Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

21 de abril de 2019

2º semestre 2017 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

. Luis Miguel Fros - 15209822

Respuestas

Pregunta 1

Pregunta 1.a

Demostración. Por demostrar que $(\mathbb{Z}, \leq)$ no es un buen orden,
Por contraejemplo, si se toma el siguiente subconjunto de $\mathbb{Z}$ infinito:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x < 0 \land y < 0\}$$

Esto no esta acotado inferiormente ya que siempre existe un numero menor a otro.
Por lo tanto no tiene mínimo , lo que implica que no es buen orden.

□

Pregunta 1.b

Se definen las siguientes condiciones para la relación "$x \trianglelefteq y$"

$$x = 0 \tag{1}$$

$$x > 0 \land y < 0 \tag{2}$$

$$x > 0 \land y > 0 \land x \leq y \tag{3}$$

$$x < 0 \land y < 0 \land |x| \leq |y| \tag{4}$$

Por lo tanto, la relación se cumple:

$$x \trianglelefteq y \iff (1) \vee (2) \vee (3) \vee (4)$$

Demostración. Por demostrar que la relación binaria $\trianglelefteq$ es de buen orden.
Primero se demostrara que es orden total, que por definicion tiene que ser orden parcial y conexa.

- Orden parcial: Refleja, antisimetrica y transitiva.

  - Refleja: Por la definición de refleja, la relación debe cumplir que:

    $$\forall x.\big[(x, x) \in R\big]$$

    Aplicado a esta relación:

    $$\forall x.\big[x \trianglelefteq x\big]$$

    Tiene que ser refleja para los 4 casos:

    1. $$0 \trianglelefteq 0$$

       La cual es claramente refleja ya que se cumple para todo $x = 0$.
    2. Para este caso, $x < 0 \wedge x > 0$ es siempre falso, por lo que no se puede tomar en cuenta en el caso de que la relacion sea refleja.
    3. Para este caso, $x > 0 \wedge x \leq x$ lo que claramente es refleja porque la igualdad se cumple que $x \trianglelefteq x$.
    4. Dada la naturaleza de el valor absoluto, se tiene que la igualdad de $|x| \leq |x|$ se sigue cumpliendo la propiedad de ser refleja. Esto es $|x| = |x| \rightarrow x = x$

  - Antisimetrica:
    Se debe cumplir que:

    $$\forall x, y.\big[(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow y = x\big]$$

    Para esta relación,

    $$\forall x, y.\big[x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq x \rightarrow y = x\big]$$

    Tiene que ser antisimetrica para los 4 casos:

    1. Se debe cumplir que:

       $$\forall y.\big[0 \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq 0 \rightarrow y = 0\big]$$

Para esto caso, la condición (1) a primera vista no nos proporciona mas información que afirmar que $0 \trianglelefteq y$ es verdadera. Pero estamos suponiendo el lado izquierdo, por lo que si miramos a $y \trianglelefteq 0$. La única condición en la cual el termino de el lado derecho es igual a 0 es la (1). Por lo tanto el termino de la izquierda esta obligado a ser 0. Entonces $y = 0$

2. Ahora se tiene que dada al condición (2):
   $x \trianglelefteq y$ se cumple por que efectivamente cumple la condición (2).
   $y \trianglelefteq x$ dado lo que tenemos de información sobre x e y, se hace la falsa la afirmación ya que no cumple ninguna condición. Por lo tanto el lado izquierdo es falso, lo que hace a la implicancia trivialmente verdadera y por lo mismo $x = y$

3. Ahora se tiene que dada al condición (3):
   El lado izquierdo se convierte en:

   $$x \leq y \wedge y \leq x$$

   Lo que por definición que la relación "$\leq$":

   $$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$$

   Dado que se cumple para x, y arbitrarios, por generalización universal estos se cumplen para todo x, y dados la condición. Entonces se cumple que es antisimetrica bajo esta condicion.

4. Ahora bajo la condición (4) Como x, y son menores que 0.

   $$\forall x, y. \big[|x| \leq |y| \wedge |y| \leq |x| \rightarrow y = x\big]$$

   Se tiene que por propiedad de valor absoluto, como ambos tiene el mismo signo se puede escribir como:

   $$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$$

   Que implica $x = y$ por definicion recien mencionada.

- <u>Transitiva:</u> Se quiere demostrar que:

  $$\forall x, y, z. \big[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R\big]$$

  Para esta relacion en particular:

  $$\forall x, y, z. \big[x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq z \rightarrow x \trianglelefteq z\big]$$

  Tiene que ser transitiva para los 4 casos:

1. En el lado izquierdo, suponiendo que se cumple el lado izquierdo de la implicancia y aplicando la condicion que el primer elemento sea igual a 0.

$$0 \trianglelefteq 0 \land 0 \trianglelefteq z$$

Lo primero ya sabemos que es verdadero por lo tanto:

$$0 \trianglelefteq 0 \land 0 \trianglelefteq z \to 0 \trianglelefteq z$$

2. Ahora tenemos que dada la condición (2):

$$x > 0 \land y < 0 \land y > 0 \land z < 0 \to x > 0 \land z < 0$$

Reagrupando:

$$(x > 0 \land z < 0) \land (y < 0 \land y > 0) \to x > 0 \land z < 0$$

El lado izquierdo es siempre falso, por lo que la implicancia es verdadera.

