“PROBLEMA DE PORTAFOLIO TIPO SHARPE CON MULTIPLICADORES DE LAGRANGE”
ITESO

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN
JUAN DIEGO SÁNCHEZ TORRES

IVANNA HERRERA IBARRA 744614
ARANTZA GOMEZ HARO GAMBOA 744249
JAVIER ALEJANDRO FAJARDO LÓPEZ 740448
LUIS FERNANDO MÁRQUEZ BAÑUELOS 744489

29 DE NOVIEMBRE DE 2024

Tabla de contenido

Motivación:

El modelo que optimiza el ratio de Sharpe utilizando multiplicadores de Lagrange tiene una gran relevancia debido a su capacidad para abordar problemas clave relacionados con la construcción de portafolios y la gestión de inversiones.

En cuanto a la ingeniería financiera, el utilizar estos multiplicadores es esencial para optimizar un portafolio de inversión. Su uso es bastante útil debido a la flexibilidad que nos ofrece para incorporar restricciones. Mediante los multiplicadores de Lagrange, es posible encontrar una solución óptima que cumpla con todas las restricciones establecidas de manera eficiente y precisa.

Resolver este problema de forma analítica permite comprender en profundidad el funcionamiento de los portafolios de inversión y su relación con el ratio de Sharpe. También facilita el entendimiento de conceptos teóricos clave sobre portafolios de inversión, lo que habilita su aplicación en otros problemas relacionados. Además, este enfoque promueve una toma de decisiones basada en datos, orientada a maximizar una métrica establecida de manera objetiva.

El modelo puede modificarse y adaptarse para optimizar portafolios de inversión utilizando otras métricas objetivo. Además, puede complementarse con técnicas de machine learning e inteligencia artificial para identificar portafolios más eficientes o desarrollar modelos predictivos relevantes.

Desarrollo teórico:

Supuestos

- Los inversionistas son racionales.
- El mercado es eficiente.
- Los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente con media μ y desviación estándar σ.
- La media y la desviación estándar de los rendimientos diarios de los activos se utilizan como medidas del rendimiento esperado y el riesgo de un activo.
- Existe un activo libre de riesgo.
- La tasa libre de riesgo es constante.
- Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado sin límite a la tasa libre de riesgo.
- Están permitidas posiciones cortas y largas para los activos dentro del portafolio.

Definición del problema

Se busca optimizar el ratio de Sharpe de un portafolio de inversión mediante el uso de multiplicadores de Lagrange.

Para ello definimos lo siguiente:

- $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$: Vector de pesos para los activos del portafolio.

- $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$: Vector del valor esperado de cada activo.
- Σ: Matriz de covarianza de los rendimientos de los activos.
- r_f: Tasa libre de riesgo.
- μ_p: Retorno del portafolio.
- 1: Vector de unos.

El Sharpe ratio se define como $SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$, adaptado a nuestro problema como $SR = \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T\Sigma w}}$.

Donde:

- $w^T\mu$: Retorno del portafolio.
- $w^T\Sigma w$: Varianza del portafolio.

Formulación del problema

$$\max_{w} SR = \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T\Sigma w}}$$
$$s.t.\ 1^T w = 1$$

Resolver este problema de optimización de forma analítica directamente se vuelve muy complicado, por lo que se deben realizar pasos previos.

Solución del problema

Para llegar a optimizar el ratio de Sharpe, primero obtendremos la línea de asignación de capital de forma analítica.

$$\min \sigma^2 = w^T\Sigma w$$
$$s.t.\ w^T 1 + w_{r_f} = 1$$
$$w^T\mu + w_{r_f} r_f = \mu_p$$

Donde w_{r_f} es un valor escalar que representa el peso de la tasa libre de riesgo dentro del portafolio.

Se pueden simplificar las restricciones sustituyendo la primera en la segunda:

$$w_{r_f} = 1 - w^T \cdot 1$$
$$w^T\mu + (1 - w^T \cdot 1) r_f = \mu_p$$
$$w^T\mu + r_f - w^T \cdot 1 r_f = \mu_p$$
$$\mu_p - r_f = w^T(\mu - r_f \cdot 1)$$

Con esta modificación el problema de optimización es de la siguiente manera:

$$\min \sigma^2 = w^T\Sigma w$$
$$s.t.\ w^T\left(\mu - r_f \cdot 1\right) = \mu_p - r_f$$

