I - Sinais Representação Matemática

Processamento Digital de Sinais

André Lourenço

Sumário

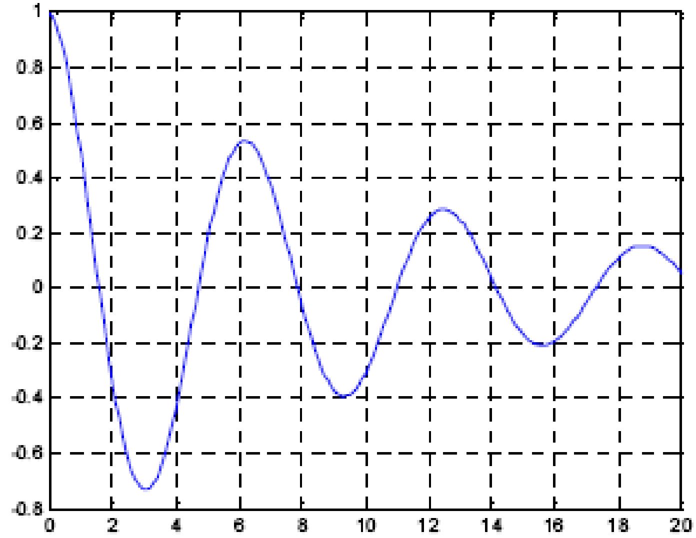
- Representação Matemática de Sinais
- Sinusóides
- Números Complexos
- Exponenciais Complexas e Fasores

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SINAIS

Classificação de Sinais

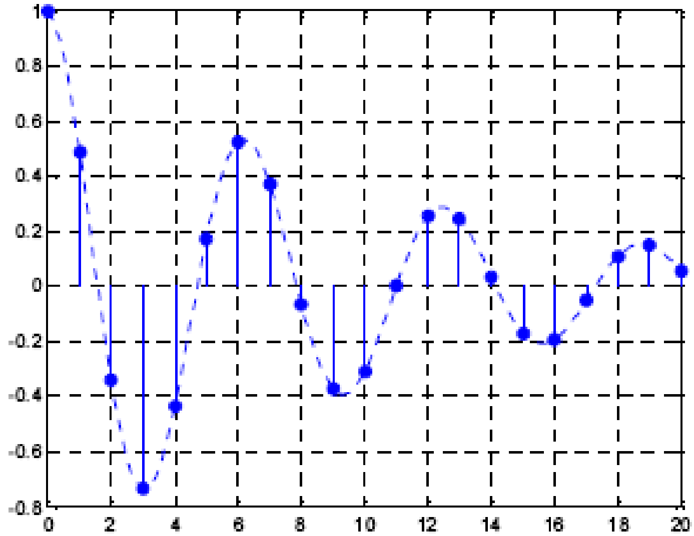
- Contínuos: *x*(*t*)

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$$



- Discretos: *x*[*n*]

$$x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}$$



SINUSÓIDES

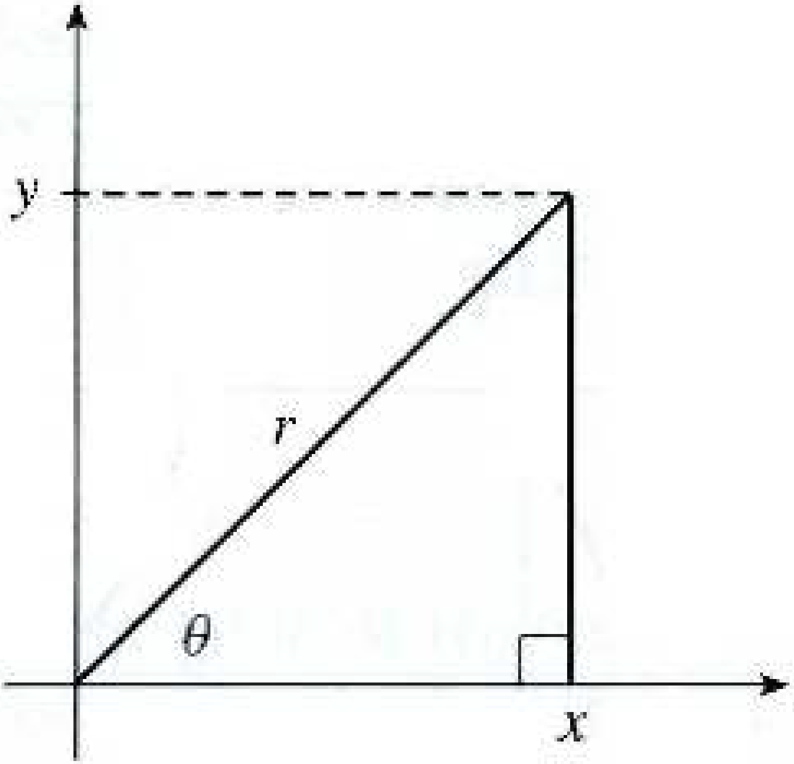
Sinusóide

- Fórmula Geral: $$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$
- ou: $$x(t) = A\cos(2\pi f_0\, t + \phi) \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$
- Período: $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ (\mathrm{s})$$
- Freq. angular: $\omega_0\ (\mathrm{rad/s})$ Freq. linear: $f_0\ (\mathrm{Hz})$

ou velocidade angular

- Periodicidade: $x(t) = x(t + kT_0) \qquad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$
- **Demos**
  - Tuning Fork; Whistle
    - http://www.youtube.com/watch?v=C5LS6scAL3E
    - http://www.youtube.com/watch?v=pANIvSh2r2A

Interpretação Geométrica



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \implies y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \implies x = r\cos\theta$$

