CAP. II: POLÍTOPOS, POLIEDROS Y CONOS

2.1. Teorema de Minkowski-Weyl

Teorema 2.1: (Espacios vectoriales)

Sea $L \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que L es un (sub)espacio vectorial o lineal de $\mathbb{R}^d$ si se cumple una de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existen $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i, \text{ con } \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Leftrightarrow$ existe $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tal que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = V\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^n \right\} =: \operatorname{span}(V)$$

"envolvente lineal de V"

(ii) Existe $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; Ax = 0 \right\}$$

Teorema 2.2: (Espacios afines)

Sea $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que F es un (sub)espacio afín de $\mathbb{R}^d$ si se cumple una de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existen $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i, \text{ con } \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1 \right\}$$

$\Leftrightarrow$ existe $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ tal que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = V\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda^T \mathbf{1} = 1 \right\} =: \operatorname{aff}(V)$$

"envolvente afín de V"

(ii) Existen $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; Ax = b \right\}$$

Teorema 2.3. (Transformación entre representaciones)

Es posible transformar entre las formas (i) y (ii) de espacios vectoriales y afines de manera "eficiente" (por ejemplo, empleando el algoritmo de Gauss-Jordan).

Notación:

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, emplearemos $P(A, b)$ para denotar el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales $Ax \leq b$:

$$P(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Ax \leq b\}$$

ModeMat

Definición (conos poliedrales):

- Un $\mathscr{V}$-cono (poliedral) es la envolvente cónica de un conjunto finito de vectores:

  C es un $\mathscr{V}$-cono si existe $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$ tal que:

$$C = \text{cone}(Y) = \{Yt \ : \ t \in \mathbb{R}^k_+\}$$

- Un $\mathscr{H}$-cono (poliedral) es el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales homogéneas:

  C es un $\mathscr{H}$-cono si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ tal que:

$$C = P(A, \mathbf{0})$$

Definición (polítopos):

- Un $\mathscr{V}$-polítopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos:

  P es un $\mathscr{V}$-polítopo si existe $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tal que:

$$P = \mathrm{conv}(V) = \{V\lambda \; : \; \lambda \in \mathbb{R}^n_+, \; \mathbf{1}^T\lambda = 1\}$$

- Un $\mathscr{H}$-polítopo es el conjunto solución acotado de un sistema de desigualdades lineales:

  P es un $\mathscr{H}$-polítopo si existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

