3.2. Retícula de caras de un polítopo (face lattice)

Definición: (Poset)

Un conjunto parcialmente ordenado (poset, partially ordered set) es un par $(S, \leq)$ donde S es un conjunto finito y $\leq$ es una relación sobre los elementos de S, que satisface las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $x \leq x, \ \forall x \in S$
2. Transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z, \ \forall x, y, z \in S$
3. Antisimétrica: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y, \ \forall x, y \in S$

"$\leq$" se conoce como una relación de orden (parcial).

Terminología poset:

- Una cadena [chain] es un subconjunto de S totalmente ordenado. Es decir, para cualquier par de elementos x, y de la cadena se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$. El largo de una cadena es su número de elementos menos 1.

- Si $x, y \in S$, $x \leq y$, entonces el intervalo $[x, y]$ es el conjunto

$$[x,y] := \{ w \in S \mid x \leq w \wedge w \leq y \}$$

- Un intervalo se llama booleano, si es isomorfo al poset $B_k := (2^{[k]}; \subseteq)$, donde $k \in \mathbb{N}$, $[k] = \{1, \dots, k\}$ y $2^{[k]}$ es el conjunto partes de $[k]$.

Terminología poset (2)

- Un poset es acotado si contiene un único elemento minimal y un único elemento maximal tales que:

  $\hat{0} \leq x \ , \ \forall x \in S$

  $x \leq \hat{1} \ , \ \forall x \in S.$

  La parte propia de un poset acotado es $S \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

- Un poset es graduado, si es acotado y toda cadena maximal tiene la misma longitud.

  El rango $r(x)$ de un elemento $x \in S$ es la longitud de una cadena maximal contenida en el intervalo $[\hat{0}, x]$. La longitud de S es:

$$r(S) := r(\hat{1}).$$

Definición : Retícula o malla [lattice]

Una retícula o malla es un poset $(S, \leq)$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) S es acotado

(ii) $\forall\, x, y \in S$: existe una única cota superior minimal, conocida como su "unión" [join].

$$x \vee y := z \in M(x,y), \quad t.q. \quad z \leq t, \ \forall\, t \in M(x,y)$$

donde

$$M(x,y) := \{t \in S \mid x \leq t \wedge y \leq t\}$$

(iii) $\forall\, x, y \in S$, existe una única cota inferior maximal, conocida como su "encuentro" [meet]

$$x \wedge y := z \in m(x,y) \quad t.q. \quad t \leq z, \ \forall\, t \in m(x,y)$$

donde

$$m(x,y) := \{t \in S \mid t \leq x \wedge t \leq y\}$$

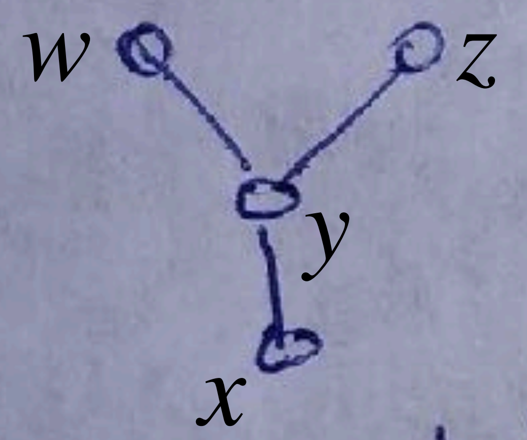
Retículas

- Puede demostrarse que cualesquiera 2 de las propiedades (i) - (iii), implican a la tercera
- Si S es una retícula graduada, llamamos <u>átomos</u> a los elementos minimales de $S \setminus \{\hat{0}\}$ y <u>coátomos</u> a los elementos maximales de $S \setminus \{\hat{1}\}$.
- Una retícula es atómica si todo $x \in S$ es la unión de un número finito de átomos.
- Una retícula es coatómica si todo $x \in S$ es el encuentro de un número finito de coátomos.
- El poset opuesto S^{op} a un poset $(S, \leq)$ se obtiene al invertir el sentido de la relación de orden:

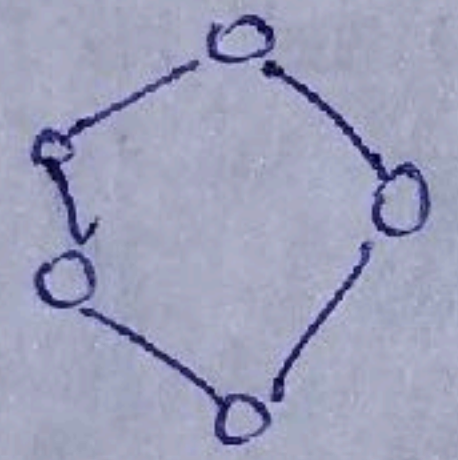
$$x \leq_{op} y \iff y \leq x$$

Diagramas de Hasse:

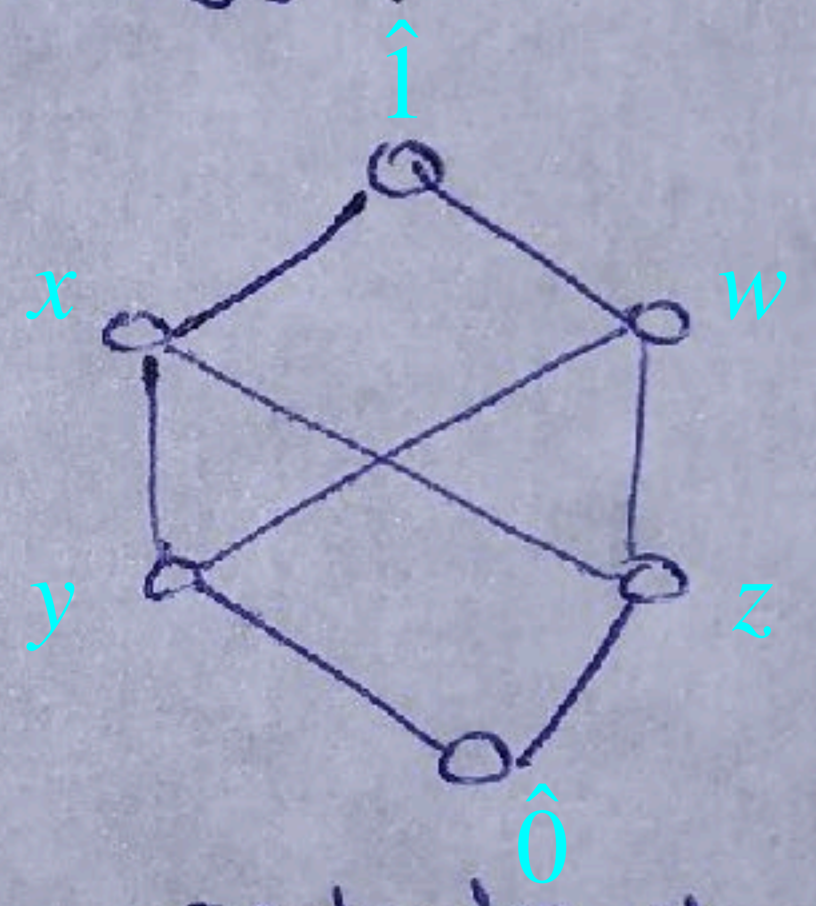
Representan a un poset por medio de un grafo cuyos nodos son los elementos de S y donde $x, y \in S$ están unidos por una arista si y sólo si $x \leq y \wedge [x,y] = \{x,y\}$.



