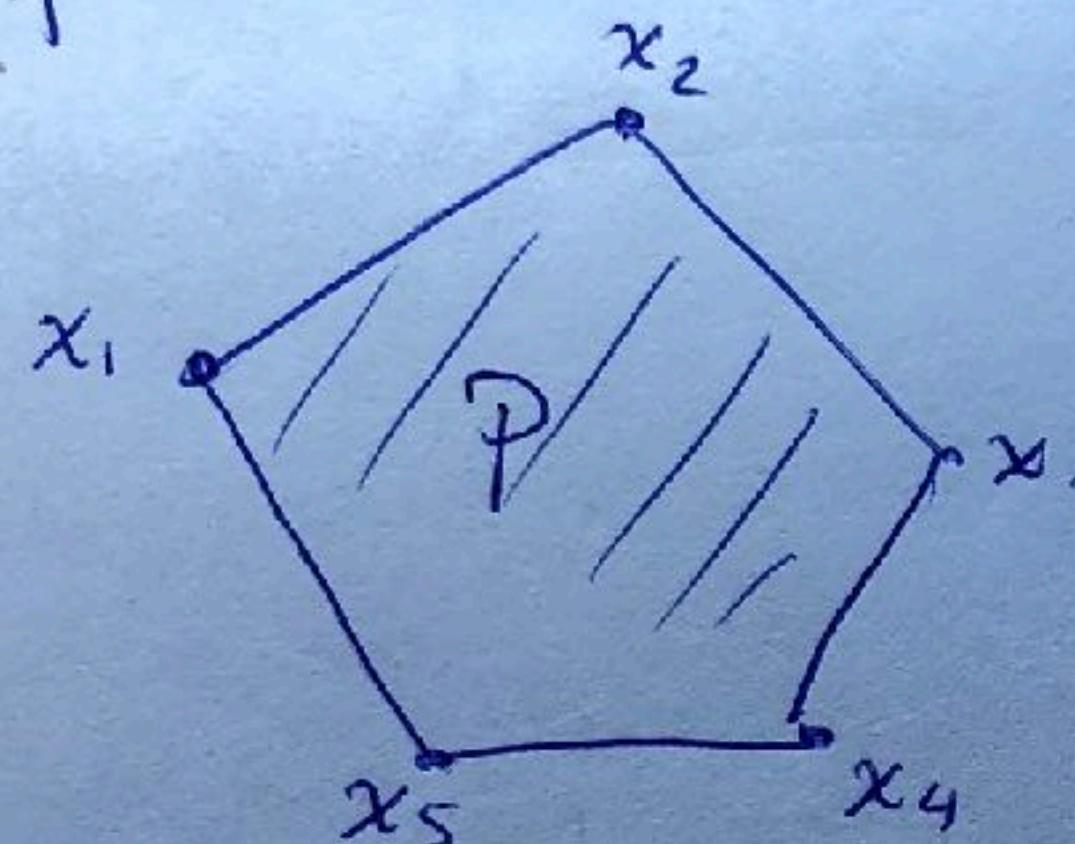
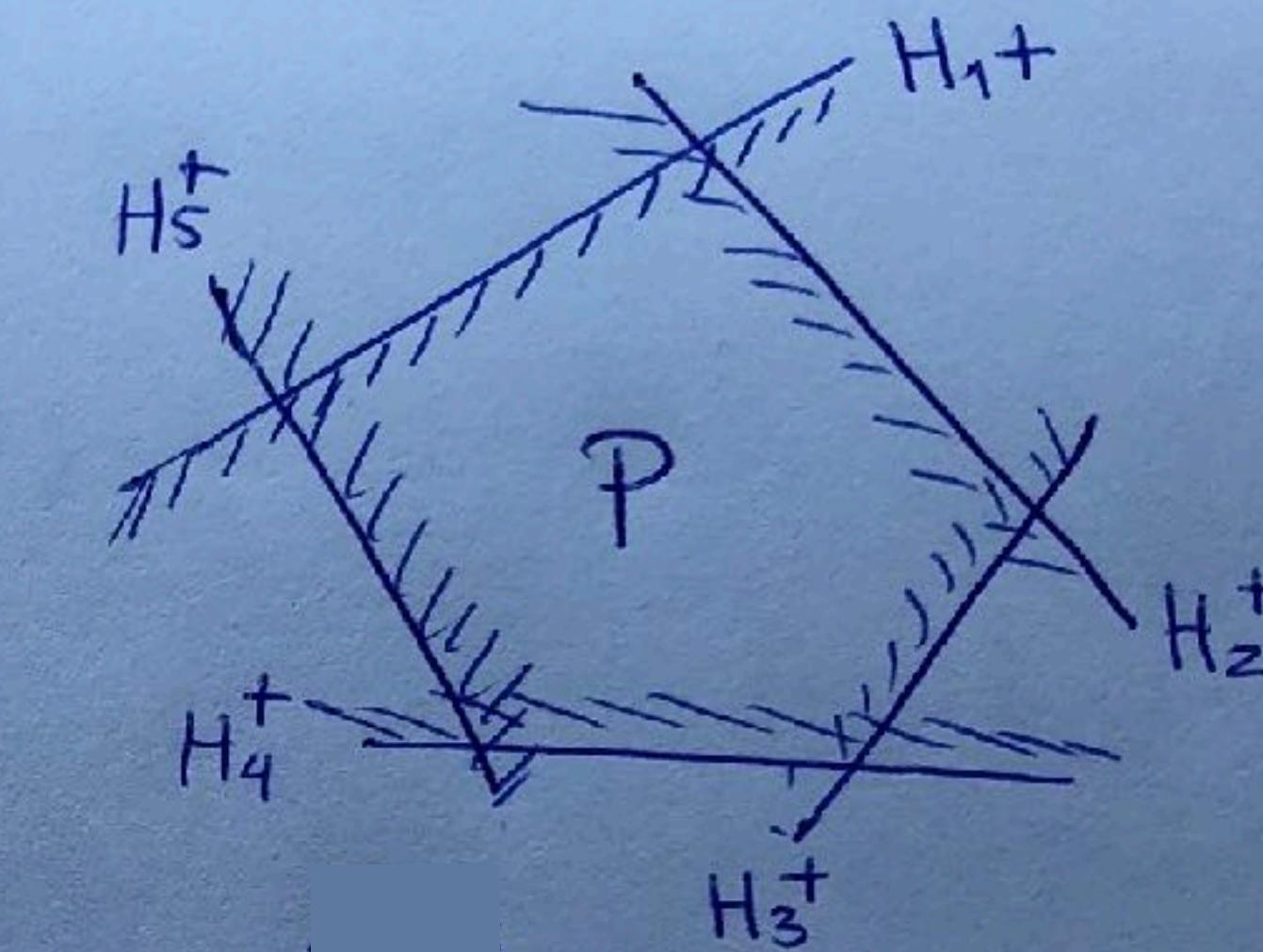