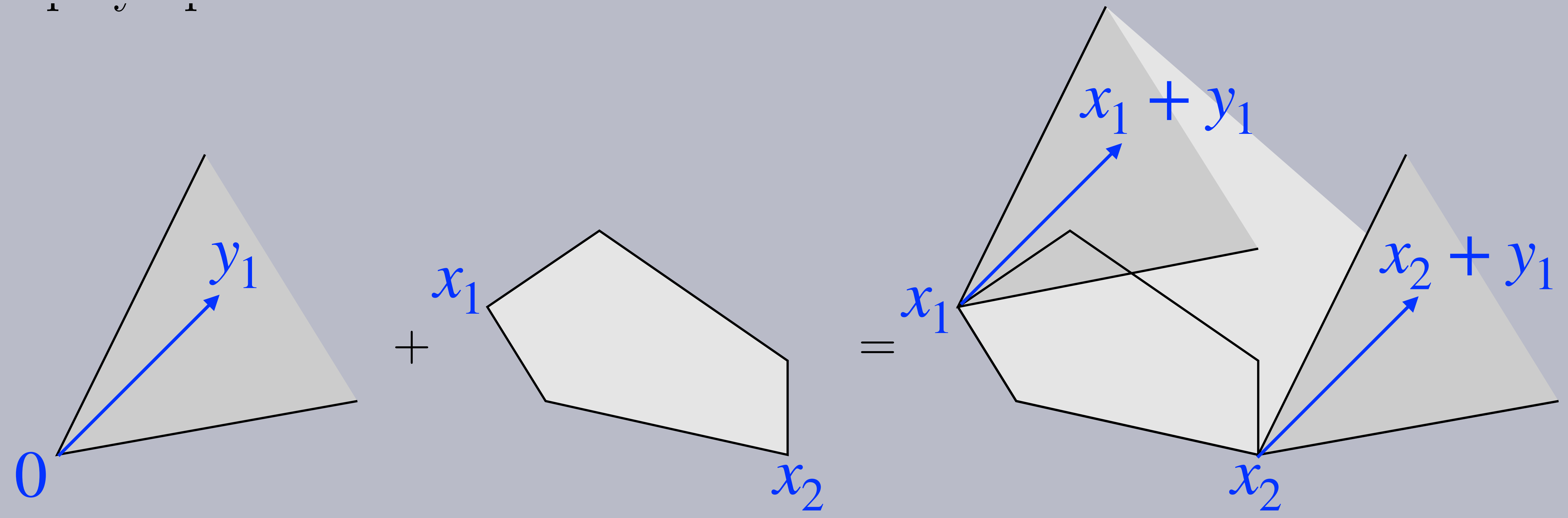
$$P = P(A, b)$$

  y además si P es acotado.

Soma de Minkowski

Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, su soma de Minkowski es el conjunto definido por

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$



Definición (poliedros):

- Un $\mathscr{V}$-poliedro es la suma de Minkowski de un $\mathscr{V}$-polítopo y un $\mathscr{V}$-cono:

  P es un $\mathscr{V}$-poliedro si existen $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$ tales que:

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) = \{V\lambda + Yt \;:\; \lambda \in \mathbb{R}^n_+,\, \mathbf{1}^T\lambda = 1, t \in \mathbb{R}^k_+\}$$

- Un $\mathscr{H}$-poliedro es el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales:

  P es un $\mathscr{H}$-poliedro si existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$P = P(A, b)\,.$$

Teorema 2.4: (Minkowski-Weyl para conos poliedrales)

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que C es un cono poliedral en $\mathbb{R}^d$ si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existe $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$ tal que:

$$C = \left\{y \in \mathbb{R}^d \ : \ y = Yt, \ \text{con } t \in \mathbb{R}^k_+\right\} =: \text{cone}(Y)$$

(ii) Existe $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ tal que:

$$C = P(A, \mathbf{0})$$

Es decir, todo $\mathscr{V}$-cono es un $\mathscr{H}$-cono, y viceversa.

Teorema 2.5: (Minkowski-Weyl para poliedros)

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que P es un poliedro en $\mathbb{R}^d$ si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existen $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$ tales que:

$$P = \left\{ V\lambda + Yt \;:\; \lambda \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{1}^T\lambda = 1,\ t \in \mathbb{R}^k_+ \right\} =: \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$$

(ii) Existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$P = P(A, b)$$

Es decir, todo $\mathscr{V}$-poliedro es un $\mathscr{H}$-poliedro, y viceversa.

Observación:

Sea $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(Y) \subseteq \mathbb{R}^d$. Notar que si Y contiene algún vector $\hat{y} \neq 0$, entonces, para cualquier $\hat{v} \in \mathrm{conv}(V)$, P contiene al rayo $\{\hat{v} + t\hat{y} \mid t \in \mathbb{R}_+\}$.

Luego, P es no acotado, excepto si $Y = \{0\}$ o $Y = \emptyset$.

En ambos casos, $\mathrm{cone}(Y) = \{0\}$ y $P = \mathrm{conv}(V)$.

$\Rightarrow$ Un $\mathcal{V}$-politopo es un $\mathcal{V}$-poliedro acotado

(Recordar que por definición un $\mathcal{H}$-politopo es un $\mathcal{H}$-poliedro acotado)

Teorema 2.6: (Minkowski-Weyl para polítopos)

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que P es un polítopo en $\mathbb{R}^d$ si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existe $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tal que:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x = V\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{1}^T\lambda = 1\right\} =: \operatorname{conv}(V)$$

(ii) Existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$P = P(A, b)$$

y además P es acotado.

Es decir, todo $\mathscr{V}$-polítopo es un $\mathscr{H}$-polítopo, y viceversa.

- La equivalencia del Teorema 2.6 es "teórica".