Revisão Propriedades

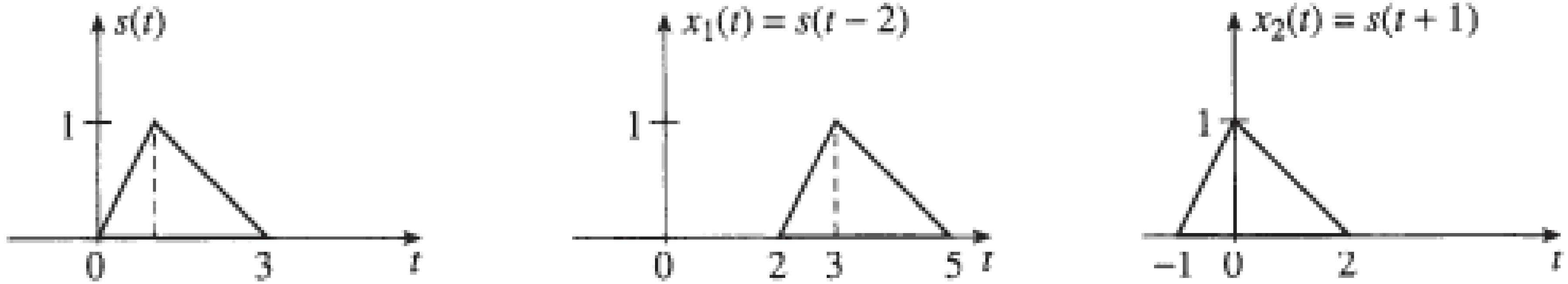
Property	Equation
Equivalence	$\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$ or $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$
Periodicity	$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta$, when k is an integer
Evenness of cosine	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
Oddness of sine	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
Zeros of sine	$\sin(\pi k) = 0$, when k is an integer
Ones of cosine	$\cos(2\pi k) = 1$ when k is an integer
Minus ones of cosine	$\cos\left[2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] = -1$, when k is an integer

$$\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta \quad \text{and} \quad \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

Identidades Fundamentais

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

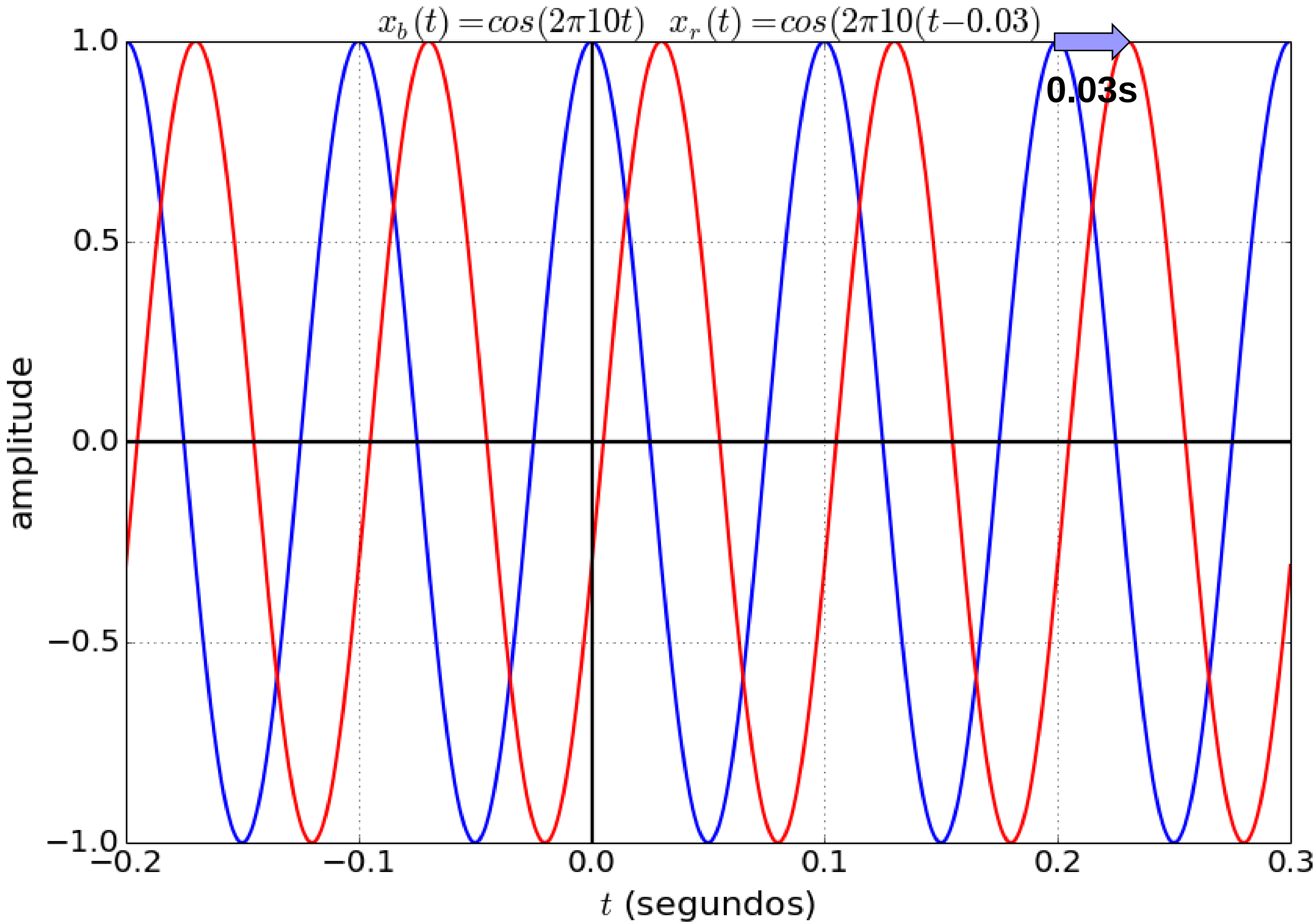
Deslocamento temporal e desfasamento angular



$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 \boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_1) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_1)) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 \boldsymbol{t} + \phi)$$

$$\phi = -\omega_0 \boldsymbol{t}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{t}_1 = -\frac{\phi}{\omega_0} = -\frac{\phi}{2\pi \boldsymbol{f}_0}$$