### 1.3. Ejemplos relevantes de polítopos y poliedros

Definición: Un polítopo es un conjunto  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  que es un  $\gamma$ -polítopo o un  $\mathcal{H}$ -polítopo.



$$P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_5\})$$



$$P = H_1^+ \cap H_2^+ \cap \dots \cap H_5^+$$

- La dimensión de un polítopo es la dimensión de su envolvente afín:

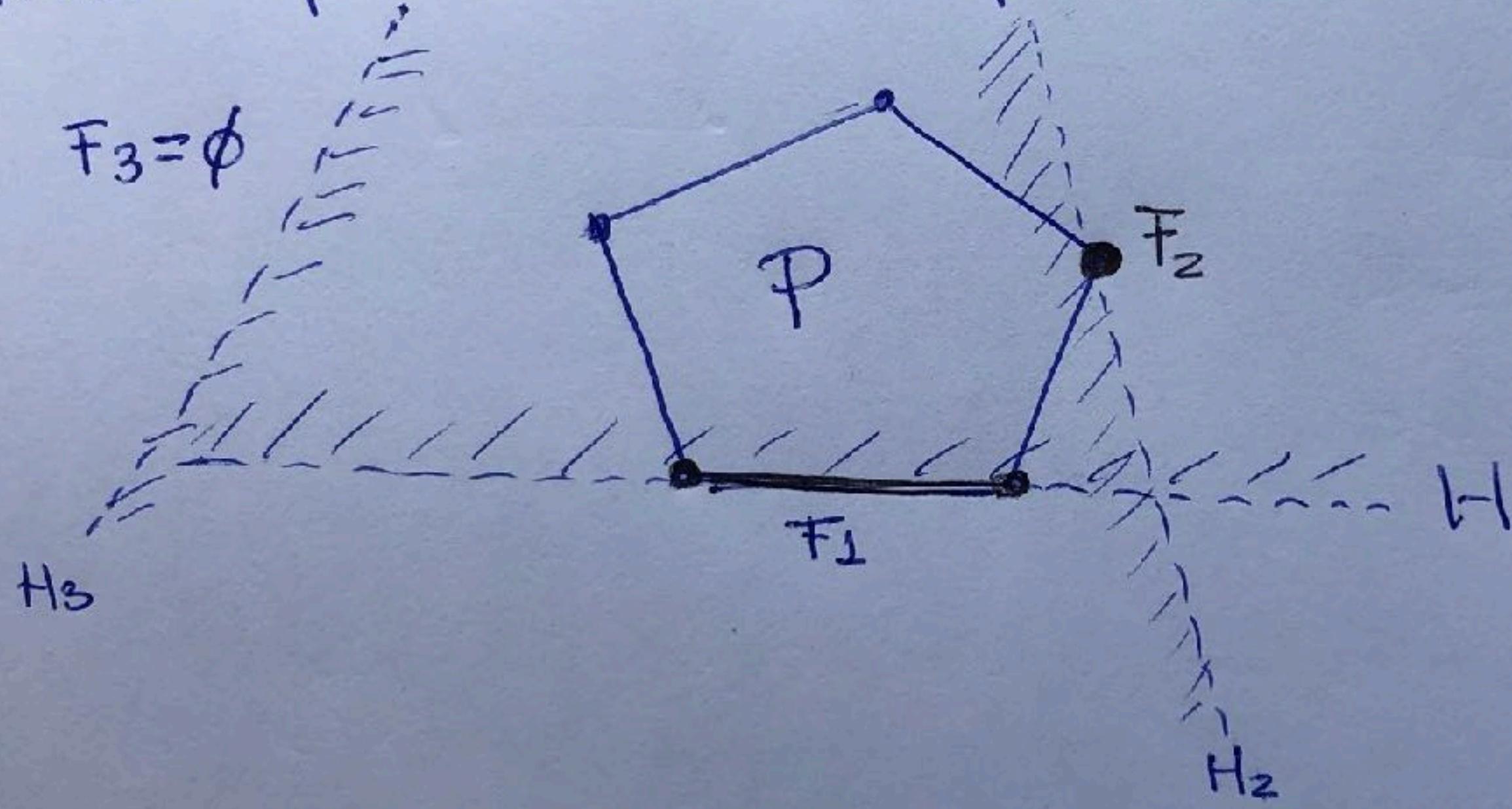
$$\dim(P) := \dim(\text{aff}(P)) = \dim \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, x_i \in P \right\}$$

- Decimos que  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  es de dimensión completa, si  $\dim(P) = d$ .

## Caras de polítopos:

Una cara es la intersección de un polítopo  $P$  con un hiperplano  $H$  tal que  $P$  está completamente contenido en uno de los semiespacios cerrados delimitados por  $H$ .

(Definición precisa en el Cap. 3)



$$H_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0^T x = 0\}$$

$$F_4 = P$$

- $\phi$  y  $P$  son siempre caras triviales de  $P$
- Una cara que es un punto se llama vértice de  $P$
- facetas ( $\text{dim}(P)-1$ ) segmentos aristas

# Equivalecia afín y combinatoria

- Dos polítopos  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  se llaman afinamente isomorfos o equivalentes, si existe una aplicación afín  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$  tal que  $f(P) = Q$  y  $f_p$  es una biyección. Notaremos  $P \cong Q$

(Recordatorio: Aplicación afín:  $f(x) = Ax + b$ )

- Dos polítopos  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  son combinatoriamente equivalentes o isomorfos si existe una función biyectiva entre los conjuntos de sus caras que preserva la relación de inclusión.  
Notaremos  $P \cong Q$ .



# Ejemplos relevantes de polítopos y poliedros

① El único polítopo de dimensión cero es el punto.

