Backtracking

IIC2133

Un cierto tipo de problemas de búsqueda

En muchos problemas buscamos

- un conjunto de (todas las) soluciones factibles
- una solución óptima que satisface ciertas restricciones

Estos problemas pueden resolverse usando *backtracking*

La solución buscada puede expresarse como una tupla o vector (x_1, …, x_n), en que x_i es elegido de algún conjunto finito S_i

- el problema es encontrar un vector que maximice (o minimice o satisfaga) una *función criterio* P(x_1, …, x_n)
- … o en encontrar todos los vectores que satisfacen P

Ejemplo

El problema de las 8 reinas

¿Cómo disponemos 8 reinas en un tablero de ajedrez de 8×8 de modo que ningunas dos de ellas estén en una misma fila, columna o diagonal?

Ejemplo

Representación de la solución como vector

Numeremos las filas, columnas y reinas 1 a 8

Como cada reina debe estar en una fila diferente, suponemos que la reina *i* queda en la fila *i*

Las soluciones pueden ser representadas como tuplas (x_1, …, x_8):

- x_i es la columna en la cual va a quedar la reina *i*
- cada x_i es elegido del conjunto S_i = {1,2,3,4,5,6,7,8}

Acerca de la complejidad de estos problemas

Si m_i es el tamaño de S_i, entonces hay

$$m = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$$

tuplas que son candidatos posibles para satisfacer P

- p.ej., en el caso de las 8 reinas $m = 8 \times 8 \times \ldots \times 8 = 8^8$

¿Cómo abordamos el problema?

Una estrategia sería formar todas las tuplas y evaluar cada una con *P*,

… registrando aquellas que producen el óptimo

… o aquellas que simplemente satisfacen *P*

La ventaja de *backtracking*

Un algoritmo de *backtracking* puede producir la misma respuesta

… **haciendo muchos menos que *m* ensayos**

La idea básica de *backtracking*

Construyamos el vector solución de a una componente a la vez

… y usemos funciones criterios modificadas

$P_i(x_1, \ldots, x_i)$ —*funciones de acotamiento*—

para probar si el vector que está siendo formado tiene alguna posibilidad de éxito

La ventaja de *backtracking*

Si nos damos cuenta de que el vector parcial (x_1, …, x_i) no puede llevarnos a una solución válida

… entonces podemos ignorar completamente

$m_{i+1} \times \ldots \times m_n$

vectores de prueba posibles

Las soluciones deben satisfacer un conjunto de restricciones explícitas

Restringen cada x_i a tomar valores sólo de un conjunto S_i dado

Dependen de la instancia particular, *I*, del problema que se está resolviendo

Todas las tuplas que satisfacen estas restricciones definen un posible *espacio de soluciones* para *I*

… y un conjunto de restricciones implícitas

Determinan cuáles de las tuplas en el espacio de soluciones de *I* satisfacen *P*

… es decir, describen la forma en que los x_i deben relacionarse entre ellos

Restricciones en el problema de las 8 reinas

Restricciones explícitas:

- $S_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $1 \leq i \leq 8$
- el espacio de soluciones consiste en 8^8 tuplas

Restricciones implícitas:

- ningunos dos *xi*'s pueden ser iguales
- todas las soluciones son permutaciones de la tupla {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
- reduce el espacio de soluciones de 8^8 tuplas (16,777,216) a sólo 8! tuplas (40,320)
- ningunas dos reinas pueden estar en la misma diagonal

Una solución es {4, 6, 8, 2, 7, 1, 3, 5}

Otro ejemplo

Suma de subconjuntos

Dados

… un conjunto de números positivos w_i , $1 \leq i \leq n$

… y un número positivo m

… encontrar todos los subconjuntos de w_i cuya suma sea m

Suma de subconjuntos

P.ej., si $n = 4$

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (11, 13, 24, 7)$

$m = 31$

… entonces los subconjuntos buscados son

$\{11, 13, 7\}$ y $\{24, 7\}$

El espacio de soluciones tiene 2^n tuplas

En lugar de representar el vector solución por los w_i que suman m,

… lo representaremos por los índices de estos w_i :