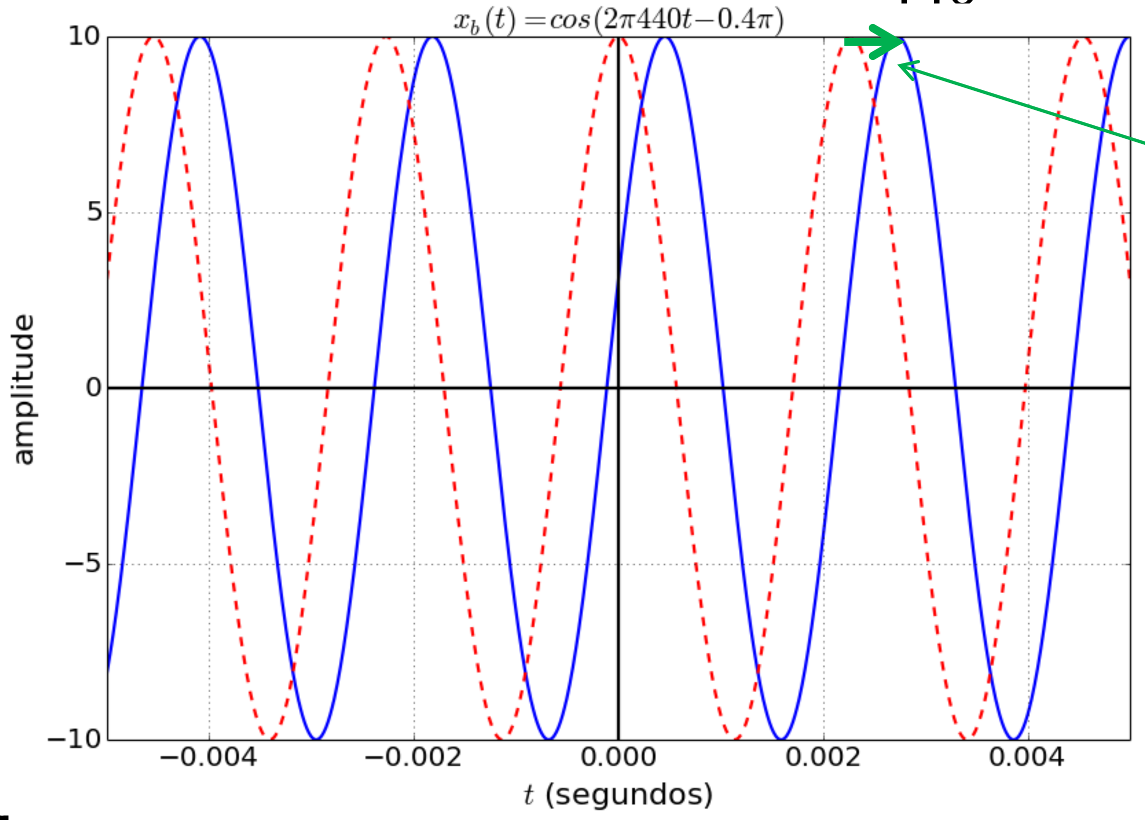
$x_b(t) = cos(2\pi 10 t)$ $x_r(t) = cos(2\pi 10(t - 0.03)$
0.03s
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
amplitude
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3
t (segundos)

Exemplos

1. Considere os sinais sinusoidais:

$$x(t) = 10\cos\left(2\pi(440)\,t - 0.4\pi\right) \text{ e } x_0(t) = 10\cos\left(2\pi(440)\,t\right)$$

$A = 10$ $\quad f_0 = 440 \text{ Hz}$ $\quad T_0 = \dfrac{1}{440} \approx 0.00227\text{s}$ $\quad \phi = -0.4\pi \text{ rad}$



