2.3. Lema de Farkas

Recapitulación: Teorema de la alternativa de Fredholm:

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$. Exactamente una de las dos proposiciones es verdadera:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^d \, : \, Ax = b$

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^m \, : \, y^T A = 0^T, y^T b \neq 0$

"Un sistema de ecuaciones lineales *no admite una solución* si y solamente si es *inconsistente*."

Ejemplo:

Considerar del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ \phantom{x_1 - {}} x_1 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b, \quad \text{con} \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notar que para el vector de multiplicadores

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se cumple que:

$$y^T A = (0 \quad 0) \qquad\qquad y^T b = -1$$

Es decir, toda solución del sistema original debe satisfacer $0x_1 + 0x_2 = -1$, luego el sistema no tiene solución.

Teorema 2.10. Lema de Farkas (I):

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$. Exactamente una de las dos proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^d \,:\, Ax \leq b$

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^m \,:\, y \geq 0, y^T A = 0^T, y^T b < 0$

"Un sistema de desigualdades lineales *no admite una solución* si y solamente si es *inconsistente*."

Demostración:

- Supongamos que (i) y (ii) son verdaderos a la vez. Entonces

$$0 = 0^T x = y^T A x \leq y^T b < 0 \quad \lightning$$

y se obtiene una contradicción.

- Ahora, supongamos que (i) es falsa. Es decir, no existe $x \in \mathbb{R}^d$ t.q. $Ax \leq b$.

Sean $P := P(A, b)$. y $Q := P(\hat{A}, 0)$ con $\hat{A} := (-b \,\vdots\, A) \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$

(Asumimos que las variables del sistema $Ax \leq b$ son $x_1, \dots, x_d$ y que las variables del sistema $\hat{A}\hat{x} \leq 0$ son $x_0, x_1, \dots, x_d$).

Notar que "(i) es falsa" equivale a decir:

$$\underset{\text{tiene solución}}{Ax \leq b \text{ no}} \iff P = \emptyset \iff Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_0 \leq 0\}$$

↑ (Ejercicio!)

Sea $\hat{Q} := \mathrm{elim}_d(\mathrm{elim}_{d-1}(\dots \mathrm{elim}_2(\mathrm{elim}_1(Q))\dots))$

De $Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_0 \leq 0\}$ se sigue $\hat{Q} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_0 \leq 0\}$.

Por otra parte, observar que $\hat{Q}$ es un $\mathcal{H}$-cono $P(B,0) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$, donde

$$B := \underbrace{W^d \cdot W^{d-1} \cdot \dots \cdot W^2 \cdot W^1}_{=W} \cdot \hat{A}$$

y cada matriz W^i corresponde a las "operaciones de fila" de la i-ésima aplicación del método de Fourier - Motzkin para calcular $\mathrm{elim}_i(\dots \mathrm{elim}_1(Q)\dots)$. Conocemos que cada fila de W^i tiene una o dos entradas positivas y el resto nulas. Por lo tanto, W tiene únicamente elementos no negativos. Luego,

$$\hat{Q} = P(B,0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_0 \leq 0\} \quad (*)$$

$$\overset{\shortparallel}{W \cdot \hat{A}}, \text{ con } W \geq 0$$

Notar además que el sistema $Bx \leq 0$ solamente contiene la variable x_0. Es decir, cada desigualdad de este sistema tiene la forma

$$b_{i0} x_0 \leq 0 \ , \ \forall i = 1, \ldots, \hat{m}$$

con $b_{i0} \in \mathbb{R}$.

Para que se cumpla $(*)$, debe existir al menos una desigualdad en el sistema con $b_{i0} > 0$. Sea $\hat{y}^i$ la i-ésima fila de W, correspondiente a esta desigualdad.

Tenemos que: $\hat{y}^i \in \mathbb{R}^m$, $\hat{y}^i \geq 0$, pues $W \geq 0$, y además W tiene m columnas

$$(\hat{y}^i)^T \cdot \hat{A} = (b_{i0}, 0, \ldots, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\hat{y}^i)^T (-b \mid A) = (b_{i0} \mid 0^T)$$

$$\Leftrightarrow (\hat{y}^i)^T \cdot b = -b_{i0} < 0 \ \wedge \ (\hat{y}^i)^T \cdot A = 0^T$$

Eligiendo $y = \hat{y}^i$ se sigue entonces que (ii) es verdadera.

Teorema 2.11. Lema de Farkas (II):

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times d}, b \in \mathbb{R}^m$. Exactamente una de las dos proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^d \,:\, x \geq 0, Ax = b$

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^m \,:\, y^T A \geq 0^T, y^T b < 0$

Demostración: Ejercicio.

Teorema 2.12. Lema de Farkas (III):

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m, a_0 \in \mathbb{R}^d$ y $b_0 \in \mathbb{R}$. La desigualdad $a_0^T x \leq b_0$ se satisface para toda solución del sistema $Ax \leq b$, si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes:

(i) $\exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ y \geq 0, y^T A = a_0^T, y^T b \leq b_0$

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ y \geq 0, y^T A = 0^T, y^T b < 0$

"Toda desigualdad válida para el poliedro $P(A, b)$ se obtiene como combinación no negativa de las desigualdades del sistema $Ax \leq b$." (Si el poliedro es no vacío).

Demostración:

Sea $P := P(A, b)$. Consideramos dos casos posibles:

Caso I: $P = \emptyset$:

En este caso, el sistema $Ax \leq b$ no tiene solución y $a_0^T x \leq b_0$ es trivialmente válida para todo $x \in P$. Además, (ii) es verdadera por el Lema de Farkas I.