3. Por transitividad de la relación $\leq$ esta condicion tambien cumple transitividad.

4. De la misma manera, como x e y tiene el mismo signo el unico determinante de la desigualdad es la magnitud de cada uno. Por lo tanto como la magnitud de x es $\leq$ a la de y, el cual es de menor magnitud o igual a z. Necesariamente la magnitud de x debe ser menor o igual a la de z.

Por lo tanto es de orden parcial
Ahora debemeos demostra que es <u>conexa</u> para que sea de orden total.

- <u>Conexa:</u>
  Se busca demostrar que:

$$\forall x, y. \big[(x, y) \in R \lor (y, x) \in R\big]$$

Para esta relacion:

$$\forall x, y. \big[x \trianglelefteq y \lor y \trianglelefteq x\big]$$

Si $x = y$, entonces como ya demostramos que la relacion es reflexiva:

$$x \trianglelefteq x \equiv x \trianglelefteq y \lor x \trianglelefteq y$$

Pero si $x \neq y$, como la relación es antisimetrica, se cumple que:

$$\forall x, y. \big[x \trianglelefteq y \land y \trianglelefteq x \to y = x\big]$$

Que es equivalente a escribir:

$$\forall x, y. \big[\neg(x \trianglelefteq y \land y \trianglelefteq x) \lor y = x\big]$$

Pero como $x \neq y$, entonces la unica manera que sea verdadera la afirmacion es si:

$$\forall x, y. \big[x \trianglelefteq y \vee y \trianglelefteq x\big]$$

Por lo tanto es de orden total.

Para finalizar, se debe demostrar que tiene un mínimo, para que ser de buen orden.
Sea $S \subseteq \mathbb{Z}$ Primero, se busca un elemento que se cota inferior:

$$\forall y \in S, x \trianglelefteq y$$

La condición (1) de la relación, es explicita en decir que el cero es el único que cumple que para cualquier otro elemento en el conjunto $y \in S$, $x \trianglelefteq y$. Después, dada la condición (2), cualquier elemento positivo x es $x \trianglelefteq y$ a un $y < 0$. La tercera condición (3), toma la parte positiva de los enteros $(\mathbb{Z} - \{0\})$ la cual siempre tiene un elemento menor por la desigualdad $x \leq y$. Por ultimo, la condición (4) nos dice que los elementos que están a menor distancia de 0 o en otras palabras, con menor magnitud son los que cumplen la propiedad. Esto asegura que los enteros negativos estén ordenados por magnitud y por lo tanto exista una cota inferior. Por lo tanto, para cada caso, exista un mínimo y esto garantiza que la relación siempre tenga al menos un mínimo para algún subconjunto.
Por lo tanto, es de buen orden $\square$

Pregunta 2

Demostración. Primero, cabe notar que se pueden definir las siguientes funciones biyectivas:

$$f_1 : [r, r+1] \to [0, 1]$$
$$f_2 : (r, r+1] \to (0, 1]$$

Donde,

$$f_1(x) = x - r = f_2(x)$$

Esta función es biyectiva ya que:

- Inyectiva: Sean x_1, x_2 arbitrarios,
$$f(x_1) = x_1 - r$$
$$f(x_2) = x_2 - r$$
$$f(x_2) = f(x_1) \to x_2 = x_1$$
- Sobreyectiva: Dada la simplicidad de la función, para toda imagen de llegada siempre tiene al menos una preimagen. Por lo tanto es sobreyectiva
Se puede concluir que es biyectiva

Como existe una funcion biyectica se puede conlcuir que:

$$[r, r+1] \approx [0, 1]$$
$$(r, r+1] \approx (0, 1]$$

Ahora se define una funcion $f_3 : [0, 1] \to (0, 1]$ como:

$$f_3(x) = \begin{cases} x & x \notin \{1/2^n | n \in \mathbb{N}\} \\ 1 - x/2 & x \in \{1/2^n | n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

La cual es biyectiva:

- Sobreyectiva: Sea $y \in (0, 1]$. Si $y = \frac{1}{2^n}$ para algun $n \geq 1$,entonces sabes que $y = f_3(x)$,
$$\frac{1}{2^n} = 1 - x/2$$
$$x = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$
En el otro caso, que $y \neq \frac{1}{2^n}$ es claro que $f(y) = y$

Sea $h : (f_3 \circ f_2)$, donde h es biyectiva porque composición de funciones biyectivas es biyectiva por propiedad. Talque $h : [r, r+1] \to (r, r+1]$ $\square$