Desde un punto de vista algorítmico, hay problemas que se resuelven eficientemente sobre $\mathcal{H}$-poliedros y no sobre $\mathcal{V}$-poliedros, y viceversa:

- Demostrar que la intersección de un politopo con un espacio afín es un politopo
- Demostrar que la intersección de un poliedro y un politopo es un politopo
- Demostrar que la suma de Minkowski de dos politopos es un politopo
- Demostrar que la proyección de un politopo es un politopo.

- Teorema 2.5 $\Rightarrow$ Teorema 2.6

  (Por qué?)

- Además, Teorema 2.4 $\Rightarrow$ Teorema 2.5

  Para ello, empleamos una técnica conocida como <u>homogeinización</u>.

  Si $P = P(A,b)$ es un $\mathcal{H}$-poliedro, definimos

$$\sum_{j=1}^{d} a_{ij}x_j \leq b_i, \forall i = 1,\ldots,m$$

$$C(P) = P\left(\begin{pmatrix} -1 & 0^T \\ -b & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$x_0 \geq 0,$$
$$-b_i x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq 0, \forall i = 1,\ldots,m$$

Notar que C(P) es un $\mathcal{H}$-cono en $\mathbb{R}^{d+1}$

- Notar que

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \binom{1}{x} \in C(P) \}$$ [Obs. 1]

- Adicionalmente, si $B \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$, $z \in \mathbb{R}^m$ entonces $\hat{P} := P(B, z)$ es un $\mathcal{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^{d+1}$. En este caso, puede verse que (Ejercicio):

$$\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \binom{1}{x} \in \hat{P} \}$$ [Obs. 2]

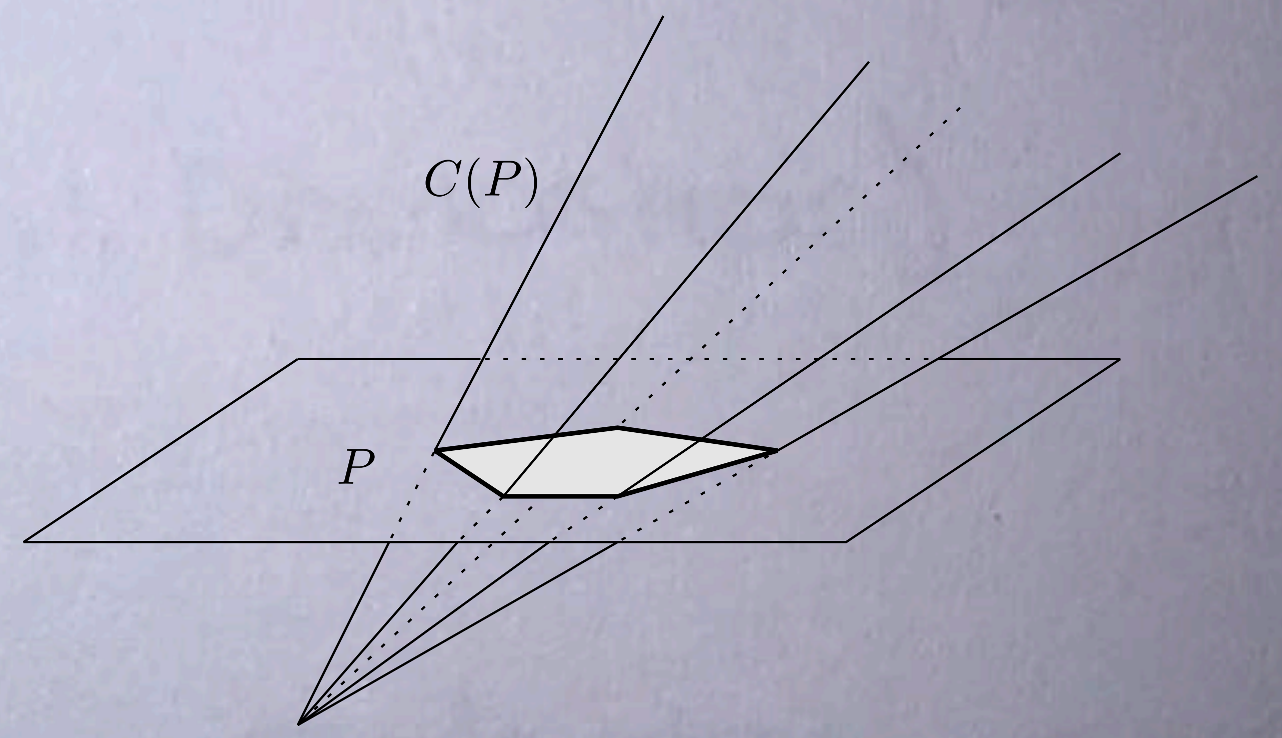
es un $\mathcal{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$.

