Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas
Notas: LaRana

TEMARIO

1. Espacios Vectoriales
 1.1. Campos
 1.2. Espacios
 1.3. Subespacios
 1.4. Independencia Lineal
 1.5. Base
 1.6. Dimensión
2. Transformaciones Lineales
 2.1 Definición y propiedades
 2.2 Isomorfismo
 2.3 Núcleo e imagen
 2.4 Representación Matricial
3. Eigenvalor y eigenvector
 3.1 Definiciones y polinomio caracteristico
 3.2 Teorema de Cayley Hamilton
 3.3 Diagonalización de operaciones lineales
4. Producto Interno
 4.1 Espacios con producto interno
 4.2 Ortogonalización
 4.3 Proceso GramSchmidt
5. Operadores Ortogonales
 5.1 Diagonalización
 5.2 Operadores simétricos
 5.3 Operadores hermitianos

LITERATURA

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

RECURSOS ADICIONALES

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

INTRODUCCIÓN

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.
Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$
$$V \text{ es un vector.}$$
$$F \text{ es un campo.}$$
$$+ \text{ es un operador.}$$
$$\cdot \text{ es una función.}$$
$$+ \wedge \cdot \text{ son binarios.}$$

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)
$$u + v \in F$$

2)
$$u + v = v + u$$

3)
$$v + (v + w) = (u + v) + w$$

4)
$$\exists! 0 \in F \rightarrow u + 0 = 0 + u = u$$

5)
$$\forall u \in F \exists! - u \in F \rightarrow u + (-u) = -u + u = 0$$

6)
$$uv \in F$$

7)
$$uv = vu$$

8)
$$u(vw) = (uv)w$$

9)
$$\exists! 1 \in F \rightarrow u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$

10)
$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \rightarrow uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$

11)
$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

I. Axiomas del Campo

Cerradura de la suma del campo $\forall u, v \in V$;
$u + v \in V$
Asociatividad de la suma del campo $\forall u, v, w \in V$;
$u + (v + w) = (u + v) + w$
Conmutatividad de la suma del campo $\forall u, v \in V$;
$u + v = v + u$
Elemento neutro en el campo $\exists!0 \in V$ tal que:
$0 + v = v + 0 = v$
Inverso aditivo en el campo $\forall v \in V\ \exists!w \in V$ tal que:
$v + w = w + v = 0$
Cerradura del producto en el campo $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$;
$\lambda v \in V$
Distributividad respecto escalar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v)$
Distributividad respecto elemento vector $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
Asociatividad $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
Identidad de $\mathbb{K}$ respecto al producto $\forall u \in V; \exists!1 \in \mathbb{K}$ tal que: $1u = u$

Definición 1: Sean A, B conjuntos.
Decimos que:
$A \subseteq B$
Si:
$\forall x \in A \to x \in B$

II. Espacios Vectoriales

Definición 2: (Espacio Vectorial)
Sea:
V un conjunto no vacío,
$\mathbb{F}$ un campo y
$+ : V \times V \to V$;
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$
Tal que se cumplen los siguientes axiomas:
$\forall u, v, w \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

Cerradura de la suma en el espacio vectorial.
$u + v \in V$
Asociatividad de la suma en el espacio vectorial.
$(u + w)$= u+$(v + w)$
Conmutatividad de la suma en E.V.
$u + v = v + u$
Existencia del vector cero. $\exists!0 \in V$ tal que:
$0 + v = v + 0 = v$
Existencia del inverso aditivo del vector. $\exists! - v \in V$ tal que:
$-v + v = v + (-v) = 0$
Cerradura del producto escalar sobre el vector.
$\alpha v \in V$
Distributividad del P.E. respecto a la suma del vector.
$\alpha(u + v)$= $\alpha u + \alpha v$
Distributividad del P.E. respecto a la suma del campo.
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
Existencia del neutro multiplicativo del campo. $\exists!1 \in \mathbb{F}$ tal que:
$1 \cdot v = v$
Asociatividad del producto de escalares por el vector.
$\alpha(\beta v)$=$(\alpha\beta)v$

Entonces V se llama espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. A los elementos de V se le llama vectores.

