

Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas

Notas: LaRana

TEMARIO

1. Espacios Vectoriales
 - 1.1. Campos
 - 1.2. Espacios
 - 1.3. Subespacios
 - 1.4. Independencia Lineal
 - 1.5. Base
 - 1.6. Dimensión
2. Transformaciones Lineales
 - 2.1 Definición y propiedades
 - 2.2 Isomorfismo
 - 2.3 Núcleo e imagen
 - 2.4 Representación Matricial
3. Eigenvalor y eigenvector
 - 3.1 Definiciones y polinomio característico
 - 3.2 Teorema de Cayley Hamilton
 - 3.3 Diagonalización de operaciones lineales
4. Producto Interno
 - 4.1 Espacios con producto interno
 - 4.2 Ortogonalización
 - 4.3 Proceso GramSchmidt
5. Operadores Ortogonales
 - 5.1 Diagonalización
 - 5.2 Operadores simétricos
 - 5.3 Operadores hermitianos

LITERATURA

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

RECURSOS ADICIONALES

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

INTRODUCCIÓN

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.

Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$

V es un vector.

F es un campo.

$+$ es un operador.

\cdot es una función.

$+$ \wedge \cdot son binarios.

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)

$$u + v \in F$$

2)

$$u + v = v + u$$

3)

$$v + (v + w) = (u + v) + w$$

4)

$$\exists! 0 \in F \rightarrow u + 0 = 0 + u = u$$

5)

$$\forall u \in F \exists! -u \in F \rightarrow u + (-u) = -u + u = 0$$

6)

$$uv \in F$$

7)

$$uv = vu$$

8)

$$u(vw) = (uv)w$$

9)

$$\exists! 1 \in F \rightarrow u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$

10)

$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \rightarrow uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$

11)

$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

I. AXIOMAS DEL CAMPO

Cerradura de la suma $\forall u, v \in V$;

$$u + v \in V$$

Asociatividad de la suma $\forall u, v, w \in V$;

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

Conmutatividad de la suma $\forall u, v \in V$;

$$u + v = v + u$$

Elemento neutro $\exists! 0 \in V$ tal que:

$$0 + v = v + 0 = v$$

Inverso aditivo $\forall v \in V \exists! w \in V$ tal que:

$$v + w = w + v = 0$$

Cerradura del producto $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$;

$$\lambda v \in V$$

Distributividad respecto escalar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

$$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

Distributividad respecto elemento vector $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

$$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Asociatividad $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

$$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

Identidad de \mathbb{K} respecto al producto $\forall u \in V; \exists! 1 \in \mathbb{K}$

$$\text{tal que: } 1u = u$$

Definición 1: Sean A, B conjuntos.

Decimos que:

$$A \subseteq B$$

Si:

$$\forall x \in A \rightarrow x \in B$$

II. ESPACIOS VECTORIALES

Definición 2: (Espacio Vectorial)

Sea:

 V un conjunto no vacío, \mathbb{F} un campo y

$$+ : V \times V \rightarrow V;$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$$

Tal que se cumplen los siguientes axiomas:

Cerradura de la suma**Asociatividad de la suma****Conmutatividad de la suma****Existencia del vector cero****Existencia del inverso aditivo****Cerradura del producto escalar sobre el vector****Existencia del neutro multiplicativo del campo****Asociatividad del producto de escalares**Entonces V se llama espacio vectorial sobre el campo \mathbb{F} . A los elementos de V se le llama vectores.*Ejemplo 1:* \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha x := (\alpha x, \alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

1) Cerradura de suma

2) Conmutatividad de suma

3) Asociatividad de suma

4)

5)

6)

7)

8)

9)