# “TAREA #3”
# ITESO

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

**MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN**
**JUAN DIEGO SÁNCHEZ TORRES**

**IVANNA HERRERA IBARRA 744614**
**ANA SOFÍA HINOJOSA BALE 742594**
**LUIS FERNANDO MÁRQUEZ BAÑUELOS 744489**

**30 DE SEPTIEMBRE DE 2024**

**Problem 1: Square and triangular boxes**
Given the manufacturing of square and triangular boxes, consider the associated optimization problem.

1. Formulate the primal problem by defining all decision variables, the objective function, and the constraints.

Primal:

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1$: Número de cajas cuadradas
$x_2$: Número de cajas triangulares

2. Derive the dual problem from the primal problem and elaborate on the entire process.

Primal:

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -25 \\ -x_1 \leq -5 \\ -x_2 \leq -5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1[-x_1 - x_2] + y_2[-x_1] + y_3[-x_2] + y_4[2x_1 + 3x_2] \leq -25y_1 - 5y_2 - 5y_3 + 60y_4$$
$$x_1[-y_1 - y_2 + 2y_4] + x_2[-y_1 - y_3 + 3y_4] \leq -25y_1 - 5y_2 - 5y_3 + 60y_4$$

Dual:

$$\min\ z = -25y_1 - 5y_2 - 5y_3 + 60y_4$$
$$s.t.\begin{cases} -y_1 - y_2 + 2y_4 \geq 4 \\ -y_1 - y_3 + 3y_4 \geq 5 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

3. Write the primal problem and the dual problem in a matrix form. Explain the relationship between the two problems.

Primal:

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.\ Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -25 \\ -5 \\ -5 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

El problema dual se deriva del primal, donde en lugar de maximizar, se minimiza. El funcional de costo del primal se vuelve las restricciones del lado derecho del problema dual y las restricciones del lado derecho del primal se vuelven los coeficientes del funcional de costo del dual. Como se minimiza, las restricciones en el dual se vuelven mayor o igual. Para esto se transpone la matriz A, donde están los coeficientes de las restricciones del lado izquierdo del problema primal.

4. Solve both the primal and dual problems using the Excel solver. Take advantage of the matrix expression previously obtained to improve the way problems are solved using Excel.

Primal:

| x1 | x2 |
|---|---|
| 22.5 | 5 |

Dual:

| y1 | y2 | y3 | y4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |

5. Examine the optimal solutions of the primal and dual problems and verify the fundamental theorem of duality and the complementary slackness conditions.

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 22.5$ | 0 | $y_1^* = 0$ | 22.5 |
| $x_2^* = 5$ | 0 | $y_2^* = 0$ | 5 |
| | 1 | $y_3^* = 1$ | |
| | 2 | $y_4^* = 2$ | |
| $max = 115$ | | $min = 115$ | |

Como Podemos ver, el precio sombra del primal es la solución del dual y viceversa. Además el funcional de costo de ambos es 115.

Complementary Slackness Conditions:

$$y_1^*[-x_1^* - x_2^* + 25] = 0$$
$$0(-22.5 - 5 + 25) = 0$$
$$y_2^*[-x_1^* + 5] = 0$$
$$0(-22.5 + 5) = 0$$
$$y_3^*[-x_2^* + 5] = 0$$
$$1(-5 + 5) = 0$$
$$y_4^*[2x_1^* + 3x_2^* - 60] = 0$$
$$2[2(22.5) + 3(5) - 60] = 0$$

$$x_1^*[-y_1^* - y_2^* + 2y_4^*] = 0$$
$$22.5[0 - 0 + 2(2) - 4] = 0$$
$$x_2^*[-y_1^* - y_3^* + 3y_4^* - 5] = 0$$
$$5[0 - 1 + 3(2) - 5) = 0$$

6. Find the units of the decision variables and parameters of the primal problem. With this information and performing dimensional analysis, find the units of the decision variables and parameters of the dual problem. With this information, explain the meaning of the dual problem.

Análisis dimensional:

$\boldsymbol{y_1}$: Precio sombra de restricción de cajas totales.
**Unidades:** $\frac{\$}{caja}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el número de cajas.

$\boldsymbol{y_2}$: Precio sombra de restricción de cajas cuadradas.
**Unidades:** $\frac{\$}{caja\ cuadrada}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el número de cajas cuadradas.

$\boldsymbol{y_3}$: Precio sombra de restricción de cajas triangulares.
**Unidades:** $\frac{\$}{caja\ triangular}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el número de cajas triangulares.

$\boldsymbol{y_4}$: Precio sombra de restricción del tiempo para producir.
**Unidades:** $\frac{\$}{tiempo}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el tiempo disponible para producir.

Las respuestas del problema dual, representan los precios sombra del problema primal. Estas respuestas son la tasa de cambio en la que se afecta nuestra salida según cambiemos los valores finales de las restricciones del problema primal.

7. Examine the dual problem and argue using mathematics, providing all the necessary explanations, whether or not it represents an actual situation related to the box manufacturing problem.

Tenemos que $y_1$ y $y_2$ son $0$, por lo que no afectan a nuestro problema.

Como $y_3 = 1$ se tiene que:
Si hacemos $6$ cajas triangulares pasa $1\ x\ 1 = 1$
$max = 115 + 1 = 116$

Para $y_4 = 2$ se tiene que:
Aumentamos a $70$ minutos el tiempo de producción, entonces:
$max = 115 + (10\ x\ 2) = 135$

Por lo que el dual está relacionado al primal.

**Problem 2: Even more practice problems**
For the following primal problems taken from the book 7:

- Derive the dual problem from the primal problem and elaborate on the entire process.
- Write the primal problem and the dual problem in a matrix form. Explain the relationship between the two problems.
- Solve both the primal and dual problems using the Excel solver.
- Examine the optimal solutions of the primal and dual problems and verify the fundamental theorem of duality and the complementary slackness conditions.

1. $$\begin{cases} \max\ z = 4x_1 + 5x_2 \\ s.t. \quad 2x_1 + x_2 \le 8 \\ \qquad\qquad x_2 \le 5 \\ \quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Derive dual problem:**

$y_1[2x_1 + x_2] + y_2[x_2] \le 8y_1 + 5y_2$
$x_1[2y_1] + x_2[y_1 + y_2] \le 8y_1 + 5y_2$

Dual:
$\min\ z = 8y_1 + 5y_2$
$$s.t. \begin{cases} 2y_1 \qquad \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 5 \\ y_1,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:
$\max\ c^T x$
$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

**Explanation:**

El problema dual se deriva del primal, donde en lugar de maximizar, se minimiza. El funcional de costo del primal se vuelve las restricciones del lado derecho del problema dual y las restricciones del lado derecho del primal se vuelven los coeficientes del funcional de costo del dual. Como se minimiza, las restricciones en el dual se vuelven mayor o igual. Para esto se transpone la matriz A, donde están los coeficientes de las restricciones del lado izquierdo del problema primal.

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 |
|---|---|
| 1.5 | 5 |

Dual:

| y1 | y2 |
|---|---|
| 2 | 3 |

**Fundamental Theorem of Duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 1.5$ | 2 | $y_1^* = 2$ | 1.5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_2^* = 5$ | 3 | $y_2^* = 3$ | 5 |
| $max = 31$ | | $min = 31$ | |

Como Podemos ver, el precio sombra del primal es la solución del dual y viceversa. Además el funcional de costo de ambos es 31.