no acotado



acotado no graduado

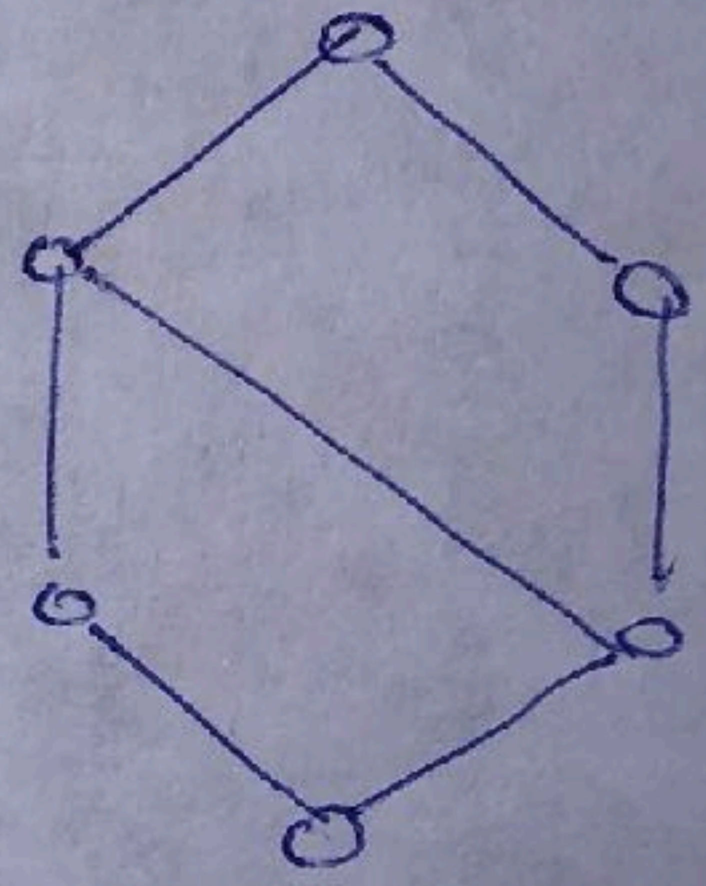


acotado y graduado

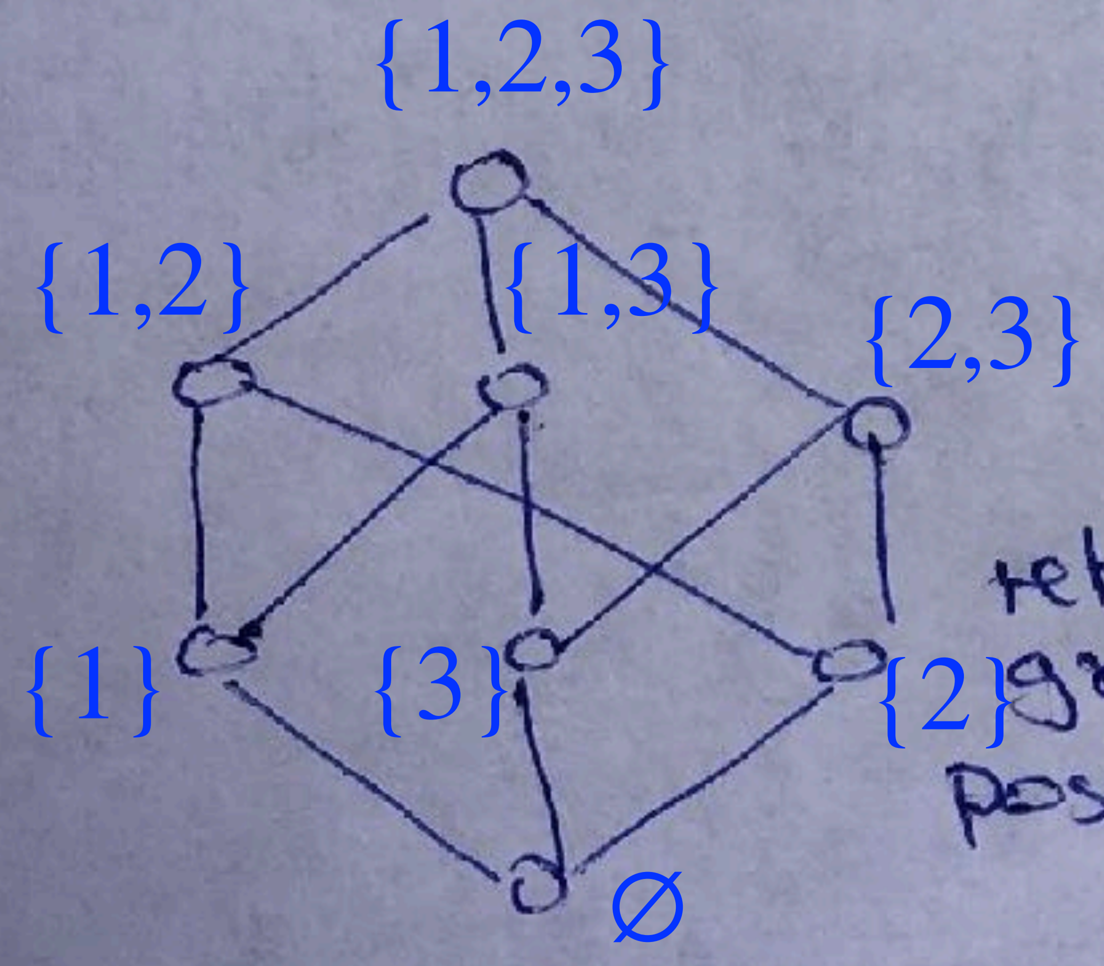
$[\hat{0}; x] = \{\hat{0}, y, z, x\}$

$r(x) = 2$

$r(S) = r(\hat{1}) = 3$



retícula graduada

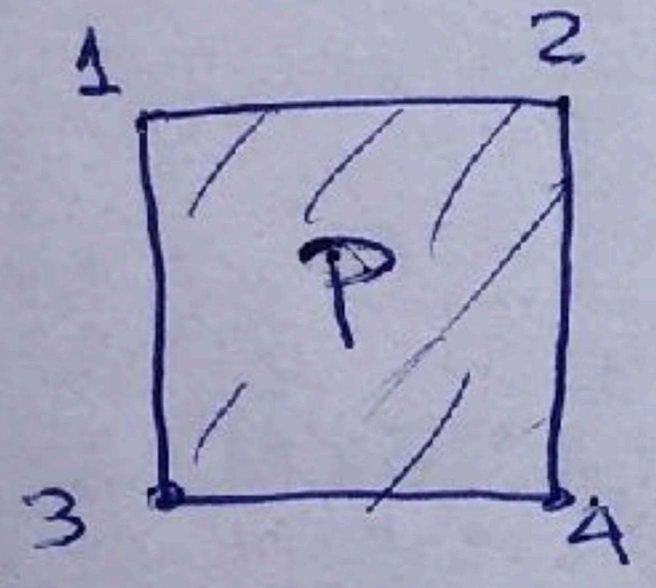


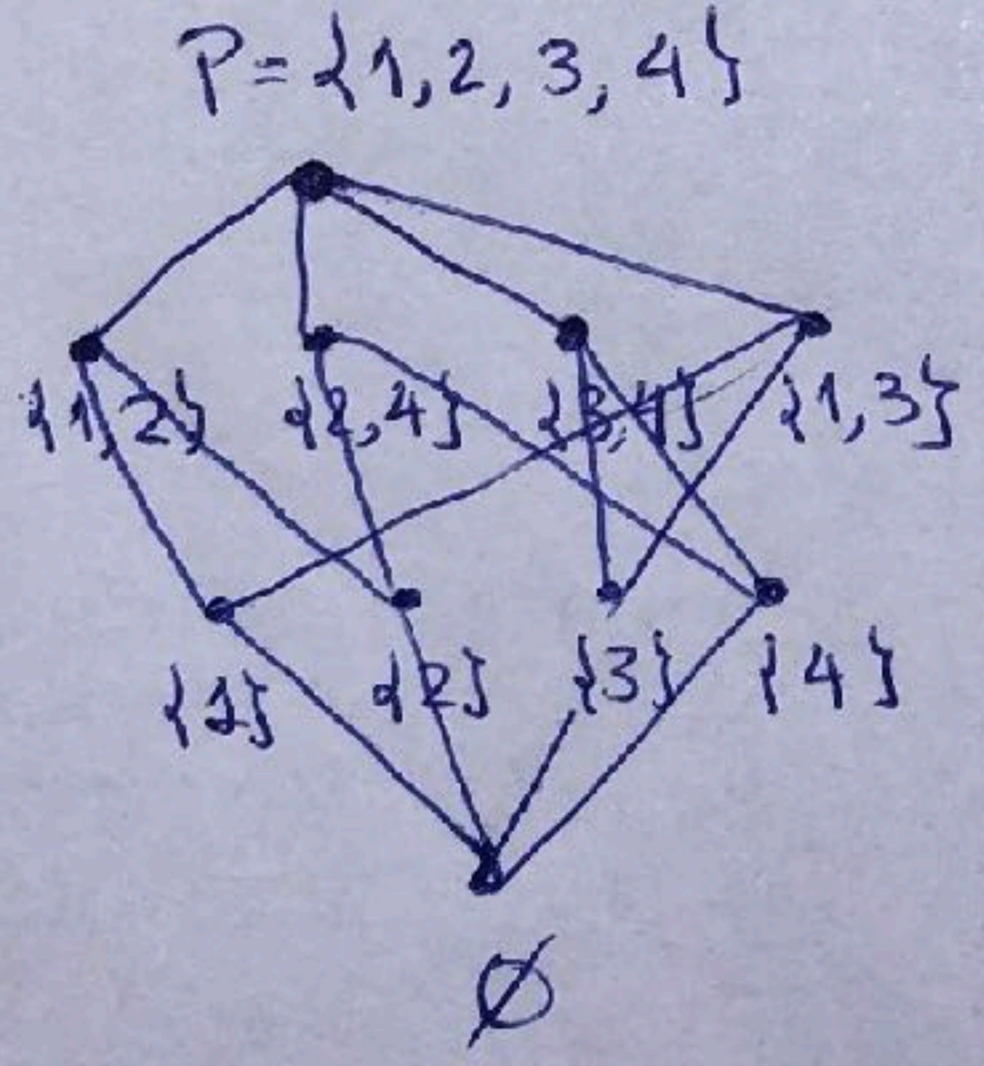
retícula graduada, poset booleano

