CAP. III: CARAS DE POLÍTOPOS

3.1. Vértices, caras y facetas

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo. Decimos que la desigualdad $a^T x \leq b_0$ es válida para P, si se satisface para todo $x \in P$.

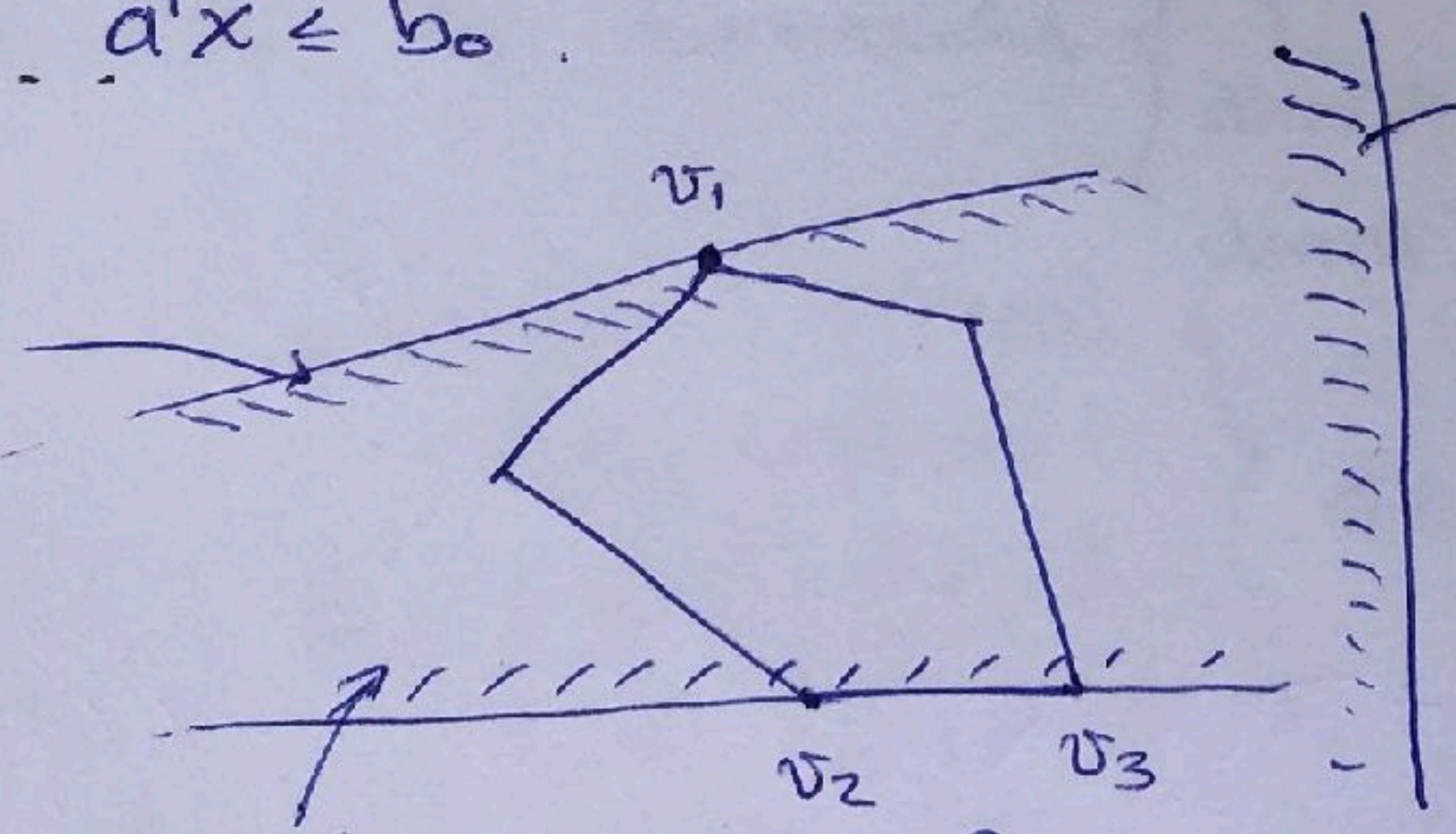
En este caso, el conjunto

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = a_0\}$$

es la cara de P asociada a (o "inducida por") la desigualdad $a^T x \leq b_0$.