- las soluciones del ej. son los vectores {1, 2, 4} y {3, 4}

En general

- todas las soluciones son tuplas $(x_1, \ldots, x_k)$, $1 \leq k \leq n$
- las tuplas pueden ser de diferentes tamaños

Restricciones

Restricciones explícitas:

- $x_i \in \{ j \mid j \text{ es un entero y } 1 \le j \le n \}$

Restricciones implícitas:

- ningunos dos x_i son iguales
- la suma de los correspondientes w_{xi} es m

Para evitar generar múltiples veces el mismo subconjunto, imponemos la restricción implícita

- $x_i < x_{i+1}$, $1 \le i < k$

Solución al problema de las *n* reinas

(generalización del problema de las 8 reinas)

Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una solución:

- x_i es la columna de la fila i en la cual ponemos a la reina i
- los x_i's son todos distintos —no puede haber dos reinas en la misma columna

¿Cómo probamos si dos reinas están en una misma diagonal?

Supongamos que las reinas están en las casillas (i, j) y (p, q)

Las casillas que están en una misma diagonal

- ⬊ tienen la misma diferencia entre su número de fila y su número de columna
- ⬋ tienen la misma suma de su número de fila más su número de columna

Luego, las dos reinas están en una misma diagonal si y sólo si

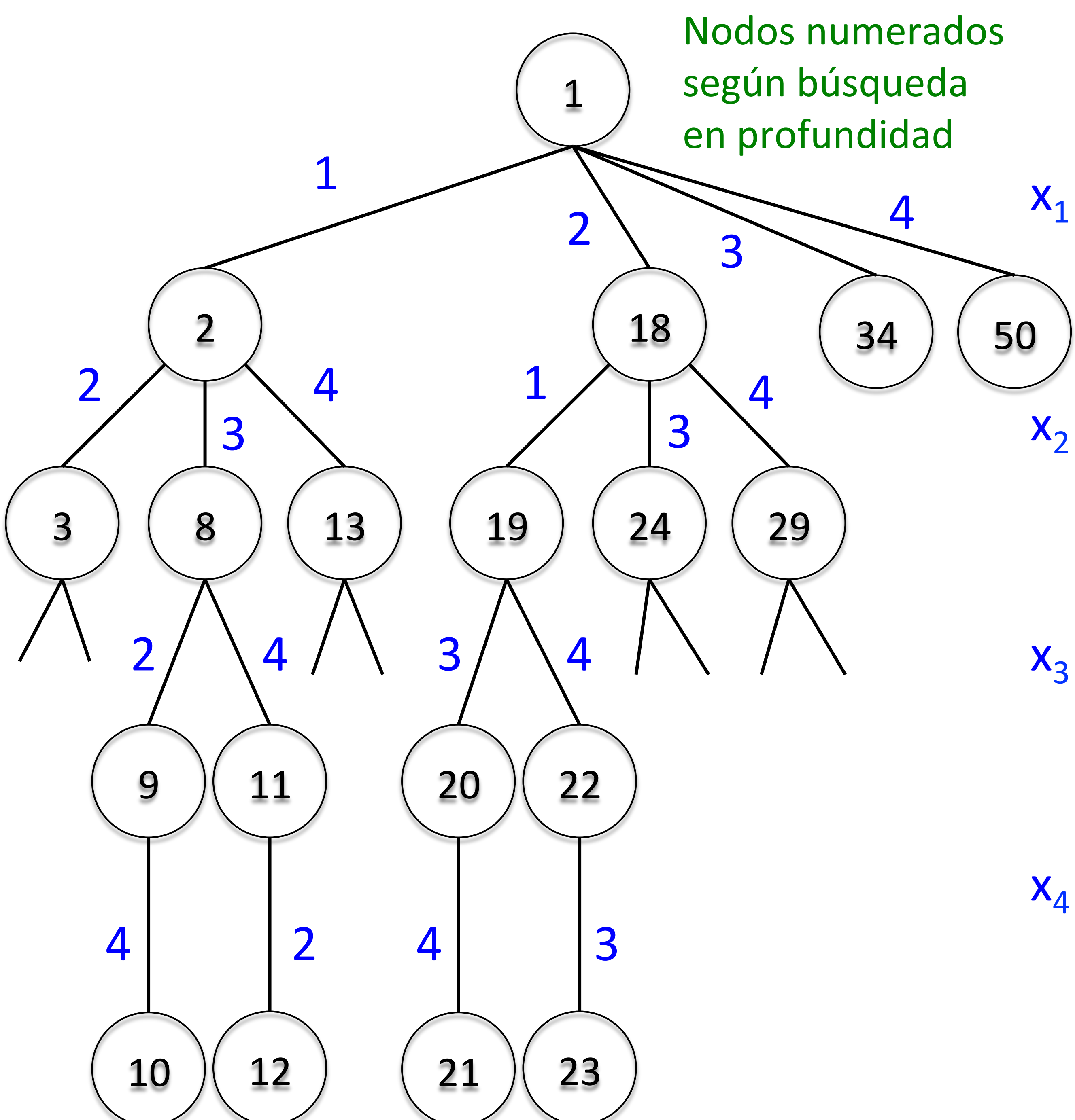
$$i - j = p - q \ \lor \ i + j = p + q$$

