



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

MORFOLOGÍA MATEMÁTICA EN HIPERGRAFOS

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE :

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LUIS GUILLERMO RODRÍGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

CARLOS GUILLÉN GALVÁN

PUEBLA, PUE.

DICIEMBRE 2021

*Para mi familia
y a quienes creyeron en esto posible.*

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mi asesor de tesis, al Dr. Carlos Guillen Galván por su interés, por su tiempo y por toda la ayuda que me brindó durante la carrera, ya que el haber cursado la licenciatura no ha sido lo suficientemente fácil para mí.

Quiero agradecer, como todos a mi parecer, a mis padres por su incondicional apoyo, y aunque a pesar de que ellos ya no se encuentran juntos en estos momentos de mi vida, han sido piezas muy importantes para poder lograr mis objetivos a lo largo de esta, por lo que les expreso mi total gratitud.

Gracias a Andrea Aparicio Guerrero, el amor de mi vida, por estar siempre ahí incondicionalmente, por todas las horas de estudio, de convivencia, de plática y por ser siempre un hombro para llorar o reír y sobre todo, por tu amor, el cual, espero siempre tener presente. Te amo.

Agradecer también a aquellas personas que me han impulsado en mi camino y que me ayudaron de forma motivacional mediante sus palabras o actos, tales como mis tíos, tías, compañeros y en especial a la señora Ana Guerrero, de la cual no tengo más palabras que sean de agradecimiento y admiración. Por todo su apoyo, gracias.

Introducción

La morfología matemática es una teoría no lineal para el procesamiento (obtención) de información y de reconocimiento de patrones, usada en áreas como análisis de imágenes. Esta teoría apareció en 1960, el mismo año en el que surge la teoría de los hipergrafos. Es importante mencionar que la morfología matemática ya ha sido desarrollada en grafos, la cual es una estructura menos general que los hipergrafos y en la que se han obtenido muchos resultados enriquecedores para la matemática aplicada, donde la noción de vecindad (en esta estructura) fue y es importante para definir operadores morfológicos, los cuales son su base. Por su parte, la teoría de hipergrafos resultó muy útil como una generalización de la teoría de grafos, ya que las relaciones binarias, que son las que los grafos mantienen, pueden ser muy restrictivas, por lo que una relación de mayor aridad, que es la que mantienen los hipergrafos, ha sido más que necesaria. A pesar de que ya son más de 60 años de la aparición de ambas, la morfología en hipergrafos sigue siendo hoy en día ampliamente estudiada, esto debido a su vasta aplicación, ya que se utiliza en ciencias de la computación, optimización, minería de datos, big data, teoría de juegos y de más, por lo que el objetivo de este texto es explorar parte de la morfología matemática desarrollada en grafos para posteriormente mostrar como actúa la morfología matemática en hipergrafos.

En el capítulo 1 iniciamos retomando algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, los cuales pueden ayudar al lector para adentrarse en otras lecturas relacionadas con este tema, por lo que se puede consultar [8] para un mayor conocimiento e información. También mostramos el concepto de retícula completa, la cual es una estructura algebraica en la que los operadores morfológicos trabajan y, para que quede lo más claro posible, mostramos algunos ejemplos (basados en [11]) de retículas completas creadas en conjuntos más conocidos. En el capítulo 2 repasamos brevemente la teoría de hipergrafos, que es la estructura de interés, por lo que tener estos conceptos a la mano es muy importante y se pueden consultar en [3]. En el capítulo 3 nos distanciamos un poco de la teoría de grafos e hipergrafos para posteriormente adentrarnos en lo que se considera como morfología matemática clásica y cuyos inicios se dieron en estructuras como la geométrica, por lo que iniciaremos este tercer capítulo recordando algunos conceptos vistos en un curso de

geometría y que en [12] puede consultar. Después de haber retomado estos conceptos, lo que sigue es definir algunos operadores geométricos y mostrar mediante algunas imágenes su efecto en ellas. En el capítulo 4 se retoma la teoría formal de la morfología matemática, con lo cual se justifican como operadores morfológicos a los operadores geométricos vistos en el capítulo previo. Poco después de esto, comenzamos a explorar la morfología matemática en grafos, la cual se considera no clásica al trabajar en un espacio de funciones pero debido a que esta teoría es muy extensa, sólo nos enfocaremos en mostrar los siguientes operadores morfológicos: dilatación, erosión, apertura y cierre, por lo que si el lector gusta adentrarse más en este tema puede consultar [1] y [2]. Por último, iniciamos el capítulo 5 definiendo varias retículas completas creadas en hipergrafos, aunque solamente trabajaremos en algunas de estas, le ayudarán al lector otras lecturas que abarquen más estos temas, tales como en [4], [5] y [6]. En la última parte de este capítulo se aborda y se muestra como actúan los operadores morfológicos dilatación, erosión, apertura y cierre pero en hipergrafos, llegando así a nuestro objetivo.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Retículas	1
1.2. Conceptos básicos de teoría de grafos	3
1.3. Conceptos básicos de teoría de hipergrafos	8
2. Geometría y operadores geométricos	25
2.1. Nociones en Geometría	25
2.2. Dilatación	33
2.3. Erosión	41
2.4. Apertura y Cierre	48
3. Morfología matemática	59
3.1. Conceptos de la morfología matemática	59
3.2. Morfología matemática en grafos	63
4. Morfología matemática en hipergrafos	77
4.1. Retículas en hipergrafos	77
4.2. Morfología en hipergrafos	82
Bibliografía	97

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos este documento recordando lo que es una *lattice* o una retícula completa, ya que los operadores que veremos más adelante trabajan en este tipo de estructuras algebraicas, por lo que es de suma importancia tener presente esta definición. Los ejemplos que aquí se presentan o se utilizan de apoyo pueden consultarse en [11, pags. 281-283].

1.1. Retículas

Sea A un conjunto parcialmente ordenado por la relación \leq (un COPO) y sea B un subconjunto de A , entonces tenemos lo siguiente

- El elemento M es un mayorante de B si $M \in A$ y $\forall x \in B : x \leq M$.

Si el conjunto de los mayorantes de B es distinto del vacío, se dirá que el conjunto B es mayorado o acotado superiormente.

- El elemento m es un minorante de B si $m \in A$ y $\forall x \in B : m \leq x$.

Si el conjunto de los minorantes de B es distinto del vacío, se dirá que el conjunto B es minorado o acotado inferiormente.

- El elemento b es el elemento máximo de B si $b \in B$ y $\forall x \in B : x \leq b$.
- El elemento v es el elemento mínimo de B si $b \in B$ y $\forall x \in B : v \leq x$.

- El elemento s es el extremo superior de B o supremo de B si s es el elemento mínimo del conjunto de los mayorantes de B .
- El elemento i es el extremo inferior de B o ínfimo de B , si i es el elemento máximo del conjunto de los minorantes de B .

Observemos que si B tiene un elemento máximo (mínimo), entonces éste mismo elemento es el supremo (ínfimo) de B , mientras que otro resultado establece que tanto el elemento máximo como el elemento mínimo de un conjunto son únicos.

Ejemplo 1.1.1. Sea $\mathbb{N}' = \mathbb{N} - \{0\}$, ordenado por la relación $|$ (divide a) y sea $B = \{3, 9, 12\}$, entonces se tiene lo siguiente

- El conjunto de mayorantes de B es $M = \{36, 72, 108, 144, 180, \dots\}$, mientras que el conjunto de minorantes de B es $M' = \{1, 3\}$.
- De acuerdo con el punto anterior, B no tiene elemento máximo (pues 9 no divide a 12) pero sí tiene extremo superior o supremo, a saber el número 36.
- B sí tiene elemento mínimo, a saber el número 3 (3 pertenece a B y divide a todos sus elementos), por lo que 3 también es el ínfimo de B .

Definición 1.1.2. Diremos que i es un elemento minimal de B si $i \in B$ y no existe $x \in B$ (diferente a i) tal que $x < i$. Definimos de forma similar elemento maximal.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}' - \{1\}$, ordenado por la relación $|$ (divide a) se puede verificar que todos los números primos son elementos maximales.

Definición 1.1.4. Se llama red, retícula o retícula completa (o lattice) a todo conjunto parcialmente ordenado \mathcal{L} , tal que para cada par de elementos x, y de \mathcal{L} , tienen supremo e ínfimo. El supremo de $\{x, y\}$ se designa por $x \vee y$, mientras que el ínfimo por $x \wedge y$.

Observemos que por definición, la retícula completa \mathcal{L} tiene ínfimo y lo denotamos por $0 = \bigwedge \mathcal{L}$, así como supremo, denotado por $1 = \bigvee \mathcal{L}$. Estas dos cotas son las cotas universales de \mathcal{L} . Note que también tenemos que $0 = \bigvee \emptyset$ y $1 = \bigwedge \emptyset$.

Ejemplo 1.1.5. Sean A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de A , consideremos la relación de inclusión \subseteq , sean x e y dos elementos en $\mathcal{P}(A)$, entonces se verifica fácilmente que el supremo de $\{x, y\}$ es $x \cup y$, es decir que, $x \vee y = x \cup y$, mientras que $x \wedge y = x \cap y$, por lo tanto $\mathcal{P}(A)$ es una retícula completa.

Observemos que $\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2, \mathbb{R}$, (cualquier conjunto) con la relación de inclusión es una retícula completa.

Ejemplo 1.1.6. *Se puede mostrar también que en \mathbb{N}' , ordenado por la relación $|$ (divide a), es una retícula completa tal que*

- $x \vee y$ es el mínimo común múltiplo de x e y .
- $x \wedge y$ es el máximo común divisor de x e y .

1.2. Conceptos básicos de teoría de grafos

Ahora requerimos tener presente un concepto previo al de hipergrafos, los grafos, los cuales son estructuras menos generales, sin embargo, son de suma utilidad en la morfología matemática. Un estudio más completo de la teoría de grafos puede ser consultado en [8].

Definición 1.2.1. *Un grafo G es un par de conjuntos (V, E) , donde V es llamado conjunto de vértices o nodos y E es el conjunto cuyos elementos son subconjuntos binarios de V , llamado conjunto de aristas.*

Los vértices del grafo G serán denotados por $V(G)$ y el conjunto de aristas de G por $E(G)$, es decir, si el grafo $H = (P, Q)$, el conjunto de vértices de H es $V(H)$ y el conjunto de aristas de H es $E(H)$. Tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2. *Sean $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ nuestro conjunto de nodos y $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{a, e\}, \{c, e\}, \{f, d\}, \{h, i\}, \{c, j\}\}$ nuestro conjunto de aristas, entonces, el grafo (V, E) puede representarse como en la Figura 1.1*

Sea $G = (V, E)$ un grafo, tenemos lo siguiente

- El número de vértices de G lo denotaremos por $|G|$.
- El número de aristas de G lo denotaremos por $||G||$.
- El grafo vacío es el grafo $G = (\emptyset, \emptyset)$.
- Un grafo $G = (V, E)$ se dice trivial si $V \neq \emptyset$ y $E = \emptyset$.
- Un vértice x es incidente en la arista $e \in E$ si $x \in e$.
- Dos vértices x, y son adyacentes o vecinos si $\{x, y\} \in E$.

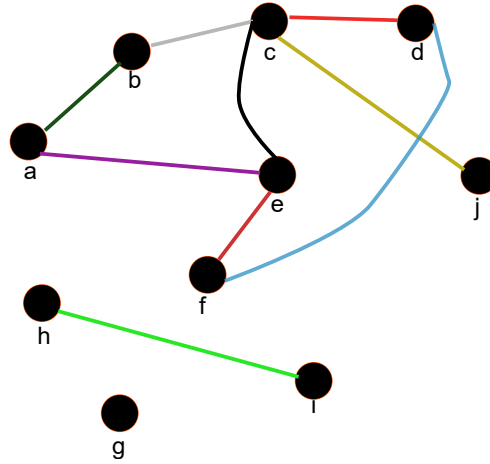


Figura 1.1: Ejemplo de un grafo G

- Dos aristas $f \neq g$ son adyacentes si $f \cap g \neq \emptyset$.
- Si para cada $x, y \in V$ (distintos) se tiene que $\{x, y\} \in E$, se dirá que G es completo. Un grafo G completo de n vértices ($n \in \mathbb{N}$) se denota por K^n .

Definición 1.2.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ entonces el grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G y escribimos $G' \subseteq G$.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos el grafo G del Ejemplo 1.2.2, por lo que, si $V' = \{a, b, c, d, f, g, j\}$ y $E' = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{f, d\}, \{c, j\}\}$ entonces el grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G (Ver Figura 1.2).

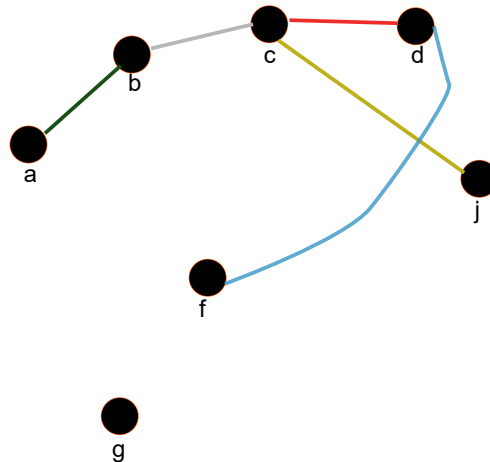


Figura 1.2: Ejemplo de un subgrafo G' del grafo G de la Figura 1.1.

Definición 1.2.5. G' es un subgrafo inducido de G si $E(G') = \{\{x, y\} \in E : x, y \in V'\}$. Decimos que V' induce o expande G' en G y denotamos a G' por $G[V']$ (Ver Figura 1.3).

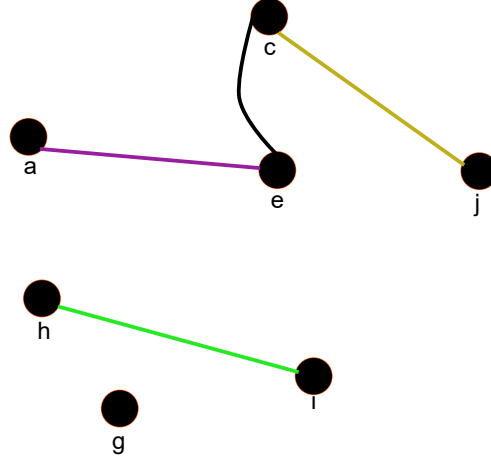


Figura 1.3: Ejemplo de un subgrafo inducido por el conjunto de vértices $V' = \{a, c, e, g, h, i, j\} \subseteq V$ del grafo G de la Figura 1.1.

Note que no todo subgrafo es un subgrafo inducido por algún conjunto de vértices, a menos que consideremos un grafo trivial.

Definición 1.2.6. Sean $G = (V, E)$ y $G^* = (V^*, E^*)$, $G^* \subseteq G$ es un subgrafo abarcador de G si $V = V^*$.

Observemos que no siempre un subgrafo abarcador es un subgrafo inducido por algún conjunto de vértices.

Definición 1.2.7. Sean $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ dos grafos y $\theta : V \rightarrow V'$ una función, θ es un homomorfismo de grafos (de G a G') si se cumple que $\{\theta(x), \theta(y)\} \in E(G')$ siempre que $\{x, y\} \in E(G)$, es decir, θ preserva la adyacencia de vértices.

Ejemplo 1.2.8. Consideremos los grafos G y H de la Figura 1.4, entonces tenemos que las siguientes funciones son homomorfismos de G en H .

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\rightarrow H \\ v_1 &\rightarrow v_3 \\ v_2 &\rightarrow v_5 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2 : G &\rightarrow H \\
 v_1 &\rightarrow v_5 \\
 v_2 &\rightarrow v_4
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3 : G &\rightarrow H \\
 v_1 &\rightarrow v_6 \\
 v_2 &\rightarrow v_4
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

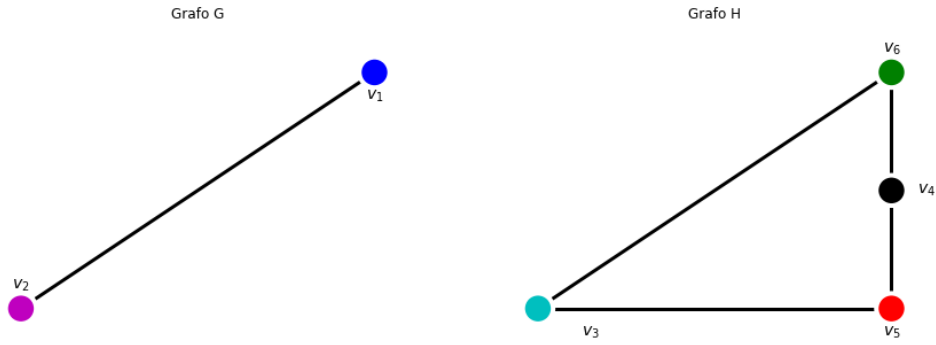


Figura 1.4: Grafos en los cuales se pueden establecer homomorfismos de G en H .

Observemos que si θ es una función biyectiva, su función inversa, θ^{-1} , también es un homomorfismo de grafos y así $\{\theta(x), \theta(y)\} \in E'$ si y sólo si $\{x, y\} \in E$, para este caso llamamos a θ un isomorfismo de grafos y escribimos $G \simeq G'$.

Definición 1.2.9. Un isomorfismo de grafos de G en G es llamado automorfismo o simetría de G y denotamos a la familia de simetrías de G por $\text{Sym}(G)$.

Un resultado básico es que esta familia forma un grupo llamado grupo simétrico de G .

Ejemplo 1.2.10. Consideremos el grafo R de la Figura 1.5, tenemos que los siguientes isomorfismos son simetrías.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 : R &\rightarrow R \\
 v_1 &\rightarrow v_1 \\
 v_2 &\rightarrow v_2 \\
 v_3 &\rightarrow v_3 \\
 v_4 &\rightarrow v_4
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2 : R &\rightarrow R \\
 v_1 &\rightarrow v_3 \\
 v_2 &\rightarrow v_2 \\
 v_3 &\rightarrow v_1 \\
 v_4 &\rightarrow v_4
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3 : R &\rightarrow R \\
 v_1 &\rightarrow v_3 \\
 v_2 &\rightarrow v_4 \\
 v_3 &\rightarrow v_1 \\
 v_4 &\rightarrow v_2
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Se puede comprobar que estos tres isomorfismos son las únicas simetrías, ya que cualquier otra no mantiene el homomorfismo entre los nodos v_2 con v_4 o establece una adyacencia entre los nodos v_1 con v_3 , lo cual no es posible.

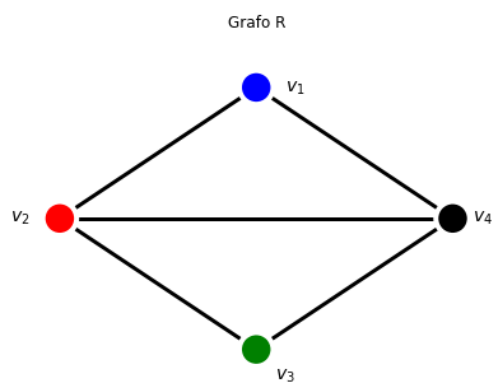


Figura 1.5: El grupo de simetrías de este grafo tiene tres elementos, incluyendo la simetría trivial θ_1 .

Si consideramos el grafo de la Figura 1.6, no es difícil ver que la única simetría que este grafo posee es la identidad.

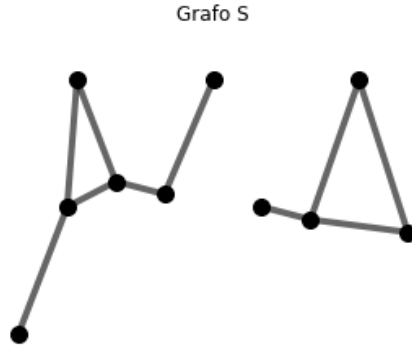


Figura 1.6: Grafo cuya única simetría es la identidad.

1.3. Conceptos básicos de teoría de hipergrafos

En esta última sección presentamos los conceptos de la teoría de hipergrafos que son de utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores. También se muestran ejemplos de la mayoría de estos conceptos que pueden resultar de utilidad si se desea profundizar en más temas como los que se tratan en la referencia [10].

Definición 1.3.1. La terna $(V, E = \{e_i\}_{i \in I})$, donde V es finito y en donde para cada $i \in I$ (I conjunto de índices finito) $\{e_i\}$ es subconjunto de V , es llamado hipergrafo y lo denotamos por $H = (V, (e_i)_{i \in I})$.

El conjunto V es llamado conjunto de vértices o nodos, mientras que E es llamado conjunto de hiperaristas y suelen denotarse por $V(H)$ y $E(H)$ respectivamente.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos al hipergrafo H constituido por $V(H) = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ el conjunto de vértices y $E(H) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8, x_{10}\}, \{x_4, x_8\}\}$ el conjunto de hiperaristas, por lo que el hipergrafo H puede representarse de alguna de las maneras de la Figura 1.7. Observemos que $e_1 = \{x_1, x_2\}$, $e_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $e_3 = \{x_3, x_5, x_6\}$, $e_4 = \{x_7, x_8, x_9\}$, $e_5 = \{x_4, x_8\}$.

Lo importante del ejemplo previo es señalar que la representación de cualquier hipergrafo (dibujo) puede ser cualquiera en tanto se mantenga la relación establecida, por lo que no es de mucha importancia por lo general, en cambio, las implicaciones matemáticas que conllevan sí lo son.

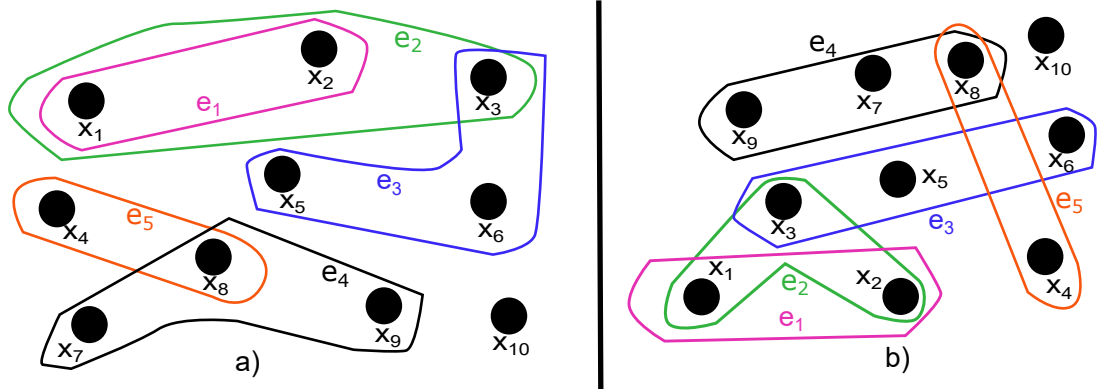


Figura 1.7: Representación del hipergrafo $H=(V,E)$

Sea $H = (V, E = (e_i)_{i \in I})$ un hipergrafo en el que la cardinalidad de cualquier subconjunto de E es dos, entonces en este caso observemos que H coincide con un grafo y puede representarse como en a) o b) de la Figura 1.8.

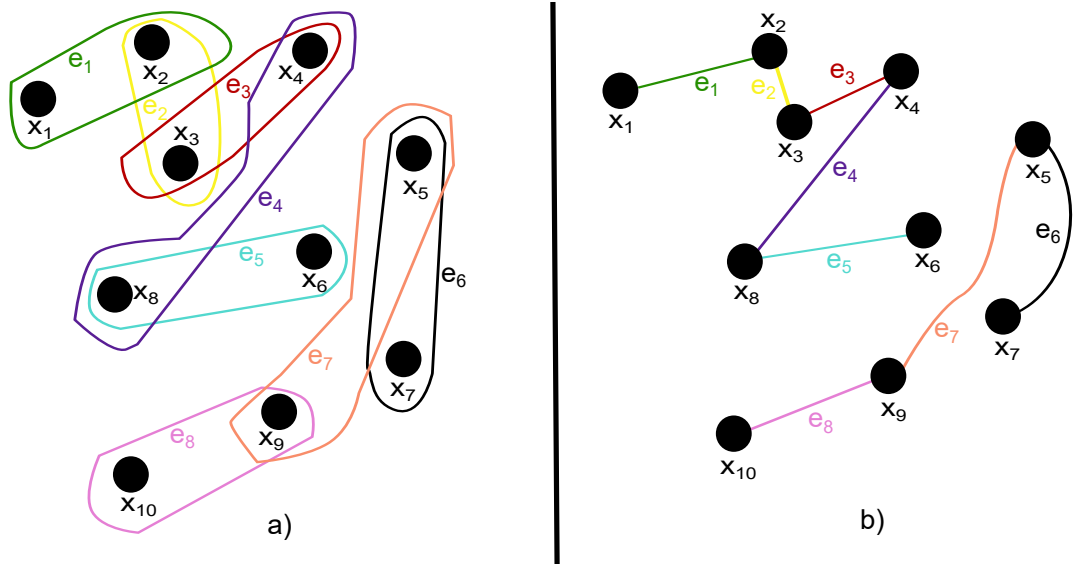


Figura 1.8: Misma representación del hipergrafo $H=(V,E)$, donde $V = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ y $e_1 = \{x_1, x_2\}$, $e_2 = \{x_2, x_3\}$, $e_3 = \{x_3, x_4\}$, $e_4 = \{x_4, x_8\}$, $e_5 = \{x_8, x_6\}$, $e_6 = \{x_5, x_7\}$, $e_7 = \{x_5, x_9\}$, $e_8 = \{x_9, x_{10}\}$.

Sea H un hipergrafo, entonces el orden de H se define como su número de vértices y lo denotamos por $|G|$, mientras que el número de hiperaristas de H lo denotaremos por $||H|| = |E|$.

Tenemos los siguientes hipergrafos básicos

- Hipergrafo vacío $H=(\emptyset, \emptyset)$.

Básicamente es el conjunto vacío, nada que decir.

- Hipergrafo trivial $H = (V, E)$, donde $V \neq \emptyset$ y $E = \emptyset$.

El hipergrafo trivial es aquel en el que sólo tenemos vértices y ninguna arista como en la Figura 1.9.

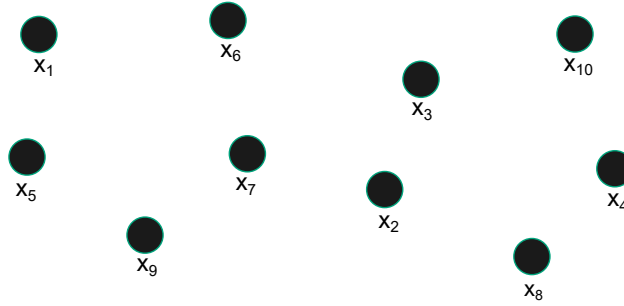


Figura 1.9: Hipergrafo trivial de diez vértices y ninguna hiperarista.

Definición 1.3.3. Dado $x \in V$, diremos que x es un vértice aislado si $x \in V \setminus \bigcup_{i \in I} e_i$.

En la Figura 1.7, el nodo x_{10} es un vértice aislado. Observemos que si $x \in V = \bigcup_{i \in I} e_i$ entonces el hipergrafo H no contiene vértices aislados, es decir que, todos los vértices pertenecen por lo menos a una hiperarista (Ver Figura 1.8).

Definición 1.3.4. Una hiperarista e en E , tal que $|e| = 1$, es llamado bucle.

Si en la Figura 1.7 definimos a e_6 como $\{x_{10}\}$ y $E' = E \cup \{e_6\}$, entonces, e_6 sería un bucle y la Figura 1.7 a) se vería como la Figura 1.10.

Dado que dos hipergrafos son iguales si y sólo si sus vértices y sus hiperaristas son iguales, el hipergrafo de la Figura 1.7 y el hipergrafo de la Figura 1.10 son distintos.

Definición 1.3.5. Dos vértices x, y en un hipergrafo H son adyacentes si hay una hiperarista que los contiene. En particular, x es adyacente a él mismo si existe la hiperarista $\{x\}$, es decir, existe el bucle $\{x\}$.

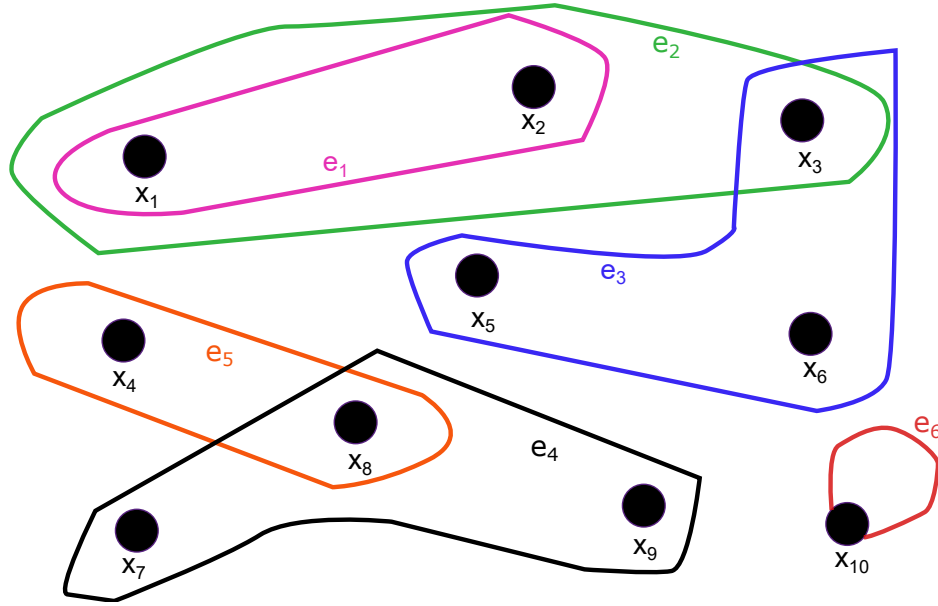


Figura 1.10: Hipergrafo H' con el bucle e_6 .

En la Figura 1.7, x_3 y x_5 son adyacentes, también x_3 con x_6 y x_5 con x_6 son todos adyacentes ya que todos pertenecen a la hiperarista e_3 , mientras que x_{10} y x_5 son no adyacentes, ya que no pertenecen a una misma hiperarista.

Definición 1.3.6. Dos hiperaristas e_i, e_j (para algún $i, j \in \mathbb{N}$) son incidentes si su intersección es no vacía.

Refiriéndonos nuevamente a la Figura 1.7, tenemos que las hiperaristas e_2 y e_3 son incidentes en el nodo x_3 mientras que las hiperaristas e_1 y e_4 son no adyacentes, ya que su intersección es vacía. De lo anterior denotamos al conjunto de hiperaristas incidentes en el vértice x como $H(x)$.

Sea $\{e_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$, una subfamilia de hiperaristas de E , es decir, $E' = \{e_j\}_{j \in J} \subseteq E$, entonces, definimos el conjunto de vértices que pertenecen a estas hiperaristas por $v(E) = \bigcup_{j \in J} e_j$ y observemos que $v(e)$ denota el conjunto de nodos que pertenecen a la hiperarista e , es decir, $v(e) = e$.

Consideremos el hipergrafo de la Figura 1.11 y sean $H = (V, E = (e_i)_{i \in I})$ un hipergrafo y $V' \subseteq V$, definimos entonces todo lo siguiente

- El hipergrafo parcial H' de H generado por $J \subseteq I$ (Ver Figura 1.12 a)), es el hipergrafo

$$H' = (V, (e_j)_{j \in J}).$$

- El subhipergrafo H' (Ver Figura 1.12 b)) es el hipergrafo definido como sigue

$$H' = (V', E' = (e_j)_{j \in J}),$$

donde para todo $e_j \in E' : e_j \subset V'$.

- El hipergrafo inducido H' de el hipergrafo H (Ver Figura 1.12 c) o d)), es el hipergrafo $H' = (V', E')$ definido como

$$E' = \{v(e_i) \cap V' \neq \emptyset : e_i \in E \text{ y cada } e_i \text{ es un bucle ó } |v(e_i) \cap V'| \geq 2\}.$$

Denotamos al hipergrafo inducido por $H[V']$ y decimos que V' induce o expande H' en H .

