Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas
Notas: LaRana

Temario

Literatura

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

Recursos adicionales

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

Introducción

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.
Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$
$$V \text{ es un vector.}$$
$$F \text{ es un campo.}$$
$$+ \text{ es un operador.}$$
$$\cdot \text{ es una función.}$$
$$+ \wedge \cdot \text{ son binarios.}$$

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)
$$u + v \in F$$

2)
$$u + v = v + u$$

3)
$$v + (v + w) = (u + v) + w$$

4)
$$\exists! 0 \in F \to u + 0 = 0 + u = u$$

5)
$$\forall u \in F \exists! -u \in F \to u + (-u) = -u + u = 0$$

6)
$$uv \in F$$

7)
$$uv = vu$$

8)
$$u(vw) = (uv)w$$

9)
$$\exists! 1 \in F \to u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$

10)
$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \to uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$

11)
$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

I. AXIOMAS DEL CAMPO

Cerradura de la suma del campo $\forall u, v \in V$;
$u + v \in V$
Asociatividad de la suma del campo $\forall u, v, w \in V$;
$u + (v + w) = (u + v) + w$
Conmutatividad de la suma del campo $\forall u, v \in V$;
$u + v = v + u$
Elemento neutro en el campo $\exists !0 \in V$ tal que:
$0 + v = v + 0 = v$
Inverso aditivo en el campo $\forall v \in V\ \exists !w \in V$ tal que:
$v + w = w + v = 0$
Cerradura del producto en el campo $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$;
$\lambda v \in V$
Distributividad respecto escalar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v)$
Distributividad respecto elemento vector $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
Asociatividad $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
Identidad de $\mathbb{K}$ respecto al producto $\forall u \in V; \exists !1 \in \mathbb{K}$ tal que: $1u = u$

Definición 1: Sean A, B conjuntos.
Decimos que:
$A \subseteq B$
Si:
$\forall x \in A \to x \in B$

II. ESPACIOS VECTORIALES

Definición 2: (Espacio Vectorial)
Sea:
V un conjunto no vacío,
$\mathbb{F}$ un campo y
$+ : V \times V \to V$;
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$
Tal que se cumplen los siguientes axiomas:
$\forall u, v, w \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

Cerradura de la suma en el espacio vectorial.
$u + v \in V$
Asociatividad de la suma en el espacio vectorial.
$(u + w)$= u+$(v + w)$
Conmutatividad de la suma en E.V.
$u + v = v + u$
Existencia del vector cero. $\exists !0 \in V$ tal que:
$0 + v = v + 0 = v$
Existencia del inverso aditivo del vector. $\exists ! -v \in V$ tal que:
$-v + v = v + (-v) = 0$
Cerradura del producto escalar sobre el vector.
$\alpha v \in V$
Distributividad del P.E. respecto a la suma del vector.
$\alpha(u + v)$= $\alpha u + \alpha v$
Distributividad del P.E. respecto a la suma del campo.
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
Existencia del neutro multiplicativo del campo. $\exists !1 \in \mathbb{F}$ tal que:
$1 \cdot v = v$
Asociatividad del producto de escalares por el vector.
$\alpha(\beta v)$=$(\alpha\beta)v$

Entonces V se llama espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. A los elementos de V se le llama vectores.

Ejemplo 1: $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Sean $x(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y(y_1, ..., y_n)$$\in \mathbb{R}^n$
$x + y$:$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$\in \mathbb{R}^n$
αx :$(\alpha x, \alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$\in \mathbb{R}^n$

1) Cerradura de suma.
   Comprueba: $x + y$ =$(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$\in \mathbb{R}^n$

$$t_1 = x_1 + y_1, t_2 = x_2 + y_2, ..., t_n = x_n + y_n$$
$$\Rightarrow x + y = (t_1, t_2, ..., t_n)\mathbb{R}^n$$

$t_k \in \mathbb{R}$ por cerradura de la suma en el campo

$$\text{Siendo } k = \sum_{i=1}^{n}$$

2) Conmutatividad de suma.
3) Asociatividad de suma.
4) Existencia del vector 0 en $\mathbb{R}^n$.
5) Existencia del inverso aditivo.
6) Cerradura del producto por escalar.
7) Distributividad del P.E respecto a suma del vector.
8) Distributividad del P.E respecto a suma del campo.
9) Existencia del neutro multiplicativo del campo.
10) Asociatividad del producto de escalares.

III. SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 3: (Subespacio Vectorial)
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $W \subseteq V; W \neq \emptyset$. Decimos que W es subespacio vectorial de V si W constituye un espacio vectorial por si mismo con el campo $\mathbb{K}$ y las mismas operaciones de V.
Ejemplos:

- Todo subespacio de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{K}\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $\{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$
- Cualquier conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que forme una recta que pase por el origen $\{x, mx \in \mathbb{R}^2\}$

Proposición 1: (Propiedades de los subespacios vectoriales)
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $C \in \mathbb{K}$ Entonces se cumplen:

1) $0v = 0$
2) $\alpha 0 = 0$
3) Si $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \lor v = 0$
4) $(-1)v = -v$

Demostración 1:

Teorema 1: (Criterio de subespacio)
Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y CRITERIO DIFF from Subesp??