Flujo en redes

IIC2133

Una **red de flujo** es un grafo direccional $G = (V, E)$:

- cada arista e tiene una capacidad, un número no negativo c_e
- hay un único nodo fuente s
- hay un único nodo sumidero t

Suponemos que ninguna arista llega a s

… que ninguna arista sale de t

… y que todas las capacidades son números enteros

Un **flujo *s*-*t*** es una función f que asigna a cada arista e un número real no negativo $f(e)$

… que satisface dos propiedades:

- para cada arista e, $0 \leq f(e) \leq c_e$
- para cada nodo v distinto de s y t, la suma de los flujos en las aristas que llegan a v, $f^{in}(v)$, debe ser igual a la suma de los flujos en las aristas que salen de v, $f^{out}(v)$

Solo la fuente s puede generar flujo

… y solo el sumidero t puede consumir flujo

El valor de un flujo f, denotado por $v(f)$, es la cantidad de flujo generado en la fuente:

- $v(f) = f^{out}(s)$

El **problema del flujo máximo** consiste en que dada una red de flujo,

… hay que encontrar un flujo de valor máximo

Dada una red G y un flujo f, definimos la **red residual G_f** :

- el conjunto de nodos de G_f es el mismo que el de G
- para cada arista $e = (u, v)$ en que $f(e) < c_e$, incluimos la arista $e = (u, v)$ en G_f , con capacidad $c_e - f(e)$: *arista forward*
- para acada arista $e = (u, v)$ en que $f(e) > 0$, inclumos la arista $e' = (v, u)$ en G_f , con capacidad $f(e)$: *arista backward*

Es decir, cada arista e en G puede dar origen a una o dos aristas en G_f :

- si $0 < f(e) < c_e$, entonces se traduce tanto en una arista *forward* como en una arista *backward* incluidas en G_f
- G_f tiene a lo más el doble de aristas que G

En G_f podemos encontrar una ruta simple p de s a t —llamada una *ruta de aumento*,

… y sea $g_{p,f}$ la menor capacidad de cualquier arista en p (con respecto al flujo f),

… entonces podemos definir un nuevo flujo f' en G :

para cada arista (u, v) en p :
- si $e = (u, v)$ es una arista forward
  - aumentar $f(e)$ en G en $g_{p,f}$
- si (u, v) es una arista backward y sea $e = (v, u)$
  - disminuir $f(e)$ en G en $g_{p,f}$

Se puede verificar que f' es un flujo válido en G —satisface las dos propiedades que aparecen en la diap.#3

La aplicación repetida de los pasos de la diap. anterior constituye el **algoritmo de Ford-Fulkerson** para encontrar flujos máximos;

… la repetición se detiene cuando no hay rutas simples de s a t en Gf

Se puede demostrar que si f es un flujo máximo en G,

… entonces la red residual G_f no tiene rutas de aumento de s a t

… y vice versa.