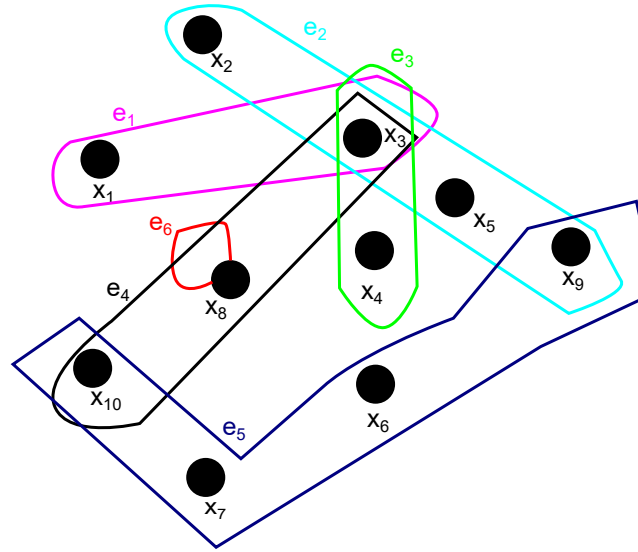


Figura 1.11: Hipergrafo $H = (V, E)$ con el bucle e_6 . $V = \{x_1, \dots, x_{10}\}$. $E = \{e_1, \dots, e_6\}$, donde $e_1 = \{x_1, x_3\}$, $e_2 = \{x_2, x_3, x_5, x_9\}$, $e_3 = \{x_3, x_4\}$, $e_4 = \{x_3, x_8, x_{10}\}$, $e_5 = \{x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$, $e_6 = \{x_8\}$.

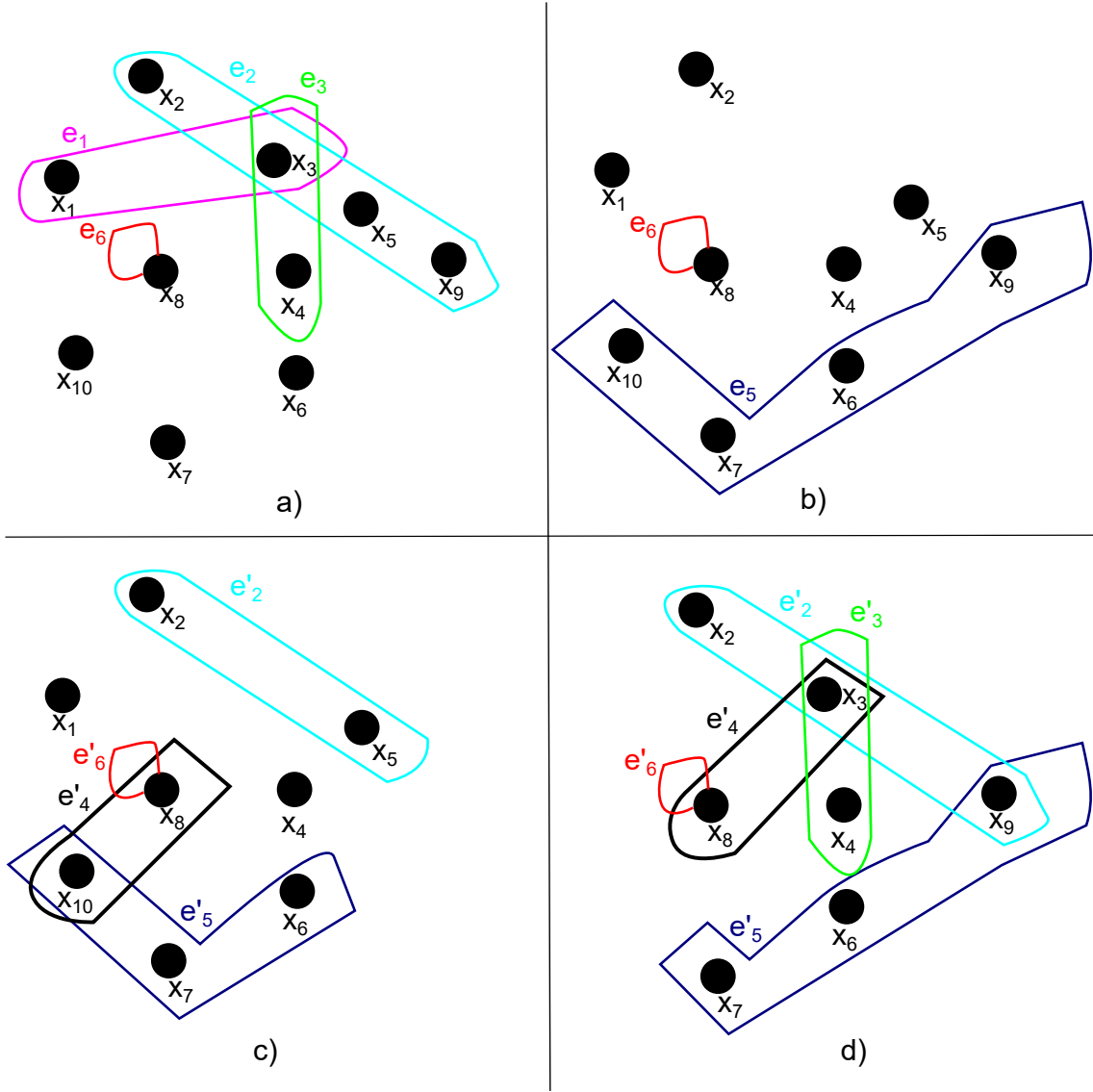


Figura 1.12: Hipergrafos contruidos a partir del hipergrafo H de la Figura 1.11. En a) un hipergrafo parcial generado por $J = \{1, 2, 3, 6\}$. En b) $V' = V \setminus \{x_3\}$ y $E' = \{e_5, e_6\}$. Observemos que las hiperaristas e_1, e_2, e_3 y e_4 no aparecen dado que x_3 pertenece a cada una de ellas pero no al conjunto de vértices V' . En c) el hipergrafo inducido por el conjunto de vértices $V' = V \setminus \{x_3, x_9\}$ y $E' = \{e'_2, e'_4, e'_5, e'_6\}$, donde $e'_1 = V' \cap v(e_1) = \{x_1\}$, $e'_2 = V' \cap v(e_2) = \{x_2, x_5\}$, $e'_3 = V' \cap v(e_3) = \{x_4\}$, $e'_4 = V' \cap v(e_4) = \{x_8, x_{10}\}$, $e'_5 = V' \cap v(e_5) = \{x_6, x_7, x_{10}\}$, $e'_6 = V' \cap v(e_6) = \{x_8\}$. Observemos que las 'hiperaristas' e'_1, e'_3 no aparecen dado que originalmente no son bucles o no tienen cardinalidad mayor o igual a dos, en cambio, la hiperarista e'_6 aparece porque es un bucle. En d) tenemos otro grafo inducido por el conjunto de vértices $V' = \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ y $E' = \{e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\}$, donde, usando el mismo procedimiento que en c) tenemos que $e'_2 = \{x_2, x_3, x_9\}$, $e'_3 = \{x_3, x_4\}$, $e'_5 = \{x_6, x_7, x_9\}$, $e'_6 = \{x_8\}$.

Observemos que el hipergrafo parcial toma como conjunto de nodos a todo el conjunto V y como conjunto de hiperaristas a un subconjunto de E (un subconjunto de hiperaristas contenidas en E), mientras que un subhipergrafo toma como conjunto de nodos a un subconjunto de V y cuyo conjunto de hiperaristas puede ser o bien un subconjunto de E o el conjunto vacío. Al hipergrafo parcial se le suele decir también que es un subhipergrafo. El hipergrafo inducido H' es un hipergrafo con vértices $V' \subseteq V(H)$ y cuyo conjunto de hiperaristas E' es distinto del vacío siempre que lo sea V' , además de que los elementos de E' son subconjuntos de las hiperaristas de E , es decir, no necesariamente $E' \subseteq E$.

Decimos que el hipergrafo H no contiene hiperaristas repetidas si $i \neq j \Leftrightarrow e_i \neq e_j$. Si esto ocurre se sigue lo siguiente

- El número de hiperaristas incidentes en el vértice x es $|E(x)|$ y lo denotaremos por $d_H(x)$ o simplemente $d(x)$.
- El grado mínimo del hipergrafo H es denotado por $\delta(H) = \min\{d(v) : v \in V\}$.
- El grado máximo del hipergrafo H es denotado por $\Delta(H) = \max\{d(v) : v \in V\}$.
- Decimos que el hipergrafo H es k – regular si para cada $v \in V : d(v) = k$.
- El rango del hipergrafo H es $r(H) = \max_{i \in I} |e_i|$.
- El co-rango del hipergrafo H es $cr(H) = \min_{i \in I} |e_i|$.
- Decimos que el hipergrafo H es k – uniforme si $r(H) = cr(H)$.

Observemos que en un grafo G , el co-rango y el rango coinciden y su valor es dos, de ahí que un grafo es 2-uniforme. Como ejemplo consideremos los hipergrafos de la Figura 1.13 y de la Figura 1.14.

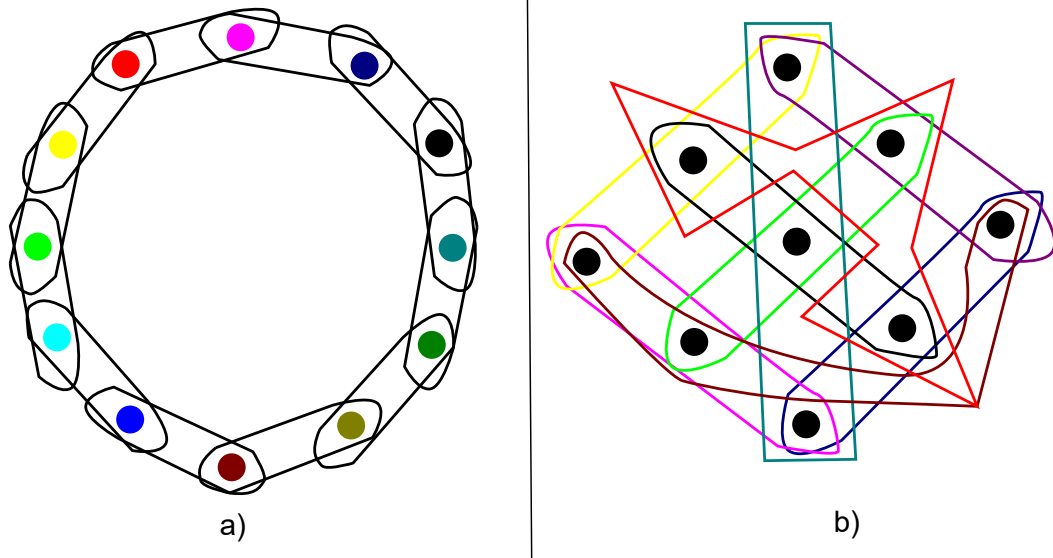
Definición 1.3.7. Sea $H=(V,E)$ un hipergrafo sin vértices aislados, un camino P en H de x a y , es una sucesión alternante de vértices e hiperaristas de la siguiente forma

$$x = x_1 e_1 x_2 e_2 \dots, x_s e_k x_{k+1} = y,$$

tal que

- x_1, x_2, \dots, x_{k+1} son vértices distintos con la posibilidad de que $x_1 = x_{k+1}$,
- e_1, e_2, \dots, e_k son hiperaristas distintas.

Figura 1.13: Hipergrafos k -uniformes



- (a) Hipergrafo 2-uniforme. La cardinalidad de cada hiperarista es 2
(b) Hipergrafo 3-uniforme. La cardinalidad de cada hiperarista es 3

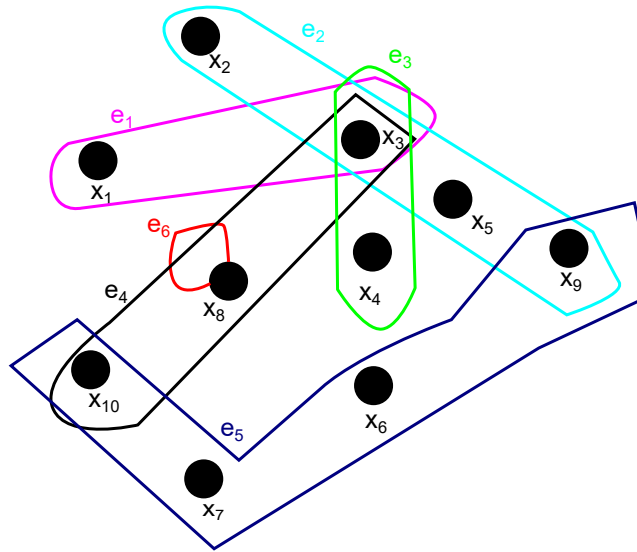


Figura 1.14: Hipergrafo de la Figura 1.11, para el cual tenemos todo lo siguiente: a) $d_H(x_3) = 4$, $d_H(x_8) = 1$, $d_H(x_{10}) = 2$, por decir algunos. b) Es fácil ver que $\delta(H) = 2$ y $\Delta(H) = 4$ (debido a que $d_H(x_3) = 4$). c) El rango de H es 4, que es la cardinalidad de e_5 y es la mayor de todas mientras que el co-rango de H es 1 debido a la cardinalidad del bucle e_6 . d) Observemos que el hipergrafo H no es k -regular ni k -uniforme.

- $x_i, x_{i+1} \in e_i \ (i=1,2,\dots,k)$.

y decimos que P conecta a x con y . El entero k es la longitud del camino P y notemos que, si hay un camino de x a y , entonces hay un camino de y a x .

Si $x = x_1 = x_{k+1} = y$, el camino es llamado ciclo y si es de longitud k este ciclo se denota por C^k .

Definición 1.3.8. Un hipergrafo H se dice que es conectado si todo par de vértices $x, y \in V$ están ligados por un camino P .

Un hipergrafo H es desconectado si no es conectado.

Definición 1.3.9. Sean x, y dos vértices de un hipergrafo, definimos la distancia de x a y como la mínima de las longitudes de los caminos que unen a x con y , la cual denotamos por $d(x, y)$. Si no hay tales caminos entonces se define $d(x, y) = \infty$.

La definición previa parece definir una métrica, sin embargo, no siempre lo es, debido a que podemos tener un bucle en el nodo x y con esto $d(x, x) = 1$.

Definición 1.3.10. Sea $H=(V, E)$ un hipergrafo, una componente conectada o conexa es un conjunto maximal de vértices $X \subset V$, tal que, para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \neq \infty$. Se denotan por C . Observemos que estas componentes, vistas como subhipergrafos de H , son hipergrafos conectados.

Las componentes conectadas de un subhipergrafo son importantes, debido a que muchos resultados de la teoría de hipergrafos bastan con probarse en tales componentes para probar su validez en todo el hipergrafo.

El diámetro de un hipergrafo H se define como la mayor distancia entre cualquier par de vértices de H , es decir

$$d(H) = \max\{d(x, y) : x, y \in V\}.$$

Podemos considerar el hipergrafo de la Figura 1.15 para ilustrar todos estos conceptos.

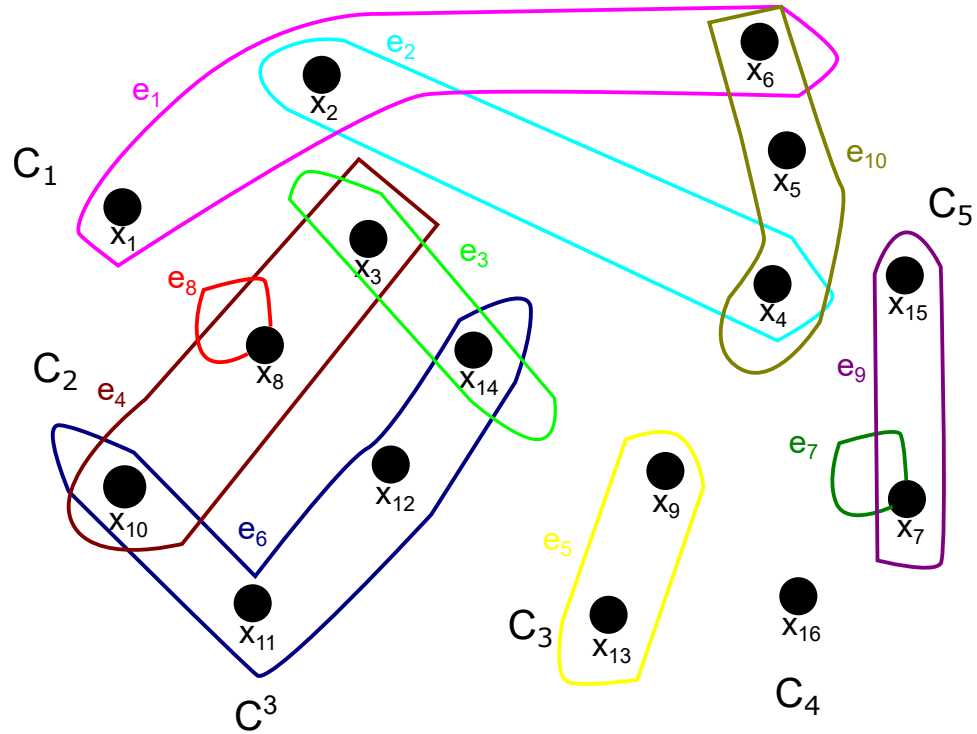


Figura 1.15: De este hipergrafo H podemos decir lo siguiente: a) Este hipergrafo H es un hipergrafo no conectado, es decir, desconectado. b) Este hipergrafo contiene cinco componentes, a saber, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 . c) $P = x_1 e_1 x_6 e_{10} x_4$, $P' = x_1 e_1 x_2 e_2 x_4$ son dos caminos de x_1 a x_4 y $d(x_1, x_4) = 2$. d) $P = x_1 e_1 x_2 e_2 x_4 e_{10} x_6$ es un camino de x_1 a x_6 de longitud tres y $P' = x_1 e_1 x_6$ es un camino de x_1 a x_6 de longitud uno, más aún, $d(x_1, x_6) = 1$. e) La componente C_2 es un ciclo de longitud tres (C^3). f) Tenemos que $d(x_{16}, x_1) = \infty$, por ende, $d(H) = \infty$, es decir, el diámetro de H es infinito.

Definición 1.3.11. Un hipergrafo H es completo si $H = (V, E = \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\})$.

La definición previa quiere decir que un hipergrafo completo es aquel hipergrafo que tiene por conjunto de aristas a todos los subconjuntos de V .

Definición 1.3.12. Sea H un hipergrafo en el que $|V| = n$, un hipergrafo k -uniforme completo, para $2 \leq k \leq n$, es un hipergrafo que tiene a todos sus k -subconjuntos como hiperaristas y lo denotamos por K_n^k .

Como ejemplo de estas dos últimas definiciones consideremos los hipergrafos de la Figura 1.16.

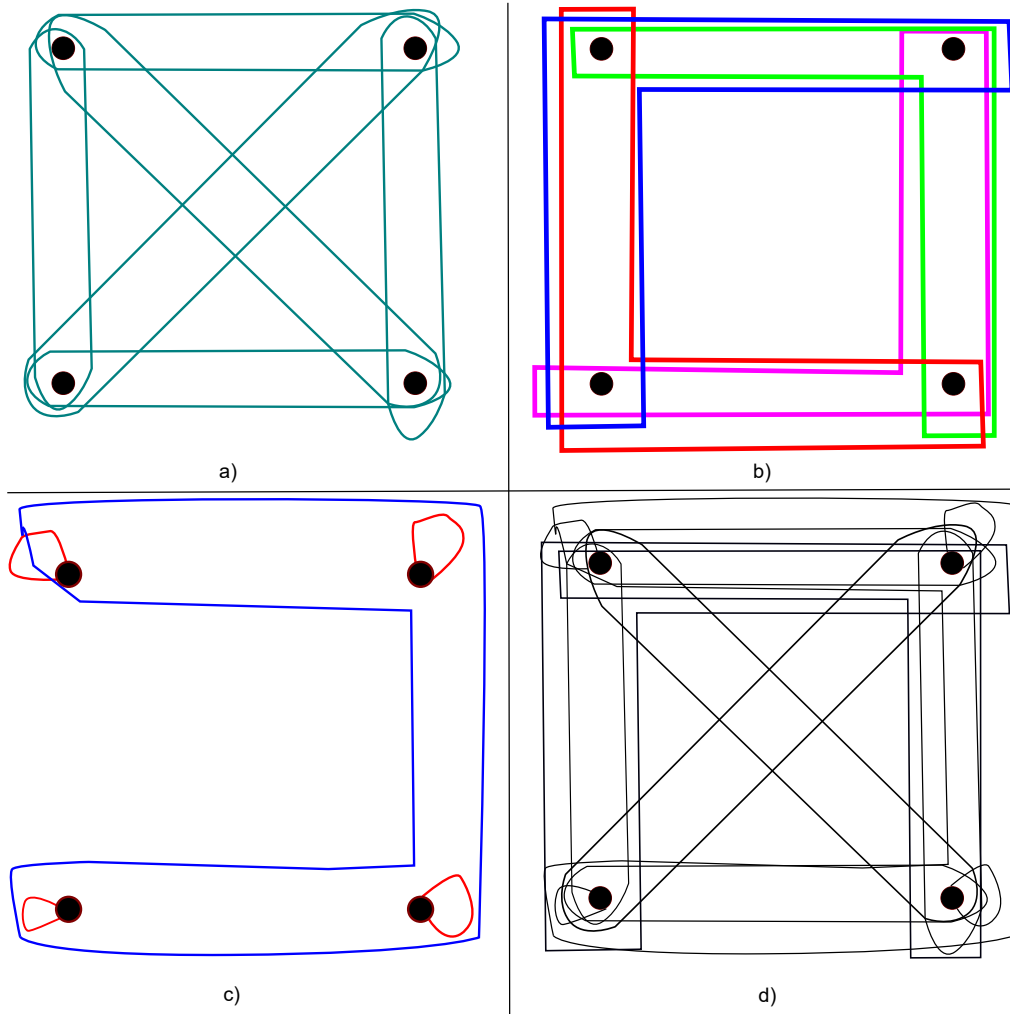


Figura 1.16: a) Hipergrafo 1-regular, 2-uniforme y es un K_4^2 . b) Hipergrafo 1-regular, 3-uniforme y es un K_4^3 . c) Hipergrafo 1-regular y es un K_4^4 . Si los bucles no estuvieran, entonces, el hipergrafo sería 4-regular. d) Hipergrafo completo de 4 vértices. Observemos que son 4 vértices donde las hiperaristas son la unión de las hiperaristas en a), b) y c).

Terminamos la presente sección definiendo dos conceptos muy utilizados en hipergrafos: la matriz de incidencia y la matriz de adyacencia.

Definición 1.3.13. Sean $G=(V,E)$ un hipergrafo, con $V = \{x_1, x_2, \dots, v_n\}$ el conjunto de nodos, $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ el conjunto de hiperaristas y sin vertices aislados. Definimos en H la matriz de incidencia $A = (a_{ij})$, como sigue

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in e_j \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Ejemplo 1.3.14. Consideremos el hipergrafo de la Figura 1.11, donde $V = \{x_1, \dots, x_{10}\}$, entonces la matriz de incidencia de H es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Es fácil ver que la matriz de incidencia de cualquier subhipergrafo de H , así como de cualquier hipergrafo parcial y cualquier subhipergrafo inducido es una submatriz de la matriz de incidencia de H , lo cual puede consultar en [10, pags. 7-9].

Ejemplo 1.3.15. Si ahora consideramos la Figura 1.12, entonces las matrices de incidencia de estos cuatro hipergrafos son las siguientes (quitando los nodos aislados de cada uno).

- Matriz del hipergrafo de la Figura 1.12 a) sin x_6 , sin x_7 y sin x_{10} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 1 & 1 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

- Matriz del hipergrafo de la Figura 1.12 b) sin los nodos x_1, x_2, x_4, x_5 .

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 1 \\ * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

- *Matriz del hipergrafo de la Figura 1.12 c) sin los nodos x_1 y x_4 .*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 0 & * & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

- *Matriz del hipergrafo de la Figura 1.12 d) .*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Definición 1.3.16. Sea $H = (V, E)$ un hipergrafo, la matriz de adyacencia $A(H)$ de H , se define para cada $x, y \in V : x \neq y$, la entrada $a_{x,y} = |\{e \in E : x, y \in e\}|$ y $a_{x,x} = 0$.

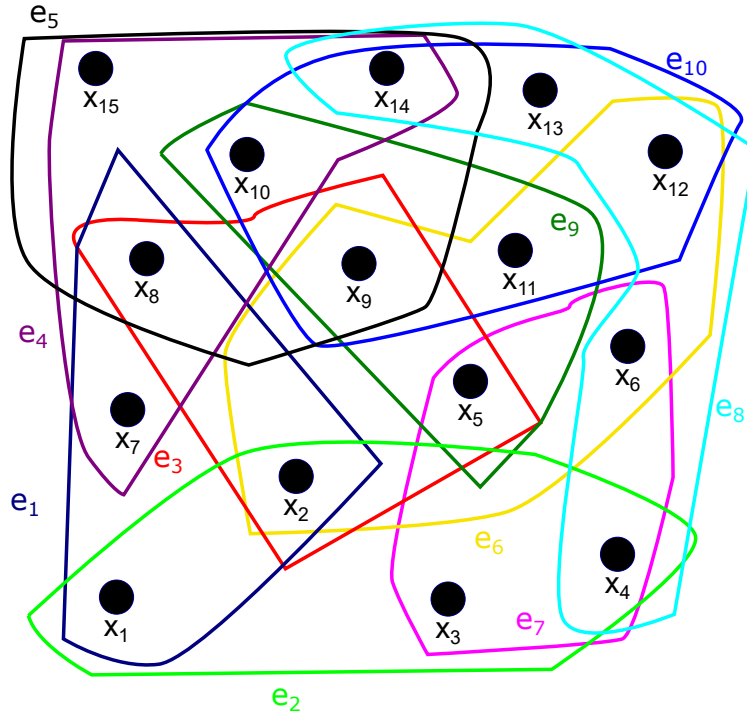


Figura 1.17: Hipergrafo H con 10 hiperaristas y 15 nodos.

Ejemplo 1.3.17. Consideremos el hipergrafo de la Figura 1.17, constituido por $V = \{x_1, \dots, x_{15}\}$ el conjunto de nodos y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ el conjunto de aristas, donde $e_1 = \{x_1, x_2, x_7, x_8\}$, $e_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $e_3 = \{x_2, x_5, x_8, x_9\}$, $e_4 = \{x_7, x_8, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$, $e_5 = \{x_8, x_9, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$, $e_6 = \{x_2, x_5, x_6, x_9, x_{11}, x_{12}\}$, $e_7 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $e_8 = \{x_4, x_6, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$, $e_9 = \{x_5, x_9, x_{10}, x_{11}\}$ y $e_{10} = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$, entonces, la matriz de adyacencia se construye de la siguiente manera

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_1	0	2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	2	0	1	1	2	1	1	2	2	0	1	0	0	0	0
x_3	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	1	2	0	1	2	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_5	0	2	1	1	0	2	0	1	3	1	2	1	0	0	0
x_6	0	1	1	2	2	0	0	0	1	0	1	2	1	1	0
x_7	1	1	3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1
x_8	1	2	0	0	1	0	2	0	2	2	0	0	0	2	2
x_9	0	2	0	0	3	1	0	2	0	3	3	2	1	2	1
x_{10}	0	0	0	0	1	0	0	2	3	0	2	1	1	3	2
x_{11}	0	1	0	0	2	1	0	0	3	2	0	2	1	1	0
x_{12}	0	0	0	1	1	2	0	0	2	1	2	0	2	2	0
x_{13}	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	2	0	2	0
x_{14}	0	0	0	1	0	1	1	2	2	3	1	2	2	0	2
x_{15}	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	0	0	0	2	0

resultando la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

Geometría y operadores geométricos

Antes de tratar con la morfología sobre grafos e hipergrafos, necesitamos introducir las bases de la morfología matemática clásica y para esto necesitamos retomar algunos conceptos básicos de geometría. Para mayor detalle puede consultar [12].

2.1. Nociones en Geometría

Iniciamos esta sección recordando lo que entendemos por una transformación del plano en el plano.

Definición 2.1.1. Una transformación del plano \mathbb{R}^2 en el plano \mathbb{R}^2 es una función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir, se define como una relación en la que se asigna a cada punto del plano un único punto en el plano.

Observemos que si A es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , la imagen de A bajo la transformación T (antes mencionada) se denota por $T(A)$ y se define como:

$$T(A) = \{T(a) : a \in A\}.$$

Es costumbre denotar esta transformación por la letra T . [12, pág. 93]. Una vez retomado este concepto, procedemos a definir dos operaciones para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Definición 2.1.2. La reflexión de un conjunto B , denotado por B^* , es definido como sigue

$$B^* = \{w | w = -b, b \in B\}.$$

Se sigue fácilmente que $B = (B^*)^*$, ya que todo b en B se puede escribir como $-(b)$.

Definición 2.1.3. *La traslación de un conjunto A por un punto $z_0 = (x_0, y_0)$, denotado por $(A)_{z_0}$, es definido como*

$$(A)_{z_0} = \{w | w = a + z_0, a \in A\},$$

El elemento z_0 es llamado vector de traslación.

Observemos que la reflexión de B y la traslación de A son transformaciones en el plano aplicadas a cada punto de a y b , respectivamente, lo cual podemos ver enseguida.

- Si definimos a T_1 como $T_1(u) = -u$, para cada u en cualquier subconjunto B de \mathbb{R}^2 , entonces obtenemos la reflexión del conjunto B .
- Sea z_0 un punto fijo de \mathbb{R}^2 , si definimos T_2 como $T_2(u) = z_0 + u$, para cada u en A , con A subconjunto de \mathbb{R}^2 , entonces obtenemos la traslación de A por el vector z_0 .

Veamos algunos ejemplos de la traslación y reflexión de un objeto geométrico.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos el cuadrado B determinado por los segmentos de recta (sus lados) L_1, L_2, L_3, L_4 , donde $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 1 \leq y \leq 3\}$, $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3, 1 \leq x \leq 3\}$, $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3, 1 \leq y \leq 3\}$ y $L_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, 1 \leq x \leq 3\}$. Entonces, para determinar la imagen de B bajo la transformación T (hallar B^*), se puede hacer lo siguiente.*

Primero observemos que el cuadrado B se puede escribir como

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\},$$

dado que $T(u) = -u$, entonces $(x', y') = T(x, y) = -(x, y) = (-x, -y)$, de ahí que $x' = -x$, $y' = -y$, por lo tanto $-x' = x$, $-y' = y$, de ahí tenemos que

$$\begin{aligned} B^* &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq -x' \leq 3, 1 \leq -y' \leq 3\} \\ &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x' \leq -1, -3 \leq y' \leq -1\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

que no es otra cosa más que el cuadrado B^ cuyos lados son $L_1^* = \{(x', y') : x' = -1, -3 \leq y' \leq -1\}$, $L_2^* = \{(x', y') : y' = -3, -3 \leq x' \leq -1\}$, $L_3^* = \{(x', y') : x' = -3, -3 \leq y' \leq -1\}$ y $L_4^* = \{(x', y') : y' = -1, -3 \leq x' \leq -1\}$ (Ver Figura 2.1).*

Consideremos ahora el cuadrilátero B determinado por los segmentos de recta (sus lados) L_1, L_2, L_3, L_4 , donde $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -3, 1 \leq y \leq 6\}$, $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 0, 5 \leq y \leq 6\}$, $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 5\}$ y $L_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$. Entonces, para determinar la imagen de B bajo la transformación T (hallar B^*), se determina primero la imagen de cada lado de B .

Ya sabemos que $-x' = x$, $-y' = y$, de ahí que, tenemos lo siguiente para cada lado de B .

- Para L_1 . $T(L_1) = \{T(x, y) : x, y \in L_1\} = \{T(x, y) : x = 1, 1 \leq y \leq 3\} = \{(x', y') : -x' = 1, 1 \leq -y' \leq 3\} = \{(x', y') : x' = -1, -3 \leq y' \leq -1\} = L_1^*$.
- Para L_2 . $T(L_2) = \{T(x, y) : y = 3, 1 \leq x \leq 3\} = \{(x', y') : y' = -3, -3 \leq x' \leq -1\} = L_2^*$.
- Para L_3 . $T(L_3) = \{T(x, y) : x = 3, 1 \leq y \leq 3\} = \{(x', y') : x' = -3, -3 \leq y' \leq -1\} = L_3^*$.
- Para L_4 . $T(L_4) = \{T(x, y) : y = 3, 1 \leq x \leq 3\} = \{(x', y') : y' = -1, -3 \leq x' \leq -1\} = L_4^*$.

Una vez hecho esto, se concluye que $T(B)$ ó B^* , es el conjunto de todos los puntos u' dentro del cuadrilátero determinado por los segmentos de recta L_1^*, L_2^*, L_3^* y L_4^* (Ver Figura 2.1).

