Álgebra linear e aplicações Semestre: 2025/01 - ES / CC

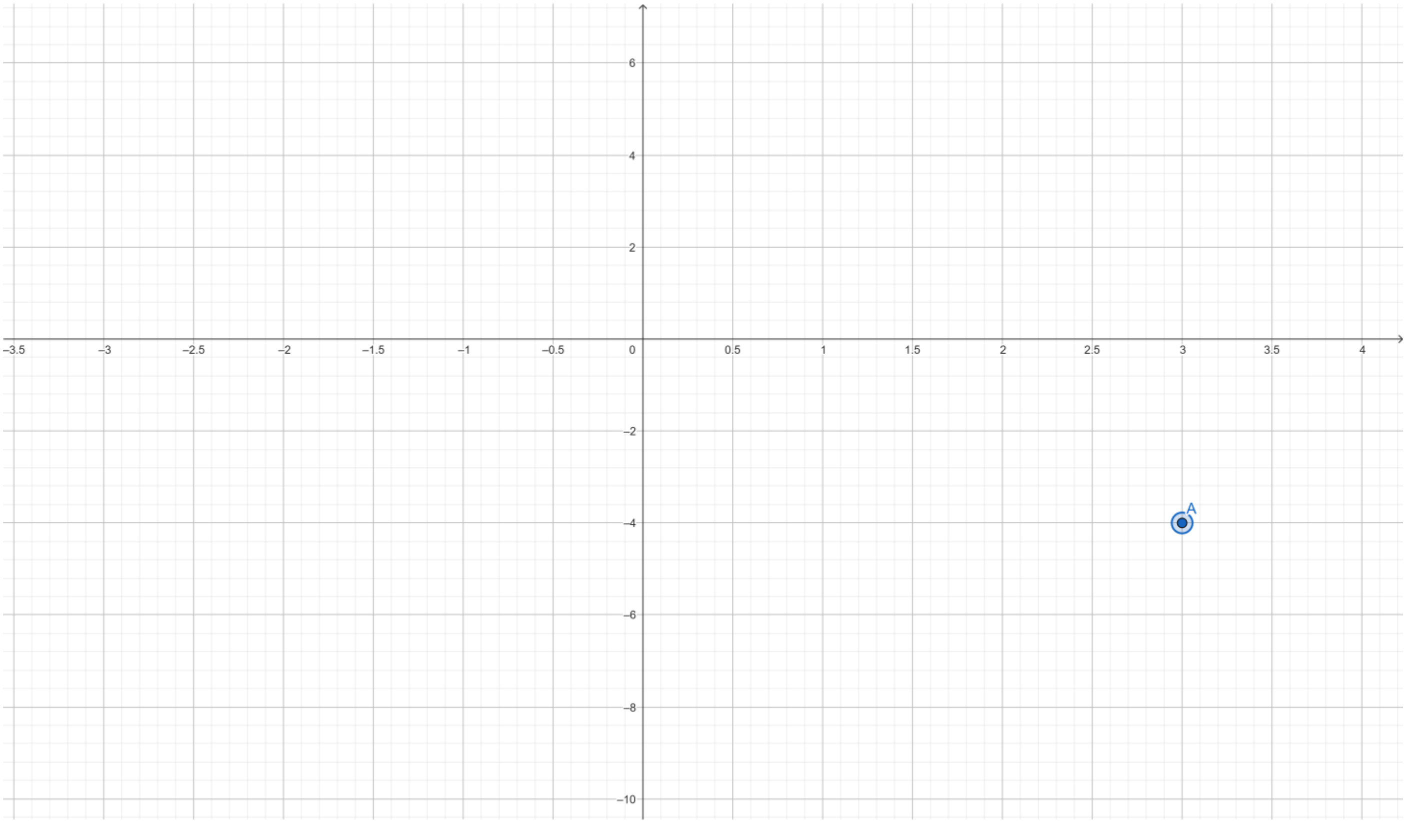
Nome: Luis Henrique Fernandes de Faria________________________________