… que implica $j - q = i - p$ y $j - q = p - i$

Las dos reinas están en la misma diagonal si y sólo si

$$\boldsymbol{|j - q| = |i - p|}$$

Espacio de soluciones para 4 reinas organizado como árbol (parcial)



`place(k,i)` = la reina *k* puede ponerse en la columna *i*

… prueba dos condiciones:

- si *i* es distinto de todos los valores previos $x_1, \ldots, x_{k-1}$
- si no hay otra reina en la misma diagonal

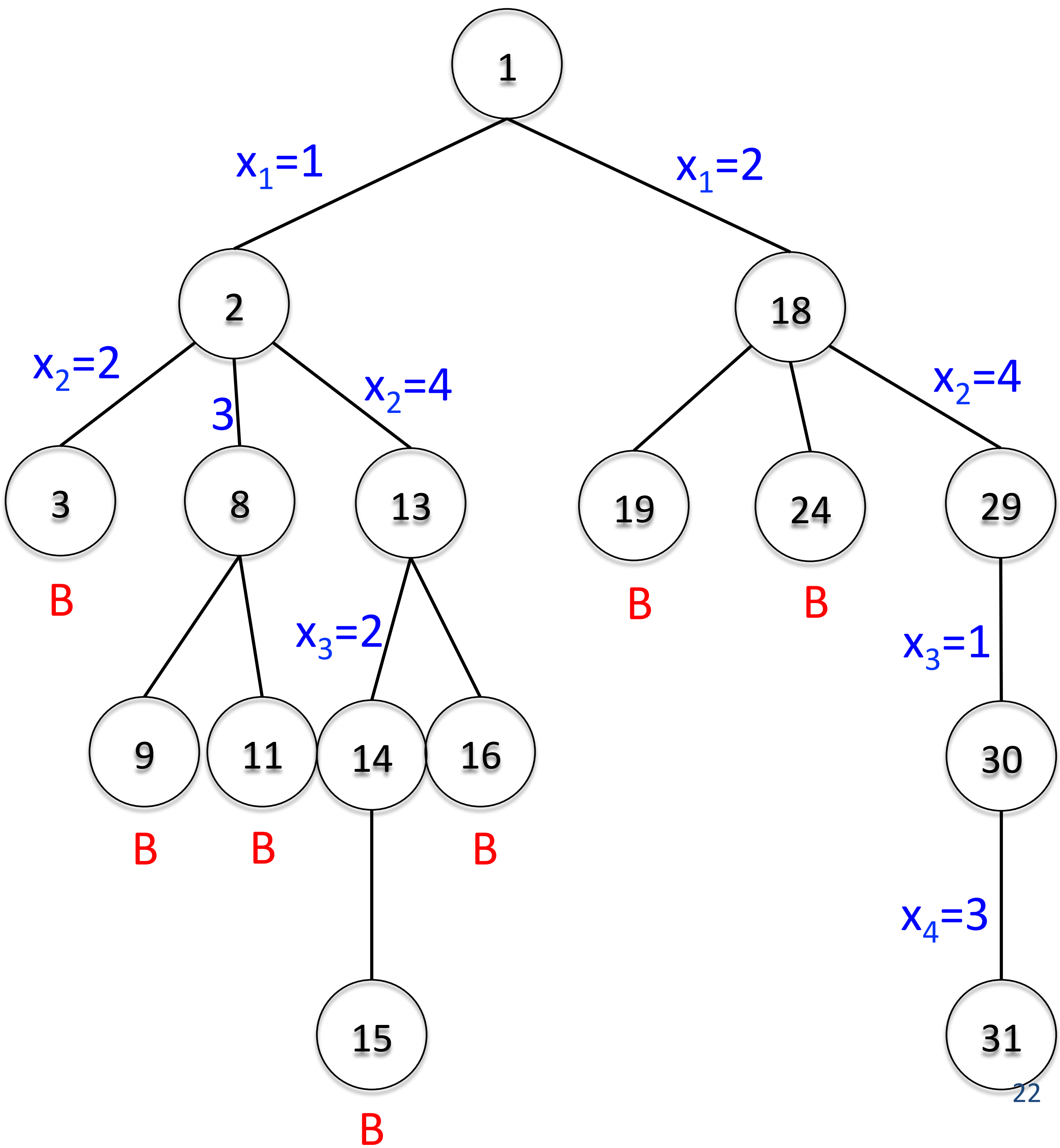
```
place(k,i):
   for j = 1 … k-1:
      if (x[j] == i) ∨ |x[j]-i| == |j-k|:
         return false
   return true
```