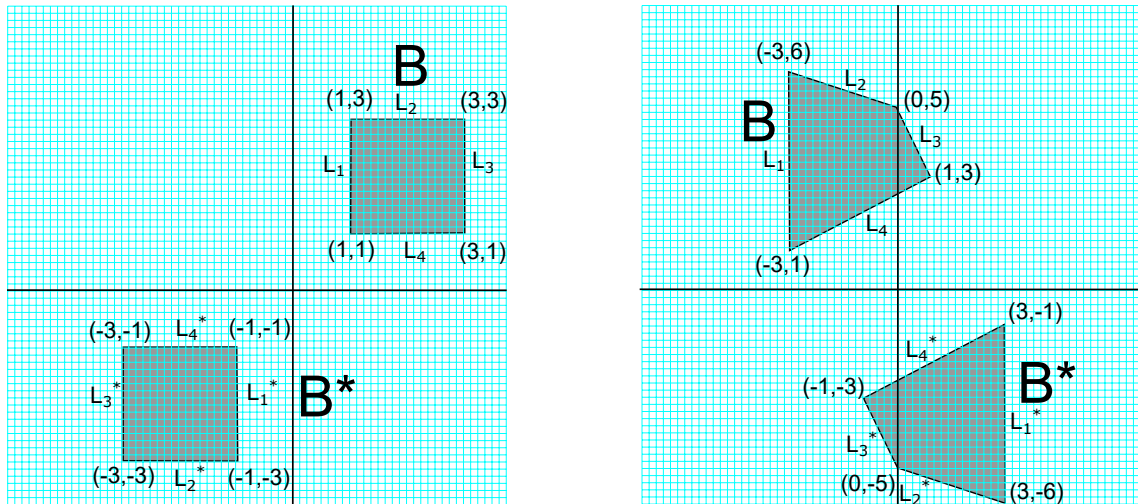


Figura 2.1: Ejemplo de dos conjuntos B y B^* . Del lado izquierdo el conjunto B , donde sus cuatro lados quedan determinados por los puntos $(1,3)$, $(1,1)$, $(3,3)$ y $(3,1)$. Del lado derecho el conjunto B , donde sus cuatro lados quedan determinados por los puntos $(-3,1)$, $(-3,6)$, $(0,5)$ y $(1,3)$.

Podría ocurrir que B sea igual a B^* como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos el círculo $B = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq d^2\}$. Deseamos obtener B^* , lo cual se hace de la siguiente manera.

Sabemos que $-x' = x, -y' = y$, además, dado que $(-x')^2 = x'^2$ se sigue que

$$\begin{aligned} T(B) &= \{T(x, y) : x, y \in B\} = \{(x', y') : 0 \leq \{-x'\}^2 + \{-y'\}^2 \leq d^2\} \\ &= \{(x', y') : 0 \leq x'^2 + y'^2 \leq d^2\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

por lo que obtenemos que $B = B^*$ (Ver Figura 2.2 lado izquierdo).

De igual forma podemos hacer lo mismo con un cuadrado centrado en el origen de longitud de lado d (Ver Figura 2.2 lado derecho).

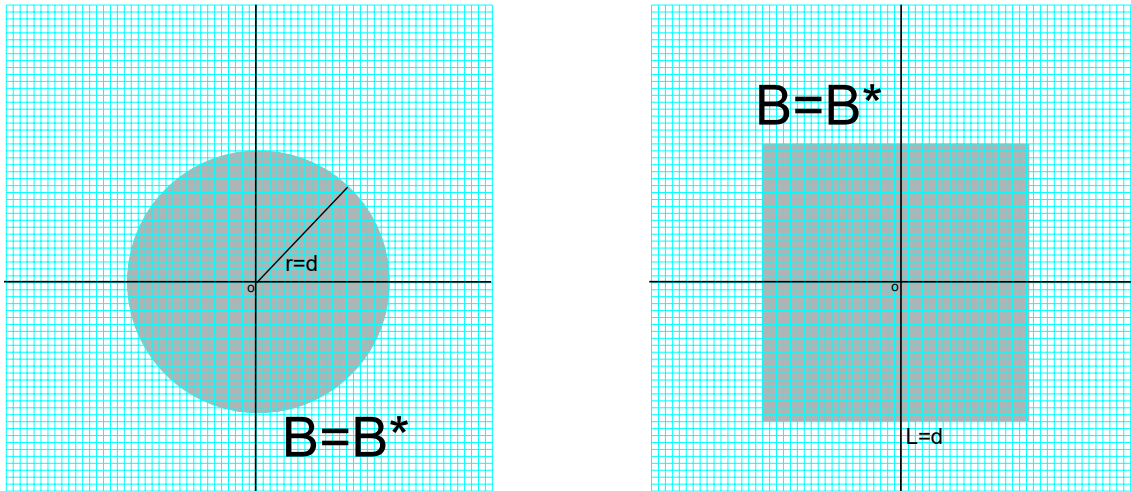


Figura 2.2: Dos conjuntos en los que $B = B^*$, observe que ambos se encuentran centrados en el origen. Del lado izquierdo un círculo de radio d . Del lado derecho un cuadrado de longitud de lado d .

De igual forma podemos calcular analíticamente el desplazamiento de un conjunto B .

Ejemplo 2.1.6. Consideremos un círculo B de radio d , con centro en $c = (2, -1)$, con los puntos de traslación $p = (-10, -15)$, $q = (15, -15)$ y $r = (20, 10)$ (Figura 2.3 a). Para p tenemos que $T(u) = u + p$, de donde $(x', y') = T(x, y) = (x, y) + (-10, -15)$, de ahí que $x = x' + 10$, $y = y' + 15$, por tanto tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T(B) &= \{T(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq d^2\} \\ &= \{(x', y') : 0 \leq (x' + 10)^2 + (y' + 15)^2 \leq d^2\} \\ &= (B)_p, \end{aligned} \quad (2.3)$$

lo cual es un círculo de radio d con centro en $(-10, -15) = p$ (Ver Figura 2.3 c)).

Se puede verificar también que

- Para $q = (15, -15)$, $(B)_q = \{(x', y') : 0 \leq x' - 15^2 + y' + 15^2 \leq d^2\}$,

lo cual es un círculo de radio d y con centro en $(15, -15) = q$ (Ver Figura 2.3 d)).

- Para $r = (20, 10)$, $(B)_r = \{(x', y') : 0 \leq x' - 20^2 + y' - 10^2 \leq d^2\}$,

lo cual es un círculo de radio d y con centro en $(20, 10) = q$ (Ver figura 2.3 b)).

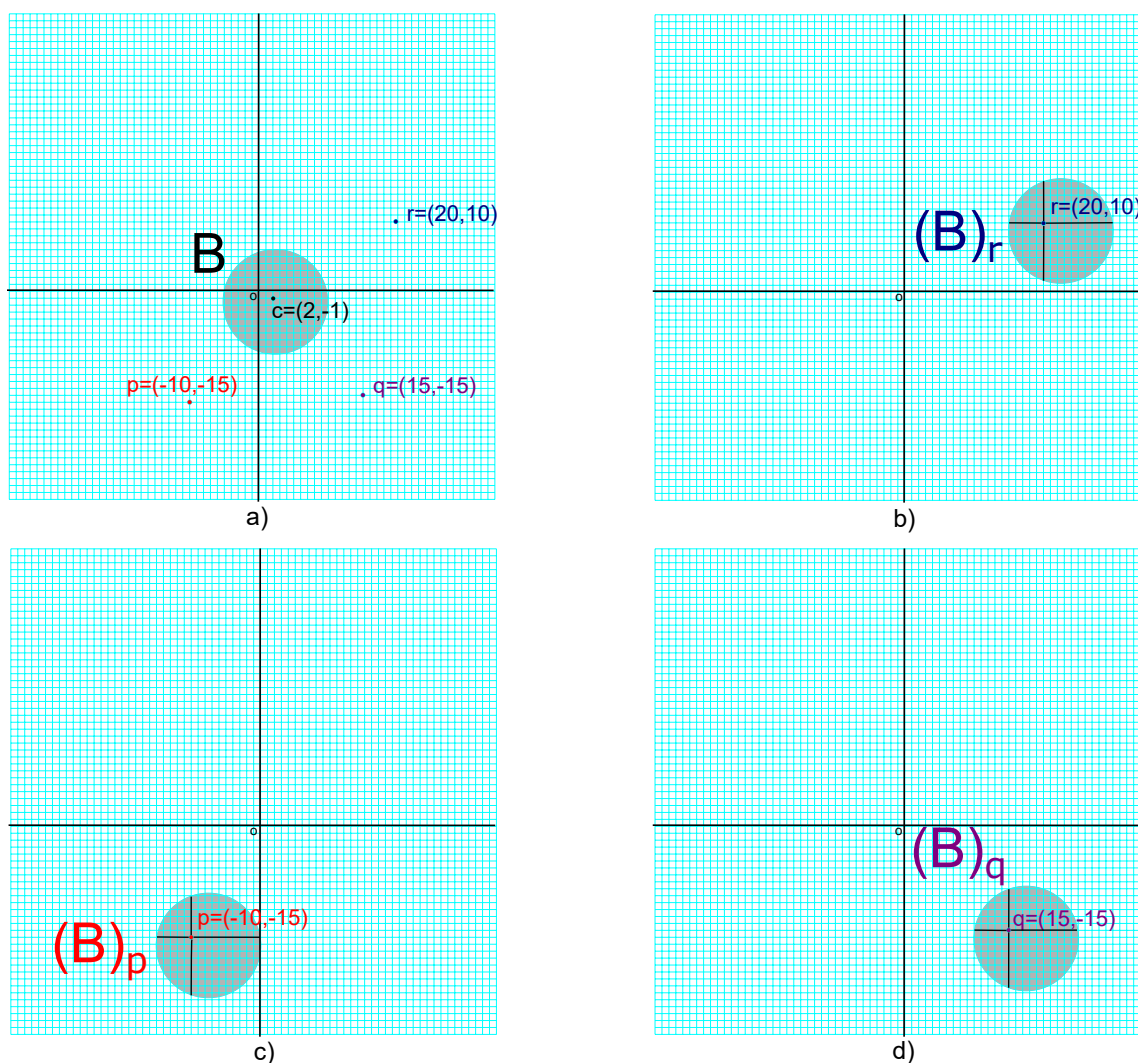


Figura 2.3: a) Conjunto B y sus distintos desplazamientos por los puntos p , q y r . b) Desplazamiento de B por el vector r y el vector r . c) Desplazamiento de B por el vector p y el vector p . d) Desplazamiento de B por el vector q y el vector q .

Ejemplo 2.1.7. Consideremos el cuadrilátero formado por los segmentos de recta (sus lados) L_1, L_2, L_3, L_4 , donde $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -3, 1 \leq y \leq 6\}$, $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 0, 5 \leq y \leq 6\}$, $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 5\}$, $L_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$ y los puntos de traslación $p = (-2, -3)$, $q = (5, -5)$ y $r = (4, 1)$ (Figura 2.4 a)). Para p tenemos que $T(u) = u + p$, de donde $(x', y') = T(x, y) = (x, y) + (-2, -3)$, de ahí que $x = x' + 2$, $y = y' + 3$, por tanto tenemos lo siguiente

- $T(L_1) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' + 2 = -3, 1 \leq y' + 3 \leq 6\} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = -5, -2 \leq y' \leq 3\} = (L_1)_p$.
- $T(L_2) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x' + 2 \leq 0, 5 \leq y' + 3 \leq 6\} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x' \leq -2, 2 \leq y' \leq 3\} = (L_2)_p$.
- $T(L_3) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x' + 2 \leq 1, 3 \leq y' + 3 \leq 5\} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x' \leq -1, 0 \leq y' \leq 2\} = (L_3)_p$.
- $T(L_4) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x' + 2 \leq 1, 1 \leq y' + 3 \leq 3\} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x' \leq -1, -2 \leq y' \leq 0\} = (L_4)_p$.

Una vez hecho esto, se concluye que $T(B)$ ó $(B)_p$, es el conjunto de todos los puntos u' dentro del cuadrilátero determinado por los segmentos de recta $(L_1)_p, (L_2)_p, (L_3)_p$ y $(L_4)_p$ (Figura 2.4 c)). De igual forma se puede hacer para q y r , obteniendo así $(B)_q$ (Figura 2.4 d)) y $(B)_r$ (Figura 2.4 b)).

Ejemplo 2.1.8. Consideremos el cuadrado centrado en el origen, delimitado por los segmentos de recta L_1, L_2, L_3 y L_4 , con los vectores de desplazamiento $p = (-2, -3)$, $q = (5, -5)$ y $r = (4, 1)$ (Ver Figura 2.5 a)). La forma de calcular $(B)_r$ (Figura 2.5 b)), B_p (Figura 2.5 c)) y B_q (Figura 2.5 d)) es como en el ejemplo previo del cuadrilátero, o bien, ir describiendo al cuadrado como se le hizo en la Figura 2.1 y aplicar T para obtener así estos resultados.

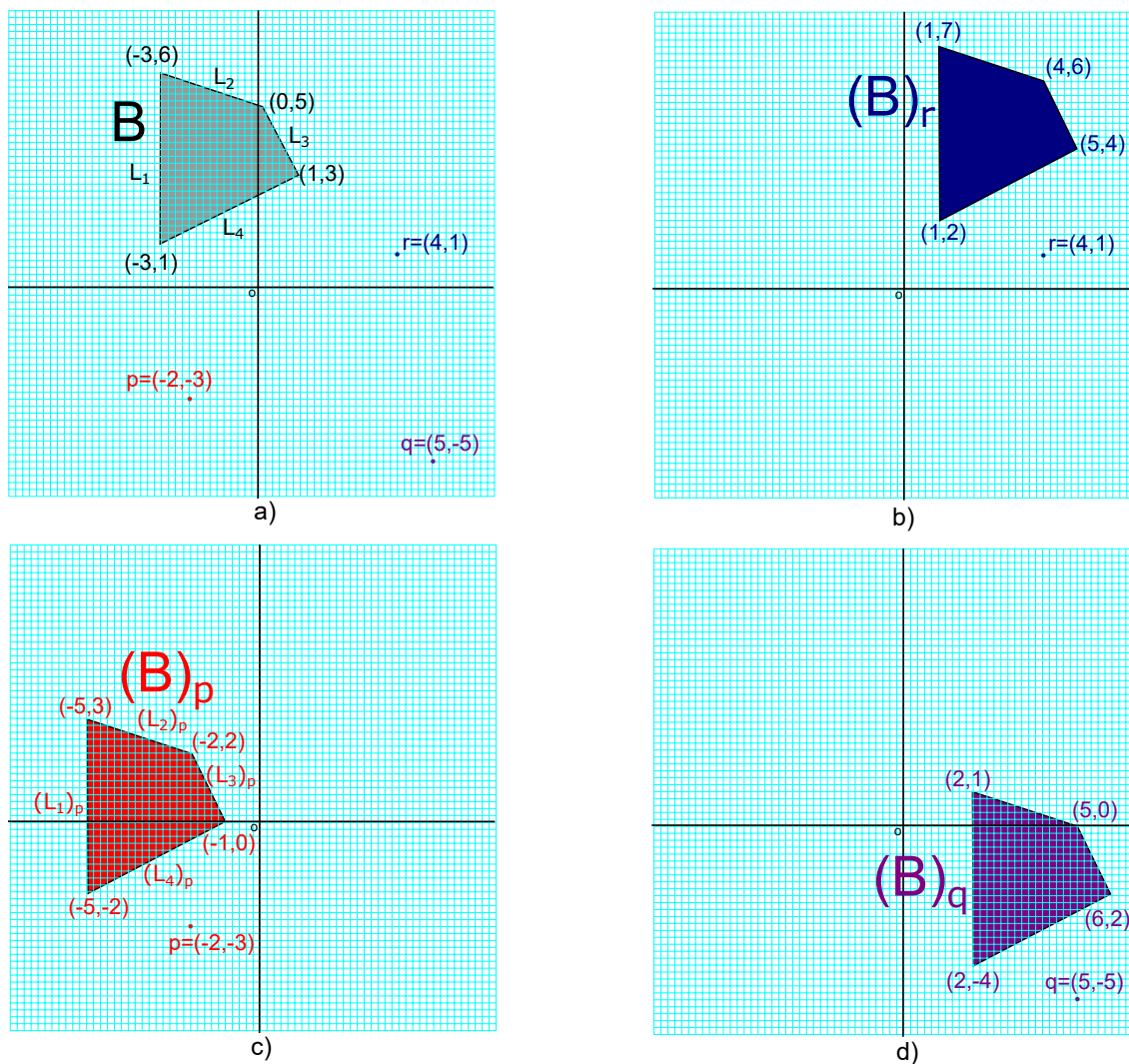


Figura 2.4: a) Conjunto B y sus distintos desplazamientos por los puntos p , q y r . b) Desplazamiento de B por el vector r y el vector r . c) Desplazamiento de B por el vector p y el vector p . d) Desplazamiento de B por el vector q y el vector q .

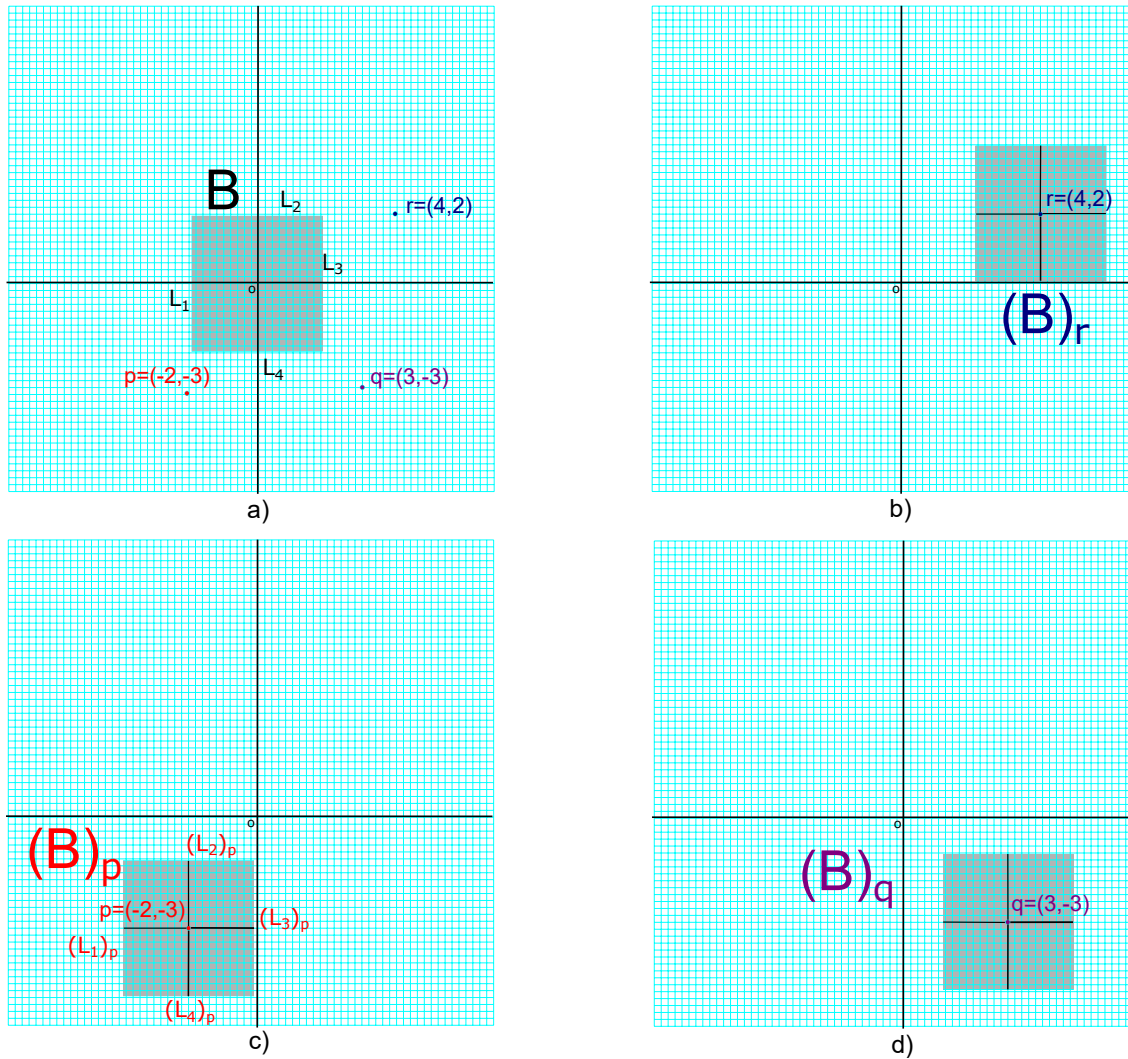


Figura 2.5: a) Conjunto B y sus distintos desplazamientos por los puntos p , q y r . b) Desplazamiento de B por el vector r y el vector r . c) Desplazamiento de B por el vector p y el vector p . d) Desplazamiento de B por el vector q y el vector q .

Antes de ingresar a la siguiente sección, es necesario hacer las siguientes observaciones.

- La Figura 2.3 y la Figura 2.5 tienen en común que, dado B y sus vectores de desplazamiento $(p, q$ y $r)$, se tiene que los vectores de desplazamiento quedan contenidos dentro de $(B)_p$, $(B)_q$ y $(B)_r$ (respectivamente), caso contrario en la Figura 2.4.
- En particular, en la Figura 2.5 podemos observar que el cuadrado se encuentra centrado en el origen y obtenemos cuadrados centrados al ser desplazados por cada vector de desplazamiento.

La primera observación se debe a que el origen, $o = (0, 0)$, está contenido en B , lo cual podemos verificar con el siguiente Lema.

Lema 2.1.9. *Sean B cualquier subconjunto de \mathbb{R}^2 y z_0 un punto fijo de \mathbb{R}^2 , si el origen está contenido en B , entonces z_0 queda contenido en $(B)_{z_0}$.*

Demostración. Dado que $o \in B$ y $z_0 = o + z_0$, se sigue que $z_0 \in (B)_{z_0}$.

Más aún, para cualquier subconjunto C de \mathbb{R}^2 , si $z_0 \in C$, entonces $(B)_{z_0} \cap C \neq \emptyset$. □

Una última observación es que si $o \in B$ entonces $o \in B^*$ pues $o = (0, 0) = (-o, -o) = -o$.

2.2. Dilatación

Con las operaciones vistas en la sección previa podemos definir las siguientes operaciones morfológicas clásicas fundamentales, a saber, dilatación, erosión, apertura y cierre, las cuales puede consultar ampliamente en [7] y [9].

Definición 2.2.1. *Dados A y B subconjuntos de \mathbb{R}^2 , con $o = (0, 0) \in B$, la dilatación de A por B se define como sigue*

$$A \oplus B = \{z \mid (B^*)_z \cap A \neq \emptyset\}.$$

Esta definición es válida por el Lema 2.1.9. previo y su posterior observación. Este mismo Lema también nos permite demostrar lo siguiente.

Proposición 2.2.2. $A \subseteq A \oplus B$.

Demostración. Sea $a \in A$, como $o \in B$, entonces por el Lema previo tenemos que $(B)_a \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $a \in A \oplus B$. □

La dilatación de A por B resulta ser el conjunto de todos los z que, al desplazar a B^* con estos vectores, tenemos que la intersección de $(B^*)_z$ con A es no vacía. El conjunto B es llamado elemento estructurante de la dilatación. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos como elemento estructurante un cuadrado B centrado en el origen, de longitud de lado $l = d/4$ y consideremos también los puntos p, q, r y s (sus esquinas), con las siguientes componentes: $p = (-d/8, d/8)$, $q = (d/8, d/8)$, $r = (d/8, -d/8)$ y $s = (-d/8, -d/8)$. Observemos que podemos describir a B como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -d/8 \leq x \leq d/8, -d/8 \leq y \leq d/8\}$ (Ver Figura 2.6 a)).

Consideremos ahora al cuadrado A, centrado en el punto $C = (18, 0)$, de longitud de lado $L = d$ y los puntos p_1, q_1, r_1 y s_1 (sus esquinas), con las siguientes componentes: $p_1 = (18 - d/2, d/2)$, $q_1 = (18 + d/2, d/2)$, $r_1 = (18 + d/2, -d/2)$ y $s_1 = (18 - d/2, -d/2)$. Observemos que podemos describir a A como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 18 - d/2 \leq x \leq 18 + d/2, -d/2 \leq y \leq d/2\}$ (Ver Figura 2.6 b)).

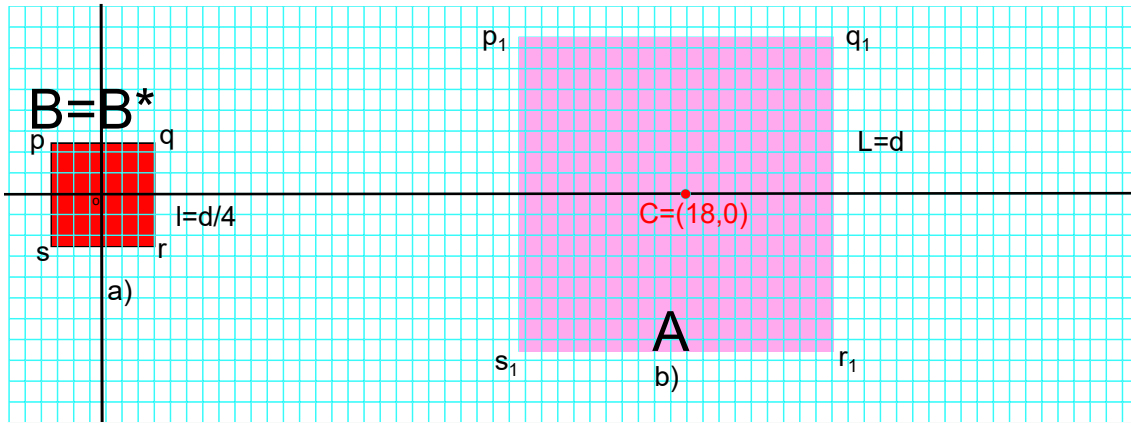


Figura 2.6: Conjunto A y su elemento estructurante B. a) Cuadrado estructurante B centrado en el origen, de longitud de lado $l = d/4$ y sus cuatro puntos (esquinas). b) Cuadrado A centrado en C, de longitud de lado $L = d$ y sus cuatro puntos (esquinas).

Procedemos a calcular $A \oplus B$ (Ver Figura 2.7). Tenemos que hallar todos los puntos z de tal forma que, desplazando a B^* ($B = B^*$) con estos puntos, la intersección de B^* con A sea distinta del vacío.

Ya sabemos que A queda contenido en $A \oplus B$, es decir, que todo punto en A hace que la intersección de A con B sea distinta del vacío, por lo que tenemos que buscar puntos fuera de A.

Coloquemos los siguientes puntos (vectores de desplazamiento) en A: $z_1 = (18 - d/2, 0)$, $z_2 = (18, d/2)$, $z_3 = (18 + d/2, 0)$ y $z_4 = (18, -d/2)$, con su respectivo desplazamiento hacia B^* , $(B^*)_{z_1}$, $(B^*)_{z_2}$, $(B^*)_{z_3}$ y $(B^*)_{z_4}$. Como B se encuentra centrado en el origen, entonces B queda centrado en cada punto z_1 , z_2 , z_3 y z_4 , es decir, $(B^*)_{z_1}$, $(B^*)_{z_2}$, $(B^*)_{z_3}$ y $(B^*)_{z_4}$ tienen por centro sus

vectores de desplazamiento (Ver Figura 2.7 a)). Más aún, como los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 están en el borde del cuadrado, la mitad de estos cuadrados $((B^*)_{z_1}, (B^*)_{z_2}, (B^*)_{z_3}$ y $(B^*)_{z_4})$ quedan fuera de A y la otra mitad dentro. Esto es importante, dado que esto nos permite observar que puntos tomar fuera de A (que tanto podemos alejarnos de A) de tal forma que al desplazar B^* por estos puntos, la intersección de B^* con A sea distinto del vacío, y, esto es que, tanto el borde de A como el borde de B^* se intersecten. Para que esto suceda, sólo podemos sacar el cuadrado otra mitad, es decir, si el cuadrado completo mide de lado $d/4$, entonces, sólo podemos sacarlo o situar puntos a una distancia de $(d/4)/2 = d/8$ con respecto al borde de A . Algunos puntos (vectores de desplazamiento) son los siguientes: $z_1^* = z_1 - (d/8, 0) = (18 - d/2 - d/8, 0)$, $z_2^* = z_2 + (0, d/8) = (18, d/2 + d/8)$, $z_3^* = z_3 + (d/8, 0) = (18 + d/2 + d/8, 0)$ y $z_4^* = z_4 - (0, d/8) = (18, -d/2 - d/8)$. Cada uno de estos vectores de desplazamiento hacen que B^* quede centrado en ellos e intersectando el borde (externo) de A , sin embargo, hay más puntos fuera de A que hacen que B^* quede tocando el borde de A . Si nos fijamos en z_1^* y nos movemos en su componente y , estaremos recorriendo y tomando puntos sobre la recta $x = 18 - d/2 - d/8$, en donde cada punto es un vector de desplazamiento y centro para B^* , sin embargo, no todos los puntos sobre esta recta cumplen con que, al desplazar B^* con estos puntos, hagan que la intersección de B^* con A sea distinto del vacío. Podemos, por ejemplo, recorrer la recta $x = 18 - d/2 - d/8$ hacia las componentes negativas y tomar como último punto al punto que haga que s_1 toque la esquina del cuadrado B^* (Ver Figura 2.7 b)). Para hallar tal punto, nos fijamos en la componente y de s_1 y nos bajamos sobre esta componente una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado B^* , a saber $d/8$, localizándonos en el punto con coordenadas $(18 - d/2, -d/2 - d/8)$ y luego nos movemos a la izquierda, sobre su componente x la misma longitud (llegando así al centro de $(B^*)_{s_1}$), obteniendo así el punto deseado: $s_1^* = (18 - d/2 - d/8, -d/2 - d/8)$, es decir, el punto del cual ya no podemos alejarnos más sobre la recta $x = 18 - d/2 - d/8$ en componentes negativas, de lo contrario, cualquier punto tomado ocasionaría que la intersección de A con B^* sea vacía. Similarmente se puede hacer ésto con p_1, q_1 y r_1 , logrando así hallar los puntos $p_1^* = (18 - d/2 - d/8, d/2 + d/8)$, $q_1^* = (18 + d/2 + d/8, d/2 + d/8)$ y $r_1^* = (18 + d/2 + d/8, -d/2 - d/8)$ (Ver Figura 2.7 c)), los cuales nos permiten describir a $A \oplus B$ como el (cuadrado) conjunto $\{(x, y) : 18 - d/2 - d/8 \leq x \leq 18 + d/2 + d/8, -d/2 - d/8 \leq y \leq d/2 + d/8\}$ (Ver Figura 2.7 d)).

Observemos que, en resumen, el cuadrado A creció de cada lado una longitud de $d/8$, que es la mitad de la longitud del cuadrado B .

La idea principal del ejemplo anterior fue hallar todos los puntos fuera de A , de tal forma que el cuadrado

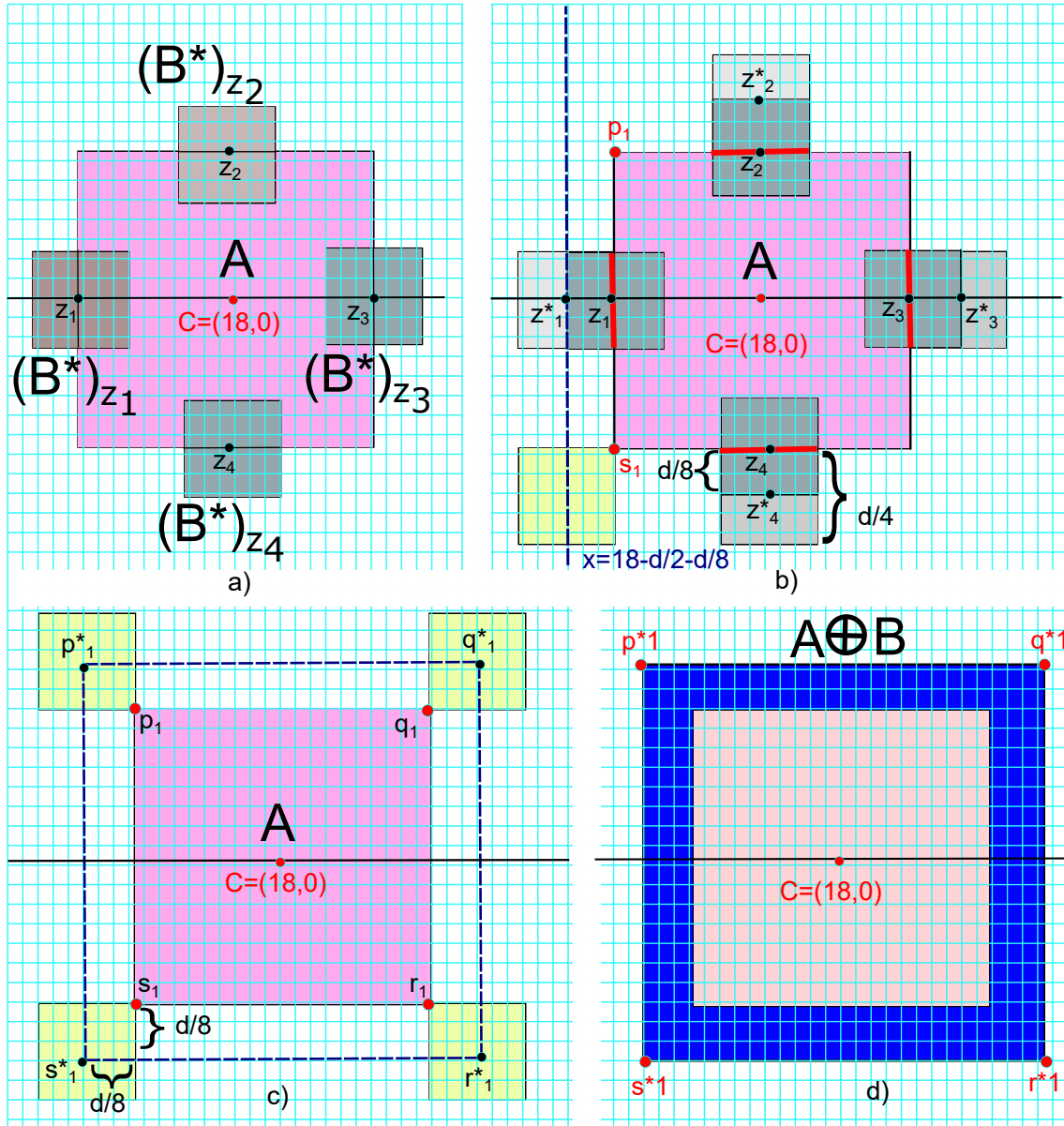


Figura 2.7: Procedimiento de dilatación de A por B . a) Conjunto B desplazado por los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 . b) Hallar puntos fuera de A pertenecientes a $A \oplus B$. c) Puntos que podemos tomar fuera y dentro de A pertenecientes a $A \oplus B$. d) Resultado final, $A \oplus B$.