$a_1^T x \leq b_1$

$F_1 = \{v_1\}$



$a_0^T x \leq b_0$

$F_0 = \emptyset$

$0^T x \leq 0$

$F_3 = P$

$a_2^T x \leq b_2$, $F_2 = [v_2; v_3]$

- Los conjuntos $\emptyset$ y P son siempre caras de P.

- Una cara F de P tal que $F \subset P$ se llama cara propia de P.

- La dimensión de una cara $F \subseteq P$ está dada por:

$$\dim(F) := \dim(\mathrm{aff}(F))$$

- Las caras de dimensión $\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ \dim(P)-2 \\ \dim(P)-1 \end{array} \right\}$ se denominan $\left\{ \begin{array}{l} \text{vértices [vertices]} \\ \text{aristas [edges]} \\ \text{crestas [ridges]} \\ \text{facetas [facets]} \end{array} \right\}$ de P.

Lema 3.1. (Propiedades básicas de caras I)

Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo y vert(P) el conjunto de todos los vértices de P.

(i) P es la envolvente convexa de sus vértices:

$$P = \mathrm{conv}(\mathrm{vert}(P))$$

(ii) Si V es un conjunto finito tal que $P = \mathrm{conv}(V)$, entonces $\mathrm{vert}(P) \subseteq V$.

("Todo conjunto finito que 'genera' a P, contiene a todos sus vértices.") [Ejercicio]

Demostración:

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo. Del Capítulo 2 conocemos que existe un conjunto finito de puntos (vectores columna) $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tal que $P = \text{conv}(V)$.

Notar que V contiene a un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $\text{conv}(V') = \text{conv}(V) = P$ y ningún elemento de V' puede expresarse como combinación convexa de los demás elementos de V' [Ejercicio].

Supongamos que $V' \in \mathbb{R}^{d \times n'}$ y sean $v_i \in V'$, $\hat{V} := V' \setminus \{v_i\}$, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{d \times (n'-1)}$. Tenemos que:

$$v_i \notin \operatorname{conv}(\hat{V}) \iff \nexists\, \alpha \in \mathbb{R}^{n'-1} : \alpha \geq 0,\ \mathbb{1}^T \alpha = 1,\ v_i = \hat{V} \cdot \alpha$$

$$\underset{\substack{\text{Lema Farkas} \\ \text{II}}}{\iff} \nexists\, \alpha \in \mathbb{R}^{n'-1},\ \alpha \geq 0 : \begin{pmatrix} \mathbb{1}^T \\ \hat{V} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Lema Farkas} \\ \text{II}}}{\iff} \exists\, \hat{b} \in \mathbb{R},\ \hat{a} \in \mathbb{R}^d : (\hat{b}\ \ \hat{a}^T) \begin{pmatrix} \mathbb{1}^T \\ \hat{V} \end{pmatrix} \geq 0^T$$

$$(\hat{b}\ \ \hat{a}^T) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix} < 0$$

$$\iff \exists\, \hat{a} \in \mathbb{R}^d,\ \hat{b} \in \mathbb{R} : \hat{a}^T \hat{V} \geq -\hat{b}\mathbb{1}^T,\ \hat{a}^T v_i < -\hat{b}$$

Eligiendo $a := -\hat{a} \in \mathbb{R}^d$ y $b := a^T v_i \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$a^T \hat{V} \leq +\hat{b}\,\mathbb{1}^T < b\,\mathbb{1}^T$$

$$\iff a^T v_j < b,\ \forall\, v_j \in V',\ v_j \neq v_i$$

Como $P = \operatorname{conv}(V')$, de aquí se sigue que:

$$a^T x < b \quad , \quad \forall x \in P \, , \, x \neq v_i \qquad \text{[Ejercicio]}$$

y además $a^T v_i = b$. Luego, la desigualdad $a^T x \leq b$ es válida para P y se satisface con igualdad para $\{v_i\}$

$$\Rightarrow v_i \in \operatorname{vert}(P).$$

$$\Rightarrow V' \subseteq \operatorname{vert}(P).$$

Como además $\operatorname{vert}(P) \subseteq P$,

$$V' \subseteq \operatorname{vert}(P) \subseteq P$$

$$P = \operatorname{conv}(V') \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{vert}(P)) \subseteq P$$

$$\Rightarrow \operatorname{conv}(V') = \operatorname{conv}(\operatorname{vert}(P)) = P$$

Con lo que se demuestra (i)

Lema 3.2. (Propiedades básicas de caras II)

Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polítopo, $V = \text{vert}(P)$ y F una cara de P

(i) F es un polítopo y $\text{vert}(F) = F \cap \text{vert}(P)$.

