# Problemas del portafolio tipo Sharpe con multiplicadores de Lagrange

## Definición del problema

Se busca optimizar el ratio de Sharpe de un portafolio de inversión mediante el uso de multiplicadores de Lagrange. Para ello definimos lo siguiente:

- $w = [w_1, w_2, \ldots w_n]^T$: vector de pesos para los activos del portafolio
- $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n]^T$: vector del valor esperado de cada activo
- $\Sigma$: matriz de covarianza de los rendimientos de los activos.
- $r_f$: tasa libre de riesgo
- $\mu_p$: retorno del portafolio
- $\mathbf{1}$: vector de unos.

El sharpe ratio se define como: $S = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$, adoptado a nuestro problema: $S = \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$

donde:
- $w^T\mu$: retorno del portafolio
- $w^T \Sigma w$: varianza del portafolio.

## Formulación del problema

$$\max_{w} \quad S = \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^T w = 1$$

Resolver este problema de optimización de forma analítica directamente se vuelve muy complicado, por lo que se deben realizar pasos previos.

## Solución del problema

Para llegar a optimizar el ratio de Sharpe, primero obtendremos la línea de asignación de capital de forma analítica.

a)
$$\min \sigma^2 = w^T \Sigma w$$
$$s.t. \quad w^T 1 + w_{rf} = 1$$
$$w^T \mu + w_{rf}\, rf = \mu_p.$$

Donde $w_{rf}$ es un valor escalar que representa el peso de la tasa libre de riesgo dentro del portafolio.

Se pueden simplificar las restricciones sustituyendo la primera en la segunda:

$$w_{rf} = 1 - w^T \cdot 1$$
$$w^T \mu + (1 - w^T \cdot 1)\, r_f = \mu_p$$
$$w^T \mu + rf - w^T \cdot 1\, rf = \mu_p$$
$$\mu_p - rf = w^T(\mu - rf \cdot 1)$$

Con esta modificación el problema de optimización es de la siguiente manera

$$\min \sigma^2 = w^T \Sigma w$$
$$s.t \quad w^T(\mu - rf \cdot 1) = \mu_p - rf$$

Uso de multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = w^T \Sigma w + \lambda\left(w^T(\mu - rf \cdot 1) - \mu_p + rf\right)$$

$$\partial \mathcal{L}/\partial w = 0 \Rightarrow 2\Sigma w + \lambda \mu - \lambda\, rf \cdot 1 = 0$$
$$\partial \mathcal{L}/\partial \lambda = 0 \Rightarrow w^T(\mu - rf \cdot 1) - \mu_p + rf = 0$$

Despejando $w$ de $\partial \mathcal{L}/\partial w = 0$

$$2\Sigma w = \lambda\, rf \cdot 1 - \lambda \mu$$
$$\Sigma w = \frac{\lambda\, rf \cdot 1 - \lambda \mu}{2}$$
$$w = \tfrac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda\, rf \cdot 1 - \lambda \mu)$$
$$w = -\tfrac{1}{2} \Sigma^{-1} \lambda (\mu - rf \cdot 1)$$

Para encontrar el valor de $\lambda$, sustituimos $w$ en $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = 0$

$$\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\lambda(\mu - rf\cdot 1)\right]^T(\mu - rf\cdot 1) - \mu_p + rf = 0$$

$$\lambda = \frac{-2(\mu_p - rf)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}$$

Ahora reemplazamos $\lambda$ en $w$:

$$w = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left[\frac{-2(\mu_p - rf)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\right](\mu - rf\cdot 1)$$

$$\left[w = \frac{(\mu_p - rf)\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\right]$$

b)

Entonces sustituimos $w$ en la fórmula para $\sigma^2$

$$\sigma^2 = w^T \Sigma w$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{(\mu_p - rf)\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\right]^T \Sigma \left[\frac{(\mu_p - rf)\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - rf)(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\Sigma\left[\frac{(\mu_p - rf)\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}\right]$$

Dado que $\Sigma^{-1}\Sigma = I$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - rf)(\mu - rf\cdot 1)^T(\mu_p - rf)\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)\,(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - rf)(\mu_p - rf)\,\cancel{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)\,\cancel{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - rf)^2}{(\mu - rf\cdot 1)^T\Sigma^{-1}(\mu - rf\cdot 1)}$$

Entonces $\sigma = \dfrac{\mu_p - rf}{\sqrt{(\mu - rf \cdot 1)^T \Sigma^{-1} (\mu - rf \cdot 1)}}$

Además $\sqrt{(\mu - rf \cdot 1)^T \Sigma^{-1} (\mu - rf \cdot 1)} = \dfrac{\mu_p - rf}{\sigma}$, la cual es la fórmula del ratio de Sharpe.