$B = B^*$ se mueva fuera de A , cumpliendo la condición de que siempre halla intersección con el borde externo de A (perímetro externo de A). Esta idea es muy útil, ya que esto nos permite hallar más fácil, geoméricamente hablando, al conjunto $A \oplus B$, para distintos A y B .

Ejemplo 2.2.4. Consideremos ahora dos círculos (Ver Figura 2.8), el primero, un círculo B de radio $r_0 = d/8$, centrado en el origen (Ver Figura 2.8 a)) y otro círculo A , de radio $r_1 = d/2$, centrado en el

punto $C = (18, 0)$. Podemos incluso localizar los puntos $p = (18 - d/2, 0)$, $q = (18, d/2)$, $r = (18 + d/2, 0)$ y $s = (18, -d/2)$ (Ver Figura 2.8 b)).

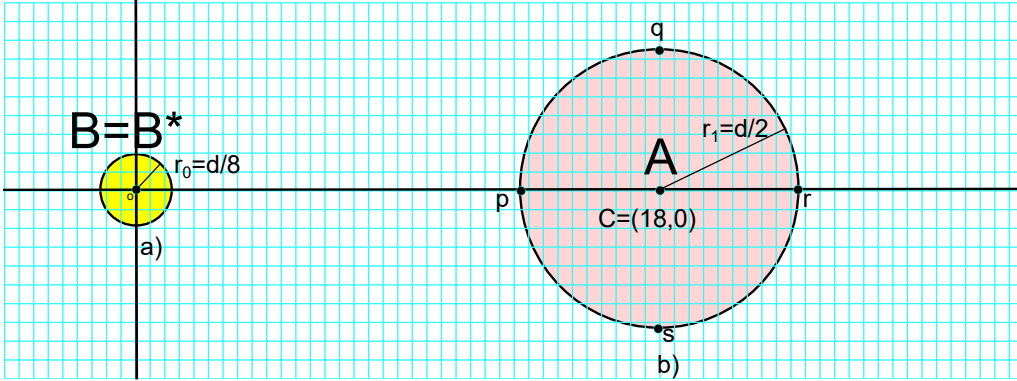


Figura 2.8: Conjunto A y su elemento estructurante B . a) Círculo estructurante B centrado en el origen, de radio $r_0 = d/8$. b) Círculo A centrado en C , de radio $r_1 = d/2$ y sus cuatro puntos.

Procedamos a hallar $A \oplus B$. Lo primero que vemos es que $B = B^*$. Ya sabemos que $A \subset A \oplus B$ y también, como B está centrado en el origen, $(B^*)_p, (B^*)_q, (B^*)_r$ y $(B^*)_s$ quedan centrados en p, q, r y s respectivamente (Ver Figura 2.9 a)). Como la idea principal es mover o desplazar a B^* fuera de A , sin dejar que haya intersección de B^* con el perímetro de A , geoméricamente vamos obteniendo una circunferencia alrededor de A conforme desplazamos B^* por el perímetro de A , por lo tanto, en $A \oplus B$ resultarán aquellos puntos que queden sobre y dentro de ésta circunferencia (Ver Figura 2.9 b)). Para hallar todos estos puntos, observemos que la distancia que hay entre esta nueva circunferencia con respecto a la circunferencia de A es de $d/8$. Esto es posible saberlo con ayuda de cualquiera de algunos de los puntos p, q, r o s . Si tomamos al punto p , al desplazar B^* por el perímetro de A , de tal forma que B^* quede centrado en un punto p' sobre el eje X , es fácil calcular la distancia de p a p' (distancia que es la buscada para describir la nueva circunferencia), la cual es la longitud del radio de B^* , a saber $d/8$ (Ver Figura 2.9 c)). Por lo tanto, $A \oplus B$ es el círculo de radio $r = d/2 + d/8$, centrado en C y que podemos describir analíticamente como el conjunto $\{(x, y) : 0 \leq (x - 18)^2 + y^2 \leq (d/2 + d/8)^2\}$ (Ver Figura 2.9 d)).

Si bien la descripción analítica de $A \oplus B$ es importante, nos interesa también la representación geométrica que ésta nos proporciona, por lo que en los siguientes ejemplos presentamos un conjunto B como elemento estructurante centrado en el origen y un conjunto A no descrito analíticamente pero que aún así es posible obtener $A \oplus B$ sin tanto análisis.

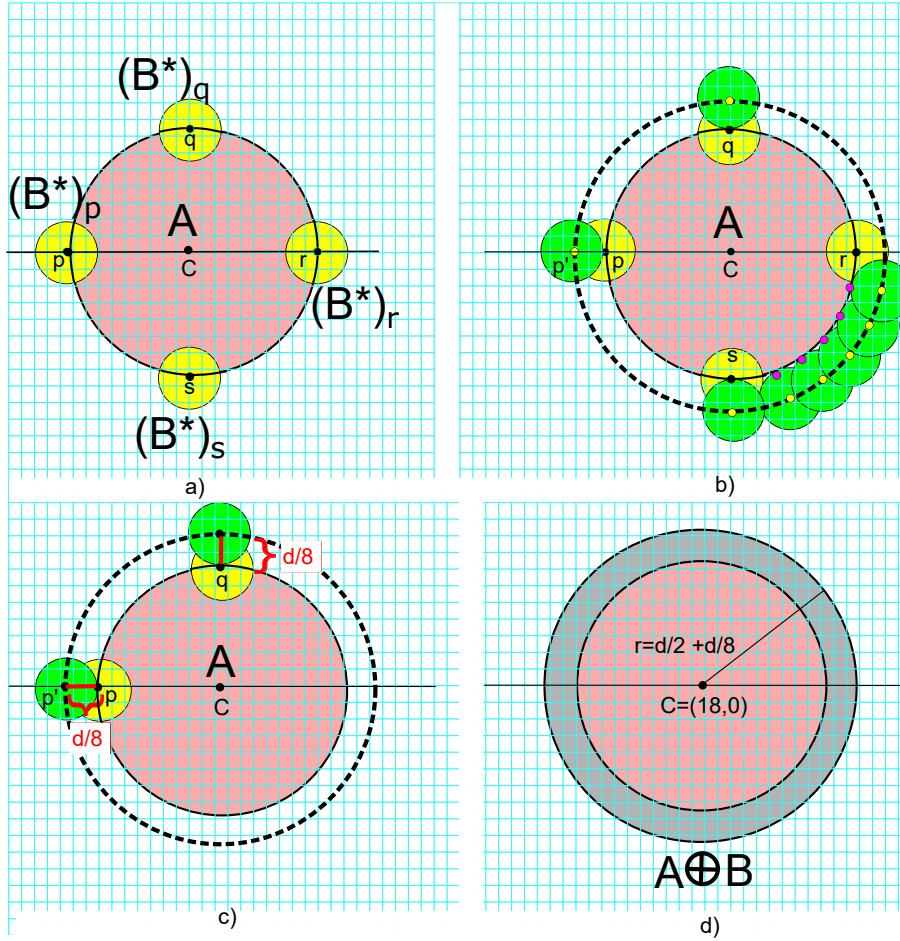


Figura 2.9: Procedimiento de dilatación de A por B. a) Conjunto B desplazado por los puntos p, q, r y s. b) Desplazamiento tangencial de B^* por el perímetro de A. c) Puntos que podemos tomar fuera y dentro de A pertenecientes a $A \oplus B$. Resultado final, $A \oplus B$.

Consideremos los dos últimos ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.2.5. Consideramos un círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y un triángulo equilátero de longitud de lado $L = d$. Sabemos que $B = B^*$, por lo tanto, $A \oplus B$ se ve como en la Figura 2.10.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos ahora un círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y consideremos la figura geométrica como en la Figura 2.11 b). Procedemos a calcular $A \oplus B$ sabiendo que $B = B^*$, por lo que el proceso y el resultado se muestra en la Figura 2.11 d).

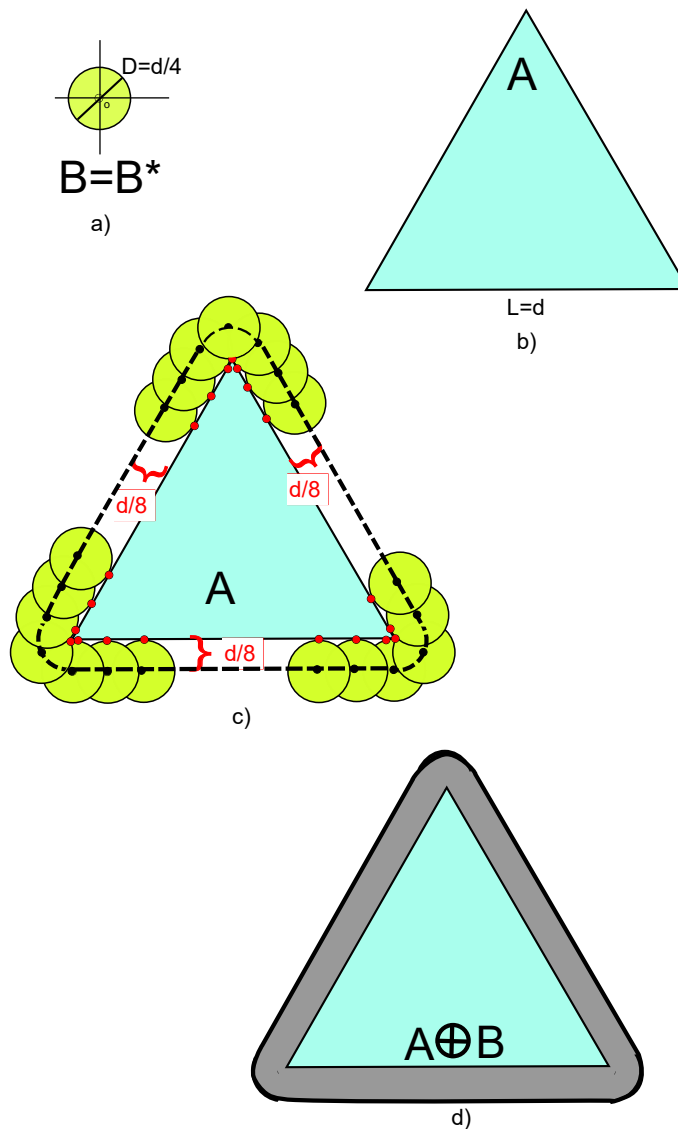


Figura 2.10: Procedimiento de dilatación de A por B. a) Conjunto $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A. c) Desplazamiento de B^* por el perímetro de A, obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). d) Resultado final, $A \oplus B$.

Terminamos esta sección mencionando la siguiente proposición que es equivalente a la definición de dilatación.

Proposición 2.2.7. $A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$.

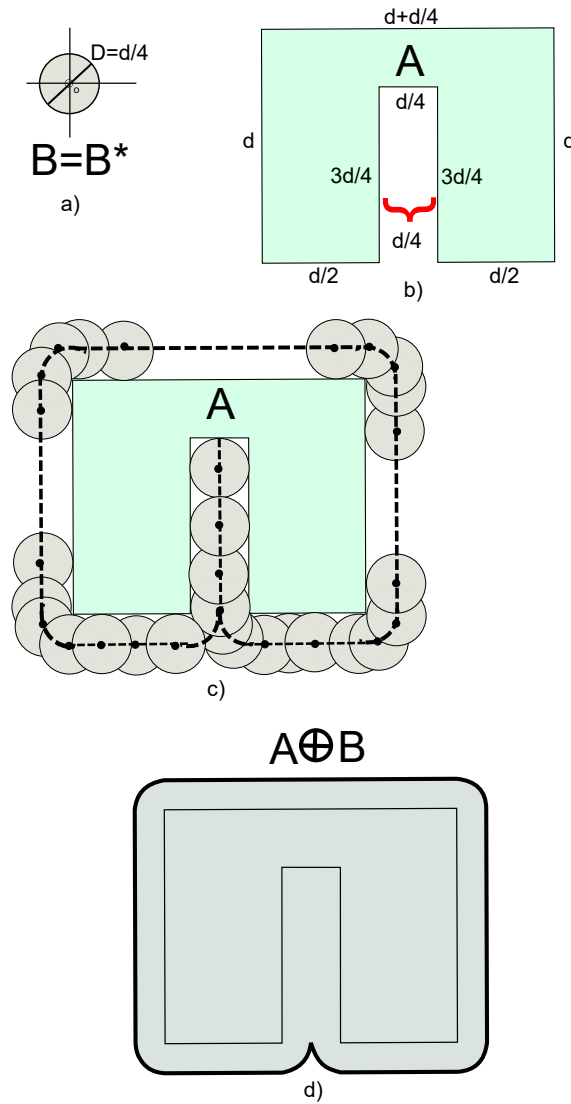


Figura 2.11: Procedimiento de dilatación de A por B . a) Conjunto $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Desplazamiento de B^* por el perímetro de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). d) Resultado final, $A \oplus B$.

2.3. Erosión

Como vimos en la sección previa, lo que hace la dilatación es expandir una imagen, darle más área, aunque por su parte y como veremos, la erosión encoge la figura.

Definición 2.3.1. Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^2 , con $o \in B$, la erosión de A por B , denotada por $A \ominus B$, se define como sigue

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}.$$

En otras palabras, la erosión de A por B es el conjunto de todos los puntos z , tal que, B trasladado por z queda contenido en A . Una rápida observación es la que sigue.

Proposición 2.3.2. $A \ominus B \subseteq A$.

Demostración. Dado que $o \in B$, se tiene que cada vector de desplazamiento z , para B , se queda dentro de $(B)_z \subseteq A$. □

Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos el ejemplo de la Figura 2.6, es decir, consideremos como elemento estructurante al cuadrado B centrado en el origen, de longitud de lado $l = d/4$ y al cuadrado A , centrado en el punto $C = (18, 0)$, de longitud de lado $L = d$. Para hallar la erosión de A por B se procede casi igual que como se procede para calcular la dilatación de A por B , es decir, desplazar a B^* dentro de A , de tal forma que B^* quede contenido en A y encontrar los puntos dentro de A que hagan que B^* interseccione el borde interno de A . Esta idea nos permitirá describir analíticamente la erosión de A por B (Ver Figura 2.12).

Sea $z_1 = (18 - 3d/8, 0)$, entonces $(B^*)_{z_1}$ queda centrado en z_1 pero de tal forma que la mitad del cuadrado de $(B^*)_{z_1}$ queda por encima del eje X y la otra mitad por debajo y tocando el borde interno de A , esto debido a que hemos situado a z_1 justo a una distancia de $3d/8$ unidades de C , y, al quedar centrado $(B^*)_{z_1}$ en z_1 , provoca que una de sus mitades quede a una distancia de $d/8$ de z_1 , lo cual, sumado con $3d/8$ da como resultado $4d/8 = d/2$, que es justo la distancia de C a su lado (segmento de recta) l_1 , el cual está contenido en la recta $x = 18 - d/2$, de ahí que, $(B^*)_{z_1}$ toca el borde interno de A (Ver Figura 2.12 a)). Deseamos así obtener todos los puntos (vectores de desplazamiento) que pasen por la recta que contiene a z_1 y que es paralela a l_1 (la recta $x = 18 - 3d/8$), de tal forma que al desplazar (B^*) por estos puntos siga quedando contenido en A , para esto, podemos ayudarnos de los puntos $z_2 = (18, 3d/8)$, $z_3 = (18 + 3d/8, 0)$

y $z_4 = (18, -3d/8)$. Observemos que $(B^*)_{z_2}$, $(B^*)_{z_3}$ y $(B^*)_{z_4}$ quedan, de igual forma que $(B^*)_{z_1}$, centrados en sus respectivos puntos y tocando el borde interno de A, más aún, cada uno intersecciona cada lado diferente de A, es decir, $(B^*)_{z_2}$ intersecciona a l_2 , $(B^*)_{z_3}$ intersecciona a l_3 y $(B^*)_{z_4}$ intersecciona a l_4 . Esto genera otras tres rectas, la recta $y = 3d/8$, que contiene a z_2 , la recta $y = -3d/8$, que contiene a z_3 y la recta $x = 18 + 3d/8$, que contiene a z_4 . Las intersecciones de estas cuatro rectas son las que nos van a ayudar a delimitar hasta qué puntos tomar dentro de A. Por ejemplo, la intersección de las rectas $x = 18 - 3d/8$ con la recta $y = -3d/8$, es justamente el punto $s_2 = (18 - 3d/8, -3d/8)$, el cual, se queda a una distancia de $d/8$ de intersectar tanto a l_1 como a l_4 , es decir, en ese punto todavía podemos centrar a (B^*) , de tal forma que quede contenido en A (Ver Figura 2.12 b)). Las otras intersecciones proporcionan los puntos p_2 , q_2 y r_2 , que son los puntos hasta donde podemos centrar (B^*) sin que salga de A (Ver Figura 2.12 c), obteniendo así la erosión de A por B. Podemos describir a esta erosión como el cuadrado (conjunto) $\{(x, y) : 18 - 3d/8 \leq x \leq 18 + 3d/8, -3d/8 \leq y \leq 3d/8\}$ (Ver Figura 2.12 d)).

Ejemplo 2.3.4. Consideremos también el ejemplo de la Figura 2.8, es decir, consideremos los círculos B de radio $r_0 = d/8$, centrado en el origen (Ver Figura 2.8 a)) y el otro círculo A de radio $r_1 = d/2$ y centrado en el punto $C = (18, 0)$ (Ver Figura 2.8 b)), luego, deseamos la erosión de A por B (Ver Figura 2.13).

Podemos situar los puntos $p = (18 - 3d/8, 0)$, $q = (18, 3d/8)$, $r = (18 + 3d/8, 0)$ y $s = (18, -3d/8)$ y sus respectivos $(B^*)_p$, $(B^*)_q$, $(B^*)_r$ y $(B^*)_s$, y, al igual que en ejemplo previo, todos intersectan (tangencialmente en este caso) el borde interno de A, a saber, en los puntos $p^* = (18 - d/2, 0)$, $q^* = (18, 3d/8)$, $r^* = (18 + d/2, 0)$ y $s^* = (18, -3d/8)$. (Ver Figura 2.13 a)) El desplazar a (B^*) por el borde interno de A provocará intersecciones tangenciales, más aún, resultará una circunferencia centrada en C pero de menor radio (Ver Figura 2.13 b)). Es posible conocer el nuevo radio de la circunferencia, dado que $(B^*)_p$ queda centrado en $p = (18 - 3d/8, 0)$, la longitud del radio decrece en la mitad del radio de $(B^*) = B$, a saber $d/8$ (Ver Figura 2.13 c)). Por lo tanto, la erosión de A por B resulta en el círculo (conjunto) $\{(x, y) : 0 \leq (x - 18)^2 + y^2 \leq (3d/8)^2\}$, donde $3d/8 = d/2 - d/8$ (Ver Figura 2.13 d)).

Como mencionamos anteriormente, si bien la descripción analítica de $A \ominus B$ es importante, nos interesa también la representación geométrica que ésta nos proporciona, por lo que en los siguientes ejemplos presentamos un conjunto B como elemento estructurante centrado en el origen y un conjunto A no descrito analíticamente pero siendo posible obtener, geoméricamente hablando, la erosión de A por B.

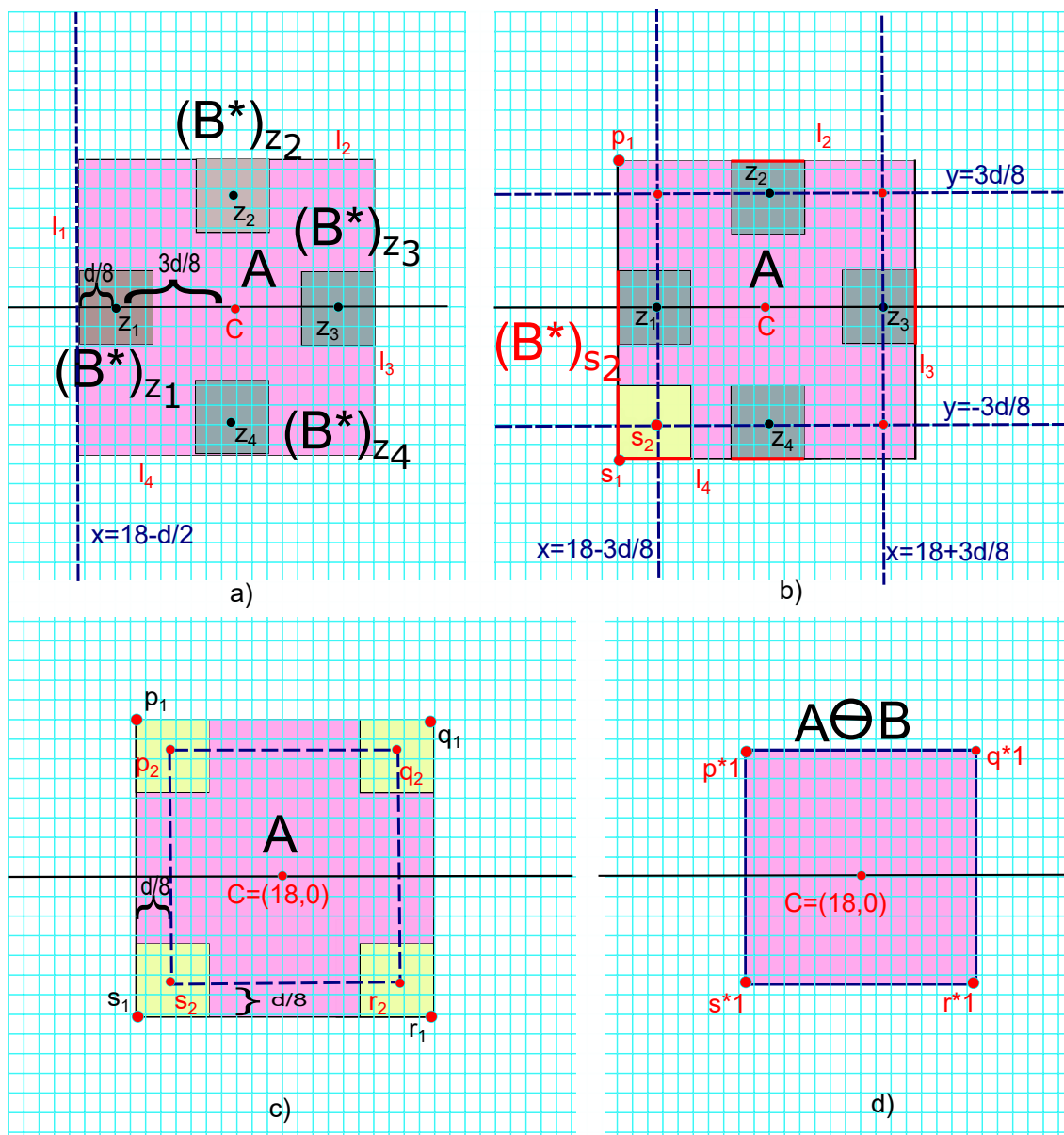


Figura 2.12: Procedimiento de erosión de A por B . a) $(B^*)_{z_1}$ intersecciona el borde interno de A . b) Desplazamiento de B^* por el perímetro de A , con los posibles puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). c) Obtención de todos los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). d) Resultado final, $A \ominus B$.

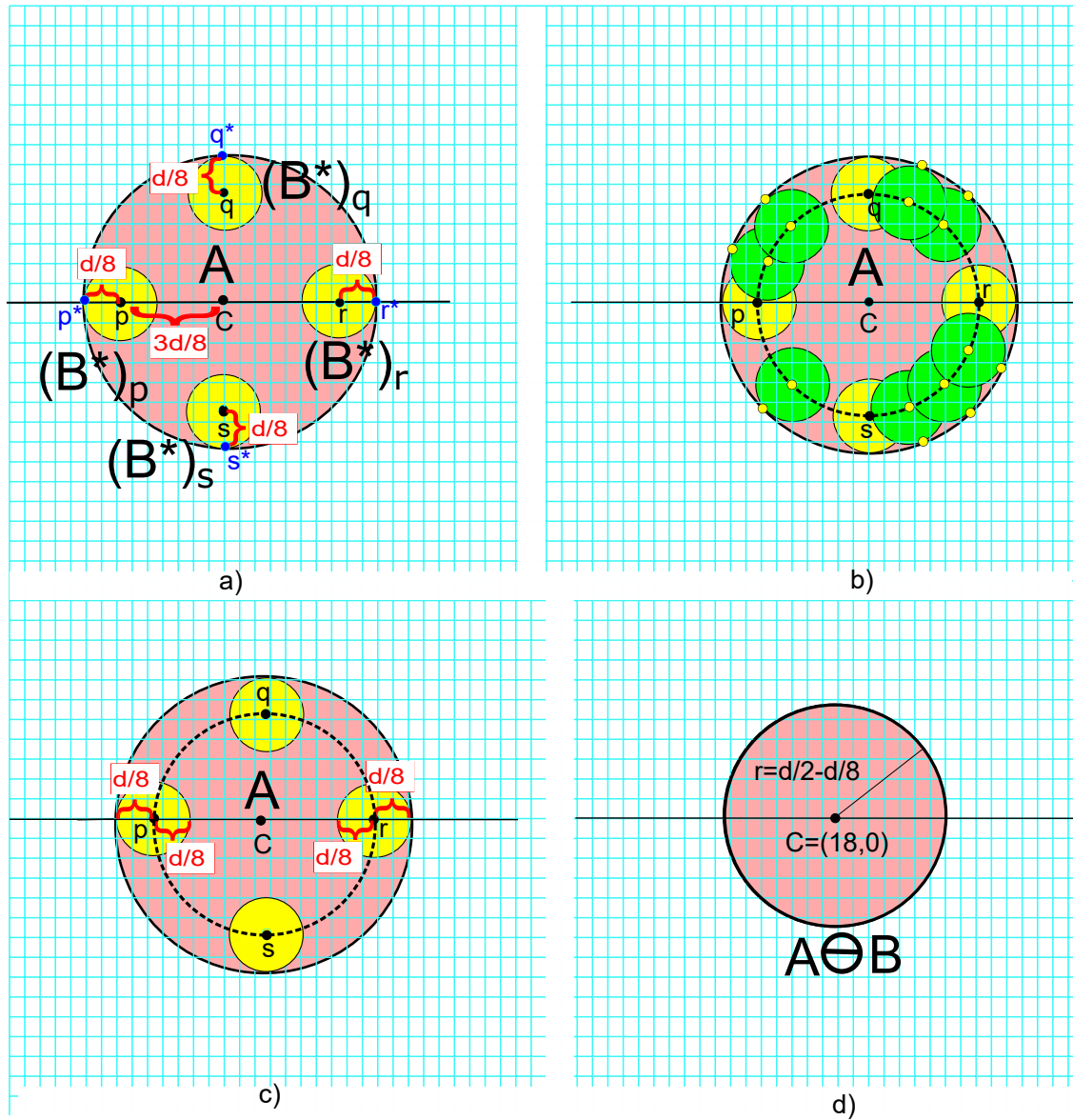


Figura 2.13: Procedimiento de erosión de A por B. a) Desplazamiento de B^* sobre el perímetro interno de A. b) El desplazamiento de B^* por el perímetro interno de A genera una nueva circunferencia. c) Obtención de todos los puntos hasta donde es posible desplazar B^* para que este quede contenido en A (circunferencia punteada). d) Resultado final, $A \ominus B$.

Ejemplo 2.3.5. Consideramos un círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y un triángulo equilátero de longitud de lado $L = d$. Sabemos que $B = B^*$, por lo tanto, $A \ominus B$ se ve como en la Figura 2.14.

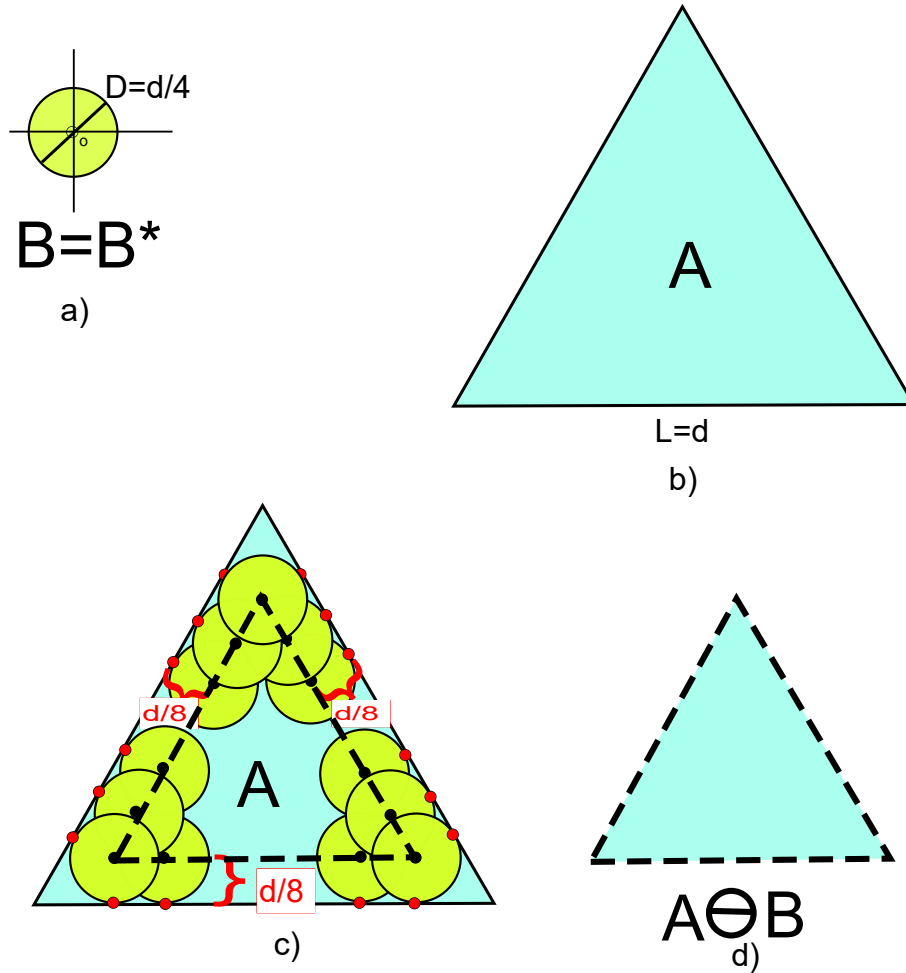


Figura 2.14: Procedimiento de erosión de A por B . a) Conjunto $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Desplazamiento de B^* por el perímetro de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* de tal forma que quede contenido en A (línea punteada). d) Resultado final, $A \ominus B$.

Ejemplo 2.3.6. Consideremos ahora un círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y consideremos la figura geométrica que podemos ver en la Figura 2.15 b). Procedemos a calcular $A \ominus B$, por lo que el proceso y el resultado se muestran en la Figura 2.15.