Caso II: $P \neq \emptyset$

En este caso, (ii) es falsa por el Lema de Farkas I. Por lo tanto, resta por demostrar:

$a_0^T x \leq b_0$ se cumple para todo $x \in P$ $\iff$ $\exists\, y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0,$ $y^T A = a_0^T \wedge y^T b \leq b_0$

[*]

Notar primero que si $y \in \mathbb{R}^m_+$, $y^T A = a_0^T$ $\wedge$ $y^T b \leq b_0$, entonces para todo $x \in P$ se tiene

$$Ax \leq b \iff \underbrace{y^T A}_{= a_0^T} x \leq y^T b$$

$$\iff a_0^T x \leq y^T b \leq b_0$$

Supongamos ahora que no existe $y \in \mathbb{R}^m$ con las propiedades señaladas, es decir, que el sistema

$$\begin{cases} y^T A = a_0^T \\ y^T b \leq b_0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

no tiene solución. Esto equivale a decir que el siguiente sistema en las variables $y \in \mathbb{R}^m$ y $\beta \in \mathbb{R}$ no tiene solución:

$$\begin{cases} (y^T \ \beta)\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_0^T \ b_0) \\ y \geq 0, \quad \beta \geq 0 \end{cases}$$

Con el Lema de Farkas II, concluimos entonces que existen $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0 \quad \wedge \quad (a_0^T \ b_0)\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \alpha \end{pmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\bar{x} \geq -\alpha b \\ \alpha \geq 0 \\ a_0^T \bar{x} < -\alpha b_0 \end{cases}$$

Supongamos que $\alpha = 0$:

$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ t.q $A\bar{x} \geq 0$, $a_0^T \bar{x} < 0$.

Sea $x_0 \in P$. Notar que

$$x_t := x_0 - t\bar{x} \in P \quad \forall\, t \geq 0$$

pues

$$Ax_t = Ax_0 - t \cdot \underbrace{A\bar{x}}_{\geq 0} \leq Ax_0 \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \in P}}{\leq} b$$

Sin embargo, $a_0^T x_t = a_0^T x_0 - t \underbrace{a_0^T \bar{x}}_{<0} > b_0$ para t suficientemente grande

$\Rightarrow \exists\, t \geq 0$ t.q. $x_t \in P \wedge a_0^T x_t > b_0$

$\Rightarrow a_0^T x \leq b_0$ no es válida $\forall\, x \in P$.

Supongamos que $\alpha > 0$: Sea $\hat{x} := -\frac{1}{\alpha}\bar{x}$. Notar que:

- $A\hat{x} = -\frac{1}{\alpha} A\bar{x} \leq -\frac{1}{\alpha}(\alpha b) = b \Rightarrow \hat{x} \in P$
- $a_0^T \hat{x} = -\frac{1}{\alpha} a_0^T \bar{x} > -\frac{1}{\alpha}(-\alpha b_0) = b_0 \Rightarrow a_0^T \hat{x} > b_0$

$\Rightarrow a_0^T x \leq b_0$ no es válida $\forall\, x \in P$.

Teorema 2.13. Lema de Farkas (IV):

Sean $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^d$. Exactamente una de las dos proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^k \; : \; \lambda \geq 0, \mathbf{1}^T\lambda = 1, t \geq 0, \; \hat{x} = V\lambda + Yt$

(ii) $\exists a_0 \in \mathbb{R}^d, b_0 \in \mathbb{R} \; : \; a_0^T V \leq b_0 \mathbf{1}^T, a_0^T Y \leq 0^T, a_0^T \hat{x} > b_0$

Corolario: (Teorema de separación)

Sean $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro y $\hat{x} \in \mathbb{R}^d$. Si $\hat{x} \notin P$, entonces existe un hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^d : a_0^T x = b_0\}$ que separa $\hat{x}$ de P, es decir:

$$a_0^T x \leq b_0, \forall x \in P, \quad \text{pero} \quad a_0^T \hat{x} > b_0 .$$

Demostración:

Suponer que (i) es verdadera. Sean $a_0 \in \mathbb{R}^d$, $b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_0^T V \leq b_0 \mathbf{1}^T$ y $a_0^T Y \leq 0^T$. Se tiene que:

$$a_0^T \hat{x} = a_0^T (V\lambda + Yt) = a_0^T V\lambda + a_0^T Yt \underset{\lambda \geq 0,\, t \geq 0}{\leq} b_0 \mathbf{1}^T \lambda = b_0,$$

Luego, (ii) es falsa.

Suponer ahora que (i) es falsa. Esto equivale a decir que el siguiente sistema de ecuaciones en variables no negativas no tiene solución:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

El Lema de Farkas (II) implica la existencia de $w_0 \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$\begin{pmatrix} w_0 & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} w_0 & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{pmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} w_0 \mathbf{1}^T + w^T V \geq \mathbf{0}^T \\ w^T Y \geq \mathbf{0}^T \\ w_0 + w^T \hat{x} < 0 \end{cases}$$

Eligiendo $a_0 = -w$ y $b_0 = w_0$ se concluye que (ii) es verdadera.

Ejercicios:

1) Empleando el Teorema 2.10 (Lema de Farkas I), demostrar el Teorema 2.11 (Lema de Farkas II)

2) En la demostración del Teorema 2.10, probar que:

$$P = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Q \subset \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ x_0 \leq 0\}$$

3) Demostrar el Corolario del Teorema 2.13 (Lema de Farkas IV).