

Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas

Notas: LaRana

TEMARIO

1. Espacios Vectoriales
 - 1.1. Campos
 - 1.2. Espacios
 - 1.3. Subespacios
 - 1.4. Independencia Lineal
 - 1.5. Base
 - 1.6. Dimensión
2. Transformaciones Lineales
 - 2.1 Definición y propiedades
 - 2.2 Isomorfismo
 - 2.3 Núcleo e imagen
 - 2.4 Representación Matricial
3. Eigenvalor y eigenvector
 - 3.1 Definiciones y polinomio característico
 - 3.2 Teorema de Cayley Hamilton
 - 3.3 Diagonalización de operaciones lineales
4. Producto Interno
 - 4.1 Espacios con producto interno
 - 4.2 Ortogonalización
 - 4.3 Proceso GramSchmidt
5. Operadores Ortogonales
 - 5.1 Diagonalización
 - 5.2 Operadores simétricos
 - 5.3 Operadores hermitianos

LITERATURA

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

RECURSOS ADICIONALES

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

INTRODUCCIÓN

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.

Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$

V es un vector.

F es un campo.

$+$ es un operador.

\cdot es una función.

$+$ \wedge \cdot son binarios.

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)

$$u + v \in F$$

2)

$$u + v = v + u$$

3)

$$v + (v + w) = (u + v) + w$$

4)

$$\exists! 0 \in F \rightarrow u + 0 = 0 + u = u$$

5)

$$\forall u \in F \exists! -u \in F \rightarrow u + (-u) = -u + u = 0$$

6)

$$uv \in F$$

7)

$$uv = vu$$

8)

$$u(vw) = (uv)w$$

9)

$$\exists! 1 \in F \rightarrow u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$

10)

$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \rightarrow uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$

11)

$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

I. AXIOMAS DEL CAMPO

Cerradura de la suma $\forall u, v \in V$;

$$u + v \in V$$

Asociatividad de la suma $\forall u, v, w \in V$;

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

Conmutatividad de la suma $\forall u, v \in V$;

$$u + v = v + u$$

Elemento neutro $\exists! 0 \in V$ tal que:

$$0 + v = v + 0 = v$$

Inverso aditivo $\forall v \in V \exists! w \in V$ tal que:

$$v + w = w + v = 0$$

Cerradura del producto $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$;

$$\lambda v \in V$$

Distributividad respecto escalar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

$$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

Distributividad respecto elemento vector $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

$$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Asociatividad $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

$$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

Identidad de \mathbb{K} respecto al producto $\forall u \in V; \exists! 1 \in \mathbb{K}$

$$\text{tal que: } 1u = u$$

Definición 1: Sean A, B conjuntos.

Decimos que:

$$A \subseteq B$$

Si:

$$\forall x \in A \rightarrow x \in B$$

II. ESPACIOS VECTORIALES

Definición 2: (Espacio Vectorial)

Sea:

V un conjunto no vacío,

\mathbb{F} un campo y

$$+ : V \times V \rightarrow V;$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$$

Tal que se cumplen los siguientes axiomas:

Cerradura de la suma

Asociatividad de la suma

Conmutatividad de la suma

Existencia del vector cero

Existencia del inverso aditivo

Cerradura del producto escalar sobre el vector

Distributividad del producto escalar respecto a la suma del vector

Distributividad del producto escalar respecto a la suma del campo

Existencia del neutro multiplicativo del campo

Asociatividad del producto de escalares

Entonces V se llama espacio vectorial sobre el campo \mathbb{F} . A los elementos de V se le llama vectores.

Ejemplo 1: