3.5. Polítopos simples y simpliciales

Teorema 3.12. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polítopo de dimensión completa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) cada faceta de P es un simplex (es decir, P es simplicial)

(ii) cada cara propia de P es un simplex.

(iii) cada faceta tiene d vértices

(iv) cada cara de dimensión k, con $k \leq d-1$ tiene $k+1$ vértices

(v) cada intervalo $[\emptyset; F]$ en la retícula de caras $L(P)$, con $F \neq P$, es un poset booleano.

Teorema 3.13.: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo de dimensión completa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) cada figura de vértice de P es un simplex (es decir, P es simple)

(ii) cada figura de vértice iterada de P es un simplex

(iii) cada vértice está contenido en d facetas

(iv) cada cara de dimensión k, con $k \geq 0$, está contenida en $d-k$ facetas

(v) cada intervalo $[F; P]$ en la retícula de caras $L(P)$, con $F \neq \emptyset$, es un poset booleano.

Ejercicio: Usar polaridad para demostrar el Teorema 3.13 a partir del Teorema 3.12.

Corolario 3.14.

- Un politopo es simple ssi cualquier politopo combinatoriamente polar es simplicial.

- Un politopo es simplicial si y sólo si cualquier politopo combinatoriamente polar es simple.

Corolario 3.15.

Un politopo de dimensión d, con $d \geq 3$, es simple y simplicial si y sólo si es un simplex

Demostración

"$\Leftarrow$": Trivial

"$\Rightarrow$" Sea P un polítopo, con $\dim(P) = d \geq 3$, tal que P es simple y simplicial.

Sea v un vértice de P. Notar que la figura de vértice P/v es un simplex (P es simple) y tiene dimensión $d-1$. Es decir, P/v tiene d vértices, $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d\}$, cada uno de los cuales corresponde a una arista de P que conecta a v con otro vértice v_i, con $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Además, v está contenido en d facetas $F_1, \ldots, F_d$.

Notar que un conjunto cualquiera de $d-1$ vértices de $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d\}$ forma una faceta de P/v, la cual está asociada a una faceta F_i de P que contiene a v.

$$\Rightarrow \operatorname{vert}(F_i) \supset \{v, v_1, \ldots v_d\} \backslash \{v_i\}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Por otra parte, como P es simplicial, todas sus facetas son símplices:

$\Rightarrow F_i$ es un simplex, $\forall i \in \{1,\ldots,d\}$

$\Rightarrow$ vert$(F_i) = \{v, v_1, \ldots v_d\} \setminus \{v_i\}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,d\}$

Considerando la figura de vértice P/v_i, para cualquier $i \in \{1,\ldots,d\}$ se sigue además que los vértices $\{v_1, \ldots, v_d\}$ inducen también una faceta de P que es un simplex:

$\Rightarrow$ vert$(P) = \{v, v_1, \ldots, v_d\} \quad \wedge$ todo conjunto de d vértices induce una faceta

$\Rightarrow P$ es un simplex

Ejercicios

1) Demostrar el Teorema 3.13 a partir del Teorema 3.12, usando argumentos de polaridad.

2) Un polítopo se llama *autopolar* si es combinatoriamente equivalente a todo polítopo con el que sea combinatoriamente polar. Demostrar que el simplex Δ_d es autopolar para cualquier $d \leq 1$.

3) Demostrar que una pirámide construida sobre un polígono es autopolar. ¿Ocurre lo mismo con pirámides de dimensiones mayores?