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \bullet \\ P \end{array} \quad P = \text{conv}(\{x_1\})$$

② Los polítopos de dimensión 1 son segmentos de recta. Todos los polítopos de dimensión 1 son afínmente equivalentes entre sí. (Por qué?)

$$\begin{array}{ccc} x_2 & & f(x) = Ax + b \\ & \searrow & \\ P & \bullet & f(x_1) = \bar{x}_1 \\ & \swarrow & \\ x_1 & & \bar{x}_1 \end{array}$$

$f(x_2) = \bar{x}_2$

$\bar{x}_2$

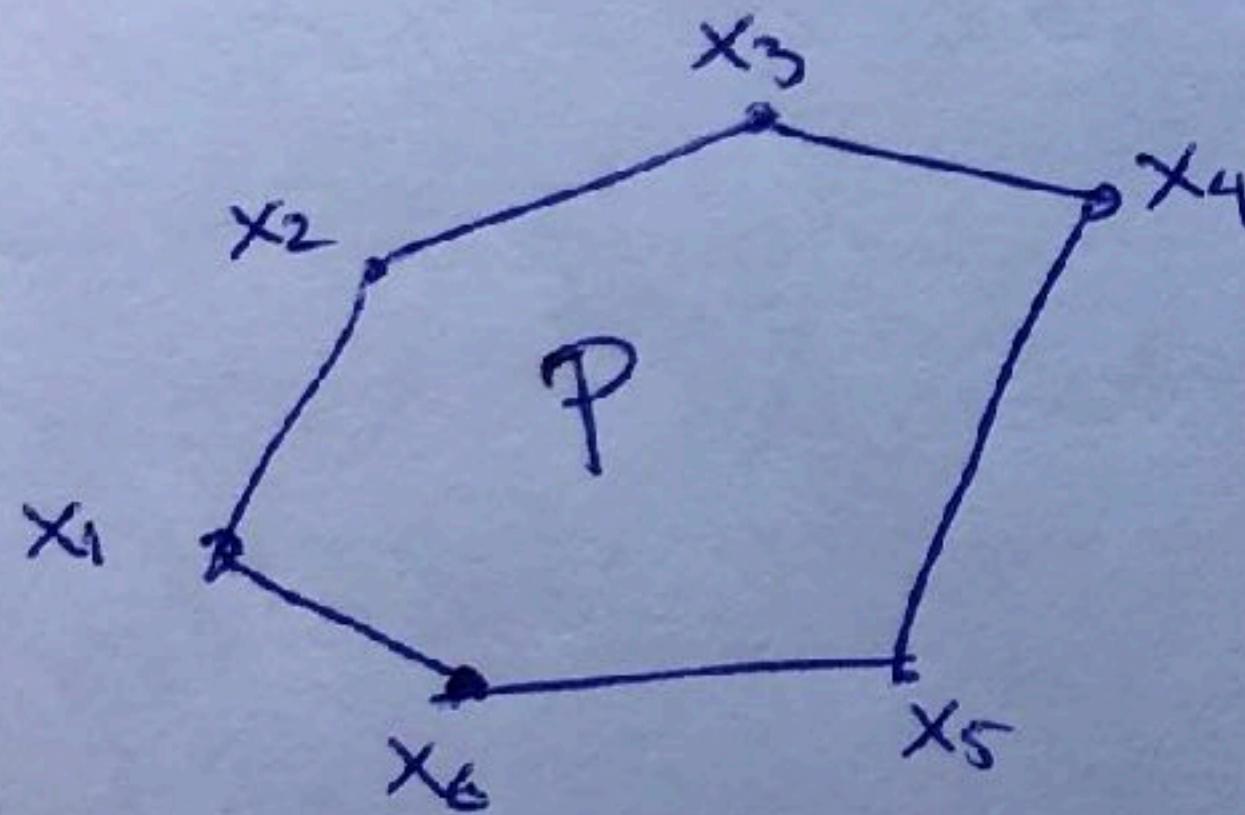
$Q$

$$P = \text{conv}(\{x_1, x_2\})$$
$$Q = \text{conv}(\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\})$$
$$P \cong Q$$

③ Los polítopos de dimensión 2 son los polígonos convexos.