(ii) La intersección de dos caras de P es una cara de P

(iii) Las caras de F son las caras de P contenidas en F.

(iv) $F = P \cap \text{aff}(F)$.

Demostración:

Supongamos que F está asociada a la desigualdad válida $a^T x \leq b_0$, con $a \in \mathbb{R}^d$, $b_0 \in \mathbb{R}$. Sea además H el hiperplano

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_0\}$$

Es decir, $F = P \cap H$. (H es el hiperplano de soporte de F.)

(iv) Notar que de $F \subseteq H$ se sigue:

$$F \subseteq \operatorname{aff}(F) \subseteq H$$

$$\Rightarrow \quad P \cap F \subseteq P \cap \operatorname{aff}(F) \subseteq P \cap H = F$$

$$\Rightarrow \quad F = P \cap \operatorname{aff}(F).$$

(i) Como P es un politopo, P es acotado y además existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ tales que $P = P(A, b)$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F &= P \cap H \\ &= P(A,b) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b,\ a^T x \leq b_0,\ -a^T x \leq -b_0\} \\ &= P(\hat{A}, \hat{b}),\ \text{con } \hat{A} := \begin{pmatrix} A \\ a^T \\ -a^T \end{pmatrix},\ \hat{b} := \begin{pmatrix} b \\ b_0 \\ -b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además $F \subseteq P$ es acotada, luego F es un politopo.

Sea $V_0 := F \cap \text{vert}(P)$. De la definición de cara (y vértice) se sigue que $V_0 \subseteq \text{vert}(F)$. [Ejercicio]

Por otra parte, sea $\bar{x} \in F$. Conocemos que $a^T \bar{x} = b_0$ y $\bar{x} \in F \subseteq P = \text{conv}(V)$. Luego, $\bar{x} = V \cdot t$ para cierto $t \geq 0$, $\mathbb{1}^T t = 1$

$$b_0 = a^T \bar{x} = a^T V t \underset{\substack{\uparrow \\ a^T x \leq b_0 \\ \text{es válida para } P}}{\leq} b_0 \mathbb{1}^T \cdot t = b_0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (a^T v_i) t_i = \sum_{i=1}^{n} b_0 t_i \quad , \text{ con } V = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (a^T v_i - b_0) \cdot t_i = 0 \quad \text{y además: } \begin{matrix} t_i \geq 0 \\ a^T v_i - b_0 \leq 0 \end{matrix} , \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^T v_i - b_0) \cdot t_i = 0 \quad , \forall i = 1, \dots, n$$

Si $v_i \notin V_0$, $a^T v_i - b_0 < 0$ y entonces $t_i = 0$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sum_{v_i \in V} t_i v_i = \sum_{v_i \in V_0} t_i v_i$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in \operatorname{conv}(V_0)$$

$$\Rightarrow F \subseteq \operatorname{conv}(V_0) \subseteq F$$

$$\Rightarrow F = \operatorname{conv}(V_0)$$

Lema 3.1. (ii) aplicado al polítopo F

$$\Rightarrow \operatorname{vert}(F) \subseteq V_0$$

$$\Rightarrow \operatorname{vert}(F) = \operatorname{vert}(P) \cap F.$$

(ii) : [Ejercicio]

(iii) : Sea G una cara de P tal que $G \subseteq F$. De la definición de cara, puede verse que G es una cara de F. [Ejercicio].

