Luiz Henrique Fernandes de Farias

AL - 01/2025
25/01/98

Questão 1

Para descobrir o ângulo entre os vetores, vamos utilizar a seguinte fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

a) $\vec{a} = \langle 2,3,0 \rangle$; $\vec{b} = \langle 1,0,5 \rangle$

$\langle 5,1 \rangle$; $\langle 3,2 \rangle$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (5.3) + (1.2) = 15 + 2 = 17$

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\theta = \frac{17}{\sqrt{26}.\sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{338}}$ $\quad \sqrt{338} = \sqrt{2\cdot 169} = \sqrt{2.13^2} = 13\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{17}{13.\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{13.2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$ $\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{17\sqrt{2}}{26}\right) = \frac{24,04}{26}$

$\theta = \cos^{-1}(0,92) \cong 23°$ $\quad$ R: $\theta \cong 23°$

b) $\vec{a} = \langle -2,5 \rangle$; $\vec{b} = \langle 5,12 \rangle$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-2).5) + (5.12) = -10 + 60 = 50$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$\cos\theta = \frac{50}{13.\sqrt{29}}$ $\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{50}{13.5,38}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{50}{70}\right) = \cos^{-1}(0,71) \cong 44°$

R: $\theta \cong 44°$

c) $\vec{a} = \langle 1, -4, 1 \rangle$; $\vec{b} = \langle \cancel{2,2,0} \rangle = \langle 0, 2, -2 \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \cdot 0) + ((-4) \cdot 2) + (1 \cdot (-2)) = 0 - 8 - 2 = -10$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$; $|\vec{b}| \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\cos\theta = \frac{-10}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}} \cong \frac{-10}{4,24 \cdot 2,83} \cong \frac{-10}{11,99} \cong -0,83$ $\theta = \cos^{-1}(0,83) \cong 146^\circ$

R: $\theta = 146^\circ$

d) $\vec{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$; $\vec{b} = \langle -2, 4, 3 \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 3 = -6 - 4 + 15 = 5$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{29}} \cong \frac{5}{5,92 \cdot 5,38} \cong \frac{5}{31,85} \cong 0,16$; $\theta = \cos^{-1}(0,16) \cong 81^\circ$

R: $\theta \cong 81^\circ$

e) $\vec{u} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{v} = -3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\hat{i} \cdot -3\hat{i}) + (-4\hat{j} \cdot \hat{j}) + (\hat{k} \cdot 5\hat{k}) = -3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k} = -2$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$; $\vec{v} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9+1+25} = 5$

$\cos\theta = \frac{-2}{5 \cdot \sqrt{18}} \cong -\frac{2}{21,21} \cong -0,94$ $\theta = \cos^{-1}(-0,09) \cong 85^\circ$

R: $\theta \cong 85^\circ$

f) $\vec{u} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{v} = \cancel{-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}} = -2\hat{i} - \hat{k}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -8 + 3 = -5$

$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$; $\vec{v} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}} \cong \frac{-5}{5,1 \cdot 2,45} \cong \frac{-5}{12,49} \cong 0,4$ $\theta = \cos^{-1}(0,4) \cong 114^\circ$

R: $\theta = 114^\circ$

Questão 2

$$\vec{a}\times\vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

a) $\vec{a} = \langle 2,3,0 \rangle$; $\vec{b} = \langle 1,0,5 \rangle$

$\vec{a}\times\vec{b} = \langle 3.5 - 0.0; 0.1 - 2.5; 2.0 - 3.1 \rangle = \langle 15-0; 0-10; 0-3 \rangle =$

$\langle 15, -10, -3 \rangle$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a} = (15.2 + (-10).3 + (-3).0) = 30 - 30 + 0 = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b} = 15.1 + (-10).0 + (-3).5 = 15 + 0 - 15 = 0$

R: $\vec{a}\times\vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle$; $\vec{a}\times\vec{b}$ é ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

b) $\vec{a} = \langle 6, 0, -2 \rangle$; $\vec{b} = \langle 0, 8, 0 \rangle$

$\vec{a}\times\vec{b} = \langle 0.0 - (-2).8; (-2).0 - 6.0; 6.8 - 0.0 \rangle = \langle 0+16; 0-0; 48-0 \rangle$

$\langle 16, 0, 48 \rangle$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a} = (16.6 + 0.0 + 48.(-2)) = (96 + 0 - 96) = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b} = (16.0 + 0.8 + 48.0) = 0 + 0 + 0 = 0$

R: $\vec{a}\times\vec{b} = \langle 16, 0, 48 \rangle$; Ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

c) $\vec{a} = 2\hat{j} - 4\hat{k}$; $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \langle 2.1 - (-4).3; (-4.(-1) - 0.1; 0.3 - 2.(-1) \rangle = \langle 2.12; 4-0; 0+2 \rangle =$

$\langle 14, 4, 2 \rangle = 14\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a} = 14.0 + 4.2 + 2.-4 = 0 + 8 - 8 = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b} = 14.(-1) + 4.3 + 2.1 = -14 + 12 + 2 = 0$

R: $\vec{a}\times\vec{b} = 14\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$; Ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

d) $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = -\hat{i} + 5\hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \langle 3.5-(-2).0 ; (-2).(-1)-1.5 ; 1.0-3.(-1) \rangle =$

$\langle 15-0 ; 2-5 ; 0+3 \rangle = \langle 15 ; -3 ; 3 \rangle = 15\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 15.1 + (-3).3 + 3.(-2) = 15 - 9 - 6 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 15.-1 + (-3).0 + 3.5 = -15 + 0 + 15 = 0$