**Complementary Slackness Conditions:**

$y_1^*(2x_1^* + x_2^* - 8) = 0$
$2[2(1.5) + 5 - 8] = 0$
$y_2^*(x_2^* - 5) = 0$
$3(5 - 5) = 0$

$x_1^*(2y_1^* - 4) = 0$
$1.5[2(2) - 4] = 0$
$x_2^*(y_1^* + y_2^* - 5) = 0$
$5(2 + 3 - 5) = 0$

2. $$\begin{cases} \min\ z = -x_1 - x_2 \\ s.t. \quad x_1 - x_2 \geq 1 \\ \qquad -x_1 + x_2 \geq 1 \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Derive dual problem:**

Primal:

$$\min\ z = -x_1 - x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ z = x_1 + x_2$$
$$s.t. \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1[-x_1 + x_2] + y_2[x_1 - x_2] \leq -y_1 - y_2$$
$$x_1[-y_1 + y_2] + x_2[y_1 - y_2] \leq -y_1 - y_2$$

Dual:

$$\min\ z = -y_1 - y_2$$
$$s.t. \begin{cases} -y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:

$\max\ c^T x$
$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

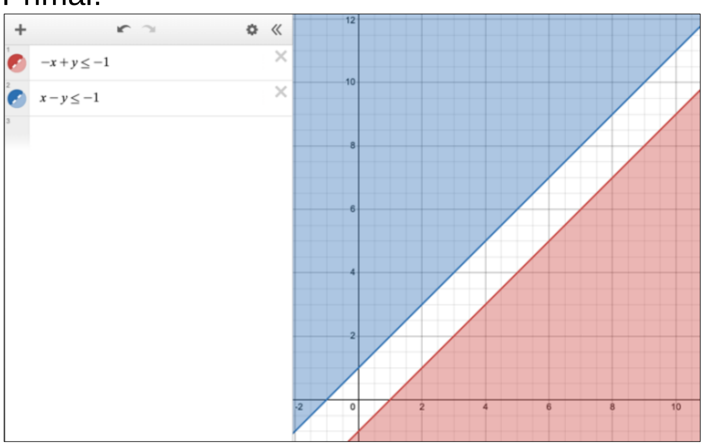
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

**Explanation:**

El problema dual se deriva del primal, donde en lugar de maximizar, se minimiza. El funcional de costo del primal se vuelve las restricciones del lado derecho del problema dual y las restricciones del lado derecho del primal se vuelven los coeficientes del funcional de costo del dual. Como se minimiza, las restricciones en el dual se vuelven mayor o igual. Para esto se transpone la matriz A, donde están los coeficientes de las restricciones del lado izquierdo del problema primal.

**Solve problem:**

Primal:




Como se puede observar en la gráfica, el problema primal no tiene solución, pues las áreas de las restrcciones no tienen ningún punto en común.

Dual:


Al igual que como ocurre con el primal, en el dual tampoco hay un punto en común haciendo que ambos problemas no tengan una solución viable.

3. $$\begin{cases} \min\ z = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 \\ s.t. \qquad x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \le 6 \\ \qquad -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge 3 \\ \qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

**Derive dual problem:**

Primal:

$$\begin{cases} \max\ z = -3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 \\ s.t. \qquad x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \le 6 \\ \qquad x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le -3 \\ \qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$y_1[x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5] + y_2[x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5] \le 6y_1 - 3y_2$$
$$x_1[y_1 + y_2] + x_2[y_1 + y_2] + x_3[y_1 - 2y_2] + x_4[3y_1 - y_2] + x_5[y_1 + y_2] \le 6y_1 - 3y_2$$

Dual:

$\min\ z = 6y_1 - 3y_2$

$$s.t. \begin{cases} y_1 + y_2 \ge -3 \\ y_1 + y_2 \ge -5 \\ y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 \ge -2 \\ y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:
$\max\ c^T x$
$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

**Explanation:**

El problema dual se deriva del primal, donde en lugar de maximizar, se minimiza. El funcional de costo del primal se vuelve las restricciones del lado derecho del problema dual y las restricciones del lado derecho del primal se vuelven los coeficientes del funcional de costo del dual. Como se minimiza, las restricciones en el dual se vuelven mayor o igual. Para esto se transpone la matriz A, donde están los coeficientes de las restricciones del lado izquierdo del problema primal.

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |

Dual:

| y1 | y2 |
|---|---|
| 3 | 1 |

**Fundamental Theorem of Duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 0$ | 3 | $y_1^* = 3$ | 0 |
| $x_2^* = 0$ | 1 | $y_2^* = 1$ | 0 |
| $x_3^* = 0$ | | | 3 |
| $x_4^* = 0$ | | | 0 |
| $x_5^* = 0$ | | | 3 |
| $max = 15$ | | $min = 15$ | |

Como Podemos ver, el precio sombra del primal es la solución del dual y viceversa. Además el funcional de costo de ambos es 15.

**Complementary Slackness Conditions:**

$y_1^*[x_1^* + x_2^* + x_3^* + 3x_4^* + x_5^* - 6] = 0$
$3(0 + 0 + 3 + 0 + 3 - 6) = 0$
$y_2^*[x_1^* + x_2^* - 2x_3^* - x_4^* + x_5^* + 3) = 0$
$1[0 + 0 - 2(3) - 0 + 3 + 3] = 0$

$x_1^*[y_1^* + y_2^* + 3] = 0$
$0(3 + 1 + 3) = 0$
$x_2^*[y_1^* + y_2^* + 5] = 0$
$0(3 + 1 + 5) = 0$
$x_3^*[y_1^* - 2y_2^* - 1] = 0$
$3[3 - 2(1) - 1) = 0$
$x_4^*[3y_1^* - y_2^* + 2] = 0$
$0[3(3) - 1 + 2] = 0$
$x_5^*[y_1^* + y_2^* - 4] = 0$
$3(3 + 1 - 4) = 0$

4. $$\begin{cases} \min & z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ s.t. & -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

**Derive dual problem:**

Primal:

$$\min\ z = x_1 - 3x_2 + 4x_3$$
$$s.t. \begin{cases} -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ z = -x_1 + 3x_2 - 4x_3$$
$$s.t. \begin{cases} -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1[-7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4] + y_2[-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4] \leq y_1 + 2y_2$$
$$x_1[-7y_1 - 2y_2] + x_2[y_1 + 2y_2] + x_3[3y_1 + 3y_2] + x_4[-y_1 + y_2] \leq y_1 + 2y_2$$

Dual:
$\min\ z = y_1 + 2y_2$

$$s.t. \begin{cases} -7y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 3y_2 \geq -4 \\ -y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:
$\max\ c^T x$
$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