Sea ahora G una cara de F. Vamos a demostrar que G es cara de P. (Asumimos $G \subset F$)

Por la definición de cara, existen $\bar{a} \in \mathbb{R}^d$, $\bar{b}_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \bar{a}^T x = \bar{b}_0 \ , & \forall x \in G \\ \bar{a}^T x < \bar{b}_0 \ , & \forall x \in F \setminus G \end{cases}$$

Además, recordar que $a^T x = b_0$, $\forall x \in F$. y $a^T x < b_0$, $\forall x \in P \setminus F$

Luego,

$$\begin{cases} (\bar{a}^T + \alpha a^T) x = (\bar{b}_0 + \alpha b_0) \ , & \forall x \in G \ , \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (\bar{a}^T + \alpha a^T) x < (\bar{b}_0 + \alpha b_0) \ , & \forall x \in F \setminus G \ , \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sean $V_0 = \mathrm{vert}(F) = V \cap F$ y $V_1 = V \setminus V_0$.

Elijamos $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\bar{\alpha} > -\frac{\bar{a}^T v - \bar{b}_0}{a^T v - b_0}, \quad \forall\, v \in V_1$$

(Notar que $a^T v - b_0 < 0$, $\forall\, v \in V_1$ [Por qué?])

Luego,

$$(a^T v - b_0)\bar{\alpha} < -(\bar{a}^T v - \bar{b}_0), \quad \forall\, v \in V_1$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a}^T + \bar{\alpha} a^T) v < \bar{b}_0 + \bar{\alpha} b_0, \quad \forall\, v \in V_1$$

$$\Rightarrow (\bar{a}^T + \bar{\alpha} a^T) x < \bar{b}_0 + \bar{\alpha} b_0, \quad \forall\, x \in P \setminus F \quad \text{[Ejercicio]}$$

Por tanto, $(\bar{a}^T + \bar{\alpha} a^T) x \leq (\bar{b}_0 + \bar{\alpha} b_0)$ es una desigualdad válida para P que se cumple con igualdad para los puntos de G

$\Rightarrow G$ es cara de P.

Definición: Figura de vértice [Vertex figure]

Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo, $V = \text{vert}(P)$, $v \in V$ y $a^T x \leq b_0$ una desigualdad válida para P que define $\{v\}$, es decir:

$$\{v\} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_0\}$$

Elegimos $b_1 < b_0$ t.q. $a^T x < b_1$ se cumpla $\forall\, x \in V \setminus \{v\}$. (Notar que $a^T v = b_0 > b_1$). La figura de vértice P/v asociada a v, es el politopo definido por:

$$P/v := P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_1\}$$

Obviamente, P/v depende de b_1. Sin embargo, su estructura combinatoria es independiente de este valor.