Exercícios 12.1 - Sistemas de Coordenadas Tridimensionais

Questão 1

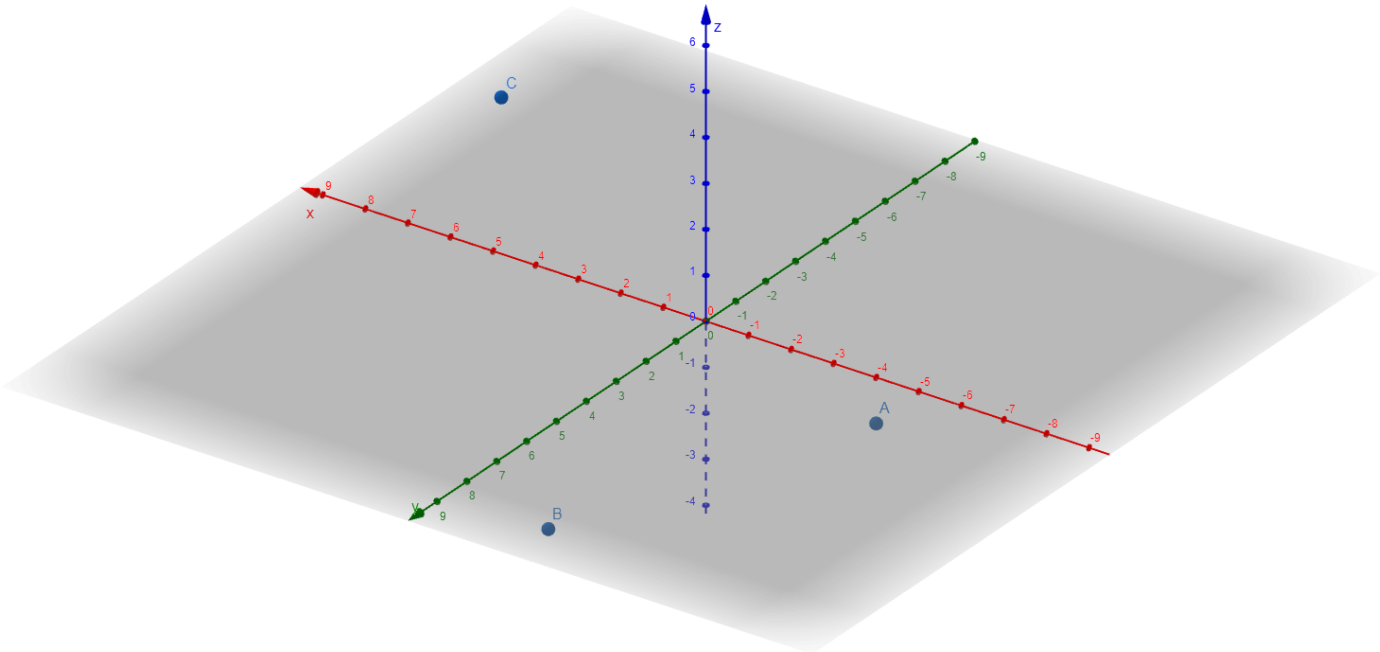
Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de 4 unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de 3 unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

R: A = (4, -3)



Questão 2

Qual dos pontos $A(-4, 0, -1)$, $B(3, 1, -5)$ e $C(2, 4, 6)$ está mais próximo do plano yz? Qual ponto pertence ao plano xz?



R: A definição de um ponto estar em determinado plano, no caso de 3 variáveis, perpassa pela variável que não está no plano e esta variável for igual a 0, ou, por aproximação, que esta variável seja mais próxima de 0.

No caso do plano yz, o ponto mais próximo é o $C(2, 4, 6)$, pois é o ponto que tem o x mais próximo de 0.

Quanto ao plano xz, o A tem o y exatamente em 0 $A(-4, 0, -1)$, portanto pertecente a este plano.

Extra: Se considerarmos os semiplanos positvos e negativos, o ponto mais próximo de +x+z seria novamente o ponto C.

Questão 3

Responda e desenvolva:

(a) Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz?