$$t_1 = -\frac{-0.4\pi}{2\pi 440} = $$
$$= 4.45 \times 10^{-4}\,s$$

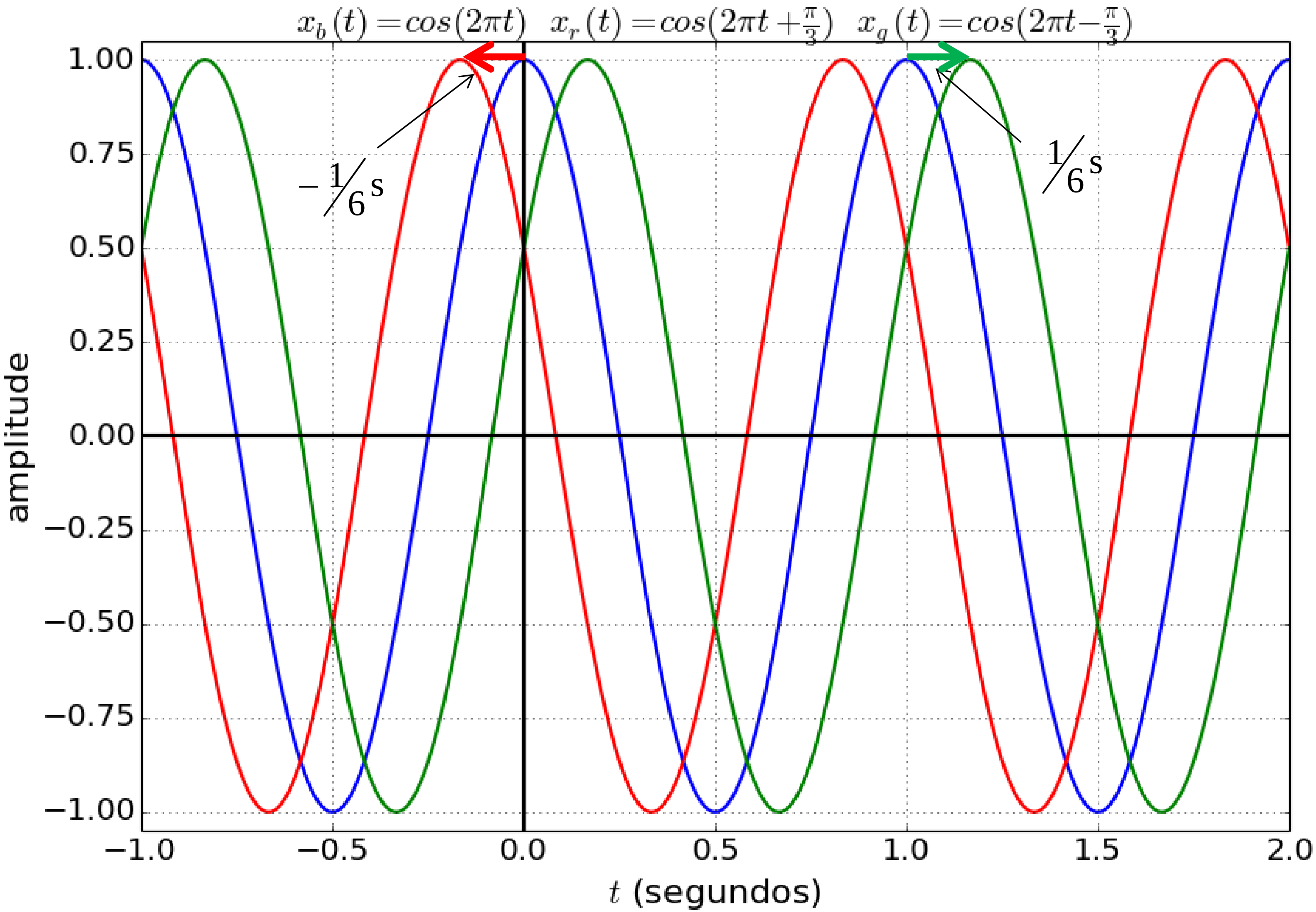
$$x(t) = x_0(t - t_1)$$

sinusoide1_python.pdf

2. Deslocamento temporal e desfasamento angular

Considere os sinais: $f_0 = 1\ \text{Hz} \quad T_0 = 1\text{s}$

	desfasamento angular	deslocamento temporal
$x_b(t) = \cos(2\pi\ t)$	$\phi = 0\ \text{rad}$	$t_0 = 0\ \text{s}$
$x_r(t) = \cos\left(2\pi\ t + \pi/3\right)$		
$x_b(t - t_r) = \cos\left(2\pi\ \left(t - \left(-1/6\right)\right)\right)$	$\phi = \pi/3\ \text{rad}$	$t_r = -1/6\ \text{s}$
$x_g(t) = \cos\left(2\pi\ t - \pi/3\right)$		
$x_b(t - t_g) = \cos\left(2\pi\ \left(t - 1/6\right)\right)$	$\phi = -\pi/3\ \text{rad}$	$t_g = 1/6\ \text{s}$



$x_b(t) = cos(2\pi t)$
$x_r(t) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$
$x_g(t) = cos(2\pi t - \frac{\pi}{3})$
$-\frac{1}{6}$ s
$\frac{1}{6}$ s
amplitude
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
t (segundos)

3. Máximos, mínimos e zeros

Considere o sinal sinusoidal:

$$x(t) = 20\cos\left(2\pi(40)\ t - 0.4\pi\right) \qquad f_0 = 40\ \text{Hz} \quad T_0 = \frac{1}{40} = 0.025s$$

$$t \in [-0.04, 0.04]$$

Zeros: $20\cos\left(2\pi(40)\ t - 0.4\pi\right) = 0$

$$2\pi(40)\ t - 0.4\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2k+1}{160} + 0.05\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow t = 0.01125$$

$$k = -1 \rightarrow t = -0.00125$$

$$k = -2 \rightarrow t = -0.01375$$

$$k = -3 \rightarrow t = -0.02625$$

$$k = -4 \rightarrow t = -0.03875$$

$$k = 1 \rightarrow t = 0.02375$$

$$k = 2 \rightarrow t = 0.03625$$

$$\cancel{k = 3 \rightarrow t = 0.04875} > 0.04$$

3. Máximos, mínimos e zeros

Considere o sinal sinusoidal:

$$x(t) = 20\cos\left(2\pi(40)\, t - 0.4\pi\right) \qquad f_0 = 40 \text{ Hz} \quad T_0 = \frac{1}{40} = 0.025s$$

$$t \in [-0.04, 0.04]$$

Extremos:

$$x'(t) = -20\sin\left(80\pi\, t - 0.4\pi\right)80\pi = 0 \Leftrightarrow 80\pi\, t - 0.4\pi = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k+0.4}{80}$$

