T_S=$ '+np.str(Ts1), fontsize=16)
plt.plot(nn1*Ts1,x_nn1,'b',alpha=0.25)
plt.stem(n1*Ts1,x_n1,'b',linewidth=1.5)
plt.axis([n1.min()*Ts1,n1.max()*Ts1,-1.1,1.1])
plt.ylabel('$x$', fontsize=18);
#s1=r'$T_s=$ '+np.str(Ts1)
#plt.title(s1, fontsize=18)

plt.subplot(222)
plt.title(r'$x[n]=\cos(2 \pi 100nT_S)$    $T_S= $ '+np.str(Ts2), fontsize=16)
plt.plot(nn2*Ts2,x_nn2,'k',alpha=0.25)
plt.stem(n2*Ts2,x_n2,'k',linewidth=1.5)
plt.axis([n2.min()*Ts2,n2.max()*Ts2,-1.1,1.1])
plt.ylabel('$x$', fontsize=18);
#s2=r'$T_s=$ '+np.str(Ts2)
#plt.title(s2)
```

```
plt.subplot(223)
plt.title(r'$x[n]=\cos(2 \pi 100nT_S)$     $T_S=$ '+np.str(Ts3), fontsize=16)
plt.plot(nn3*Ts3,x_nn3,'k',alpha=0.25)
plt.stem(n3*Ts3,x_n3,'k',linewidth=1.5)
plt.axis([n3.min()*Ts3,n3.max()*Ts3,-1.1,1.1])
plt.ylabel('$x$', fontsize=18);
plt.xlabel('$t$', fontsize=18);
#s3=r'$T_s=$ '+np.str(Ts3)
#plt.title(s3)

plt.subplot(224)
plt.title(r'$x[n]=\cos(2 \pi 100nT_S)$     $T_S=$ '+np.str(Ts4)+'>0.005', fontsize=16)
plt.plot(nn4*Ts4,x_nn4,'k',alpha=0.25)
plt.stem(n4*Ts4,x_n4,'k',linewidth=1.5)
plt.axis([n4.min()*Ts4,n4.max()*Ts4,-1.1,1.1])
plt.xlabel('$t$', fontsize=18);
plt.ylabel('$x$', fontsize=18);

plt.figure(facecolor='w',figsize=(12,8))

Y1=np.fft.fft(x_n1);
z1=np.fft.ifft(Y1)
plt.subplot(221)
plt.plot(n1*Ts1,z1)
s1='Reconstrucao com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts1)
plt.title(s1, fontsize=18)

Y2=np.fft.fft(x_n2);
z2=np.fft.ifft(Y2)
plt.subplot(222)
plt.plot(n2*Ts2,z2)
s2='Reconstrucao com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts2)
plt.title(s2, fontsize=18)

Y3=np.fft.fft(x_n3);
z3=np.fft.ifft(Y3)
```

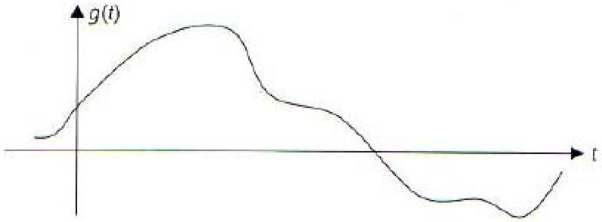
```python
plt.subplot(223)
plt.plot(n3*Ts3,z3)
s3='Reconstrucao com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts3)