Uso de multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = w^T\Sigma w + \lambda(w^T\left(\mu - r_f \cdot 1\right) - \mu_p + r_f)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \Rightarrow 2\Sigma w + \lambda\mu - \lambda r_f \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow w^T\left(\mu - r_f \cdot 1\right) - \mu_p + r_f = 0$$

Despejando w de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0$:

$$2\Sigma w = \lambda r_f \cdot 1 - \lambda\mu$$
$$\Sigma w = \frac{\lambda r_f \cdot 1 - \lambda\mu}{2}$$
$$w = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda r_f \cdot 1 - \lambda\mu)$$
$$w = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\lambda(\mu - r_f \cdot 1)$$

Para encontrar el valor de λ, sustituimos w en $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$:

$$\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\lambda\left(\mu - r_f \cdot 1\right)\right]^T (\mu - r_f \cdot 1) - \mu_p + r_f = 0$$
$$\lambda = \frac{-2(\mu_p - r_f)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}$$

Ahora reemplazamos λ en w:

$$w = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left[\frac{-2\left(\mu_p - r_f\right)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}\left(\mu - r_f \cdot 1\right)}\right](\mu - r_f \cdot 1)$$

$$\boxed{w = \frac{\left(\mu_p - r_f\right)\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f \cdot 1\right)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}\left(\mu - r_f \cdot 1\right)}}$$

Entonces sustituimos w en la fórmula para σ^2:

$$\sigma^2 = w^T \Sigma w$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{\left(\mu_p - r_f\right)\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f \cdot 1\right)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}\left(\mu - r_f \cdot 1\right)}\right]^T \Sigma \left[\frac{\left(\mu_p - r_f\right)\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - r_f)(\mu - r_f \cdot 1)^T \Sigma^{-1}}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)} \Sigma \left[\frac{(\mu_p - r_f)\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}\right]$$

Dado que $\Sigma^{-1}\Sigma = I$:

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - r_f)\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T (\mu_p - r_f)\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - r_f)(\mu_p - r_f)\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu_p - r_f)^2}{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{\mu_p - r_f}{\sqrt{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}}$$

Además, $\sqrt{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)} = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma}$, la cual es la fórmula del ratio de Sharpe.

Para este caso se busca expresar el retorno del portafolio en función de la volatilidad, entonces despejamos μ_p:

$$\boxed{\mu_p = r_f + \sigma\sqrt{\left(\mu - r_f \cdot 1\right)^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}}$$

Con esta ecuación se puede calcular la línea tangente a la frontera eficiente, conocida como Línea de Asignación de Capital (LAC). Por lo tanto, podemos concluir que la pendiente de la línea tangente a la frontera eficiente es el ratio de Sharpe.

$$\max SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

Utilizando las fórmulas previamente definidas, lo reescribimos de forma matricial:

$$SR = \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

Llegando así al problema inicial:

$$\max_{w} SR = \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$
$$s.t. \;\; 1^T w = 1$$

Para resolver el problema aprovecharemos la fórmula obtenida para σ_p y haremos definiciones de matrices importantes:

$$Matriz\ M = U^T \Sigma^{-1} U, \quad U = \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$M = \begin{bmatrix} \mu^T \\ 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} [\mu \quad 1] = \begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ 1^T \Sigma^{-1} \mu & 1^T \Sigma^{-1} 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p{}^2 = u^T M^{-1} u, \;\; u = [\mu_p \quad 1]^T$$

$$\sigma_p{}^2 = [\mu_p \quad 1] \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} 1^T \Sigma^{-1} 1 & -\mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ -\mu^T \Sigma^{-1} 1 & \mu^T \Sigma^{-1} \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{1}{\det(M)} \left[1^T \Sigma^{-1} 1 (\mu_p{}^2) - 2(1^T \Sigma^{-1} \mu)(\mu_p) + \mu^T \Sigma^{-1} \mu \right]$$

Definimos los siguientes cambios de variable:

$$s_{11} = 1^T \Sigma^{-1} 1, \qquad s_{1\mu} = 1^T \Sigma^{-1} \mu, \qquad s_{\mu\mu} = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \qquad d = \det(M)$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{1}{d} \left[s_{11} (\mu_p{}^2) - 2 s_{1\mu} (\mu_p) + s_{\mu\mu} \right]$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{s_{11} \mu_p{}^2 - 2 s_{1\mu} \mu_p + s_{\mu\mu}}{d}}$$

Entonces sustituimos σ_p en el problema original, teniendo que:

$$\underset{\mu_p}{max} \quad \frac{\mu_p - r_f}{\sqrt{s_{11} \mu_p{}^2 - 2 s_{1\mu} \mu_p + s_{\mu\mu}}}$$