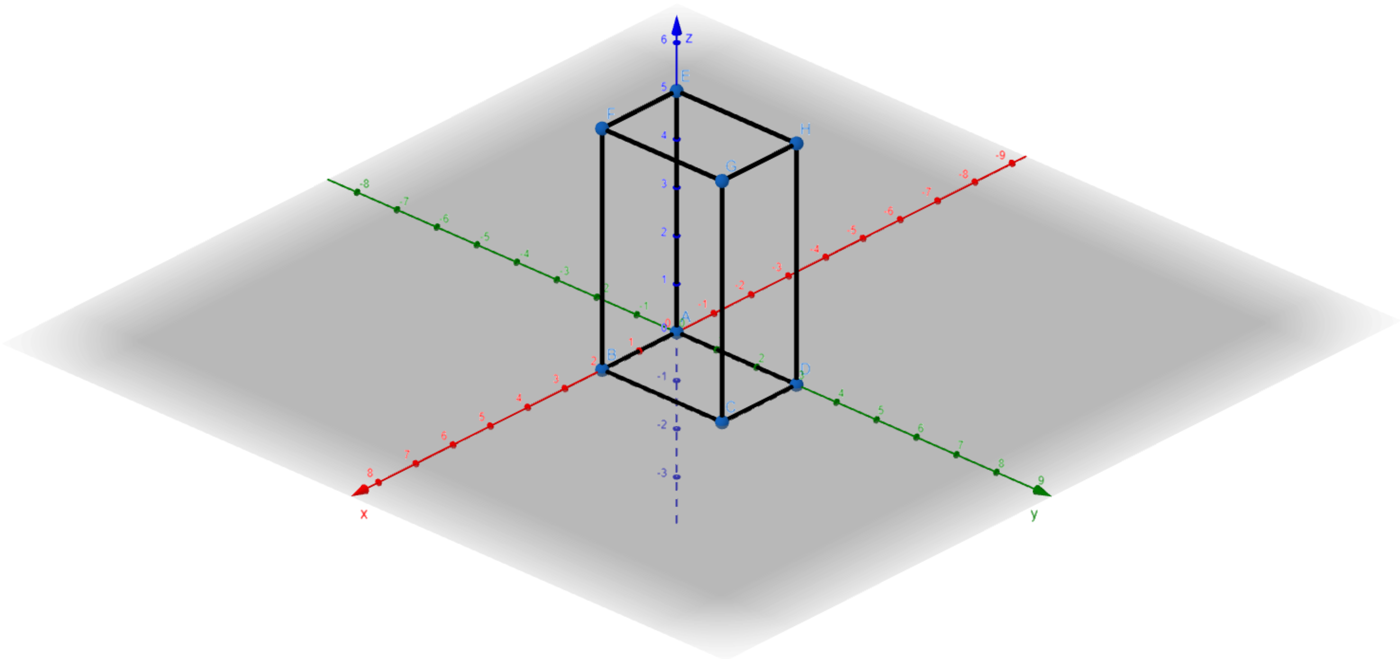
R: No caso do plano xyz, a projeção se dá pela nulidade do eixo perpendicular ao espectivo plano:

Projeção em xy: (2, 3, 0)

Projeção em yz: (0, 3, 5)

Projeção em xz: (2, 0,)

(b) Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em (2, 3, 5) e suas faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa.



R: Para obertmos uma caixa retangular nessas condições, o ponto origem A(0, 0, 0) servirá como nossa base do retângulo e, sendo o vértice oposto ao ponto G(2, 3, 5), basta fazer dois retângulos com suas faces paralelas no eixo xy; e depois interliga-los com retas em suas respectivas bases e depois na altura. Segue os pontos como respectivos vértices:

A = (0, 0, 0)
B = (2, 0, 0)
C = (2, 3, 0)
D = (0, 3, 0)
E = (0, 0, 5)
F = (2, 0, 5)
G = (2, 3, 5)
H = (0, 3, 5)

(c) Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

R: A fórmula para calcular a distância do ponto A para o ponto G é:

$$d = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 + (z_G - z_A)^2}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$d = \sqrt{4 + 9 + 25}$$

$$d = \sqrt{38}$$

$$d \approx 6{,}16$$

Logo, a distância entre o ponto A e G, representando a distância diagonal da caixa, é de aproximadamente 6,16.

Questão 4

Descreva e esboce a superfície em R^3 representada pela equação $x + y = 2$.

