

Ejercicios Capítulo 2

- Sean $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y C el \mathcal{V} -cono definido por $C := \text{cone}(Y)$. Determinar un sistema de desigualdades lineales en las variables x_1, x_2, t_1, t_2 , asociado a un \mathcal{H} -cono $\hat{C} \subset \mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $C \cong \text{proj}_{t_1}(\text{proj}_{t_2}(\hat{C}))$. Aplicar el método de Fourier-Motzkin para eliminar las variables t_1 y t_2 de este sistema.

- Sea $P := \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \subset \mathbb{R}^2$ un \mathcal{V} -poliedro, con

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- Dibujar P .
 - Expresar el cono de homogeneización $C := \text{homog}(P)$ en su forma \mathcal{V} .
 - Construir un \mathcal{H} -cono $\hat{C} \subset \mathbb{R}^6$, dado en las variables $x_0, x_1, x_2, t_1, t_2, t_3$ con la propiedad de que $C \cong_{t_1} (t_2(t_3(\hat{C})))$.
 - Utilizar el método de Fourier-Motzkin para expresar C en la forma \mathcal{H} .
 - Expresar P en la forma \mathcal{H} .
- Sean

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P := \text{conv}(V) + \text{cone}(Y).$$

- Encontrar un \mathcal{H} -poliedro $\hat{P} := \{w := (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, t)^T \in \mathbb{R}^5 : \hat{A}w \leq \hat{b}\}$, con $\hat{A} \in \mathbb{R}^{M \times 5}$ y $\hat{b} \in \mathbb{R}^M$ tal que P sea congruente con la proyección de \hat{P} en la dirección de los ejes coordenados correspondientes a las variables λ_1, λ_2 y t .
 - Utilizar el algoritmo de eliminación de Fourier-Motzkin para escribir a P en la forma \mathcal{H} .
- Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades lineales.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Encontrar un conjunto finito de vectores $\hat{Y} \subset \mathbb{R}^6$ tal que el \mathcal{V} -cono generado por ellos $\hat{C} := \left\{ (x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3)^T \in \text{cone}(\hat{Y}) \right\}$ satisfaga la propiedad:

$$C \cong \hat{C} \cap \left(\bigcap_{i=1}^3 \{w_i = 0\} \right).$$

- (b) Calcular los vectores generadores de $\hat{C} \cap \{w_3 = 0\}$.

5. Sean

$$V := \begin{pmatrix} 40 & 24 & 12 & -12 & -30 & 2 \\ -30 & -24 & -6 & 12 & 30 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P := \text{conv}(V) \subset \mathbb{R}^3.$$

Calcular un conjunto (matriz) V' tal que

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} = \text{conv}(V').$$

Dibujar la región $\text{conv}(V')$.

6. Sean

$$V := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P := \text{conv}(V) \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinar un poliedro $\hat{P} = \{x \in \mathbb{R}^d : \hat{A}x \leq \hat{b}\}$, con $d > 2$, que satisfaga la propiedad de que P sea congruente con el poliedro obtenido a partir de proyectar \hat{P} sucesivamente en la dirección de algunos ejes coordenados. Escribir el sistema $\hat{A}x \leq \hat{b}$.

7. Demostrar la siguiente versión del Lema de Farkas: Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, exactamente uno de los dos enunciados siguientes es verdadero:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax = b$, $x \geq \mathbf{0}$.
2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq \mathbf{0}^T$, $y^T b < 0$.

8. Demostrar la siguiente versión del Lema de Farkas: Dados $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times d}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times d}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $f \in \mathbb{R}^{m_2}$, exactamente uno de los dos enunciados siguientes es verdadero:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax = b$, $Cx \geq f$.
2. Existen $y \in \mathbb{R}^{m_1}$, $w \in \mathbb{R}^{m_2}$, $w \leq 0$ tales que $y^T A + w^T C = \mathbf{0}^T$, $y^T b + w^T f < 0$.

