Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

21 de abril de 2019

2^o semestre 2017 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

. Luis Miguel Fros - 15209822

Respuestas

Pregunta 1

Pregunta 1.a

Se define C(φ), $\varphi \in L(P)$ como:

$$\varphi = p \Rightarrow C(\varphi) = 0, p \in P \tag{1}$$

$$\varphi = (\neg\alpha) \Rightarrow C(\varphi) = 1 + C(\alpha), \alpha \in L(P) \tag{2}$$

$$\varphi = (\alpha * \beta), \alpha, \beta \in L(P), * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow\} \Rightarrow C(\varphi), \varphi \in= 1 + C(\alpha) + C(\beta) \tag{3}$$

Pregunta 1.b

Demostración. Se quiere demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$K(\varphi) \leq C(\varphi), \forall\varphi \in L(P) \tag{4}$$

B.I.
Sea $\varphi = p, p \in P$.
Sabemos que por definición,

$$K(p) = 0 \tag{5}$$

$$C(p) = 0 \tag{6}$$

$$K(\varphi) \leq C(\varphi) \tag{7}$$

$$K(p) \leq C(p) \tag{8}$$

$$0 \leq 0 \tag{9}$$

Por lo que cumple la propiedad.
H.I.
Decimos que $\{\alpha, \beta\} \in L(P)$ cumplen que:

$$K(\alpha) \leq C(\alpha) \tag{10}$$

$$K(\beta) \leq C(\beta) \tag{11}$$

T.I.
Queremos demostrar (4), por lo que sera analizado por casos.
Caso 1(Negacion)

$$\varphi = (\neg\alpha) \tag{12}$$

Sabemos que por la hipotesis de induccion que:

$$K(\alpha) \leq C(\alpha) \tag{13}$$

$$K(\alpha) + 1 \leq C(\alpha) + 1 \tag{14}$$

Por la definicion de potencial y cantidad de ocurrencias,

$$K(\neg\alpha) \leq C(\neg\alpha) \tag{15}$$

Por lo tanto,

$$K(\varphi) \leq C(\varphi) \tag{16}$$

Caso 2(Compuesto)

$$\varphi = (\alpha * \beta) \tag{17}$$

Sabemos por la hipotesis de induccion que:

$$K(\alpha) \leq C(\beta) \tag{18}$$

$$K(\beta) \leq C(\beta) \tag{19}$$

Sumando (18) y (19),

$$K(\alpha) + K(\beta) \leq C(\alpha) + C(\beta) \tag{20}$$

Lo que tambien se cumple para dos casos:
Caso 2.1.

$$K(\alpha) > K(\beta) \Rightarrow K(\alpha) \leq C(\alpha) + C(\beta) \tag{21}$$

Por lo que podemos escribir la expresion como,

$$K(\alpha) + 1 \leq C(\alpha) + C(\beta) + 1$$

Como se cumple (21),

$$max\{K(\alpha), K(\beta)\} + 1 \leq C(\alpha) + C(\beta) + 1 \tag{22}$$

Por la definicion de potencial y cantidad de ocurrencias,

$$K(\alpha * \beta) \leq C(\alpha * \beta) \tag{23}$$

Por lo tanto,

$$K(\varphi) \leq C(\varphi) \tag{24}$$

Caso 2.2.

$$K(\beta) > K(\alpha) \Rightarrow K(\beta) \leq C(\alpha) + C(\beta) \tag{25}$$

Por lo que podemos escribir la expresion como,

$$K(\beta) + 1 \leq C(\alpha) + C(\beta) + 1$$

Como se cumple (25),

$$max\{K(\alpha), K(\beta)\} + 1 \leq C(\alpha) + C(\beta) + 1 \tag{26}$$

Por la definicion de potencial y cantidad de ocurrencias,

$$K(\alpha * \beta) \leq C(\alpha * \beta) \tag{27}$$

Por lo tanto,

$$K(\varphi) \leq C(\varphi) \tag{28}$$

Que es igual a (4), lo que queriamos demostrar □

Pregunta 1.c

Demostración. Se quiere demostras que si $\varphi \in S(\psi), \varphi, \psi \in L(P)$, entonces,

$$K(\varphi) \leq K(\psi) \tag{29}$$

B.I.
Sea $\psi = p, p \in P$.
Sabemos que por definición,.

$$S(\psi) = \{p\} \tag{30}$$

$$K(p) = 0 \tag{31}$$

Por lo tanto,

$$K(\varphi) = K(p) = 0 = K(p) = K(\psi) \tag{32}$$

$$K(\varphi) = K(\psi)$$

Se cumple la propiedad.

H.I.
Decimos que $\{\alpha, \beta\} \in S(\psi)$.

T.I.
Queremos demostrar (4), por lo que sera analizado por casos.
Caso 1.

$$\psi = (\neg\alpha) \tag{33}$$

Por definición sabemos que,

$$S(\neg\alpha) = S(\alpha) \cup \{\neg\alpha\} \tag{34}$$

$$K(\neg\alpha) = K(\alpha) + 1 \tag{35}$$

Por lo tanto,

$$K(\psi) = K(\neg\alpha) = K(\alpha) + 1 \tag{36}$$

$$S(\psi) = S(\neg\alpha) = S(\alpha) \cup \{\neg\alpha\} \tag{37}$$

Ahora se deben ver los distintos casos para $\varphi \in S(\psi)$.

