VI – Transformada Z e Filtros IIR

Processamento Digital de Sinais

André Lourenço

Sumário

- Transformada Z
  - Definição, Região de Convergência
  - Exemplos
  - Pares Típicos
- Sistemas IIR
- Análise de SLITs Discretos
  - Pólos e zeros
  - Transformada Inversa e Resposta Impulsional
  - Exemplos
  - Diagramas de Blocos

Transformada Z

- Definição:

$$TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

onde z é um número complexo.

- Transformação do domínio n para o domínio Z:

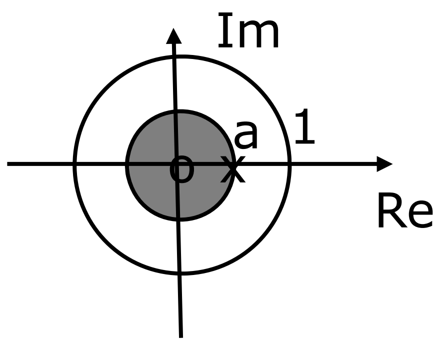
$$x[n] \xleftarrow[TZ]{} \xrightarrow{} X(z)$$

Transformada Z

- X(z) só fica totalmente definida especificando a região na qual o somatório converge em valor absoluto
- Essa região denomina-se de região de convergência, e é normalmente especificada por um lugar geométrico do tipo:

$$|z| > |a|$$

$$|z| < |a|$$

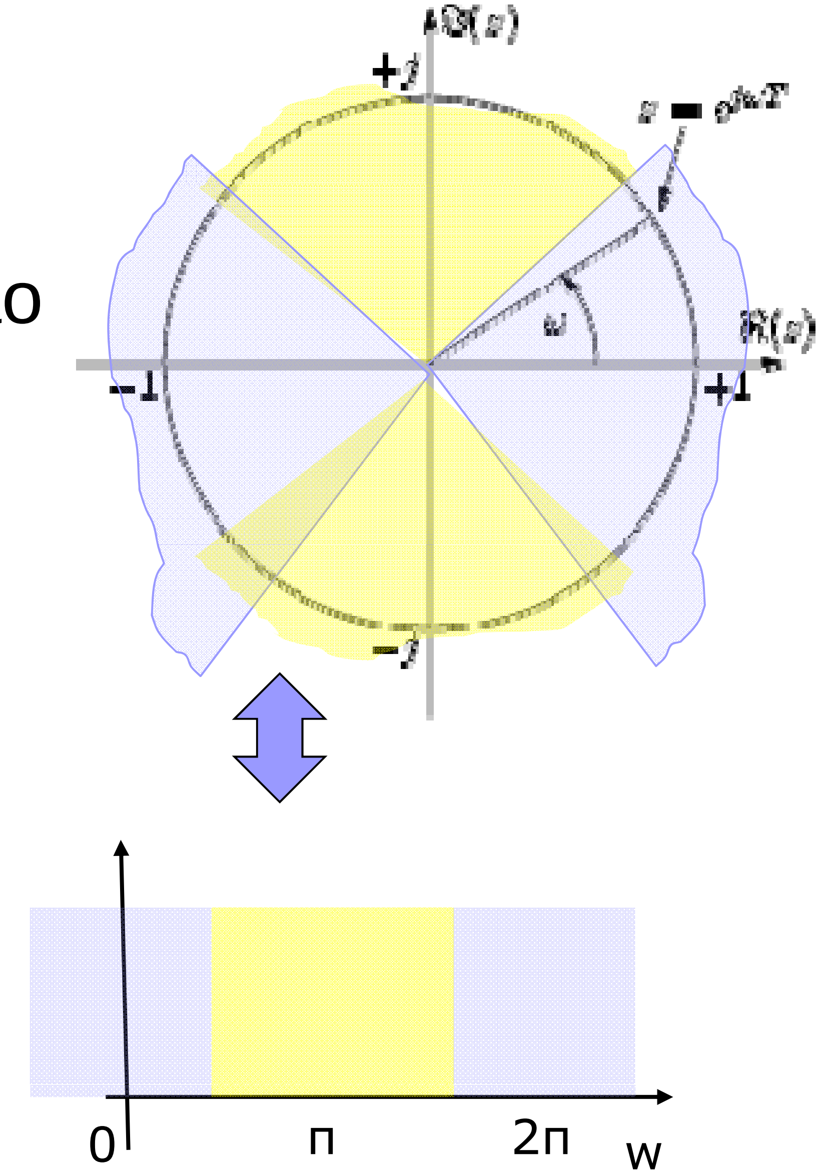


Transformada Z

- A TZ é uma generalização da TF:

$$X(\hat{w}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\hat{w}}}$$

Onde $z = e^{j\hat{w}}$ representa o circulo de raio unitário



Exemplos

$$h(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

- Relembrar série geométrica:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

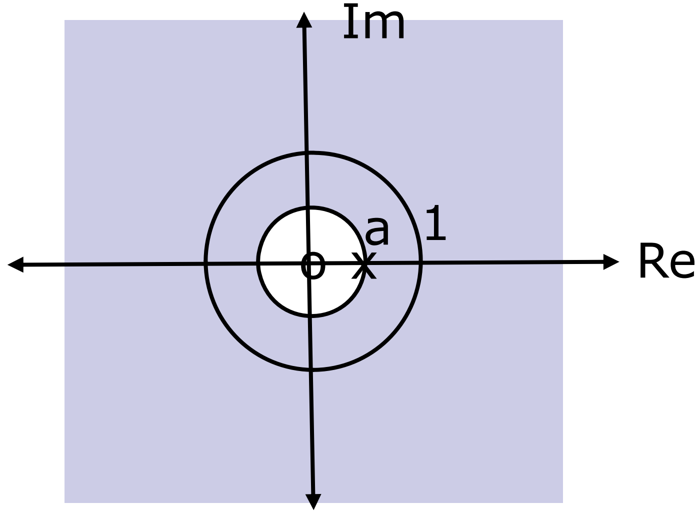
$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

- A série converge se a razão

az^{-1} tiver módulo menor que 1

ou seja |z|>|a|

Região de convergência: |z|>|a|



Exemplos

$$h(n) = -a^n u(-n-1) \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \underset{m=-n-1}{=} -\sum_{m=0}^{\infty} a^{-m-1} z^{m+1} =$$

$$= -a^{-1} z \left(\sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} z^m \right) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

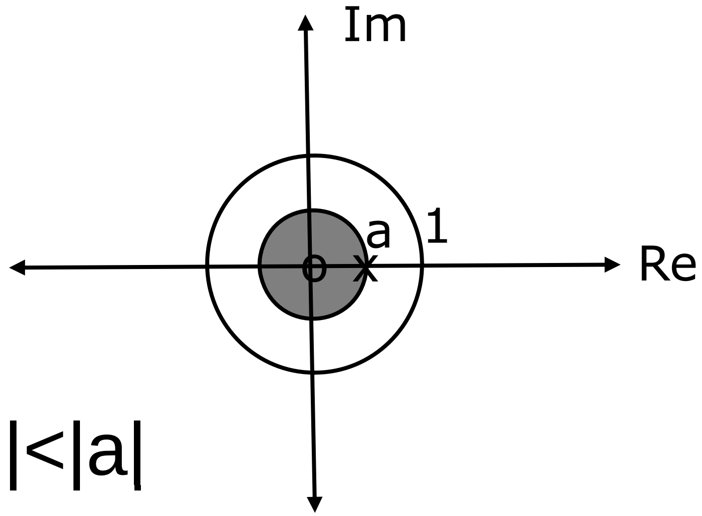
- A série converge se

a razão $a^{-1}z$ tiver módulo

menor que 1

ou seja |z|<|a|

Região de convergência: |z|<|a|



Pares Típicos Transformada Z

$$h(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{TZ} H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, ROC: |z| > |a|$$

$$h(n) = -a^n u(-n-1) \xleftrightarrow{TZ} H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, ROC: |z| < |a|$$

$$h(n) = \delta(n) \xleftrightarrow{TZ} H(z) = 1, ROC: C$$

$$h(n) = \delta(n-n_0) \xleftrightarrow{TZ} H(z) = z^{-n_0}, ROC: C \setminus \{0\}$$