$$k = 0 \rightarrow t = 0.005 \quad \text{máx}$$

$k = -1 \rightarrow t = -0.0075$ min

$k = -2 \rightarrow t = -0.0200$ máx

$k = -3 \rightarrow t = -0.0325$ min

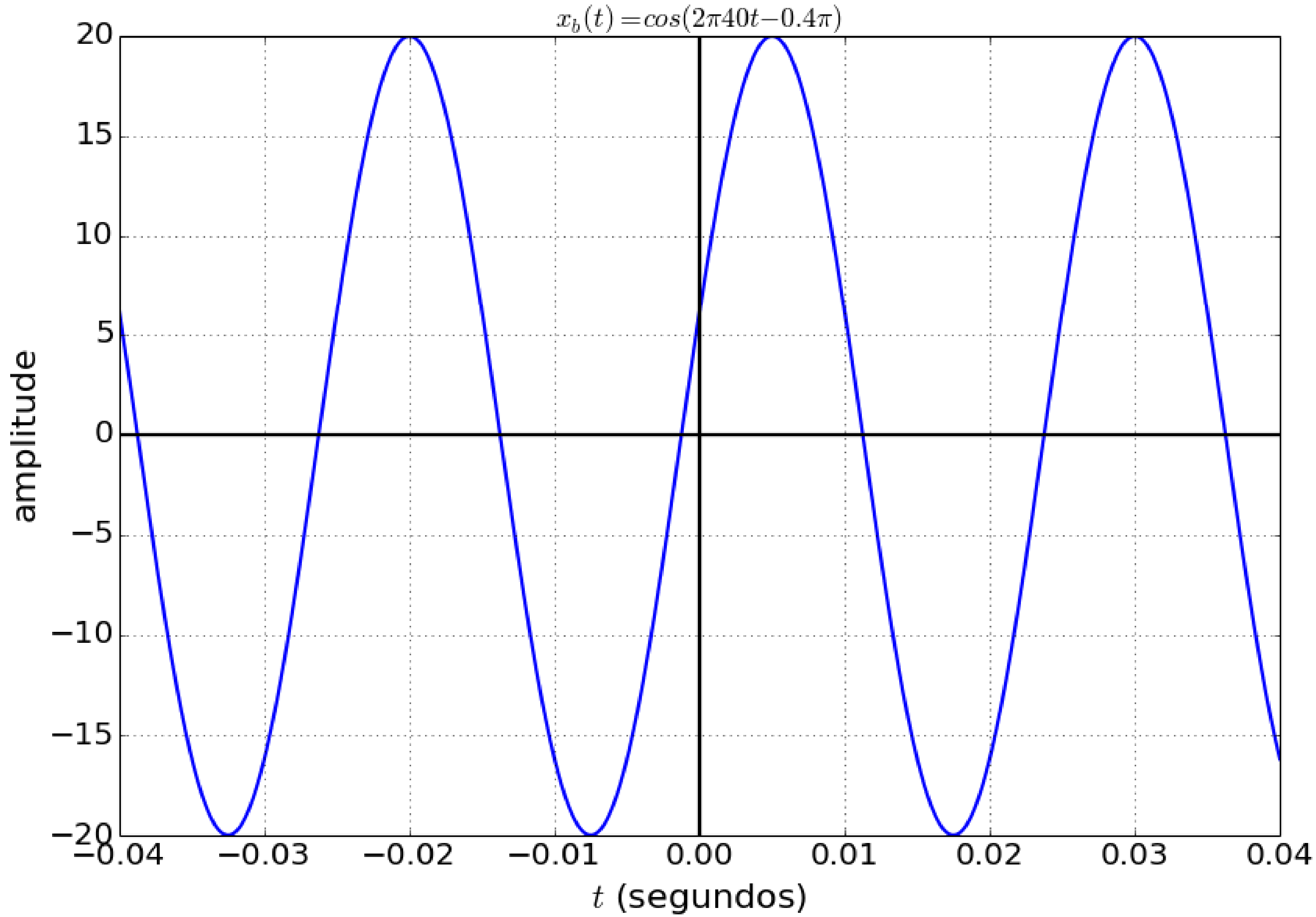
$k = 1 \rightarrow t = 0.0175$ min

$k = 2 \rightarrow t = 0.030$ máx

$\cancel{k = 3 \rightarrow t = 0.0425} > 0.04$

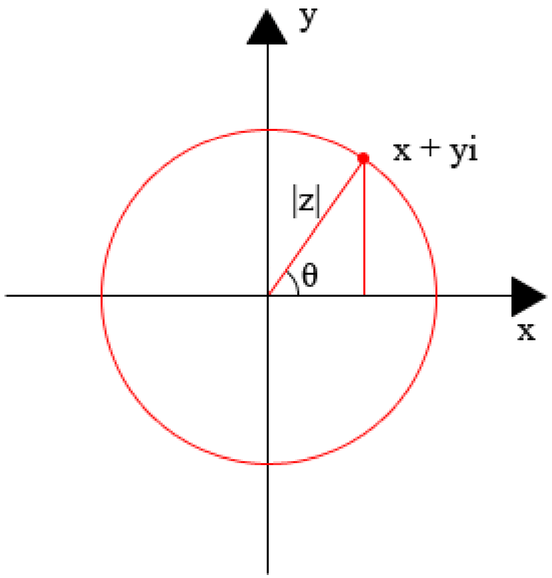
Máximos $x''(t) < 0$

Mínimos $x''(t) > 0$


$x_b(t) = cos(2\pi 40t - 0.4\pi)$
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
amplitude
−0.04
−0.03
−0.02
−0.01
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
t (segundos)

EXPONENCIAIS COMPLEXAS E FASORES

Números Complexos



$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Z = (x, y) = x + iy$$

$$Z = r(cos\theta + i\sin\theta)$$

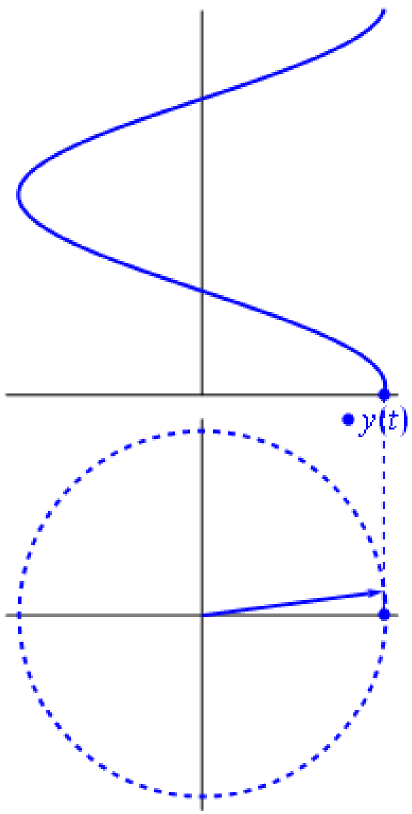
Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Z = re^{i\theta}$$

