Equipo 7

Integrantes

- Camacho Herrera Jesús Salvador
- Flores Solis Eduardo Elías
- Garcia Robles Viviana
- Mendoza López Luis Ángel

Índice

1. Estimador de Máxima Verosimilitud de Exponencial

Considerando a $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro λ.

Recordemos que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria exponencial X con parámetro λ es:

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Para obtener el EVM tendremos que desarrollar

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\log \left(\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\log \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) \right) \right] = 0$$

De modo tendremos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \\
\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \\
\log \left(\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) \right) &= \log \left(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \\
\log \left(\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) \right) &= n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\log \left(\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) \right) \right] &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

Y de esta forma tendremos que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\log \left(\mathcal{L} \left(\lambda; X_1 \ldots X_n \right) \right) \right] = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Entonces, despejando a λ para hallar $\hat{\lambda} = \lambda$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i &= 0 \\
\frac{n}{\lambda} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\
\hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\
\hat{\lambda} &= \frac{n}{\bar{X}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud para λ es:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\bar{X}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2. Métodos para calcular estimadores

2.1. Método de Momentos

El *método de momentos* es una técnica para estimar los parámetros de una distribución utilizando los momentos de la muestra. Los momentos de una distribución son expectativas de potencias de la variable aleatoria. En el caso más común, se utilizan los primeros momentos (media, varianza, etc.) para igualarlos con los momentos de la muestra y resolver el sistema de ecuaciones resultante para obtener los estimadores de los parámetros.

Ejemplo 1: Distribución Exponencial

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro λ. El primer momento de la distribución exponencial es $1/\lambda$. Igualamos el primer momento muestral al primer momento de la población:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\lambda}$$

Resolviendo para λ obtenemos:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Ejemplo 2: Distribución Normal

Consideremos una muestra de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. El primer momento (media) es μ. Igualamos estos momentos a los momentos muestrales:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu$$

Resolviendo para μ obtenemos el estimador de momento:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

2.2. Método Delta

El *método delta* es una técnica utilizada para aproximar la varianza de una función de un estimador. Es particularmente útil cuando se trata con funciones no lineales de estimadores asintóticamente normales.

Fundamento

Supongamos que tenemos un estimador $\hat{\theta}$ para el parámetro θ, y queremos encontrar la distribución de una función $g(\hat{\theta})$. Si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ y es asintóticamente normal con media θ, el método delta nos permite aproximar la distribución de $g(\hat{\theta})$ utilizando la derivada de g en θ.

Matemáticamente, si $\hat{\theta}$ es asintóticamente normal, podemos decir que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Entonces, por el método delta:

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 [g'(\theta)]^2)$$

Esto nos permite aproximar la distribución de $g(\hat{\theta})$. De esto se sigue que:

$$\mathrm{Var}(g(\hat{\theta})) \approx \frac{\sigma^2}{n} [g'(\theta)]^2$$

Ejemplo 1: Transformación Cuadrática

Consideremos que $\hat{\theta}$ es un estimador de θ y que queremos estimar la varianza de $g(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^2$. Aplicando el método delta:

1. Derivada de $g(\theta)$:

$$g'(\theta) = 2\theta$$

2. Aproximación de la Varianza:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^2) \approx \frac{\sigma^2}{n} (2\theta)^2 = \frac{4\theta^2 \sigma^2}{n}$$

Interpretación:

Este resultado nos indica que la varianza del estimador cuadrático $\hat{\theta}^2$ se puede aproximar multiplicando la varianza de $\hat{\theta}$ por el cuadrado de la derivada de la función $g(\theta) = \theta^2$, evaluada en θ.

Ejemplo 2: Logaritmo Natural

Supongamos que $\hat{\theta}$ es un estimador de θ y queremos encontrar la varianza de $g(\hat{\theta}) = \ln(\hat{\theta})$. Aplicando el método delta:

1. Derivada de $g(\theta)$:

$$g'(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

2. Aproximación de la Varianza:

$$\mathrm{Var}(\ln(\hat{\theta})) \approx \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n\theta^2}$$

Interpretación:

Esto nos dice que la varianza del estimador $\ln(\hat{\theta})$ se puede aproximar dividiendo la varianza de $\hat{\theta}$ por el cuadrado del parámetro θ, y ajustándolo por el tamaño de la muestra n.

3. Calcula el MLE para la media μ y varianza σ^2 de una muestra normal.

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2.

Para obtener el MLE tendremos que desarrollar para $\mathbf{j} = \mu, \sigma^2$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \left[\log\left(\mathcal{L}\left(\mathbf{j}; X_1 \ldots X_n\right)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \left[\log\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mathbf{j})\right)\right] = 0$$

De este modo:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mathbf{j}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La función de log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathcal{L}\left(\mathbf{j}; X_1 \ldots X_n\right)\right) &= \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2
\end{aligned}$$

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud para μ, tomamos $\mathbf{j} = \mu$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\log\left(\mathcal{L}\left(\mu; X_1 \ldots X_n\right)\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial \mu}\left[-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \cdot (-1) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) = 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo para μ:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud para σ^2, tomamos $\mathbf{j} = \sigma^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma^2}} \left[\log\left(\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\sigma^2}; X_1 \ldots X_n\right)\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma^2}} \left[-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right] \\
&= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \\
&= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2 = 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo para σ^2:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2 \\
n\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2 \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los estimadores de máxima verosimilitud para μ y σ^2 son:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2.$$

4. Resuelve el ejemplo Example 8.17 de la sección 8.3.2

Ejemplo 8.17 Queremos estimar la proporción de personas que planean votar por el Candidato A en una próxima elección. Se supone que el número de votantes es grande, y θ es la proporción de votantes que planean votar por el Candidato A. Definimos la variable aleatoria X de la siguiente manera. Se elige un votante uniformemente al azar entre todos los votantes y le preguntamos: "*¿Planea votar por el Candidato A?*"Si dice "*sí*", entonces $X = 1$, de lo contrario, $X = 0$. Entonces,

$$X \sim Bernoulli(\theta)$$

Sean $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de esta distribución, lo que significa que los X_i son *i.i.d.* y $X_i \sim Bernoulli(\theta)$. En otras palabras, seleccionamos aleatoriamente a n votantes (con reemplazo) y le preguntamos a cada uno de ellos si planea votar por el Candidato A. Encuentra un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ para θ basado en $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$.

Solución: Por hipótesis $X_i \sim Bernoulli(\theta)$ para $i = 1, \cdots, n$, por lo tanto y acorde a los visto en clase:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n, \theta)$$

Para grandes valores de n, podemos aproximar la distribución binomial con una distribución normal con media $n\theta$ y varianza $n\theta(1-\theta)$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\theta, n\theta(1-\theta))$$

por propiedades de varianza y media,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \theta \sim N\left(0, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Así, para un nivel de confianza $(1-\alpha)100\,\%$, el valor crítico $z_{\alpha/2}$ debe satisfacer,

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} \leq \theta \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

considerando la aproximación de $\hat{\theta} = \bar{X}$. tenemos,

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq \theta \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

luego, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ para θ es:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$