Propriedades

- Linearidade
$$TZ\{ah_1(n)+bh_2(n)\}=aH_1(z)+bH_2(z),$$
$$ROC: ROC_{h_1}\cap ROC_{h_2}$$

- Deslocamento no tempo
$$TZ\{x(n-n_0)\}=z^{-n_0}X(z),$$
$$TZ\{y(n-n_0)\}=z^{-n_0}Y(z)$$

- Exemplos

$$h_1(n)=a^n u(n)\xleftrightarrow[TZ]{}H_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},ROC:|z|>|a|$$

$$H(z)=H_1(z)z^{-1}=\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}},ROC:|z|>|a|$$

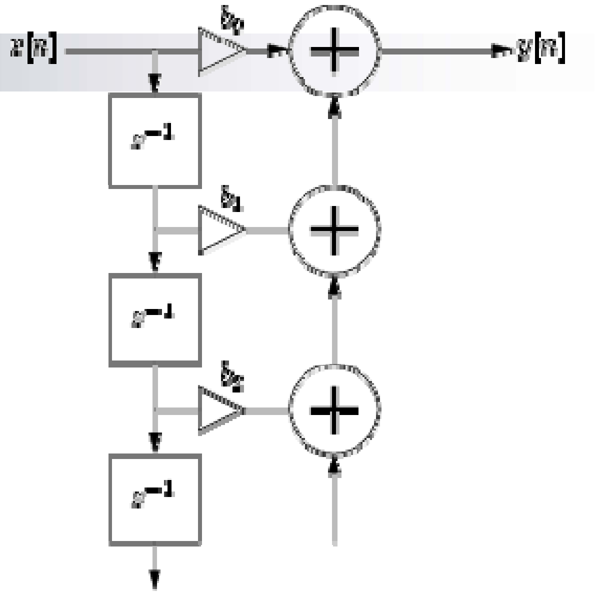
$$\xleftrightarrow[TZ]{}h(n)=h_1(n-1)=a^{(n-1)}u(n-1)$$

SLITs Discretos do tipo IIR

- Os sistemas discretos podem ser classificados em:
  - Tipo FIR: Resposta Impulsional Finita
  - Tipo IIR: Resposta Impulsional Infinita

Não recursivos

- FIR
  - y(n)= 3x(n)+2x(n-1)+x(n-2)