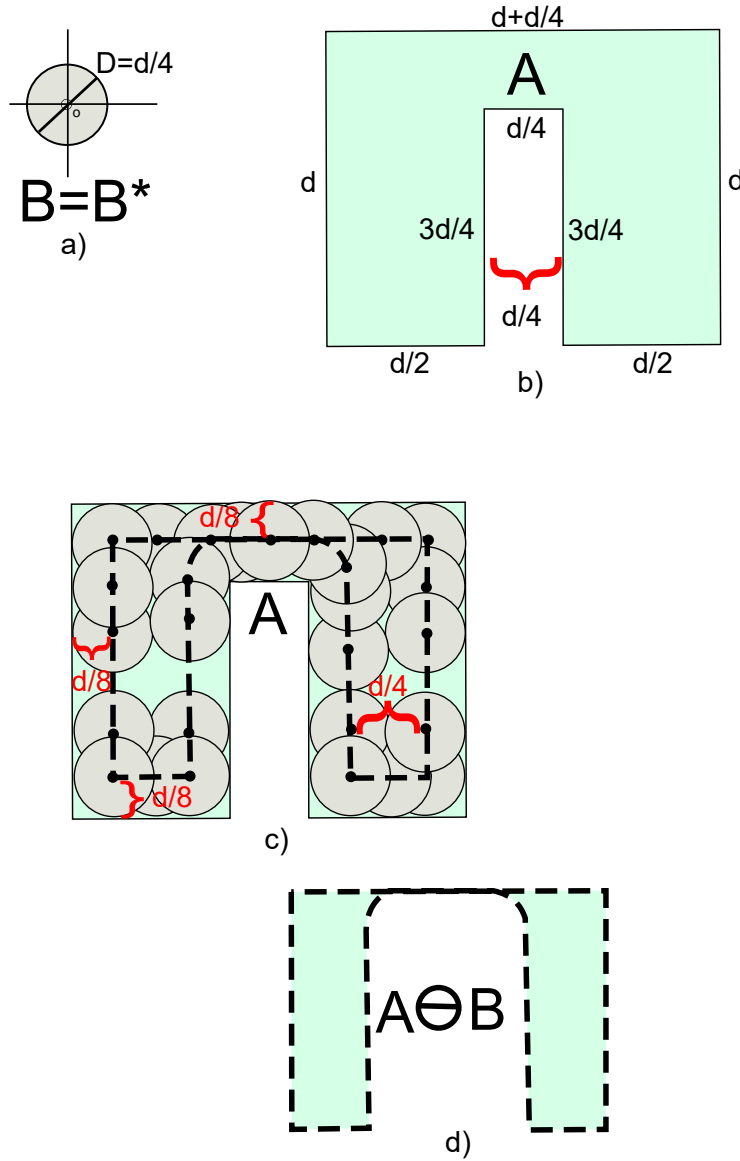


Figura 2.15: Procedimiento de erosión de A por B . a) Conjunto $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Desplazamiento de B^* por el perímetro de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* de tal forma que siga quedando contenido en A (línea punteada). d) Resultado final, $A \ominus B$.

La dilatación y la erosión son duales con respecto a la reflexión y el complemento de conjuntos, esto es

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}. \quad (2.4)$$

Demostración. Tenemos por definición que

$$(A \ominus B)^c = \{z | (B)_z \subseteq A\}^c,$$

dado que $(B)_z \subseteq A$, se cumple que $(B)_z \cap A^c = \emptyset$, así

$$(A \ominus B)^c = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\}^c.$$

Pero el complemento del conjunto de los z que satisfacen que $(B)_z \cap A = \emptyset$, es el conjunto de los z tales que $(B)_z \cap A \neq \emptyset$, de ahí que

$$(A \ominus B)^c = \{z | (B)_z \cap A^c \neq \emptyset\},$$

dado que $\hat{\hat{B}} = B$, se sigue que

$$\{z | (B)_z \cap A^c \neq \emptyset\} = \{z | (\hat{\hat{B}})_z \cap A^c \neq \emptyset\} = A^c \oplus \hat{B}.$$

□

Una definición equivalente a la de erosión es la siguiente.

Proposición 2.3.7. $A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$.

Terminamos esta sección con el siguiente teorema.

Teorema 2.3.8. Sean $X, Y, B \subseteq \mathbb{R}^2$, con B un conjunto estructurante, entonces

$$X \oplus B \subseteq Y \iff X \subseteq Y \ominus B.$$

Básicamente dice que la dilatación de X por el elemento estructural B queda contenido en el conjunto Y si y sólo si el conjunto X queda contenido en la erosión del conjunto Y por elemento estructural B .

2.4. Apertura y Cierre

Otras dos operaciones morfológicas importantes son la apertura y el cierre. La apertura, por lo general, adelgaza el contorno de un objeto, elimina pequeñas protuberancias y elimina istmos estrechos, por su parte, el cierre, aunque también trata de adelgazar contornos, a diferencia de la apertura, generalmente une las roturas estrechas, elimina los agujeros pequeños y llena los huecos en el contorno.

Definición 2.4.1. La apertura de un conjunto A , creada por un elemento estructurante (conjunto) B , denotada por $A \circ B$, se define como sigue

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B.$$

Entonces, la apertura de A por B es la erosión de A por B y a este resultado se le aplica la dilatación por B .

La apertura bien puede ser expresada como sigue.

Proposición 2.4.2.

$$A \circ B = \bigcup \{(B)_z \mid (B)_z \subseteq A\} = \bigcup_{(B)_z \subseteq A} (B)_z.$$

En efecto.

Demostración. $x \in A \circ B \iff x \in \{z \mid (B^*)_z \cap (A \ominus B) \neq \emptyset\} \iff (B^*)_x \cap (A \ominus B) \neq \emptyset \iff \exists p : p \in (B^*)_x \cap (A \ominus B) \iff \exists p : p = x - b, \text{ p.a. } b \in B \text{ y } p \in A \ominus B \iff \exists p : x = p + b \text{ y } (B)_p \subseteq A \iff \exists p : x \in (B)_p \subseteq A \iff x \in \bigcup \{(B)_z \mid (B)_z \subseteq A\}.$ \square

Esto quiere decir que la apertura de A por un conjunto B puede expresarse y verse como un proceso de llenado, más aún, dada esta igualdad podemos observar que $A \circ B \subseteq A$, esto se sigue del hecho de que $A \circ B$ es la unión de subconjuntos contenidos en A .

Dado que tanto la apertura como el cierre de un conjunto A son operaciones que ocupan erosión y después dilatación o dilatación seguido de una erosión, respectivamente, ocuparemos los ejemplos vistos anteriormente y sin ser tan explícitos en su análisis.

Ejemplo 2.4.3. Consideremos nuevamente como elemento estructurante al cuadrado B centrado en el origen, de longitud de lado $l = d/4$ y al cuadrado A centrado en el punto $C = (18, 0)$ y de longitud de lado $L = d$, por lo que la dilatación de A por B resulta en el cuadrado descrito por el conjunto

$\{(x, y) : 18 - d/2 - d/8 \leq x \leq 18 + d/2 + d/8, -d/2 - d/8 \leq y \leq d/2 + d/8\}$, el cuál podemos ver en la Figura 2.7 d), por lo tanto, la apertura de A por B la podemos ver en la Figura 2.16 e).

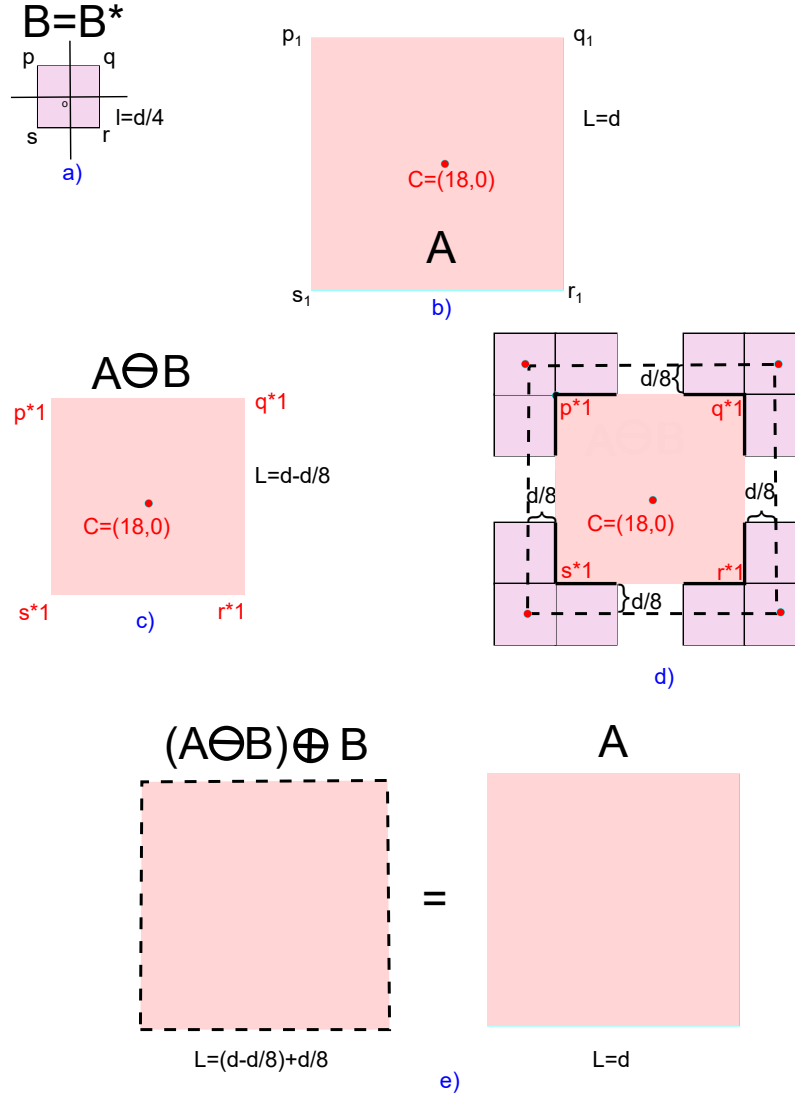


Figura 2.16: Procedimiento de apertura de A por B. a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A. c) erosión de A por B. d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A, obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B. Observemos que $(A \ominus B) \oplus B = A$.

Ejemplo 2.4.4. Nuevamente consideremos dos círculos, el círculo B de radio $r_0 = d/8$ y centrado en el origen (Ver Figura 2.8 a)), y el otro círculo A , de radio $r_1 = d/2$ y centrado en el punto $C = (18, 0)$ (Ver Figura 2.8 b)), luego, la erosión de A por B resulta en el círculo (conjunto) $\{(x, y) : 0 \leq (x - 18)^2 + y^2 \leq (3d/8)^2\}$, donde $3d/8 = d/2 - d/8$ (Ver Figura 2.13 d)), por lo que la apertura de A por B la podemos ver en la Figura 2.17 e).

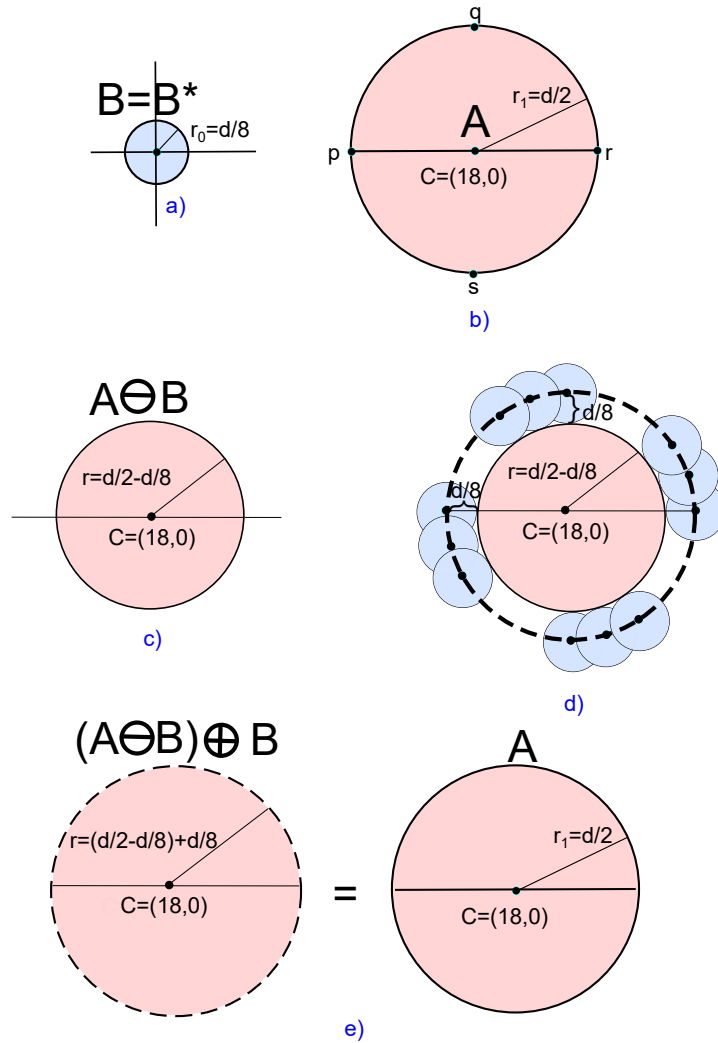


Figura 2.17: Procedimiento de apertura de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B . Observemos que $(A \ominus B) \oplus B = A$.

Ejemplo 2.4.5. Consideramos ahora al círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y el triángulo equilátero de longitud de lado $L = d$. Por lo que el resultado de $A \ominus B$ se ve en la Figura 2.14 d) y así, la apertura de A por B se puede ver en la Figura 2.18 e).

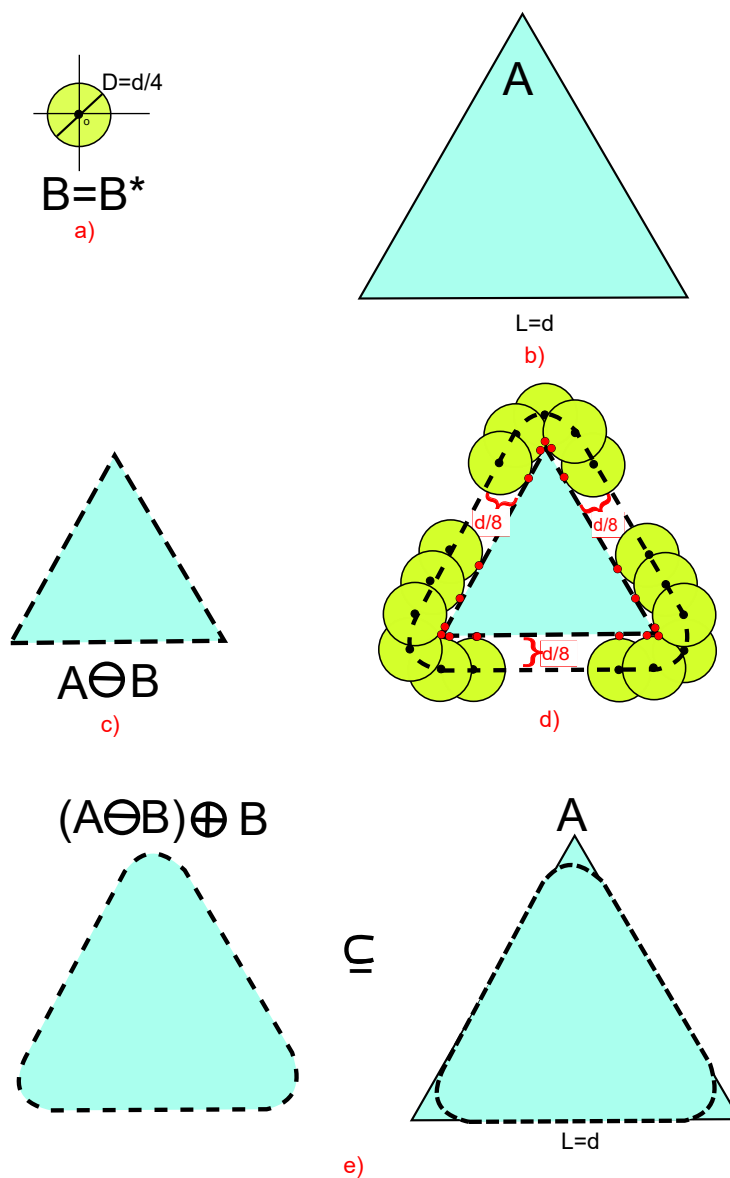


Figura 2.18: Procedimiento de apertura de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B . Observemos que $(A \ominus B) \oplus B = A$.

Ejemplo 2.4.6. Para este último ejemplo consideremos nuevamente al círculo B centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y consideremos la figura geométrica como en la Figura 2.14 b), por lo que $A \ominus B$ se muestra en la Figura 2.15 d) y así, la apertura de A por B se muestra en la Figura 2.20 e).

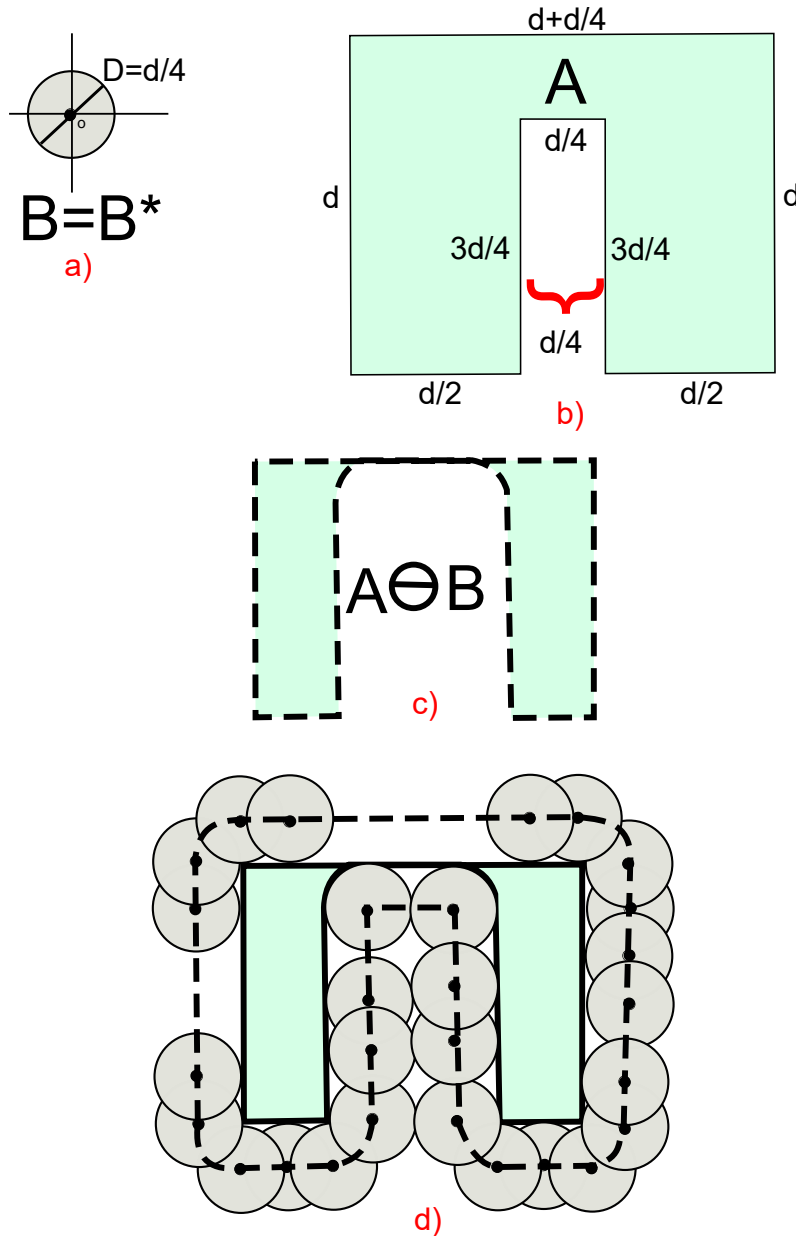


Figura 2.19: Procedimiento de apertura de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada).

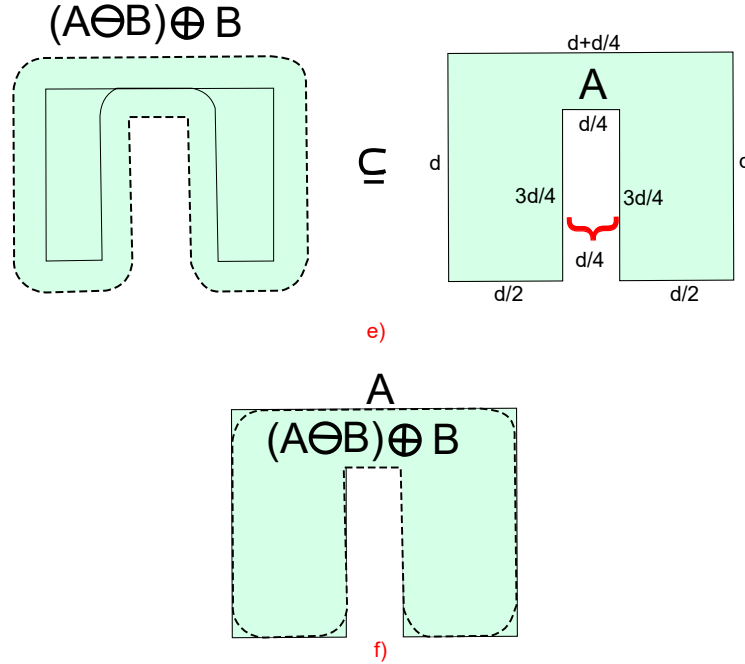


Figura 2.20: Continuación de la Figura 2.19. e) Apertura de A por B. f) Observemos que $(A \ominus B) \oplus B \subseteq A$.

Definición 2.4.7. La cerradura de un conjunto A, creada por un elemento estructurante (conjunto) B, denotada por $A \bullet B$, se define como sigue

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B.$$

Es decir, la cerradura de A por B es la dilatación de A por B y de este resultado se sigue la erosión por B.

Un primer resultado es que $A \subseteq A \bullet B$.

Demostración. Sea $x \in A$. Veamos que $(B)_a \subseteq A \oplus B$.

Tomemos $p \in (B)_a$, luego, $p = a + b$ para algún $b \in B$. Dado que $a \in A$ y $a = a + b - b = p - b \in (B^*)_p$, se sigue que $A \cap (B^*)_p \neq \emptyset$, por lo tanto, $p \in A \oplus B$. \square

De igual forma que se hizo con los ejemplos para la apertura de un conjunto A, para el cierre de A se hará lo mismo, ya que es una combinación de operaciones entre la dilatación y la cerradura de un conjunto, es decir, se harán sin tanto análisis.

Ejemplo 2.4.8. Consideremos como elemento estructurante al cuadrado B centrado en el origen, de longitud de lado $l = d/4$ y descrito como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -d/8 \leq x \leq d/8, -d/8 \leq y \leq d/8\}$

(Ver Figura 2.6 a)), también consideremos al cuadrado A , centrado en el punto $C = (18, 0)$, de longitud de lado $L = d$ y descrito como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 18 - d/2 \leq x \leq 18 + d/2, -d/2 \leq y \leq d/2\}$ (Ver Figura 2.6 b)), por lo que $A \oplus B$ se describió como el (cuadrado) conjunto $\{(x, y) : 18 - d/2 - d/8 \leq x \leq 18 + d/2 + d/8, -d/2 - d/8 \leq y \leq d/2 + d/8\}$ (Ver Figura 2.7 d)), así, el cierre de A por B se puede ver en la Figura 2.21.

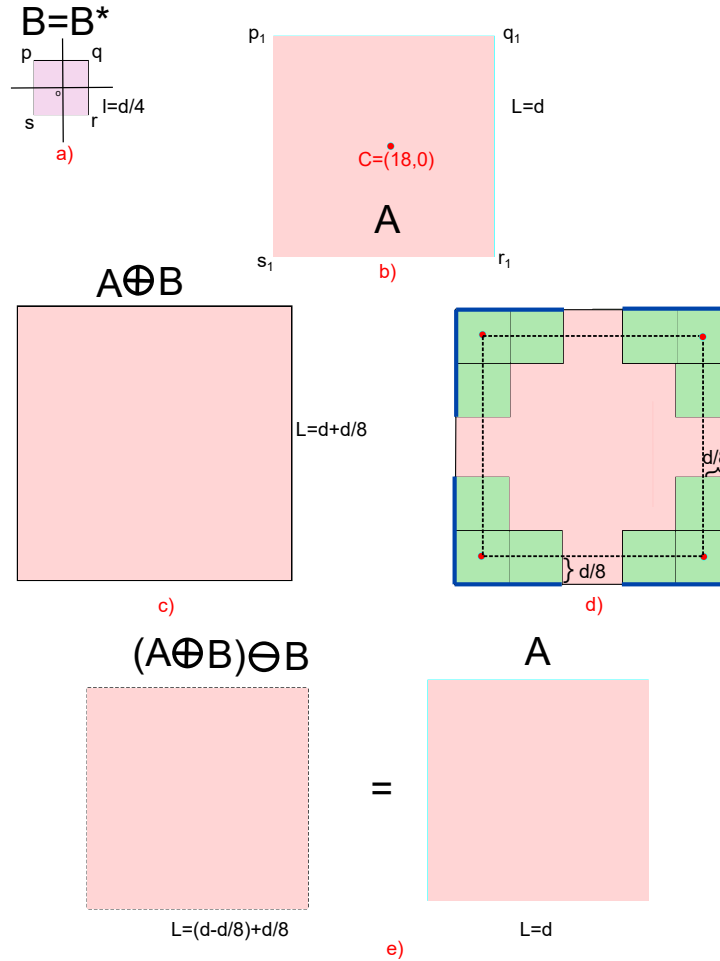


Figura 2.21: Procedimiento de cierre de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B . Observemos que $A \subseteq (A \oplus B) \ominus B$.

Ejemplo 2.4.9. Consideremos como siguiente ejemplo a los dos círculos mencionados anteriormente (Ver Figura 2.8), el círculo B , de radio $r_0 = d/8$, centrado en el origen (Ver Figura 2.8 a)) y consideremos al círculo A , de radio $r_1 = d/2$ y centrado en el punto $C = (18, 0)$ (Ver Figura 2.8 b)), por lo que $A \oplus B$ es el círculo descrito analíticamente como el conjunto $\{(x, y) : 0 \leq (x - 18)^2 + y^2 \leq (d/2 + d/8)^2\}$ (Ver Figura 2.9 d)), por lo que el cierre de A por B se puede ver en la Figura 2.22.

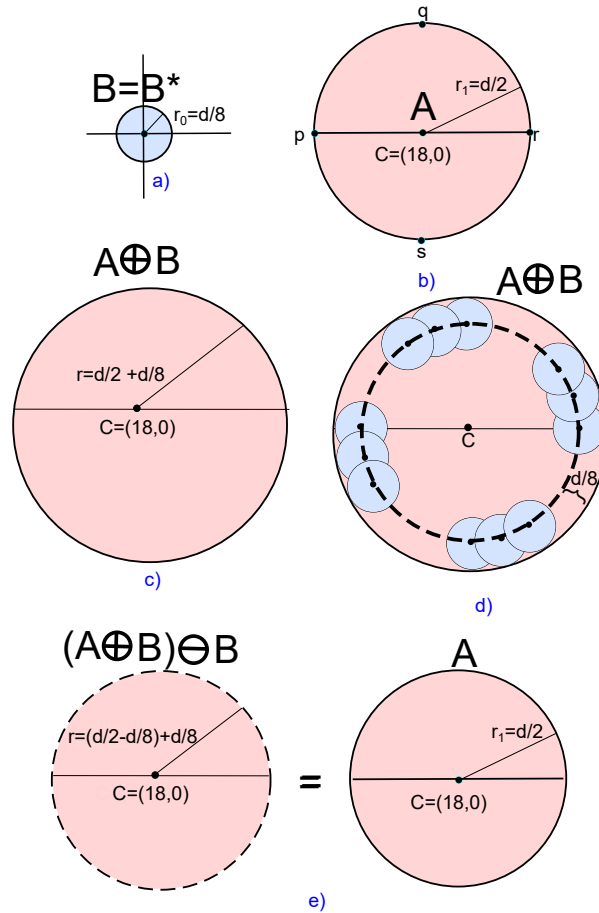


Figura 2.22: Procedimiento de cierre de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B . Observemos que $A \subseteq (A \oplus B) \ominus B$.

Ejemplo 2.4.10. Consideramos nuevamente al círculo B , centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y al triángulo equilátero de longitud de lado $L = d$, por lo que $A \oplus B$ se ve como en la Figura 2.10, y así, el cierre de A por B se puede ver en la Figura 2.23.

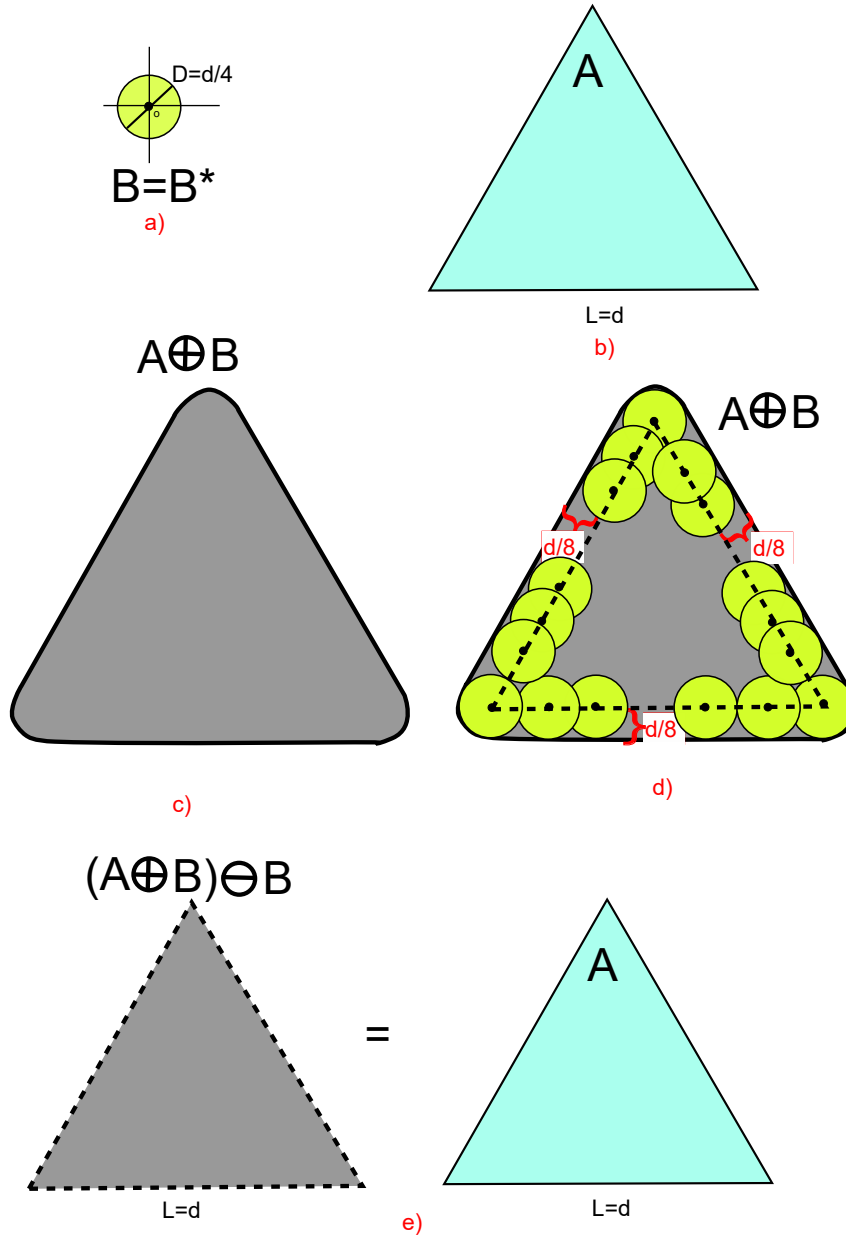


Figura 2.23: Procedimiento de cierre de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada). e) Apertura de A por B . Observemos que $A \subseteq (A \oplus B) \ominus B$.

Ejemplo 2.4.11. Por último, consideremos al círculo B , centrado en el origen, de diámetro $D = d/4$ (radio $d/8$) y consideremos la figura geométrica que se ve en la Figura 2.11 b); $A \oplus B$ se muestra en Figura 2.11 d), y por lo tanto, el cierre de A por B se muestra en la Figura 2.25 e).

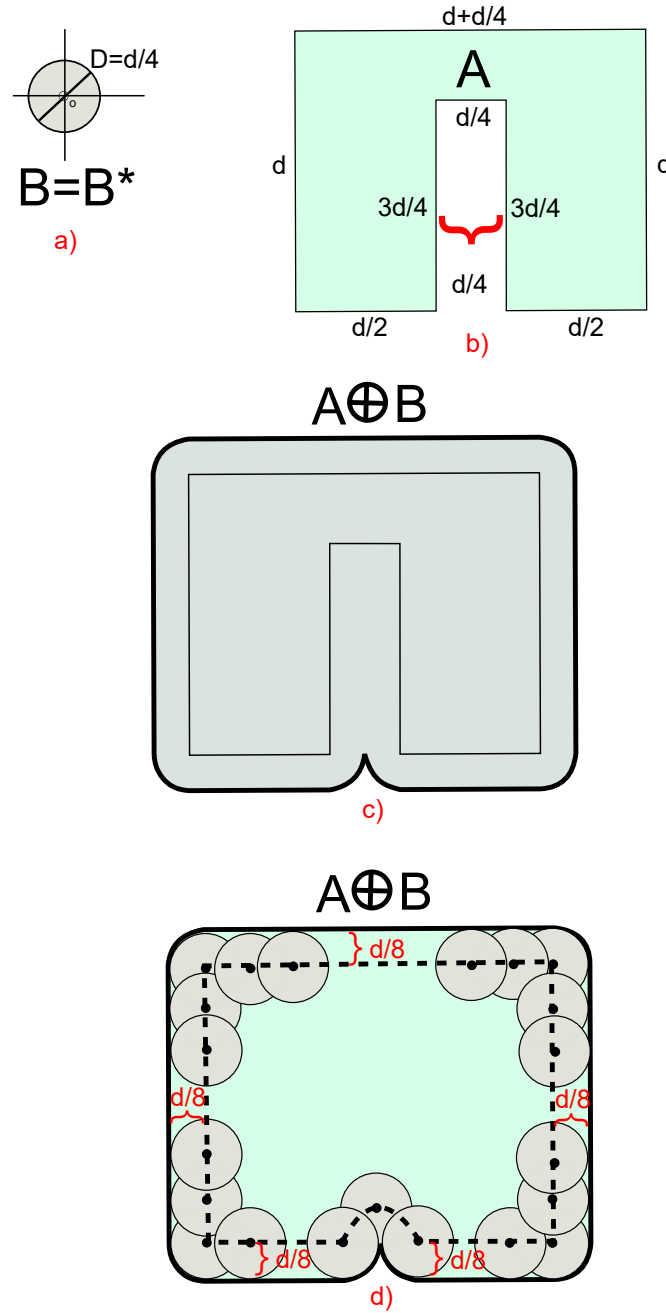


Figura 2.24: Procedimiento de cierre de A por B . a) Elemento estructurante $B = B^*$ centrado en el origen. b) Conjunto A . c) Erosión de A por B . d) Desplazamiento de B^* por el perímetro externo de A , obteniendo así los puntos hasta donde desplazar B^* (línea punteada).

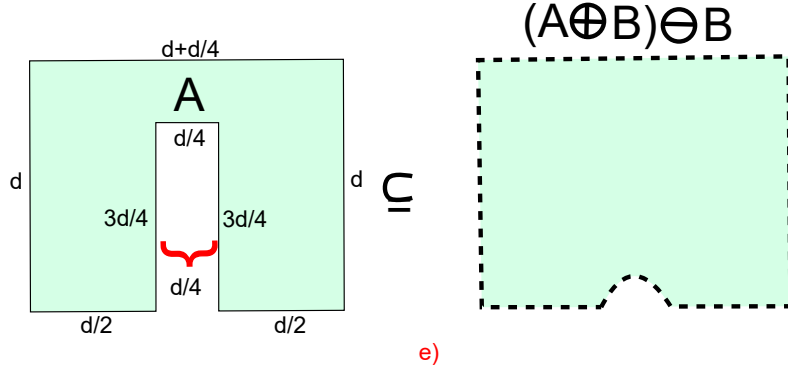


Figura 2.25: Continuación de la Figura 2.24. e) Cierre de A por B . Observemos que $A \subseteq (A \oplus B) \ominus B$.

El cierre también puede verse de la siguiente forma.

Proposición 2.4.12. $A \bullet B = (\bigcup_{\hat{B}_p \subseteq A^c} \hat{B}_p)^c = \bigcap_{\hat{B}_p \subseteq A^c} \hat{B}_p^c$.

Terminamos la presente sección y este capítulo con el siguiente resultado.

La apertura y cierre son duales con respecto al complemento de conjuntos y la reflexión, esto es

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B}).$$

Capítulo 3

Morfología matemática

En este capítulo se abordan los conceptos fundamentales de la morfología funcional matemática, los cuales nos ayudarán a entender la morfología matemática en grafos e hipergrafos, así como dejar más en claro algunos conceptos de la sección previa. La extensa información y teoría para esta primera sección puede consultarse en [9], así como en [7].

3.1. Conceptos de la morfología matemática

Sean $T \subseteq \mathbb{R}^n$ y V un conjunto arbitrario, definimos a $\text{Fun}(V)$ como el espacio de todas las funciones de V a T , es decir

$$\text{Fun}(V) = \{f \mid f : V \rightarrow T\}. \quad (3.1)$$

Un primer resultado establece que si $T \subseteq \mathbb{R}$ y posee una estructura de retícula completa entonces se puede verificar que $\text{Fun}(V)$ hereda este tipo de estructura con el orden puntual siguiente

$$f \leq g \text{ si } f(v) \leq g(v) \text{ para cada } v \in V.$$

Ver [1]. Poco más adelante se trabajará con el espacio $\text{Fun}(V)$ para V y T explícitamente. La siguiente definición es en general para cualquier retícula completa y un operador que trabaje en ella.

Definición 3.1.1. Sean $f, g \in \mathcal{L}$ una retícula completa y $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ un operador, decimos que ψ es

- *creciente si $f \leq g$ implica que $\psi(f) \leq \psi(g)$.*

- *un erosión si $\psi(\bigwedge_{i \in I} f_i) = \bigwedge_{i \in I} \psi(f_i)$ para cualquier familia arbitraria de \mathcal{L} .*
- *una dilatación si $\psi(\bigvee_{i \in I} f_i) = \bigvee_{i \in I} \psi(f_i)$ para cualquier familia arbitraria de \mathcal{L} .*
- *extensiva si $\psi(f) \geq f$ para cada f .*
- *antiextensiva si $\psi(f) \leq f$ para cada f .*
- *idempotente si $\psi^2 = \psi$.*
- *un filtro morfológico si ψ es creciente e idempotente.*
- *una apertura si ψ es creciente, antiextensiva e idempotente.*
- *una cerradura si ψ es creciente, extensiva e idempotente.*

Podemos considerar al operador $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, para \mathcal{L} y \mathcal{M} retículas completas distintas, por lo que algunos conceptos de arriba se mantienen (como el de ser creciente y decreciente) mientras que otros carecen de sentido.

Una importante noción en morfología funcional es la definición de adjunción.

Definición 3.1.2. Sean $\varepsilon : (E', \leq') \rightarrow (E, \leq)$ y $\delta : (E, \leq) \rightarrow (E', \leq')$ retículas completas, diremos que (ε, δ) forman una adjunción si $\forall X \in E, \forall Y \in E' : \delta(X) \leq' Y \iff X \leq \varepsilon(Y)$.

De esta definición se puede obtener el siguiente resultado conocido en morfología matemática.

Teorema 3.1.3. Si (ε, δ) forman una adjunción entonces δ es una dilatación y ε es una erosión.

Con las definiciones previas y lo visto en el capítulo anterior, podemos dar a continuación algunos ejemplos de operadores ψ que trabajen en alguna *lattice* \mathcal{L} . Sean $X, B \subseteq \mathbb{R}^2$, con $o = (0, 0) \in B$ un conjunto fijo (llamado elemento estructurante), entonces se puede verificar que el operador

- $\delta : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ dado por

$$\delta(X) = X \oplus B = \bigcup_{b \in B} (X)_b$$

es un operador creciente y extensivo, por lo que es una dilatación.

- $\varepsilon : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ dado por

$$\varepsilon(X) = X \ominus B = \bigcap_{b \in B} (X)_{-b}$$

es un operador creciente y antiextensivo, por lo que es una erosión.

- $\alpha : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ dado por

$$\alpha(X) = X \circ B = \bigcup_{(B)_z \subseteq X} (B)_z$$

es un operador creciente, antiextensivo e idempotentes, por lo que es una apertura, más aún, es un filtro morfológico.

- $\beta : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ dado por

$$\beta(X) = X \bullet B = \bigcap_{\hat{B}_p \subseteq X^c} \hat{B}_p^c$$

es un operador creciente, extensivo e idempotente, por lo que es un cierre, más aún, es un filtro morfológico.

Además, el par (ε, δ) forma una adjunción, es decir, la erosión adjunta de la dilatación δ es la erosión ε y viceversa.

En resumen, los conceptos de dilatación, erosión, apertura y cierre, vistas en el capítulo anterior, cumplen con serlo desde el punto de vista de la morfología matemática e incluso se han puesto en esa forma (intersecciones o uniones según corresponda) debido a que sus demostraciones son más convenientes.

Lo que ahora sigue es la definición de adjunción, dilatación y erosión de manera más general.

Definición 3.1.4. Sean \mathcal{L} y \mathcal{M} dos retículas completas (iguales o no),

- dos operadores $\delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ y $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ forman una adjunción (ε, δ) , si

$$\forall x \in \mathcal{L}, \forall y \in \mathcal{M} : \delta(x) \leq_{\mathcal{M}} y \iff x \leq_{\mathcal{L}} \varepsilon(y),$$

- Un operador $\delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, es una dilatación cuando esta preserva el supremo, es decir

$$\forall \{x_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{L} : \delta \left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) = \bigvee_{i \in I} \delta(x_i),$$

en particular, si I es \emptyset , entonces $\delta(0_{\mathcal{L}}) = 0_{\mathcal{M}}$.

- Un operador $\varepsilon : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, es una erosión cuando esta preserva el ínfimo, esto es

$$\forall \{x_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{L} : \varepsilon \left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right) = \bigwedge_{i \in I} \varepsilon(x_i),$$

en particular, si I es \emptyset , entonces $\varepsilon(1_{\mathcal{L}}) = 1_{\mathcal{M}}$.

Tenemos también el siguiente teorema de adjunción que relaciona la apertura y cerradura.

Teorema 3.1.5. Sean \mathcal{L} y \mathcal{M} dos retículas completas, y sean $\delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ una dilatación y $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ una erosión, si ambas forman una adjunción, entonces

- $\delta\varepsilon$ es una apertura en \mathcal{M} ,
- $\varepsilon\delta$ es un cierre \mathcal{L} .

En particular podemos tener que $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ y se mantiene el mismo resultado.

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado que involucra la noción de función de vecindades.

Definición 3.1.6. Sea V cualquier conjunto, una función de vecindades es una función $N : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$.

Tenemos el siguiente breve ejemplo.

Ejemplo 3.1.7. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$, definimos una función de vecindades para G como $N(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in E\} \cup \{v\}$.

Una observación es que, de existir la función N , enseguida corresponde una función de vecindades recíproca \tilde{N} , definida como sigue

$$\tilde{N}(v) = \{w \in V : v \in N(w)\}. \quad (3.2)$$

Más aún, dada cualquier función de vecindades N , uno puede asociarle una erosión y una dilatación adjuntas dadas de la siguiente manera

- $\delta_{\mathcal{A}}(f)(v) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{A}}(v)\},$
- $\varepsilon_{\mathcal{A}}(f)(v) = \inf\{f(w) : w \in N_{\mathcal{A}}(v|G)\}.$

Se puede mostrar que, en efecto, son una dilatación y erosión respectivamente. Ver [1].

3.2. Morfología matemática en grafos

En esta sección aprovecharemos los conceptos previamente mencionados para utilizarlos en el conjunto $\text{Fun}(V)$, para V el conjunto de vértices de un grafo, ya que la idea de la morfología de grafos consiste en modelar un conjunto de objetos llamado V con los vértices de un grafo y luego obtener cierta información a través de operaciones morfológicas. En [1] se puede profundizar en la mayoría de resultados que aquí se presentan.

Sean $T \subseteq \mathbb{R}^n$ y V un conjunto arbitrario, si consideramos a T como un conjunto de valores discretos o como un conjunto que represente un vector en un espacio de color (vector con n entradas), entonces T es llamado conjunto de nivel de grises (conjunto de intensidad de un pixel). Lo único que se le pide a T es que tenga estructura de retícula completa [9].

Definición 3.2.1. Una imagen es una función $f : V \rightarrow T$, donde V y T son como arriba, por lo que $\text{Fun}(V)$ denota el conjunto de imágenes sobre V .

En particular, dado un grafo $G = (V, E)$ y $f \in \text{Fun}(V)$, si $T = \{0, 1\}$ (donde 0 representa el color blanco y 1 el color negro) entonces f es llamado un grafo binario (Ver Figura 3.1).

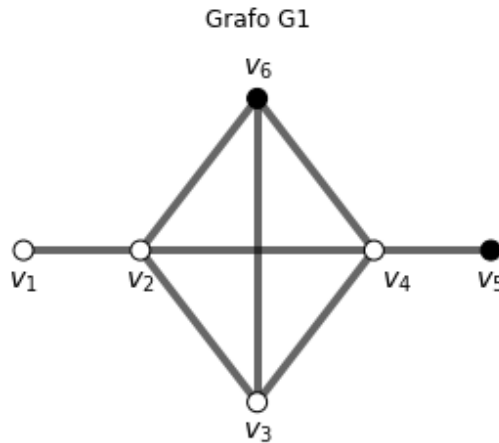


Figura 3.1: Ejemplo de grafo binario.

Definición 3.2.2. *Un grafo estructural o s-grafo \mathcal{A} es un grafo $G_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}})$ junto con dos subconjuntos no vacíos de vértices $B_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{A}} \subseteq V_{\mathcal{A}}$ llamados brotes y raíces respectivamente.*

Una observación es que el conjunto de brotes y raíces no tienen porque ser disjuntos. En este documento vamos a considerar los nodos de color rojo como los brotes, los de color verde como las raíces, los que son de color amarillo aquellos nodos que son tanto brotes como raíces y si en el s-grafo hay un nodo de color blanco significará que el nodo no es ni brote ni raíz, sólo un nodo más del grafo. Tenemos de ejemplo los grafos estructurales de la Figura 3.2 y los de la Figura 3.3.

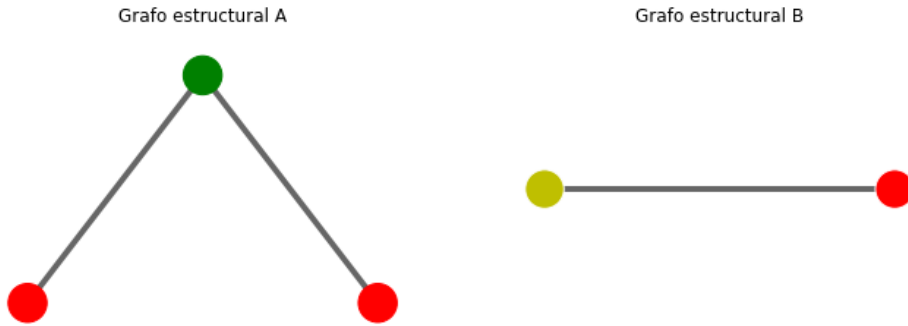


Figura 3.2: *Grafos estructurales. a) Del lado izquierdo dos nodos siendo brotes y uno siendo raíz. b) Del lado derecho un nodo siendo raíz y brote, mientras que el otro nodo es brote.*

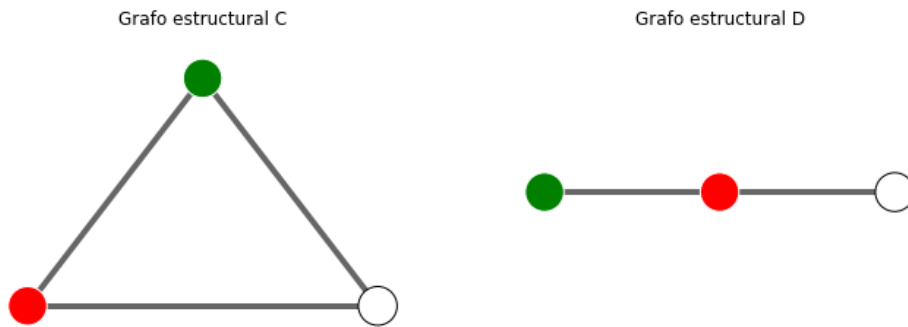


Figura 3.3: *Grafos estructurales en los cuales no todos los nodos tienen que ser brotes o raíces.*

Podemos elegir los brotes y raíces de manera arbitraria o de manera que uno prefiera

Definición 3.2.3. *Si \mathcal{A} es un s-grafo, definimos su grafo recíproco $\check{\mathcal{A}}$ como el s-grafo $G_{\check{\mathcal{A}}} = G_{\mathcal{A}}, B_{\check{\mathcal{A}}} = R_{\mathcal{A}}$ y $R_{\check{\mathcal{A}}} = B_{\mathcal{A}}$.*

En pocas palabras, el grafo recíproco de \mathcal{A} es el mismo grafo pero intercambia el conjunto de brotes por raíces (Ver Figura 3.4 y Figura 3.5).

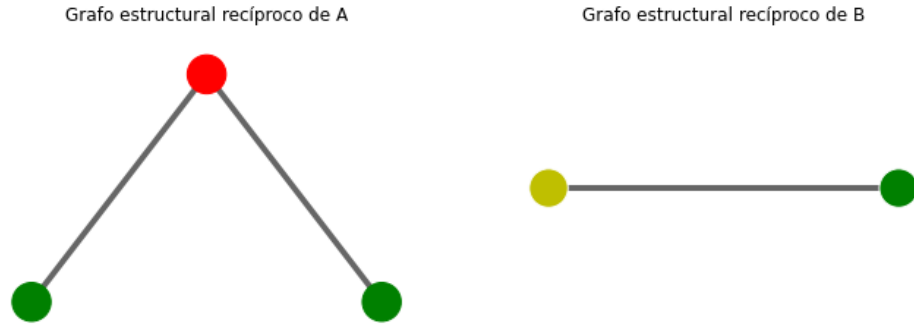


Figura 3.4: Grafos estructurales recíprocos de la Figura 3.2.

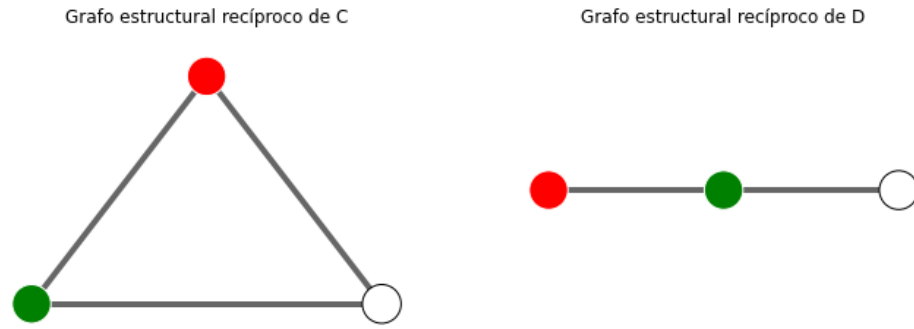


Figura 3.5: Grafos estructurales recíprocos de la Figura 3.3.

Es posible definir una relación de orden parcial en los s-grafos y mostrar las propiedades que esto conlleva pero solamente mencionaremos algunas de ellas que serán de utilidad. Ver[1].

Definición 3.2.4. Sean $G=(V,E)$ un grafo y \mathcal{A} un grafo estructural, un homomorfismo de grafos $\theta : G_{\mathcal{A}} \rightarrow G$, es llamado *incrustación de \mathcal{A} hacia G en el nodo $v \in V$ si $v \in \theta(R_{\mathcal{A}})$.*

Podemos utilizar un grafo estructural \mathcal{A} y cualquier grafo G para construir una función de vecindades como sigue

$$N_{\mathcal{A}}(v|G) = \bigcup \{ \theta(B_{\mathcal{A}}) | \theta \text{ es una incrustación de } \mathcal{A} \text{ hacia } G \text{ en el nodo } v \}.$$

Observemos que se hace énfasis en el grafo \mathcal{A} a usar por lo que escribimos $N(v|G)$ en lugar de $N(v)$.

Existe la siguiente proposición que relaciona a un s-grafo y su grafo recíproco.

Proposición 3.2.5. Sean $G = (V, E)$ un grafo cualquiera, \mathcal{A} un s-grafo y $\check{\mathcal{A}}$ su recíproco, entonces

$$\check{N}_{\mathcal{A}}(v|G) = N_{\check{\mathcal{A}}}(v|G), \tag{3.3}$$

para $v \in V$.

Básicamente dice que la función de vecindades recíproca de un grafo estructural es la función de vecindades de su grafo estructural recíproco.

Definición 3.2.6. Decimos que dos grafos estructurales \mathcal{A} y \mathcal{B} coinciden o son equivalentes si ocurre lo siguiente

- $G_{\mathcal{A}} \simeq G_{\mathcal{B}}$.
- $N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}}) = N_{\mathcal{B}}(v|G_{\mathcal{A}})$, para cualquier $v \in R_{\mathcal{A}}$.

En particular, si \mathcal{A} coincide con su grafo recíproco $\tilde{\mathcal{A}}$, entonces

$$\tilde{N}_{\mathcal{A}}(v|G) = N_{\mathcal{A}}(v|G) = N_{\mathcal{A}}(v|G),$$

en este caso decimos que \mathcal{A} es simétrico.

Procedemos a mostrar como se construyen las vecindades $N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}})$ al rededor de un nodo v para un grafo $G=(V,G)$ y un s-grafo \mathcal{A} .

Consideremos los grafos estructurales de la Figura 3.6 y sus nodos como ahí se indica.

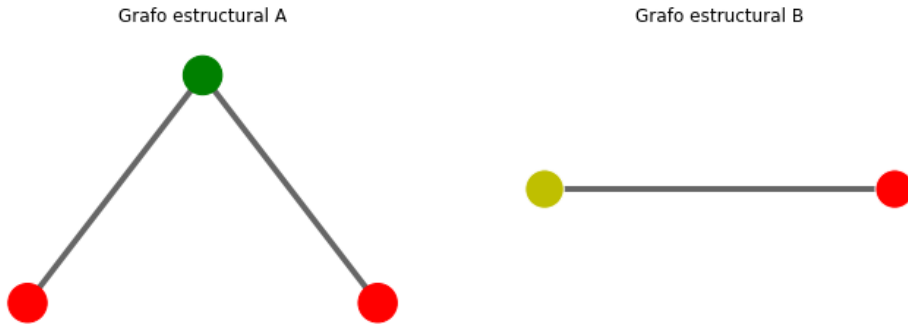


Figura 3.6: a) En el s-grafo \mathcal{A} (ó \mathcal{A}), etiquetamos al nodo inferior izquierdo como a , la raíz (el nodo de color verde) como r y el nodo inferior derecho como b . b) Del s-grafo \mathcal{B} (ó \mathcal{B}), etiquetamos al nodo de la izquierda como r y el nodo derecho como b .

Observemos que para el grafo estructural \mathcal{A} (Figura 3.6 a)), $G_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}})$, donde $V_{\mathcal{A}} = \{a, r, b\}$, $E_{\mathcal{A}} = \{\{a, r\}, \{r, b\}\}$, $R_{\mathcal{A}} = \{r\}$ y $B_{\mathcal{A}} = \{a, b\}$, por lo que su grafo recíproco (Ver Figura 3.4 lado izquierdo) cumple que $G_{\tilde{\mathcal{A}}} = (V_{\tilde{\mathcal{A}}}, E_{\tilde{\mathcal{A}}})$, donde $V_{\tilde{\mathcal{A}}} = \{a, r, b\}$, $E_{\tilde{\mathcal{A}}} = \{\{a, r\}, \{r, b\}\}$, $R_{\tilde{\mathcal{A}}} = \{a, b\}$ y $B_{\tilde{\mathcal{A}}} = \{r\}$, mientras que para el grafo estructural \mathcal{B} (Figura 3.6 b)), tenemos que $G_{\mathcal{B}} = (V_{\mathcal{B}}, E_{\mathcal{B}})$, donde $V_{\mathcal{B}} = \{r, b\}$, $E_{\mathcal{B}} = \{\{r, b\}\}$, $R_{\mathcal{B}} = \{r\}$ y $B_{\mathcal{B}} = \{b\}$, por lo tanto, su grafo recíproco (Figura 3.4 lado derecho) cumple que $G_{\tilde{\mathcal{B}}} = (V_{\tilde{\mathcal{B}}}, E_{\tilde{\mathcal{B}}})$, donde $V_{\tilde{\mathcal{B}}} = \{r, b\}$, $E_{\tilde{\mathcal{B}}} = \{\{r, b\}\}$, $R_{\tilde{\mathcal{B}}} = \{b\}$ y $B_{\tilde{\mathcal{B}}} = \{r\}$.

Consideremos ahora al grafo $G = (V, E)$ de la Figura 3.7, donde $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ y $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_2, v_4\}\}$.

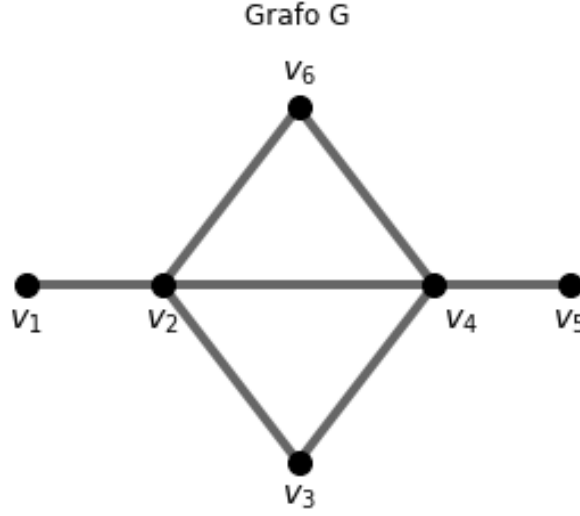


Figura 3.7: Grafo G , seis vértices y siete aristas.

Consideremos también las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\
 r &\rightarrow v_4 \\
 a &\rightarrow v_6 \\
 b &\rightarrow v_2,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\
 r &\rightarrow v_4 \\
 a &\rightarrow v_6 \\
 b &\rightarrow v_3,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\
 r &\rightarrow v_4 \\
 a &\rightarrow v_2 \\
 b &\rightarrow v_3,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\theta_4 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_6 \\ a &\rightarrow v_2,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\theta_5 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_6 \\ a &\rightarrow v_3,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\theta_6 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_2 \\ a &\rightarrow v_3,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\theta_7 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_6 \\ a &\rightarrow v_5,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\theta_8 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_3 \\ a &\rightarrow v_5,\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\theta_9 : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\ r &\rightarrow v_4 \\ b &\rightarrow v_5 \\ a &\rightarrow v_6,\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{10} : G_{\mathcal{A}} &\rightarrow G \\
 r &\rightarrow v_4 \\
 b &\rightarrow v_5 \\
 a &\rightarrow v_3.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observemos que $\theta_i, i \in \{1, \dots, 10\}$, es una incrustación de \mathcal{A} hacia G en el nodo v_4 , más aún, estas funciones son todas las incrustaciones posibles, por lo tanto

$$N_{\mathcal{A}}(v_4|G) = \bigcup_{i=1}^{i=10} \theta_i(B_{\mathcal{A}}) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}.$$

Para saber qué puntos son los que se obtienen, primero, se ubica la raíz en el vértice en el que se desea construir la vecindad, después de esto, se tiene que observar o tener en mente un homomorfismo de grafos entre el grafo estructural y el grafo G (observemos que puede no existir) para finalmente seleccionar los nodos en los que es posible ubicar, mediante el homomorfismo, los nodos brote. Ya que es posible que haya más de una incrustación, el proceso se repite con cada una hasta unir todos los nodos por medio de los brotes.

Si ahora consideramos el grafo estructural \mathcal{B} de la Figura 3.6 b) y al grafo G de la Figura 3.7, entonces, para v_4 tenemos que

$$N_{\mathcal{B}}(v_4|G) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

Observemos que \mathcal{A} y \mathcal{B} no son simétricos, pues no coincidieron las vecindades en el vértice v_4 . También podemos ver este hecho en base a que difieren estos dos grafos estructurales en su cardinalidad.

Si consideramos al grafo recíproco de \mathcal{A} (el grafo $\check{\mathcal{A}}$) y el grafo de la Figura 3.7, entonces las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
 \theta_1 : G_{\check{\mathcal{A}}} &\rightarrow G \\
 a &\rightarrow v_4 \\
 r &\rightarrow v_6 \\
 b &\rightarrow v_2,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2 : G_{\check{\mathcal{A}}} &\rightarrow G \\
 a &\rightarrow v_4 \\
 r &\rightarrow v_3 \\
 b &\rightarrow v_2,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3 : G_{\check{\mathcal{A}}} &\rightarrow G \\
 a &\rightarrow v_4 \\
 r &\rightarrow v_2 \\
 b &\rightarrow v_1,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_4 : G_{\check{\mathcal{A}}} &\rightarrow G \\
 b &\rightarrow v_4 \\
 r &\rightarrow v_6 \\
 a &\rightarrow v_2,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_5 : G_{\check{\mathcal{A}}} &\rightarrow G \\
 b &\rightarrow v_4 \\
 r &\rightarrow v_3 \\
 a &\rightarrow v_2,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

son las únicas incrustaciones de $\check{\mathcal{A}}$ hacia G en el nodo v_4 , por lo tanto

$$N_{\check{\mathcal{A}}}(v_4|G) = \{v_2, v_3, v_6\}.$$

Esto nos permite observar, en primer lugar que, dado un grafo \mathcal{A} y su grafo recíproco $\check{\mathcal{A}}$, no necesariamente tienen la misma vecindad alrededor de un nodo v (por lo que no serían simétricos) y, en segundo lugar, que dado cualquier nodo v , éste no necesariamente pertenece a $N_{\mathcal{A}}(v|G)$ o $N_{\check{\mathcal{A}}}(v|G)$.

Considerando ahora al grafo recíproco de \mathcal{B} , el grafo $\check{\mathcal{B}}$ (Figura 3.4 lado derecho), tenemos que

$$N_{\check{\mathcal{B}}}(v_4|G) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$\text{por tanto } N_{\mathcal{B}}(v_4|G) = N_{\check{\mathcal{B}}}(v_4|G).$$

Observemos que en la igualdad previa, tenemos que el nodo v_4 pertenece a ambas vecindades, esto debido a que un nodo (en \mathcal{B} y $\check{\mathcal{B}}$) es brote y raíz. Más aún, no es difícil ver que, dado $v \in V$, se tiene que

$$N_{\check{\mathcal{B}}} = N_{\mathcal{B}},$$

dado que ellos son homomorfos, se tiene que son simétricos.

Vale la pena hacer la siguiente observación.

Consideremos los grafos \mathcal{D} (Figura 3.3 lado derecho), su grafo recíproco $\check{\mathcal{D}}$ (Figura 3.5 lado derecho) y el grafo G de la Figura 3.7, y consideremos $v_5 \in V$, entonces se puede verificar que

- $N_{\mathcal{D}}(v_5|G) = \{v_4\}$, ya que sólo hay dos incrustaciones en v_5 y en ambas el nodo brote se 'ubica' en v_4 ,

- $N_{\tilde{\mathcal{B}}}(v_5|G) = \emptyset$, pues no es posible hacer una incrustación de $\tilde{\mathcal{B}}$ hacia G en el nodo v_5 ,

es decir que, la vecindad en un grafo estructural puede ser no vacía mientras que en su recíproco lo puede ser.

Definición 3.2.7. Sean \mathcal{A} un s -grafo, $N_{\mathcal{A}}$ su función de vecindades asociada y G un grafo cualquiera, entonces sabemos que los operadores $\delta_{\mathcal{A}}$ y $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ dados por

$$\delta_{\mathcal{A}}(f)(v) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{A}}(v|G)\}, \quad (3.19)$$

y

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(f)(v) = \inf\{f(w) : w \in N_{\mathcal{A}}(v|G)\}, \quad (3.20)$$

para $f \in Fun(V)$, son una adjunción.

Mostramos a continuación como trabaja esta adjunción en un grafo binario.

Ejemplo 3.2.8. Consideremos los grafos estructurales de la Figura 3.8 así como el grafo binario $(T = \{0, 1\})$ de la Figura 3.9.