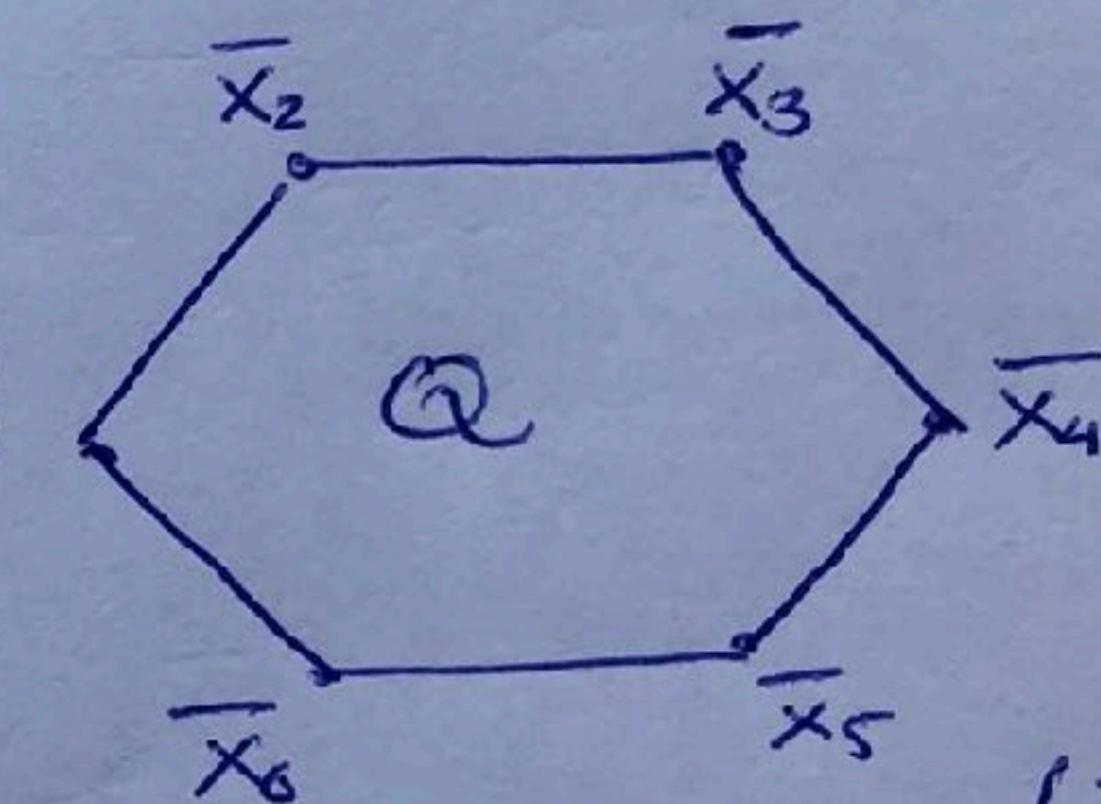
Dos polígonos con el mismo número de vértices son combinatoriamente equivalentes entre sí

caras P:  
 $x_1, \dots, x_6$   
 $x_{12}, x_{23}, \dots, x_{61}$   
 $P$   
 $\emptyset$



$P \cong Q$

caras Q:  
 $x^1, \dots, x^6$   
 $x^{12}, x^{23}, \dots, x^{61}$   
 $Q$   
 $\emptyset$