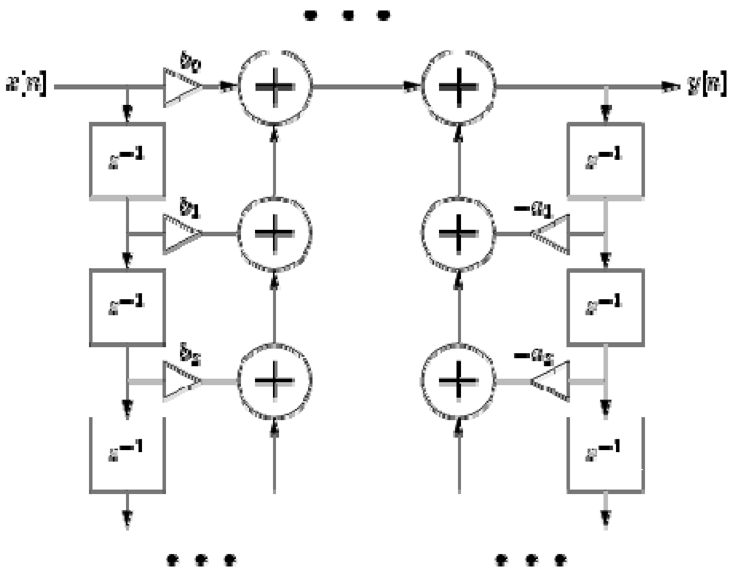


$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Recursivos

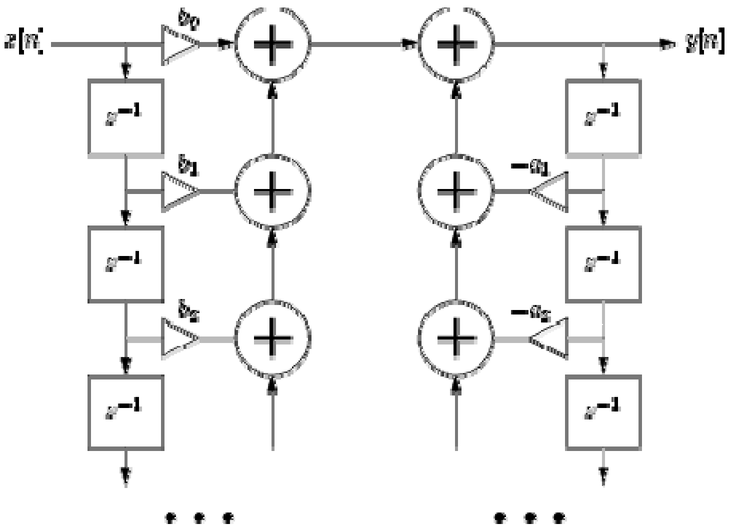
- IIR
  - y(n)= x(n)+0.5y(n-1)
  - Resposta impulsional:

    $h(n)= 0.5^n u(n)$



$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \ldots - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Diagramas de blocos

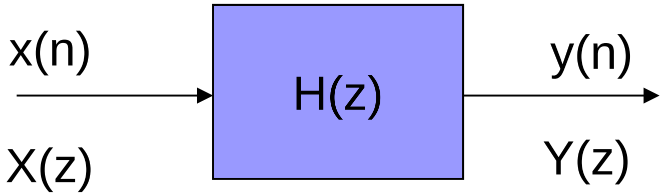


- Eq às diferenças

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} (-a_k) y[n-k]$$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Análise de SLITS pela TZ



- Convolução no domínio do tempo equivale a um produto no domínio da TZ

$$x[n]*h[n]=y[n]\Leftrightarrow X(z)H(z)=Y(z)$$

- Chama-se a H(z) função de transferência:

$$H(z)=TZ\{h[n]\}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

Análise de SLITS pela TZ

- A TZ pode ser usada como operador sendo aplicável por exemplo à equação às diferenças:

$$a_2 y(n-2) + a_1 y(n-1) + y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

Levando a seguinte equação (no domínio da TZ):

$$a_2 z^{-2} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) \Leftrightarrow$$

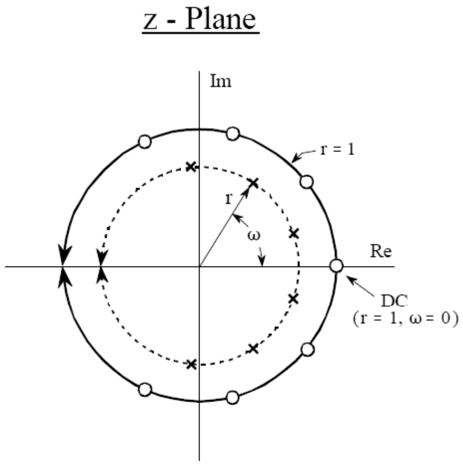
$$\left(a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right) X(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Análise de SLITS pela TZ

- Função de Transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$



- Define-se como:

Zeros – as raízes do numerador

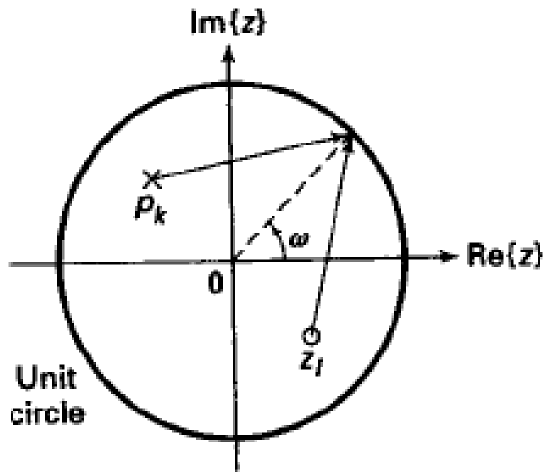
Pólos – as Raízes do denominador

Resposta em Frequência a partir da TZ (e dos pólos e zeros)