plt.title(s3, fontsize=18)

Y4=np.fft.fft(x_n4);
z4=np.fft.ifft(Y4)
plt.subplot(224)
plt.plot(n4*Ts4,z4)
s4='Reconstrucao com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts4)
plt.title(s4, fontsize=18)



plt.figure(facecolor='w',figsize=(12,8))

Pyy1 = Y1* np.conj(Y1)/np.size(Y1)
#Phase_y1=np.arctan2(np.imag(Y1),np.real(Y1))
#f1 = 1./Ts1*np.arange(1,np.size(Y1)/2+1)/np.size(Y1)
fd = 1./Ts1*np.arange(0.,-np.size(Y1)/2.,-1.)/np.size(Y1)
f1 =np.array(np.concatenate([fd, 1./Ts1*np.arange(np.size(Y1)/2.,1,-1.)/np.size(Y1)],axis=0))
plt.subplot(221)
plt.stem(f1,Pyy1[0:np.size(f1)])
plt.xticks(np.linspace(-1./(2*Ts1),1./(2*Ts1),10), rotation=0)
s1='Espetro de amplitude com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts1)
plt.title(s1, fontsize=18)
#plt.xlabel('f(Hz)', fontsize=18)
plt.ylabel('$|X|$', fontsize=18)
#intervalos no x = 1/2

