VI – Transformada Z e Filtros IIR

Processamento Digital de Sinais

Sumário

- Transformada Z
  - Definição, Região de Convergência
  - Exemplos
  - Pares Típicos

- Sistemas IIR

- Análise de SLITs Discretos
  - Pólos e zeros
  - Transformada Inversa e Resposta Impulsional
  - Exemplos
  - Diagramas de Blocos

Transformada Z

- Definição:

$$TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

onde z é um número complexo.

- Transformação do domínio n para o domínio Z:

$$x[n] \xleftrightarrow[TZ]{} X(z)$$

A **transformada z** é estudada neste curso pela sua utilidade

- A convolução é equivalente à multiplicação de polinómios .

- Operações algébricas habituais tais como **multiplicação**, **divisão** e **factorização** de **polinómios** podem ser interpretadas como **composição** ou decomposição de **SLITs.**

- As **raízes dos polinómios** envolvidos são muito importantes porque a sua **localização** permite-nos o conhecimento de grande parte das propriedades dos filtros digitais.

3 domínios de representação dos sinais e sistemas:

Domínio – n (do tempo).
Este é o domínio das sucessões temporais(digitalizadas), das respostas impulsionais e das equações às diferenças.

Domínio – f ou ω (da frequência)
Este é o domínio das respostas em frequência e das representações espectrais

Domínio – z
Este é o domínio das transformadas-z, dos polinómios, funções racionais, dos zeros e pólos e dos operadores.

Estes domínios coexistem porque determinada análise que seja difícil num dos domínios, torna-se mais fácil noutro.

Transformada Z

- Seja $x[n]$ um sinal de comprimento M+1 finito. Então a sua transformada z é dada por:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M} x[k]\left(z^{-1}\right)^{k}$$

Representação do sinal:

Domínio – n | Domínio – ω | Domínio - z

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{M} x[k]\delta[n-k]}$$

$$\boxed{X(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} x[k]e^{-j\hat{\omega}k}}$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{M} x[k]\left(z^{-1}\right)^{k}}$$

Exemplos

1 $$x[n]=\delta[n-2] \xrightarrow{\text{Tz}} X(z)=z^{-2}$$

2 $$X(z)=1-2z^{-1}+3z^{-3}-z^{-5}$$

$$\downarrow \text{Tz}$$

$$x[n]=\delta[n]-2\delta[n-1]+3\delta[n-3]-\delta[n-5]$$

3 Filtro FIR

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k\delta[n-k] \xrightarrow{\text{Tz}} H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Exemplo: Factorização

Considere um SLIT definido pela equação às diferenças:

$$y[n] = 6x[n] - 5x[n-1] + x[n-2]$$

Determine a transformada z na forma de uma função racional (onde não aparecem potências negativas de z), com os termos factorizados.

$$H(z) = 6 - 5z^{-1} + z^{-2}$$

função racional

$$6 - 5z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2\left(6 - 5z^{-1} + z^{-2}\right)}{z^2} = \frac{6z^2 - 5z + 1}{z^2}$$

factorização

$$6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \vee z = \frac{1}{3}$$

$$6z^2 - 5z + 1 = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)$$

$$H(z) = \frac{6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}{z^2}$$

Esta é uma das formas mais convenientes de escrever a transformada z da resposta impulsional de um SLIT, porque permite calcular zeros e pólos.

Sabendo que $X(z)$ é a tranformada z de $x[n]$ determine a transformada z de $x[n-5]$

$$x[n-5] \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-5}X(z)$$

Transformada Z (sinais de duração infinita)

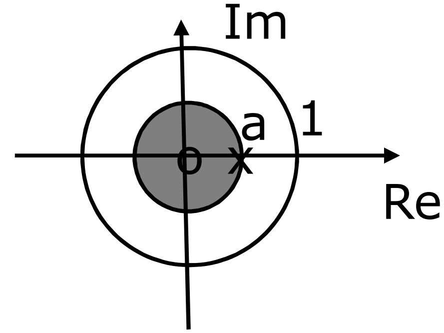
$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]\left(z^{-1}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k}$$

- X(z) só fica totalmente definida especificando a região na qual o **somatório converge** em valor absoluto: **ROC**

- Essa região denomina-se região de convergência, e é normalmente especificada por um lugar geométrico do tipo:

$$|z| > |a|$$

$$|z| < |a|$$



Série geométrica

---Soma dos N primeiros termos de uma progressão geométrica

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

---Série geométrica de razão r **:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - \overset{0}{\overbrace{r^{N+1}}}}{1 - r} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} \quad , & |r| < 1 \\ \infty \text{ ou sem limite} \quad , & |r| \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 1:

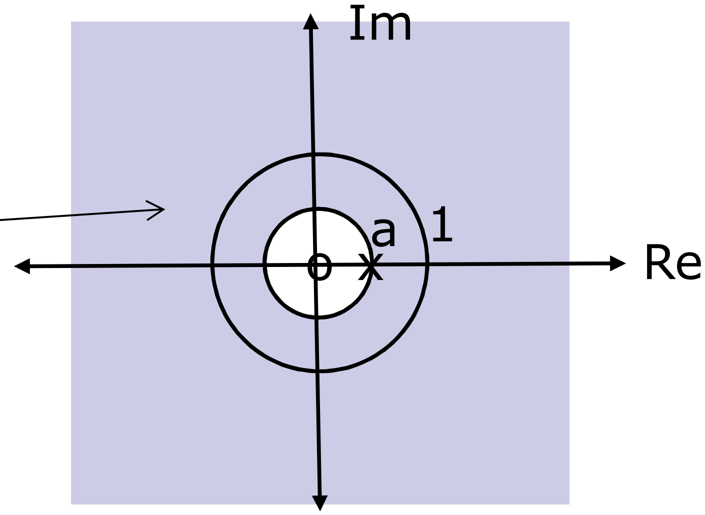
Determine a Tz da resposta impulsional $h[n] = a^n u[n]$.

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$ onde: $$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-\underbrace{az^{-1}}_{\text{razão}}}$$

Condição de convergência

$$\left|az^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$$



Exemplo 2 **Calcule a Tz da resposta impulsional**

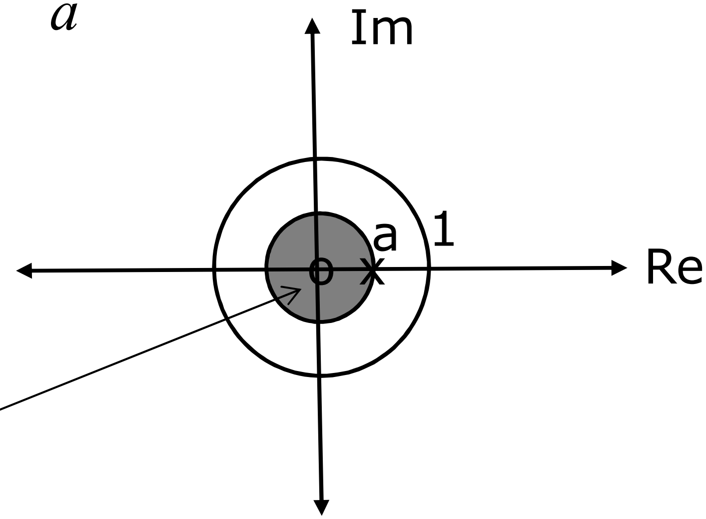
$$h[n] = -a^n u[-n-1] \qquad \text{com:} \quad u[-n-1] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[-n-1-k]$$

$$H(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \underset{m=-n-1}{=} -\sum_{m=0}^{\infty} a^{-m-1} z^{m+1} =$$

$$= -a^{-1} z \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m \right) = -\frac{z}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^m = \frac{-\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a} \quad , \qquad \left|\frac{z}{a}\right| < 1$$

- A série converge se a razão $\frac{z}{a}$ tiver módulo menor que 1 ou seja |z|<|a|

Região de convergência: |z|<|a|



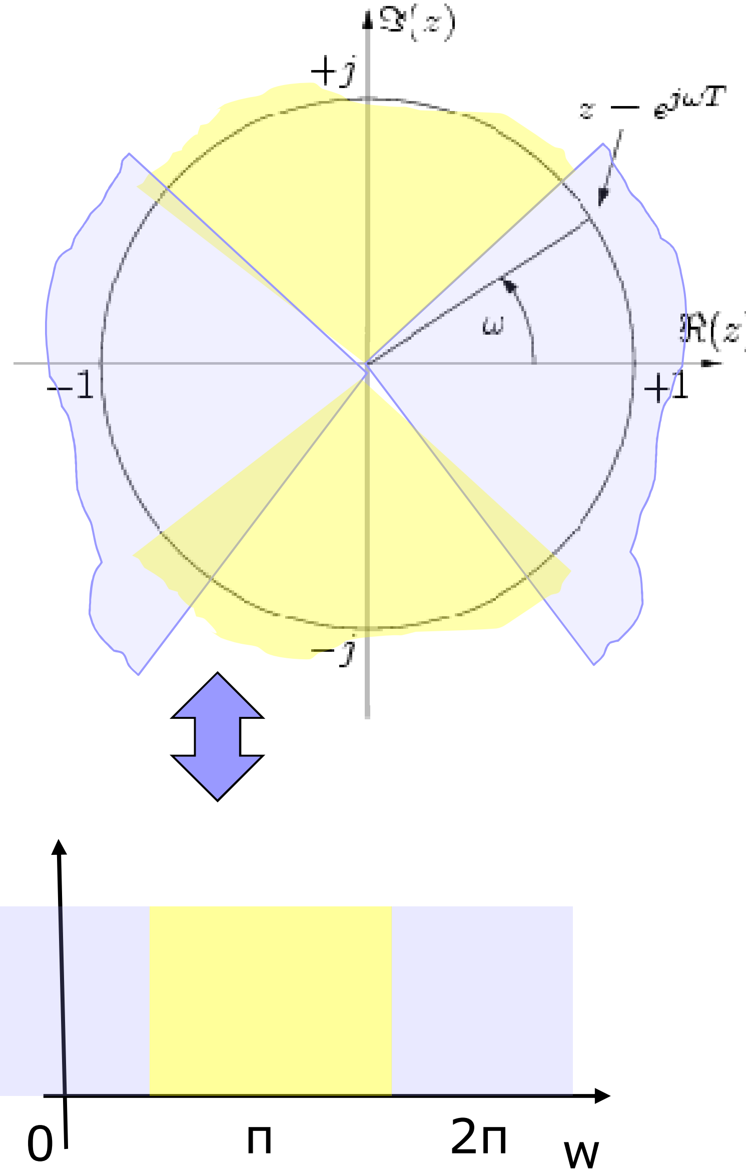
Transformada Z

- A Tz é uma generalização da TF:

$$X(\hat{w}) = X(z)\big|_{z=e^{j\hat{w}}}$$

Onde $z = e^{j\hat{w}}$ representa o **circulo de raio unitário**

ROC – Region of convergence



Pares Típicos Transformada Z

$$h[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = 1 \qquad ROC\colon\ z \in C$$

$$h[n] = \delta[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = z^{-n_0} \qquad ROC\colon\ z \in C \backslash \{0\}$$

$$h[n] = u[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad ROC\colon\ |z| > 1$$

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad ROC\colon\ |z| > |a|$$

$$h[n] = a^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} \qquad ROC\colon\ |z| > |a|$$

Pares Típicos Transformada Z

$$h(n) = -a^n u(-n-1) \xleftrightarrow[TZ]{} H\left(z\right) = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC} \quad :|z|<|a|$$

$$h[n] = na^n u[n] \xleftrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad ROC\text{: } |z| > |a|$$

Pares Típicos Transformada Z

$$\cos[\omega_0 n]\, u[n] \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \frac{1-\cos[\omega_0] z^{-1}}{1-2\cos[\omega_0] z^{-1} + z^{-2}}, \qquad \text{ROC} \; :|z|>|1|$$

$$\sin[\omega_0 n]\, u[n] \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \frac{\sin[\omega_0] z^{-1}}{1-2\cos[\omega_0] z^{-1} + z^{-2}}, \qquad \text{ROC} \; :|z|>|1|$$

$$a^n \cos[\omega_0 n]\, u[n] \xleftrightarrow[TZ]{} H(z) = \frac{1-a\cos[\omega_0] z^{-1}}{1-2a\cos[\omega_0] z^{-1} + \left(\frac{z}{a}\right)^{-2}}, \qquad \text{ROC} \; :|z|>a$$

