Ecuaciones Diferenciales I (2020/2)

Profesor: Dr. Josué Manik Nava Sedeño

Tarea II
Fecha de entrega: 13 de Febrero de 2020

1. En cada inciso, determina el orden de la ecuación diferencial; también indica si la ecuación es lineal o no lineal.

   a $t^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = \sin t$

   b $\left(1 + y^2\right) \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = e^t$

2. En cada inciso, verifica que cada función es solución de la ecuación diferencial dada.

   a $\ddot{y} - y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t$

   b $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t; \quad y_1(t) = \frac{t}{3}, \quad y_2(t) = e^{-t} + \frac{t}{3}$

   c $t^2\ddot{y} + 5t\dot{y} + 4y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2}\ln t$

3. Determina los valores de r para los cuales la ecuación diferencial

   $$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$$

   tiene soluciones de la forma $y = e^{rt}$.

4. Determina los valores de r para los cuales la ecuación diferencial

   $$t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 4y = 0$$

   tiene soluciones de la forma $y = t^r$ para $t > 0$.

5. La energía cinética de un péndulo en movimiento es $T = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$, y su energía potencial con respecto a su estado de reposo es $V = mgL\left(1 - \cos\theta\right)$. Usando que la energía total $E = T + V$ es constante en el tiempo, muestra que el movimiento del péndulo está dado por al ecuación diferencial

   $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

6. Un material radioactivo, tal como el torio-234 decae a una tasa proporcional a la cantidad de material presente. Si $Q(t)$ es la cantidad presente al tiempo t, entonces $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -rQ$, donde $r > 0$ es la tasa de decaimiento

   a Si 100 mg de torio-234 decae a 82.04 mg en una semana, determina el valor de de la constante de decaimiento r.

   b Encuentra una expresión para la cantidad de torio-234 presente a cualquier tiempo t.

   c Muestra que para cualquier material radioactivo que decae de acuerdo a $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -rQ$, el tiempo requerido para que el material decaiga a la mitad de su cantidad original (su vida media, τ) y la constante de decaimiento r satisfacen la ecuación $r\tau = \ln 2$.

   d Encuentra la vida media del torio-234.