Para maximizar la función, la derivamos e igualamos a 0:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_p} = \frac{\frac{d}{d\mu_p}(\mu_p - r_f)\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}} - \frac{d}{d\mu_p}\left(\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}\right)(\mu_p - r_f)}{\left(\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_p} = \frac{\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}} - (\mu_p - r_f)\left[\frac{1}{2}\left(s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}(2s_{11}\mu_p - 2s_{1\mu})\right]}{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_p} = \frac{\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}} - (\mu_p - r_f)\left(\frac{s_{11}\mu_p - s_{1\mu}}{\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}}\right)}{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}}} - \frac{(\mu_p - r_f)(s_{11}\mu_p - s_{1\mu})}{\left(s_{11}\mu_p{}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Multiplicando ambos lados por $\left(s_{11}{\mu_p}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu}\right)^{\frac{3}{2}}$:

$$\Rightarrow s_{11}{\mu_p}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu} - \left(\mu_p - r_f\right)\left(s_{11}\mu_p - s_{1\mu}\right) = 0$$

Simplificamos la expresión y resolvemos para μ_p:

$$s_{11}{\mu_p}^2 - 2s_{1\mu}\mu_p + s_{\mu\mu} - s_{11}{\mu_p}^2 + s_{1\mu}\mu_p + s_{11}\mu_p r_f - s_{1\mu}r_f = 0$$
$$s_{\mu\mu} - s_{1\mu}\mu_p + s_{11}\mu_p r_f - s_{1\mu}r_f = 0$$
$$-s_{1\mu}\mu_p + s_{11}\mu_p r_f = s_{1\mu}r_f - s_{\mu\mu}$$
$$\mu_p\left(s_{11}r_f - s_{1\mu}\right) = s_{1\mu}r_f - s_{\mu\mu}$$
$$\mu_p^{max} = \frac{s_{1\mu}r_f - s_{\mu\mu}}{s_{11}r_f - s_{1\mu}}$$

Para encontrar los pesos óptimos para el ratio de Sharpe máximo, sustituimos μ_p^{max} en la fórmula para los pesos eficientes de la frontera de Markowitz.

$$w = \Sigma^{-1}UM^{-1}u$$
$$w = \Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu & 1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\det(M)}\begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\mu_p \\ 1\end{bmatrix}$$

Reemplazamos $\det(M) = s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2$ y ${\mu_p}^{max} = \frac{s_{1\mu}r_f - s_{\mu\mu}}{s_{11}r_f - s_{1\mu}}$:

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s_{1\mu}r_f - s_{\mu\mu}}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} \\ 1\end{bmatrix}$$

Simplificamos la expresión:

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s_{11}s_{\mu\mu}r_f - s_{11}s_{\mu\mu}}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} - s_{1\mu} \\ \frac{s_{\mu\mu}s_{1\mu} - {s_{1\mu}}^2 r_f}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} + s_{\mu\mu}\end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s_{11}s_{\mu\mu}r_f - s_{11}s_{\mu\mu} - s_{1\mu}s_{11}r_f + {s_{1\mu}}^2}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} \\ \frac{s_{\mu\mu}s_{1\mu} - {s_{1\mu}}^2 r_f + s_{\mu\mu}s_{11}r_f - s_{\mu\mu}s_{1\mu}}{s_{11}r_f - s_{1\mu}}\end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-s_{11}s_{\mu\mu} + {s_{1\mu}}^2}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} \\ \frac{r_f\left(s_{\mu\mu}s_{11} - {s_{1\mu}}^2\right)}{s_{11}r_f - s_{1\mu}}\end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\left(\frac{-\mu\left(s_{11}s_{\mu\mu} + {s_{1\mu}}^2\right)}{s_{11}r_f - s_{1\mu}} + \frac{r_f \cdot 1\left(s_{\mu\mu}s_{11} - {s_{1\mu}}^2\right)}{s_{11}r_f - s_{1\mu}}\right)\frac{-1}{-1}$$

$$w = \frac{1}{s_{11}s_{\mu\mu} - {s_{1\mu}}^2}\Sigma^{-1}\left(\frac{\mu\left(s_{11}s_{\mu\mu} + {s_{1\mu}}^2\right)}{s_{1\mu} - s_{11}r_f} + \frac{r_f \cdot 1\left(s_{\mu\mu}s_{11} - {s_{1\mu}}^2\right)}{s_1\mu - s_{11}r_f}\right)$$

$$w = \Sigma^{-1}\left[\frac{\mu}{s_{1\mu} - s_{11}r_f} - \frac{r_f \cdot 1}{s_{1\mu} - s_{11}r_f}\right] = \Sigma^{-1}\left(\frac{\mu - r_f \cdot 1}{s_{1\mu} - s_{11}r_f}\right)$$

Como $s_{1\mu} = 1^T\Sigma^{-1}\mu$ y $s_{11} = 1^T\Sigma^{-1}1$, tenemos que:

$$\boxed{w = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{1^T\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}}$$

Con esto llegamos a la fórmula para w que maximiza el ratio de Sharpe.