Por otra parte, supongamos que:

$$P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(Y)$$

es un $\mathcal{V}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$. Definimos su cono de homogeinización:

$$c(P) = \mathrm{cone}\begin{pmatrix} \mathbb{1}^T & 0^T \\ V & Y \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$



Obviamente, $C(P)$ es un ~~es~~ $\mathcal{V}$-cono en $\mathbb{R}^{d+1}$ y además:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \binom{1}{x} \in C(P) \right\} \quad \text{[Obs. 3]}$$

Finalmente, si $W \in \mathbb{R}^{(d+1) \times \bar{k}}$ representa un conjunto arbitrario de vectores en $\mathbb{R}^{d+1}$ y $C = \operatorname{cone}(W)$, entonces el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \binom{1}{x} \in C \right\} \qquad [\text{Obs. } 4]$$

es un $\mathcal{V}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$ (Ejercicio: Demostrar)

Con las 4 observaciones anteriores, podemos concluir

Teorema 2.4 (Minkowski-Weyl para conos) $\Rightarrow$ Teorema 2.5 (Minkowski-Weyl para poliedros)

Para ello, asumamos que se tiene Teorema 2.4 y demostremos Teorema 2.5

Demostración Teorema 2.5

(i) ⇒ (ii)

- Sea $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(Y)$ un $\mathcal{V}$-poliedro.
- $C(P) := \mathrm{cone}\begin{pmatrix} 1^T & 0^T \\ V & Y \end{pmatrix}$ es un $\mathcal{V}$-cono en $\mathbb{R}^{d+1}$ y además $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \binom{1}{x} \in C(P)\}$ (Por [obs. 3])
- Por Teorema 2.4, $C(P)$ es también un $\mathcal{H}$-cono. Es decir, $\exists\, \hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$ t.q. $C(P) = P(\hat{A}, 0)$.
- Pero entonces
$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \binom{1}{x} \in P(\hat{A}, 0)\}$$
es un $\mathcal{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^d$, es decir, existen $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ t.q.
$$P = P(A, b)$$
[Por Obs. 2]

(ii) ⇒ (i) : Ejercicio.

Lema 2.7.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y

$$C_0(A) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} \;\middle|\; Ax \leq w \right\}.$$

El conjunto $C_0(A)$ es un $\mathcal{V}$-cono.

Demostración: Basta ver que $\forall \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in C_0(A)$,

$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ pertenece a $\operatorname{cone}\left(\left\{ \pm \begin{pmatrix} e_i \\ Ae_i \end{pmatrix} : 1 \leq i \leq d \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_j \end{pmatrix} : 1 \leq j \leq m \right\} \right)$.

En efecto,

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{d} |x_i| \, (\operatorname{sign}(x_i)) \begin{pmatrix} e_i \\ Ae_i \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (w_j - (Ax)_j) \begin{pmatrix} 0 \\ e_j \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ w - Ax \end{pmatrix}}$$

Obs.:

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Definiciones: Proyección y eliminación.