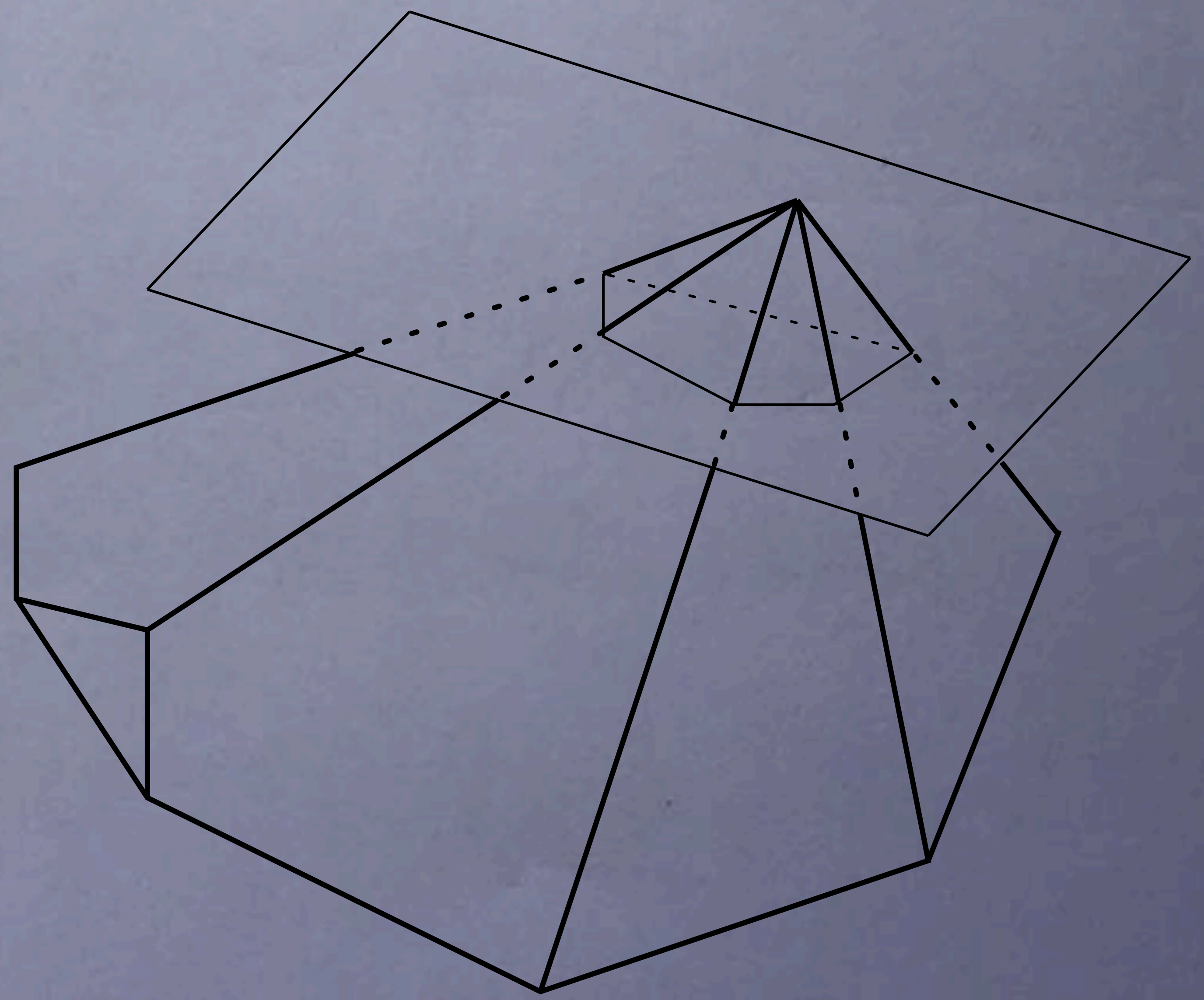


Figura tomada de Ziegler (2007), “Lectures on Polytopes”.

Lema 3.3.

Sean P un poliedro, $v \in \mathrm{vert}(P)$, $\mathcal{F}_v$ el conjunto de caras F de P tales que $v \in F$, y $\mathcal{F}_{P/v}$ el conjunto de caras de la figura de vértice P/v.

Entonces existe una biyección entre las caras de dimensión k en $\mathcal{F}_v$ y las caras de dimensión $k-1$ en $\mathcal{F}_{P/v}$, dada por:

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{F}_v &\longrightarrow \mathcal{F}_{P/v} \\ F &\longmapsto \pi(F) := F \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_1\} \end{aligned}$$

Además: $\pi^{-1}(F') = P \cap \mathrm{aff}(\{v\} \cup F')$.

(Nota: $\{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_1\}$ es el hiperplano utilizado para definir P/v)

Demostración:

Sea $H := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = b_1\}$ el hiperplano usado para definir P/v, es decir, $P/v = P \cap H$.

(1) Demostremos primero que π está bien definida, es decir, que $\pi(F) \in \mathcal{F}_{P/v}$, $\forall F \in \mathcal{F}_v$.

Sean $F \in \mathcal{F}_v$ y $c^T x \leq c_0$ la desigualdad válida para P que define F:

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\}.$$

Notar que

$$\begin{aligned}\pi(F) = F \cap H &= P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\} \cap H \\ &= (P \cap H) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\} \\ &= P/v \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\}\end{aligned}$$

Como $P/v \subseteq P$, entonces $c^T x \leq c_0$ es también una desigualdad válida para P/v. Luego, $\pi(F) \in \mathcal{F}_{P/v}$.

(2) Sea $\sigma : \mathcal{F}_{P/v} \longrightarrow \mathcal{F}_v$

$$F' \longmapsto \sigma(F') := P \cap \text{aff}(\{v\} \cup F')$$

Demostremos que σ está bien definida, es decir, que $\sigma(F') \in \mathcal{F}_v$, $\forall F' \in \mathcal{F}_{P/v}$.