Ejemplo simple:

Para el ejemplo utilizaremos 2 activos por simplicidad de cálculos.

Vamos a utilizar datos artificiales para desarrollar un ejemplo. Para ello definiremos los siguiente:

$$\mu = [0.25 \quad 0.25]^T$$

$$1 = [\,1 \quad 1\,]^T$$

$$r_f = 0.04413$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.000519 & 0.000302 \\ 0.000302 & 0.000418 \end{bmatrix}$$

La fórmula para los pesos óptimos es:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}{1^T\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)}$$

Para utilizarlo debemos calcular Σ^{-1}:

Si A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Entonces:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(0.000519)(0.000418) - (0.000302)^2}\begin{bmatrix} 0.000418 & -0.000302 \\ -0.000302 & 0.000519 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 3332.08 & -2408.22 \\ -2408.22 & 4130.62 \end{bmatrix}$$

Para utilizar la fórmula se hará por partes:

$$r_f \cdot 1 = 0.04413 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04413 \\ 0.04413 \end{bmatrix}$$

$$\mu - r_f \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.04413 \\ 0.04413 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

Numerador:

$$\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1) = \begin{bmatrix} 3332.08 & -2408.22 \\ -2408.22 & 4130.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.55 \\ 412.76 \end{bmatrix}$$

Denominador:

$$1^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1)$$

$$1^T \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3332.08 & -2408.22 \\ -2408.22 & 4130.62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 923.85 \\ 1772.39 \end{bmatrix}$$

$$1^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot 1) = \begin{bmatrix} 923.85 \\ 1772.39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.21 \end{bmatrix} = 525.31$$

Por lo tanto:

$$w = \frac{1}{525.31} \times \begin{bmatrix} 112.55 \\ 412.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.214 \\ 0.786 \end{bmatrix}$$

Caso de aplicación:

Buenas prácticas:

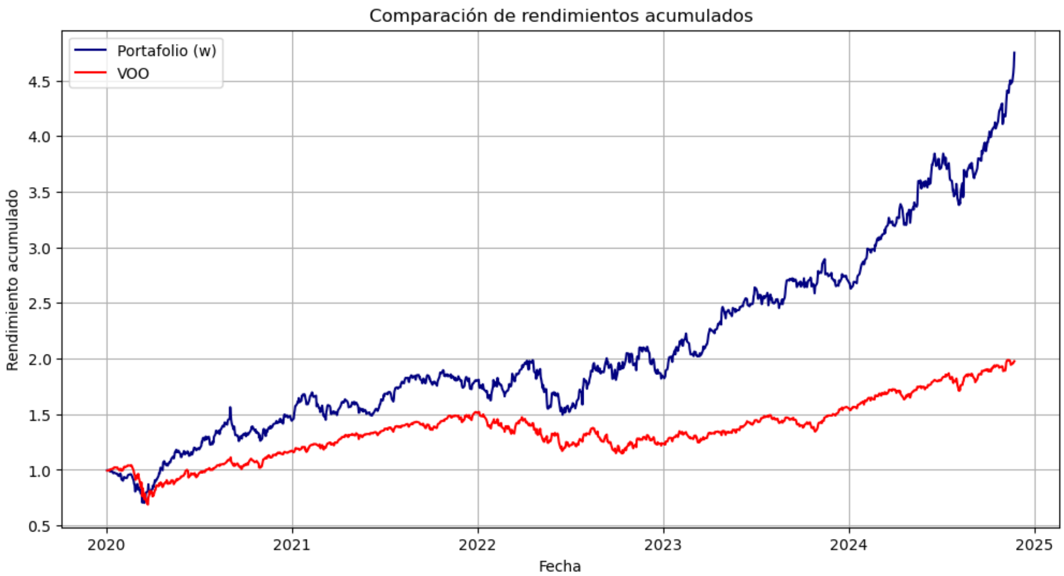
- Rebalanceo periódico del portafolio.
- Operar en mercados de alta liquidez.
- Establecer los pesos de los activos entre 0 y 1.
- Escoger activos con baja correlación para buena diversificación.
- Realizar un buen análisis sobre las empresas escogidas para el portafolio.
- Anualizar las métricas del portafolio como el retorno esperado y volatilidad.