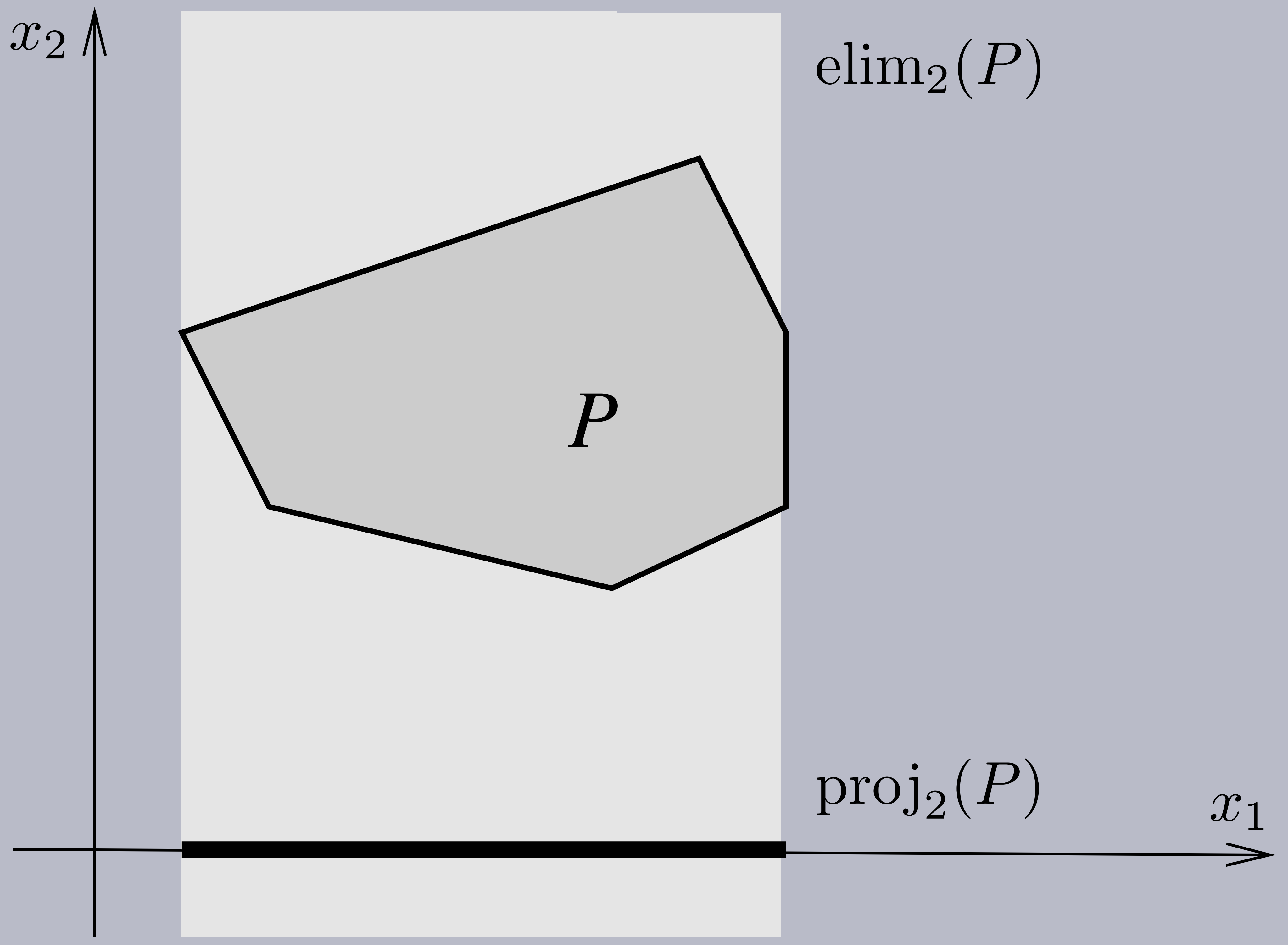
Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ y $k \in [d]$.

La proyección de P en la dirección coordenada k está dada por

$$\operatorname{proj}_k(P) := \{x - x_k e_k \mid x \in P\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_k = 0,\ \exists\, t \in \mathbb{R} : x + t e_k \in P\}$$

La eliminación de la coordenada k sobre P es:

$$\operatorname{elim}_k(P) := \{x - t e_k \mid x \in P,\ t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists\, t \in \mathbb{R} : x + t e_k \in P\}$$



Observación:

$$\mathrm{elim}_k(P) \cong \mathrm{proj}_k(P) \times \mathbb{R}$$

$$\mathrm{proj}_k(P) \cong \mathrm{elim}_k(P) \cap H_k$$

Figura tomada de “Lectures on Polytopes”. Ziegler, 2007.