Sea $F' \in \mathcal{F}_{P/v}$ asociada a la desigualdad $c^T x \leq c_0$ válida para P/v:

$$F' = P/v \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\}$$
$$= P \cap H \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\}.$$

Notar que $c^T x \leq c_0$ no necesariamente es una desigualdad válida para P. Por otra parte, conocemos que todo $x \in P/v$ satisface $a^T x = b_1$, luego

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha a^T x = \alpha b_1, & \forall x \in P/v,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ c^T x \leq c_0, & \forall x \in P/v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (c^T + \alpha a^T) x \leq (c_0 + \alpha b_1), \\ \forall x \in P/v, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \ [*] \end{array}$$

Sean

$$\bar{\alpha} := \frac{c_0 - c^T v}{b_0 - b_1} \quad , \text{ donde } b_0 = a^T v > b_1$$

y $d^T x \leq d_0$ la desigualdad obtenida de [*] al elegir $\alpha := \bar{\alpha}$.

Vamos a demostrar que esta desigualdad es válida para P y que se satisface con igualdad para $F' \cup \{v\}$.

Notar que si $x \in F'$, entonces $c^T x = c_0$ y de [*] se sigue que $d^T x = d_0$.

Por otra parte,

$$\bar{\alpha} = \frac{c_0 - c^T v}{b_0 - b_1} \iff (b_0 - b_1)\bar{\alpha} = c_0 - c^T v$$

$$\iff (a^T v - b_1)\bar{\alpha} = c_0 - c^T v$$

$$\iff (c^T + \bar{\alpha} a^T) v = c_0 + \bar{\alpha} b_1$$

$$\iff d^T v = d_0$$

$\Rightarrow d^T x = d_0, \ \forall \ x \in F' \cup \{v\}$.

Sea $v' \in \text{vert}(P) \setminus \{v\}$. Definimos

$$v'' := \frac{(a^T v - b_1) v' + (b_1 - a^T v') v}{a^T v - a^T v'}$$

Como $a^T v' < b_1 < a^T v$, tenemos que $\lambda_0 := \frac{a^T v - b_1}{a^T v - a^T v'} > 0$, $\lambda_1 := \frac{b_1 - a^T v'}{a^T v - a^T v'} > 0$ y $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$. Es decir, v'' es una combinación convexa de v y v'. Luego, $v'' \in P$, pues P es convexo.

Además,

$$a^T v'' = \frac{(\cancel{a^T v} - b_1) a^T v' + (b_1 - \cancel{a^T v'}) a^T v}{a^T v - a^T v'} = \frac{b_1 \cancel{(a^T v - a^T v')}}{\cancel{a^T v - a^T v'}}$$

y se sigue que $v'' \in H$

$$\Rightarrow v'' \in P \cap H = P/v$$

Pero entonces, de [*] concluimos que $d^T v'' \leq d_0$.

Por último, observar que, como v'' es combinación convexa de

v y v', tenemos que:

$$d^T v' \leq d^T v'' \leq d^T v = d_0 \qquad \text{[Por qué?]}$$

Es decir, $d^T x \leq d_0$ se satisface para todo $v' \in vert(P) \setminus \{v\}$ y se satisface con igualdad para v. Luego, esta desigualdad se satisface para todo $x \in conv(vert(P)) = P$.

Por lo tanto, $d^T x \leq d_0$ es una desigualdad válida para P y como tal está asociada a una cara F de P, definida por:

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid d^T x = d_0\}$$

Notar además que $(F' \cup \{v\}) \subset F$. Luego, $F \in \mathcal{F}_v$.

Para concluir, vamos a demostrar que $\sigma(F') = F$.

Observemos que

$$(F' \cup \{v\}) \subset F \quad \Rightarrow \quad aff(F' \cup \{v\}) \subseteq aff(F).$$

Supongamos que $\operatorname{aff}(F' \cup \{v\}) \neq \operatorname{aff}(F)$.

Esto implica que $\dim(\operatorname{aff}(F' \cup \{v\})) \leq \dim(\operatorname{aff}(F)) - 1$.

Además, como $v \notin \operatorname{aff}(F')$, conocemos que $\dim(F') = \dim(\operatorname{aff}(F' \cup \{v\})) - 1$.

$\Rightarrow \dim(F') \leq \dim(F) - 2$.

Por otra parte, de ① conocemos que $\hat{F} := F \cap H$ es una cara de P/v. Notar además que $\dim(\hat{F}) = \dim(F) - 1 > \dim(F')$.

Para todo $x \in \hat{F}$, como $x \in F$ se cumple $d^T x = d_0$.