Primero escogimos activos con una baja correlación entre sí.

Para el caso de aplicación hicimos un portafolio de inversión utilizando la fórmula obtenida para los pesos de cada activo. Una vez realizado esto, hicimos una comparación de este portafolio óptimo contra un ETF del S&P 500, desde enero de 2020 hasta noviembre de 2024. Esto nos da como resultado los siguientes pesos:

Ticker	Pesos (%)
AAPL	32.11%
CMG	36.77%
F	-7.12%
GOOGL	-2.50%
KO	-64.18%
PG	7.64%
WMT	64.63%
XOM	32.63%

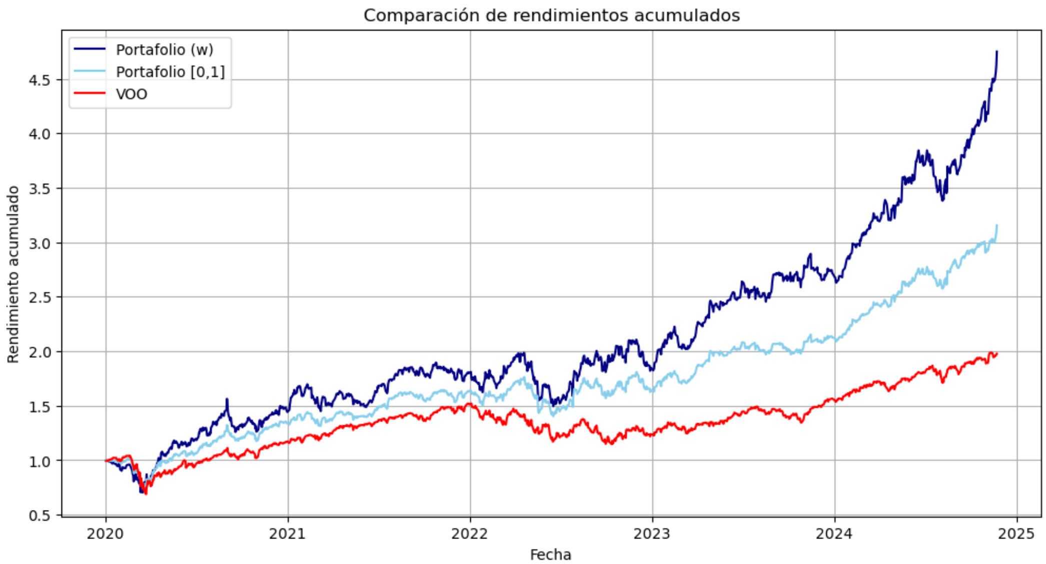
Rendimiento esperado: 35.66%
Volatilidad: 27.52%
Ratio de Sharpe: 1.1354



Como podemos observar, el rendimiento del portafolio óptimo es superior al del S&P 500, sin embargo, para este portafolio estaba permitido el apalancamiento y posiciones cortas. Por lo tanto, para aplicar las buenas prácticas vamos a introducir la restricción de mantener los pesos por activo entre 0 y 1. Donde obtenemos los siguientes resultados.

Ticker	Pesos (%)
AAPL	15.77%
CMG	27.89%
F	0.00%
GOOGL	0.00%
KO	0.00%
PG	0.00%
WMT	42.20%
XOM	14.14%