Propriedades da Tz

--Linearidade

$$Tz\{ah_1(n)+bh_2(n)\}=aH_1(z)+bH_2(z),$$
$$ROC: ROC_{h_1}\cap ROC_{h_2}$$

--Deslocamento no tempo

$$TZ\{x(n-n_0)\}=z^{-n_0}X(z),$$
$$TZ\{y(n-n_0)\}=z^{-n_0}Y(z)$$

Exemplo

$$h_1(n)=a^n u(n)\xleftrightarrow[TZ]{}H_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, ROC:|z|>|a|$$

$$H(z)=H_1(z)z^{-1}=\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}\xleftrightarrow[TZ]{}h(n)=h_1(n-1)=a^{(n-1)}u(n-1)$$

$$ROC:|z|>|a|$$

Exercícios

1 – Use as propriedades do deslocamento no tempo e sobreposição para determinar as transformadas z dos seguintes sinais:

a) $x_1[n] = \delta[n]$ b) $x_2[n] = \delta[n-1]$ c) $x_3[n] = \delta[n-7]$

d) $x_4[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 4\delta[n-3]$

Res

a) $x_1[n] = \delta[n] \longrightarrow X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$

b) $x_2[n] = \delta[n-1] = x_1[n-1] \longrightarrow X_2(z) = z^{-1} X_1(z) = z^{-1}$

c) $x_3[n] = \delta[n-7] = x_1[n-7] \longrightarrow X_3(z) = z^{-7} X_1(z) = z^{-7}$

d) $x_4[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 4\delta[n-3] = 2x_1[n] - 3x_1[n-1] + 4x_1[n-3]$

$$\downarrow$$

$$X_4(z) = 2X_1(z) - 3z^{-1}X_1(z) + 4z^{-3}X_1(z) = \left(2 - 3z^{-1} + 4z^{-3}\right)X_1(z) = 2 - 3z^{-1} + 4z^{-3}$$

Exercícios

2 – Use as propriedades do deslocamento no tempo e sobreposição para determinar a transformada z, $Y(z)$, em função de $X(z)$. Calcule a função de transferência do sistema.

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

Res:

$$y[n]=x[n]-x[n-1] \quad \longleftrightarrow \quad Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)=\left(1-z^{-1}\right)X(z)$$

Como $\quad Y(z)=H(z)X(z) \Leftrightarrow H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

Então: $\quad H(z)=\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)X(z)}{X(z)}=\left(1-z^{-1}\right)$

Exercícios

3 – Factorize a seguinte função e represente graficamente as suas raízes no plano complexo:

$$P(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}$$

$$P(z) = z^{-3}\left(z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + 1\right) \qquad z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + 1 = 0$$

Tentam-se as raízes do tipo -2,-1,0,1,2, por exemplo e verifica-se facilmente que $z = -1$ é raiz.

Divide-se o polinómio por $z+1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & 0.5z^2 & 0.5z & +\ 1 & z+1 \\ \cline{5-5}
-z^3 & -\ z^2 & & & z^2 - 0.5z + 1 \\ \cline{1-4}
0 & -0.5z^2 & 0.5z & +\ 1 & \\
 & 0.5z^2 & +\ 0.5z & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & z & +\ 1 & \\ \cline{1-4}
 & & -z & -\ 1 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \vee z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \vee z = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

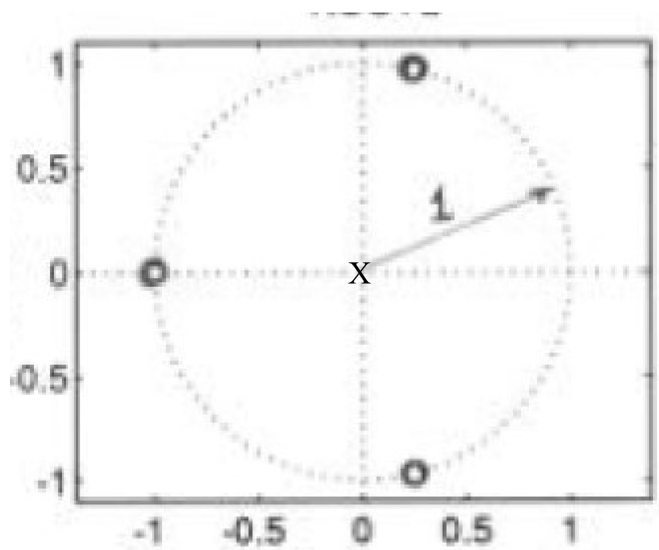
$$P(z)=\frac{z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z+1}{z^3}=\frac{(z+1)\left(z-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right)}{z^3}$$

Zeros:

$$z=-1 \vee z=\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

O módulo das 3 raízes é 1.

Polos: $z=0$ pólo triplo



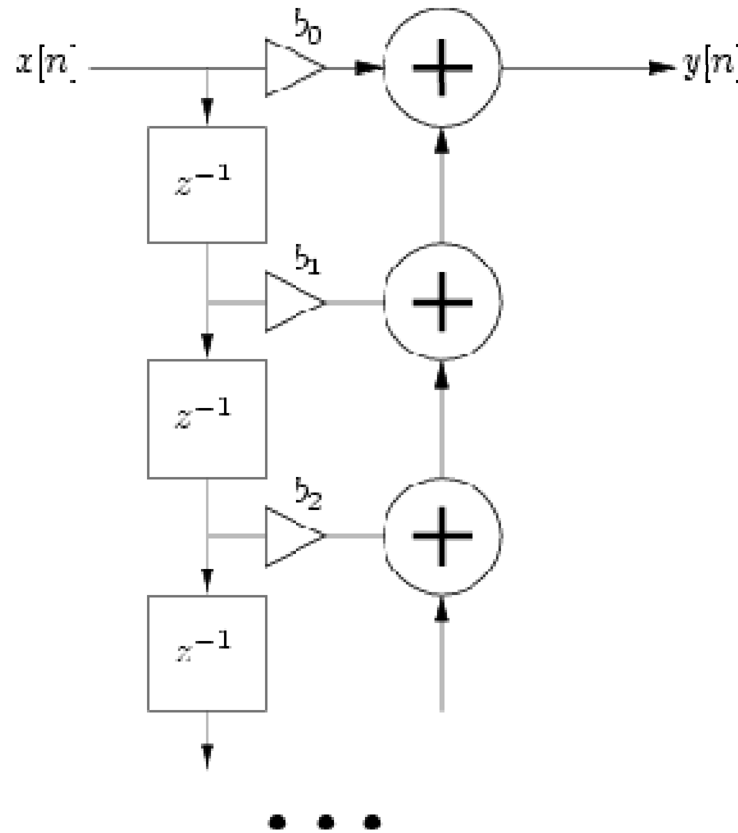
SLITs Discretos do tipo IIR

- Os sistemas discretos podem ser classificados em:
  - Tipo FIR: Resposta Impulsional Finita
  - Tipo IIR: Resposta Impulsional Infinita