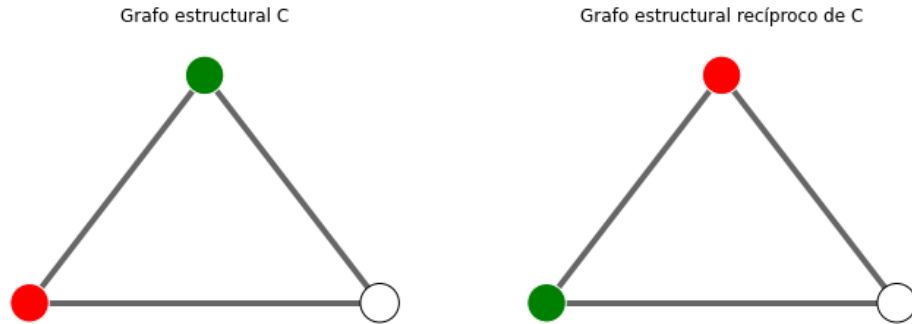


Figura 3.8: Grafos estructurales utilizados en la erosión y dilatación de un grafo

Lo que sigue es calcular las vecindades $N_C(v|G)$ y $N_{\tilde{C}}(v|G)$ para cada $v \in V$, para posteriormente evaluar estos nodos en la función f , donde $f : V \rightarrow T = \{0, 1\}$, y así obtener los supremos e ínfimos, los cuales, son los valores de la dilatación y erosión, valores que son 0 ó 1.

Podemos ver que las vecindades son las siguientes:

- $N_C(v_1|G) = \emptyset = N_{\tilde{C}}(v_1|G)$,
- $N_C(v_2|G) = \{v_3, v_6\} = N_{\tilde{C}}(v_2|G)$,

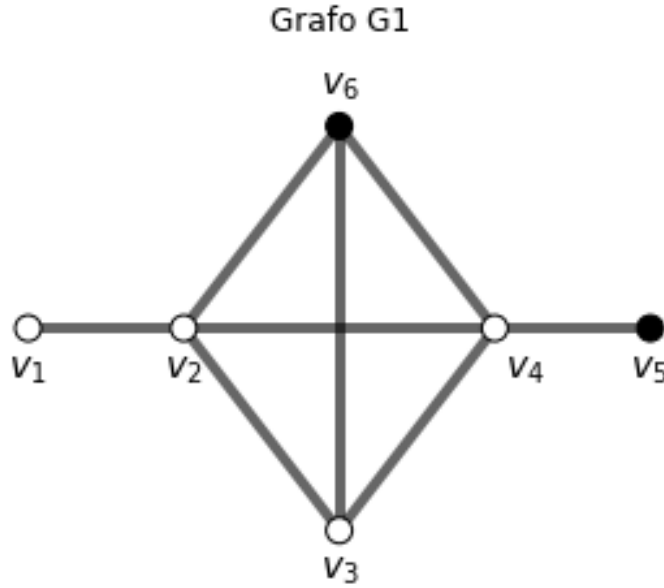


Figura 3.9: Grafo binario en el que por el color blanco y negro tenemos que $0 = f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_4)$ y $1 = f(v_5) = f(v_6)$.

- $N_{\mathcal{C}}(v_3|G) = \{v_2, v_4\} = N_{\tilde{\mathcal{C}}}(v_3|G),$
- $N_{\mathcal{C}}(v_4|G) = \{v_3, v_6\} = N_{\tilde{\mathcal{C}}}(v_4|G) ,$
- $N_{\mathcal{C}}(v_5|G) = \emptyset = N_{\tilde{\mathcal{C}}}(v_5|G) ,$
- $N_{\mathcal{C}}(v_6|G) = \{v_2, v_4\} = N_{\tilde{\mathcal{C}}}(v_6|G).$

Es más, los grafos \mathcal{C} y $\tilde{\mathcal{C}}$ son simétricos, se sigue entonces que

- $\delta_{\mathcal{C}}(f)(v_2) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{C}}(v_2|G) = \sup\{f(w) : w \in \{v_3, v_6\}\} = 1,$
- $\delta_{\mathcal{C}}(f)(v_3) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{C}}(v_3|G) = \sup\{f(w) : w \in \{v_2, v_4\}\} = 0,$
- $\delta_{\mathcal{C}}(f)(v_4) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{C}}(v_4|G) = \sup\{f(w) : w \in \{v_3, v_6\}\} = 1 ,$
- $\delta_{\mathcal{C}}(f)(v_6) = \sup\{f(w) : w \in \tilde{N}_{\mathcal{C}}(v_6|G) = \sup\{f(w) : w \in \{v_2, v_4\}\} = 0.$
- $\varepsilon_{\mathcal{C}}(f)(v_2) = \inf\{f(w) : w \in N_{\mathcal{C}}(v_2|G) = \inf\{f(w) : w \in \{v_3, v_6\}\} = 0,$
- $\varepsilon_{\mathcal{C}}(f)(v_3) = \inf\{f(w) : w \in N_{\mathcal{C}}(v_3|G) = \inf\{f(w) : w \in \{v_2, v_4\}\} = 0,$
- $\varepsilon_{\mathcal{C}}(f)(v_4) = \inf\{f(w) : w \in N_{\mathcal{C}}(v_4|G) = \inf\{f(w) : w \in \{v_3, v_6\}\} = 0 ,$

$$\blacksquare \varepsilon_C(f)(v_6) = \inf\{f(w) : w \in N_C(v_6|G) = \inf\{f(w) : w \in \{v_2, v_4\}\} = 0.$$

Observemos que se obtuvieron los valores de la dilatación y erosión para todos los nodos v , excepto en las vecindades que son vacías, sin embargo, recordemos que $\bigvee \emptyset = 0_{Fun(v)}$ y que $\bigwedge \emptyset = 1_{Fun(v)}$, por tanto, necesitamos tanto el supremo como el ínfimo de $Fun(V)$ para cuando $T = \{0, 1\}$. No es difícil ver que $\bigvee Fun(V)$ es la función constante 1 y $\bigwedge Fun(V)$ es la función constante 0, las cuales pertenecen a $Fun(v)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \blacksquare \delta_C(f)(v_1) &= 0_{Fun(v)}(v_1) = 0, \\ \blacksquare \delta_C(f)(v_5) &= 0_{Fun(v)}(v_5) = 0, \\ \blacksquare \varepsilon_C(f)(v_1) &= 1_{Fun(v)}(v_1) = 1, \\ \blacksquare \varepsilon_C(f)(v_5) &= 1_{Fun(v)}(v_1) = 1, \end{aligned}$$

por lo tanto, la dilatación y la erosión del grafo $G1$ puede verse en la Figura 3.10.

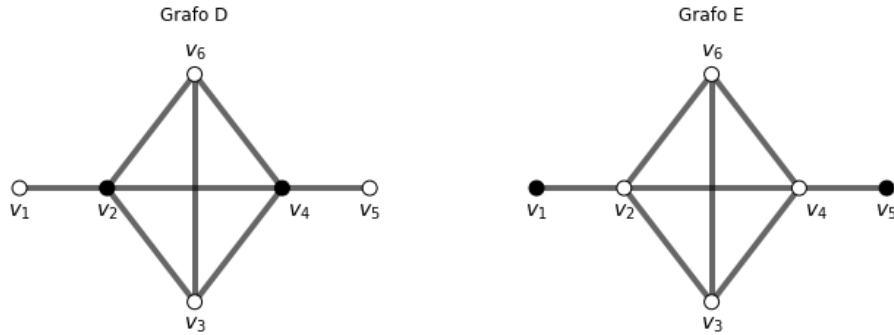


Figura 3.10: Del lado izquierdo la dilatación del grafo $G1$ por el s -grafo recíproco de C . Del lado derecho la erosión del grafo $G1$ por el s -grafo C .

En resumen, en los puntos donde la vecindad es vacía, se procede a dejar el valor de 0 en la dilatación y de 1 en la erosión, y una vez que se entiende bien este proceso, observamos que no es necesario identificar o etiquetar los nodos de un grafo y del s -grafo para visualizar la dilatación y erosión del grafo por el s -grafo como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.9. Consideremos los siguientes grafos estructurales y un grafo binario.

Es fácil ver que los grafos estructurales son simétricos, además, observemos que en este caso, al tener un nodo como raíz y brote, al situarlo en el vértice $v \in V(G2)$, se tendrá que $v \in N_S(v|G2)$ y en la vecindad de su s -grafo recíproco, por lo tanto, podemos ver la dilatación del grafo $G2$ en la Figura 3.13 y su erosión en la Figura 3.14.

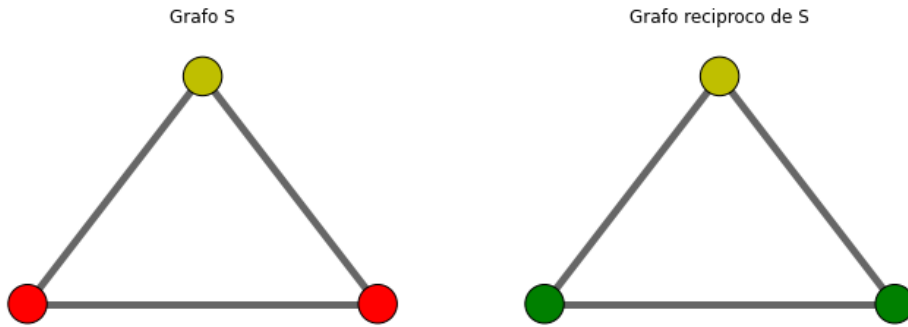


Figura 3.11: *Grafos estructurales S y \tilde{S} .*

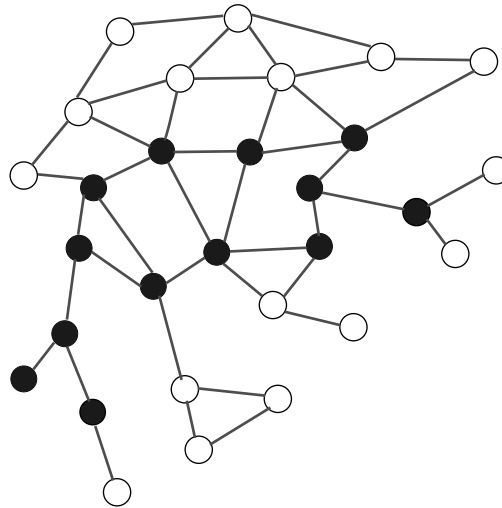


Figura 3.12: *Grafo binario $G2$*

Más aún, sabemos que δ es una dilatación y ε su erosión adjunta, por lo tanto, tenemos que $\delta\varepsilon$ es una apertura en $\text{Fun}(V)$ y $\varepsilon\delta$ es un cierre en $\text{Fun}(V)$, por lo que terminamos el presente capítulo mostrando un ejemplo de apertura y cierre de un grafo, más en concreto, utilizando el ejemplo previo, es decir, mostramos la apertura y cerradura del grafo $G2$ (con respecto a los grafos estructurales de la Figura 3.12), las cuales pueden verse en la Figura 3.15 y en la Figura 3.16.

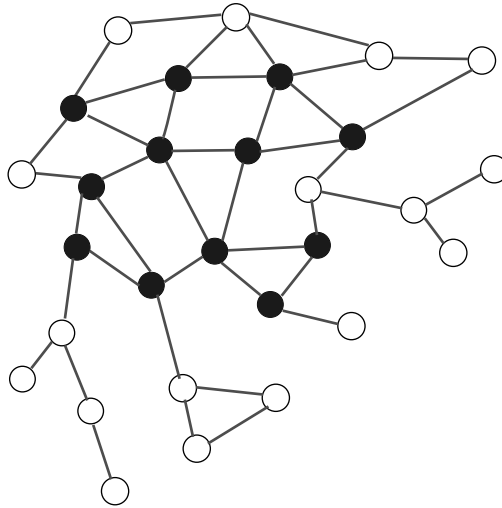


Figura 3.13: *Dilatación del grafo G2.*

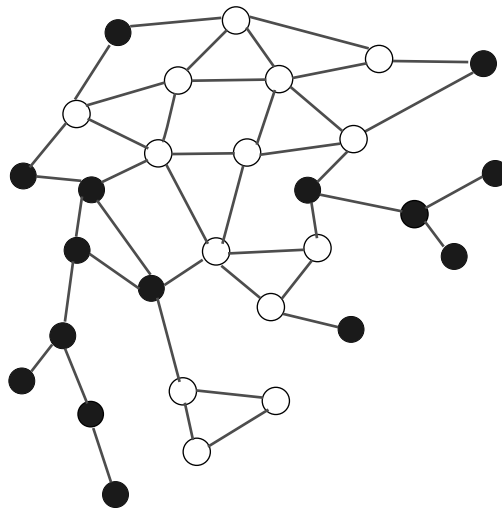


Figura 3.14: *Erosión del grafo G2.*

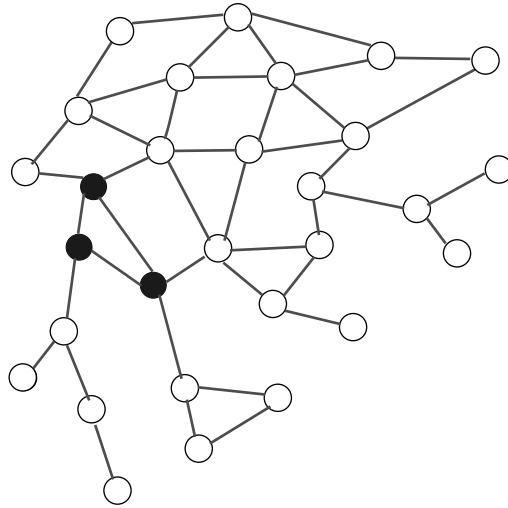


Figura 3.15: *Apertura del grafo G_2 .*

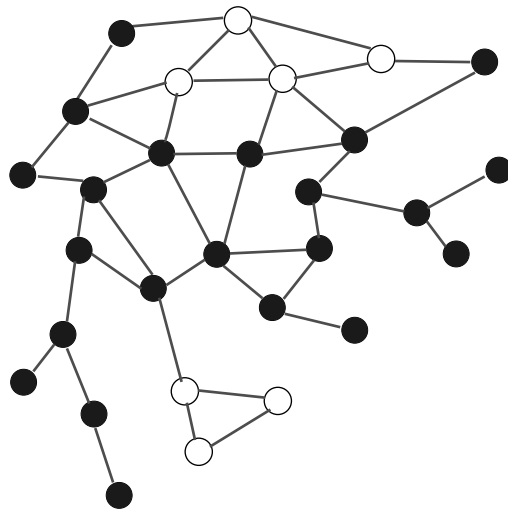


Figura 3.16: *Cierre del grafo G_2 .*

Capítulo 4

Morfología matemática en hipergrafos

Una vez que hemos mostrado como actúa la morfología matemática en grafos, tenemos en mente una idea de lo que se requiere para comenzar a realizar morfología matemática en un espacio más general, los hipergrafos. Aunque la forma en que se aborda la morfología matemática en estos tipos de espacios (grafos e hipergrafos) es distinta (ya que las retículas usadas son distintas), la matemática que respalda su morfología desarrollada es la misma. Para respaldar toda la teoría, información y ejemplos que se exponen en este último capítulo puede consultar [4], [5], [6] y [9].

4.1. Retículas en hipergrafos

En esta sección exploramos algunas retículas creadas en hipergrafos, ya que al día de hoy siguen siendo de interés y estudiadas de amplia manera. Poco más adelante mostramos como actúan algunos operadores morfológicos definidos en este tipo de estructuras o, por lo menos, en algunas de ellas.

Definición 4.1.1. Sean $H = (V, E)$ un hipergrafo y $V' \subseteq V$, decimos que V' es un conjunto cerrado si $\forall x, y \in V' : v(H(x) \cap H(y)) \subseteq V'$.

Denotamos por $\mathcal{C}(H)$ a la familia de conjuntos cerrados junto con el conjunto vacío.

Proposición 4.1.2. La estructura $(\mathcal{C}(H), \subseteq)$ es una retícula completa, donde el ínfimo es $\bigwedge = \bigcap$ y el supremo es: $\forall V', V'' \in \mathcal{C}(H), V' \vee V'' = \bigcap \{V''' \in \mathcal{C}(H) | V' \cup V'' \subseteq V'''\}$, es decir, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $V' \cup V''$ y ésta se extiende a cualquier familia.

Una primera observación es que el supremo es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $V' \cup V''$ y además $\bigvee \mathcal{C}(H) = V$ y $\bigwedge \mathcal{C}(H) = \emptyset$.

Como segunda observación tenemos que la unión de dos conjuntos cerrados no necesariamente es un conjunto cerrado así como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos el hipergrafo $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_5\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, donde $e_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $e_2 = \{x_3, x_5\}$, $e_3 = \{x_1, x_4, x_5\}$. Tenemos que $H(x_1) = \{e_3\}$, $H(x_2) = \{e_1\}$, $H(x_3) = \{e_1, e_2\}$, $H(x_4) = \{e_1, e_3\}$, $H(x_5) = \{e_2, e_3\}$. Observemos que ocurre lo siguiente

- $v(H(x_2) \cap H(x_3)) = v(\{e_1\} \cap \{e_1, e_2\}) = v(\{e_1\}) = e_1 \subseteq e_1$,
- $v(H(x_2) \cap H(x_4)) = v(\{e_1\} \cap \{e_1, e_3\}) = v(\{e_1\}) = e_1 \subseteq e_1$,
- $v(H(x_3) \cap H(x_4)) = v(\{e_1, e_2\} \cap \{e_1, e_3\}) = v(\{e_1\}) = e_1 \subseteq e_1$,
- $v(H(x_3) \cap H(x_5)) = v(\{e_1, e_2\} \cap \{e_2, e_3\}) = v(\{e_2\}) = e_2 \subseteq e_2$.

Observemos que esto quiere decir que las hiperaristas e_1, e_2 son conjuntos cerrados. Sin embargo, si consideramos a su unión, $e_1 \cup e_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, tenemos que esta unión no es un conjunto cerrado, ya que $v(H(x_4) \cap H(x_5)) = v(\{e_1, e_3\} \cap \{e_2, e_3\}) = v(\{e_3\}) = e_3$ y sabemos que $x_1 \in e_3$ pero $x_1 \notin e_1 \cup e_2$.

Las *lattices* en hipergrafos nos permitirán tener un mayor conocimiento de la información estructural encubierta en éstos, y más, considerando tanto retículas en sus vértices como en sus hiperaristas. Podríamos también definir un orden parcial basado en la noción de subhipergrafo inducido, hipergrafo parcial, etc. y para hacer esto necesitamos definir un conjunto parcialmente ordenado (para cada subhipergrafo) con estructura de retícula completa. Empezamos denotando al universo de los hipergrafos como $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde \mathcal{V} es el conjunto de vértices y \mathcal{E} el conjunto de hiperaristas, así como sus conjuntos potencia $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ respectivamente. Como veremos, la ventaja de definir alguna retícula completa para estos hipergrafos es que parten de propiedades similares, por lo que comenzamos definiendo los elementos del siguiente conjunto \mathcal{T} para posteriormente ir indicando la relación que dotará de retícula completa a este conjunto. Veamos a continuación retículas definidas en este tipo de espacios.

Definición 4.1.4. Consideremos al universo de los hipergrafos $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, entonces $H(V, E) \in \mathcal{T}$ si se cumplen las siguientes propiedades

- $V \subseteq \mathcal{V}$,

- $E \subseteq \mathcal{E}$,
- $\{x \in \mathcal{V} | \exists e \in E : x \in e\} \subseteq V$.

Observemos que la última condición (que relaciona a V con E) asegura que $H = (V, E)$ sea un hipergrafo.

Con base en la definición previa, la primera restricción o indicación que damos es considerando la relación de inclusión que hay entre los nodos e hiperaristas.

Definición 4.1.5. Sean $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{T}$, tenemos que $H_1 \leq H_2$ si

- $V_1 \subseteq V_2$,
- $E_1 \subseteq E_2$.

Observemos que en esta definición se tomaron dos elementos de \mathcal{T} y se indicó la forma de relacionar ambos, por lo que esperamos que (\mathcal{T}, \leq) sea una retícula completa.

Proposición 4.1.6. Tenemos las siguientes propiedades

- \leq define un orden parcial en \mathcal{T} .
- $\mathcal{L} = (\mathcal{T}, \leq)$ es una retícula completa, donde $\bigwedge \mathcal{L} = \bigvee \emptyset = H_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$ y $\bigvee \mathcal{L} = \bigwedge \emptyset = \mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$.
- El ínfimo es $H_1 \bigwedge H_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, y para cualquier familia $(H_i) : \bigwedge H_i = (\cap V_i, \cap E_i)$.
- El supremo es $H_1 \bigvee H_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, y para cualquier familia $(H_i) : \bigvee H_i = (\cup V_i, \cup E_i)$.

Observemos que podemos considerar esta definición para grafos, es decir, para hiperaristas de cualquier cardinalidad.

Procedemos hacer lo mismo en las siguientes definiciones, es decir, tomar elementos de \mathcal{T} e ir indicando la forma de relacionar ambos elementos.

Con base en la definición anterior podemos hacer una restricción derivada de la noción de hipergrafo parcial, dando lugar a lo siguiente.

Definición 4.1.7. Dados $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{T}$, tenemos que $H_1 \leq_p H_2$ si

- $V_1 = V_2$,
- $E_1 \subseteq E_2$.

Proposición 4.1.8. \leq_p es una relación de orden parcial en \mathcal{T} y $\mathcal{L} = (\mathcal{T}, \leq_p)$ es una retícula completa.

Observemos que una vez fijo el conjunto de nodos, ésto sería lo mismo que considerar la retícula $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subseteq)$.

Definición 4.1.9. Para $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{T}$, decimos que $H_1 \leq_s H_2$ si H_1 es un subhipergrafo de H_2 , es decir, se cumple lo siguiente

- $V_1 \subseteq V_2$,
- $E_1 = \{e \in E_2 \mid e \subseteq V_1\}$.

Debemos notar que la condición de arriba, con respecto a las hiperaristas, es más fuerte que sólo tener $E_1 \subseteq E_2$, ya que E_1 debería contener todas las hiperaristas de E_2 compuestas de nodos de V_1 .

Al igual que antes podemos modificar ligeramente la definición previa como sigue.

Definición 4.1.10. Para $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{T}$, tenemos que $H_1 \leq'_s H_2$ si

- $V_1 \subseteq V_2$,
- $E_1 \subseteq \{e \in E_2 \mid e \subseteq V_1\}$.

Con base en esta definición y la anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.11. \leq_s y \leq'_s definen un orden parcial en \mathcal{T} .

Es posible definir un orden parcial con el tipo de inclusión implícito en la definición de subhipergrafo inducido, es decir.

Definición 4.1.12. Sean $H_1, H_2 \in \mathcal{T}$, tenemos que $H_1 \leq_i H_2$ si

- $V_1 \subseteq V_2$,
- $E_1 = \{e \cap V_1 \neq \emptyset : e \in E_2 \text{ y } e \text{ es un bucle ó } |e \cap V_1| \geq 2\} = E_3$.

Es decir que H_1 es el subhipergrafo inducido de H_2 por V_1 . Esta relación, al igual que \leq_s , definen un orden parcial en \mathcal{T} .

Proposición 4.1.13. *La relación \leq_i define un orden parcial en \mathcal{T} .*

Al igual que en las definiciones anteriores, podemos proponer una condición menos estricta y en este caso tomamos a E_1 contenido en E_3 .

Definición 4.1.14. *Para $H_1, H_2 \in \mathcal{T}$, escribimos que $H_1 \leq'_i H_2$ si*

- $V_1 \subseteq V_2$,
- $E_1 \subseteq E_3$.

Y, al igual que antes, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.15. *Tenemos que se cumplen las siguientes propiedades*

- \leq'_i define un orden parcial en \mathcal{T} .
- $\mathcal{L} = (\mathcal{T}, \leq'_i)$ es una retícula completa, donde $\bigwedge \mathcal{L} = \bigvee \emptyset = H_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$ y $\bigvee \mathcal{L} = \bigwedge \emptyset = \mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.
- El ínfimo es $H_1 \bigwedge'_i H_2 = (V_1 \cap V_2, \{e' = \{e \cap V_1 \cap V_2\} | e \in E_1 \cap E_2\} \cap \mathcal{E})$ y para cualquier familia $(H_j)_{j \in J} : \bigwedge'_i (H_j)_{j \in J} = (\cap_{j \in J} V_j, \{e' = \{e \cap (\cap_{j \in J} E_j)\} | e \in \cap_{j \in J} E_j\} \cap \mathcal{E})$.
- El supremo es $H_1 \bigvee'_i H_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ y esta se extiende para cualquier familia (H_i) .

Una última idea que podemos considerar es la de isomorfismos de hipergrafos, que es como sigue.

Definición 4.1.16. *Sea $\overline{\mathcal{H}}$ el conjunto de los hipergrafos isomorfos. Podemos definir un orden parcial para cada $H_1, H_2 \in \overline{\mathcal{H}}$ como sigue*

$$H_1 \leq_f H_2 \iff H_1 \text{ es isomorfo (por la función } f) \text{ a algún subhipergrafo inducido de } H_2.$$

Tenemos la siguiente proposición que nos asegura que en efecto tenemos otra retícula completa en la clase de los hipergrafos isomorfos.

Proposición 4.1.17. *Tenemos que se cumplen las siguientes propiedades*

- \leq_f define un orden parcial en \mathcal{T} .
- $\mathcal{L} = (\mathcal{T}, \leq_f)$ es una retícula completa.
- El ínfimo es el máximo común subhipergrafo inducido y se extiende para cualquier familia.
- El supremo es $H_1 \bigvee H_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, y para cualquier familia $(H_i) : \bigvee H_i = (\cup V_i, \cup E_i)$.

Debido a que el objetivo de este texto no es profundizar en este tipo de estructuras, el lector puede consultar [5], que es en donde se presentan las demostraciones de estas proposiciones así como más resultados.

4.2. Morfología en hipergrafos

Una vez que hemos presentado varias *lattices* en hipergrafos, recordemos que para definir dilataciones, así como erosiones, necesitamos contar con dos *lattices*, por lo que las dos retículas completas que primero se vienen a la mente, al considerar un hipergrafo, son tanto el conjunto potencia de vértices como el conjunto potencia de sus hiperaristas, sin embargo, la importancia que haya en este tipo de retículas dependerá de como se definan las operaciones morfológicas en cada una.

Empezamos esta última sección con una caracterización. En el caso de las retículas del conjunto potencia de un conjunto, lo que podemos hacer es caracterizar una dilatación por su comportamiento en puntos llamados *singletons* y para esto, escribiremos $\delta(p)$ en lugar de $\delta(\{p\})$ si no hay mayor problema, o, en caso de querer hacer énfasis, lo escribiremos de forma normal.

Proposición 4.2.1. Sean E_1, E_2 dos espacios

- Una función $\delta : (\mathcal{P}(E_1), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(E_2), \subseteq)$, es una dilatación si y sólo si

$$\forall X \in \mathcal{P}(E_1) : \delta(X) = \bigcup_{x \in X} \delta(x). \quad (4.1)$$

- La erosión adjunta $\varepsilon : (\mathcal{P}(E_2), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(E_1), \subseteq)$, está dada por

$$\forall Y \in \mathcal{P}(E_2) : \varepsilon(Y) = \{y \in E_1 \mid \delta(y) \subseteq Y\}, \quad (4.2)$$

en particular,

$$\forall Y \in \mathcal{P}(E_2) : \{y \in E_1 \mid \delta(y) \subseteq Y\} = \bigcup \{E \in \mathcal{P}(E_1) \mid \delta(E) \subseteq Y\}. \quad (4.3)$$

Demostración. Sean δ y ε como arriba.

Veamos primero que δ es una dilatación si y sólo si ocurre lo antes mencionado.

\Rightarrow] Sea $X \in \mathcal{P}(E_1)$ y supongamos que δ es una dilatación, entonces

$$\delta(X) = \delta\left(\bigcup_{x \in X} \{x\}\right) = \delta\left(\bigvee_{x \in X} \{x\}\right) = \bigvee_{x \in X} \delta(\{x\}) = \bigcup_{x \in X} \delta(x).$$

\Leftarrow] Sea $X_i, i \in I$, una familia de $\mathcal{P}(E_1)$, entonces

$$\delta\left(\bigvee_{i \in I} X_i\right) = \delta\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \delta(A) = \bigcup_{a \in A} \delta(a) = \bigcup_{i \in I} \delta(X_i) = \bigvee_{i \in I} \delta(X_i),$$

donde $A = \bigcup_{i \in I} X_i$, por lo que δ es una dilatación.

Veamos que en efecto $\bigcup_{a \in A} \delta(a) = \bigcup_{i \in I} \delta(X_i)$.

\subseteq] Sea $y \in \bigcup_{a \in A} \delta(\{a\}) \Rightarrow \exists a_0 \in A : y \in \delta(\{a_0\})$, más aún, $\exists j \in I : a_0 \in X_j$, entonces $\delta(a_0) \subseteq \bigcup_{j \in J} \delta(a_j) = \delta\left(\bigcup_{j \in J} (a_j)\right) = \delta(X_j) \subseteq \bigcup_{i \in I} \delta(X_i)$.

\supseteq] Sea $y \in \bigcup_{i \in I} \delta(X_i)$, entonces

$\exists j \in I : y \in \delta(X_j) \Rightarrow \exists j \in I : y \in \delta\left(\bigcup_{x_j \in X_j} \{x_j\}\right) \Rightarrow \exists j \in I : y \in \bigcup_{x_j \in X_j} \delta\{x_j\} \Rightarrow \exists j \in I : y \in \bigcup_{x_j \in X_j} \delta\{x_j\} \wedge \exists x_i \in X_j : y \in \delta\{x_i\}$,

sea $a_0 = x_i$, como $x_i \in X_j \subseteq A$ entonces $\exists a_0 \in A : y \in \delta(a_0)$.

Veamos por último que (ε, δ) forman una adjunción (sabiendo de antemano que δ es una dilatación.)

Sean $X \in \mathcal{P}(E_1), Y \in \mathcal{P}(E_2)$, veamos que $\delta(X) \subseteq Y \iff X \subseteq \varepsilon(Y)$.

\Leftarrow] Como $X \in \mathcal{P}(E_1)$ y $X \subseteq \varepsilon(Y)$ entonces $X \subseteq \bigcup\{E \in \mathcal{P}(E_1) | \delta(E) \subseteq Y\} = \varepsilon(Y)$.

\Rightarrow] Sea $x \in X \subseteq E_1$. Sabemos que $\delta(X) = \delta(\bigcup_{a \in X} \{x\}) = \bigcup_{a \in X} \delta\{a\} \subseteq Y$, en particular tenemos que $x \in E_1 : \delta\{x\} \subseteq \bigcup_{a \in X} \delta\{a\} \subseteq Y$, por lo que $x \in \{y \in E_1 | \delta(y) \subseteq Y\} = \varepsilon(Y)$.

No es difícil ver que $\forall Y \in \mathcal{P}(E_2) : \{y \in E_1 | \delta(y) \subseteq Y\} = \bigcup\{E \in \mathcal{P}(E_1) | \delta(E) \subseteq Y\}$.

□

Hemos caracterizado dilataciones y erosiones que partan del conjunto potencia de un conjunto A al conjunto potencia de un conjunto B, por lo que basta ver que se cumpla la condición de arriba para, en efecto, tener una dilatación y su erosión adjunta, más aún, observemos que, al tener esta adjunción, podemos definir una apertura y un cierre adjuntos.

Antes de continuar, recordemos que en la morfología clásica las dilataciones y erosiones pueden ser expresadas por medio de un conjunto llamado elemento estructural, que fue lo que vimos en el capítulo 3, por lo que el elemento estructural centrado en x lo denotaremos por $B_x = \delta(\{x\})$.

Un ejemplo de elemento estructural centrado en la hiperarista e (del conjunto de hiperaristas \mathcal{E}) consiste en tomar todas las hiperaristas que tengan al menos un nodo en común, consideremos lo siguiente.