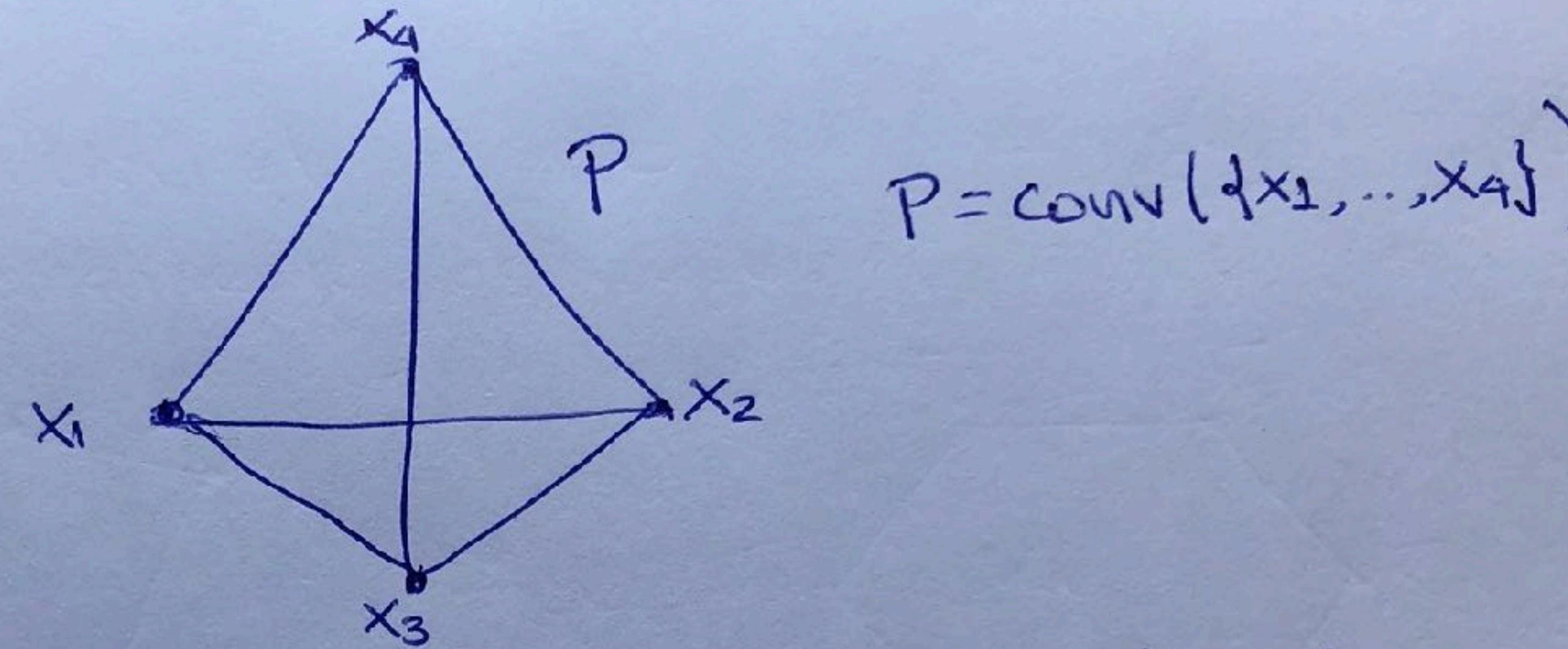


Son afínamente equivalentes?  
NO.  
(Demosthar)

Un caso especial es el polígono regular de  $n$  vértices:

$$P_2(n) := \text{conv} \left( \left\{ \left( \cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \mid 