Ejemplo 1: $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Sean $x(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y(y_1, ..., y_n)$$\in \mathbb{R}^n$
$x + y$:$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$\in \mathbb{R}^n$
αx :$(\alpha x, \alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$\in \mathbb{R}^n$

1) Cerradura de suma.
   Comprueba: $x + y$ =$(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$\in \mathbb{R}^n$
   $$t_1 = x_1 + y_1, t_2 = x_2 + y_2, ..., t_n = x_n + y_n$$
   $$\Rightarrow x + y = (t_1, t_2, ..., t_n)\mathbb{R}^n$$
   $t_k \in \mathbb{R}$ por cerradura de la suma en el campo
   $$\text{Siendo } k = \sum_{i=1}^{n}$$
2) Conmutatividad de suma.
3) Asociatividad de suma.
4) Existencia del vector 0 en $\mathbb{R}^n$.
5) Existencia del inverso aditivo.
6) Cerradura del producto por escalar.
7) Distributividad del P.E respecto a suma del vector.
8) Distributividad del P.E respecto a suma del campo.
9) Existencia del neutro multiplicativo del campo.
10) Asociatividad del producto de escalares.

III. Subespacios Vectoriales

Definición 3: (Subespacio Vectorial)
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $W \subseteq V; W \neq \emptyset$. Decimos que W es subespacio vectorial de V si W constituye un espacio vectorial por si mismo con el campo $\mathbb{K}$ y las mismas operaciones de V.
Ejemplos:

- Todo subespacio de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{K}\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $\{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$
- Cualquier conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que forme una recta que pase por el origen $\{x, mx \in \mathbb{R}^2\}$

Proposición 1: (Propiedades de los subespacios vectoriales)
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $C \in \mathbb{K}$ Entonces se cumplen:

1) $0v = 0$
2) $\alpha 0 = 0$
3) Si $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$
4) $(-1)v = -v$

Demostración 1:

Teorema 1: (Criterio de subespacio)
Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y CRITERIO DIFF from Subesp??

Definición 4: (Combinación Lineal)
Sea:
$S = \{v_1, .., v_k\} \subset V \wedge c_1, .., c_k \in \mathbb{K}$
Se dice que un vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores en S si v se puede escribir como $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$

Ejemplo 2: Sea:
$S = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$
donde:
$v_1 = (4, -3) \wedge v_2 = (-1, 9)$.

Escriba, de ser posible a $v = (6, -18) \in \mathbb{R}^2$ como una cominación lineal de v_1 y v_2.

Solución: Supongamos que existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = c_1v_1 + c_2v_2$
$(6, -18) = c_1(4, -3) + c_2(-1, 9)$
$(6, -18) = (4c_1 - c_2, -3c_1 + 9c_2)$
Por igualdad de parejas ordenadas tenemos que:

$\{\ (4c_1 + 9c_2 = 6)9; -3c_1 + 9c_2 = -18\} \rightarrow 36c_1 - 9c_2 = 54; -3c_1 + 9c_2 = -18 \rightarrow 33c_1 = 36 \rightarrow c_1 = \frac{12}{11}$ Tarea sustituir c_1

Ejemplo 3:
Escriba, de ser posible, a $v = (3, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ como una combinacion lineal de $v_1 = (-2, 3), v_2 = (4, -6) \in \mathbb{R}^2$

Solucion:
Supongamos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v = k_1, v_1 + k_2v_2$
$(3, \frac{1}{2} = k_1(-2, 3) + k_2(4, -6))$
$(3, \frac{1}{2} = (-2k_1, 3k_1) + (4k_2, -6k_2))$
$(3, \frac{1}{2} = (-2k_1 + 4k_2, 3k_1 - 6k_2))$

Por igualdad de parejas ordenadas tenemos:
$\{(-2k_1 + 4k_2 = 3)3; (3k_1 - 6k_2 = \frac{1}{2})2\} \rightarrow \{-6k_1 + 12k_2 = 9; 6k_1 - 12k_2 = 2\} \rightarrow 0 = 10$
Se llega a una contradiccion

Ejemplo 4:
Encuentre el valor de $p \in \mathbb{R}$ para que $v = (1, p) \in \mathbb{R}^2$ sea combinación lineal de $v_1 = (2, 3); v_2 = (-1, 4)$.