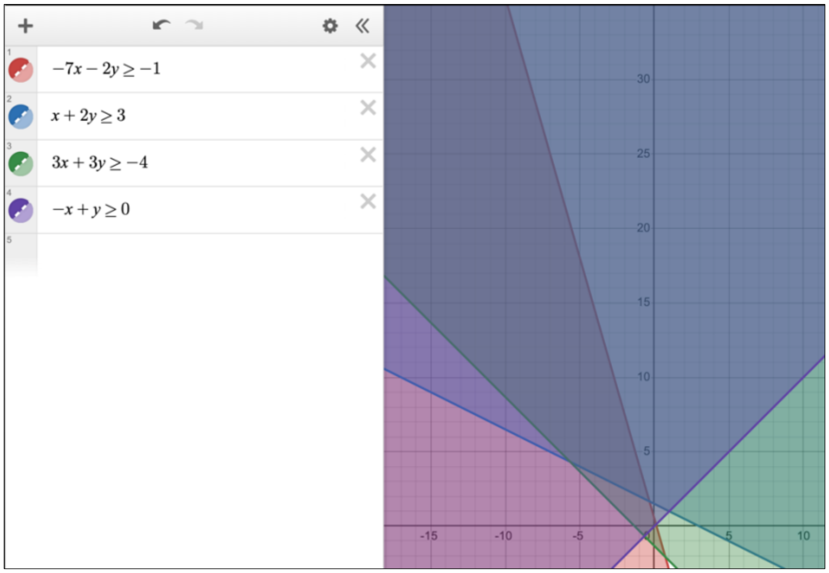
Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

**Explanation:**

El problema dual se deriva del primal, donde en lugar de maximizar, se minimiza. El funcional de costo del primal se vuelve las restricciones del lado derecho del problema dual y las restricciones del lado derecho del primal se vuelven los coeficientes del funcional de costo del dual. Como se minimiza, las restricciones en el dual se vuelven mayor o igual. Para esto se transpone la matriz A, donde están los coeficientes de las restricciones del lado izquierdo del problema primal.

**Solve problem:**




Para este caso el problema primal no puede ser graficado pues tiene 4 variables, sin embargo, el dual si puede graficarse. Al analizar la gráfica vemos que si hay un área donde se cumplen las restricciones, pero está en la parte de las “x” negativas, y una de nuestras restricciones es que ambas variables deben ser positivas, por lo que no se tiene solución al probelma.

Finally, the following production, asset allocation, and cash flow problems from Cornuéjols' book 3, which present some models of real situations, must be solved. For these problems, then, present:

1. The linear programming model that represents the given situation. That is the primal problem by defining all decision variables, the objective function, and the constraints.
2. Derive the dual problem from the primal problem and elaborate on the entire process.
3. Write the primal problem and the dual problem in a matrix form. Explain the relationship between the two problems.
4. Solve both the primal and dual problems using the Excel solver. Take advantage of the matrix expression previously obtained in order to improve the way problems are solved using Excel.
5. Examine the optimal solutions of the primal and dual problems and verify the fundamental theorem of duality and the complementary slackness conditions.
6. Find the units of the decision variables and parameters of the primal problem. With this information and performing dimensional analysis, find the

units of the decision variables and parameters of the dual problem. With this information, explain the meaning of the dual problem.

7. Mathematically, present an economic explanation of the dual problem.
8. For Problem 7, present a graph of the feasibility region. After this, present an interpretation of this feasibility region in terms of the requirements of the problem.

**Problem 3: Romeo Winery**

Romeo Winery produces two types of wines, Bordeaux and Romerlot, by blending the Merlot and Cabernet Sauvignon grapes.

| | **Profit** | **Merlot** | **Cabernet** |
|---|---|---|---|
| **Bordeaux** | \$800/barrel | 250 pounds/barrel | 250 pounds/barrel |
| **Romerlot** | \$600/barrel | 450 pounds/barrel | 50 pounds/barrel |

There are 9000 pounds of Merlot and 5000 pounds of Cabernet Sauvignon available.

The objective is to maximize the profit.

**Problem and constraints:**

Primal:

$$\max\ z = 800x_1 + 600x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 250x_1 + 450x_2 \leq 9000 \\ 250x_1 + 50x_2 \leq 5000 \\ x_1,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1$: Cantidad de barriles de Bordeaux

$x_2$: Cantidad de barriles de Romerlot

**Derive dual problem:**

$$y_1[250x_1 + 450x_2] + y_2[250x_1 + 50x_2] \leq 9000y_1 + 5000y_2$$

$$x_1[250y_1 + 250y_2] + x_2[450y_1 + 50y_2] \leq 9000y_1 + 5000y_2$$

Dual:

$$\min\ z = 9000y_1 + 5000y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 250y_1 + 250y_2 \geq 800 \\ 450y_1 + 50y_2 \geq 600 \\ y_1,\ \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:

$$\max\ c^T x$$

$$s.t.\ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 800 \\ 600 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 250 & 450 \\ 250 & 50 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9000 \\ 5000 \end{bmatrix}$

Dual:

$\min\ b^T y$

$s.t.\ A^T y \geq c$

$y \geq 0$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 |
|---|---|
| 18 | 10 |

Dual:

| y1 | y2 |
|---|---|
| 1.1 | 2.1 |

**Fundamental theorem of duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 18$ | 1.1 | $y_1^* = 1.1$ | 18 |
| $x_2^* = 10$ | 2.1 | $y_2^* = 2.1$ | 10 |
| $max = 20400$ | | $min = 20400$ | |

**Complementary slackness conditions:**

$y_1^*[250x_1^* + 450x_2^* - 9000] = 0$

$1.1[250(18) + 450(10) - 9000] = 0$

$y_2^*[250x_1^* + 50x_2^* - 5000] = 0$

$2.1[250(18) + 50(10) - 5000] = 0$

$x_1^*[250y_1^* + 250y_2^* - 800] = 0$

$18[250(1.1) + 250(2.1) - 800] = 0$

$x_2^*[450y_1^* + 50y_2^* - 600] = 0$

$10[450(1.1) + 50(2.1) - 600] = 0$

**Dimensional Analysis:**

$\boldsymbol{y_1}$**:** Precio sombra de restricción de Bordeaux.

**Unidades:** $\frac{\$}{lb}$

**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad Bordeaux producida.
$\boldsymbol{y_2}$**:** Precio sombra de restricción de Romerlot.
**Unidades:** $\frac{\$}{lb}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad Romerlot producida.

**Economic explanation:**

$$\max\ z = 800x_1 + 600x_2$$
$$s.t. \begin{cases} 250x_1 + 450x_2 \leq 9000 + P_1 \\ 250x_1 + 50x_2 \leq 5000 + P_2 \end{cases}$$
$$z = (250y_1^* + 250y_2^*)x_1 + (450y_1^* + 50y_2^*)x_2$$
$$z = (250x_1 + 450x_2)y_1^* + (250x_1 + 50x_2)y_2^* \leq (9000 + P_1)y_1^* + (5000 + P_2)y_2^*$$
$$= z^* + y_1^*P_1 + y_2^*P_2$$
$$= 20400 + 1.1P_1 + 2.1P_2$$

Debes de analizar las diferencias de precios entre el tuyo y uno ofrecido, compararlo contra tu precio sombra y con esta información tomar la decisión más conveniente.

**Problem 4: Cash flow matching - Short-term financing**
Corporations routinely face the problem of financing short term cash commitments. Linear programming can help in figuring out an optimal combination of financial instruments to meet these commitments.
To illustrate this, consider the following short term financing problem.

| Month | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Net Cash Flow | -150 | -100 | 200 | -200 | 50 | 300 |

*The net cash flow requirements are given in thousands of dollars.*
The company has the following sources of funds:

- A line of credit of up to \$100 K at an interest rate of 1% per month.
- In any one of the first three months, it can issue 90-day commercial paper bearing a total interest of 2% for the 3-month period.
- Excess funds can be invested at an interest rate of 0.3% per month.