Rendimiento esperado: 25.58%
Volatilidad: 20.36%
Ratio de Sharpe: 1.1354

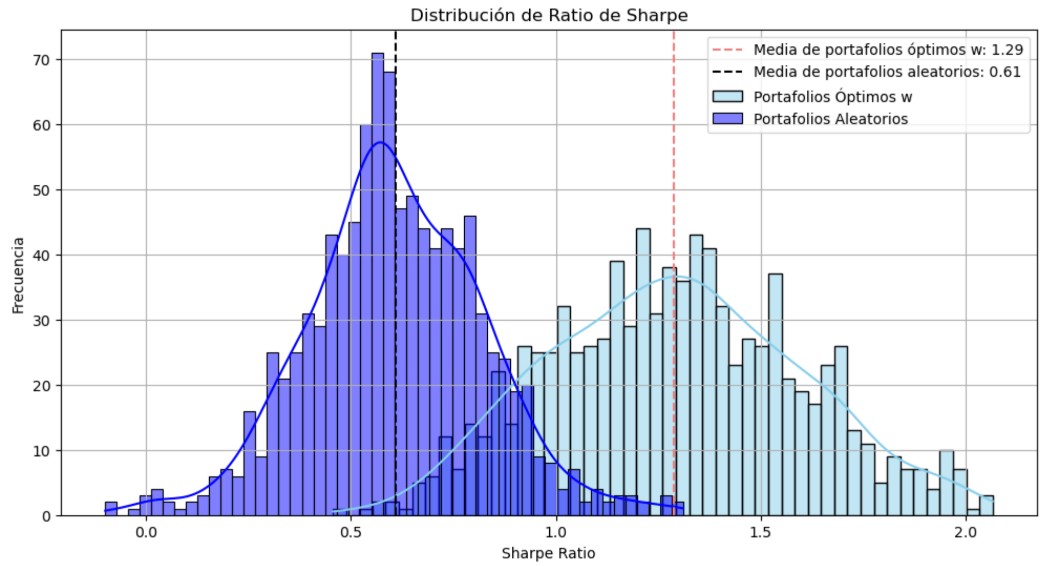


En la gráfica se muestra claramente que el portafolio encontrado utilizando la fórmula para los pesos óptimos tuvo el mejor rendimiento para el periodo de tiempo probado, sin embargo, tiene una volatilidad bastante más alta que el portafolio donde limitamos los pesos de los activos entre 0 y 1. A pesar de esto, ambos tienen el mismo ratio de Sharpe y tuvieron un mayor rendimiento que el S&P 500, por lo que ambos son mejores opciones. Considerando esto, el portafolio que mantiene los pesos de los activos entre 0 y 1 sería más adecuado para inversionistas con mayor aversión al riesgo.

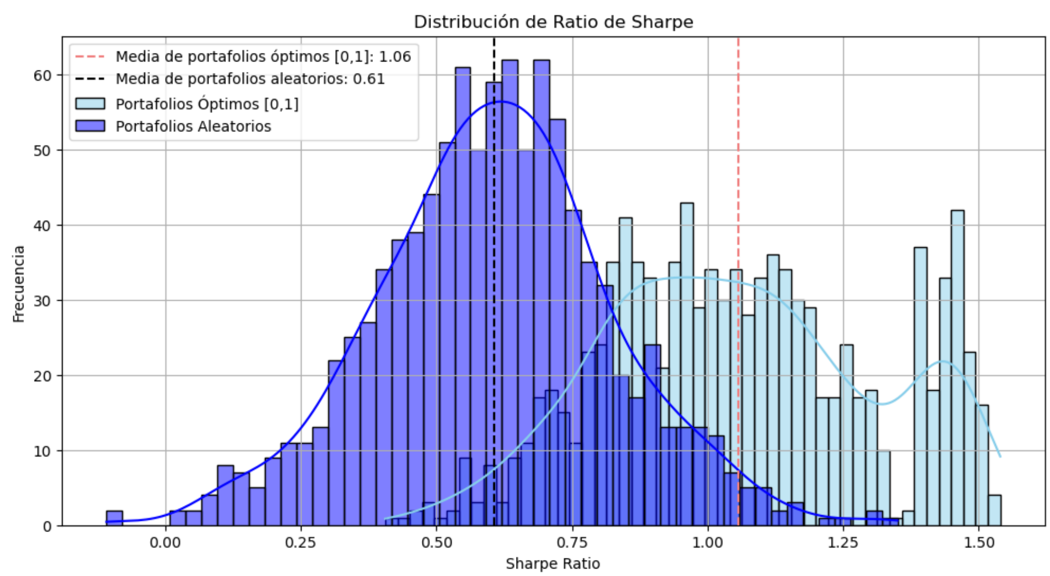
Backtest de portafolios

Para esta parte vamos a simular 1000 portafolios, para ver la diferencia en la distribución del ratio de Sharpe utilizando la fórmula encontrada para w, pesos aleatorios y los pesos óptimos restringidos entre 0 y 1.

