Geometría Discreta
Luis M. Torres *Julio, 2025*

Ejercicios Capítulo 2

1. Sean $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y C el $\mathcal{V}$-cono definido por $C := \operatorname{cone}(Y)$. Determinar un sistema de desigualdades lineales en las variables x_1, x_2, t_1, t_2, asociado a un $\mathcal{H}$-cono $\hat{C} \subset \mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $C \cong \operatorname{proj}_{t_1}(\operatorname{proj}_{t_2}(\hat{C}))$. Aplicar el método de Fourier-Motzkin para eliminar las variables t_1 y t_2. de este sistema.

2. Sea $P := \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(Y) \subset \mathbb{R}^2$ un $\mathcal{V}$-poliedro, con

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   (a) Dibujar P.
   (b) Expresar el cono de homogeneización $C := \operatorname{homog}(P)$ en su forma $\mathcal{V}$.
   (c) Construir un $\mathcal{H}$-cono $\hat{C} \subset \mathbb{R}^6$, dado en las variables $x_0, x_1, x_2, t_1, t_2, t_3$ con la propiedad de que $C \cong \operatorname{proj}_{t_1}(\operatorname{proj}_{t_2}(\operatorname{proj}_{t_3}(\hat{C})))$.
   (d) Utilizar el método de Fourier-Motzkin para expresar C en la forma $\mathcal{H}$.
   (e) Expresar P en la forma $\mathcal{H}$.

3. Sean

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad P := \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(Y).$$

   (a) Encontrar un $\mathcal{H}$-poliedro $\hat{P} := \left\{ w := (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, t)^T \in \mathbb{R}^5 \ : \ \hat{A}w \leq \hat{b} \right\}$, con $\hat{A} \in \mathbb{R}^{M \times 5}$ y $\hat{b} \in \mathbb{R}^M$ tal que P sea congruente con la proyección de $\hat{P}$ en la dirección de los ejes coordenados correspondientes a las variables λ_1, λ_2 y t.
   (b) Utilizar el algoritmo de elimnación de Fourier-Motzkin para escribir a P en la forma $\mathcal{H}$.

4. Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

(a) Dibujar P.

(b) Expresar el cono de homogeneización $C := \operatorname{homog}(P)$ en su forma $\mathcal{H}$.

(c) Construir un $\mathcal{V}$-cono $\hat{C} \subset \mathbb{R}^5$, dado en las variables x_0, x_1, x_2, w_1, w_2 con la propiedad de que $C \cong \hat{C} \cap H_{w_1} \cap H_{w_2}$.

(d) Expresar C en la forma $\mathcal{V}$.

(e) Expresar P en la forma $\mathcal{V}$.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades lineales.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 0 \end{cases}$$

(a) Encontrar un conjunto finito de vectores $\hat{Y} \subset \mathbb{R}^6$ tal que el $\mathcal{V}$-cono generado por ellos $\hat{C} := \left\{(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3)^T \in \operatorname{cone}\left(\hat{Y}\right)\right\}$ satisfaga la propiedad:

$$C \cong \hat{C} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{3} \{w_i = 0\}\right).$$

(b) Calcular los vectores generadores de $\hat{C} \cap \{w_3 = 0\}$.

6. Sean

$$V := \begin{pmatrix} 40 & 24 & 12 & -12 & -30 & 2 \\ -30 & -24 & -6 & 12 & 30 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P := \operatorname{conv}(V) \subset \mathbb{R}^3.$$

Calcular un conjunto (matriz) V' tal que

$$P \cap \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = 0\right\} = \operatorname{conv}(V').$$

Dibujar la región $\operatorname{conv}(V')$.

7. Sean

$$V := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P := \operatorname{conv}(V) \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinar un poliedro $\hat{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \hat{A}x \leq \hat{b}\right\}$, con $d > 2$, que satisfaga la propiedad de que P sea congruente con el poliedro obtenido a partir de proyectar $\hat{P}$ sucesivamente en la dirección de algunos ejes coordenados. Escribir el sistema $\hat{A}x \leq \hat{b}$.

8. Demostrar la siguiente versión del Lema de Farkas: Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, exactamente uno de los dos enunciados siguientes es verdadero:

    1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax = b$, $x \geq \mathbf{0}$.
    2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq \mathbf{0}^T$, $y^T b < 0$.

9. Demostrar la siguiente versión del Lema de Farkas: Dados $A \in \mathbb{R}^{m_1\times d}, C \in \mathbb{R}^{m_2\times d}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $f \in \mathbb{R}^{m_2}$, exactamente uno de los dos enunciados siguientes es verdadero:

    1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax = b$, $Cx \geq f$.
    2. Existen $y \in \mathbb{R}^{m_1}$, $w \in \mathbb{R}^{m_2}$, $w \leq 0$ tales que $y^T A + w^T C = \mathbf{0}^T$, $y^T b + w^T f < 0$.