After this, an adequate optimization problem will be presented to match the cash flows and maximize the wealth for July.
**Important:** The solution to the problem must be presented with a thorough definition of all essential variables. The optimization problem should be introduced appropriately.

**Problem and constraints:**

Primal:
$$\max\ z = x_{15} - x_6$$

$$
s.t.\begin{cases}
x_1 + x_7 - x_{10} \le 150 \\
-x_1 - x_7 + x_{10} \le -150 \\
-1.01x_1 + x_2 + x_8 + 1.003x_{10} - x_{11} \le 100 \\
1.01x_1 - x_2 - x_8 - 1.003x_{10} + x_{11} \le -100 \\
-1.01x_2 + x_3 + x_9 + 1.003x_{11} - x_{12} \le -200 \\
1.01x_2 - x_3 - x_9 - 1.003x_{11} + x_{12} \le 200 \\
-1.01x_3 + x_4 - 1.02x_7 + 1.003x_{12} - x_{13} \le 200 \\
1.01x_3 - x_4 + 1.02x_7 - 1.003x_{12} + x_{13} \le -200 \\
-1.01x_4 + x_5 - 1.02x_8 + 1.003x_{13} - x_{14} \le -50 \\
1.01x_4 - x_5 + 1.02x_8 - 1.003x_{13} + x_{14} \le 50 \\
-1.01x_5 + x_6 - 1.02x_9 + 1.003x_{14} - x_{15} \le -300 \\
1.01x_5 - x_6 + 1.02x_9 - 1.003x_{14} + x_{15} \le 300 \\
x_1 \le 100,\ \ x_2 \le 100,\ \ x_3 \le 100,\ \ x_4 \le 100,\ \ x_5 \le 100,\ \ x_6 \le 100 \\
x_i \ge 0,\ \ i = \{1, \dots, 15\}
\end{cases}
$$

$x_i, i = \{1, \dots, 6\}$: Crédito en el mes i
$x_i, i = \{7, \dots, 9\}$: Dinero por nota comercial
$x_i, i = \{10, \dots, 15\}$: Excedente en inversión

**Derive dual problem:**

$$
\begin{aligned}
y_1[x_1 + x_7 - x_{10}] + y_2[-x_1 - x_7 + x_{10}] + y_3[-1.01x_1 + x_2 + x_8 + 1.003x_{10} - x_{11}] + y_4[1.01x_1 - x_2 - x_8 - 1.003x_{10} + x_{11}] \\
+ y_5[-1.01x_2 + x_3 + x_9 + 1.003x_{11} - x_{12}] + y_6[1.01x_2 - x_3 - x_9 - 1.003x_{11} + x_{12}] \\
+ y_7[-1.01x_3 + x_4 - 1.02x_7 + 1.003x_{12} - x_{13}] + y_8[1.01x_3 - x_4 + 1.02x_7 - 1.003x_{12} + x_{13}] \\
+ y_9[-1.01x_4 + x_5 - 1.02x_8 + 1.003x_{13} - x_{14}] + y_{10}[1.01x_4 - x_5 + 1.02x_8 - 1.003x_{13} + x_{14}] \\
+ y_{11}[-1.01x_5 + x_6 - 1.02x_9 + 1.003x_{14} - x_{15}] + y_{12}[1.01x_5 - x_6 + 1.02x_9 - 1.003x_{14} + x_{15}] \\
\le 150y_1 - 150y_2 + 100y_3 - 100y_4 - 200y_5 + 200y_6 + 200y_7 - 200y_8 - 50y_9 + 50y_{10} - 300y_{11} + 300y_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1[y_1 - y_2 - 1.01y_3 + 1.01y_4] + x_2[y_3 - y_4 - 1.01y_5 + 1.01y_6] + x_3[y_5 - y_6 - 1.01y_7 + 1.01y_8] + x_4[y_7 - y_8 - 1.01y_9 + 1.01y_{10}] \\
+ x_5[y_9 - y_{10} - 1.01y_{11} + 1.01y_{12}] + x_6[y_{11} - y_{12}] + x_7[y_1 - y_2 - 1.02y_7 + 1.02y_8] \\
+ x_8[y_3 - y_4 - 1.02y_9 + 1.02y_{10}] + x_9[y_5 - y_6 - 1.02y_{11} + 1.02y_{12}] + x_{10}[-y_1 + y_2 + 1.003y_3 - 1.003y_4] \\
+ x_{11}[-y_3 + y_4 + 1.003y_5 - 1.003y_6] + x_{12}[-y_5 + y_6 + 1.003y_7 - 1.003y_8] + x_{13}[-y_7 + y_8 + 1.003y_9 - 1.003y_{10}] \\
+ x_{14}[-y_9 + y_{10} + 1.003y_{11} - 1.003y_{12}] + x_{15}[-y_{11} + y_{12}] \\
\le 150y_1 - 150y_2 + 100y_3 - 100y_4 - 200y_5 + 200y_6 + 200y_7 - 200y_8 - 50y_9 + 50y_{10} - 300y_{11} + 300y_{12}
\end{aligned}
$$

Dual:

$\min\ z = 150y_1 - 150y_2 + 100y_3 - 100y_4 - 200y_5 + 200y_6 + 200y_7 - 200y_8 - 50y_9 + 50y_{10} - 300y_{11} + 300y_{12}$

$$
s.t.\begin{cases}
y_1 - y_2 - 1.01y_3 + 1.01y_4 \geq 0 \\
y_3 - y_4 - 1.01y_5 + 1.01y_6 \geq 0 \\
y_5 - y_6 - 1.01y_7 + 1.01y_8 \geq 0 \\
y_7 - y_8 - 1.01y_9 + 1.01y_{10} \geq 0 \\
y_9 - y_{10} - 1.01y_{11} + 1.01y_{12} \geq 0 \\
y_{11} - y_{12} \geq -1 \\
y_1 - y_2 - 1.02y_7 + 1.02y_8 \geq 0 \\
y_3 - y_4 - 1.02y_9 + 1.02y_{10} \geq 0 \\
y_5 - y_6 - 1.02y_{11} + 1.02y_{12} \geq 0 \\
-y_1 + y_2 + 1.003y_3 - 1.003y_4 \geq 0 \\
-y_3 + y_4 + 1.003y_5 - 1.003y_6 \geq 0 \\
-y_5 + y_6 + 1.003y_7 - 1.003y_8 \geq 0 \\
-y_7 + y_8 + 1.003y_9 - 1.003y_{10} \geq 0 \\
-y_9 + y_{10} + 1.003y_{11} - 1.003y_{12} \geq 0 \\
-y_{11} + y_{12} \geq 1
\end{cases}
$$

**Matrix form:**

Primal:

$\max\ c^T x$

$s.t.\ Ax \leq b$

$x \geq 0$

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{bmatrix}
\qquad
c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\qquad
b = \begin{bmatrix} 150 \\ -150 \\ 100 \\ -100 \\ -200 \\ 200 \\ 200 \\ -200 \\ -50 \\ 50 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.01 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.003 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1.003 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.01 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.003 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1.003 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.01 & 1 & 0 & 0 & -1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.003 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 & -1 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.003 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.01 & 1 & 0 & 0 & -1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.003 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.01 & -1 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.003 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.01 & 1 & 0 & 0 & -1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.003 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & -1 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.003 & 1 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min \ b^T y$
$s.t. \ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix}$$

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | x14 | x15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50.9803922 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 | 49.0196078 | 203.434364 | 0 | 0 | 351.944167 | 0 | 0 | 92.4969492 |

Dual:

| y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | y7 | y8 | y9 | y10 | y11 | y12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.03728814 | 0 | 1.0302 | 0 | 1.02 | 0 | 1.01694915 | 0 | 1.01 | 0 | 1 |

**Fundamental theorem of duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 0$ | 0 | $y_1^* = 0$ | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_2^* = 50.98$ | 1.0372 | $y_2^* = 1.0372$ | 50.98 |
| $x_3^* = 0$ | 0 | $y_3^* = 0$ | 0 |
| $x_4^* = 0$ | 1.0302 | $y_4^* = 1.0302$ | 0 |
| $x_5^* = 0$ | 0 | $y_5^* = 0$ | 0 |
| $x_6^* = 0$ | 1.02 | $y_6^* = 1.02$ | 0 |
| $x_7^* = 150$ | 0 | $y_7^* = 0$ | 150 |
| $x_8^* = 49.01$ | 1.0169 | $y_8^* = 1.0169$ | 49.01 |
| $x_9^* = 203.43$ | 0 | $y_9^* = 0$ | 203.43 |
| $x_{10}^* = 0$ | 1.01 | $y_{10}^* = 1.01$ | 0 |
| $x_{11}^* = 0$ | 0 | $y_{11}^* = 0$ | 0 |
| $x_{12}^* = 351.94$ | 1 | $y_{12}^* = 1$ | 351.94 |
| $x_{13}^* = 0$ | | | 0 |
| $x_{14}^* = 0$ | | | 0 |
| $x_{15}^* = 92.49$ | | | 92.49 |
| $max = 92.49$ | | $min = 92.49$ | |

**Complementary slackness conditions:**

Primal:
$(Ax^* - b)^T y^* = 0$

Dual:
$(A^T y - c)^T x^* = 0$

**Dimensional Analysis:**

$\boldsymbol{y_2}$**:** Precio sombra de restricción de enero.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, enero}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de enero.

$\boldsymbol{y_4}$**:** Precio sombra de restricción de febrero.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, febrero}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de febrero.

$\boldsymbol{y_6}$**:** Precio sombra de restricción de marzo.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, marzo}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de marzo.

$\boldsymbol{y_8}$**:** Precio sombra de restricción de abril.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, abril}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de abril.

$\boldsymbol{y_{10}}$**:** Precio sombra de restricción de mayo.

**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, mayo}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de mayo.

$\boldsymbol{y_{12}}$**:** Precio sombra de restricción de junio.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\, junio}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida al final según cambie la cantidad de dinero final de junio.

**Economic explanation:**

$$\max\ z = x_{15} - x_6$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_7 - x_{10} \leq 150 + P_1 \\ -x_1 - x_7 + x_{10} \leq -150 + P_2 \\ -1.01x_1 + x_2 + x_8 + 1.003x_{10} - x_{11} \leq 100 + P_3 \\ 1.01x_1 - x_2 - x_8 - 1.003x_{10} + x_{11} \leq -100 + P_4 \\ -1.01x_2 + x_3 + x_9 + 1.003x_{11} - x_{12} \leq -200 + P_5 \\ 1.01x_2 - x_3 - x_9 - 1.003x_{11} + x_{12} \leq 200 + P_6 \\ -1.01x_3 + x_4 - 1.02x_7 + 1.003x_{12} - x_{13} \leq 200 + P_7 \\ 1.01x_3 - x_4 + 1.02x_7 - 1.003x_{12} + x_{13} \leq -200 + P_8 \\ -1.01x_4 + x_5 - 1.02x_8 + 1.003x_{13} - x_{14} \leq -50 + P_9 \\ 1.01x_4 - x_5 + 1.02x_8 - 1.003x_{13} + x_{14} \leq 50 + P_{10} \\ -1.01x_5 + x_6 - 1.02x_9 + 1.003x_{14} - x_{15} \leq -300 + P_{11} \\ 1.01x_5 - x_6 + 1.02x_9 - 1.003x_{14} + x_{15} \leq 300 + P_{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z = {} & (x_1 + x_7 - x_{10})y_1^* + (-x_1 - x_7 + x_{10})y_2^* + (-1.01x_1 + x_2 + x_8 + 1.003x_{10} - x_{11})y_3^* + (1.01x_1 - x_2 - x_8 - 1.003x_{10} + x_{11})y_4^* \\ & + (-1.01x_2 + x_3 + x_9 + 1.003x_{11} - x_{12})y_5^* + (1.01x_2 - x_3 - x_9 - 1.003x_{11} + x_{12})y_6^* \\ & + (-1.01x_3 + x_4 - 1.02x_7 + 1.003x_{12} - x_{13})y_7^* + (1.01x_3 - x_4 + 1.02x_7 - 1.003x_{12} + x_{13})y_8^* + (-1.01x_4 \\ & + x_5 - 1.02x_8 + 1.003x_{13} - x_{14})y_9^* + (1.01x_4 - x_5 + 1.02x_8 - 1.003x_{13} + x_{14})y_{10}^* + (-1.01x_5 + x_6 - 1.02x_9 \\ & + 1.003x_{14} - x_{15})y_{11}^* + (1.01x_5 - x_6 + 1.02x_9 - 1.003x_{14} + x_{15})y_{12}^* \\ & \leq (150 + P_1)y_1^* + (-150 + P_2)y_2^* + (100 + P_3)y_3^* + (-100 + P_4)y_4^* + (-200 + P_5)y_5^* + (200 + P_6)y_6^* \\ & + (200 + P_7)y_7^* + (-200 + P_8)y_8^* + (-50 + P_9)y_9^* + (50 + P_{10})y_{10}^* + (-300 + P_{11})y_{11}^* + (300 + P_{12})y_{12}^* \end{aligned}$$
$$= z^* + y_1^*P_1 + y_2^*P_2 + y_3^*P_3 + y_4^*P_4 + y_5^*P_5 + y_6^*P_6 + y_7^*P_7 + y_8^*P_8 + y_9^*P_9 + y_{10}^*P_{10} + y_{11}^*P_{11} + y_{12}^*P_{12}$$
$$= 92.49 + 1.0372P_2 + 1.0302P_4 - 1.02P_6 + 1.0169P_8 + 1.01P_{10} + P_{12}$$

**Problem 5: Fund allocation**
You would like to allocate \$80,000 among four mutual funds that have different expected returns as well as different weights in large-, medium- and small-capitalization stocks.

| Capitalization | Fund 1 | Fund 2 | Fund 3 | Fund 4 |
|---|---|---|---|---|
| Large<br>Medium<br>Small | 50%<br>30%<br>20% | 30%<br>10%<br>60% | 25%<br>40%<br>35% | 60%<br>20%<br>20% |
| Exp. return | 10% | 15% | 16% | 8% |

The allocation must contain at least 35% large-cap, 30% mid-cap, and 15% small-cap stocks. Find an acceptable allocation with the highest expected return assuming you are only allowed to hold long positions in the funds.