Não recursivos

- FIR

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$



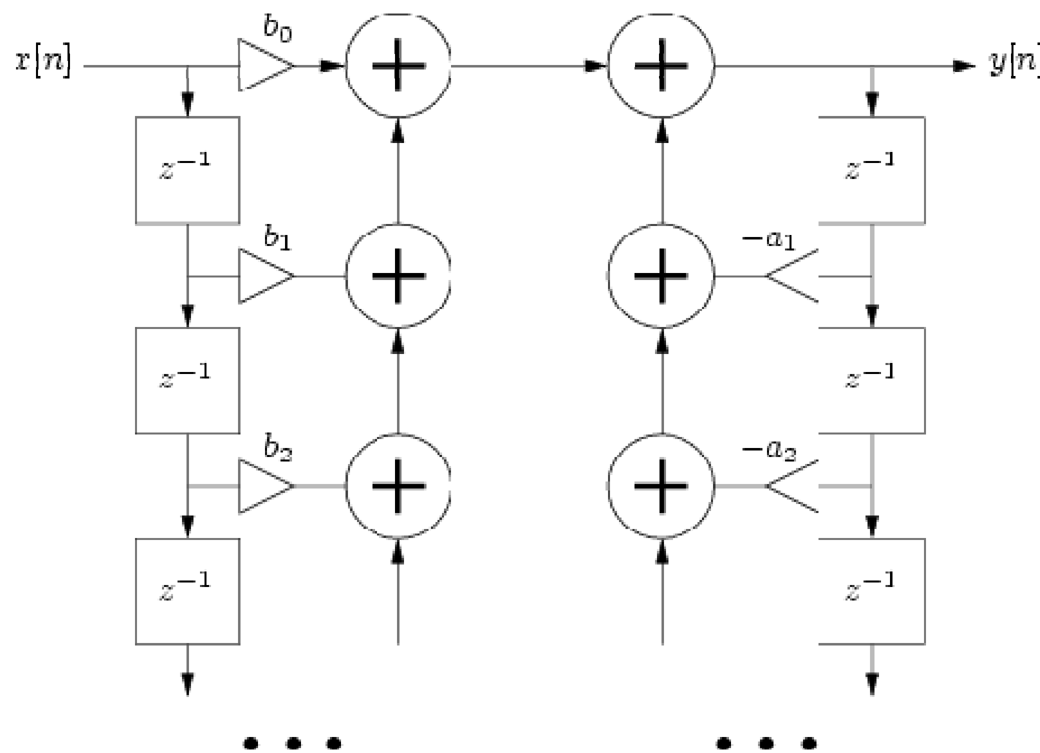
Exemplo

$$y[n] = 3x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Recursivos

- IIR

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \ldots - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$



Exemplo

y[n]= x[n]+0.5y[n-1]

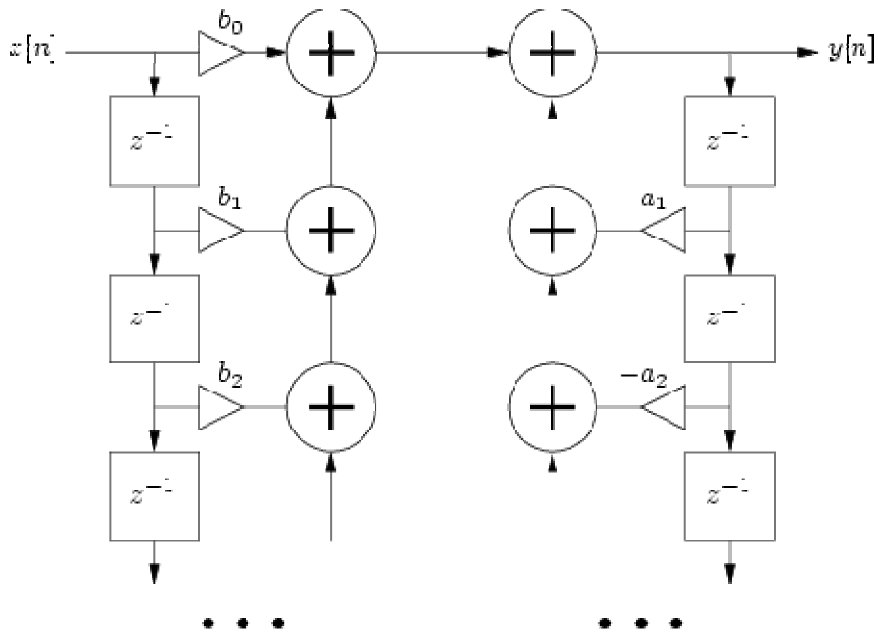
Resposta impulsional supondo o sistema em repouso para n<0:

y[n]= δ[n]+0.5y[n-1]

h[n]= 0.5^nu[n]

Diagramas de blocos

Direct Form I

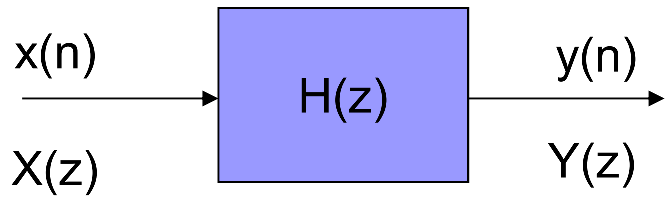


- Eq às diferenças

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} (-a_k) y[n-k]$$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Análise de SLITS pela TZ



- Convolução no domínio do tempo equivale a um produto no domínio da TZ

$$x[n]*h[n]=y[n]\Leftrightarrow X(z)H(z)=Y(z)$$

- Chama-se a H(z) função de transferência:

$$H(z)=TZ\{h[n]\}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

Análise de SLITS pela TZ

- A TZ pode ser usada como operador sendo aplicável por exemplo à equação às diferenças:

$$a_2 y[n-2] + a_1 y[n-1] + y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Resultando na seguinte equação (no domínio da TZ):

$$a_2 z^{-2} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right) X(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Análise de SLITS pela TZ