Para este caso se busca expresar el retorno del portafolio en función de la volatidad, entonces despejamos $\mu_p$:

$$\left[\ \mu_p = rf + \sigma \sqrt{(\mu - rf \cdot 1)^T \Sigma^{-1} (\mu - rf \cdot 1)}\ \right]$$

Con esta ecuación se puede calcular la línea tangente a la frontera eficiente, conocida como Línea de Asignación de Capital (LAC). Por lo tanto podemos concluir que la pendiente de la línea tangente a la frontera eficiente es el ratio de Sharpe.

c)

$$\max \; SR = \frac{\mu_p - rf}{\sigma_p}$$

utilizando las fórmulas previamente definidas, lo reescribimos de forma matricial:

$$SR = \frac{w^T \mu - rf}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

llegando así al problema inicial

$$\max_w \; SR = \frac{w^T \mu - rf}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

$$\text{s.t. } \; 1^T w = 1$$

Para resolver el problema aprovecharemos la fórmula obtenida para $\sigma_p$, y haremos definiciones de matrices importantes.

Matriz $M = U^T \Sigma^{-1} U$, $U = \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces

$$M = \begin{bmatrix} \mu^T \\ 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ 1^T \Sigma^{-1} \mu & 1^T \Sigma^{-1} 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = v^T M^{-1} v, \quad v = [\mu_p \ 1]^T$$

$$\sigma_p^2 = [\mu_p \ 1] \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} 1^T \Sigma^{-1} 1 & -\mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ -\mu^T \Sigma^{-1} 1 & \mu^T \Sigma^{-1} \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{\det(M)} \left[ 1^T \Sigma^{-1} 1 (\mu_p^2) - 2 (1^T \Sigma^{-1} \mu)(\mu_p) + \mu^T \Sigma^{-1} \mu \right]$$

Definimos los siguientes cambios de variable

$S_{11} = 1^T \Sigma^{-1} 1$, $S_{1\mu} = 1^T \Sigma^{-1} \mu$, $S_{\mu\mu} = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$, $d = \det(M)$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d} \left[ S_{11} (\mu_p^2) - 2 S_{1\mu} (\mu_p) + S_{\mu\mu} \right]$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{S_{11} \mu_p^2 - 2 S_{1\mu} \mu_p + S_{\mu\mu}}{d}}$$

Entonces sustituimos $\sigma_p$ en el problema original, teniendo que:

$$\max_{\mu_p} \frac{\mu_p - rf}{\sqrt{S_{11} \mu_p^2 - 2 S_{1\mu} \mu_p + S_{\mu\mu}}}$$

Para maximizar la función la derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{\partial}{\partial w_p} = \frac{\frac{d}{dw_p}(w_p - rf)\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}} - \frac{d}{dw_p}\left(\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}\right)(w_p - rf)}{\left(\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_p} = \frac{\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}} - (w_p - rf)\left[\frac{1}{2}\left(S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}\right)^{-1/2}\left(2S_{11} w_p - 2S_{1u}\right)\right]}{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_p} = \frac{\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}} - (w_p - rf)\left(\frac{S_{11} w_p - S_{1u}}{\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}}\right)}{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu}}} - \frac{(w_p - rf)(S_{11} w_p - S_{1u})}{(S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu})^{3/2}} = 0$$

Multiplicando ambos lados por $(S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu})^{3/2}$

$$\Rightarrow S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu} - (w_p - rf)(S_{11} w_p - S_{1u}) = 0$$

Simplificamos la expresión y resolvemos para $w_p$

$$S_{11} w_p^2 - 2S_{1u} w_p + S_{uu} - S_{11} w_p^2 + S_{1u} w_p + S_{11} w_p rf - S_{1u} rf = 0$$

$$S_{uu} - S_{1u} w_p + S_{11} w_p rf - S_{1u} rf = 0$$

$$-S_{1u} w_p + S_{11} w_p rf = S_{1u} rf - S_{uu}$$

$$w_p (S_{11} rf - S_{1u}) = S_{1u} rf - S_{uu}$$

$$w_p^{max} = \frac{S_{1u} rf - S_{uu}}{(S_{11} rf - S_{1u}}$$

Para encontrar los pesos óptimos para el ratio de sharpe máximo, sustituimos $w_p^{max}$ en la formula para los pesos eficientes de la frontera de Markowitz.

$$w = \Sigma^{-1} U M^{-1} u$$

$$w = \Sigma^{-1} [\mu \ 1] \left( \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos $\det(M) = s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2$ y $\mu_p^m = \frac{s_{1\mu} rf - s_{\mu\mu}}{s_{11} rf - s_{1\mu}}$

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} [\mu \ 1] \begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{1\mu} rf - s_{\mu\mu}}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Simplificamos la expresión:

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} [\mu \ 1] \begin{bmatrix} \frac{s_{11} s_{1\mu} rf - s_{11} s_{\mu\mu}}{s_{11} rf - s_{1\mu}} - s_{1\mu} \\ \frac{s_{\mu\mu} s_{1\mu} - s_{1\mu}^2 rf}{s_{11} rf - s_{1\mu}} + s_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} [\mu \ 1] \begin{bmatrix} \frac{s_{11} s_{1\mu} rf - s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu} s_{11} rf + s_{1\mu}^2}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \\ \frac{s_{\mu\mu} s_{1\mu} - s_{1\mu}^2 rf + s_{\mu\mu} s_{11} rf - s_{\mu\mu} s_{1\mu}}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} [\mu \ 1] \begin{bmatrix} \frac{-s_{11} s_{\mu\mu} + s_{1\mu}^2}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \\ \frac{rf (s_{\mu\mu} s_{11} - s_{1\mu}^2)}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} \left( \frac{-\mu (s_{11} s_{\mu\mu} + s_{1\mu}^2)}{s_{11} rf - s_{1\mu}} + \frac{rf \cdot 1 (s_{\mu\mu} s_{11} - s_{1\mu}^2)}{s_{11} rf - s_{1\mu}} \right) \frac{-1}{-1}$$

$$w = \frac{1}{s_{11} s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2} \Sigma^{-1} \left( \frac{\mu (s_{11} s_{\mu\mu} + s_{1\mu}^2)}{s_{1\mu} - s_{11} rf} - \frac{rf \cdot 1 (s_{\mu\mu} s_{11} - s_{1\mu}^2)}{s_{1\mu} - s_{11} rf} \right)$$

$$w = \Sigma^{-1} \left[ \frac{\mu}{s_{1\mu} - s_{11} rf} - \frac{rf \cdot 1}{s_{1\mu} - s_{11} rf} \right] = \Sigma^{-1} \left( \frac{\mu - rf \cdot 1}{s_{1\mu} - s_{11} rf} \right)$$

Como $S_{1\mu} = 1^T \Sigma^{-1} \mu$ y $S_{11} = 1^T \Sigma^{-1} 1$, tenemos que:

$$\left[ w = \frac{\Sigma^{-1} (\mu - r_f \cdot 1)}{1^T \Sigma^{-1} (\mu - r_f \cdot 1)} \right]$$

Con esto llegamos a la fórmula par w, que maximiza el ratio de Sharpe.

# Ejemplo

d) Select five assets from the market, calculate their returns, and, with this, calculate the expected return and the covariance matrix. Once these parameters are obtained, the optimization problem will be solved, and investment recommendations will be generated. Remember to verify that each of the assets has sufficient liquidity.

## Fórmula para que optimiza el ratio de Sharpe

$$\frac{[\quad]}{[\quad]}$$

- $\sqrt{}\ \sqrt{}\ \sqrt{}$ : vector de pesos de los activos del portafolio
- $\sqrt{}\ \sqrt{}\ \sqrt{}$ : vector del valor esperado de cada uno de los activos
- : la matriz de covarianza de los rendimientos de los activos
- : la tasa libre de riesgo
- : vector de unos

## Código

### Librerías

In [1]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import yfinance as yf
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Markdown
```

### Obtención de datos

In [2]:
```
tickers=['AMZN','WMT','GOOGL','AAPL','JPM']

f_inicial='2020-01-01'
f_final='2024-11-10'

datos1=yf.download(tickers,f_inicial,f_final)['Adj Close']

rt = datos1.pct_change().dropna()
```

```
[*********************100%***********************]  5 of 5 completed
```

### Cálculo de variables importantes

In [3]:
```
mu = (rt.mean() * 252).values  # Rendimientos esperados
sigma = rt.cov().values  # Matriz de covarianza
sigma_inv = np.linalg.inv(sigma)  # Matriz de covarianza inversa
rf = 0.04413  # Tasa libre de riesgo
unos = np.ones(len(mu)) # Vector de unos
mu_rf = mu - np.dot(rf,unos) # Rendimientos esperados en exceso
```

## Uso de fórmula para

In [4]:
```
w = np.dot(sigma_inv,mu_rf)/ np.dot(unos.T,np.dot(sigma_inv,mu_rf))
```

## Cálculo del retorno, volatilidad y Sharpe Ratio del portafolio

In [5]:
```
ret = np.dot(w.T, mu) # Rendimiento esperado del portafolio
risk = np.sqrt(np.dot(w.T, np.dot(sigma, w))) * np.sqrt(252) # Volatilidad c
sharpe = (ret - rf) / risk # Sharpe ratio
```

## Resultados

In [6]:
```
w_df = pd.DataFrame(w, index=tickers, columns=['w'])

print(f'Rendimiento esperado: {ret:.6%}')
print(f'Volatilidad: {risk:.6%}')
print(f'Ratio de sharpe: {sharpe:.6f}')



display(Markdown('### Valores del vector $w$:'))
display(w_df.T)
```

```
Rendimiento esperado: 23.459515%
Volatilidad: 21.499183%
Ratio de sharpe: 0.885918
```

### Valores del vector :

| | AMZN | WMT | GOOGL | AAPL | JPM |
|---|---|---|---|---|---|
| **w** | 0.342612 | -0.031618 | 0.153063 | 0.059 | 0.476943 |