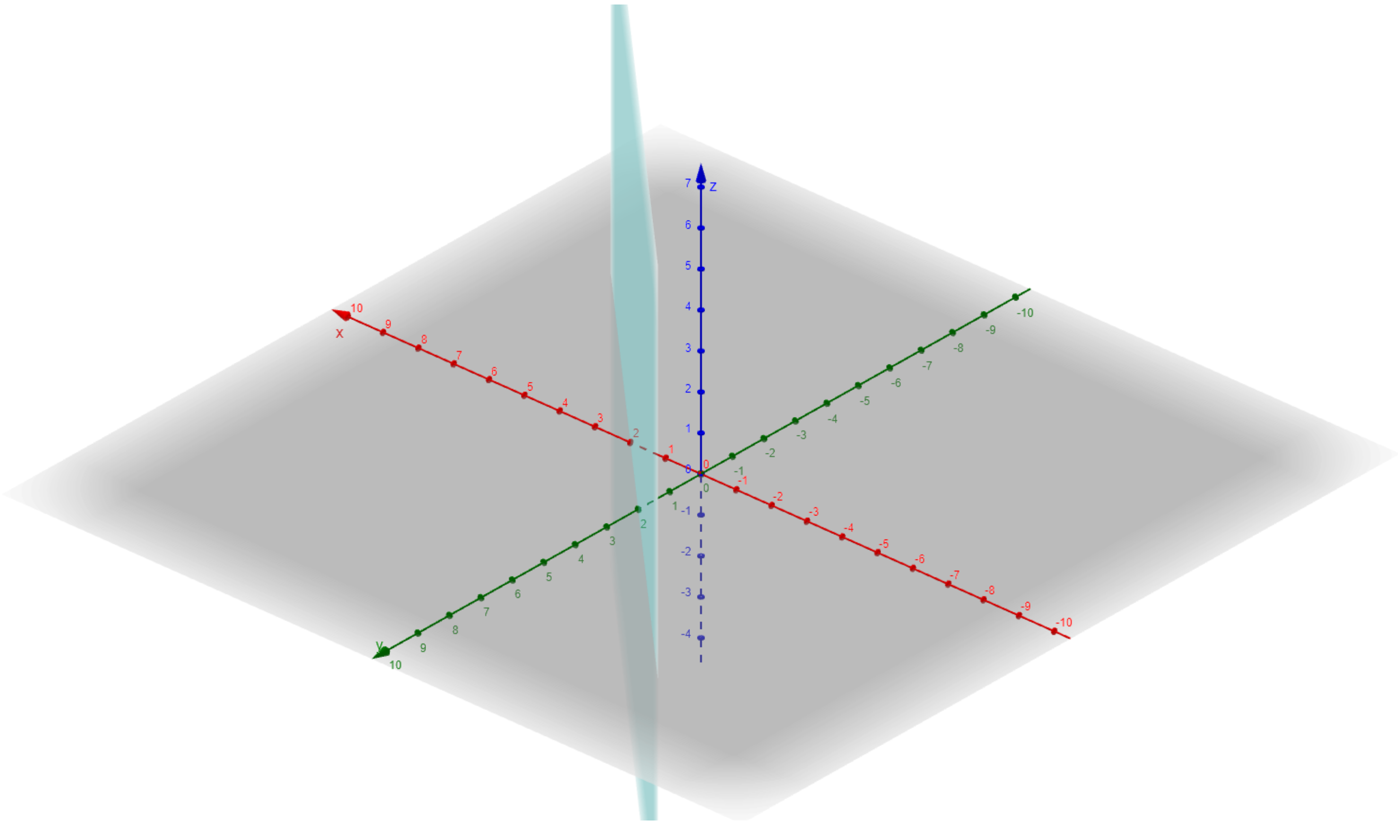
R: Subentende-se que a variável z nesta equação possa assumir qualquer valor, e com o valor de x + y = 2, a equação representa um plano inclinado em paralelo ao eixo z.

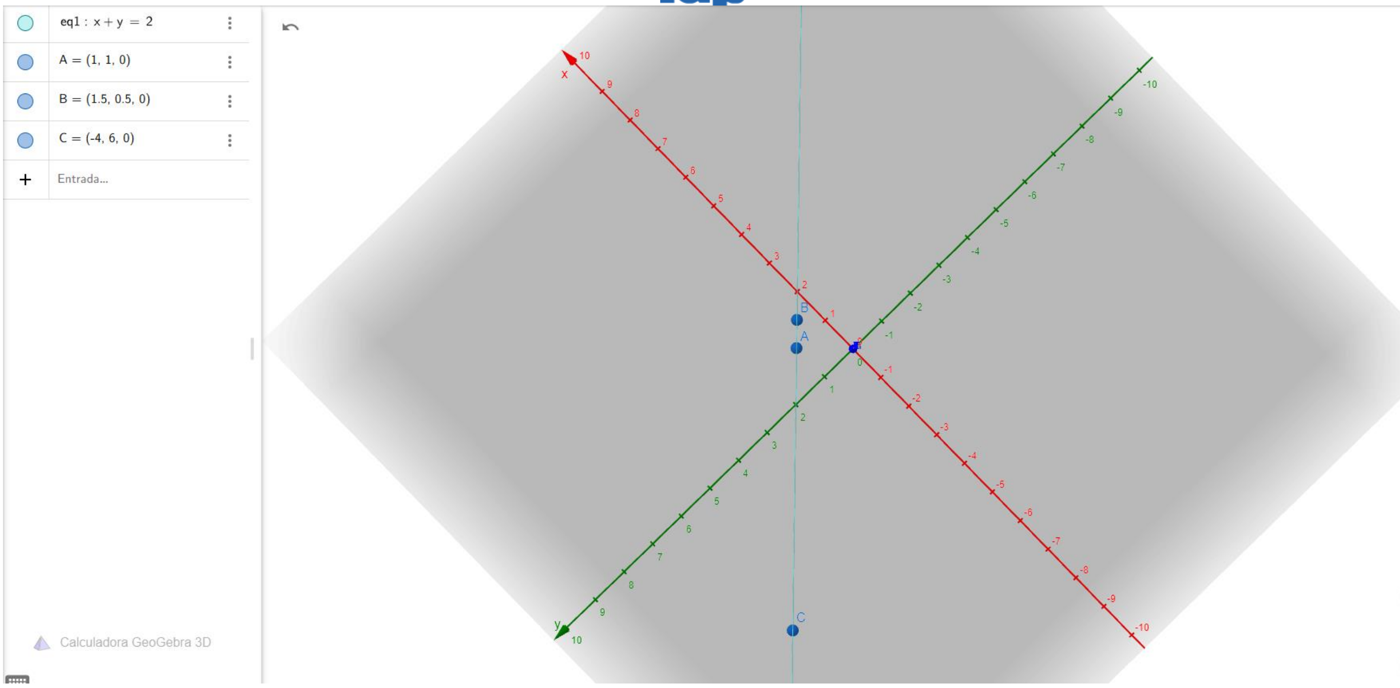
Quando x = 0, temos y = 2, então o ponto (0, 2, z) está no plano para qualquer valor de z