Ejemplo 4.2.2. Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subseteq)$, definimos en cada hiperarista lo siguiente

$$\forall e \in \mathcal{E} : B_e = \delta(\{e\}) = \{e' \in \mathcal{E} | v(e) \cap v(e') \neq \emptyset\}, \quad (4.4)$$

por lo que la dilatación de algún subconjunto de hiperaristas E , está dado por

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \delta(E) = \{e' \in \mathcal{E} | v(E) \cap v(e') \neq \emptyset\}, \quad (4.5)$$

más aún, la erosión adjunta está dada por

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \varepsilon(E) = \{e' \in \mathcal{E} : \delta(e') \subseteq E\}. \quad (4.6)$$

Tenemos que, en efecto, ésta es una dilatación.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, entonces

$$\begin{aligned} \delta(E) &= \{e' \in \mathcal{E} | v(E) \cap v(e') \neq \emptyset\} = \{e' \in \mathcal{E} | (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset\} = \{e' \in \mathcal{E} | \bigcup_{i \in I} (e_i \cap e') \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} | e_i \cap e' \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \delta(\{e_i\}). \end{aligned}$$

Veamos que se cumple $\{e' \in \mathcal{E} | \bigcup_{i \in I} (e_i \cap e') \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} | e_i \cap e' \neq \emptyset\}$

\subseteq] Sea $e_y \in \{e' \in \mathcal{E} | \bigcup_{i \in I} (e_i \cap e') \neq \emptyset\}$, como $\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e_y) \neq \emptyset$, al menos, existe $j \in I : e_j \cap e_y \neq \emptyset$, de lo contrario podemos llegar a una contradicción, por lo tanto $e_y \in \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} | e_i \cap e' \neq \emptyset\}$.

\supseteq] Sea $e_y \in \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} | e_i \cap e' \neq \emptyset\}$, entonces existe $j \in I : e_j \cap e_y \neq \emptyset$, como $\emptyset \neq e_j \cap e_y \subseteq (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e_y$, tenemos que $y \in \{e' \in \mathcal{E} | \bigcup_{i \in I} (e_i \cap e') \neq \emptyset\}$. \square

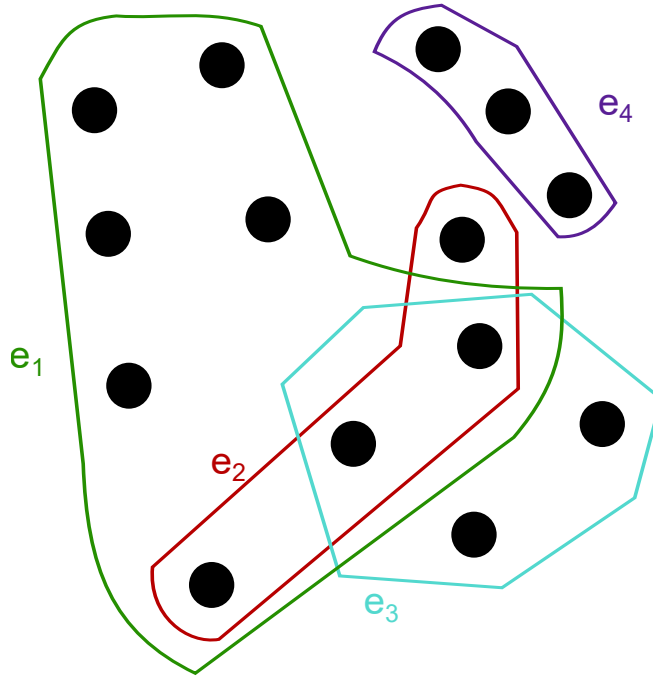


Figura 4.1: Hipergrafo con catorce nodos y tres hiperaristas, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Consideremos el hipergrafo de la Figura 4.1, entonces podemos asegurar que tenemos todas las operaciones morfológicas siguientes

- Dilataciones.

$$\begin{aligned} \delta(e_1) &= \{e_1, e_2, e_3\}, & \delta(e_2) &= \{e_1, e_2, e_3\}, & \delta(e_3) &= \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \delta(e_4) &= \{e_4\}, & \delta(\{e_1, e_2\}) &= \delta(e_1) \cup \delta(e_2) = \{e_1, e_2, e_3\}, & \delta(\{e_1, e_4\}) &= E. \end{aligned} \quad (4.7)$$

- Erosiones adjuntas.

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_1) &= \emptyset, & \varepsilon(e_2) &= \emptyset, & \varepsilon(e_3) &= \emptyset, \\ \varepsilon(e_4) &= \{e_4\}, & \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) &= \{e_1, e_2, e_3\}, & \varepsilon(E) &= E. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observemos que $\forall E' \subseteq E : \varepsilon(E') = \emptyset$, excepto para los conjuntos $\{e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ y E .

- Aperturas dadas por $\alpha = \delta\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \alpha(e_1) &= \delta\varepsilon(e_1) = \delta(\emptyset) = \emptyset, \\ \alpha(e_2) &= \delta\varepsilon(e_2) = \delta(\emptyset) = \emptyset, \\ \alpha(E) &= \delta\varepsilon(E) = \delta(E) = E, \\ \alpha(e_4) &= \delta\varepsilon(e_4) = \delta(e_4) = \{e_4\}, \\ \alpha(\{e_1, e_2\}) &= \delta\varepsilon(\{e_1, e_2\}) = \delta(\emptyset) = \emptyset, \\ \alpha(\{e_1, e_2, e_3\}) &= \delta\varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \delta(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

- Cierres dados por $\beta = \varepsilon\delta$.

$$\begin{aligned} \beta(e_1) &= \varepsilon\delta(e_1) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \beta(e_4) &= \varepsilon\delta(e_4) = \varepsilon(e_4) = \{e_4\}, \\ \beta(E) &= \varepsilon\delta(E) = \varepsilon(E) = E, \\ \beta(\{e_1, e_2\}) &= \varepsilon\delta(\{e_1, e_2\}) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \beta(\{e_1, e_3\}) &= \varepsilon\delta(\{e_1, e_3\}) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \beta(\{e_1, e_2, e_3\}) &= \varepsilon\delta(\{e_1, e_2, e_3\}) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Observemos que $\delta(\emptyset)$ es considerar el ínfimo de la retícula (\mathcal{E}, \subseteq) , por lo que $\delta(\emptyset)$ es el conjunto vacío de hiperaristas.

Podemos considerar otro ejemplo en el que menos hiperaristas son agregadas y puede ser obtenido imponiendo una restricción sobre la cardinalidad, esto sería como sigue.

Ejemplo 4.2.3. Sean $\mathcal{L} = (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subseteq)$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos para cada hiperarista lo siguiente

$$\forall e \in \mathcal{E} : B_e = \delta(\{e\}) = \{e' \in \mathcal{E} : |v(e) \cap v(e')| \geq k\}, \quad (4.11)$$

por lo que la dilatación de algún subconjunto de hiperaristas E se define como

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \delta(E) = \{e' \in \mathcal{E} : |v(E) \cap v(e')| \geq k\}. \quad (4.12)$$

Al igual que en el ejemplo previo, la erosión adjunta está dada por

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \varepsilon(E) = \{e' \in \mathcal{E} : \delta(e') \subseteq E\}. \quad (4.13)$$

Veamos que δ es una dilatación.

Demostración. Sean $e \in E$ y $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_B^k(E) &= \{e' \in \mathcal{E} : |v(E) \cap v(e')| \geq k\} = \{e' \in \mathcal{E} : |(\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e'| \geq k\} = \{e' \in \mathcal{E} : \\ &|\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e')| \geq k\} = \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} : |e_i \cap e'| \geq k\} = \bigcup_{i \in I} \delta(e_i) = \bigcup_{e \in E} \delta(e). \end{aligned}$$

Veamos que en efecto $\{e' \in \mathcal{E} : |\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e')| \geq k\} = \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} : |e_i \cap e'| \geq k\}$.

\supseteq] Siempre ocurre esta contención, ya que, si $z \in \bigcup_{i \in I} \{e' \in \mathcal{E} : |e_i \cap e'| \geq k\} \Rightarrow \exists j \in I : |e_j \cap z| \geq k \Rightarrow \exists j \in I : |(\bigcup_{i \in I} e_i) \cap z| \geq |e_j \cap z| \geq k \Rightarrow z \in \{e' \in \mathcal{E} : |\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e')| \geq k\}$.

\subseteq] Una observación es que esta contención no siempre ocurre para cualquier conjunto e' , sin embargo, al fijar al hipergrafo $H = (V \subseteq \mathcal{V}, E \subseteq \mathcal{E})$, tenemos automáticamente que, al tomar $z \in \{e' \in \mathcal{E} : |\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e')| \geq k\}$, se tiene que $z \in E$ ($\exists j \in I : e_j = z$, es decir que, z es una hiperarista más de E) y $|\bigcup_{i \in I} (e_i \cap z)| \geq k$, dado que $|z| \geq |(\bigcup_{i \in I} e_i) \cap z| \geq k$, tenemos que z es el elemento buscado, es decir, $z \in \{e' \in \mathcal{E} : |\bigcup_{i \in I} (e_i \cap e')| \geq k\}$. \square

Si consideramos el hipergrafo de la Figura 4.2, de igual manera, tenemos todas las operaciones morfológicas siguientes para $k = 2$.

■ Dilataciones.

$$\begin{aligned} \delta(e_1) &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\}, & \delta(e_2) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, & \delta(e_3) &= \{e_2, e_3\}, \\ \delta(e_4) &= \{e_1, e_2, e_4, e_5\}, & \delta(\{e_5\}) &= \{e_1, e_4, e_5\}, & \delta(\{e_3, e_5\}) &= E. \end{aligned} \quad (4.14)$$

■ Erosiones adjuntas.

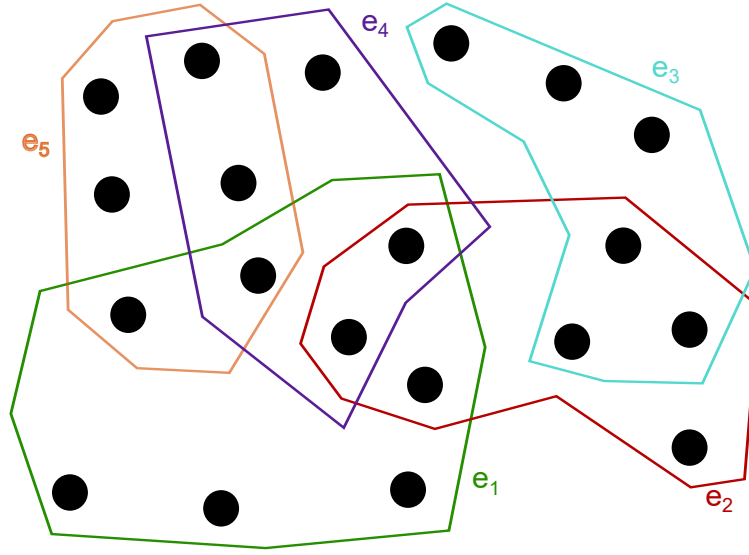


Figura 4.2: Hipergrafo con veinte nodos y cinco hiperaristas, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_1) &= \emptyset, & \varepsilon(e_2) &= \emptyset, & \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) &= \{e_3\}, \\ \varepsilon(\{e_2, e_3\}) &= \{e_3\}, & \varepsilon(E) &= E, & \varepsilon(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) &= \{e_1, e_4\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Aperturas dadas por $\alpha = \delta\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \alpha(e_1) &= \delta\varepsilon(e_1) = \delta(\emptyset) = \emptyset, \\ \alpha(\{e_2, e_3\}) &= \delta\varepsilon(\{e_2, e_3\}) = \delta(e_3) = \{e_2, e_3\}, \\ \alpha(E) &= \delta\varepsilon(E) = \delta(E) = E, \\ \alpha(\{e_1, e_2, e_3\}) &= \delta\varepsilon(\{e_1, e_2, e_3\}) = \delta(e_3) = \{e_2, e_3\}, \\ \alpha(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) &= \delta\varepsilon(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) = \delta(\{e_1, e_4\}) = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

- Cierres dados por $\beta = \varepsilon\delta$.

$$\begin{aligned} \beta(e_1) &= \varepsilon\delta(e_1) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) = \{e_1, e_4\}, \\ \beta(e_4) &= \varepsilon\delta(e_4) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) = \{e_1, e_4\}, \\ \beta(E) &= \varepsilon\delta(E) = \varepsilon(E) = E, \\ \beta(\{e_2, e_3\}) &= \varepsilon\delta(\{e_2, e_3\}) = \varepsilon(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \beta(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) &= \varepsilon\delta(\{e_1, e_2, e_4, e_5\}) = \varepsilon(E) = E, \\ \beta(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) &= \varepsilon\delta(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = \varepsilon(E) = E. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Una observación es que, en grafos, ésta restricción no puede existir para $k > 2$.

Tenemos ahora dos ejemplos triviales de dilataciones y erosiones, donde el conjunto de ida y de llegada son distintos.

Ejemplo 4.2.4. ■ *El operador δ dada por: $(\delta : \mathcal{P}(E), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(V), \subseteq)$ es una dilatación dada por*

$$\forall e \in \mathcal{E} : B_e = \delta(\{e\}) = \{x \in \mathcal{V} | x \in v(e)\} = v(e) = e, \quad (4.18)$$

por lo que la dilatación de algún subconjunto de hiperaristas E , está dado por

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \delta(E) = \{x \in \mathcal{V} : x \in v(E)\} = v(E) = \bigcup_{e \in E} e. \quad (4.19)$$

Más aún, su erosión adjunta está dada por

$$\forall V \in \mathcal{V} : \varepsilon(V) = \{e \in \mathcal{E} : \delta(e) \subseteq V\}, \quad (4.20)$$

■ *El operador δ dada por: $(\delta : \mathcal{P}(V), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(E), \subseteq)$ es una dilatación dada por*

$$\forall x \in \mathcal{V} : B_e = \delta(\{x\}) = \{e \in \mathcal{E} | x \in v(e)\}, \quad (4.21)$$

por lo que la dilatación de algún subconjunto de nodos V , está dado por

$$\forall V \in \mathcal{P}(\mathcal{V}) : \delta\left(\bigcup_{v \in V} \{v\}\right) = \bigcup_{v \in V} \delta(v), \quad (4.22)$$

Más aún, su erosión adjunta está dada por

$$\forall E \in \mathcal{E} : \varepsilon(E) = \{x \in \mathcal{V} : \delta(x) \subseteq E\}. \quad (4.23)$$

Aunque estas operaciones morfológicas difieren en su conjunto de ida con el de llegada, no son tan interesantes, ya que no agregan hiperaristas ni nodos, en cambio, son útiles en hipergrafos duales (lo cual no se explica en este trabajo de tesis). Ver [5].

Podemos ahora definir un elemento estructurante como en el primer ejemplo pero considerando la siguiente dilatación.

Ejemplo 4.2.5. Sea $\delta : (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{V}), \subseteq)$, como sigue

$$\begin{aligned} \forall e \in E : B_e = \delta(\{e\}) &= \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in v(e') \wedge v(e) \cap v(e') \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup \{v(e') \mid v(e') \cap v(e) \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup \{e' \mid e' \cap e \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

por lo que la dilatación de algún subconjunto de hiperaristas E , está dado por

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : \delta(E) = \bigcup \{v(e') \mid v(e') \cap v(E) \neq \emptyset\}. \quad (4.25)$$

Más aún, su erosión adjunta puede verse como sigue

$$\forall V \in \mathcal{P}(\mathcal{V}) : \varepsilon(V) = \{e \in \mathcal{E} : \delta(e) \subseteq V\}. \quad (4.26)$$

Veamos que en efecto tenemos una dilatación.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, luego

$$\begin{aligned} \delta(E) &= \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in v(e') \wedge v(E) \cap v(e') \neq \emptyset\} = \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_i \cap v(e') \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_i \cap e' \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Veamos que $\{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_i \cap e' \neq \emptyset\}$.

\supseteq] Sea $y \in \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_i \cap e' \neq \emptyset\} \Rightarrow \exists j \in I : y \in \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_j \cap e' \neq \emptyset\} \Rightarrow \exists e_y \in \mathcal{E} : y \in e_y \wedge e_j \cap e_y \neq \emptyset$, dado que $\emptyset \neq e_j \cap e_y \subseteq (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e_y$, se sigue que $y \in \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset\}$.

\subseteq] Sea $y \in \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset\} \Rightarrow \exists e' \in \mathcal{E} : y \in e' \wedge (\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' \neq \emptyset$. Si ocurre que $\forall i \in I : e_i \cap e' = \emptyset$, entonces $(\bigcup_{i \in I} e_i) \cap e' = \bigcup_{i \in I} (e_i \cap e') = \bigcup_{i \in I} \emptyset = \emptyset$, lo cual no puede ocurrir, entonces $\exists j \in I : e_j \cap e' \neq \emptyset$, por lo tanto $y \in \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} \mid \exists e' \in \mathcal{E} : x \in e' \wedge e_i \cap e' \neq \emptyset\}$. \square

Consideremos el hipergrafo de la Figura 4.3, entonces las dilataciones de las hiperaristas e_4 y e_6 se pueden ver en la Figura 4.4.

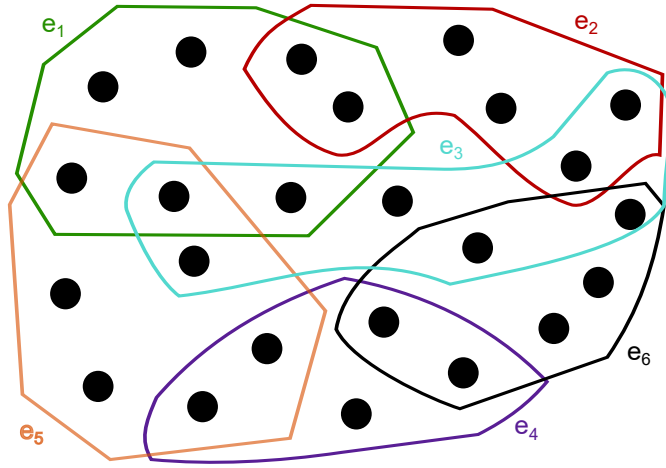


Figura 4.3: Hipergrafo con veinticuatro nodos y seis hiperaristas, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

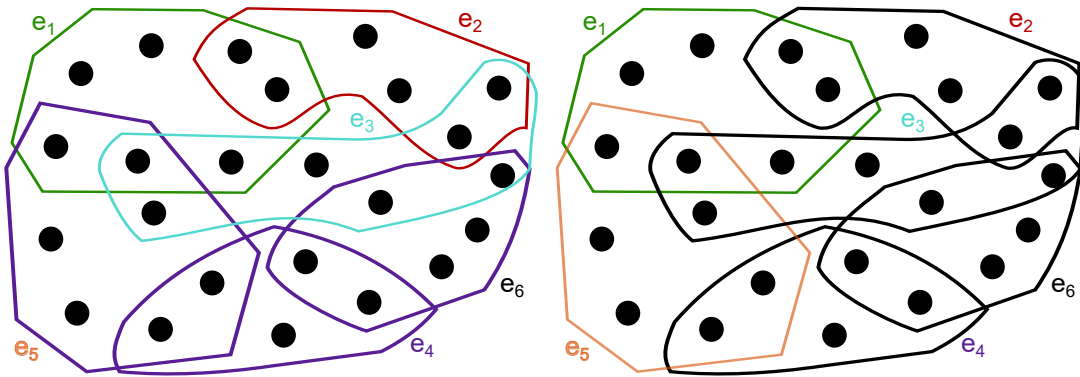


Figura 4.4: a) Del lado izquierdo podemos notar (en color morado) la dilatación de la hiperarista e_4 , que es unir las hiperaristas cuya intersección con ella es no vacía, dando como resultado la unión de las hiperaristas e_4, e_5 y e_6 . b) Del lado derecho podemos notar (en color negro) la dilatación de la hiperarista e_6 , que es unir las hiperaristas cuya intersección con ella es no vacía, dando como resultado la unión de las hiperaristas e_2, e_3, e_4 y e_6 .

Si ahora consideramos al conjunto V_1 formado por todos los nodos encerrados en rojo (ver Figura 4.5), entonces podemos observar que la erosión del conjunto V_1 es la hiperarista e_4 , ya que la dilatación de esta hiperarista queda contenida en el conjunto V_1 (ver Figura 4.4 a)).

Podemos también mostrar la apertura del conjunto V_1 , dado por $\delta\varepsilon(V_1) = \delta(e_4) = e_4 \cup e_5 \cup e_6$. Esto es importante, ya que podemos ver el efecto del filtro, el cual remueve todos los nodos de V_1 que no pertenecen a alguna hiperarista e que quede por completo contenida en V_1 . Si nos fijamos ahora en el cierre de la hiperarista e_4 , entonces, $\varepsilon\delta(e_4) = \varepsilon(\{e_4 \cup e_5 \cup e_6\}) = \{e_4\}$, mientras que el cierre de e_1 está dado por $\varepsilon\delta(e_1) = \varepsilon(\{e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_5\}) = \{e_1, e_2\}$.

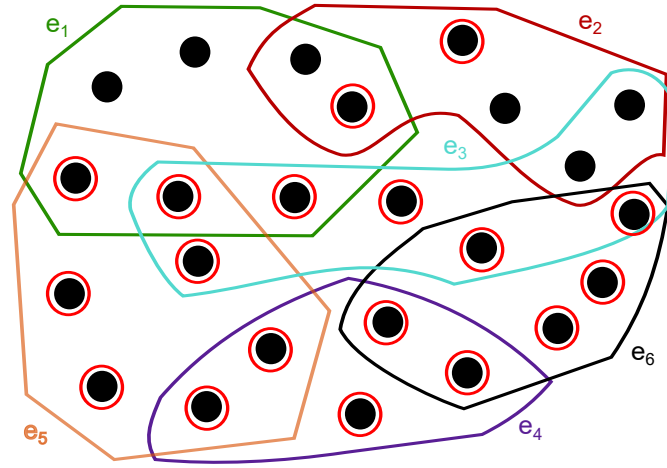


Figura 4.5: Hipergrafo con veinticuatro nodos, seis hiperaristas, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ y el conjunto V_1 formado por los nodos encerrados en rojo

Para este último ejemplo mostramos una dilatación vinculada a un conjunto transversal de un hipergrafo.

Definición 4.2.6. Un conjunto transversal (o hitting set) de un hipergrafo $H = (V, E)$, es un conjunto $T \subseteq V$, que tiene intersección no vacía con todas las hiperaristas del hipergrafo H , es decir, $\forall e \in E : T \cap e \neq \emptyset$.

Construir un conjunto transversal de un hipergrafo es importante, ya que tiene aplicaciones en *machine learning*, teoría del juego, bases de datos, *data mining*, optimización, etc.

Definición 4.2.7. Sea $H = (V, E) \in \mathcal{H}$, definimos los dos conjuntos siguientes

$$\forall V' \subseteq V : E_T(V') = \{e \in E \mid \exists x \in V' : x \in v(e)\}, \quad (4.27)$$

que es el conjunto de hiperaristas que contienen nodos de V' ,

$$\forall E' \subseteq E : V_T(E') = \{x \in V \mid \exists e \in E' : x \in v(e)\}, \quad (4.28)$$

que es el conjunto de nodos que pertenecen a alguna hiperarista del conjunto E' .

Observemos que $V_T(E') = \bigcup_{e \in E'} v(e)$.

Es posible demostrar que $(\mathcal{P}(E), \supseteq)$ es una retícula completa, cuya relación de orden es el orden inverso de $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, donde el supremo e ínfimo son \cap y \cup . Definimos entonces lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta : (\mathcal{P}(V), \subseteq) &\rightarrow (\mathcal{P}(E), \supseteq) \\ \delta(V') &= E \setminus E_T(V') = \{e \in E \mid V' \cap v(e) = \emptyset\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon : (\mathcal{P}(E), \supseteq) &\rightarrow (\mathcal{P}(V), \subseteq) \\ \varepsilon(E') &= V \setminus V_T(E') = V \setminus (\cup_{e \in E'} v(e)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Proposición 4.2.8. *Los operadores δ y ε son una dilatación y una erosión respectivamente, más aún, forman una adjunción.*

Demostración. Veamos primero que δ es una dilatación.

Sea $X_i, i \in I$, una familia de $\mathcal{P}(V)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta(\bigvee_{i \in I} X_i) &= E \setminus E_T(\bigvee_{i \in I} X_i) = E \setminus E_T(\bigcup_{i \in I} X_i) = E \setminus \{e \in E \mid (\bigcup_{i \in I} X_i) \cap e \neq \emptyset\} = \\ &= E \setminus \bigcup_{i \in I} \{e \in E \mid X_i \cap e \neq \emptyset\} = E \cap (\bigcap_{i \in I} \{e \in E \mid X_i \cap e = \emptyset\}) = \bigcap_{i \in I} (E \cap \{e \in E \mid X_i \cap e = \emptyset\}) = \\ &= \bigcap_{i \in I} (E \setminus \{e \in E \mid X_i \cap e \neq \emptyset\}) = \bigvee'_{i \in I} \delta(X_i). \end{aligned}$$

Ahora veamos que ε es una erosión Sea $X_i, i \in I$ una familia de $\mathcal{P}(E)$, veamos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(\bigwedge'_{i \in I} X_i) &= \bigwedge_{i \in I} \varepsilon(X_i). \\ \varepsilon(\bigwedge'_{i \in I} X_i) &= V \setminus V_T(\bigwedge'_{i \in I} X_i) = V \setminus \bigcup_{e \in \bigwedge'_{i \in I} X_i} e = V \setminus \bigcup_{e \in \bigcup_{i \in I} X_i} e = V \cap \left(\bigcup_{e \in \bigcup_{i \in I} X_i} e \right)^c = \\ &= V \cap \left(\bigcap_{e \in \bigcup_{i \in I} X_i} e^c \right) = V \cap \left(\bigcap_{a \in X_a} a^c \cap \bigcap_{b \in X_b} b^c \cap \dots \cap \bigcap_{j \in X_j} j^c \right), \text{ para } \{a, b, \dots, j\} = I, \text{ luego} \\ &= V \cap \left(\bigcap_{a \in X_a} a^c \cap \bigcap_{b \in X_b} b^c \cap \dots \cap \bigcap_{j \in X_j} j^c \right) = V \cap \bigcap_{a \in X_a} a^c \cap \bigcap_{b \in X_b} b^c \cap \dots \cap \bigcap_{j \in X_j} j^c = \\ &= (V \cap \bigcap_{a \in X_a} a^c) \cap (V \cap \bigcap_{b \in X_b} b^c) \cap \dots \cap (V \cap \bigcap_{j \in X_j} j^c) = (V \setminus \bigcup_{a \in X_a} a) \cap (V \setminus \bigcup_{b \in X_b} b) \cap \dots \cap \\ &= (V \setminus \bigcup_{j \in X_j} j) = \varepsilon(X_a) \cap \varepsilon(X_b) \cap \dots \cap \varepsilon(X_j) = \bigcap_{i \in I} \varepsilon(X_i) = \bigwedge_{i \in I} \varepsilon(X_i). \end{aligned}$$

Para en el caso de la unión de dos conjuntos, A y B, tendríamos que lo anterior se vería como

$$(\bigcap_{a \in A} a^c) \cap (\bigcap_{b \in B} b^c) = \bigcap_{d \in A \cup B} d^c$$

Por último veamos que forman una adjunción.

Sean $X \in \mathcal{P}(V)$ y $Y \in \mathcal{P}(E)$, veamos que $X \subseteq \varepsilon(Y) \iff \delta(X) \supseteq Y$

\Rightarrow] Si suponemos que $X \subseteq \varepsilon(Y)$, dado que δ al ser una dilatación es creciente, se tiene que $\delta(X) \supseteq \delta(\varepsilon(Y))$, donde $\delta(\varepsilon(Y)) = \{e \in E \mid (V \setminus \bigcup_{y \in Y} v(y)) \cap e \neq \emptyset\}$.

Sea $c \in Y \Rightarrow c \subseteq \bigcup_{y \in Y} y \Rightarrow V \setminus \bigcup_{y \in Y} v(y) \subseteq V \setminus c \Rightarrow (V \setminus \bigcup_{y \in Y} v(y)) \cap c \subseteq (V \setminus c) \cap c = \emptyset \Rightarrow c \in \delta(\varepsilon(Y))$.

\Leftarrow] De igual forma, como $\delta(X) \supseteq Y$ y ε es una erosión, ésta es creciente, así que $\varepsilon(\delta(X)) \subseteq \varepsilon(Y)$, donde $\varepsilon(\delta(X)) = V \setminus \bigcup_{e \in \delta(X)} e$.

Sea $x \in X$ y supongamos que $x \in \bigcup_{e \in \delta(X)} e$, entonces $\exists e_x \in \delta(X) : x \in e_x$, es decir que $e_x \cap X = \emptyset$ y como $x \in e_x$ se sigue que $\{x\} \subseteq e_x$, por lo tanto

$$\{x\} = \{x\} \cap X \subseteq e_x \cap X = \emptyset,$$

por lo tanto $x \in \varepsilon(\delta(X))$.

□

Terminamos mostrando un resultado que caracteriza a los conjuntos transversales por medio de una dilatación morfológica.

Teorema 4.2.9. *Sean $H = (V, E)$ un hipergrafo, $T \subseteq V$ y δ como en la Ecuación (4.29), entonces tenemos lo siguiente equivalencia*

- *El conjunto T es transversal.*
- *Tenemos que $\delta(T) = \emptyset$*

Demostración. $\delta(T) = \{e \in E \mid T \cap v(e) = \emptyset\} = \{e \in E \mid T \cap e = \emptyset\} = \emptyset \iff \forall e \in E : T \cap e \neq \emptyset \iff T \text{ es transversal.}$

□

Conclusiones

En este trabajo de tesis se describe como actúa la morfología matemática en el espacio de los hipergrafos, mostrando como es la morfología matemática clásica y la morfología matemática en grafos, por lo que fue necesario tocar los conceptos de retícula completa, conceptos básicos de grafos e hipergrafos, así como conceptos geométricos.

Uno de los principales objetivos planteados en este documento fue la introducción de la morfología matemática en hipergrafos, partiendo desde la morfología clásica y la morfología sobre grafos. Debido a que cada uno de estos temas tiene un amplio desarrollo, la mayoría del trabajo se enfocó a la descripción e ilustración de los operadores principales. Por lo que un aspecto importante en este documento fue abordar con mayor detenimiento distintos ejemplos de retículas completas y como algunos operadores morfológicos pueden definirse en ellos.

Como trabajo futuro después del estudio de este documento, se podrían desarrollar; granulometría, *skeletons*, *watersheds*, reconstrucciones, otro tipo de operadores, modos de definir métricas y la teoría formal de grafos e hipergrafos, son algunos que se pueden nombrar, aunque para poder entenderlos completamente, se requiere de un mayor conocimiento en otras ciencias, como la biología y ciencias de la computación.

Bibliografía

- [1] HENK, H., LUC, V. *Graph Morphology in Image Analysis*. Mathematical Morphology in Image Processing , (1 ed., p. 171-203). New York: Marcel-Dekker, 1992.
- [2] NAJMAN, L., COUSTY J. *A graph-based mathematical morphology reader*. Pattern Recognition Letters ,30,1-19. Abril 2014.
- [3] BRETTO, A. *Hipergraph Theory*. (1 ed.). Springer. Berlín, Heidelberg, Alemania. 2013.
- [4] DHARMARAJAN, R., KANNAN, K. *A hypergraph-based algorithm for image restoration from salt and pepper noise*. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aeue.2009.12.001>., Diciembre 2010.
- [5] BLOCH, I., BRETTO, A *Mathematical morphology on hypergraphs, application to similarity and positive kernel*, doi:<https://doi.org/10.1016/j.cviu.2012.10.013>, Abril 2013.
- [6] SEBASTIAN VADAKKENVEETIL, B., UNNIKRISHNAN, A., BALAKRISHNAN, K., PADINJARE PISHARATH BALAKRISHNA, R. *Morphological filtering on hypergraphs*, doi:<https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.02.008>., Enero 2017.
- [7] GONZALES, R., WOODS, R. *Digital Image Processing*. (2 ed.). Prentice Hall, 2001.
- [8] DIESTEL, R. *Graph Theory*. (3 ed.). Springer-Verlag Heidelberg, 2005.
- [9] NAJMAN, L., HUGUES, T. *Mathematical Morphology: form theory to applications*. (1 ed.). ISTE Ltd & John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [10] BRETTO, A. *Hypergraph Theory*. (1 ed.). Springer, Heidelberg, 2013.
- [11] PINZON, A. *CONJUNTOS Y ESTRUCTURAS*. HARLA, 1986

- [12] BENÍTEZ, R. *GEOMETRÍA VECTORIAL*. (2 ed.). Trillas, México, D.F., 2011.
- [13] BLOCH, I. *Morphological Links Between Formal Concepts and Hypergraphs*. Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing.(p. 16-27). Springer International Publishing. 2017.
- [14] NUJA M. UNNIKRIISHNAN, MINI TOM, V. BINO SEBASTIAN, K. V. THOMAS. *Soft morphological filtering using hypergraphs*. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1085/1/012038>, Febrero 2021.
- [15] WANG, J., LIANG, G., WU, Y., LI, Y., HU, J. *New colour morphological operators on hypergraph* <https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2017.0468>, 2018.
- [16] NEWMAN, N., VOLOSHIN, V. *Colorings of (r, r) -Uniform, Complete, Circular, Mixed Hypergraphs*. Mathematics. 2021.