Operações

Fasores



Representação Vectorial de uma sinusoidal cuja Amplitude e velocidade angular são constantes

$$x(t) = \Re e\left\{ A e^{j(\omega_0 t + \phi)} \right\} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

- Demos
  - http://ptolemy.eecs.berkeley.edu/eecs20/berkeley/phasors/demo/phasors.html
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

Formulas de Euler Inversas

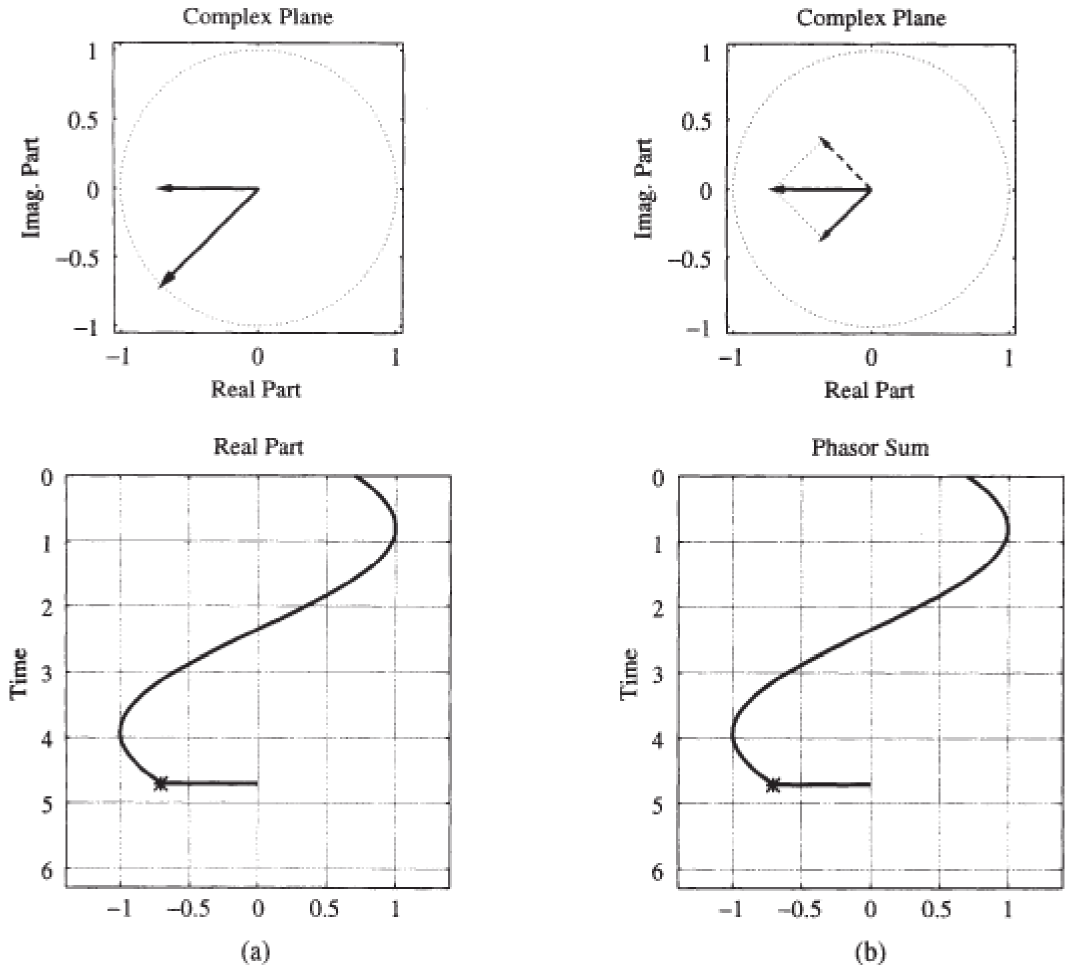
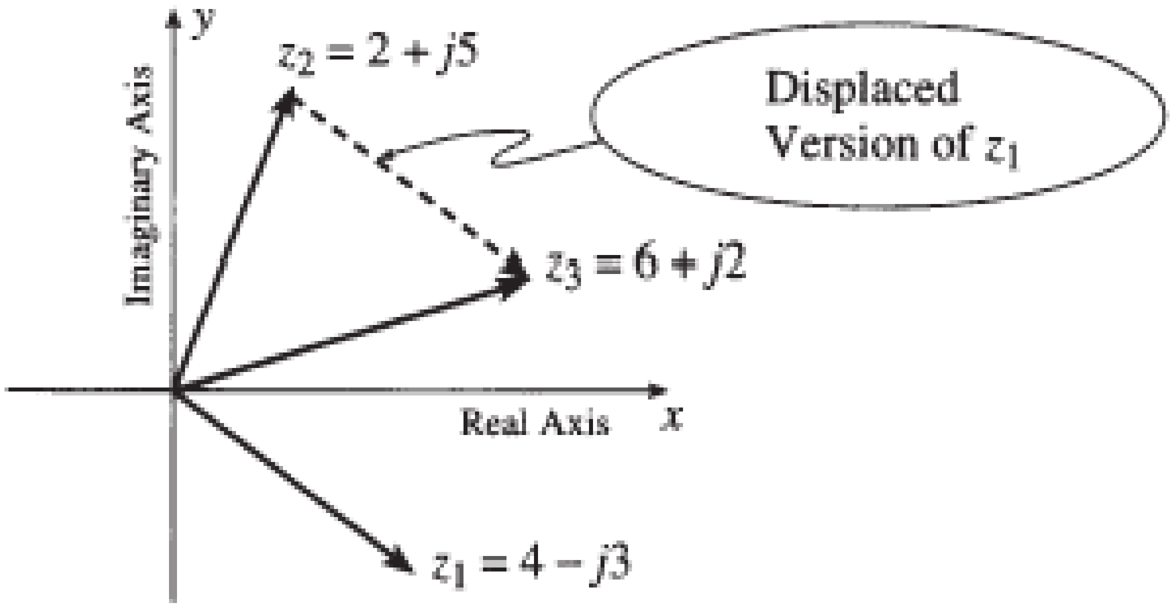