Adicionalmente, como $x \in P/v$, se tiene que $a^T x = b_1$.

De [*] se sigue entonces que $c^T x = c_0$

Luego, $x \in P/v \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = c_0\} = F'$

y por tanto obtenemos: $\hat{F} \subseteq F'$, pero $\dim(\hat{F}) > \dim(F')$ $\lightning$

$\Rightarrow \operatorname{aff}(F' \cup \{v\}) = \operatorname{aff}(F)$

$\Rightarrow F = P \cap \operatorname{aff}(F) = P \cap \operatorname{aff}(F' \cup \{v\}) = \sigma(F')$.

③ Verifiquemos ahora que $\sigma(\pi(F)) = F$ se cumple para todo $F \in \mathcal{F}_v$.

$$\sigma(\pi(F)) = P \cap \operatorname{aff}(\{v\} \cup (F \cap H))$$

Notar que, como $F \in \mathcal{F}_v$, se tiene $v \in F$ y por tanto

$$\{v\} \cup (F \cap H) \subseteq F \implies \operatorname{aff}(\{v\} \cup (F \cap H)) \subseteq \operatorname{aff}(F).$$

Además,

$$\dim(\operatorname{aff}(\{v\} \cup (F \cap H))) \underset{v \notin \operatorname{aff}(F \cap H)}{=} \dim(\operatorname{aff}(F \cap H)) + 1 \underset{F \not\subseteq H}{=} [\dim(\operatorname{aff}(F)) - 1] + 1 = \dim(\operatorname{aff}(F))$$

$$\implies \operatorname{aff}(\{v\} \cup (F \cap H)) = \operatorname{aff}(F)$$

$$\implies \sigma(\pi(F)) = P \cap \operatorname{aff}(\{v\} \cup (F \cap H)) = P \cap \operatorname{aff}(F) \underset{\text{Lema 3.2 (iv)}}{=} F$$

④ Por último, verifiquemos que $\pi(\sigma(F')) = F'$ se cumple para todo $F' \in \mathcal{F}_{P/v}$

$$\pi(\sigma(F')) = [P \cap \operatorname{aff}(\{v\} \cup F')] \cap H$$

$$= (P \cap H) \cap (\operatorname{aff}(\{v\} \cup F') \cap H)$$

$$= P/v \cap (\operatorname{aff}(\{v\} \cup F') \cap H)$$

Pero, $F' \subset H$ y $v \notin H \Rightarrow \operatorname{aff}(\{v\} \cup F') \cap H = \operatorname{aff}(F')$

$$\Rightarrow \pi(\sigma(F')) = P/v \cap (\operatorname{aff}(\{v\} \cup F') \cap H) = P/v \cap \operatorname{aff}(F') \underset{\uparrow}{=} F'$$

Lema 3.2 (iv)

Ejercicios:

1) Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos. Demostrar que existe un subconjunto $V' \subseteq V$ con la propiedad de que conv(V') = conv(V) y que ningún elemento de V' puede escribirse como combinación convexa de sus demás elementos.

2) Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$ tales que $x_2 \in$ conv$(\{x_1, x_3\})$. Para $a \in \mathbb{R}^d$, si $a^T x_2 \leq a^T x_3$, demostrar que entonces $a^T x_1 \leq a^T x_2$.

3) Sean P un polítopo y F, G dos caras de P. Demostrar que $F \cap G$ es una cara de P.

4) Sean P un polítopo y F, G dos caras de P tales que $G \subseteq F$. Demostrar que G es una cara de F.

5) Sean P un polítopo y F, G dos caras de P tales que $G \subset F$. Demostrar que $\dim(G) < \dim(F)$.

6) Sean $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y P = conv(V). Suponer que para $a \in \mathbb{R}^d, b_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que $a^T v_1 = b_0$ y $a^T v_j < b_0, \forall j \in \{2, \ldots, n\}$. Demostrar que v_1 es un vértice de P.

7) Sean $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos y $W \subset V$. Definimos $P :=$ conv(V) y $F :=$ conv(W) . Suponer que existen $a \in \mathbb{R}^d, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a^T v = b_0, \forall v \in W$ y $a^T v < b_0, \forall v \in V \backslash W$. Demostrar que F es una cara de P.