Pyy2 = Y2* np.conj(Y2)/np.size(Y2)
#Phase_y2=np.arctan2(np.imag(Y2),np.real(Y2))
fd = 1./Ts2*np.arange(0.,-np.size(Y2)/2.,-1.)/np.size(Y2)
f2 =np.array(np.concatenate([fd, 1./Ts2*np.arange(np.size(Y2)/2.,1,-1.)/np.size(Y2)],axis=0))
plt.subplot(222)
plt.stem(f2,Pyy2[0:np.size(f2)])
```

```
plt.xticks(np.linspace(-1./(2*Ts2),1./(2*Ts2),10), rotation=0)
s2='Espetro de amplitude com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts2)
plt.title(s2, fontsize=18)
plt.ylabel('$|X|$', fontsize=18)
#plt.xlabel('f(Hz)', fontsize=18)

Pyy3 = Y3* np.conj(Y3)/np.size(Y3)
#Phase_y3=np.arctan2(np.imag(Y3),np.real(Y3))
fd = 1./Ts3*np.arange(0.,-np.size(Y3)/2.,-1.)/np.size(Y3)
f3 =np.array(np.concatenate([fd, 1./Ts3*np.arange(np.size(Y3)/2.,1,-1.)/np.size(Y3)],axis=0))
plt.subplot(223)
plt.stem(f3,Pyy3[0:np.size(f3)])
plt.xticks(np.linspace(-1./(2*Ts3),1./(2*Ts3),10), rotation=0)