Quando y = 0, temos x = 2, e acontece o mesmo para o ponto (2, 0, z)

Quando z = 0, o plano é uma linha no plano xy que segue a equação de x +y = 2

Como z pode assumir qualquer valor, a equeção é válida para qualquer ponto z, extendo o plano ao infinito positivo e negativo.





<u>OBS</u>: Estava com dificuldade em visualizar que esta equação sempre está em um plano perpendicular a x = 2 e y = 2. Montei esta visualização para tirar minha dúvida e assim ficou mais fácil de entender a propriedade do plano assumindo qualquer valor para z.

Questão 5

Determine se os pontos estão em uma mesma reta:

a) $A(2,\ 4,\ 2),\ B(3,\ 7,\ -2),\ C(1,\ 3,\ 3)$

R: Para isso vamos usar o método dos vetores, criando os seguintes vetores:

$\vec{v}1$ = B – A = <3 – 2, 7 – 4, -2 – 2> = <1, 3, -4>

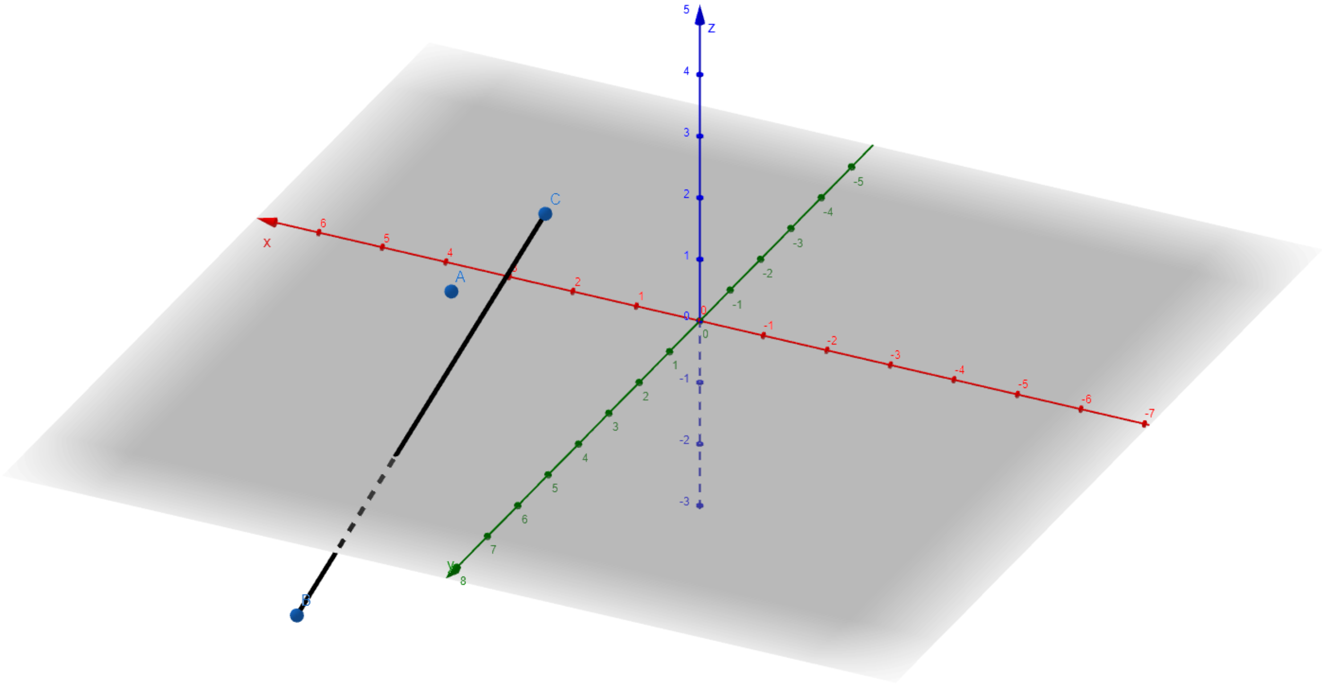
$\vec{v}2$ = C – A = <1 – 2, 3 – 4, 3 – 2> = <-1, -1, 1>