0 \leq k < n \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

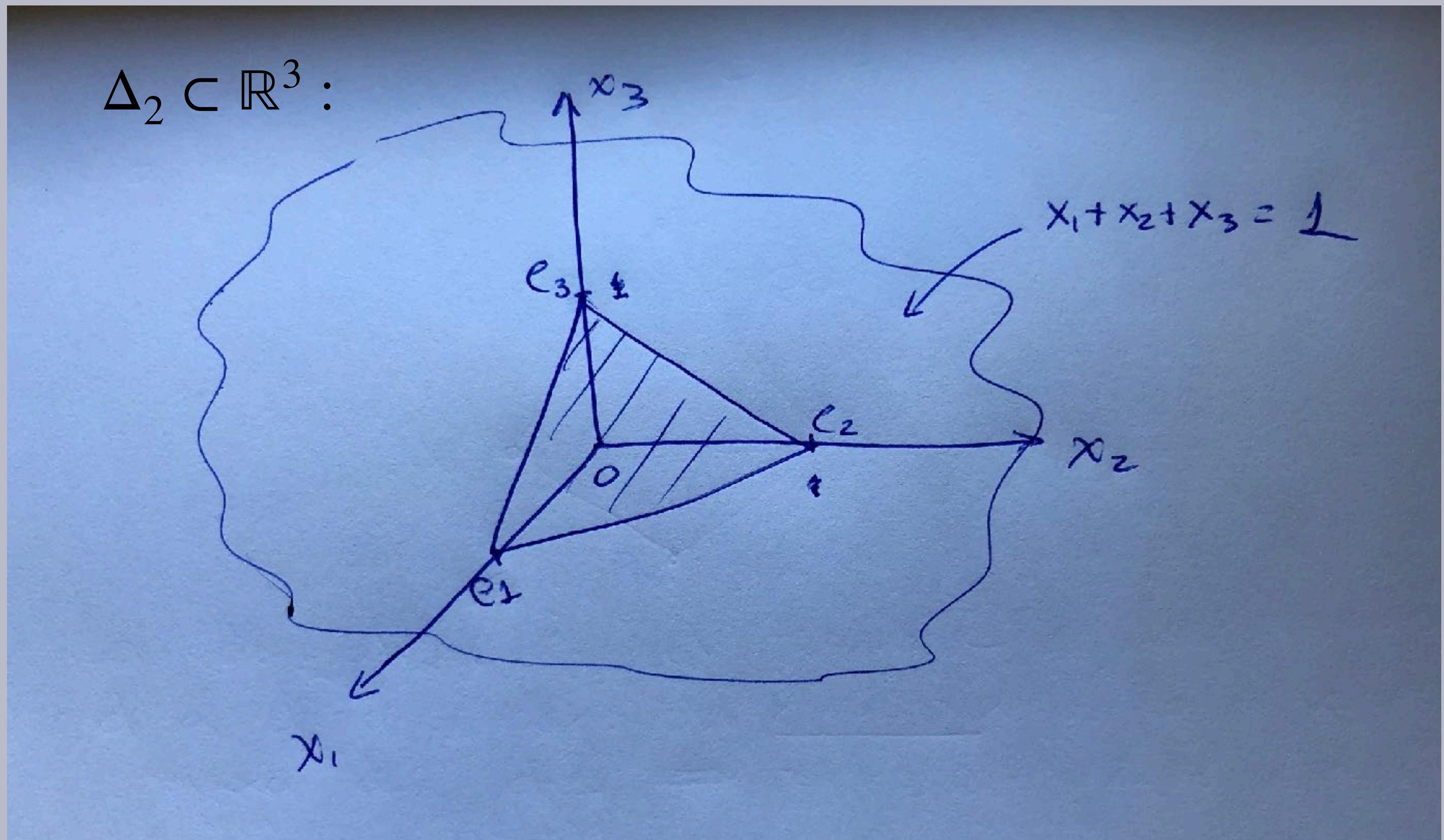
④ El tetraedro es el polítopo con el menor número de vérticos de dim 3. Tiene cuatro vérticos



