Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

21 de abril de 2019

2º semestre 2017 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

. Luis Miguel Fros - 15209822

Respuestas

Pregunta 1

Demostración. Se busca demostrar si las leyes de Distributividad se cumplen para las operaciones sobre *bags* de intersección y unión.
Leyes de Distributividad:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2}$$

En la igualdad (1), la operación sobre *bags* debería cumplir lo siguiente:

$$\left[A \hat{\cup} (B \hat{\cap} C)\right](x) = \left[(A \hat{\cup} B) \hat{\cap} (A \hat{\cup} C)\right](x) \tag{3}$$

Usando las definiciones de el enunciado:

$$A(x) + Min\{B(x), C(x)\} = Min\{A(x) + B(x), A(x) + C(x)\}$$

En el lado izquierdo, tenemos dos casos:

- Caso 1: $B(x) < C(x)$
  En este caso, el lado izquierdo quedaría como:

$$A(x) + Min\{B(x), C(x)\} = A(x) + B(x) \tag{4}$$

Ahora, sabemos que:

$$B(x) < C(x)$$

Sumando A(x) en ambos lados,

$$A(x) + B(x) < A(x) + C(x)$$

Por lo tanto, el lado derecho

$$Min\{A(x) + B(x), A(x) + C(x)\} = A(x) + B(x) \tag{5}$$

Por lo tanto, (4) =(5)

- Caso 2: $C(x) < B(x)$
  En este caso, el lado izquierdo quedaría como:

$$A(x) + Min\{B(x), C(x)\} = A(x) + C(x) \tag{6}$$

Ahora, sabemos que:

$$C(x) < B(x)$$

Sumando A(x) en ambos lados,

$$A(x) + C(x) < A(x) + B(x)$$

Por lo tanto, el lado derecho

$$Min\{A(x) + B(x), A(x) + C(x)\} = A(x) + C(x) \tag{7}$$

Por lo tanto, (6) =(7)

Por lo tanto, queda demostrado mediante casos que se cumple la Ley de Distributividad de la unión sobre *bags* (igualdad (1)). □

Ahora se busca demostrar si se cumple la igualdad (2)
En la igualdad (2), la operación sobre *bags* deben cumplir lo siguiente:

$$\left[A \hat{\cap} (B \hat{\cup} C)\right](x) = \left[(A \hat{\cap} B) \hat{\cup} (A \hat{\cap} C)\right](x) \tag{8}$$

De nuevo, usando las definiciones del enunciado:

$$Min\{A(x), B(x) + C(x)\} = Min\{A(x), B(x)\} + Min\{A(x), C(x)\} \tag{9}$$

Demostración. Mediante un contraejemplo, se demostrará que la igualdad (9) no se cumple. Sea,

$$A = \{x, x\}$$
$$B = \{x\}$$
$$C = \{x, x\}$$

Por lo tanto,

$$A(x) = 2, B(x) = 1, C(x) = 3$$

Usando la igualdad (9),

$$Min\{2, 1 + 3\} = Min\{2, 1\} + Min\{2, 3\}$$

Se llega a que:

$$2 = 1 + 2$$

Lo que claramente contradice la igualdad. □

Por lo tanto, las operaciones sobre *bags* solo cumplen la igualdad (1) de las Leyes de Distributividad.

Pregunta 2

Pregunta 2.a

Demostración. Sabemos por enunciado, que $R_1, ..., R_n$ son relaciones reflejas,
Se busca demostrar que: Por definición de la unión entre conjuntos:

$$R_1 \cup R_2 = \{x | x \in R_1 \vee x \in R_2\} \tag{10}$$

$$R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n = \{x | x \in R_1 \vee x \in R_2 \vee ... \vee x \in R_n\} \tag{11}$$

Dado que son reflejas,

$$(x, x) \in R_1 \vee (x, x) \in R_2 \vee ... \vee (x, x) \in R_n \tag{12}$$

Entonces,

$$(x, x) \in \bigcup_{i=1}^{n} R_i \tag{13}$$

Lo que demuestra que la unión entre relaciones reflejas es refleja. □

Pregunta 2.b

Sabemos por enunciado, que $R_1, ..., R_n$ son relaciones simétricas,
Se busca demostrar que:

$$\left[(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right] \iff \left[(y, x) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right] \tag{14}$$

Expandiendo el lado izquierdo usando al definición de intersección,

$$\left[(x, y) \in R_1 \wedge ... \wedge (x, y) \in R_n\right] \tag{15}$$

Pero, como cada relación es simétrica se puede afirmar lo siguiente:

$$\left[(x, y) \in R_1 \wedge ... \wedge (x, y) \in R_n\right] \iff \left[(y, x) \in R_1 \wedge ... \wedge (y, x) \in R_n\right] \tag{16}$$

Por lo tanto, aplicando la definición de intersección en el lado derecho,

$$\left[(y, x) \in R_1 \wedge ... \wedge (y, x) \in R_n\right] \iff \left[(y, x) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right] \tag{17}$$

Pregunta 2.c

Demostración. Sabemos por enunciado, que $R_1, ..., R_n$ son relaciones transitivas,
Se busca demostrar que:

$$\big[(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i\big] \wedge \big[(y, z) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i\big] \rightarrow (x, z) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i \tag{18}$$

Expandiendo los corchetes cuadrados por definición de intersección,

$$\big[(x, y) \in R_1 \wedge ... \wedge (x, y) \in R_n\big] \wedge \big[(y, z) \in R_1 \wedge ... \wedge (y, z) \in R_n\big] \tag{19}$$

Por la asociatividad de conjunción, se puede agrupar por cada relación

$$\big[(x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_1\big] \wedge ... \wedge \big[(x, y) \in R_n \wedge (y, z) \in R_n\big] \tag{20}$$

Dado que cada relación es por enunciado transitiva,

$$(x, z) \in R_1 \wedge ... \wedge (x, z) \in R_n \tag{21}$$

Por lo tanto, dada la definición de intersección:

$$(x, z) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i \tag{22}$$

$\square$