La llamada inicial es `nQueens(1,n)` y $x[1 : n]$ es global

```
nQueens(k,n):
   for i = 1 … n:
      if place(k,i):
         x[k] = i
         if k == n: output x[1 : n]
         else: nQueens(k+1,n)
```

Árbol generado por backtracking

(ver figura en la pizarra)



Solución al problema de la suma de subconjuntos

Dados n números positivos distintos w_i , encontrar todas las combinaciones de ellos cuya suma sea m

Solución usando tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de tamaño fijo = n:

- x_i es 1 o 0 dependiendo de si w_i es incluido o no
- (las soluciones al problema del ejemplo son {0,0,1,1} y {1,1,0,1})
- la función de cota $B_k(x_1, \ldots, x_k)$ es verdadera si y sólo si

$$\sum_{i=1,\ldots,k} w_i x_i + \sum_{i=k+1,\ldots,n} w_i \geq m$$

Las funciones de cota en el problema de la suma de subconjuntos

Las funciones de cota pueden fortalecerse si los w_i's están ordenados de menor a mayor:

$x_1, \ldots, x_k$ no lleva a una solución si $\sum_{i=1,\ldots,k} w_i x_i + w_{k+1} > m$

Funciones de cota:

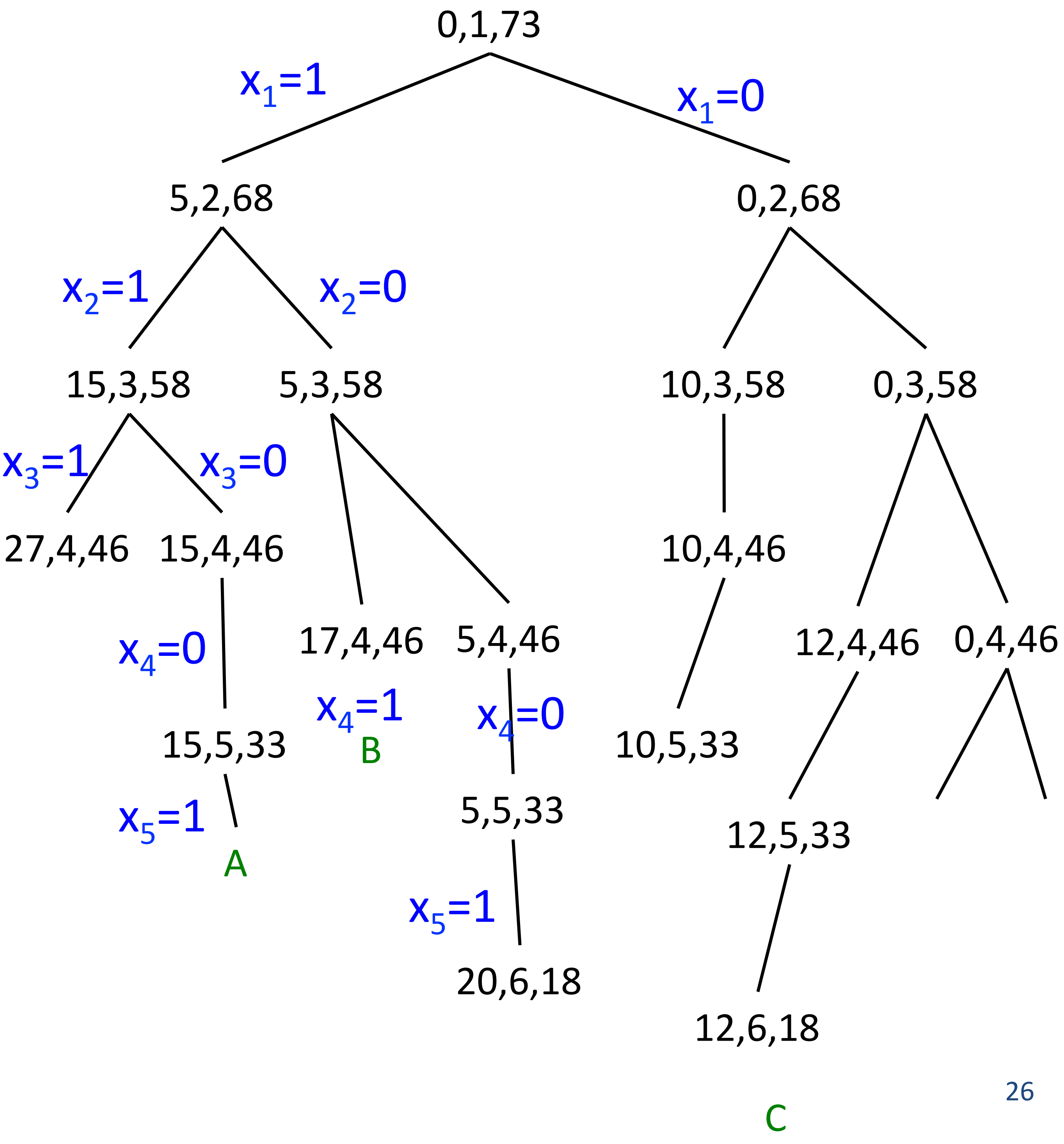
- $B_k(x_1, \ldots, x_k) = true \Leftrightarrow \sum_{i=1,\ldots,k} w_i x_i + \sum_{i=k+1,\ldots,n} w_i \geq m$
  $\wedge \sum_{i=1,\ldots,k} w_i x_i + w_{k+1} \leq m$