Depois, vamos verificar o paralelismo, verificando se cada componente é proporcional:

$$\frac{1}{-1} = \frac{3}{-1} = \frac{-4}{1}$$

$$-1 \neq -3 \neq -4$$

Portanto os pontos não perpassam pela mesma reta. A seguir uma gráfico demonstrando o segmento BC em que o ponto A não perpassa pela reta:



b) $D(0,\ -5,\ 5),\ E(1,\ -2,\ 4),\ F(3,\ 4,\ 2)$

R: Construção de Vetores:

$\vec{v}1$ = E – D = <(1 – 0), (-2 – (-5)), (4 – 5)> = <1, 3, -1>

$\vec{v}2$ = F – D = <(3 – 0), (4 – (-5)), (2 – 5)> = <3, 9, -3>

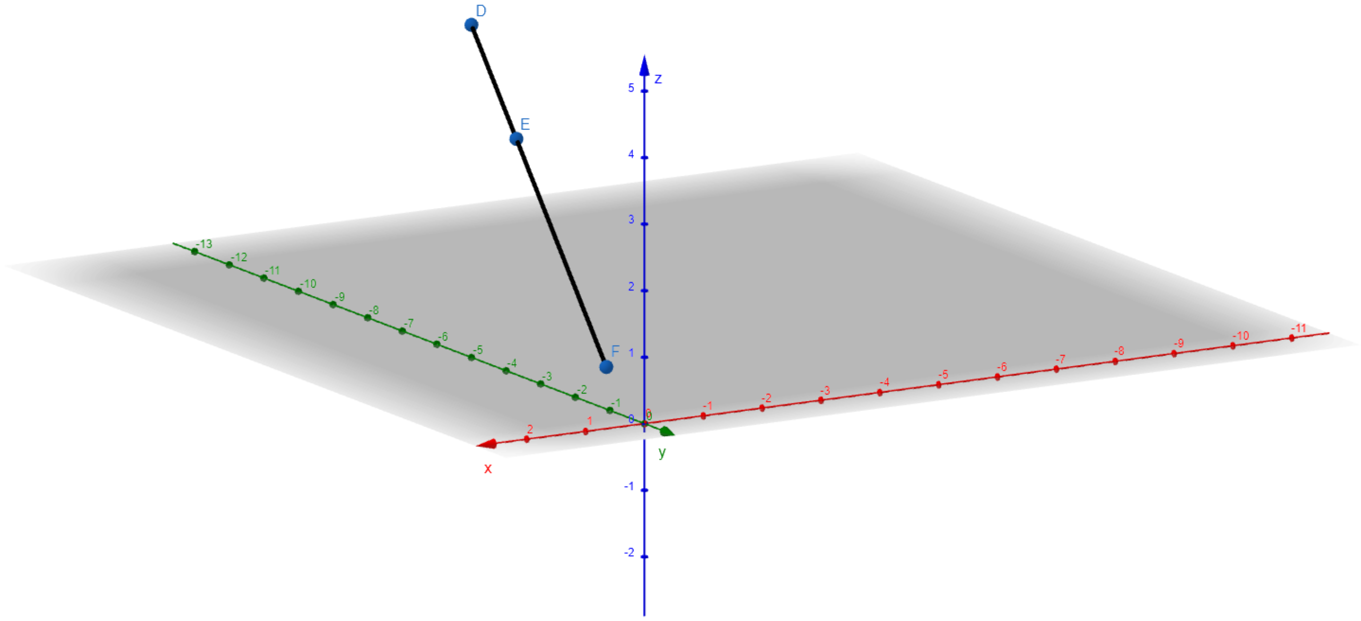
Verificação de Paralelismo:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Portanto há uma reta entre os ponto pois há uma proporção constante

A seguir o segmento DF perpassa pelo ponto E demosntrado pelo gráfico:



Questão 6

Encontre uma equação da esfera que passa pelo ponto (4, 3, 1) e tem centro em (3, 8, 1).