s3='Espetro de amplitude com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts3)
plt.title(s3, fontsize=18)
plt.ylabel('$|X|$', fontsize=18)
plt.xlabel('f(Hz)', fontsize=18)

Pyy4 = Y4* np.conj(Y4)/np.size(Y4)
#Phase_y3=np.arctan2(np.imag(Y3),np.real(Y3))
fd = 1./Ts4*np.arange(0.,-np.size(Y4)/2.,-1.)/np.size(Y4)
f4 =np.array(np.concatenate([fd, 1./Ts4*np.arange(np.size(Y4)/2.,1,-1.)/np.size(Y4)],axis=0))
plt.subplot(224)
plt.stem(f4,Pyy4[0:np.size(f4)])
plt.xticks(np.linspace(-1./(2*Ts4),1./(2*Ts4),10), rotation=0)
s4='Espetro de amplitude com '+r'$T_s=$ '+np.str(Ts4)
plt.title(s4, fontsize=18)
plt.ylabel('$|X|$', fontsize=18)
plt.xlabel('f(Hz)', fontsize=18)
```

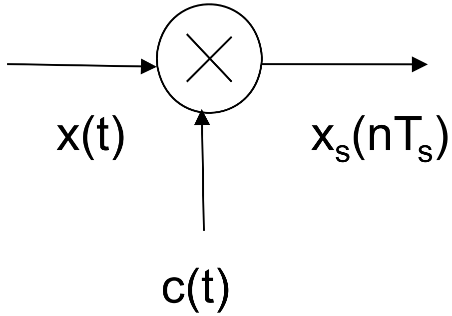
Amostragem Ideal

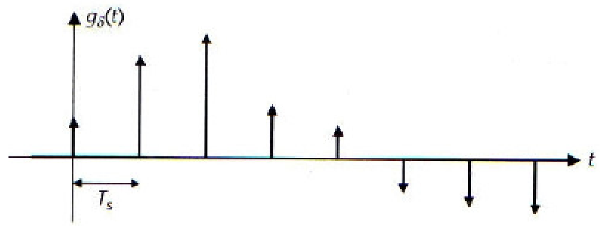
- Pode ser vista como a multiplicação por um trem de impulsos de Dirac:

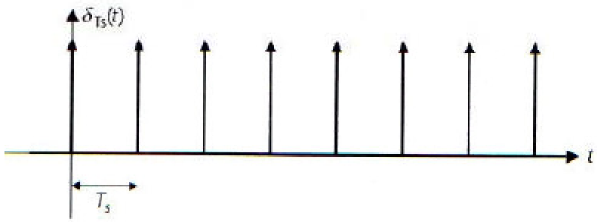