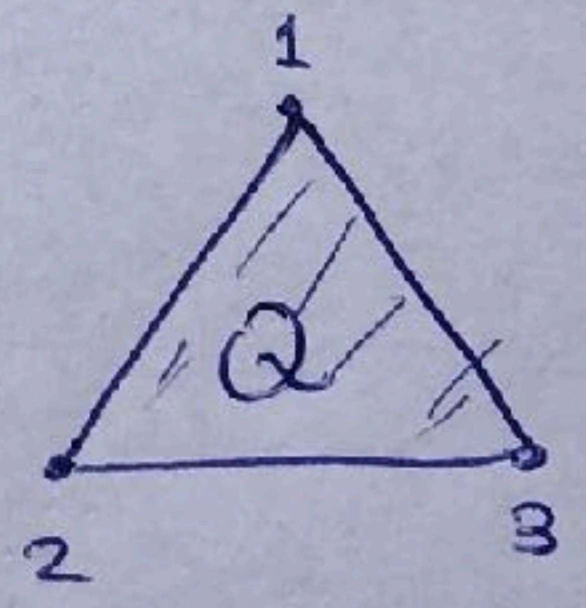
Definición: Retícula de caras L(P)

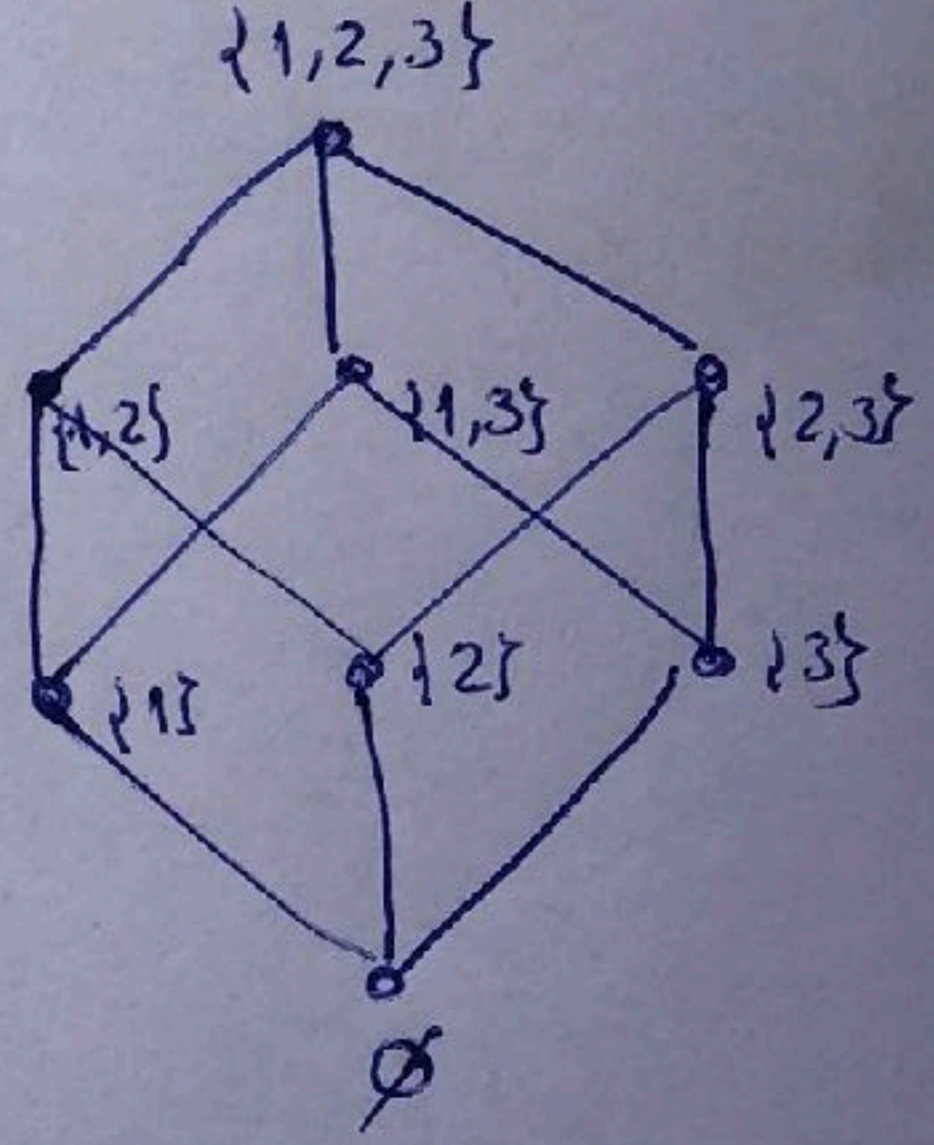
Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo. Su retícula de caras L(P) es el poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ formado por el conjunto de todas las caras de P con la relación de orden parcial de inclusión entre conjuntos.

Ejemplo 1:

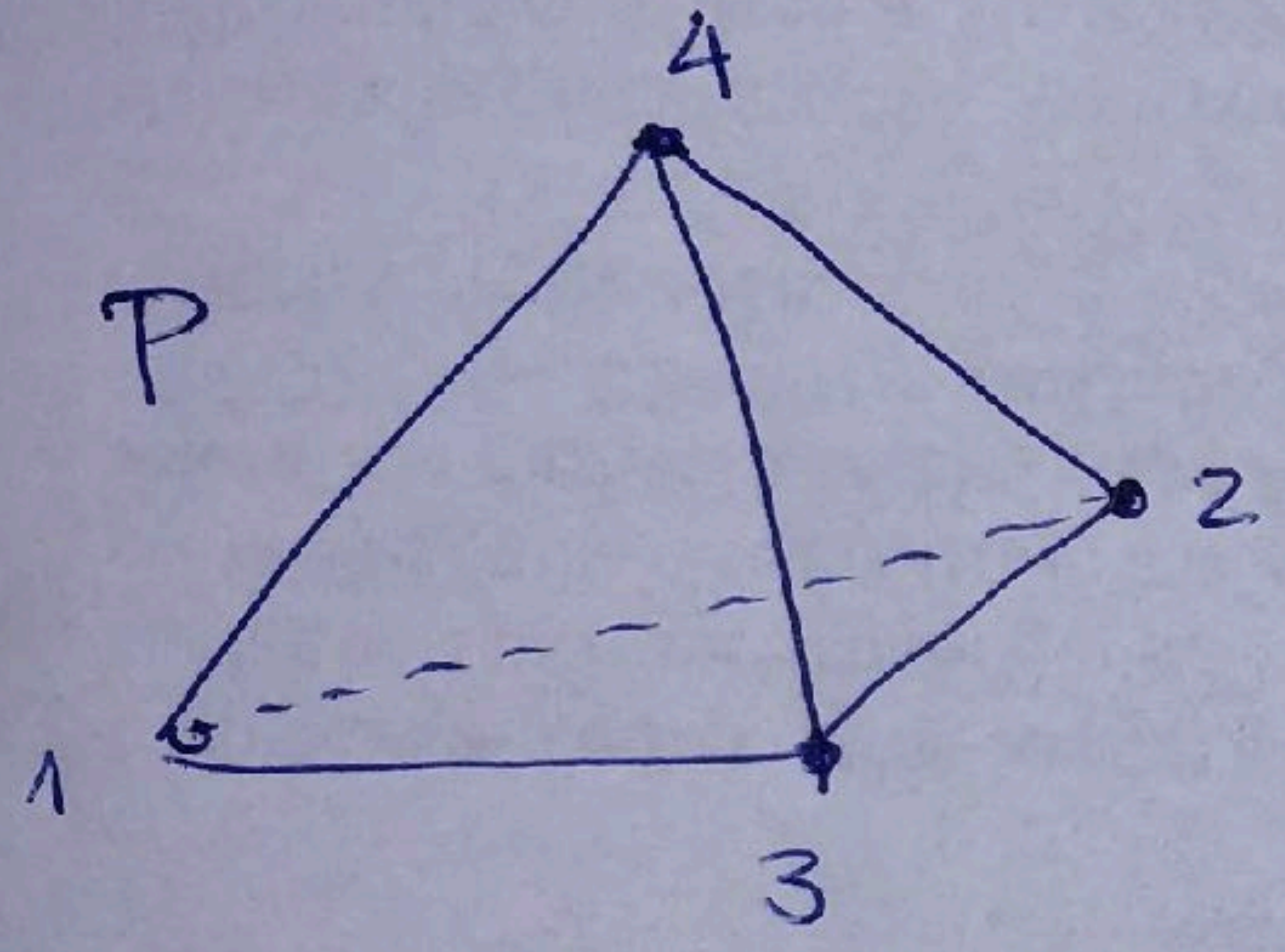


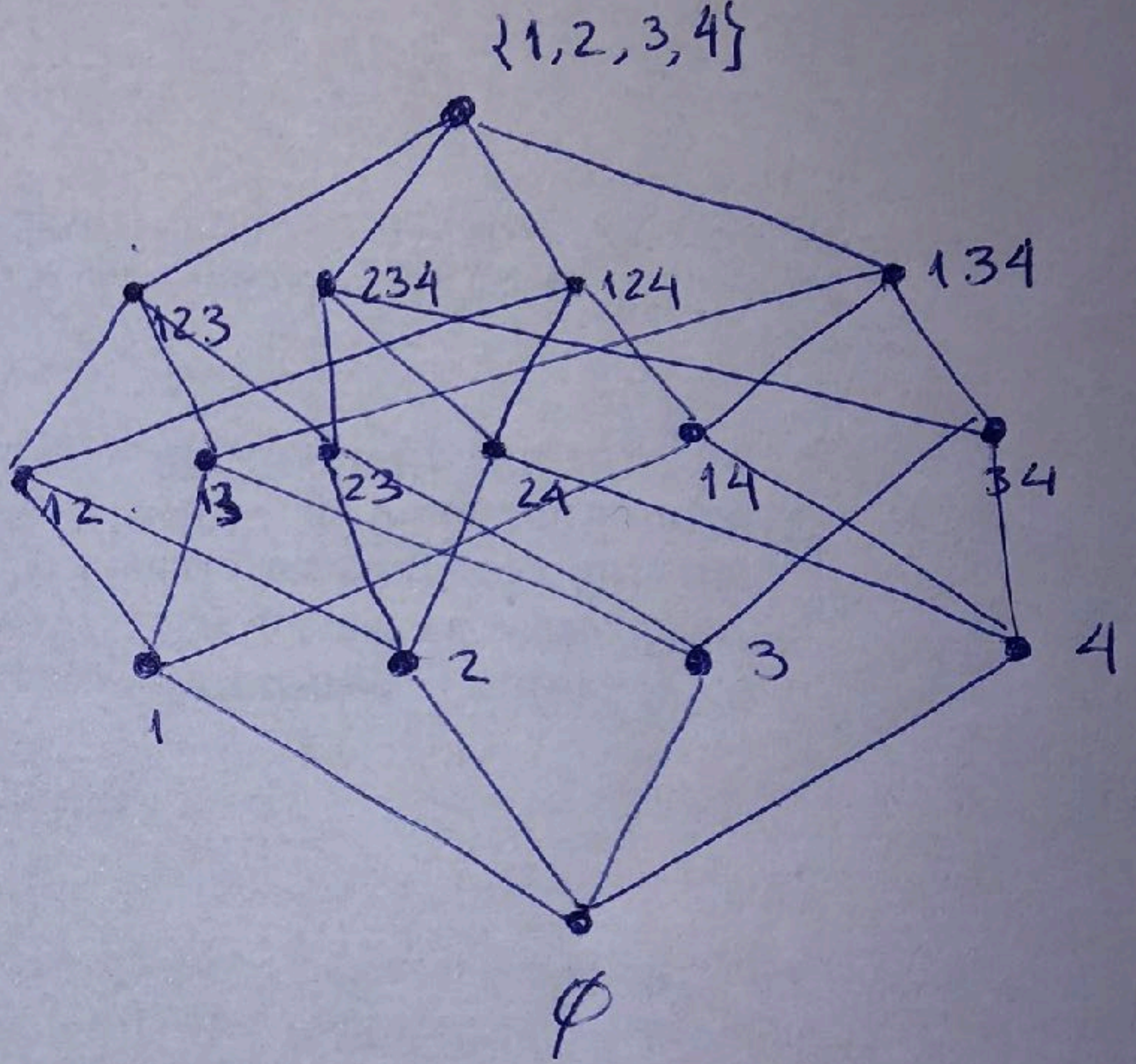




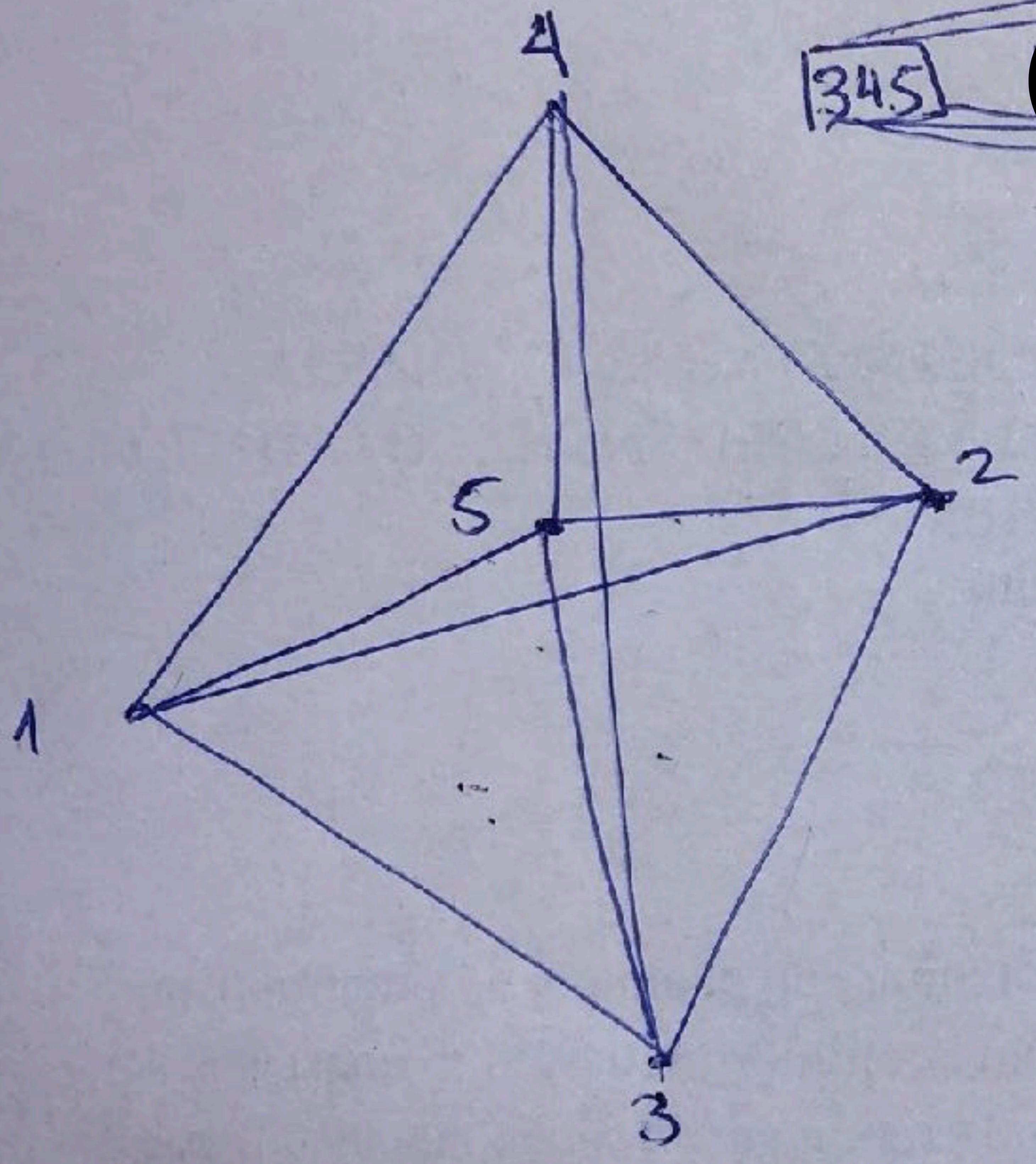


Ejemplo 2:



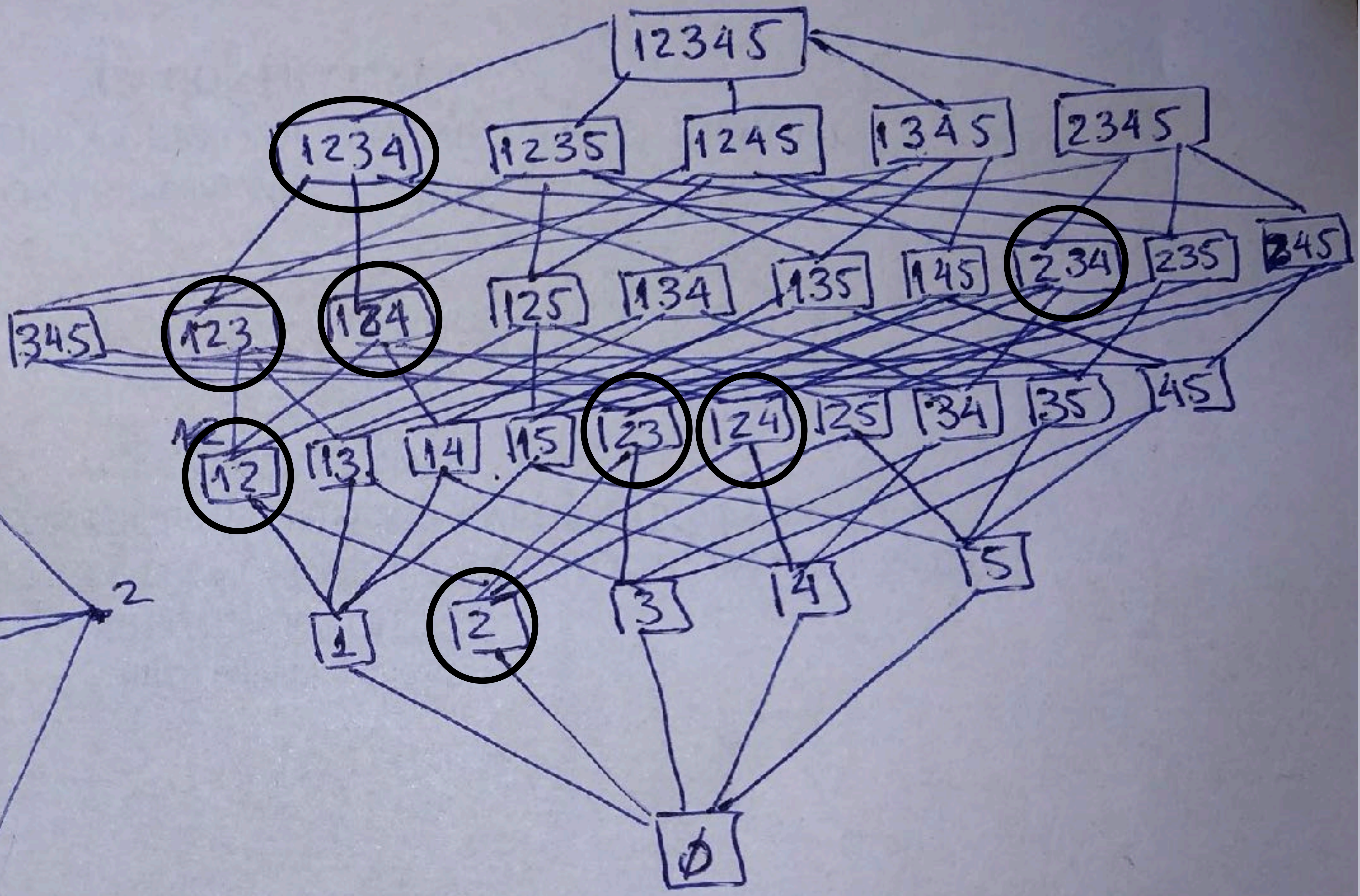


Ejemplo 3:



$P = \Delta_4$

(Diagrama de Schegel)



Observación:

Podemos representar a cada cara por el conjunto de sus vértices.

Teorema 3.4.

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo.

(i) $L(P)$ es una retícula graduada de longitud $\dim(P)+1$. La función de rango está dada por $r(F) := \dim(F)+1$.

(ii) Cada intervalo $[G,F]$ es la retícula de caras de un politopo de dimensión $\dim(F)-\dim(G)-1$, para cualquier $G \subseteq F$.

(iii) Propiedad del diamante: Cada intervalo de longitud 2 tiene exactamente 4 elementos.

(iv) El poset opuesto $L^{op}(P)$ es la retícula de caras de un politopo

(v) $L(P)$ es atómico y co-atómico.

Demostración:

(i) Notar que $L(P)$ es acotado, pues $\hat{0} = \emptyset$ y $\hat{1} = P$ son sus elementos mínimo y máximo.

Sean F, G dos caras de P. El conjunto $m(F,G)$ de todas las cotas inferiores comunes a F y G está dado por

$$m(F,G) = \{ H \in \mathcal{F} \mid H \subseteq F \wedge H \subseteq G \}.$$

Por el Lema 3.2.(ii), $F \cap G$ es una cara de P y luego $F \cap G \in m(F,G)$. Notar además que $\forall H \in m(F,G)$ se tiene $H \subseteq F \cap G$.

Luego, $F \cap G$ es el único elemento maximal de $m(F,G)$ y por tanto $F \wedge G = F \cap G$.

$\Rightarrow$ $L(P)$ es una retícula (la existencia de $F \vee G$ se sigue de la existencia de $F \wedge G$ y que $L(P)$ es acotado).

Demostraremos después que $L(P)$ es graduada.

(ii) Sean $F, G \in L(P)$, con $G \subseteq F$.