Solución: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$
$(1, p) = \alpha(2, 3) + \beta(-1, 4)$
$(1, p) = (2\alpha, 3\alpha) + (-1\beta, 4\beta)$

Se genera el sistema:
$\{(2\alpha - \beta = 1)4; 3\alpha + 4\beta = p\} \rightarrow (8\alpha - 4\beta = 4) + (3\alpha + 4\beta = p) = 11\alpha = p + 4 \rightarrow \alpha = \frac{p+4}{11}$
Sustituimos
$(3\frac{p+4}{11} + 4\beta = p) \rightarrow 4\beta = p - \frac{3p+12}{11} \rightarrow 4\beta = \frac{11p-3p-12}{11} \rightarrow \beta = \frac{8p-12}{44} \rightarrow \beta = \frac{2p-3}{11}; p \in \mathbb{R}$
Si $p = 7 \rightarrow \alpha = 1; \beta = 1$
Si $p = 0$, tenemos $\alpha = \frac{4}{11}; \beta = \frac{-3}{11}$
Solución: Si $p \in \mathbb{R}, (1, p) = \frac{p+4}{11}(2, 3) + \frac{2p-3}{11}(-1, 4)$. Tarea: Comprueba la proposición anterior.

Ejemplo 5:
Escriba, de ser posible
$v = [\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}] \in M_{2x2}(\mathbb{R})$
Como una combinación lineal de $v_1, v_2, v_3, v_4, \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ donde $v_1 = [\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}], v_2 = [\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}], v_3 = [\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}]$ y $v_4 = [\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}]$

Solución: Supongamos que existen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tal que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$
$[\begin{matrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{matrix}] = a_1[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}] + 2_2[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}] + a_3[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}] + a_4[\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}]$
$\{a_1 + a_3 - a_4 = 2...(1); a_2 + a_3 = -3...(2); a_3 = 0...(3); -a_1 - a_4 = 4...(4)\}$
De (3), $a = 0$. Sustituir $a_3 = 0$ en (2): $a_2 = -3$
Sustituir $a_3 = 0$ en (1) y resolver junto (4):
$(a_1 - a_4 = 2) + (-a_1 - a_4 = 4) = -2a_4 = 6 \rightarrow a_4 = -3; a_1 = -1$. Tarea sustituir y comprobar.

Ejemplo 6:
De ser posible, escriba a $p(x) = 2x^2 - 6x + 9$ como una combinación lineal de los vectores $u(x) = 1 - x, v(x) = 3x^2, w(x) = 5 + x^2 \in P_2(\mathbb{R})$

Solución: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = au(x) + bv(x) + cw(x)$
$2x^2 - 6x + 9 = a(1 - x) + b(3x^2) + c(5 + x^2) = a - ax + 3bx^2 = 5c = cx^2$
$(a + 5c) - ax + (3b + c)x^2$
Por igualdad de polinomios tenemos $\{2 = 3b + c; -6 = -a \rightarrow a = 6; 9 = a + 5c \rightarrow c = \frac{3}{5}\} \rightarrow 3b + c = 2 \rightarrow b = \frac{7}{15}$
Así: $2x^2 - 6x + 9 = 6(1 - x) + \frac{7}{15}(3x^2) + \frac{3}{5}(5 + x^2)$
$= 6 - 6x + \frac{21}{15}x^2 + \frac{3}{5}x^2$
$= 2x^2 - 6x + 9$
==

Teorema 2:
Envoltura o envolvente lineal o espacio generado)
Sean $v1, .., v_k$ elementos de un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{K}$. El conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con $v_j \leq j \leq k$, es un subespacio de V y se denomina: envoltura lineal, envolvente lineal o espacio generado por los v_j.

Demostración 2:
Denotemos por $gen = \{v_1, .., v_k\}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de los v_j. Demostrar que no es vacio y es subconjunto de V.

Idea: Si $\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k \in V$ por cerradura; Si $\beta v_1 + ... + \beta_k v_k \in V$ por cerradura. Entonces $(\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k) \cdot (\beta v_1 + ... + \beta_k v_k)$ por cerradura del producto.