Sinal discreto



Sinal contínuo







$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$$

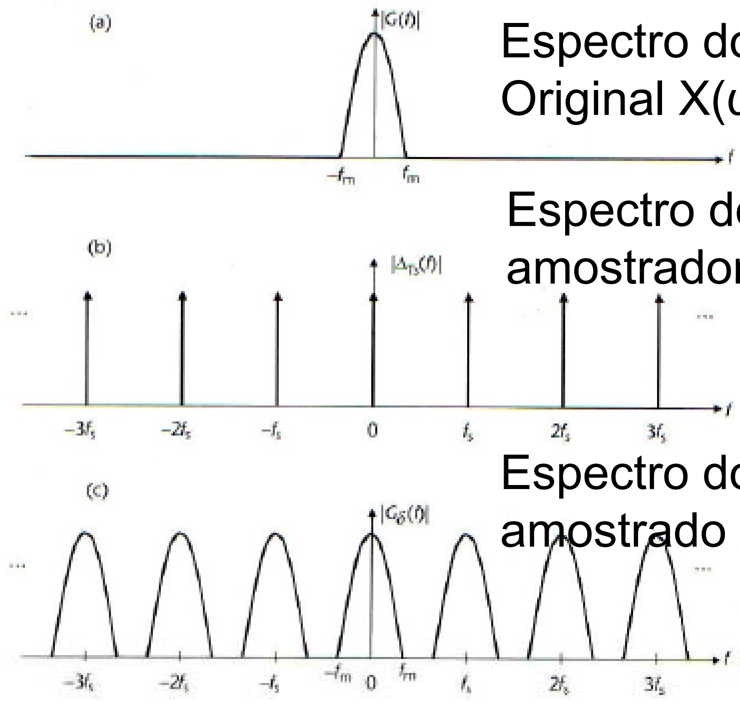
Sinal Amostrador – trem de impulsos de Dirac

Amostragem Ideal

$$x_s(nT_s) = x(t)c(t) \xleftrightarrow{TF} X_s(\omega) = X(\omega) * C(\omega)$$

Produto no domínio do tempo =
Convolução no domínio da Frequência

- Espectro do sinal amostrado Xs(ω) constituido por:
  - Réplicas do espectro original X(ω) centradas em múltiplos de Fs
- Quando Fs< $F_{nyquist}$ ocorre Aliasing

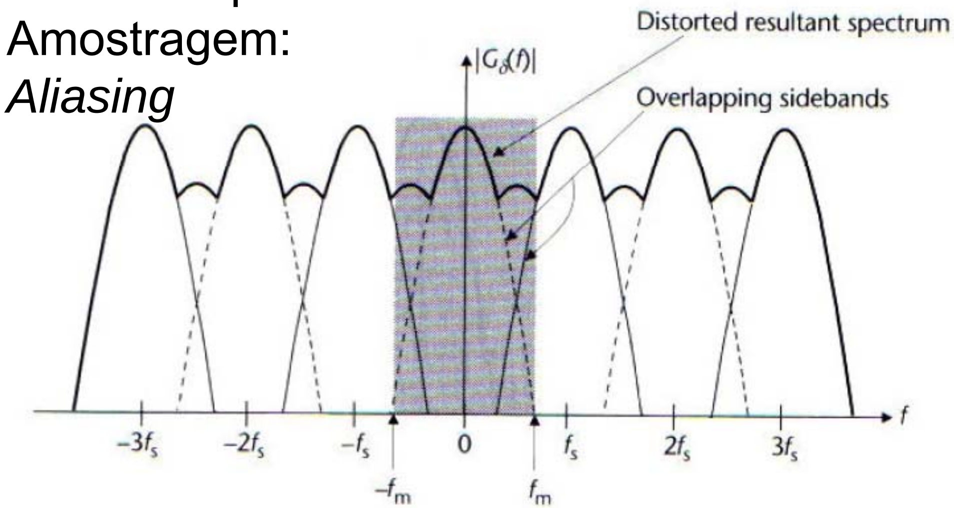


Espectro do sinal Original X(ω)

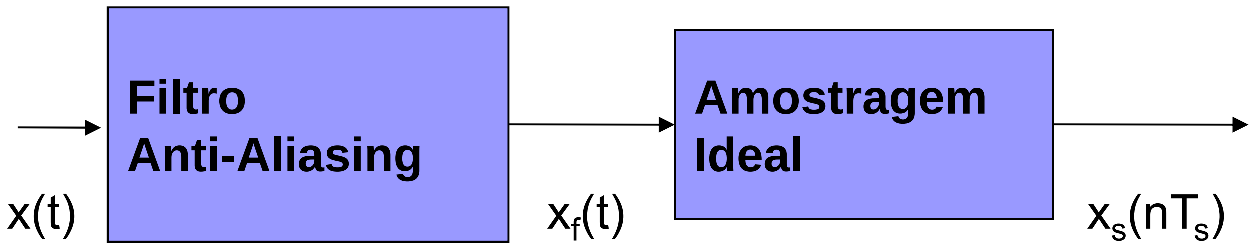
Espectro do sinal amostrador C(ω)

Espectro do sinal amostrado Xs(ω)

Espectro do sinal amostrado Xs(ω) quando não é cumprido o Teorema da Amostragem:
Aliasing

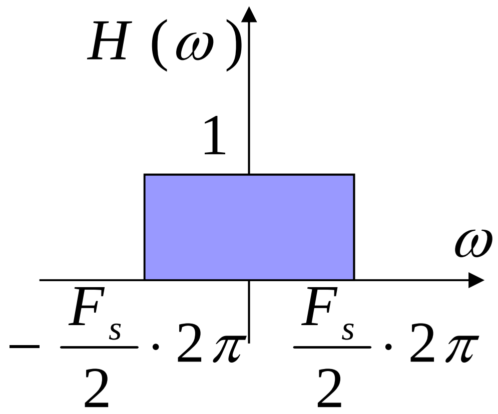


Amostragem – Filtro Anti-Aliasing