Caso 1.1:

$$\varphi = \{\neg\alpha\}$$

Entonces por (36),

$$K(\varphi) = K(\alpha) + 1 = K(\psi) \tag{38}$$

Se cumple la propiedad.
Caso 1.2:

$$\varphi \in S(\alpha)$$

Por la definicion de $S(\psi)$ y $K(\varphi)$, a **lo mas** φ va a ser igual a α, y el potencial de una formula aumenta a medida que existan mas operaciones y formulas.

$$p \leq \varphi \leq \alpha \tag{39}$$

$$0 \leq K(\varphi) \leq K(\alpha) \tag{40}$$

Con el resultado de (38) y (40),

$$max\{K(\alpha), K(\varphi)\} \leq K(\psi) \tag{41}$$

$$max\{K(\alpha), K(\alpha)\} \leq K(\psi) \tag{42}$$

$$K(\alpha) \leq K(\psi) \tag{43}$$

Por lo que la negacion cumple la propiedad.

Caso 2:

$$\psi = (\alpha * \beta) \tag{44}$$

Por definición sabemos que,

$$S(\alpha * \beta) = S(\alpha) \cup S(\beta) \cup \{\alpha * \beta\} \tag{45}$$

$$K(\alpha * \beta) = max\{K(\alpha), K(\beta)\} + 1 \tag{46}$$

Por lo tanto,

$$S(\psi) = S(\alpha * \beta) = S(\alpha) \cup S(\beta) \cup \{\alpha * \beta\} \tag{47}$$

$$K(\psi) = K(\alpha * \beta) = max\{K(\alpha), K(\beta)\} + 1 \tag{48}$$

Ahora se deben ver los distintos casos para $\varphi \in S(\psi)$.

Caso 2.1:

$$\varphi = \{\alpha * \beta\}$$

Entonces, por (48),

$$K(\varphi) = max\{K(\alpha), K(\beta)\} + 1 = K(\psi) \tag{49}$$

Por lo que se cumple la propiedad para este caso.
Caso 2.2:

$$\varphi \in S(\alpha) \cup S(\beta)$$

Por la misma conclusión en el caso 1.2 y por (49),

$$max\{K(\alpha), K(\alpha * \beta)\} = K(\alpha * \beta) = K(\psi) \tag{50}$$

$$K(\alpha) \leq K(\psi) \tag{51}$$

$$max\{K(\beta), K(\alpha * \beta)\} = K(\alpha * \beta) = K(\psi) \tag{52}$$

$$K(\beta) \leq K(\psi) \tag{53}$$

$\square$

Pregutnta 1.d

Demostración. Se quiere demostrar si lo siguiente es cierto:

$$K(\varphi) \leq K(\psi) \rightarrow \varphi \in S(\psi), \varphi, \psi \in L(P) \tag{54}$$

Se presentara un contra ejemplo, el cual hace que la implicancia sea falsa.
Sea,

$$\varphi = p \rightarrow q \tag{55}$$

$$\psi = \neg p \tag{56}$$

Por la definicion del potencial,

$$K(\varphi) = max\{K(p), K(q)\} + 1 = 1 \tag{57}$$

$$K(\psi) = max\{K(p), K(q)\} + 1 = 1 \tag{58}$$

Pero,

$$S(\psi) = \{\neg p, p\} \tag{59}$$

Por lo tanto, $\varphi \notin S(\psi)$ □

Pregunta 2

Se quiere construir una formula $\varphi \in L(P)$ tal que:

φ es satisfacible $\leftrightarrow$ existe una serie de vuelos a tomar que cumpla con todas las restricciones planteadas.

Sea el subindice "s", el representante de la ciudad de Santiago.
Se define la siguiente variable:

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si viaja desde la ciudad i hacia la ciudad j,} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\psi_1 = \bigvee_{(i,j) \in V, j \neq s} C_{i,j}$$

ψ_1 : Puede o no viajar por un vuelo que esta en la tabla, distinto de santiago porque esta obligado a salir de santiago

$$\psi_2 = \neg(\bigvee_{(s,j) \in V} C_{s,j}) \to \bigwedge_{(i,j) \in V, i \neq s} \neg C_{i,j}$$

ψ_2 : No puede viajar por las ciudades distintas de Santiago si no hay salido de Santiago en algún vuelo posible.

$$\psi_3 = \bigvee_{(i,s) \in V} C_{i,s} \to \bigwedge_{(i,j) \in V, j \neq s} \neg C_{i,j}$$

ψ_3 :Si llego a Santiago, no hay mas vuelos posibles por recorrer.

$$\psi_4 = \bigvee_{(i,j) \in V, i,j \neq s} C_{i,j} \to \neg C_{j,i} \bigwedge_{(k,i) \in V, k \neq j} \neg C_{k,i}$$

ψ_4 :No puede repetir las conexiones o ciudades en el trayecto.

$$\psi_5 = \bigvee_{(i,j) \in V} (C_{i,j} \to \neg C_{i,j})$$

ψ_4 :No puede hacer el mismo vuelo otra vez, dado que pueden haber vuelos repetidos.

$$\varphi = \psi_1 \wedge \ \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4 \tag{60}$$

Comentario: El trayecto forma un ciclo, por lo que cualquier ciudad puede ser considerada como Santiago y se cumplirían las mismas restricciones para esa ciudad.