Notar que del Lema 3.2 (iii) conocemos que F es un polítopo y sus caras son exactamente las caras de P contenidas en F, es decir, $L(F) = [\emptyset; F]$, y $\dim(F) = \dim(F) - \dim(\emptyset) - 1$

Por lo tanto, si $G = \emptyset$, la afirmación es verdadera.

Si $G \neq \emptyset$, entonces G contiene al menos un vértice $v \in \mathrm{vert}(P)$.

Considerar la figura de vértice F/v. Del Lema 3.3. conocemos que existe una biyección entre las caras de F que contienen a v de dimensión k y las caras de F/v de dimensión $k-1$, para $k \in \{0, 1, \ldots, \dim(F)\}$.

Luego, $[\{v\}; F] = L(F/v)$.

Además, $\dim(F/v) = \dim(F) - 1 = \dim(F) - \dim(\{v\}) - 1$.

Si $G = \{v\}$, esto completa la demostración de que $[G;F]$ es la retícula de caras de un politopo.

Caso contrario, la imagen de G respecto a la biyección del Lema 3.3 es una cara $G^{(1)}$ de F/v con dimensión igual a $\dim(G) - 1$. Hacemos $F^{(1)} := F/v$ y aplicamos nuevamente la construcción anterior.

En un número finito de pasos $\ell \in \mathbb{N}$ encontramos un politopo $F^{(\ell)}$ tal que $L(F^{(\ell)}) = [G;F]$, y además $\dim(F^{(\ell)}) = \dim(F) - \ell$

$$= \dim(F) - \dim(G) - 1$$

(ib) Sean $G, F \in L(P)$ tales que $G \subsetneq F$. Del Lema 3.2. (iv) conocemos que $G = P \cap \operatorname{aff}(G)$ y $F = P \cap \operatorname{aff}(F)$. Luego

$$P \cap \operatorname{aff}(G) \subset P \cap \operatorname{aff}(F)$$
$$\Rightarrow \operatorname{aff}(G) \subset \operatorname{aff}(F).$$
$$\Rightarrow \dim(\operatorname{aff}(G)) < \dim(\operatorname{aff}(F))$$
$$\Rightarrow \dim(G) < \dim(F).$$

Supongamos que $\dim(G) \leq \dim(F) - 2$. De la parte (ii) conocemos que $[G;F]$ es la retícula de caras de un politopo con dimensión mayor o igual a 1 (¿Por qué?).

Por lo tanto, existe $H \in \mathcal{F}$ t.q. $G \subset H \subset F$.

Repitiendo este razonamiento, es posible construir una cadena

$$F_0 = G \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k = F$$

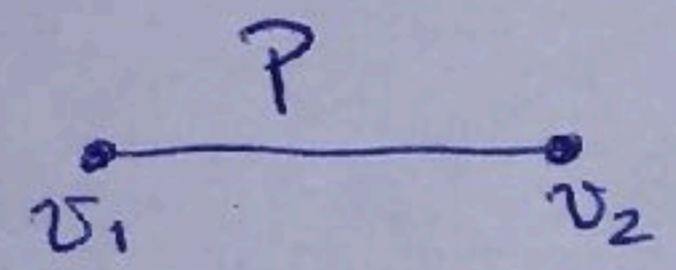
tal que $\dim(F_i) = \dim(F_{i-1}) + 1$, $\forall\, i \in \{1, \dots, k\}$

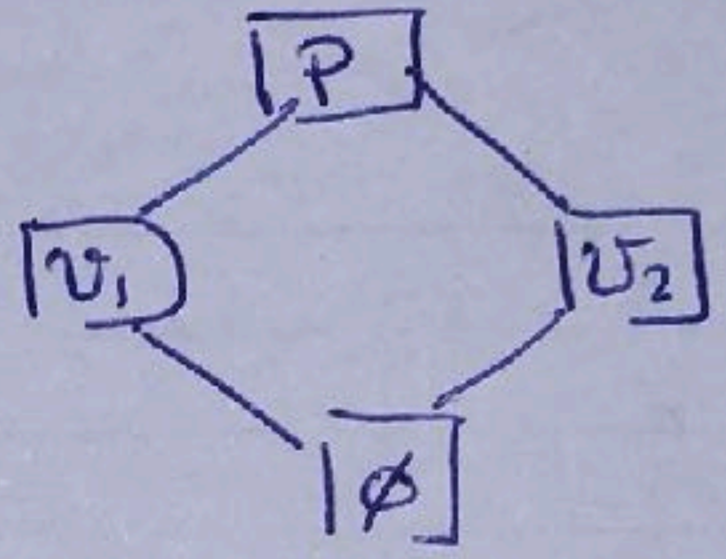
Esta cadena es maximal y su longitud es $k = \dim(F) - \dim(G)$.

Luego, los intervalos de la forma $[\emptyset; F]$ admiten cadenas maximales de longitud $r(F) := \dim(F) + 1$.

Además, $r(L(P)) = r(P) = \dim(P) + 1$.

(iii) Se sigue de (ii), pues en este caso $\dim(F) - \dim(G) - 1 = 2 - 1 = 1$ y por tanto $[G;F]$ es la retícula de caras de un segmento.





(iv) (Se demostrará en la siguiente sección)

(v) <u>$L(P)$ es atómica:</u>

Sea $F \in L(P)$ una cara de P. Del Lema 3.2 (i) conocemos que $\operatorname{vert}(F) = \operatorname{vert}(P) \cap F$. Denotemos a este conjunto por $\{v_1, \dots, v_k\}$. Observar que $\{v_i\} \subseteq F$ se cumple $\forall\, i \in \{1, \dots, k\}$.

Por otro lado, del Lema 3.1. (i) concluimos que

$$F = \operatorname{conv}(\operatorname{vert}(F))$$

Es decir, F es el conjunto convexo más pequeño que contiene a $\operatorname{vert}(F)$, y por lo tanto es la cara más pequeña que contiene a $\operatorname{vert}(F)$.

Si definimos

$$M(v_1, \dots, v_k) := \{ H \in \mathcal{F} \mid \{v_i\} \subseteq H, \ \forall i \in \{1, \dots, k\} \}$$

se tiene que $F \in M(v_1, \dots, v_k)$ y además $F \subseteq H$, $\forall H \in M(v_1, \dots, v_k)$. Luego,

$$F = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_k .$$

<u>$L(P)$ es coatómica:</u> De (iv) conocemos que $L^{op}(P)$ es la retícula de caras de un poliedro. Por lo tanto, $L^{op}(P)$ es atómica y de aquí se sigue que $L(P)$ es coatómica.

Observaciones:

(i) Dos politopos P y Q son combinatoriamente equivalentes entre sí, $P \simeq Q$, si y sólo si $L(P)$ y $L(Q)$ son isomorfos.

(ii) $\forall\ F, G \in \mathcal{F}$: $F \subset G \iff \mathrm{vert}(F) \subset \mathrm{vert}(G)$

Por lo tanto, es posible sustituir a las caras en $L(P)$ por sus conjuntos de vértices.