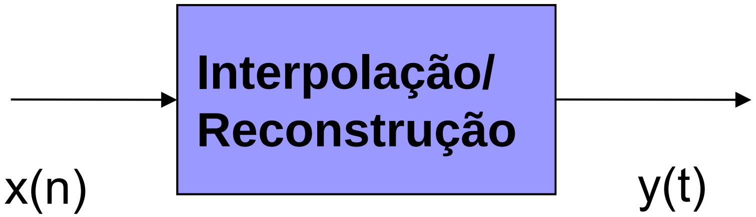
- Para garantir que a amostragem é bem sucedida é usado um filtro Anti-Aliasing

- Filtro Anti-Aliasing
  - Filtro passa baixo Ideal



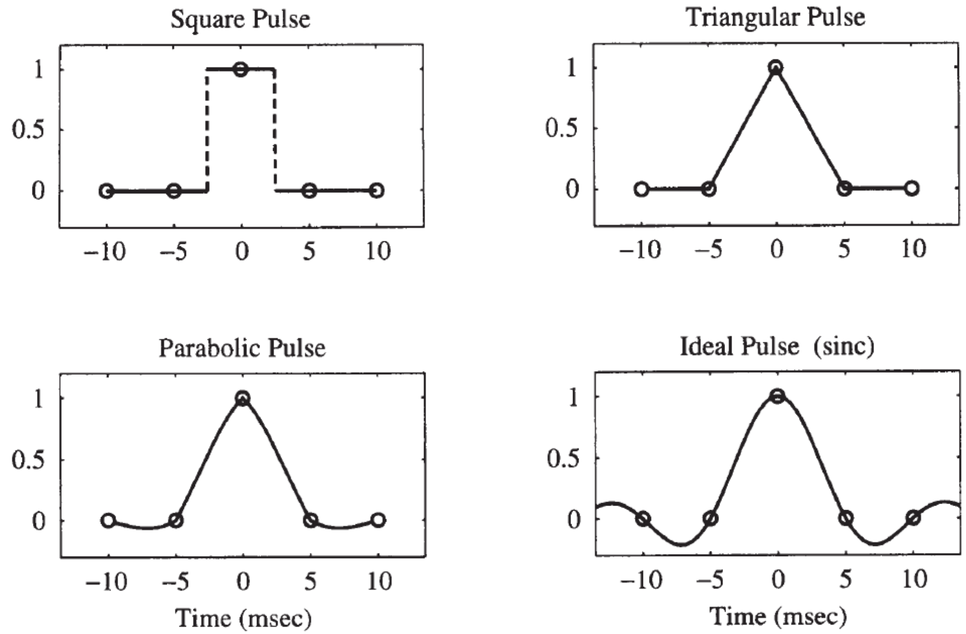
INTERPOLAÇÃO

Amostragem –
Reconstrução/ Interpolação

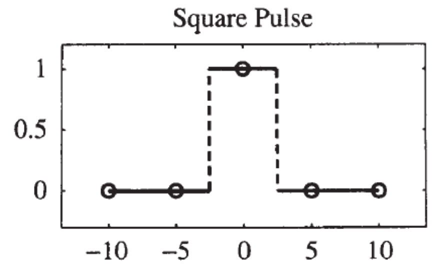


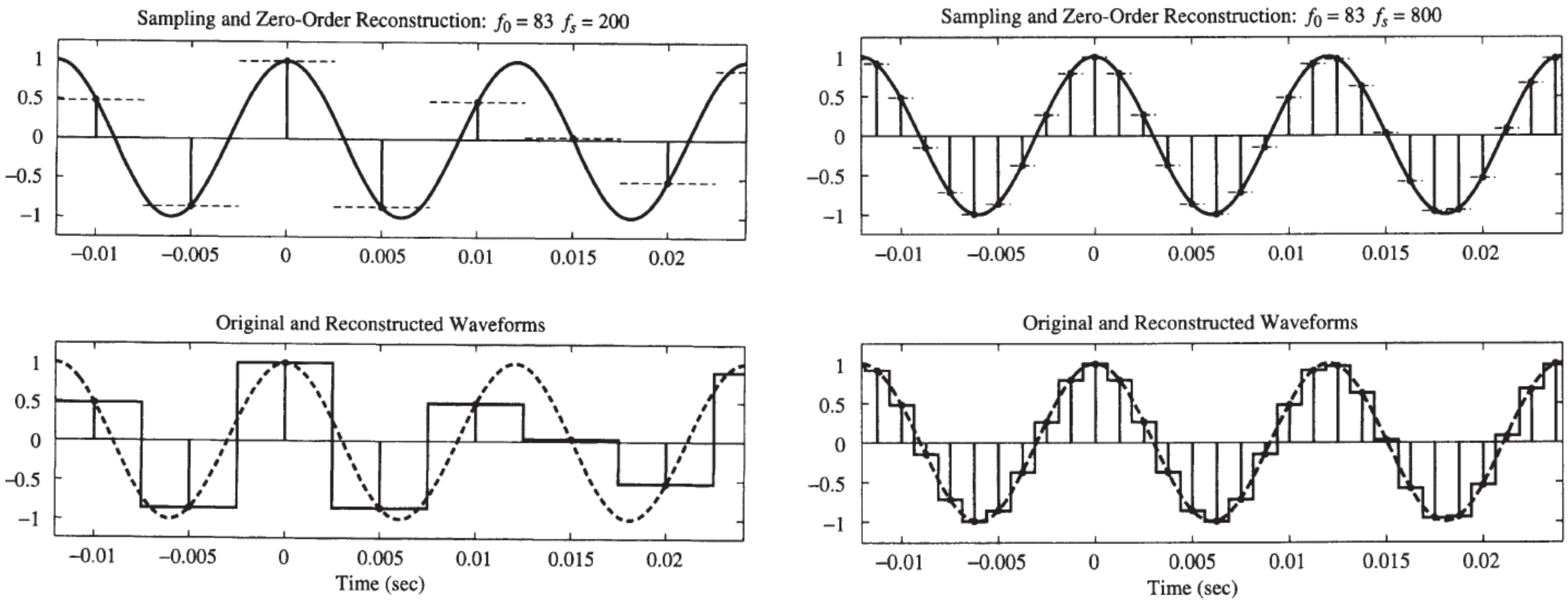
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,p(t - nTs)$$

- Exemplos de funções interpoladoras

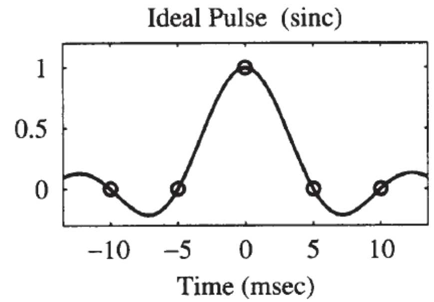


Zero-Order Hold

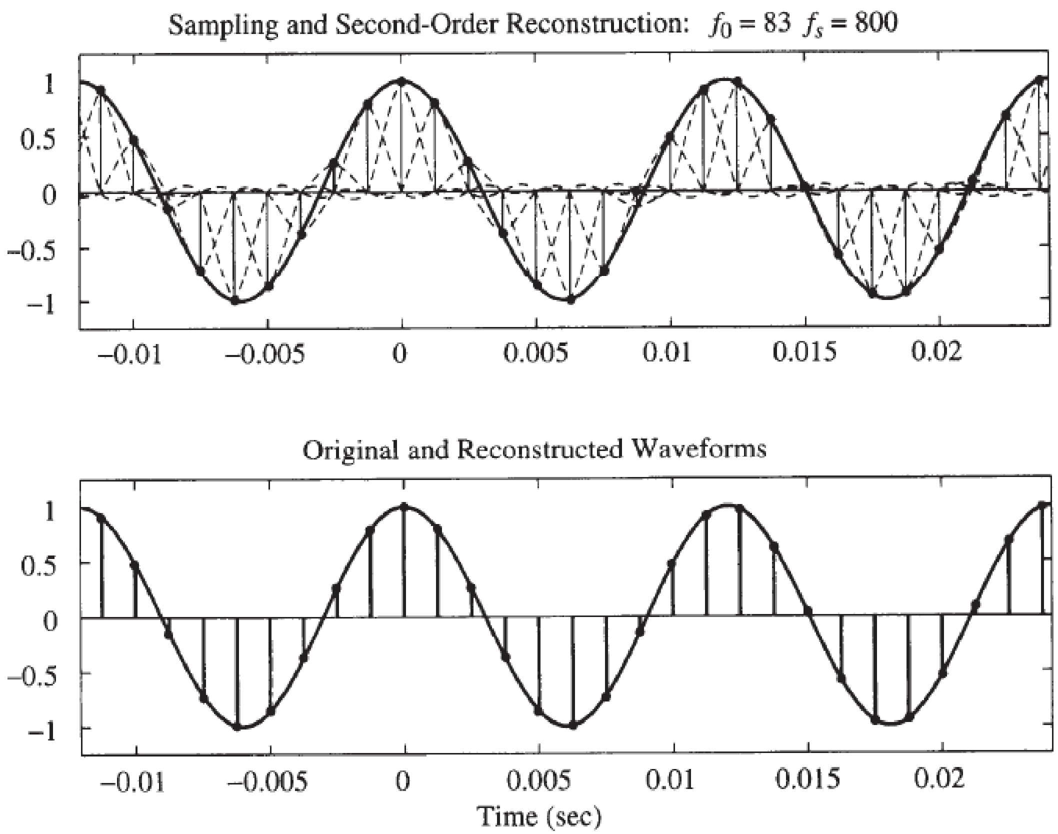




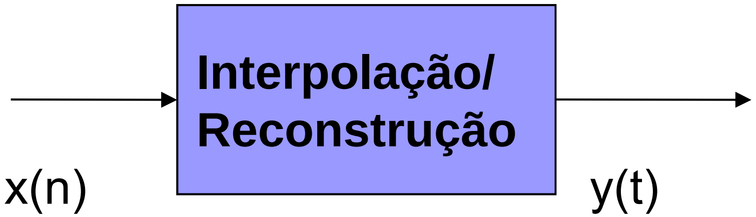
Reconstrução Ideal



$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}}$$



Amostragem –
Reconstrução/ Interpolação

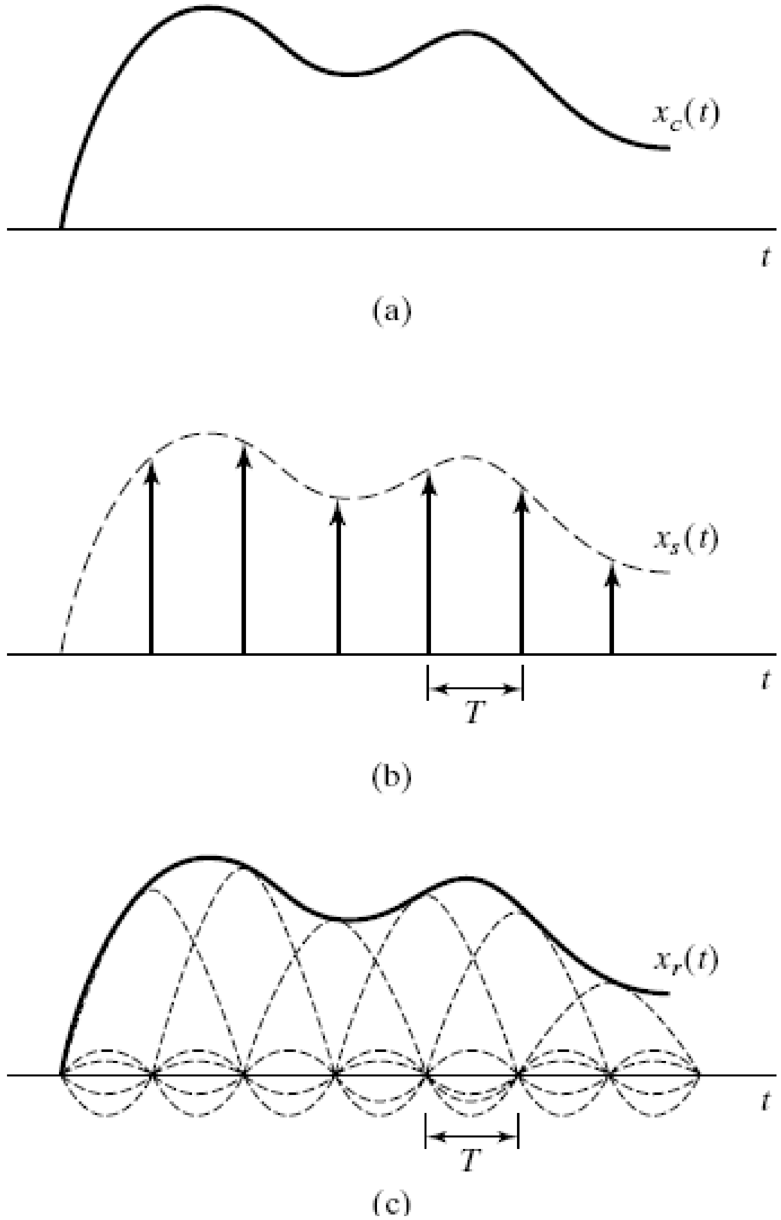


- Exemplo de função interpoladora:

  $\Phi(t) = \text{sinc}(t)$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\phi(t-n)$$

