Otimização Multidimensional – Método da Quádrica

$$\boxed{X_{n+1} = X_n - H^{-1} \times \nabla f(X_n)}$$

Calcular o mínimo de f(x,y) $f(x,y) = y^2 - 2xy - 6y + 2x^2 + 12$

1º - Calculamos as derivadas parciais para cálculo do gradiente

$$\nabla f(X_n) = -2\mathrm{y} + 4\mathrm{x} \qquad \nabla f(Y_n) = 2\mathrm{y} - 2\mathrm{x} - 6$$

2º - Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

3º - Calculamos o inverso determinante da matriz Hessiana

$$H\left[f(x,y)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

4º - Iniciamos o calculo iterativo até satisfazer a condição de paragem!

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Neste caso, já atingimos o mínimo logo na primeira iteração, isto acontece porque a hessiana é uma constante (não depende de x e y), logo dá imediatamente a direção do extremo!