**Problem and constraints:**

Primal:

$$\max\ z = 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.16x_3 + 0.08x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.25x_3 + 0.6x_4 \geq 28000 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 \geq 24000 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.35x_3 + 0.2x_4 \geq 12000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 80000 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1$: Cantidad a invertir en el fondo 1
$x_2$: Cantidad a invertir en el fondo 2
$x_3$: Cantidad a invertir en el fondo 3
$x_4$: Cantidad a invertir en el fondo 4

**Derive dual problem:**

Primal:

$$\max\ z = 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.16x_3 + 0.08x_4$$

$$s.t. \begin{cases} -0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.25x_3 - 0.6x_4 \leq -28000 \\ -0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 - 0.2x_4 \leq -24000 \\ -0.2x_1 - 0.6x_2 - 0.35x_3 - 0.2x_4 \leq -12000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 80000 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1[-0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.25x_3 - 0.6x_4] &+ y_2[-0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 - 0.2x_4] \\ &+ y_3[-0.2x_1 - 0.6x_2 - 0.35x_3 - 0.2x_4] + y_4[x_1 + x_2 + x_3 + x_4] \\ &\leq -28000y_1 - 24000y_2 - 12000y_3 + 80000y_4 \\ x_1[-0.5y_1 - 0.3y_2 - 0.2y_3 + y_4] &+ x_2[-0.3y_1 - 0.1y_2 - 0.6y_3 + y_4] \\ &+ x_3[-0.25y_1 - 0.4y_2 - 0.35y_3 + y_4] \\ &+ x_4[-0.6y_1 - 0.2y_2 - 0.2y_3 + y_4] \\ &\leq -28000y_1 - 24000y_2 - 12000y_3 + 80000y_4 \end{aligned}$$

Dual:

$$\min\ z = -28000y_1 - 24000y_2 - 12000y_3 + 80000y_4$$

$$s.t. \begin{cases} -0.5y_1 - 0.3y_2 - 0.2y_3 + y_4 \geq 0.1 \\ -0.3y_1 - 0.1y_2 - 0.6y_3 + y_4 \geq 0.15 \\ -0.25y_1 - 0.4y_2 - 0.35y_3 + y_4 \geq 0.16 \\ -0.6y_1 - 0.2y_2 - 0.2y_3 + y_4 \geq 0.08 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:

$$\max\ c^T x$$

$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \\ 0.16 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.3 & -0.25 & -0.6 \\ -0.3 & -0.1 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & -0.6 & -0.35 & -0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -28000 \\ -24000 \\ -12000 \\ 80000 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 12631.5789 | 46315.7895 | 21052.6316 |

Dual:

| y1 | y2 | y3 | y4 |
|---|---|---|---|
| 0.23157895 | 0.00526316 | 0 | 0.22 |

**Fundamental theorem of duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 0$ | 0.2315 | $y_1^* = 0.2315$ | 0 |
| $x_2^* = 12631.57$ | 0.0052 | $y_2^* = 0.0052$ | 12631.57 |
| $x_3^* = 46315.78$ | 0 | $y_3^* = 0$ | 46315.78 |
| $x_4^* = 21502.63$ | 0.22 | $y_4^* = 0.22$ | 21502.63 |
| $max = 10989.4737$ | | $min = 10989.4737$ | |

**Complementary slackness conditions:**

$$y_1^*[-0.5x_1^* - 0.3x_2^* - 0.25x_3^* - 0.6x_4^* + 28000] = 0$$

$0.2315[-0.5(0)-0.3(12631.57)-0.25(46315.78)-0.6(21502.63)+28000]=0$
$y_2^*[-0.3x_1^*-0.1x_2^*-0.4x_3^*-0.2x_4^*+24000]=0$
$0.0052[-0.03(0)-0.1(12631.57)-0.4(46315.78)-0.2(21502.63)+24000]=0$
$y_3^*[-0.2x_1^*-0.6x_2^*-0.35x_3^*-0.2x_4^*+12000]=0$
$0[-0.2(0)-0.6(12631.57)-0.35(46315.78)-0.2(21502.63)+12000]=0$
$y_4^*[x_1^*+x_2^*+x_3^*+x_4^*-80000]=0$
$0.22(0+12631.57+46315.78+21502.63-80000)=0$

$x_1^*[-0.5y_1^*-0.3y_2^*-0.2y_3^*+y_4^*-0.1]=0$
$0[-0.5(0.23)-0.3(0.005)-0.2(0)+0.22-0.1]=0$
$x_2^*[-0.3y_1^*-0.1y_2^*-0.6y_3^*+y_4^*-0.15]=0$
$12631.57[-0.03(0.23)-0.1(0.005)-0.6(0)+0.22-0.15]=0$
$x_3^*[-0.25y_1^*-0.4y_2^*-0.35y_3^*+y_4^*-0.16]=0$
$46315.78[-0.25(0.23)-0.4(0.005)-0.35(0)+0.22-0.16]=0$
$x_4^*[-0.6y_1^*-0.2y_2^*-0.2y_3^*+y_4^*-0.08]=0$
$21502.63[-0.6(0.23)-0.2(0.005)-0.2(0)+0.22-0.08]=0$

**Dimensional Analysis:**

$\boldsymbol{y_1}$**:** Precio sombra de restricción de dinero en empresas grandes.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\ en\ empresa\ grande}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie la cantidad de dinero asignada a la capitalización larga.

$\boldsymbol{y_2}$**:** Precio sombra de restricción de dinero en empresas medianas.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\ en\ empresa\ mediana}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie la cantidad de dinero asignada a la capitalización media.

$\boldsymbol{y_3}$**:** Precio sombra de restricción de dinero en empresas chicas.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\ en\ empresa\ chica}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie la cantidad de dinero asignada a la capitalización corta.

$\boldsymbol{y_4}$**:** Precio sombra de restricción de dinero total disponible.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\ total\ disponible}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie la cantidad de dinero total disponible.

**Economic explanation:**

$\max\ z=0.1x_1+0.15x_2+0.16x_3+0.08x_4$

$$s.t.\begin{cases} -0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.25x_3 - 0.6x_4 \le -28000 + P_1 \\ -0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 - 0.2x_4 \le -24000 + P_2 \\ -0.2x_1 - 0.6x_2 - 0.35x_3 - 0.2x_4 \le -12000 + P_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 80000 + P_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= (-0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.25x_3 - 0.6x_4)y_1^* + (-0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.4x_3 - 0.2x_4)y_2^* \\ &\quad + (-0.2x_1 - 0.6x_2 - 0.35x_3 - 0.2x_4)y_3^* + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)y_4^* \\ &\quad \le (-28000 + P_1)y_1^* + (-24000 + P_2)y_2^* + (-12000 + P_3)y_3^* \\ &\quad + (80000 + P_4)y_4^* \\ &= z^* + y_1^*P_1 + y_2^*P_2 + y_3^*P_3 + y_4^*P_4 \\ &= 10989.4737 + 0.2315P_1 + 0.0052P_2 + 0.22P_4 \end{aligned}$$

Debes de analizar las diferencias de precios entre el tuyo y uno ofrecido, compararlo contra tu precio sombra y con esta información tomar la decisión más conveniente.