$$H(\hat{w}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\hat{w}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{w}} + \ldots + b_M e^{-jM\hat{w}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{w}} + \ldots + a_N e^{-jN\hat{w}}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M}\left(1 - z_k e^{-j\hat{w}}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - p_k e^{-j\hat{w}}\right)} =$$

$$= \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M}\left(e^{j\hat{w}} - z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(e^{j\hat{w}} - p_k\right)} e^{j\hat{w}(N-M)}$$

$$\left|H(\hat{w})\right| = \left|b_0\right| \frac{\left|e^{j\hat{w}} - z_1\right| \cdots \left|e^{j\hat{w}} - z_M\right|}{\left|e^{j\hat{w}} - p_1\right| \cdots \left|e^{j\hat{w}} - p_N\right|}$$

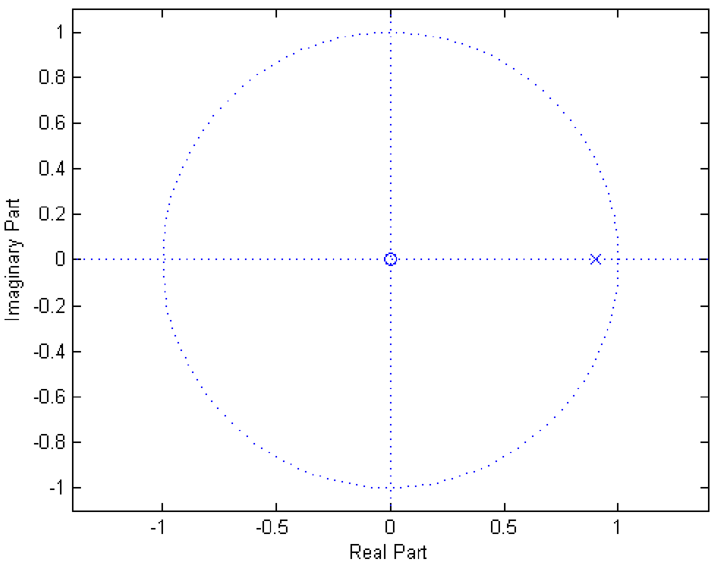


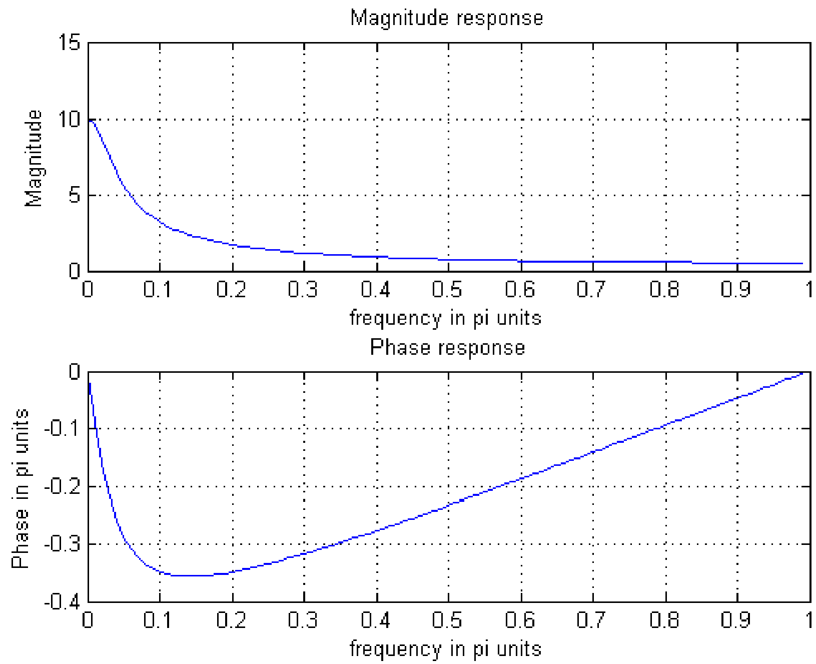
$$\arg\left\{H(\hat{w})\right\} = \underbrace{[0 \text{ ou } \pi]}_{\text{constante}} + \underbrace{[(N-M)\hat{w}]}_{\text{linear}} + \underbrace{\sum_{1}^{M} \arg(e^{j\hat{w}} - z_k) - \sum_{1}^{N} \arg(e^{j\hat{w}} - p_k)}_{\text{não-linear}}$$

