Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

21 de abril de 2019

2º semestre 2017 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

. Luis Miguel Fros - 15209822

Respuestas

Pregunta 1

Demostración. Queremos demostrar que independiente de la distribución de las 2n invitaciones, nuestro amigo siempre puede escoger una casa para empezar el recorrido, y lograr su cometido dando solo una vuelta.

B.I.

Para $n = 1$ hay dos vecinos y uno de ellos tienen la invitación perteneciente al otro. Por lo tanto, como la ciclovia es circular, no importa en que casa comience siempre va a poder repartir las invitaciones.

H.I.

Para el propósito de la demostración, se asume que nuestro amigo puede elegir una casa. Como condición de este supuesto, esta casa **debe** tener invitaciones. Dado que puede elegir una casa para lograr su cometido, $2n$ casas se visitan en una vuelta y las invitaciones se entregan.

T.I.

Queremos demostrar que se cumple para $2(n+1)$ casas. En esta situación, hay $n+1$ casas que tienen dos invitaciones y $n + 1$ casas que no tienen invitaciones. Debido a que la ciclovía es unidireccional y nuestro amigo solo puede recorrerla de una manera dado una distribución, por lo que en algun punto tiene que haber una casa con invitaciones seguida de una sin invitaciones. Por lo tanto, si retiramos esas dos casas de la ciclovía, tendríamos el caso base aislado y tenemos como restante la hipótesis de inducción de $2n$ casas la cual se cumple. Se pueden reingresar las dos casas en cualquier lugar y orden, siempre y cuando se sigan las condiciones de la hipótesis de inducción. En consecuencia, sin importar la distribución de las casas nuestro amigo siempre podrá repartir las invitaciones que faltaron. $\square$

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Demostración. Se quiere demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, Sum(L) \geq 0 \tag{1}$$

B.I.

$$\begin{gathered} Sum(\emptyset) >= 0 \\ 0 >= 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Por lo que cumple la propiedad.
H.I.
Suponer que la propiedad se cumple $\forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$
T.I.
Queremos demostrar que $L \to k, k \in \mathbb{N}$ cumple la propiedad,

$$Sum(L \to k) \geq 0 \tag{3}$$

Por definicion,

$$Sum(L \to k) = Sum(L) + k \tag{4}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ y $L \in L_{\mathbb{N}}$ el menor valor que puede tomar $Sum(L)$ es 0. La suma de estos dos términos tiene que ser mayor o igual que cero.

$$Sum(L) + k \geq 0 \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$Sum(L) \geq 0 \tag{6}$$

□

Pregunta 2.2

Demostración. Se quiere demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\}, Sum(L) = Head(L) + Sum(Suf(L)) \tag{7}$$

B.I.
Como la lista vacía no pertenece, se tiene una lista con un elemento k,

$$L = \to k, k \in \mathbb{N} \tag{8}$$

$$Sum(\to k) = Head(\to k) + Sum(Suf(\to k)) \tag{9}$$

Pero sabemos que por definición,

$$Sum(\to k) = Sum(\emptyset) + k \tag{10}$$

$$Head(\to k) = k \tag{11}$$

$$Suf(\to k) = 0 \tag{12}$$

Por lo que usando (10),(11) y (12) el caso base se simplifica a la siguiente expresión:

$$k = k + Sum(0) \tag{13}$$

Por lo que cumple la propiedad.

H.I.
Suponer que la propiedad se cumple $\forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\}$

T.I.
Queremos demostrar que $L \to k$ cumple la propiedad,

$$Sum(L \to k) = Head(L \to k) + Sum(Suf(L \to k)) \tag{14}$$

Pero sabemos que por definición,

$$Sum(L \to k) = Sum(L) + k \tag{15}$$

$$Head(L \to k) = Head(L) \tag{16}$$

$$Suf(L \to k) = Suf(L) \to k \tag{17}$$

Por lo tanto usando (15),(16) y (17) en (14),

$$Sum(L) + k = Head(L) + Sum(Suf(L) \to k)) \tag{18}$$

$$Sum(L) + k = Head(L) + Sum(Suf(L)) + k$$

$$Sum(L) = Head(L) + Sum(Suf(L))$$

Que es igual a (7), lo que queriamos demostrar $\square$