La llamada inicial es `sumofSubsets(0,1,R)`, en que $R = \sum_{i=1,\ldots,n} w_i$:

```
sumofSubsets(s,k,r):
   x[k] = 1
   if s+w[k] == m:
      output x[1:k]
   else:
      if s+w[k]+w[k+1] ≤ m:
         sumofSubsets(s+w[k], k+1, r−w[k])
   if (s+r−w[k] ≥ m) ∧ (s+w[k+1] ≤ m):
      x[k] = 0
      sumofSubsets(s, k+1, r−w[k])
```

Árbol generado por backtracking

(n = 6, m = 30, w = {5,10,12,13,15,18})



El proceso de backtracking

Queremos encontrar todas las respuestas

Sean:

- $(x_1, \ldots, x_i)$ una secuencia de valores para los primeros i componentes del vector solución
- $T(x_1, \ldots, x_i)$ el conjunto de los valores posibles para x_{i+1}
- B_{i+1} una función de cota, expresada como predicado —si $B_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i+1})$ es falsa, la secuencia$(x_1, \ldots, x_{i+1})$ no puede ser extendida para alcanzar una respuesta

Los candidatos para la posición i+1 del vector solución $(x_1, \ldots, x_n)$ son los valores generados por T y que satisfacen B_{i+1}

Formulación recursiva del algoritmo general de *backtracking*

```
backtrack(k):
   for each x[k] ∈ T(x[1],…,x[k−1]):
      if Bk(x[1],…,x[k]):
         if x[1],…,x[k] es una ruta a una respuesta:
            output x[1:k]
         if k < n: backtrack(k+1)
```