Filtro com um pólo

- Equação às diferenças: $$y(n) = x(n) + 0.9y(n-1)$$
- Função de Transferência: $$H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$
- Resposta em Frequência: $$H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1-0.9e^{-j\Omega}}$$

- Resposta Impulsional: $$h(n) = TF^{-1}\{H(\Omega)\} = TZ^{-1}\{H(z)\}$$





Transformada Inversa

- A transformada Inversa é definida usando um integral de Cauchy (integral num contorno)

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Métodos menos formais, mas mais usados:
  - Inspecção
  - Expansão em fracções parciais

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Por inspecção directa e usando propriedades

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=a^n u[n]$$

$$H(z)=\frac{2z^{-1}}{1-az^{-1}},|z|>|a| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=2\,a^{(n-1)}u[n-1]$$

$$H(z)=\frac{k_1}{1-az^{-1}}+\frac{k_2}{1-bz^{-1}},|z|>|a|>|b| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=k_1\,a^n u[n]+k_2\,b^n u[n]$$

- Relembrar propriedades:

$$ah_1[n]+bh_2[n] \xleftrightarrow{Z} aH_1(z)+bH_2(z),$$
$$ROC=R_{h_1}\cap R_{h_2}$$

$$h[n-n_o] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_o}H(z),$$
$$ROC=R_h$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

PROCEDURE FOR INVERSE z-TRANSFORMATION ($M < N$)

1. Factor the denominator polynomial of $H(z)$ and express the pole factors in the form $(1 - p_k z^{-1})$ for $k = 1, 2, \ldots, N$.
2. Make a partial fraction expansion of $H(z)$ into a sum of terms of the form

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad \text{where} \quad A_k = H(z)(1 - p_k z^{-1})\Big|_{z=p_k}$$

3. Write down the answer as

$$h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n]$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Caso Geral: usando o método de expansão em fracções parciais

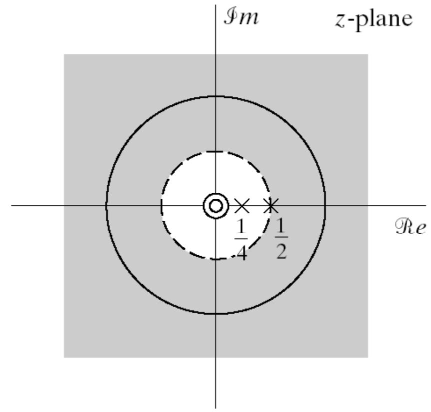
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r}+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}+\sum_{m=1}^{s}\frac{C_m}{\left(1-d_i z^{-1}\right)^m}$$

Coeficiente associado Aos pólos simples (multiplicidade =1)	$A_k=\left(1-d_k z^{-1}\right)H(z)\Big\vert_{z=d_k}$
Coeficiente associado aos pólos com multiplicidade >1	$C_m=\frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}}\left\{\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}}\left[\left(1-d_i w\right)^s H\left(w^{-1}\right)\right]\right\}_{w=d_i^{-1}}$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Exemplo pólos simples:

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC}: |z|>\frac{1}{2}$$



$$H(z)=\frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}+\frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$A_1=\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)H(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)}=-1$$

$$A_2=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)H(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)}=2$$

TZ^{-1}

$$h[n]=TZ^{-1}(H(z))=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}}\mathrm{u}[\mathrm{n}]$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Quando não existem pólos:

$$H(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$= z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$h[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Teorema do Valor inicial e final

- Teorema do valor inicial

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Teorema do valor final

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

Só se os pólos de $(1\text{-}z^{-1})H(z)$ estiverem dentro do circulo de raio unitário

TZ e Estabilidade

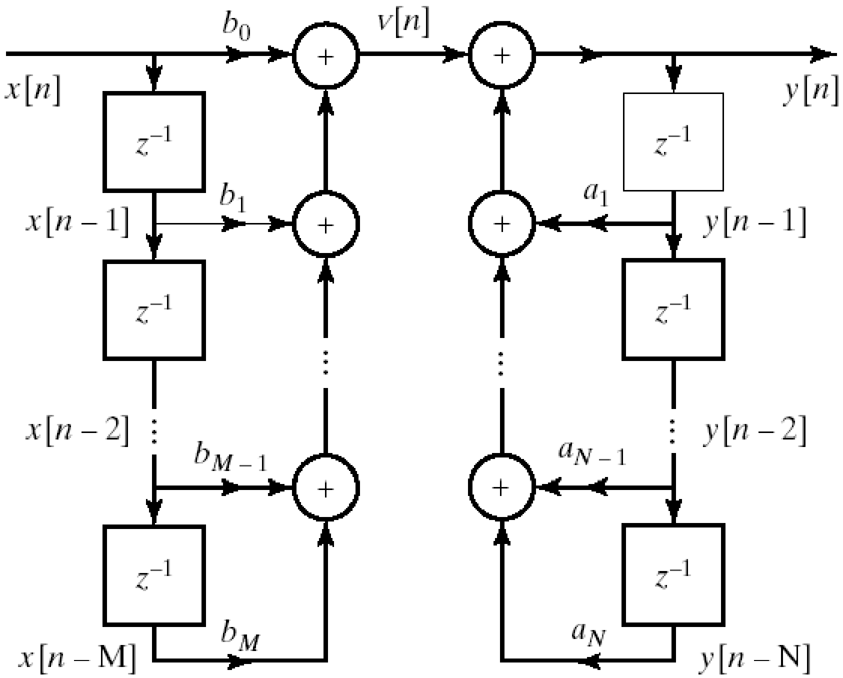
- Para sistemas causais:
  - Sistema é estável se todos os pólos estiverem no interior do circulo de raio unitário
  - Região de convergência será:

$$|z| > |p_{\max}|$$

onde p_{max} é o polo com maior raio

Caso Geral - SLITs

- Diagrama de Blocos



- Eq às diferenças

$$y[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Função de Transf

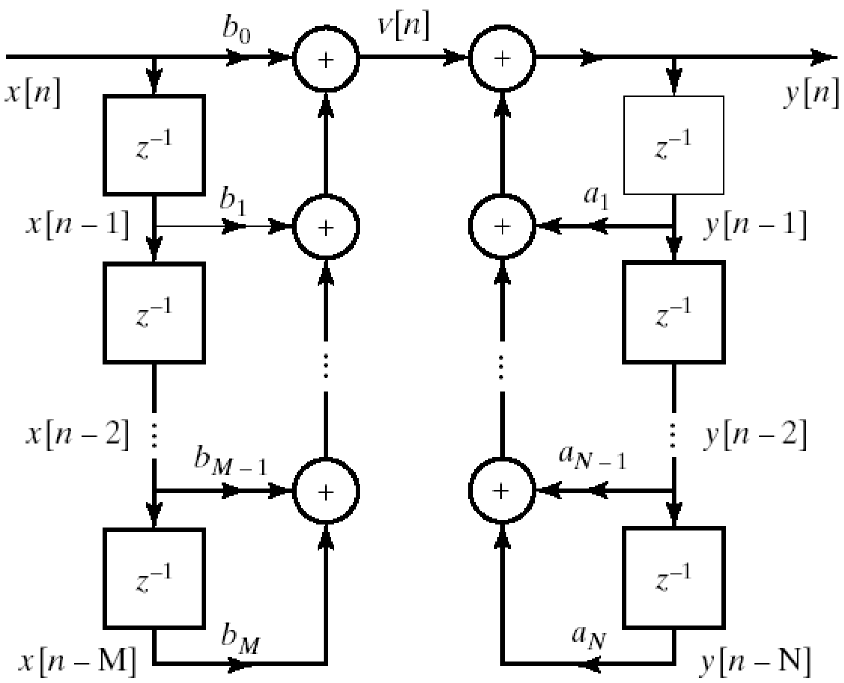
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Resposta Impulsiva

