

# Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas

Notas: LaRana

## TEMARIO

1. Espacios Vectoriales
  - 1.1. Campos
  - 1.2. Espacios
  - 1.3. Subespacios
  - 1.4. Independencia Lineal
  - 1.5. Base
  - 1.6. Dimensión
2. Transformaciones Lineales
  - 2.1 Definición y propiedades
  - 2.2 Isomorfismo
  - 2.3 Núcleo e imagen
  - 2.4 Representación Matricial
3. Eigenvalor y eigenvector
  - 3.1 Definiciones y polinomio característico
  - 3.2 Teorema de Cayley Hamilton
  - 3.3 Diagonalización de operaciones lineales
4. Producto Interno
  - 4.1 Espacios con producto interno
  - 4.2 Ortogonalización
  - 4.3 Proceso GramSchmidt
5. Operadores Ortogonales
  - 5.1 Diagonalización
  - 5.2 Operadores simétricos
  - 5.3 Operadores hermitianos

## LITERATURA

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

## RECURSOS ADICIONALES

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

## INTRODUCCIÓN

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.

Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$

$V$  es un vector.

$F$  es un campo.

$+$  es un operador.

$\cdot$  es una función.

$+$   $\wedge$   $\cdot$  son binarios.

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)

$$u + v \in F$$

2)

$$u + v = v + u$$

3)

$$v + (v + w) = (u + v) + w$$

4)

$$\exists! 0 \in F \rightarrow u + 0 = 0 + u = u$$

5)

$$\forall u \in F \exists! -u \in F \rightarrow u + (-u) = -u + u = 0$$

6)

$$uv \in F$$

7)

$$uv = vu$$

8)

$$u(vw) = (uv)w$$

9)

$$\exists! 1 \in F \rightarrow u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$

10)

$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \rightarrow uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$

11)

$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

## I. AXIOMAS DEL CAMPO

**Cerradura de la suma**  $\forall u, v \in V$ ;

$$u + v \in V$$

**Asociatividad de la suma**  $\forall u, v, w \in V$ ;

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

**Conmutatividad de la suma**  $\forall u, v \in V$ ;

$$u + v = v + u$$

**Elemento neutro**  $\exists! 0 \in V$  tal que:

$$0 + v = v + 0 = v$$

**Inverso aditivo**  $\forall v \in V \exists! w \in V$  tal que:

$$v + w = w + v = 0$$

**Cerradura del producto**  $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$ ;

$$\lambda v \in V$$

**Distributividad respecto escalar**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ;

$$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

**Distributividad respecto elemento vector**  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ;

$$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

**Asociatividad**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ;

$$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$$

**Identidad de  $\mathbb{K}$  respecto al producto**  $\forall u \in V; \exists! 1 \in \mathbb{K}$

$$\text{tal que: } 1u = u$$

*Definición 1:* Sean  $A, B$  conjuntos.

Decimos que:

$$A \subseteq B$$

Si:

$$\forall x \in A \rightarrow x \in B$$

## II. ESPACIOS VECTORIALES

*Definición 2:* (Espacio Vectorial)

Sea:

$V$  un conjunto no vacío,

$\mathbb{F}$  un campo y

$$+ : V \times V \rightarrow V;$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$$

Tal que se cumplen los siguientes axiomas:

$$\forall u, v, w \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

**Cerradura de la suma en el espacio vectorial.**

$$u + v \in V$$

**Asociatividad de la suma en el espacio vectorial.**

$$(u + w) = u + (v + w)$$

**Conmutatividad de la suma en E.V.**

$$u + v = v + u$$

**Existencia del vector cero.**  $\exists! 0 \in V$  tal que:

$$0 + v = v + 0 = v$$

**Existencia del inverso aditivo del vector.**  $\exists! -v \in V$  tal que:

$$-v + v = v + (-v) = 0$$

**Cerradura del producto escalar sobre el vector.**

$$\alpha v \in V$$

**Distributividad del P.E. respecto a la suma del vector.**

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

**Distributividad del P.E. respecto a la suma del campo.**

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

**Existencia del neutro multiplicativo del campo.**  $\exists! 1 \in \mathbb{F}$

$$\text{tal que:}$$

$$1 \cdot v = v$$

**Asociatividad del producto de escalares por el vector.**

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$$

Entonces  $V$  se llama espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$ . A los elementos de  $V$  se le llama vectores.

*Ejemplo 1:*  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sean  $x(x_1, x_2, \dots, x_n), y(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x + y : (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha x : (\alpha x, \alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

1) Cerradura de suma.

$$\text{Comprueba: } x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$t_1 = x_1 + y_1, t_2 = x_2 + y_2, \dots, t_n = x_n + y_n$$

$$\Rightarrow x + y = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

$t_k \in \mathbb{R}$  por cerradura de la suma en el campo

$$\text{Siendo } k = \sum_{i=1}^n$$

2) Conmutatividad de suma.

3) Asociatividad de suma.

4) Existencia del vector 0 en  $\mathbb{R}^n$ .

5) Existencia del inverso aditivo.

6) Cerradura del producto por escalar.

7) Distributividad del P.E respecto a suma del vector.

8) Distributividad del P.E respecto a suma del campo.

9) Existencia del neutro multiplicativo del campo.

10) Asociatividad del producto de escalares.