Ejemplo:

Considerar el cubo $C_3 \subset \mathbb{R}^3$. Determinar $\text{elim}_3(C_3)$ y $\text{proj}_3(C_3)$:

$$\text{proj}_3(C_3) = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$$

$$\text{elim}_3(C_3) = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

$$(C_3)\begin{cases} x_1 \leq 1, \\ -x_1 \leq 1, \\ x_2 \leq 1, \\ -x_2 \leq 1, \\ x_3 \leq 1, \\ -x_3 \leq 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\text{elim}_3(C_3))\begin{cases} x_1 \leq 1, \\ -x_1 \leq 1, \\ x_2 \leq 1, \\ -x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Lema 2.8.

Sean $C = P(A, 0)$ un $\mathcal{H}$-cono en $\mathbb{R}^d$ y $k \in [d]$.

Entonces, $elim_k(C)$ es el $\mathcal{H}$-cono definido por

$$elim_k(C) = P(A^{/k}, 0)$$

dado

$$A^{/k} := \{ a_i^T \in A \mid a_{ik} = 0 \} \cup \{ (a_{ik}) a_j^T + (-a_{jk}) a_i^T \mid a_i^T, a_j^T \in A,\ a_{ik} > 0 \wedge a_{jk} < 0 \}$$

Notación: Interpretamos a las matrices A y $A^{/k}$ como conjuntos de vectores fila en $\mathbb{R}^d$

Dem:

(i) $\mathrm{elim}_k(C) \subseteq P(A^{/k}, 0)$

Sea $x \in \mathrm{elim}_k(C)$. Entonces $t \in \mathbb{R}$ t.q. $x + te_k \in C = P(A,0)$.

Por otra parte, notar que cada fila de $A^{/k}$ es una combinación no negativa de filas de A. Luego, todo punto de $P(A,0)$ satisface las desigualdades de $P(A^{/k},0)$.

$$\Rightarrow \quad A^{/k}(x + te_k) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A^{/k}x + \underbrace{t\, A^{/k} \cdot e_k}_{=0} \leq 0$$

$A^{/k}$ tiene coeficientes cero en la fila k

$$\Rightarrow \quad x \in P(A^{/k}, 0)$$

(ii) $P(A^{\setminus k}, 0) \subseteq \mathrm{elim}_k(C)$

Sea $x \in P(A^{\setminus k}, 0)$. Vamos a demostrar que existe $t \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\underbrace{x - x_k e_k}_{\tilde{x}} - t e_k \in C$$

(Por qué es suficiente esto para concluir $x \in \mathrm{elim}_k(C)$?)

Respuesta:

Si existe tal t, puede concluirse que:

$$\exists \hat{t} \in \mathbb{R} : x + \hat{t} e_k \in C$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{x} - t e_k \in C$$

notar que $\tilde{x}_k = 0$ y $\tilde{x} \in P(A^{\setminus k}, 0)$.

Notar que la condición $\tilde{x} - t e_k \in C$ es equivalente a:

$$A(\tilde{x} - t e_k) \leq 0 \iff a_i^T \tilde{x} - t a_{ik} \leq 0, \forall a_i^T \in A$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{a_{ik}} \cdot a_i^T \tilde{x}, & \text{si } a_{ik} > 0 \quad (1) \\ t \leq \frac{1}{(a_{ik})} a_i^T \tilde{x}, & \text{si } a_{ik} < 0 \quad (2) \\ a_i^T \tilde{x} \leq 0, & \text{si } a_{ik} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3) se satisface porque si $a_{ik}=0$, entonces a_i^T es fila de $A^{/k}$ y $\tilde{x} \in P(A^{/k}, 0)$

Para demostrar que es posible encontrar $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga (1) y (2), basta demostrar que

$$\max\left\{ \frac{1}{a_{ik}} a_i^T \tilde{x} \;\middle|\; a_i^T \in A,\ a_{ik} > 0 \right\} \leq \min\left\{ \frac{1}{(a_{jk})} a_j^T \tilde{x} \;\middle|\; a_j^T \in A,\ a_{jk} < 0 \right\}$$

En efecto, sean $a_i^T, a_j^T \in A$ con $a_{ik} > 0$, $a_{jk} < 0$. La fila $(a_{ik}) a_j^T + (-a_{jk}) a_i^T$ pertenece a $A^{/k}$ y $\tilde{x} \in P(A^{/k}, 0)$. Luego,

$$(a_{ik}) a_j^T \tilde{x} + (-a_{jk}) a_i^T \tilde{x} \leq 0$$

$$(a_{ik}) a_j^T \tilde{x} \leq (a_{jk}) a_i^T \tilde{x} \qquad \begin{array}{|l} : a_{ik} > 0 \\ : a_{jk} < 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{a_{jk}} a_j^T \tilde{x} \geq \frac{1}{a_{ik}} a_i^T \tilde{x}$$

Lema 2.9.:

Sean $C = \text{cone}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathbb{R}^d$ un $\mathcal{V}$-cono y $k \in [d]$.