9. Formular y demostrar una versión del Lema de Farkas que caracterice cuándo un sistema de la forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$ tiene solución.

10. Usar el Lema de Farkas para demostrar el siguiente resultado.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, uno y sólo uno de las dos enunciados siguientes es verdadero:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $Ax < 0$.
2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ tal que $y^T A = 0$.

Nota: Si w es un vector, usamos la notación $w < 0$ para decir que *cada una de las componentes* de w es estrictamente menor que cero. Observar que esto es equivalente a afirmar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ tal que $w \leq -\varepsilon \mathbf{1}$.

11. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{H} -poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definimos

$$C(P) := P \left(\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ -b & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Demostrar que:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

12. Sea $\hat{P} := P(\hat{A}, \hat{b}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un \mathcal{H} -poliedro, con $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$ y $\hat{b} \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \hat{P} \right\}$$

es un \mathcal{H} -poliedro en \mathbb{R}^d .

13. Sea $P := \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{V} -poliedro, con $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$. Definimos

$$C(P) := \text{cone} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Demostrar que:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

14. Sea $P := \text{conv}(V) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{V} -polítopo, con $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$. Definimos

$$C(P) := \text{cone} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ V \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Demostrar que:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(P) \right\}.$$

15. Sean $W \in \mathbb{R}^{(d+1) \times k}$ y $\hat{C} = \text{cone}(W) \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Demostrar que el conjunto:

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \hat{C} \right\}$$

es un \mathcal{V} -poliedro en \mathbb{R}^d .

16. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{H} -poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definimos el \mathcal{H} -cono

$$Q := P((-b \ A), \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Demostrar que:

$$P = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_0 \leq 0\},$$

donde x_0 designa a la primera componente de $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

17. Usando los resultados de los ejercicios anteriores, demostrar que el resultado del Teorema de Minkowski-Weyl para poliedros se obtiene como corolario del Teorema de Minkowski-Weyl para conos.
18. Demostrar que el Teorema de Minkowski-Weyl para polítopos se obtiene como corolario del Teorema de Minkowski-Weyl para poliedros.
19. Sea $P := P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{H} -poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que $\text{lin}(P) = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = 0\}$, es decir, que el espacio de linealidad de P es el espacio núcleo de A .
20. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro. Demostrar que si U es el complemento ortogonal de $\text{lin}(P)$, entonces se cumple que $\text{lin}(P \cap U) = \{\mathbf{0}\}$.
21. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro. Su cono de homogeneización está definido por $\text{homog}(P) := C_1 + C_2$, con

$$C_1 := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in P, \alpha \geq 0 \right\}, \quad C_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : y \in \text{rec}(P) \right\}.$$

- (a) Demostrar que C_1 es un cono convexo.
- (b) Demostrar que C_2 es un cono convexo. (Puede darse por conocido que $\text{rec}(P)$ es un cono convexo).
- (c) Demostrar que la suma de Minkowski de dos conos convexos es un cono convexo, de donde se concluye que $\text{homog}(P)$ es un cono convexo.
22. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo.

- (a) Demostrar que $\text{rec}(P)$ es un cono convexo.
- (b) Demostrar que $\text{homog}(P)$ es un cono convexo en \mathbb{R}^{d+1} .
- (c) Demostrar que

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \text{homog}(P) \right\}.$$

23. Sea $P := \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \subset \mathbb{R}^d$ un \mathcal{V} -poliedro, con $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$. Demostrar que:

$$\text{homog}(P) = \text{cone} \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ V & Y \end{pmatrix}.$$

24. Empleando el Teorema de Carathéodory para conos, demostrar como corolario el Teorema de Carathéodory para polítopos:

Sean $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Si $x \in \text{conv}(V)$, entonces existe $V' \subset V$, con $|V'| \leq \dim(\text{conv}(V)) + 1 = \text{rg}(\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ V \end{pmatrix})$ tal que $x \in \text{conv}(V')$.