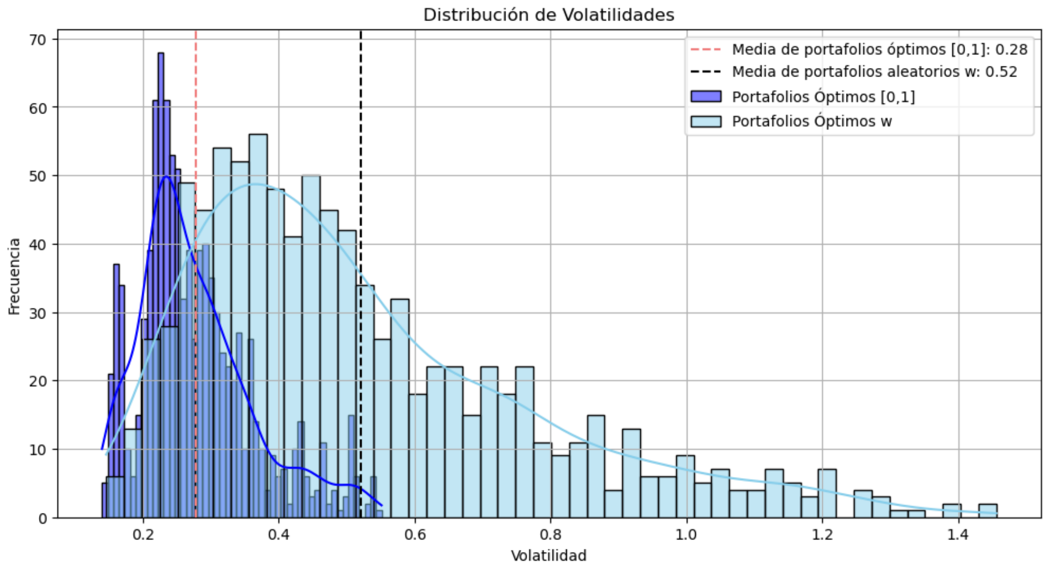
De una lista de 40 acciones se eligen de forma aleatoria entre 5 y 15 acciones para cada portafolio simulado, de estos se obtiene su rendimiento esperado anual, volatilidad y ratio de Sharpe. A continuación, se muestran los resultados obtenidos.



La gráfica muestra la comparación entre la distribución del ratio de Sharpe para portafolios óptimos calculados con la fórmula para la w óptima y portafolios aleatorios. Los portafolios óptimos tienen una media de ratio de Sharpe significativamente mayor (1.29) en comparación con los aleatorios (0.61), lo que indica un mejor desempeño en términos de la relación riesgo-rendimiento. Además, su distribución está sesgada hacia valores más altos y presenta menor dispersión, lo que sugiere consistencia en sus resultados. En contraste, los portafolios aleatorios tienen una mayor variabilidad y proporción de casos con bajos ratios de Sharpe. Esto destaca la ventaja de optimizar los pesos del portafolio frente a estrategias no sistemáticas.



La gráfica compara la distribución del Ratio de Sharpe entre portafolios óptimos [0,1] y portafolios aleatorios, mostrando que los primeros tienen una media significativamente más alta (1.06 frente a 0.61) y una menor dispersión. Esto indica que los portafolios óptimos, al ser diseñados bajo restricciones específicas para maximizar la relación retorno-riesgo, ofrecen un mejor desempeño promedio y mayor consistencia en comparación con los aleatorios, que presentan una mayor variabilidad en sus resultados. La optimización demuestra ser clave para mejorar la eficiencia de los portafolios, tal como lo evidencia la clara separación entre ambas distribuciones.



Esta gráfica muestra la distribución de la volatilidad en dos tipos de portafolios óptimos: aquellos que utilizan la restricción [0,1] en los pesos de los activos y aquellos que no cuentan con esta restricción. Se observa que los portafolios sin restricción tienden a tener una mayor volatilidad en comparación con los restringidos. No se puede afirmar que uno sea mejor que el otro, ya que su utilidad depende del perfil del inversionista: los portafolios con restricciones suelen ser más adecuados para personas con alta aversión al riesgo debido a su mayor estabilidad, mientras que los portafolios sin restricciones son más atractivos para quienes buscan maximizar el rendimiento, incluso a costa de asumir una mayor volatilidad.

Conclusiones y recomendaciones:

Para el caso de aplicación primero construimos dos portafolios óptimos, uno donde se permiten posiciones cortas y otro donde todo son posiciones largas, y se comparó su rendimiento contra el S&P 500.

Ambos portafolios tienen el mismo ratio de Sharpe y son superiores al S&P 500 en rendimiento en el periodo de tiempo donde se realiza la comparación, además el portafolio donde se permiten las posiciones cortas tiene un rendimiento que es bastante mejor a comparación del portafolio de posiciones largas.

Sin embargo, a pesar de tener el mismo ratio de Sharpe, el portafolio con posiciones cortas tiene una volatilidad mayor, por lo tanto, este tipo de portafolio no es recomendable para personas con una aversión al riesgo alta, de una edad avanzada o que deseen hacer un portafolio para su retiro pues no es bueno correr riesgos altos para inversiones con este perfil.