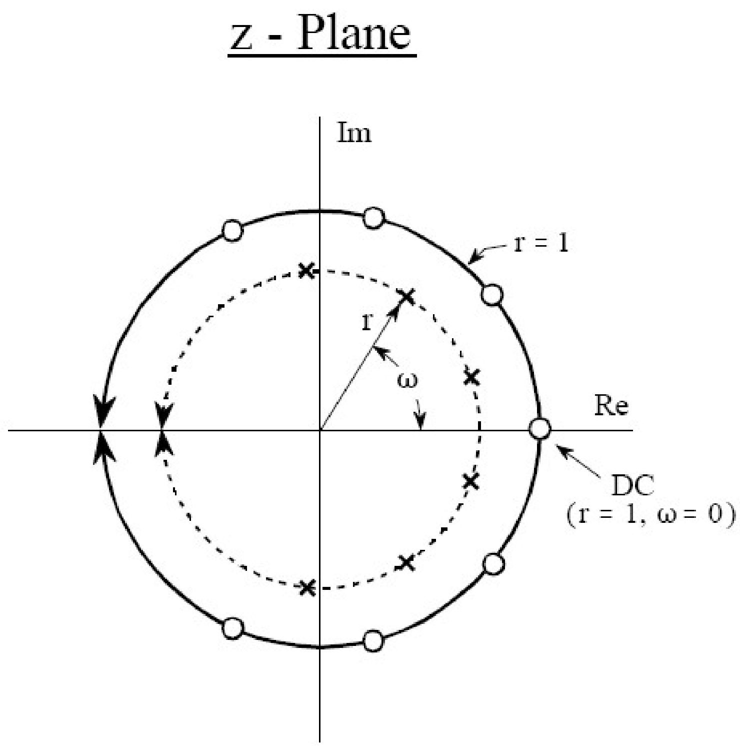
- Função de Transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

- Define-se como:

Zeros – as raízes do numerador

Pólos – as raízes do denominador



Exercícios

4 – Um SLIT tem função de transferência $H(z) = 1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-8}$

a) Determine a equação às diferenças do sistema

b) Determine e represente graficamente $y[n]$ quando à entrada se tem $x[n] = \delta[n]$

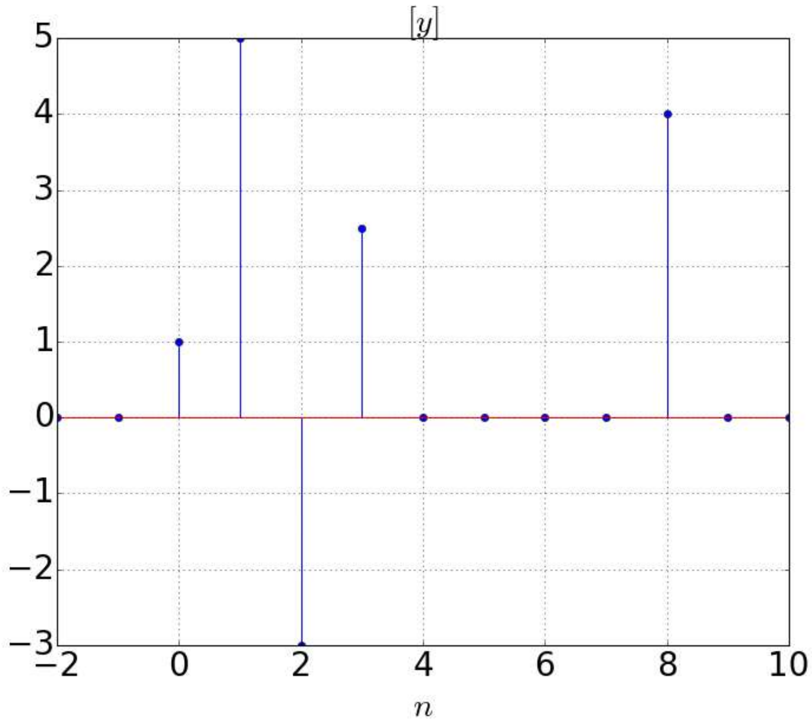
Res:

a) Directamente da função de transferência tem-se que:

$$y[n] = x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2.5x[n-3] + 4x[n-8]$$

b) Como

$x[n] = \delta[n]$ tem-se $y[n] = h[n] = \delta[n] + 5\delta[n-1] - 3\delta[n-2] + 2.5\delta[n-3] + 4\delta[n-8]$



Exercícios

5 – Um SLIT é descrito pela equação às diferenças: ESTE

$$y[n]=\frac{1}{3}\left(x[n]+x[n-1]+x[n-2]\right)$$

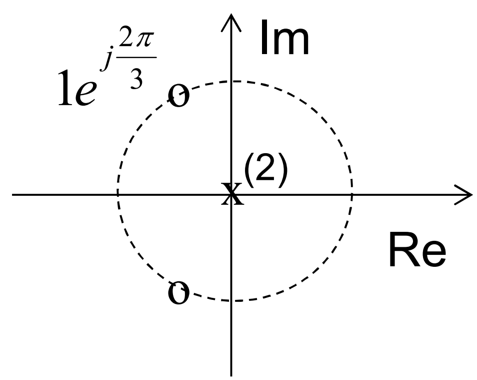
a) Determine a função de transferência do sistema.
b) Represente graficamente os pólos e zeros de $H(z)$ no plano z.
c) A partir de $H(z)$ obtenha uma expressão para a resposta em frequência do sistema $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$.
d) Esboce a amplitude e fase da resposta em frequência no intervalo $-\pi \le \hat{\omega} \le \pi$
e) Qual a saída do sistema se a entrada for:

$$x[n]=4+\cos\left[0.25\pi(n-1)\right]-3\cos\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right)n\right]$$

Res:

a) $y[n]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}$

b $H(z)=\dfrac{z^2+z+1}{3z^2}$

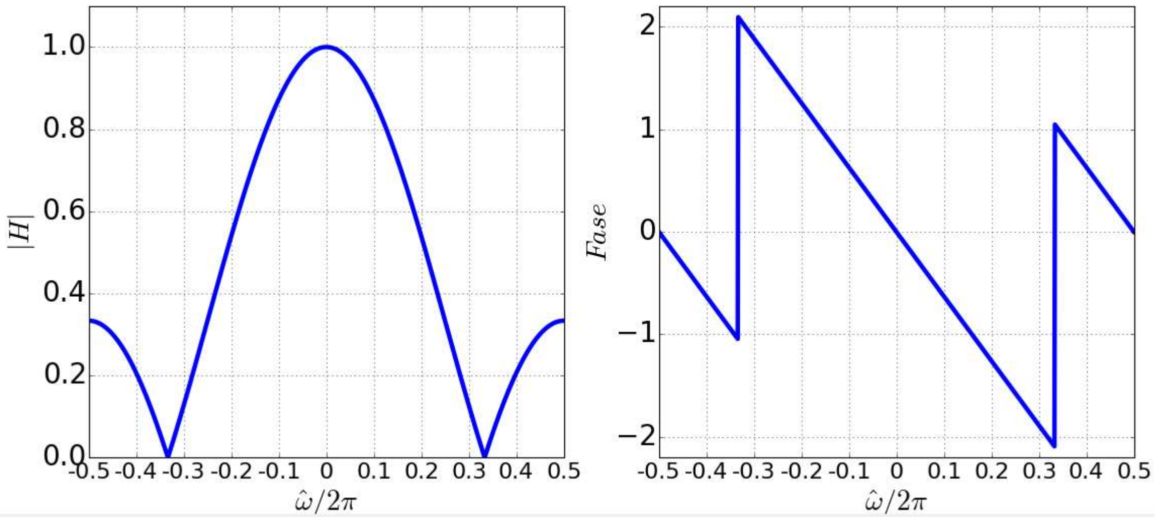


dois polos em $z=0$

dois zeros em $z=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}=1e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$

c) $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-j\hat{\omega}}+\frac{1}{3}e^{-j2\hat{\omega}}=\frac{1}{3}e^{-j\hat{\omega}}\left(e^{j\hat{\omega}}+1+e^{-j\hat{\omega}}\right)=e^{-j\hat{\omega}}\left(\frac{1+2\cos(\hat{\omega})}{3}\right)$

d)



$$x[n]=4+\cos\left[0.25\pi(n-1)\right]-3\cos\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right)n\right]$$

freq= $\left\{0,\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right\}$

$$y[n]=4\left|H(0)\right|+\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\cos\left[\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{4}+\angle H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]-3\left|H\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right|\cos\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right)n+\angle H\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

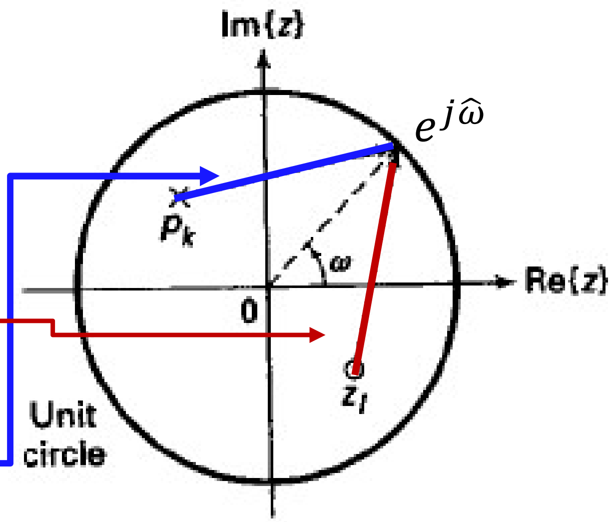
Resposta em Frequência a partir da TZ (e dos pólos e zeros)

$$H(\hat{w}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\hat{w}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{w}} + \ldots + b_M e^{-jM\hat{w}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{w}} + \ldots + a_N e^{-jN\hat{w}}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} \left(1 - z_k e^{-j\hat{w}}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k e^{-j\hat{w}}\right)} =$$

$$= \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} \left(e^{j\hat{w}} - z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(e^{j\hat{w}} - p_k\right)} e^{j\hat{w}(N-M)}$$

Resposta em Frequência a partir da TZ (e dos pólos e zeros)

Calculam-se os comprimentos dos segmentos entre cada pólo e ponto $e^{j\hat{\omega}}$ no círculo unitário e entre cada zero e esse ponto e colocam-se na expressão para calcular a resposta em frequência do sistema em $\hat{\omega}$:

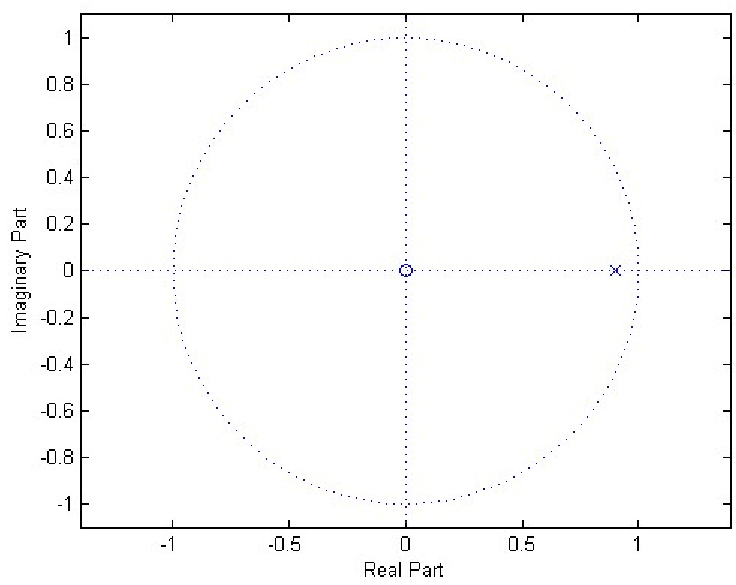


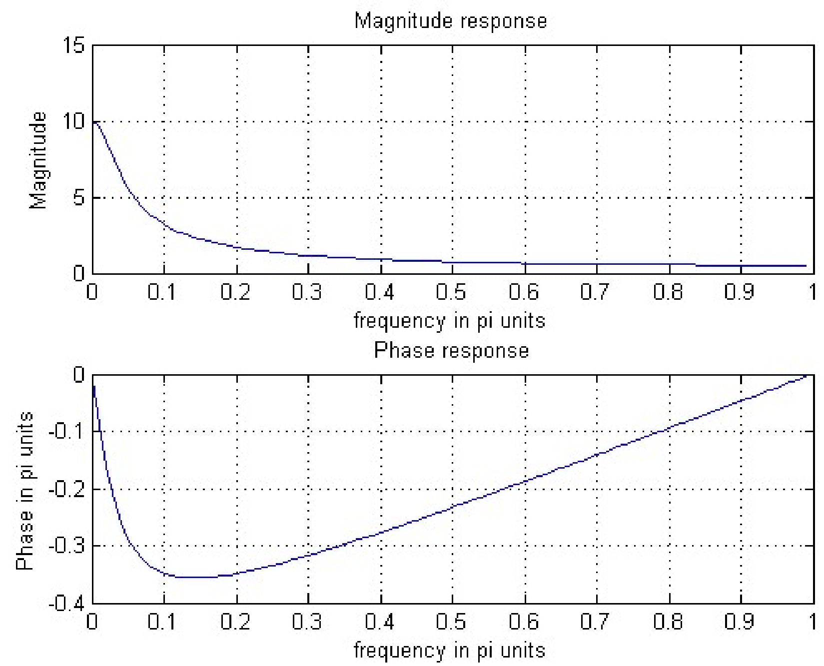
$$\left|H(\hat{\omega})\right| = \left|b_0\right| \frac{\left|e^{j\hat{\omega}} - z_1\right| \cdots \left|e^{j\hat{\omega}} - z_M\right|}{\left|e^{j\hat{\omega}} - p_1\right| \cdots \left|e^{j\hat{\omega}} - p_N\right|}$$