R: $\vec{a} \times \vec{b} = (15\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k})$; Ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

e) $\vec{a} = t\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + \operatorname{sen}(t)\hat{k}$; $\vec{b} = -\hat{i} - \operatorname{sen}(t)\hat{j} + \cos(t)\hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \langle \cos(t).\cos(t) - \operatorname{sen}(t).(-\operatorname{sen}(t)) ; \operatorname{sen}(t).(-1) - t.\cos(t) ;$

$t.(-\operatorname{sen}(t)) - \cos(t).-1 \rangle = \langle \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) ; -\operatorname{sen}(t) - t\cos(t) ;$

$-t\operatorname{sen}(t) + \cos(t) \rangle = \langle 1 ; -\operatorname{sen}(t) - t\cos(t) ; -t\operatorname{sen}(t) + \cos(t) \rangle$

$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{a} = t.1 + [-\operatorname{sen}(t) - t\cos(t)].\cos(t) + [-t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)].$

$\operatorname{sen}(t) = t - \operatorname{sen}(t)\cos(t) - t\cos^2(t) - t\operatorname{sen}^2(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t) =$

$t - [t\cos^2(t) - t\operatorname{sen}^2] = t - t(\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)) = t - t.1 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{b} = t.-1 + [-\operatorname{sen}(t) - t\cos(t)].-\operatorname{sen}(t) + [-t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)].\cos(t) =$

$-t + \operatorname{sen}^2(t) + t\cos(t)\operatorname{sen}(t) - t\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \cos^2(t) =$

$-t + \operatorname{sen}^2(t) + \cos(t) = -t + t = 0$

R: $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + (-\operatorname{sen}(t) - t\cos(t))\hat{j} + [-t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)]\hat{k}$

Ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

f) $\vec{a} = \langle t^3, t^2, t \rangle$; $\vec{b} = \langle t, 2t, 3t \rangle$

$\vec{a} \times \vec{b} = \langle t^2.3t - t.2t ; t.t - t^3.3t ; t^3.2t - t^2.t \rangle =$

$\langle 3t^3 - 2t^2 ; t^2 - 3t^4 ; 2t^4 - t^3 \rangle$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (3t^3 - 2t^2).t^3 + (t^2 - 3t^4).t^2 + (2t^4 - t^3).t =$

$3t^6 - 2t^5 + t^4 - 3t^6 + 2t^5 - t^4 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = [3t^3 - 2t^2] \cdot t + [t^2 - 3t^4] \cdot 2t + [2t^4 - t^3] \cdot 3t =$

$3t^4 - 2t^3 + 2t^3 - 6t^5 + 6t^5 - 3t^4 = 0$

R: $\vec{a} \times \vec{b} = \langle 3t^3 - 2t^2, 2t - 3t^4, 2t^4 - t^3 \rangle$ Ortogonal para $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Questão 3

(a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$(\vec{b} \times \vec{c}) \rightarrow$ Produz um vetor / $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \rightarrow$ Produz um escalar

R: Faz sentido a produz um escalar

(b) $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$

$\vec{b} \cdot \vec{c} \rightarrow$ Produz um escalar $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) \rightarrow$ Não tem sentido produzir um vetor com "x" se um dos produtos é um escalar.

R: Não faz sentido produzir um vetor com um escalar.

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$\vec{b} \times \vec{c} \rightarrow$ Produz um vetor / $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \rightarrow$ Produz outro vetor.

R: Faz sentido e produz um vetor.

(d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

$\vec{b} \cdot \vec{c} \rightarrow$ Produz um escalar / $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \rightarrow$ Não tem como produzir um escalar entre Vetor · Escalar.

R: Não faz sentido produzir um escalar com outro escalar.

(e) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow$ Produz um escalar / $\vec{c} \cdot \vec{d} \rightarrow$ Produz um escalar / $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$

$\rightarrow$ Não faz sentido produzir um vetor com dois escalares.

R: Não faz sentido dois escalares produzir um vetor.

(f) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \rightarrow$ Produz um vetor / $(\vec{c} \times \vec{d}) \rightarrow$ Produz outro vetor

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \rightarrow$ Produz um escalar com dois vetores.

R: Faz sentido dois vetores produzir um escalar.

Questão 4

Volume paralelepípedo

$\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$; $\vec{b} = \langle -1, 1, 2 \rangle$; $\vec{c} = \langle 2, 1, 4 \rangle$

Volume de um paralelepípedo é dado pela seguinte formula

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

$\vec{b} \times \vec{c} \rightarrow$ Vetor perpendicular a $\vec{b}$ e $\vec{c}$

o módulo na forma garante que o volume não será negativo

$\vec{b} \times \vec{c} = \langle 1.4 - 2.1 ; 2.2 - (-1).4 ; (-1).1 - 1.2 \rangle =$

$\langle 4 - 2 ; 4 + 4 ; -1 - 2 \rangle = \langle 2 ; 8 ; -3 \rangle$

$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 1.2 + 2.8 + 3.-3 = 2 + 16 - 9 = |9| = 9$

R: O volume do paralelepípedo é 9.

Questão 5

$\vec{F} = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k}$ Ponto Inicial $= \langle 0, 10, 8 \rangle$ Ponto Final $= \langle 6, 12, 26 \rangle$

$\vec{D} =$ (ponto final) $-$ (ponto inicial)

$\vec{D} = \langle 6 - 0 ; 12 - 10 ; 20 - 8 \rangle = \langle 6 ; 2 ; 12 \rangle$

$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = 8.6 + (-6).2 + 9.12 = 48 - 12 + 108 = 36 + 108 = 144$

R: Se a força é em Newtons e a distância é em metros, logo:

$W = 144$ Joules