Sea $H_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_k = 0\}$. Entonces $C \cap H_k = \text{cone}(\mathcal{Y}^{/k})$, donde

$$\mathcal{Y}^{/k} := \{y^i \in \mathcal{Y} \mid y^i_k = 0\} \cup \{y^i_k \cdot y^j + (-y^j_k)\, y^i \mid y^i, y^j \in \mathcal{Y},\ y^i_k > 0,\ y^j_k < 0\}$$

Notación: Consideramos a $\mathcal{Y}$ como un conjunto de vectores columna $y^i \in \mathbb{R}^d$. Notamos por y^i_k a la k-ésima componente de y^i.

(i) $\operatorname{cone}(\mathcal{Y}^{/k}) \subseteq \operatorname{cone}(\mathcal{Y}) \cap H_k$

Sea $x \in \operatorname{cone}(\mathcal{Y}^{/k})$. Denotemos por I_0, I_+ e I_- a los conjuntos de índices tales que $I_0 := \{i \in [n] \mid y^i_k = 0\}$, $I_+ := \{i \in [n] \mid y^i_k > 0\}$ y $I_- := \{i \in [n] \mid y^i_k < 0\}$. Notar que:

$$x = \sum_{i \in I_0} t_i y^i + \sum_{\substack{(i,j) \in \\ I_+ \times I_-}} t_{ij} \left[(y^i_k) y^j + (-y^j_k) y^i \right], \text{ con } t_i \geq 0, \forall i \in I_0, \; t_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in I_+ \times I_-$$

$$= \sum_{i \in I_0} t_i y^i + \sum_{\substack{(i,j) \in \\ I_+ \times I_-}} \overbrace{t_{ij}(y^i_k)}^{\geq 0} \cdot y^j + \sum_{\substack{(i,j) \in \\ I_+ \times I_-}} \overbrace{t_{ij}(-y^j_k)}^{\geq 0} \cdot y^i$$

Luego, x es combinación cónica de vectores de $\mathcal{Y}$, es decir, $x \in \operatorname{cone}(\mathcal{Y})$.

(Ejercicio)

Además, notar que $\underline{x_k = 0}$. Luego, $x \in \operatorname{cone}(\mathcal{Y}) \cap H_k$.

(ii) $\operatorname{cone}(\mathcal{Y}) \cap H_k \subseteq \operatorname{cone}(\mathcal{Y}^{/k})$

Sea $x \in \operatorname{cone}(\mathcal{Y}) \cap H_k$. Conocemos que

$$x = \sum_{i \in I_0} t_i y^i + \sum_{i \in I_+} t_i y^i + \sum_{i \in I_-} t_i y^i \quad , \text{ con } t_i \geq 0, \ \forall i \in I_0 \cup I_+ \cup I_-$$

y además $x_k = \sum_{i \in I_0 \cup I_+ \cup I_-} t_i y_k^i = 0$.

Notar que $\sum_{i \in I_0} t_i y_k^i = 0$. Luego, $x_k = \sum_{i \in I_+} t_i y_k^i + \sum_{j \in I_-} t_j y_k^j$

Sea $\Delta := \sum_{i \in I_+} t_i y_k^i = \sum_{j \in I_-} -(t_j) y_k^j$. Notar que $\Delta \geq 0$.

Además, si $\Delta = 0$, entonces $t_i = 0, \forall i \in I_+ \wedge t_j = 0, \forall j \in I_-$

en cuyo caso $x = \sum_{i \in I_0} t_i y^i \in \operatorname{cone}(\mathcal{Y}^{/k})$.