Como esta comparación fue solo sobre un portafolio es solo un caso particular, por lo que realizamos simulaciones de portafolios con activos aleatorios optimizando el ratio de Sharpe por ambos métodos para tener una visión más clara de los resultados.

Al hacer el histograma de los ratios de Sharpe resulta claro que ambos métodos son mejores que usar otra asignación de pesos para los activos, pues la distribución esta más hacia la derecha de la gráfica mostrando en más ocasiones un ratio de Sharpe mayor.

A pesar de que ambos métodos utilizados son óptimos para el ratio de Sharpe, presentaron resultados ligeramente distintos pues el portafolio que permite posiciones cortas tuvo en promedio un ratio de Sharpe de 1.29 a diferencia del portafolio de posiciones largas con un ratio de Sharpe promedio de 1.06.

Por último, comparamos las volatilidades que proporcionan los dos métodos, donde claramente utilizar un portafolio con posiciones cortas nos da volatilidades mucho más altas que utilizando solo posiciones largas.

Ya con las simulaciones tenemos un panorama más claro del uso de los dos métodos y con ello se pueden realizar ciertas recomendaciones.

A pesar de ambos métodos ofrecer un ratio de Sharpe óptimo, dependiendo el cliente es preferible utilizar un método u otro.

Recomendaciones de Inversión:

1- Portafolios con posiciones cortas para inversionistas sofisticados:

- Este enfoque es ideal para clientes con amplia experiencia en inversiones, un capital significativo y una alta tolerancia al riesgo. Los portafolios que incluyen posiciones cortas permiten acceder a rendimientos potencialmente elevados al aprovechar estrategias apalancadas mientras se optimiza una métrica objetiva como el Ratio de Sharpe.
- Sin embargo, es importante destacar que operar con posiciones cortas y apalancamiento conlleva mayores complejidades. Los inversionistas deben cumplir con requisitos como la apertura de cuentas margen, asumir los costos de comisiones asociados a estas estrategias, y en algunos casos, implementar técnicas avanzadas como el uso de opciones. Por lo tanto, esta estrategia es más adecuada para quienes cuentan con los conocimientos técnicos, los recursos y las credenciales necesarias para gestionarla adecuadamente.

2- Portafolios con solo posiciones largas para inversionistas conservadores:

- Para clientes con menor tolerancia al riesgo y un capital más limitado, se recomienda optar por portafolios que incluyan únicamente posiciones largas. Este enfoque permite optimizar el Ratio de Sharpe, generando buenos rendimientos mientras se minimizan los riesgos asociados.
- Los portafolios con posiciones largas son más simples de manejar, lo que los hace ideales para quienes prefieren estrategias menos complejas y con menores costos operativos. Son especialmente adecuados para inversionistas que priorizan la estabilidad y la seguridad sobre los rendimientos extremos.

Bibliografía:

- González Vazquez, S. N. (2024) Liquidity-Adjusted Sharpe Ratio [Tesis de maestría]. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente.

Anexos:

Implementación de código:

La simulación de los portafolios es un proceso que requiere tiempo, ya que implica descargar múltiples conjuntos de datos desde Yahoo Finance. Posteriormente, se realiza la optimización de los pesos del portafolio para maximizar el ratio de Sharpe, además de calcular el rendimiento esperado y la volatilidad de cada portafolio.

Por esta razón, realizar este proceso utilizando un ciclo *for* resulta lento, ya que ejecuta cada iteración de forma secuencial y almacena los resultados en una lista. Para optimizar este procedimiento, empleamos una metodología más eficiente que acelera las simulaciones.

El método que elegimos es el de paralelización, aprovechando las funciones de *Parallel* y *delayed* de la librería de *joblib*, podemos realizar simulaciones simultáneas a través de múltiples núcleos del CPU. Con el criterio de *n_jobs* puedes indicar cuantos núcleos deseas utilizar para las simulaciones.

Para lograr esto, se define una función que simula los portafolios y calcula las métricas correspondientes. Luego, utilizando la función *Parallel*, se llama a esta función múltiples veces, distribuyendo las tareas entre varios núcleos. Este enfoque paraleliza la ejecución del código, mejorando significativamente su eficiencia.

A continuación, se presenta un link de GitHub con un ejemplo de ejecución de este código:

https://github.com/LuisMB09/metodos_optimizacion/blob/main/Paralelización.ipynb