$$\arg\{H(\hat{w})\} = \underbrace{[0 \text{ ou } \pi]}_{\text{constante}} + \underbrace{[(N-M)\hat{w}]}_{\text{linear}} + \underbrace{\sum_{1}^{M} \arg(e^{j\hat{w}} - z_k) - \sum_{1}^{N} \arg(e^{j\hat{w}} - p_k)}_{\text{não-linear}}$$

Exemplo: Filtro com um pólo

- Equação às diferenças: $$y(n) = x(n) + 0.9y(n-1)$$
- Função de Transferência: $$H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$
- Resposta em Frequência: $$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-0.9e^{-j\omega}}$$
- Resposta Impulsional: $$h(n) = TF^{-1}\{H(\omega)\} = TZ^{-1}\{H(z)\}$$





Transformada Inversa

- A transformada Inversa é definida usando um integral de Cauchy (integral num contorno)

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Métodos menos formais, mas mais usados:
  - Inspecção
  - Expansão em fracções parciais

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Por inspecção directa e usando propriedades

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=a^{n}u[n]$$

$$H(z)=\frac{2z^{-1}}{1-az^{-1}},|z|>|a| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=2\,a^{(n-1)}u[n-1]$$

$$H(z)=\frac{k_1}{1-az^{-1}}+\frac{k_2}{1-bz^{-1}},|z|>|a|>|b| \xrightarrow{TZ^{-1}} h(n)=k_1\,a^{n}u[n]+k_2\,b^{n}u[n]$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Relembrar propriedades:

$$a h_1[n] + b h_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} a H_1(z) + b H_2(z),$$
$$ROC = R_{h_1} \cap R_{h_2}$$

$$h[n - n_o] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_o} H(z),$$
$$ROC = R_h$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

PROCEDURE FOR INVERSE z-TRANSFORMATION ($M < N$)

1. Factor the denominator polynomial of $H(z)$ and express the pole factors in the form $(1 - p_k z^{-1})$ for $k = 1, 2, \ldots, N$.
2. Make a partial fraction expansion of $H(z)$ into a sum of terms of the form

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad \text{where} \quad A_k = H(z)(1 - p_k z^{-1})\Big|_{z=p_k}$$

3. Write down the answer as

$$h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u[n]$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Caso Geral: usando o método de expansão em fracções parciais

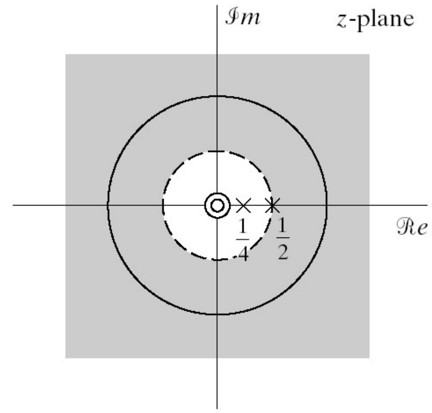
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r}+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}+\sum_{m=1}^{s}\frac{C_m}{\left(1-d_i z^{-1}\right)^m}$$

Coeficiente associado Aos pólos simples (multiplicidade =1)	$A_k=\left(1-d_k z^{-1}\right)H(z)\Big\vert_{z=d_k}$
Coeficiente associado aos pólos com multiplicidade >1	$C_m=\frac{1}{(s-m)!\left(-d_i\right)^{s-m}}\left\{\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}}\left[\left(1-d_i w\right)^s H\left(w^{-1}\right)\right]\right\}_{w=d_i^{-1}}$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Exemplo: pólos simples:

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \qquad \mathrm{ROC}:|z|>\frac{1}{2}$$



$$H(z)=\frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}+\frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$A_1=\left.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)}=-1$$

$$A_2=\left.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)}=2$$

TZ^{-1}

$$h[n]=TZ^{-1}(H(z))=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\ -\ \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Resposta Impulsional e TZ^{-1}

- Quando não existem pólos:

$$H(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$= \mathrm{z}^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$h[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

FIR

Teorema do Valor inicial e final

- Teorema do valor inicial

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Teorema do valor final

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

Só se os pólos de $(1\text{-}z^{-1})H(z)$ estiverem dentro do circulo de raio unitário

TZ e Estabilidade

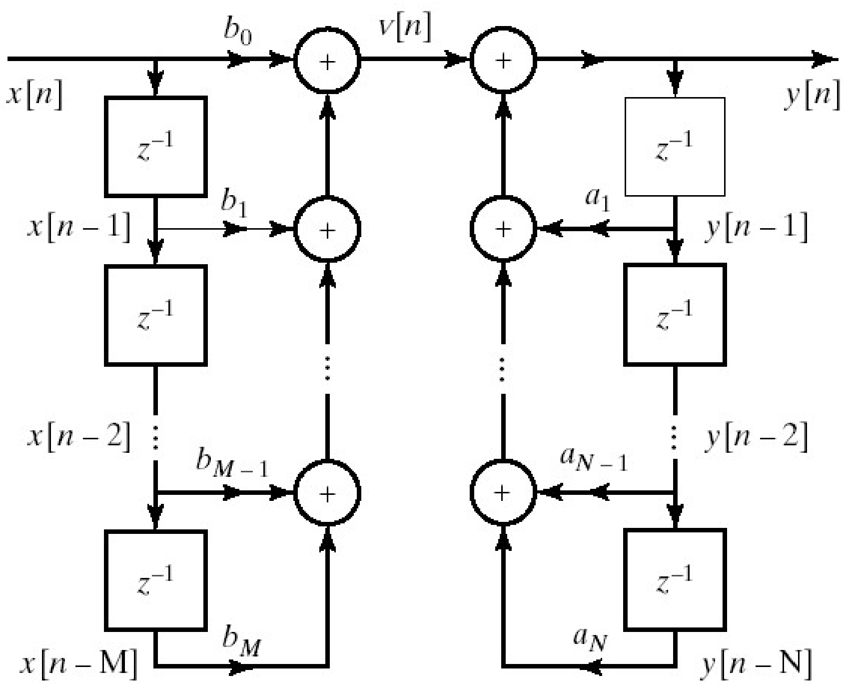
- Para sistemas causais:
  - Sistema é estável se todos os pólos estiverem no interior do circulo de raio unitário
  - Região de convergência será:

$$|z| > |p_{\max}|$$

onde p_{max} é o polo com maior raio

Caso Geral - SLITs

- Diagrama de Blocos



- Eq às diferenças

$$y[n]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

- Função de Transf

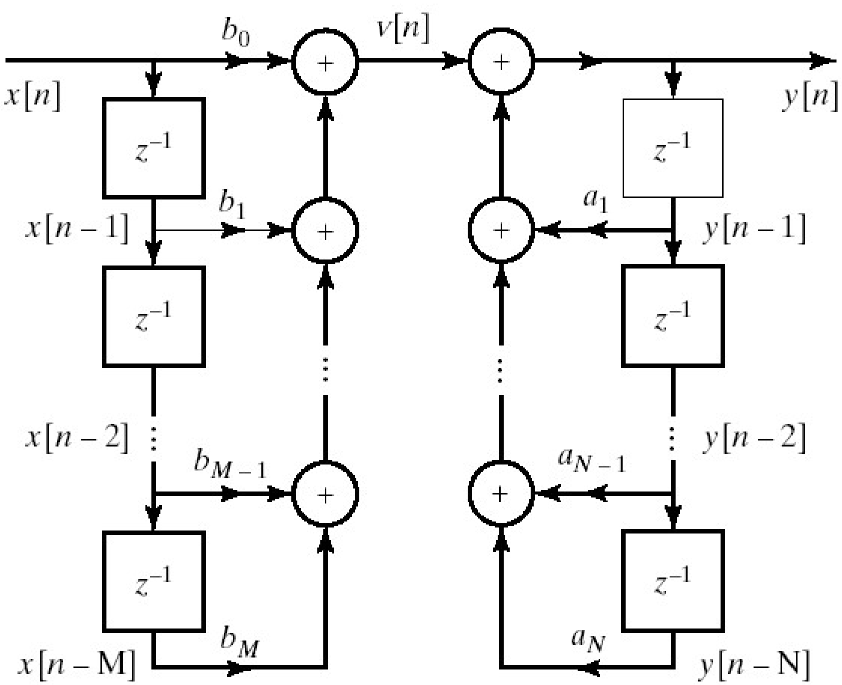
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

- Resposta Impulsiva

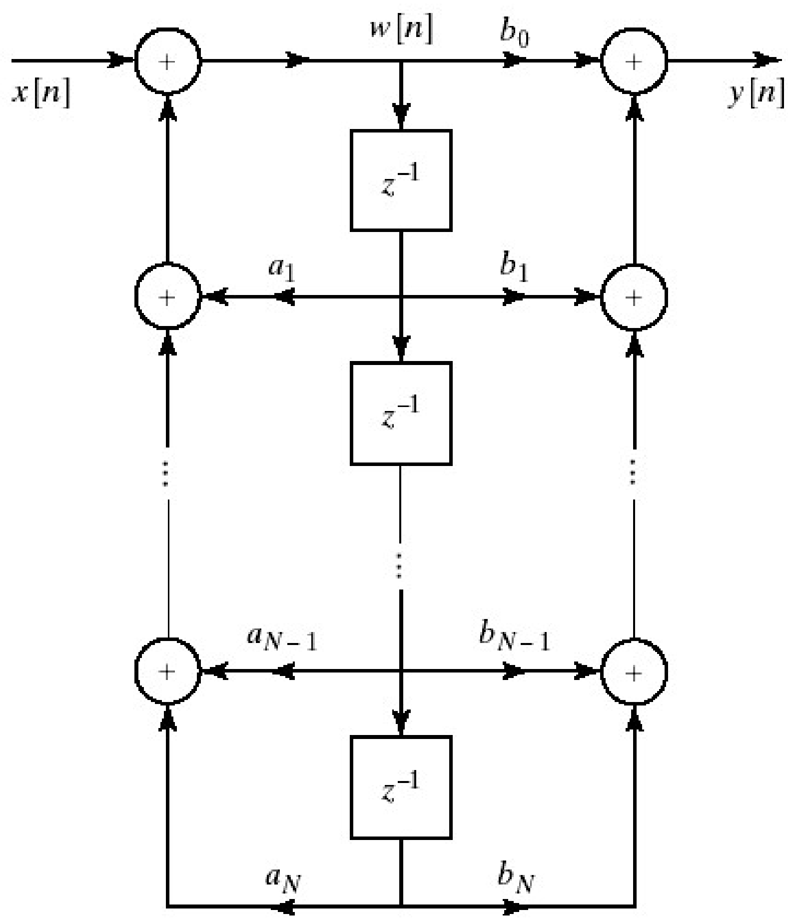
$$h[n]=TZ^{-1}\{H(z)\}$$

Diagramas de Blocos

Forma Directa I (usada em PDS)



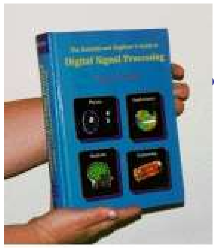
Forma Directa II



Referências

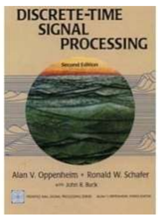
- **Processamento de Sinais**, Jorge Marques e Arnaldo Abrantes, 2006/07
- **Apontamentos de Sinais e Sistemas**, José Amaral, José Nascimento & José Rocha, ISEL
- Sinais como Vectores – Maria Isabel Milho ISEL - 1999
- Apontamentos e Slides de Comunicações – Artur Ferreira, ISEL

Referências

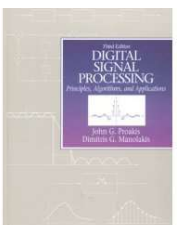


The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Steven W. Smith

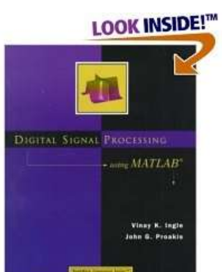
http://www.dspguide.com/



Discrete-Time Signal Processing (2nd Ed) , Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer, John R. Buck



Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications, (3rd Ed) John Proakis, Dimitris Monolakis



Digital Signal Processing using Matlab, Vinay Ingle, John Proakis