Supongamos ahora que $\Lambda > 0$:

En este caso, tenemos que:

$$x = \sum_{i\in I_0} t_i y^i + \sum_{i\in I_+} t_i y^i + \sum_{j\in I_-} t_j y^j$$

$$= \sum_{i\in I_0} t_i y^i + \frac{1}{\Lambda}\left[\sum_{i\in I_+}\left(\sum_{j\in I_-}(-t_j y^j_k)\right) t_i y^i + \sum_{j\in I_-}\left(\sum_{i\in I_+} t_i y^i_k\right) t_j y^j\right]$$

$$= \sum_{i\in I_0} t_i y^i + \frac{1}{\Lambda}\left[\sum_{i\in I_+}\sum_{j\in I_-} t_i t_j (-y^j_k) y^i + \sum_{j\in I_-}\sum_{i\in I_+} t_i t_j y^i_k y^j\right]$$

$$= \sum_{i\in I_0} t_i y^i + \sum_{\substack{(i,j)\in \\ I_+\times I_-}} \underbrace{\frac{t_i t_j}{\Lambda}}_{\geq 0} \left((-y^j_k) y^i + y^i_k y^j\right)$$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{cone}(\varphi'^k)$$

Teorema 2.4: (Minkowski-Weyl para conos poliedrales)

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que C es un cono poliedral en $\mathbb{R}^d$ si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existe $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$ tal que:

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \ : \ y = Yt, \ \text{con } t \in \mathbb{R}^k_+ \right\} =: \text{cone}(Y)$$

(ii) Existe $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que:

$$C = P(A, \mathbf{0})$$

Es decir, todo $\mathscr{V}$-cono es un $\mathscr{H}$-cono, y viceversa.

Mode Mat

Demostración del Teorema 2.4. (Minkowski-Weyl para conos)

(i) ⟹ (ii)

Sean $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$ y $C = \text{cone}(Y)$. Tenemos que

$$C = \text{cone}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists t \in \mathbb{R}^k,\ t \geq 0\ \ x = Y\cdot t\}$$

Considerar el conjunto:

$$\tilde{C} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+k} \mid t \geq 0,\ x = Y\cdot t\} = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{d+k} : \begin{pmatrix} I_d & -Y \\ -I_d & Y \\ O & -I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

Puede verse que $\tilde{C}$ es un $\mathcal{H}$-cono en $\mathbb{R}^{d+}$.

Además:

$$C \cong \text{proj}_{t_k}(\text{proj}_{t_{k-1}}(\cdots \text{proj}_{t_2}(\text{proj}_{t_1}(\tilde{C})) \cdots))$$

Aplicando el Lema 2.8. n veces, obtenemos que C es un $\mathcal{H}$-cono.

(Ejercicio: Verificar esta afirmación!)

$(ii) \Rightarrow (i)$

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $C = P(A, 0)$. En este caso, tenemos que C es el $\mathcal{H}$-cono

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq 0 \}$$

Considerar el conjunto

$$\tilde{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} \mid Ax \leq w \right\}.$$

Del Lema 2.7, conocemos que $\tilde{C}$ es un $\mathcal{V}$-cono. Notar además que

$$C \cong \tilde{C} \cap H_{w_1} \cap H_{w_2} \cap \cdots \cap H_{w_m}$$

Aplicando el Lema 2.9 m veces, concluimos que C es un $\mathcal{V}$-cono.

Ejercicios:

Demostrar que el Teorema 2.5 implica el Teorema 2.6.

Sean $B \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}, z \in \mathbb{R}^m$ y $\hat{P} := P(B, z)$ un $\mathscr{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^{d+1}$. Demostrar que

$$P := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \hat{P}\} \text{ es un } \mathscr{H}\text{-poliedro en } \mathbb{R}^d.$$

Sean $W \in \mathbb{R}^{(d+1)\times k}$ y $C := \mathrm{cone}(W)$ un $\mathscr{V}$-cono en $\mathbb{R}^{d+1}$. Demostrar que

$$P := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C\} \text{ es un } \mathscr{V}\text{-poliedro en } \mathbb{R}^d.$$

Utilizando el Teorema 2.4, demostrar la implicación (ii) => (i) del Teorema 2.5.

Demostrar las observaciones 1-4 respecto al cono de homogeneización.