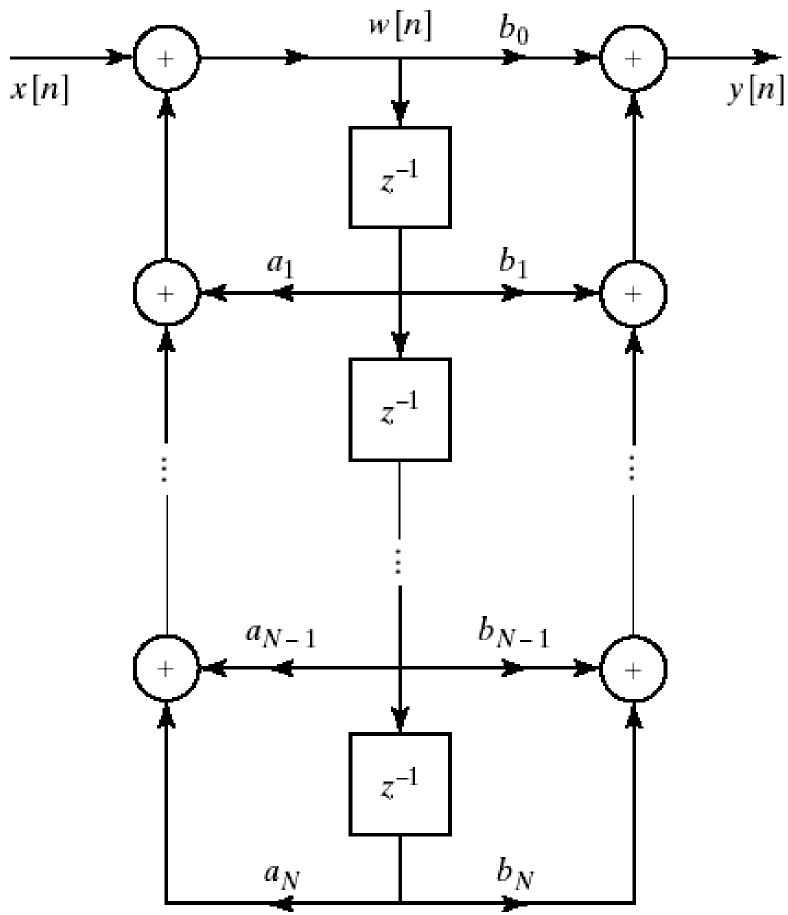
$$h[n] = TZ^{-1}\{H(z)\}$$

Diagramas de Blocos

Forma Directa I



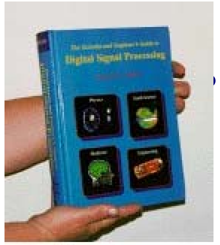
Forma Directa II



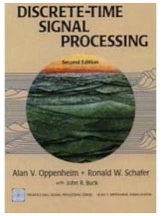
Referências

- **Processamento de Sinais**, Jorge Marques e Arnaldo Abrantes, 2006/07
- **Apontamentos de Sinais e Sistemas**, José Amaral, José Nascimento & José Rocha, ISEL
- Sinais como Vectores – Maria Isabel Milho ISEL - 1999
- Apontamentos e Slides de Comunicações – Artur Ferreira, ISEL

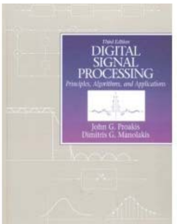
Referências



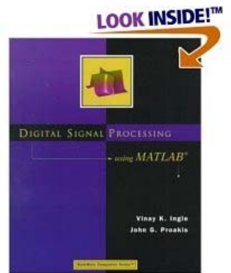
- The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Steven W. Smith
  http://www.dspguide.com/



- Discrete-Time Signal Processing (2nd Ed) , Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer, John R. Buck



Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, (3rd Ed) John Proakis, Dimitris Monolakis



Digital Signal Processing using Matlab, Vinay Ingle, John Proakis