R:

Centro = c = (3, 8, 1)

Ponto do círculo = p = (4, 3, 1)

Primeiro vamos calcular o raio da esfera usando a fórmula da distância:

$$r = \sqrt{(4-3)^2 + (3-8)^2 + (1-1)^2} =$$

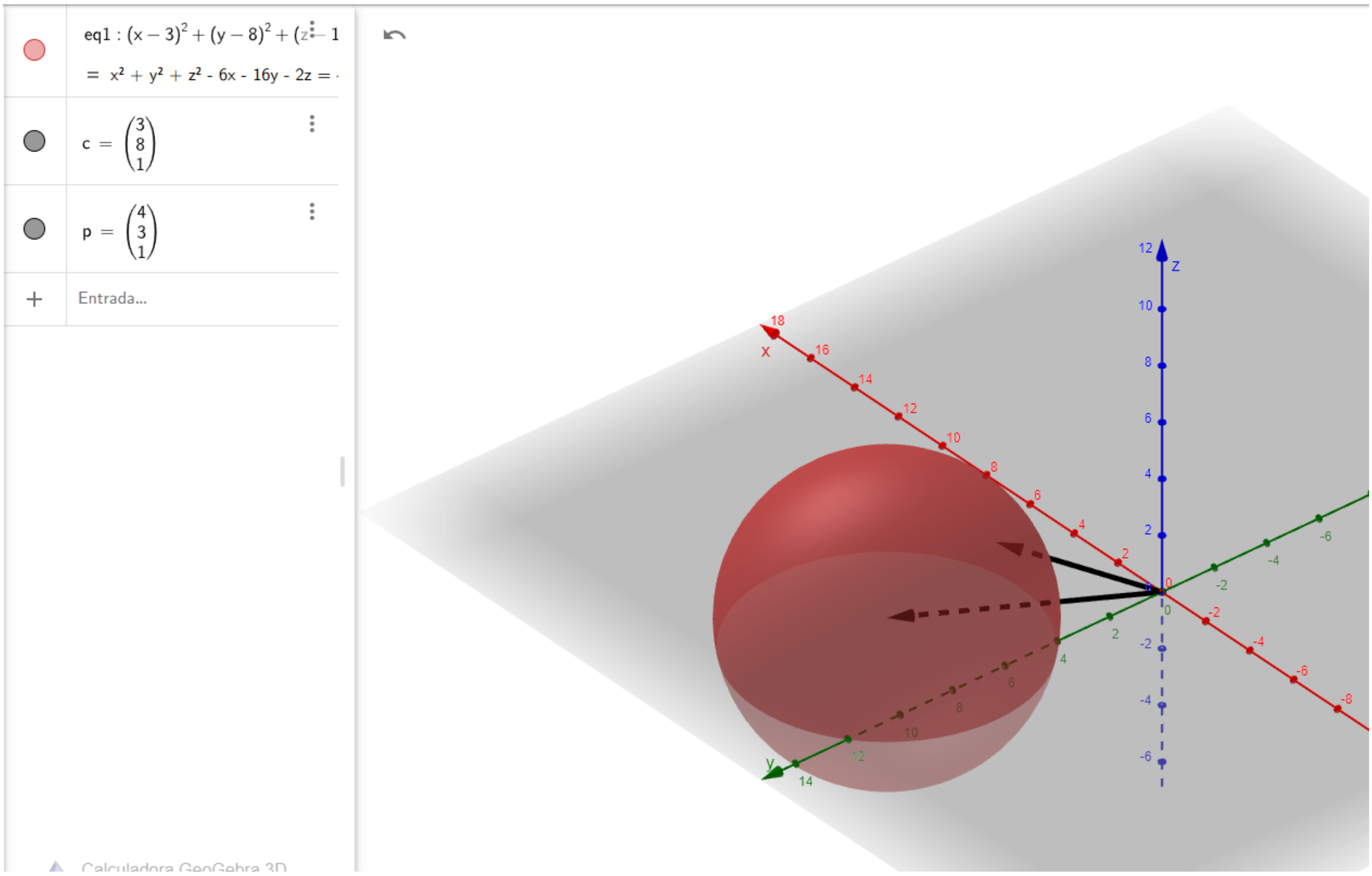
$$r = \sqrt{26} =$$

$$r^2 = 26$$

Agora basta inserir a equação da esfera usando o centro e igualando a 26:

$$(x-3)^2 + (y-8)^2 + (Z-1)^2 = 26$$

A seguir o gráfico da equação:



Questão 7

Encontre uma equação da esfera que passa pela origem e tem centro em (1, 2, 3).