La unica combinación lineal que puede formar un subespacio es el cero, que formaria el subespacio trivial.

Regresando a la demostración:
Como $v_1, .., v_k \in gen\{..\}$ entonces $gen\{..\} \neq \emptyset$ y $gen\{..\} \subset V$

Aplicando el críterio de subespacio para verificar la cerradura de las operaciones:
sean $\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k; \beta v_1 + ... + \beta_k v_k \in gen$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:
$(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k) = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + .. + (\alpha_k + \beta_k)v_k \in gen$ por asociatividad de la suma en V y distributividad de la suma en V y luego por la cerradura de la suma en $\mathbb{K}$.

La otra cerradura se deja como ejercicio.

Ejemplo: Sea $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Este vector por si solo no forma un espacio vectorial. Salvo si fuera el vector 0. Sin embargo, al formar todas las combinaciones lineales, si genera un subespacio. Entonces $gen\{v\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Geometricamente seria todos los puntos de la diagonal que pasa por el origen(al ser espacio vectorial) y por el punto v. $gen\{(1,1)\} = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$.

Otra forma de escribir el generado es: $gen\{(1,1)\} = \{\lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Notación: Sea $S \subset V; genS = linS = \mathcal{L}(S) = span(S) = \ell(S)$

Ejercicio: La union de 2 subespacios es siempre un subespacio?

$V = \mathbb{R}^2; W_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}; W_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Recordemos que $W_1 \cup W_2 = \{\mathbb{R}; \mathbb{R}^2; \{(0,0)\}\}$

Podemos definir como $W_1 \cup W_2 = (x,0) \vee (0,x) : x \in \mathbb{R}\}$

$(1,0) + (0,1) = (1,1) \in$

La intereseccion finita de un subespacio con otro subespacio es un subespacio. Una interseccion de un infiniro numerable es un subespacio. La interseccion de un infinito no numerable de subespacios tambien es un subespacio(?). Proposición: La interseccion arbitraria de subespacios es un subespacio.

Nota 1:

Estudiar infinitos numerables y Analisis matematicos de Rudin, demostracion de George Cantor sobre inumerabilidad de los numeros Reales, no se puede hacer una funcion buyectiva de los naturales.

Proposición 2:

Pensemos en un espacio vectorial V y un subespacio $W_1, W_2 \in V$

$W_1 \cap W_2 = \{w \in W_1 \wedge w \in W_2\} \subset V$

Proposición 3: La intersección arbitraria de subespacios es un subespacio.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

y sea $\{W_j\}$ una colleción de subespacios de V.

Entonces:

$\cap_{j \in J} W_j$ es un subespacio de V. J es un conjunto arbitrario.

Demostración 3:

Como el neutro aditivo
(o vector cero) de $V, 0_v \in W_j \forall j \in J$
Entonces:
$0_v \in \cap_{j \in J} W_j$,
luego:
$\cap_{j \in J} W_j \neq \emptyset$.
Además, todos los
$W_j \subset V \to \cap W_j \subset V \forall j \in J$

Apliquemos el criterio de subespacio

Sean: $u, v \in \cap_{j \in J} W_j; \lambda \in \mathbb{K}$
Como: $u, v \in \cap_{j \in J} W_j \to u, v \in W_j \forall j \in J$
Pero $\forall j \in J, W_j$
es cerrado bajo suma y producto por escalar de V.
Entonces:
$u + v \in W_j \forall j \in J \to u + v \in \cap_{j \in J} W_j$
Por otro lado:
$\lambda u \in W_j \forall j \in J$
Luego:
$\lambda u \in \cap_{j \in J} W_j$

Proposición 4: El conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio.

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. El conjunto solución del sistema:
$AX = 0$
con $X = [x_1, .., x_n]^T \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ y $0 = [0, .., 0]^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$,
es un subespacio de $\mathbb{K}^2$

Ejemplo 7:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right\}$$

Entonces:
$z = 0 \wedge x - 2y = 0; x = 2y$
Conjunto solución: $S = \{(2y, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$