Formulación iterativa del algoritmo general de *backtracking*

```
ibacktrack(n):
   k = 1
   while k ≠ 0:
      if queda un x[k] ∈ T(x[1],…,x[k-1]
que no hemos probado and B_k(x[1],…,x[k]):
         if x[1],…,x[k] es una ruta a una
respuesta:
            output x[1:k]
         k = k+1
      else:
         k = k-1
```

Coloración de grafos: Problemas de decisión y de optimización

Problema de *decisión*: determinar si *G* puede ser coloreado de manera que dos vértices adyacentes tengan siempre colores distintos y sólo se use *m* colores

Problema de *optimización*: encontrar el menor entero *m* para el cual *G* puede ser coloreado —*m* es el *número cromático* de *G*

Coloración de grafos: Nuestro problema

Determinar todas las formas diferentes en las que G puede ser coloreado usando a lo más m colores

Representamos:

- G por su matriz de adyacencias $G[1 : n][1 : n]$:

  $G[i][j] = 1$ si (i, j) es una arista de G

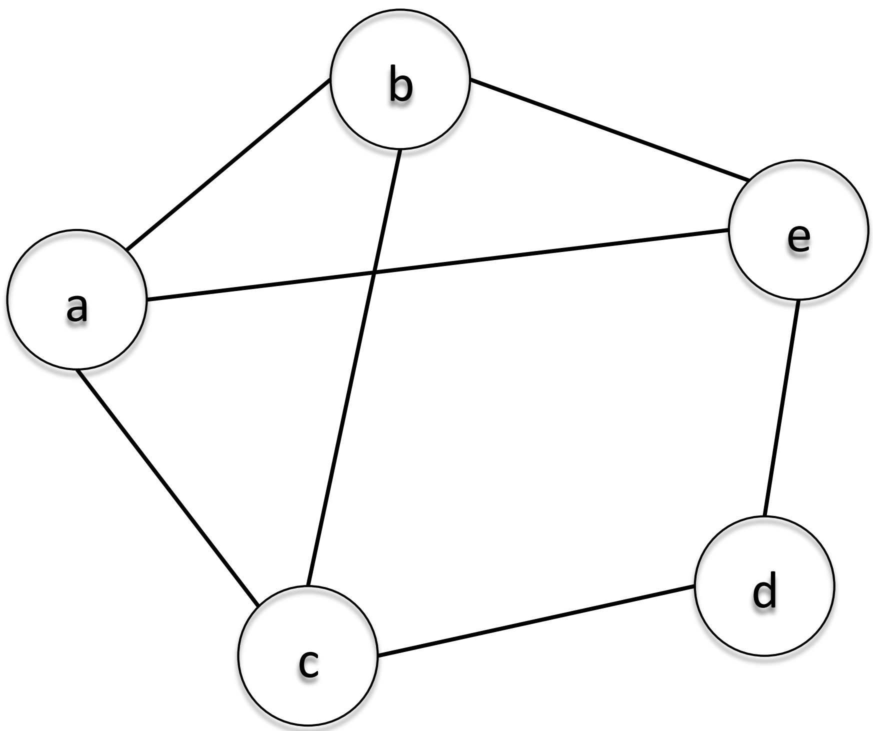
  $G[i][j] = 0$ en caso contrario

- los colores por los enteros 1, 2, …, m

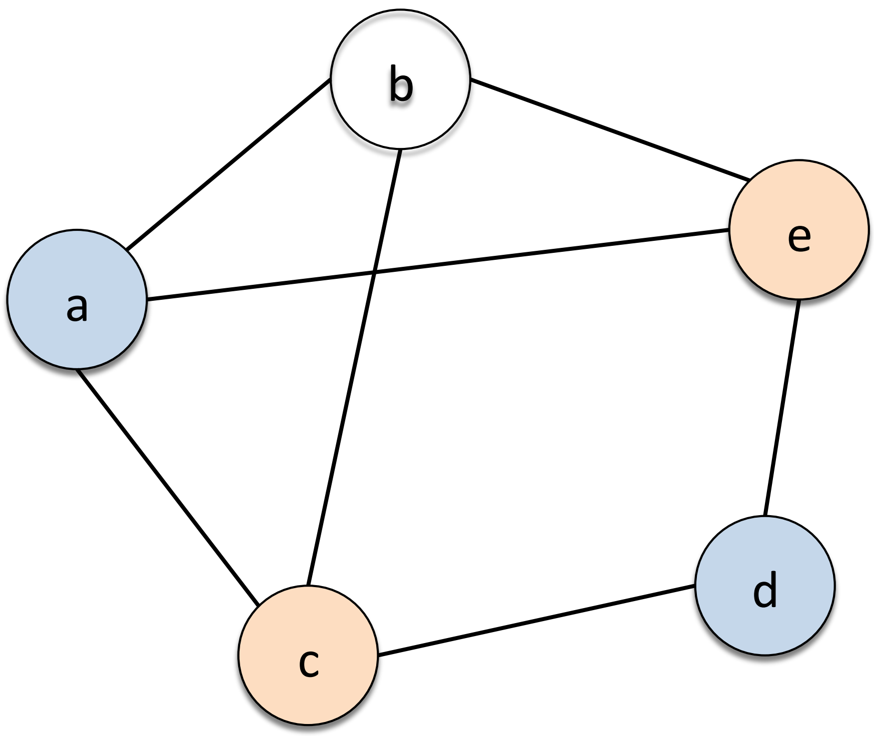
  … un color igual a 0 siginifica que no existe un color distinto para asignar

- las soluciones por las tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$, en que x_i es el color del nodo i

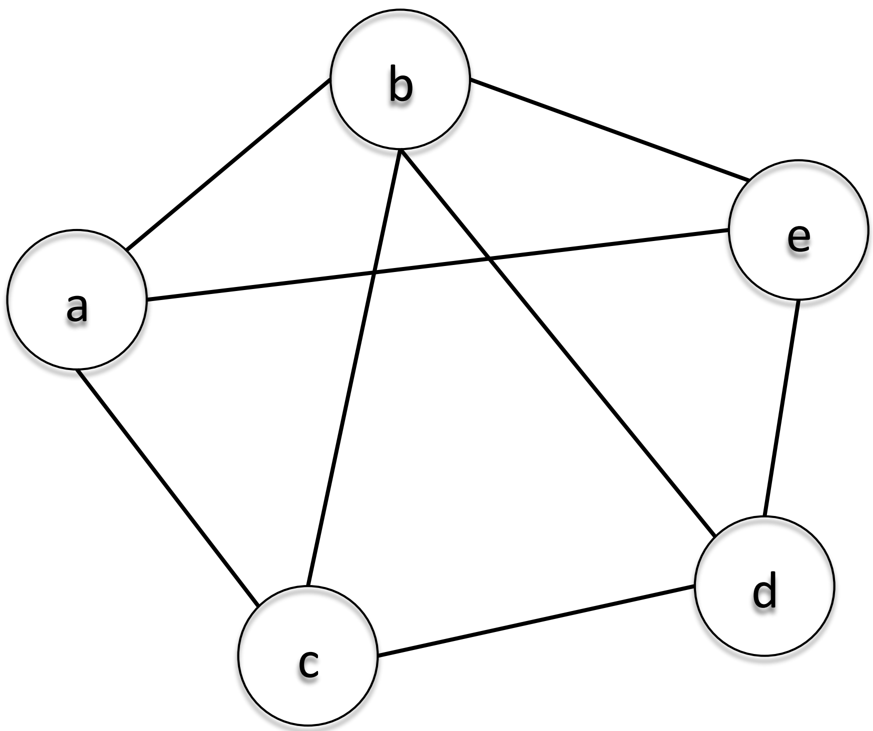
¿Cuántos colores son necesarios para colorear este grafo?



Respuesta: 3



¿Y para colorear este grafo?



Inicialmente

- ponemos el arreglo $x[1:n]$ en 0
- hacemos la llamada `mColoring(1)`

```
mColoring(k):
   while true:
      nextValue(k)
      if x[k] == 0: break
      if k == n: output x[1:n]
      else mColoring(k+1)

nextValue(k):
   while true:
      x[k] = (x[k]+1) % (m+1)
      if x[k] == 0: return
      for j = 1 … n:
         if G[k][j] ∧ x[k] == x[j]: break
      if j == n+1: return
```