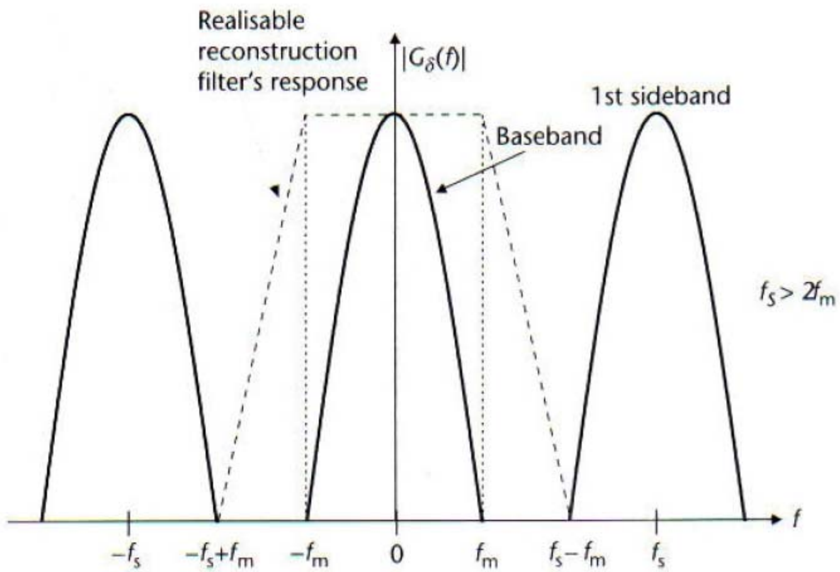
- y(t) = x(t)



From *Discrete-Time Signal Processing*, 2e
by Oppenheim, Schafer, and Buck

Amostragem – processo completo

- Processo de obter o sinal original a partir das amostras chama-se Reconstrução (ou Interpolação)
- Reconstrução realiza-se a partir de um filtro Passa Baixo Ideal

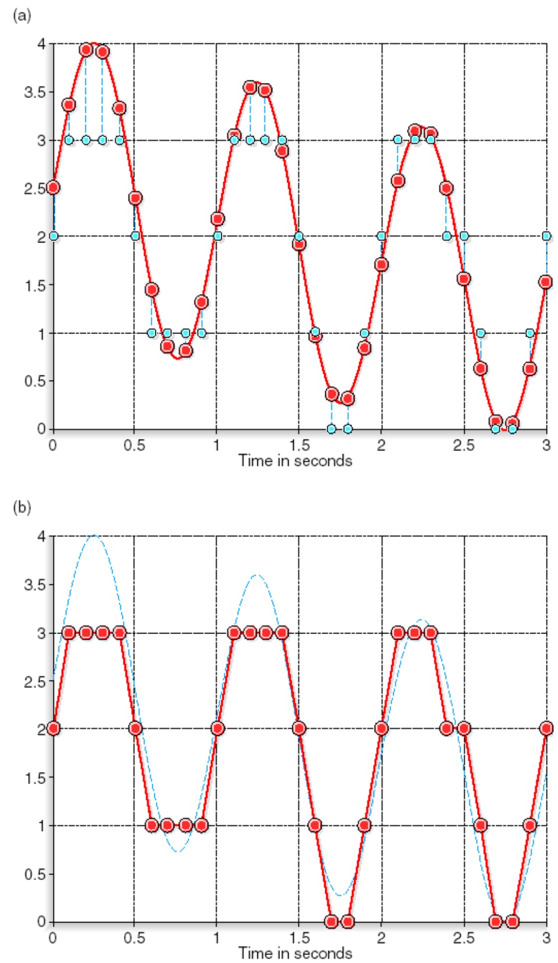


QUANTIZAÇÃO

Armazenar Amostra com Bits: Quantificação

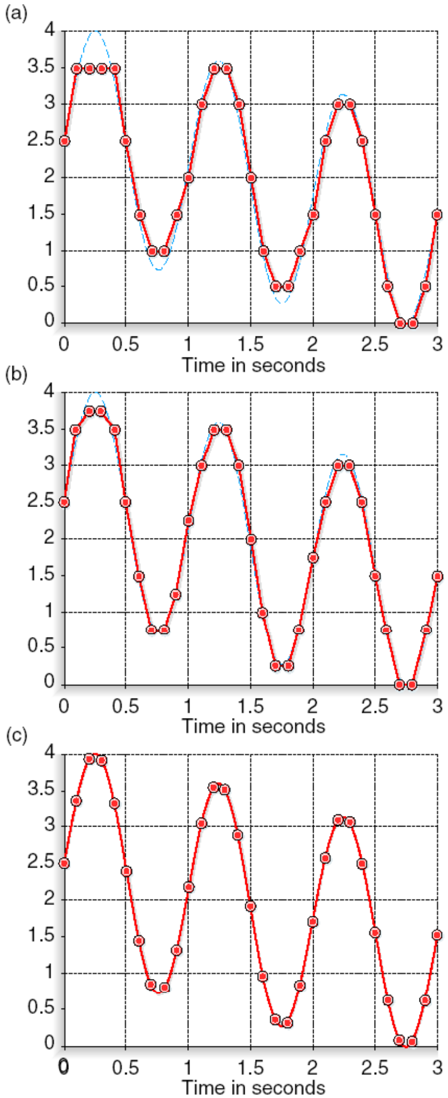
- Os dispositivos digitais utilizam um número limitado de bits para armazenar cada amostra de um sinal.

- Os erros causados pela quantificação é visto ou escutado como *ruído.*



Exemplo:
2 bits por amostra

Mais Bits Significa Menos Erros



- Exemplo:
  - Topo: 3 bits por amostra
  - Centro: 4 bits por amostra
  - Fundo: 16 bits por amostra

- Mais bits significa mais precisão, mas mais memória e esforço