Figure 2.13 Rotating phasors: (a) single phasor rotating counter-clockwise; (b) complex conjugate rotating phasors.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Adição de Fasores



$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k} = A e^{j\phi}$$

Regra da adição de fasores

- Problema:Somar os sinais

$$x_1(t) = A_1 \cos\left(2\pi (f_0)\ t + \phi_1\right) \qquad x_2(t) = A_2 \cos\left(2\pi (f_0)\ t + \phi_2\right)$$

1. Representar os sinais em termos de fasores :

$$\bar{x}_1(t) = A_1 e^{j\phi_1} e^{j2\pi (f_0)\ t} \qquad \bar{x}_2(t) = A_2 e^{j\phi_2} e^{j2\pi (f_0)\ t}$$

$$X_1 = A_1 e^{j\phi_1} \qquad X_2 = A_2 e^{j\phi_2}$$

2. Converter os fasores para a forma algébrica e somar

$$X_1 = A_1 \cos(\phi_1) + j \sin(\phi_1) \qquad X_2 = A_2 \cos(\phi_2) + j \sin(\phi_2)$$

$$X_1 + X_2 = A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2) + j\left(\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)\right)$$

Regra da adição de fasores

3. Converter o resultado para a forma polar (Euler)

$$\bar{x}(t) = Ae^{j\phi}e^{j2\pi(f_0)\,t} \quad \text{e obter} \quad x(t) = A\cos\left(2\pi(f_0)\,t - \phi\right)$$

com:

$$A = \sqrt{\left(A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)\right)^2 + \left(A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)\right)^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}\right)$$

Nota:

Se ϕ estiver no 1º ou no 4º quadrantes, o resultado é o da máquina.

Se ϕ estiver no 2º ou no 3º quadrantes, o resultado é o da máquina somando π.

Exercícios

1. Some os seguintes sinais usando fasores:

a)

$$x_1(t) = 1.7\cos\left(2\pi(10)\ t - \frac{70\pi}{180}\right)$$

$$x_2(t) = 1.9\cos\left(2\pi(10)\ t - \frac{200\pi}{180}\right)$$

b)

$$x_1(t) = 5\cos\left(2\pi(100)\ t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_2(t) = 4\cos\left(2\pi(100)\ t - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Construa um script python para efectuar os cálculos da soma de fasores e verifique os resultados obtidos em 1.

fasores2_python.pdf

Exercícios

3. Seja $x(t) = 2\sin\left(\omega_0 t - \pi/4\right) + \cos(\omega_0 t)$ um sinal.
   a) Exprima o sinal dado na forma:
   $$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$
   b) Considere $\omega_0 = 5\pi$. Faça o gráfico de $x(t)\ ,\ t \in [-1, 2]$.
   Quantos períodos se podem visualizar no plot?
   c) Determine um sinal complexo $\vec{x}(t)$ tal que $x(t) = \mathbf{Re}(\vec{x}(t))$

4. A fase de uma sinusóide relaciona-se com o deslocamento temporal como:
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos\left(\omega_0 (t - t_1)\right)$$

Considere $T_0 = 8s$.

Indique, justificando se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

Exercícios

a) $t_1 = -2s \Leftrightarrow \phi = \pi/2$

b) $t_1 = 3s \Leftrightarrow \phi = 3\pi/4$

c) $t_1 = 7s \Leftrightarrow \phi = \pi/4$

5. Seja o sinal:

$$x(t) = 5\cos\left(\omega_0\ t + 3\pi/2\right) + 4\cos\left(\omega_0\ t + 2\pi/3\right) + 4\cos\left(\omega_0\ t + \pi/3\right)$$

a) Exprima $x(t)$ na forma $x(t) = A\cos(\omega_0\ t + \phi)$.

b) Represente graficamente no plano complexo todos os fasores usados para resolver o problema $\left(X = Ae^{j\phi}\right)$.

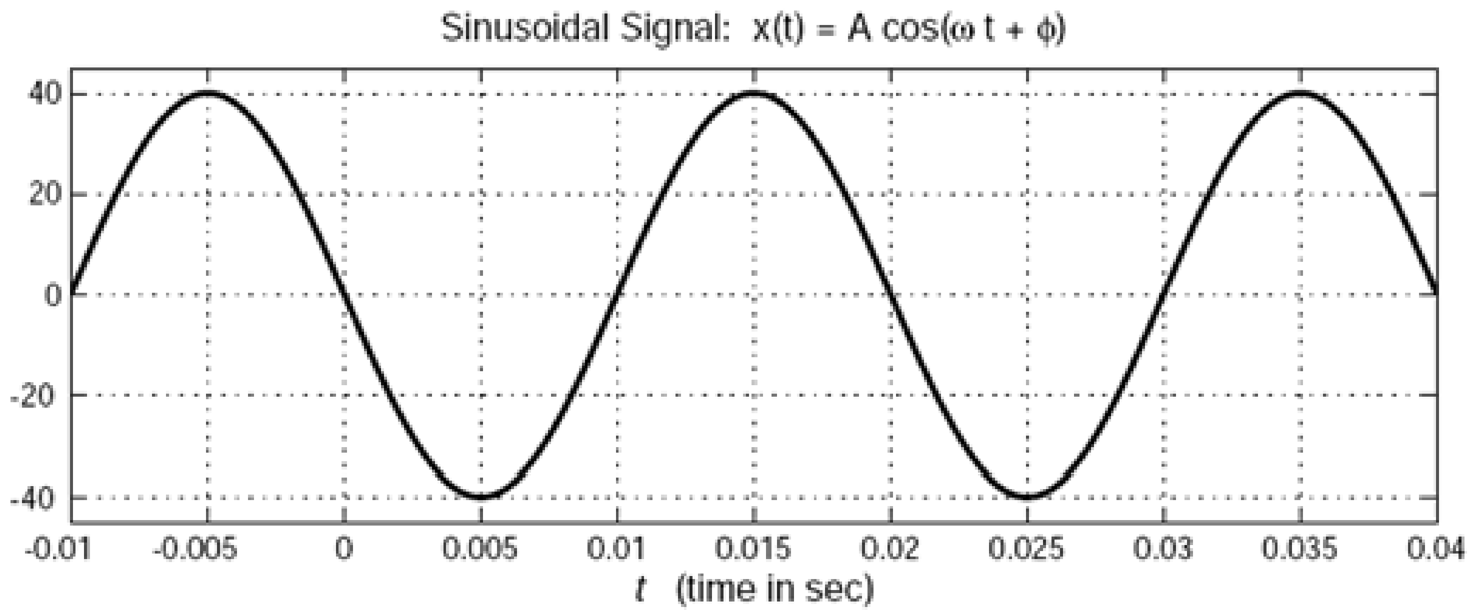
c) Faça o plot de cada parcela do sinal dado e do próprio sinal.