R: Resolveremos da mesmo forma que o exercício anterior:

Centro = c = (1, 2, 3)

Extremidade do cículo = e = (0, 0, 0)

$$r = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2}$$

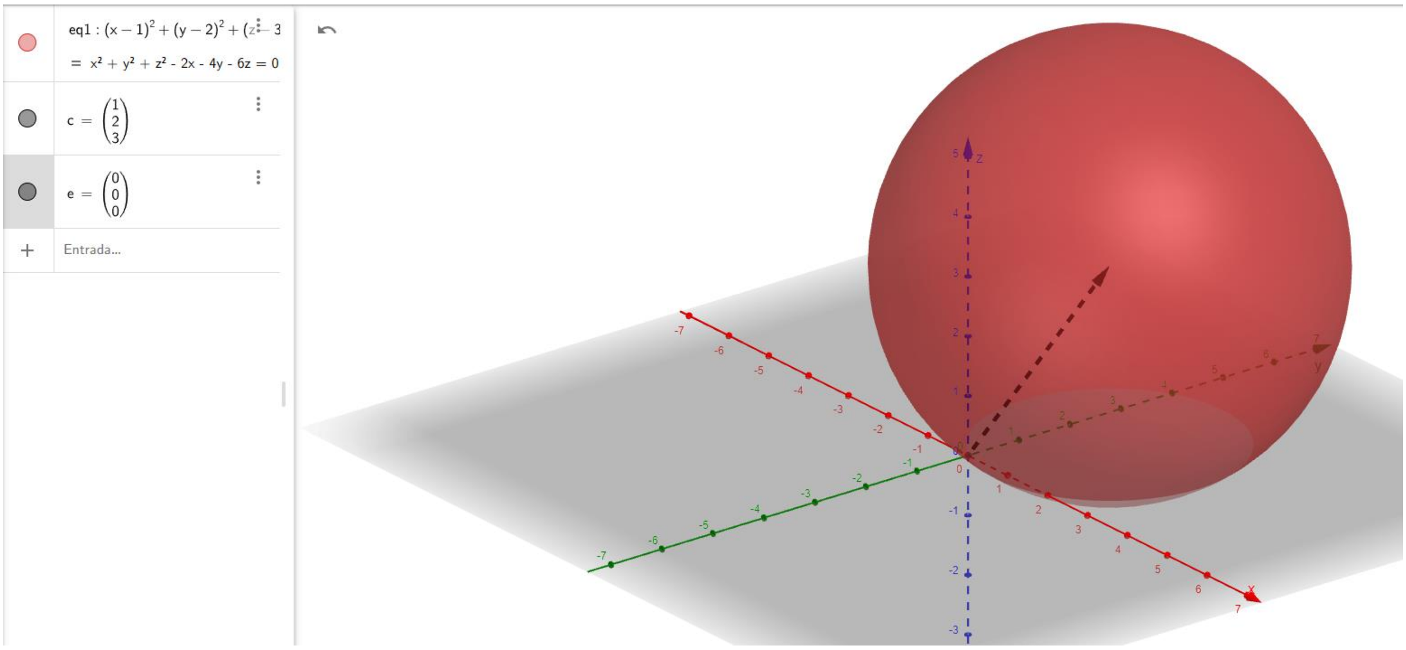
$$r = \sqrt{14}$$

$$r^2 = 14$$

Agora só aplicar na equação da esfera:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

A seguir o gráfico da equação:


eq1 : (x − 1)² + (y − 2)² + (z − 3
= x² + y² + z² - 2x - 4y - 6z = 0
c = (1 2 3)
e = (0 0 0)
Entrada...

Questão 8

Determine a distância entre os pontos $(3,\ 5,\ -2)$ e $(-1,\ 1,\ -4)$.

Basta aplicar a formula da distância:

$$d = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 + (z_G - z_A)^2}$$

$$d = \sqrt{(-1\ -\ 3)^2\ +\ (1\ -\ 5)^2\ +\ (-4 - (-2)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-4^2) + (-2)^2}$$

$$d = \sqrt{16\ +\ 16\ +\ 4}$$

$$d = \sqrt{36}$$

$$d = 6$$