10. Formular y demostrar una versión del Lema de Farkas que caracterice cuándo un sistema de la forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$ tiene solución.

11. Usar el Lema de Farkas para demostrar el siguiente resultado.

    Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, uno y sólo uno de las dos enunciados siguientes es verdadero:

    1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax < 0$.
    2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ tal que $y^T A = 0$.

    Nota: Si w es un vector, usamos la notación $w < 0$ para decir que *cada una de las componentes* de w es estrictamente menor que cero. Observar que esto es equivalente a afirmar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ tal que $w \leq -\varepsilon\mathbf{1}$.

12. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{H}$-poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definimos

    $$C(P) := P\left(\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ -b & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

    Demostrar que:

    (a)
    $$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

    (b) $C(P) \subset H_0^+$, donde $H_0^+ := \left\{ \binom{x0}{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ x_0 \geq 0 \right\}$.

13. Sea $\hat{P} := P(\hat{A}, \hat{b}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un $\mathcal{H}$-poliedro, con $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ y $\hat{b} \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que
$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \hat{P} \right\}$$
es un $\mathcal{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$.

14. Sea $P := \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(Y) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{V}$-poliedro, con $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$. Definimos
$$C(P) := \operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$
Demostrar que:
$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

15. Sea $P := \operatorname{conv}(V) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{V}$-polítopo, con $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$. Definimos
$$C(P) := \operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ V \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$
Demostrar que:
$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

16. Sean $W \in \mathbb{R}^{(d+1)\times k}$ y $\hat{C} = \operatorname{cone}(W) \subset H_0^+$, donde $H_0^+ := \left\{ \binom{x0}{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, x_0 \geq 0 \right\}$. Demostrar que el conjunto:
$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \hat{C} \right\}$$
es un $\mathcal{V}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$.

17. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{H}$-poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definimos el $\mathcal{H}$-cono
$$Q := P((-b \;\; A), \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$
Demostrar que:
$$P = \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad Q \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, x_0 \leq 0 \right\},$$
donde x_0 designa a la primera componente de $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

18. Usando los resultados de los ejercicios anteriores, demostrar que el resultado del Teorema de Minkowski-Weyl para poliedros se obtiene como corolario del Teorema de Minkowski-Weyl para conos.

19. Demostrar que el Teorema de Minkowski-Weyl para polítopos se obtiene como corolario del Teorema de Minkowski-Weyl para poliedros.

20. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{H}$-poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que $\mathrm{lin}\,(P) = \{x \in R^d \,:\, Ax = 0\}$, es decir, que el espacio de linealidad de P es el espacio núcleo de A.

21. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro. Demostrar que si U es el complemento ortogonal de $\mathrm{lin}\,(P)$, entonces se cumple que $\mathrm{lin}\,(P \cap U) = \{\mathbf{0}\}$.

22. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro. Su cono de homogeneización está definido por $\mathrm{homog}\,(P) := C_1 + C_2$, con

$$C_1 := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, x \in P, \alpha \geq 0 \right\}, \qquad C_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \,:\, y \in \mathrm{rec}\,(P) \right\}.$$

   (a) Demostrar que C_1 es un cono convexo.
   (b) Demostrar que C_2 es un cono convexo. (Puede darse por conocido que $\mathrm{rec}\,(P)$ es un cono convexo).
   (c) Demostrar que la suma de Minkowski de dos conos convexos es un cono convexo, de donde se concluye que $\mathrm{homog}\,(P)$ es un cono convexo.

23. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo.

   (a) Demostrar que $\mathrm{rec}\,(P)$ es un cono convexo.
   (b) Demostrar que $\mathrm{homog}\,(P)$ es un cono convexo en $\mathbb{R}^{d+1}$.
   (c) Demostrar que

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,:\, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathrm{homog}\,(P) \right\}.$$

24. Sea $P := \mathrm{conv}\,(V) + \mathrm{cone}\,(Y) \subset \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{V}$-poliedro, con $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$. Demostrar que:

$$\mathrm{homog}\,(P) = \mathrm{cone} \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix}.$$

25. Empleando el Teorema de Carathéodory para conos, demostrar como corolario el Teorema de Carathéodory para polítopos:

    Sean $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Si $x \in \mathrm{conv}\,(V)$, entonces existe $V' \subset V$, con $|V'| \leq \dim(\mathrm{conv}\,(V)) + 1 = \mathrm{rg}\binom{\mathbf{1}^T}{V}$ tal que $x \in \mathrm{conv}\,(V')$.