Exercícios

6. Simplifique e dê o resultado na forma. $x(t) = A\cos(\omega_0\ t + \phi)$
   Desenhe os fasores utilizados em cada caso no plano complexo e ilustre as respostas obtidas:

   a) $x(t) = 2\cos(333\pi\ t) - \sin(333\ t)$.
   b) $x(t) = 7\cos\left(245\ t + \frac{3\pi}{4}\right) + 7\cos\left(245t + \frac{\pi}{2}\right)$.
   $x(t) = \cos(41\ t + 17\pi) + \sqrt{2}\cos\left(41\ t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(41\ t - \frac{\pi}{4}\right)$

7.

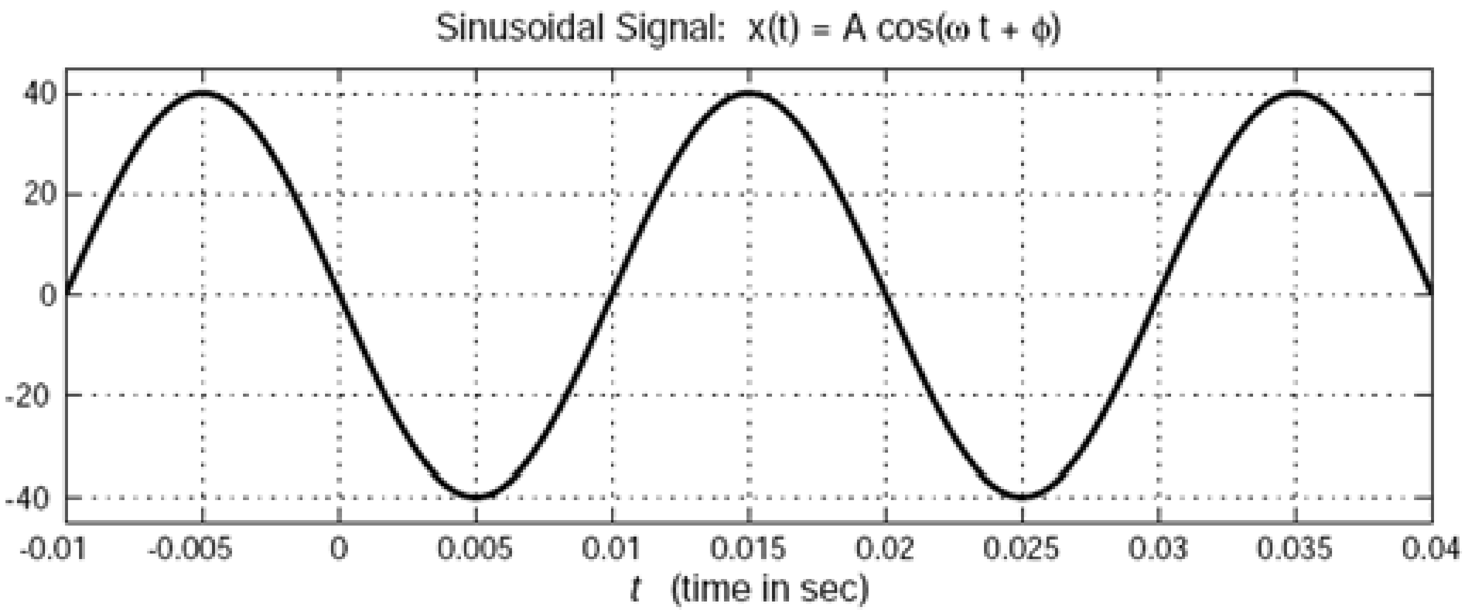


Exercícios

6. Simplifique e dê o resultado na forma. $x(t) = A\cos(\omega_0\ t + \phi)$
   Desenhe os fasores utilizados em cada caso no plano complexo e ilustre as respostas obtidas:

   a) $x(t) = 2\cos(333\pi\ t) - \sin(333\ t)$.
   b) $x(t) = 7\cos\left(245\ t + {}^{3\pi}\!/_{4}\right) + 7\cos\left(245t + {}^{\pi}\!/_{2}\right)$.
   $x(t) = \cos(41\ t + 17\pi) + \sqrt{2}\cos\left(41\ t + {}^{\pi}\!/_{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(41\ t - {}^{\pi}\!/_{4}\right)$

7.



Exercícios

a) Com base no gráfico anterior e na representação

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ determine valores para A, ω_0, $\phi \in \left]-\pi, \pi\right]$

b) O sinal obtido pode ser escrito como a parte real de uma exponencial complexa:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(Xe^{j\omega_0 t}\right)$$

c) Esboce, para o mesmo intervalo de tempo, o sinal

.

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\left[x(t-0.01)\right]$$