**Problem 6: Bond allocation**

A bond portfolio manager has $100, 000 to allocate to two different bonds: a corporate bond and a government bond.
These bonds have the following yield, risk level, and maturity:

| Bond | Yield | Risk level | Maturity |
|---|---|---|---|
| Corporate | 4% | 2 | 3 years |
| Government | 3% | 1 | 4 years |

The portfolio manager would like to allocate the funds so that the average risk level of the portfolio is at most 1.5 and the average maturity is at most 3.6 years. Any amount not invested in the bonds will be kept in a cash account that is assumed to generate no interest and does not contribute to the average risk level or maturity. In other words, assume cash has zero yield, zero risk level, and zero maturity. How should the manager allocate funds to the two bonds to maximize yield? Assume the portfolio can only include long positions.

**Problem and constraints:**

Primal:

$$\max\ z = 0.04x_1 + 0.03x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1.5(x_1 + x_2) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 3.6(x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 \le 100000 \\ x_1,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1$: Cantidad a invertir en bono corporativo
$x_2$: Cantidad a invertir en bono de gobierno

Primal:

$$\max\ z = 0.04x_1 + 0.03x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 0.5x_1 - 0.5x_2 \le 0 \\ -0.6x_1 + 0.4x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 100000 \\ x_1,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Derive dual problem:**

$$y_1[0.5x_1 - 0.5x_2] + y_2[-0.6x_1 + 0.4x_2] + y_3[x_1 + x_2] \le 100000y_3$$
$$x_1[0.5y_1 - 0.6y_2 + y_3] + x_2[-0.5y_1 + 0.4y_2 + y_3] \le 100000y_3$$

Dual:

$$\min\ z = 100000y_3$$
$$s.t.\begin{cases} 0.5y_1 - 0.6y_2 + y_3 \ge 0.04 \\ -0.5y_1 + 0.4y_2 + y_3 \ge 0.03 \\ y_1,\ \ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.\ Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0.4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100000 \end{bmatrix}$$

Dual:

$$\min\ b^T y$$
$$s.t.\ A^T y \ge c$$
$$y \ge 0$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 |
|---|---|
| 50000 | 50000 |

Dual:

| y1 | y2 | y3 |
|---|---|---|
| 0.01 | 0 | 0.02 |

**Fundamental theorem of duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 50000$ | 0.01 | $y_1^* = 0.01$ | 50000 |
| $x_2^* = 50000$ | 0 | $y_2^* = 0$ | 50000 |
| | 0.02 | $y_3^* = 0.02$ | |
| $max = 3500$ | | $min = 3500$ | |

**Complementary slackness conditions:**

$y_1^*[0.5x_1^* - 0.5x_2^*] = 0$
$0.01[0.5(50000) - 0.5(50000)] = 0$
$y_2^*[-0.6x_1^* + 0.4x_2^*] = 0$
$0[-0.6(50000) + 0.4(50000)] = 0$
$y_3^*[x_1^* + x_2^* - 100000] = 0$
$0.02(50000 + 50000 - 100000) = 0$

$x_1^*[0.5y_1^* - 0.6y_2^* - 0.04] = 0$
$50000[0.5(0.01) + 0.02 - 0.04] = 0$
$x_2^*[-0.5y_1^* + 0.4y_2^* + y_3^* - 0.03] = 0$
$50000[-0.5(0.01) + 0.02 - 0.03] = 0$

**Dimensional Analysis:**

$\boldsymbol{y_1}$**:** Precio sombra de restricción de riesgo.
**Unidades:** $\frac{\$}{unidad\ de\ riesgo}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el riesgo.

$\boldsymbol{y_2}$**:** Precio sombra de restricción de maduración.
**Unidades:** $\frac{\$}{año}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie la maduración.

$\boldsymbol{y_3}$**:** Precio sombra de restricción de dinero total disponible.
**Unidades:** $\frac{\$}{\$\ total\ disponible}$
**Explicación:** Ganancia o pérdida según cambie el total de dinero disponible.

**Economic explanation:**

$$\max\ z = 0.04x_1 + 0.03x_2$$
$$s.t. \begin{cases} 0.5x_1 - 0.5x_2 \leq 0 + P_1 \\ -0.6x_1 + 0.4x_2 \leq 0 + P_2 \\ x_1 + x_2 \leq 100000 + P_3 \end{cases}$$
$$z = (0.5x_1 - 0.5x_2)y_1^* + (-0.6x_1 + 0.4x_2)y_2^* + (x_1 + x_2)y_3^* \leq y_1^*P_1 + y_2^*P_2 + (100000 + P_3)y_3^*$$

$= z^* + y_1^* P_1 + y_2^* P_2 + y_3^* P_3$
$= 3500 + 0.01P_1 + 0.02P_3$

Debes de analizar las diferencias de precios entre el tuyo y uno ofrecido, compararlo contra tu precio sombra y con esta información tomar la decisión más conveniente.

**Problem 7: Basel III regulations**
Banks need to consider regulations when determining their business strategy. In this problem, which is a simplified version of the problem given in Pokutta6, we consider the Basel III regulations (Basel Committee on Banking Supervision 1).
Consider a bank with total deposits $D$ and loans $L$. The loans may default and the deposits are exposed to early withdrawal. The bank holds capital $C$ in order to buffer against possible default losses on the loans, and it holds a liquidity reserve $R$ to buffer against early withdrawals on the deposits. The balance sheet of the bank satisfies $L + R = D + C$. Normalizing the total assets to 1, we have $R = 1 - L$ and $C = 1 - D$.
Basel III regulations require banks to satisfy four minimum ratio constraints in order to buffer against different types of risk:

- Capital ratio: $\frac{C}{L} \geq r_1$.
- Leverage ratio: $C \geq r_2$.
- Liquidity coverage ratio: $\frac{R}{D} \geq r_3$.
- Net stable funding ratio: $\frac{\alpha D + C}{L} \geq r_4$.

where the ratios $r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha$ are computed for each bank based on the riskiness of its loans and the likelihood of early withdrawals on deposits.
Expressing the four ratio constraints in terms of the variables $D$ and $L$, we get of the feasible region of this system of inequalities in the plane $(D, L)$.
Given this feasible region, the objective of the bank is to maximize the margin income $m_D D + m_L L$ that it makes on its products; where $m_D$ is the margin that the bank makes on its deposits and $m_L$ is the margin charged on its loans.
For this case, consider a bank with $r1 = 0.3,\ r2 = 0.1,\ r3 = 0.25,$
$r4 = 0.7,\ \alpha = 0.3$. Besides, let $m_D = 0.02$ and $m_L = 0.03$.
With that previous information, find the optimal proportion of the bank liabilities in deposits and in capital, assets in loans and, the remaining liquidity reserve.
**Hint:** Express the four ratio constraints in terms of the variables $D$ and $L$ and get:

$$D + 0.3L \leq 1$$
$$D \leq 0.9$$
$$0.25D + L \leq 1$$
$$0.7D + 0.7L \leq 1$$

**Problem and constraints:**

Primal:
$\max\ z = 0.02x_1 + 0.03x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 0.3x_2 \leq 1 \\ x_1 \qquad\quad \leq 0.9 \\ 0.25x_1 + x_2 \leq 1 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 \leq 1 \\ x_1,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1$: Proporción en depósitos
$x_2$: Proporción en préstamos

