# Algebra Lineal

Profesor: Jesús Gil Galindo Cuevas
Notas: LaRana

## TEMARIO



## LITERATURA

- Larson
- Anton
- Grossman
- Lipschutz
- Friedberg
- Hoffman
- Sheldon Axler
- Egor Maximenko, Algebra 2 y 3

## RECURSOS ADICIONALES

- Pagina web del profesor
- Canal de Youtube

## INTRODUCCIÓN

Iniciaremos el curso estudiando la estructura matemática del espacio vectorial. Para esto utilizaremos lenguaje de teoría de conjuntos.
Un espacio vectorial puede ser definido como una estructura:

$$(V, F, +, \cdot)$$
$$V \text{ es un vector.}$$
$$F \text{ es un campo.}$$
$$+ \text{ es un operador.}$$
$$\cdot \text{ es una función.}$$
$$+ \wedge \cdot \text{ son binarios.}$$

Desarrollaremos las siguientes propiedades:

1)
$$u + v \in F$$
2)
$$u + v = v + u$$
3)
$$v + (v + w) = (u + v) + w$$
4)
$$\exists! 0 \in F \rightarrow u + 0 = 0 + u = u$$
5)
$$\forall u \in F \exists! -u \in F \rightarrow u + (-u) = -u + u = 0$$
6)
$$uv \in F$$
7)
$$uv = vu$$
8)
$$u(vw) = (uv)w$$
9)
$$\exists! 1 \in F \rightarrow u \cdot 1 = \cdot 1 = u$$
10)
$$\forall u \in F; u \neq 0 \exists! u^{-1} \in F \rightarrow uu^{-1} = u^{-1}u = 1$$
11)
$$u(v + w) = uv + uw \wedge (v + w)u = vu + wu$$

## I. Axiomas del Campo

**Cerradura de la suma** $\forall u, v \in V$;
$u + v \in V$
**Asociatividad de la suma** $\forall u, v, w \in V$;
$u + (v + w) = (u + v) + w$
**Conmutatividad de la suma** $\forall u, v \in V$;
$u + v = v + u$
**Elemento neutro** $\exists! 0 \in V$ tal que:
$0 + v = v + 0 = v$
**Inverso aditivo** $\forall v \in V$ $\exists! w \in V$ tal que:
$v + w = w + v = 0$
**Cerradura del producto** $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v \in V$ ;
$\lambda v \in V$
**Distributividad respecto escalar** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v)$
**Distributividad respecto elemento vector** $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
$\forall u, v \in V; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
**Asociatividad** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
$\forall v \in V; (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
**Identidad de $\mathbb{K}$ respecto al producto** $\forall u \in V; \exists! 1 \in \mathbb{K}$
tal que: $1u = u$

*Definición 1:* Sean $A, B$ conjuntos.
Decimos que:
$A \subseteq B$
Si:
$\forall x \in A \to x \in B$

## II. Espacios Vectoriales

*Definición 2:* (Espacio Vectorial)
Sea:
$V$ un conjunto no vacío,
$\mathbb{F}$ un campo y
$+ : V \times V \to V$;
$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$
Tal que se cumplen los siguientes axiomas:

**Cerradura de la suma**
**Asociatividad de la suma**
**Conmutatividad de la suma**
**Existencia del vector cero**
**Existencia del inverso aditivo**
**Cerradura del producto escalar sobre el vector**
**Existencia del neutro multiplicativo del campo**
**Asociatividad del producto de escalares**

Entonces $V$ se llama espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. A los elementos de $V$ se le llama vectores.

*Ejemplo 1:* $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (1)$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$
$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
$\alpha x := (\alpha x, \alpha x_1, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$

1) Cerradura de suma
2) Conmutatividad de suma
3) Asociatividad de suma
4)
5)
6)
7)
8)
9)