Verifiquemos esta identidad:

$$\mathrm{vert}(F) \subset \mathrm{vert}(G) \Rightarrow \mathrm{conv}(\mathrm{vert}(F)) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{vert}(G))$$

$$\underset{\text{Lema } 3.1.(i)}{\Longrightarrow} F \subset G$$

$$F \subset G \Rightarrow \forall v \in \mathrm{vert}(F): \quad v \in \mathrm{vert}(P) \cap F \quad (\text{Lema } 3.2(i))$$

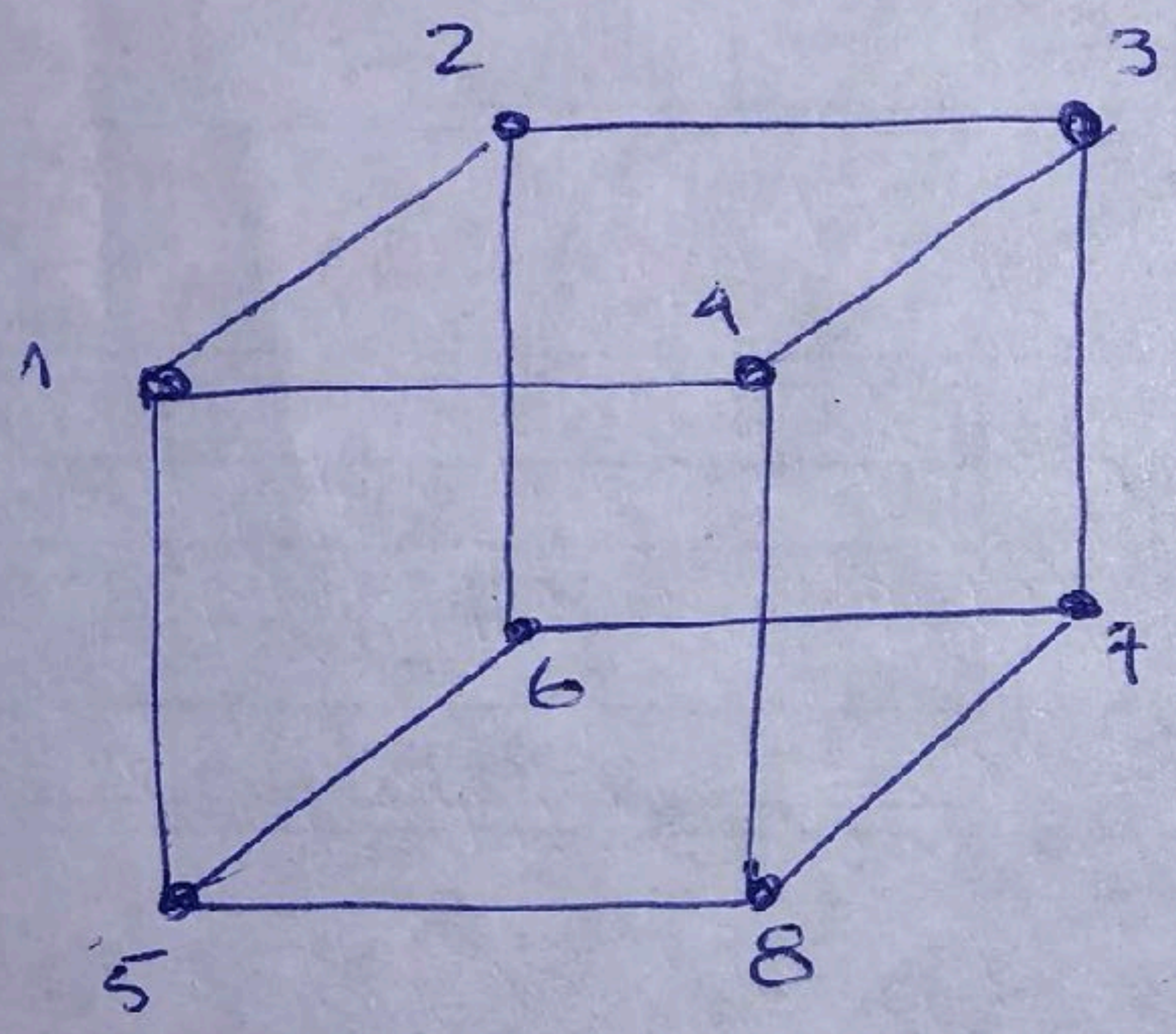
$$\Rightarrow v \in \mathrm{vert}(P) \cap G$$

$$\Rightarrow v \in \mathrm{vert}(G) \quad (\text{Lema } 3.2(i))$$

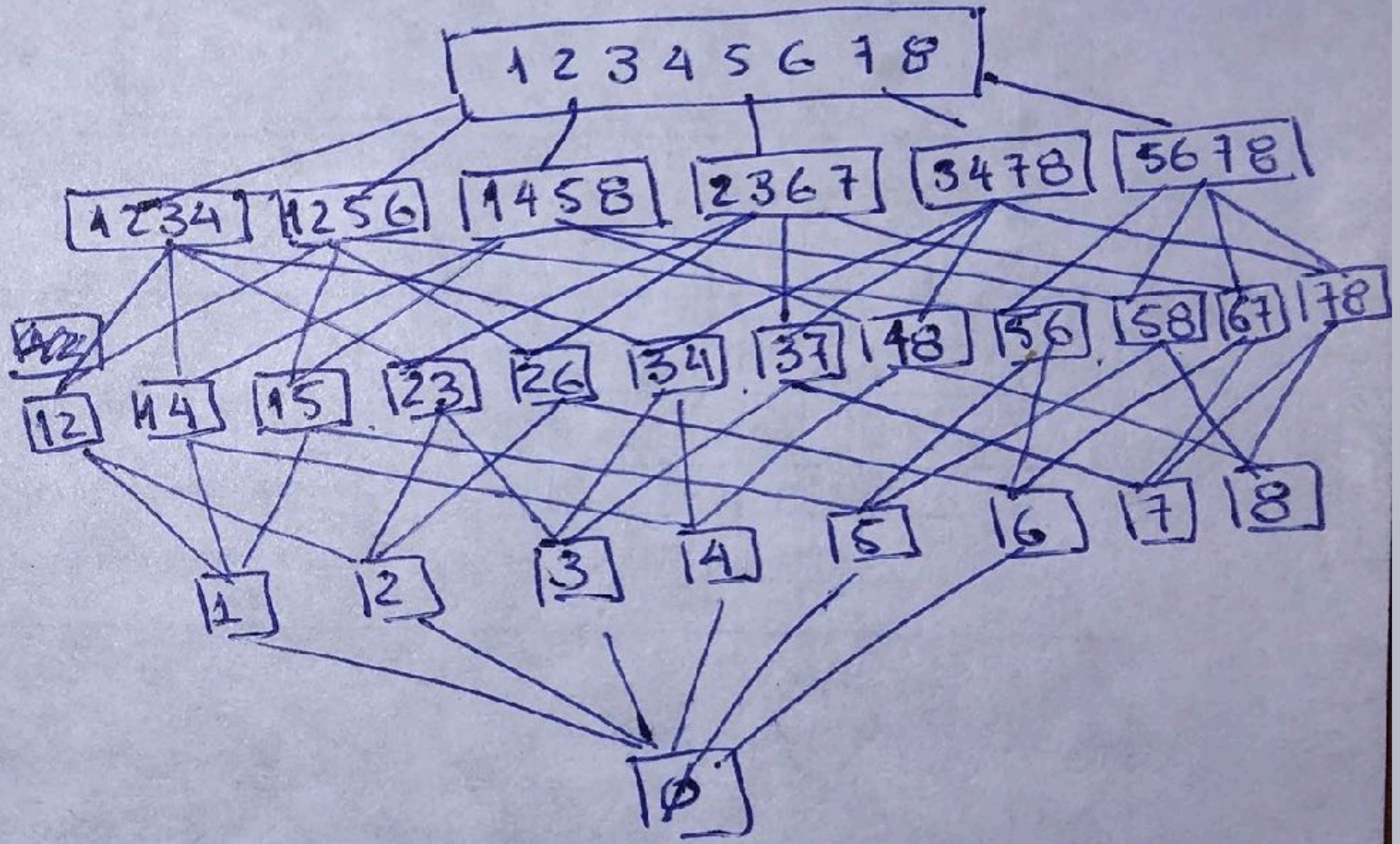
$$\Rightarrow \mathrm{vert}(F) \subset \mathrm{vert}(G)$$

Ejemplo 1:

Retícula de caras de un cubo de dimensión 3

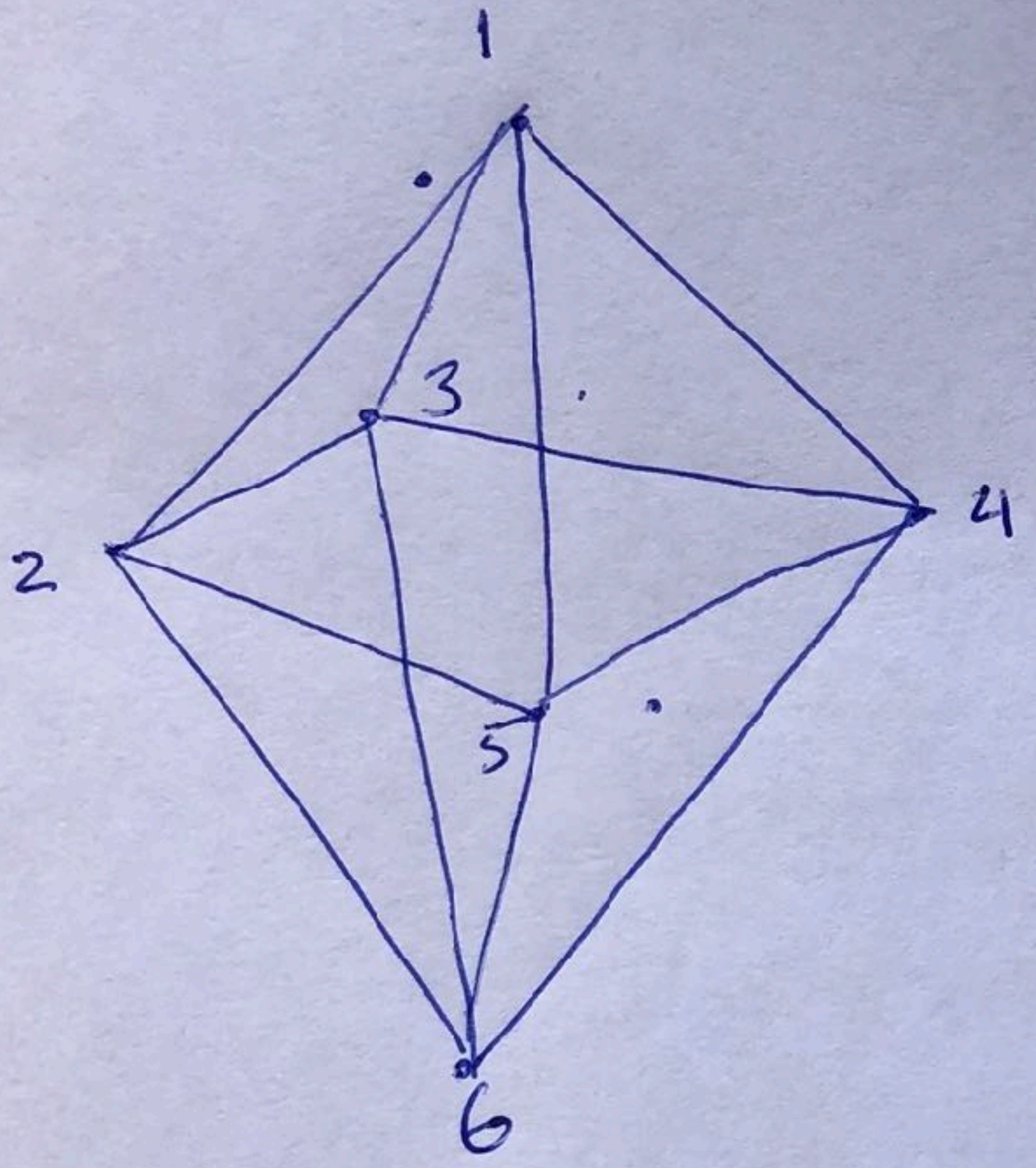


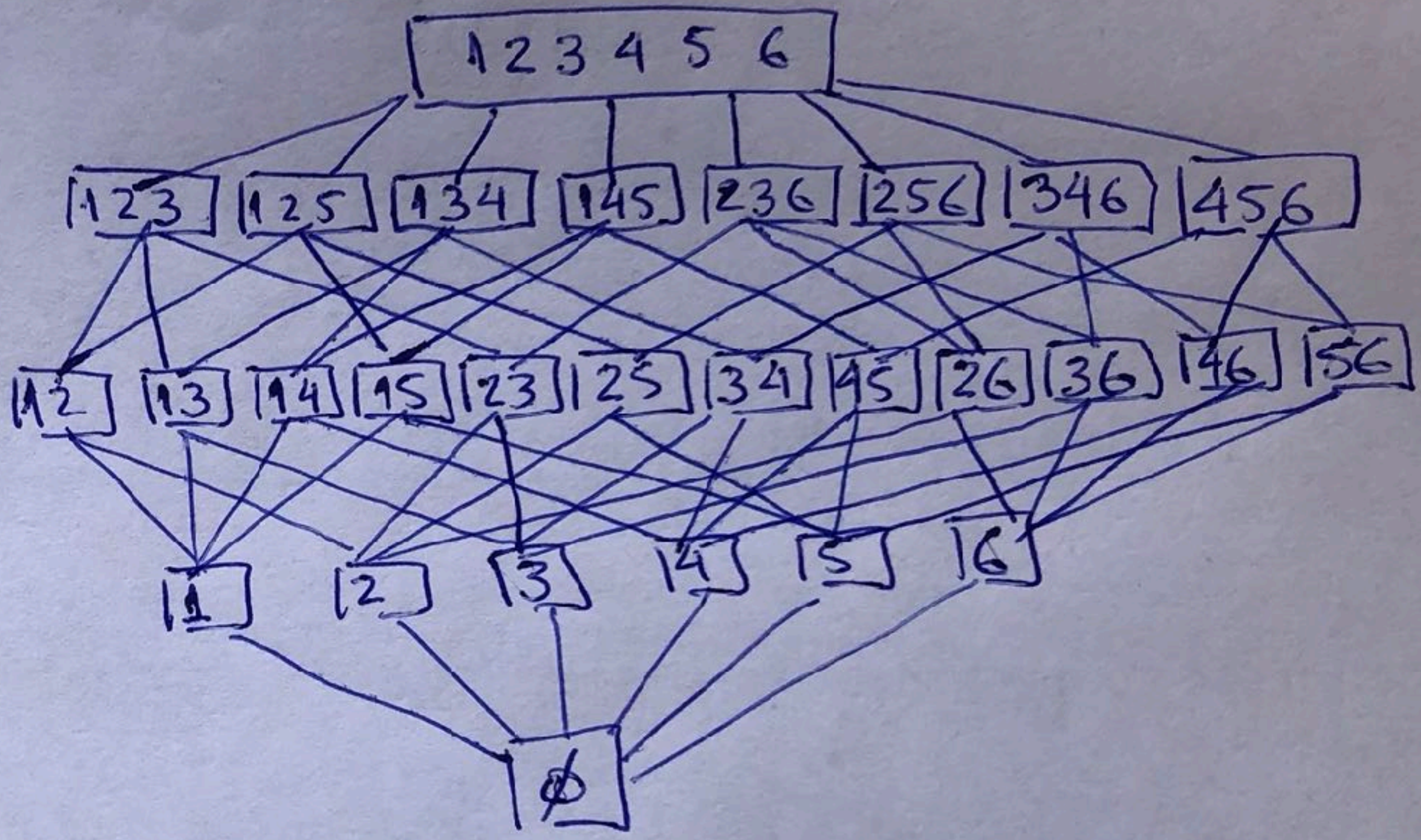
P



Ejemplo 2:

Retícula de caras de un octaedro de dimensión 3





Ejercicios

1) Construir una retícula que satisfaga todas las propiedades del Teorema 3.4, pero que no sea la retícula de caras de un polítopo.

2) Suponer que un polítopo P tiene 5 vértices 1, …, 5 y cinco facetas, identificadas por sus conjuntos de vértices {1,2,3,4}, {1,4,5}, {1,2,5}, {2,3,5} y {3,4,5}. Reconstruir la retícula de caras de P y determinar de qué polítopo se trata.

3) Demostrar que la retícula de caras de un polítopo puede reconstruirse si se conocen las incidencias de vértices y facetas, es decir, si se conoce para cada faceta el conjunto de vértices de la misma.

4) Demostrar que si F y G son dos espacios afines con $F \subset G$ (inclusión estricta), entonces $\dim(F) < \dim(G)$.