**Derive dual problem:**

$$y_1[x_1 + 0.3x_2] + y_2[x_1] + y_3[0.25x_1 + x_2] + y_4[0.7x_1 + 0.7x_2] \leq y_1 + 0.9y_2 + y_3 + y_4$$
$$x_1[y_1 + y_2 + 0.25y_3 + 0.7y_4] + x_2[0.3y_1 + y_3 + 0.7y_4] \leq y_1 + 0.9y_2 + y_3 + y_4$$

Dual:
$\min\ z = y_1 + 0.9y_2 + y_3 + y_4$
$$s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 + 0.25y_3 + 0.7y_4 \geq 0.02 \\ 0.3y_1 + y_3 + 0.7y_4 \geq 0.03 \\ y_1,\ \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Matrix form:**

Primal:
$\max\ c^T x$
$s.t.\ Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1 & 0 \\ 0.25 & 1 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dual:
$\min\ b^T y$
$s.t.\ A^T y \geq c$
$y \geq 0$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

**Solve problem:**

Primal:

| x1 | x2 |
|---|---|
| 0.57142857 | 0.85714286 |

Dual:

| y1 | y2 | y3 | y4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.01333333 | 0.02380952 |

**Deposits:** 0.57142857
**Capital:** 0.428571429

**Loans:** 0.85714286
**Liquidity Reserve:** 0.142857143

**Fundamental theorem of duality:**

Solución:

| Primal: | Precio sombra: | Dual: | Precio sombra: |
|---|---|---|---|
| $x_1^* = 0.5714$ | 0 | $y_1^* = 0$ | 0.5714 |
| $x_2^* = 0.8571$ | 0 | $y_2^* = 0$ | 0.8571 |
| | 0.0133 | $y_3^* = 0.0133$ | |
| | 0.0238 | $y_4^* = 0.0238$ | |
| $max = 0.0371$ | | $min = 0.0371$ | |

**Complementary slackness conditions:**

$y_1^*[x_1^* + 0.3x_2^* - 1] = 0$
$0[0.5714 - 0.3(0.8571) - 1] = 0$
$y_2^*[x_1^* - 0.9] = 0$
$0(0.5714 - 0.9) = 0$
$y_3^*[0.25x_1^* + x_2^* - 1] = 0$
$0.0133[0.25(0.5714) + 0.8571 - 1] = 0$
$y_4^*[0.7x_1^* + 0.7x_2^* - 1] = 0$
$0.0238[0.7(0.5714) + 0.7(0.8571) - 1] = 0$

$x_1^*[y_1^* + y_2^* + 0.25y_3^* + 0.7y_4^* - 0.02] = 0$
$0.5714[0 + 0 + 0.25(0.0133) + 0.7(0.0238) - 0.02] = 0$
$x_2^*[0.3y_1^* + y_3^* + 0.7y_4^* - 0.03] = 0$
$0.8571[0.3(0) + 0.0133 + 0.7(0.0238) - 0.03] = 0$

**Dimensional Analysis:**

$\boldsymbol{y_1}$**:** Precio sombra de restricción de ratio de capital.
**Unidades:** $\frac{\%}{ratio\ capital}$
**Explicación:** Cambio en la proporción de depósitos y préstamos al final según cambie la ratio de capital.

$\boldsymbol{y_2}$**:** Precio sombra de restricción de ratio de apalancamiento.
**Unidades:** $\frac{\%}{ratio\ apalancamiento}$
**Explicación:** Cambio en la proporción de depósitos y préstamos al final según cambie la ratio de apalancamiento.

$\boldsymbol{y_3}$**:** Precio sombra de restricción de ratio de cobertura de liquidez.
**Unidades:** $\frac{\%}{ratio\ cobertura\ de\ liquidez}$
**Explicación:** Cambio en la proporción de depósitos y préstamos al final según cambie la ratio de cobertura de liquidez.

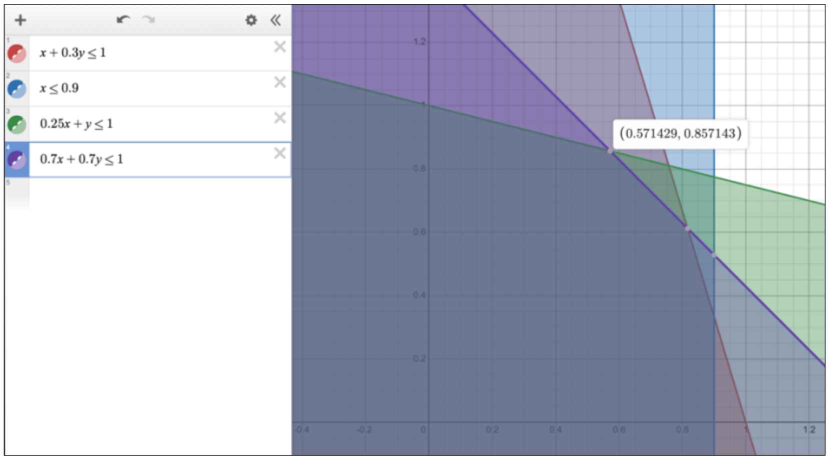
$\boldsymbol{y_4}$**:** Precio sombra de restricción de ratio de financiación estable neta.
**Unidades:** $\frac{\%}{ratio\ financiación\ estable\ neta}$
**Explicación:** Cambio en la proporción de depósitos y préstamos al final según cambie la ratio de financiación estable neta.

**Economic explanation:**

$$\max\ z = 0.02x_1 + 0.03x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 0.3x_2 \leq 1 + P_1 \\ x_1 \leq 0.9 + P_2 \\ 0.25x_1 + x_2 \leq 1 + P_3 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 \leq 1 + P_4 \end{cases}$$
$$z = (x_1 + 0.3x_2)y_1^* + (x_1)y_2^* + (0.25x_1 + x_2)y_3^* + (0.7x_1 + 0.7x_2)y_4^*$$
$$\leq (1 + P_1)y_1^* + (0.9 + P_2)y_2^* + (1 + P_3)y_3^* + (1 + P_4)y_4^*$$
$$= z^* + y_1^*P_1 + y_2^*P_2 + y_3^*P_3 + y_4^*P_4$$
$$= 0.0371 + 0.0133P_3 + 0.0238P_4$$

Debes de analizar las diferencias de precios entre el tuyo y uno ofrecido, compararlo contra tu precio sombra y con esta información tomar la decisión más conveniente.

**Gráfica:**




En este caso el eje x representa a los depósitos y el eje y representa a los préstamos. Se puede ver que en la gráfica se forma un figura contenida entre los ejes “x” y “y” y las restricciones. Cualquier combinación de puntos dentro de esta área representa un posible solución a las proporciones de depósitos y préstamos que el banco puede tener.

Al ser un problema de optimización, se busca maximizar el ingreso del banco, por lo que se busca el punto (x,y) que nos de el valor más alto. Este punto tiene que ser uno de los vértices de la figura, pues cumplen con las restricciones lo másximo posible. Finalmente el punto elegido es el mostrado en la gráfica pues ese le otorga al banco el máximo ingreso posible.