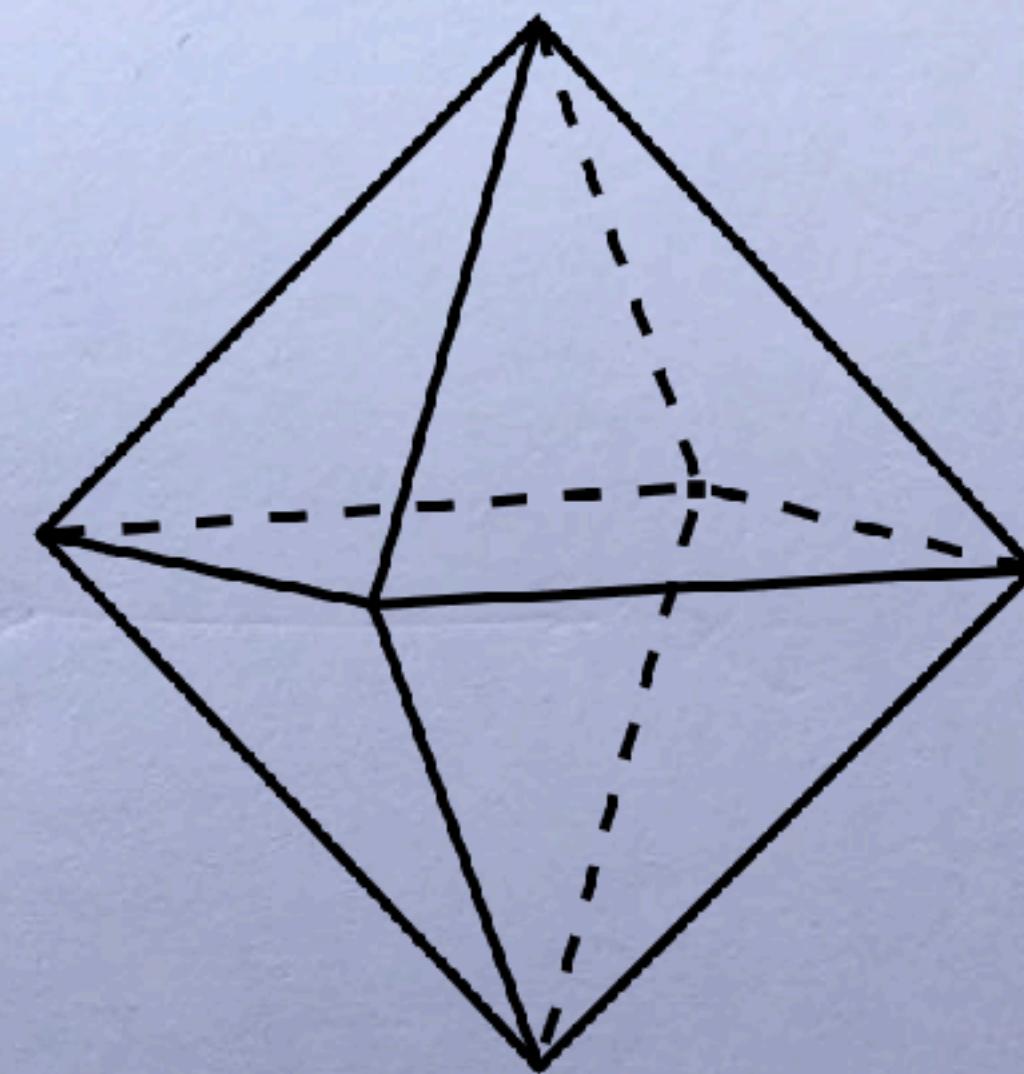
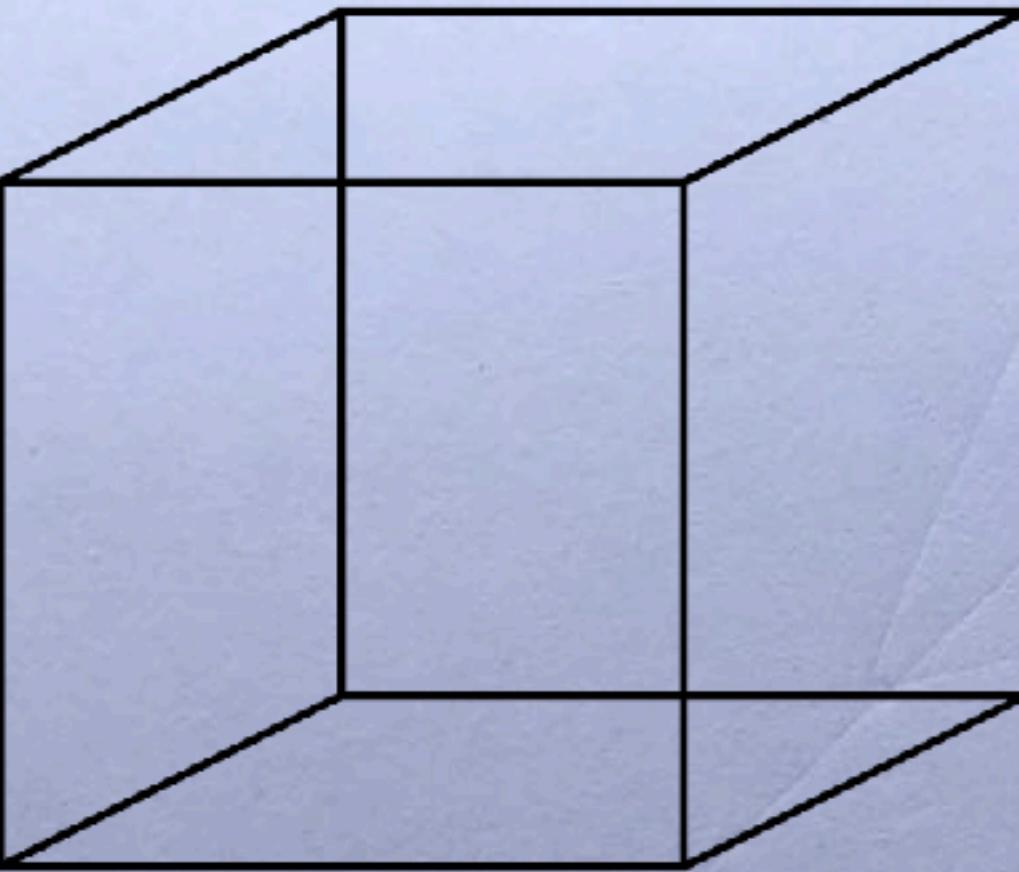
La generalización del tetraedro a la dimensión d es el d-simplex: Un d-simplex es la envolvente convexa de  $d+1$  puntos afínmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  (con  $n \geq d$ ).

El d-simplex estándar  $\Delta^d$  está definido por:

$$\Delta^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \mathbf{1}^\top x = 1, x \geq 0\} = \text{conv}\{\{e_1, \dots, e_{d+1}\}\}$$



⑤ • Dos polítopos conocidos en  $\mathbb{R}^3$  son el cubo  $C_3$   
y el octaedro  $C_3^\Delta$



• Estos pueden generalizarse a d dimensiones:

Hipercubo :  $C_d := \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1\} = \text{conv}(\{+1, -1\}^d)$   
(hypercube)

Polítopo cruz :  $C_d^\Delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1 \right\} = \text{conv}(\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\})$   
(crosspolytope)

puntos con  
coordenadas  
iguales a 1 o  
-1

Ejemplo:

Interpretar las fórmulas anteriores para  $d \in \{2, 3\}$ .

$$\underline{d=2}$$

$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\} = \text{conv}(\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\})$$

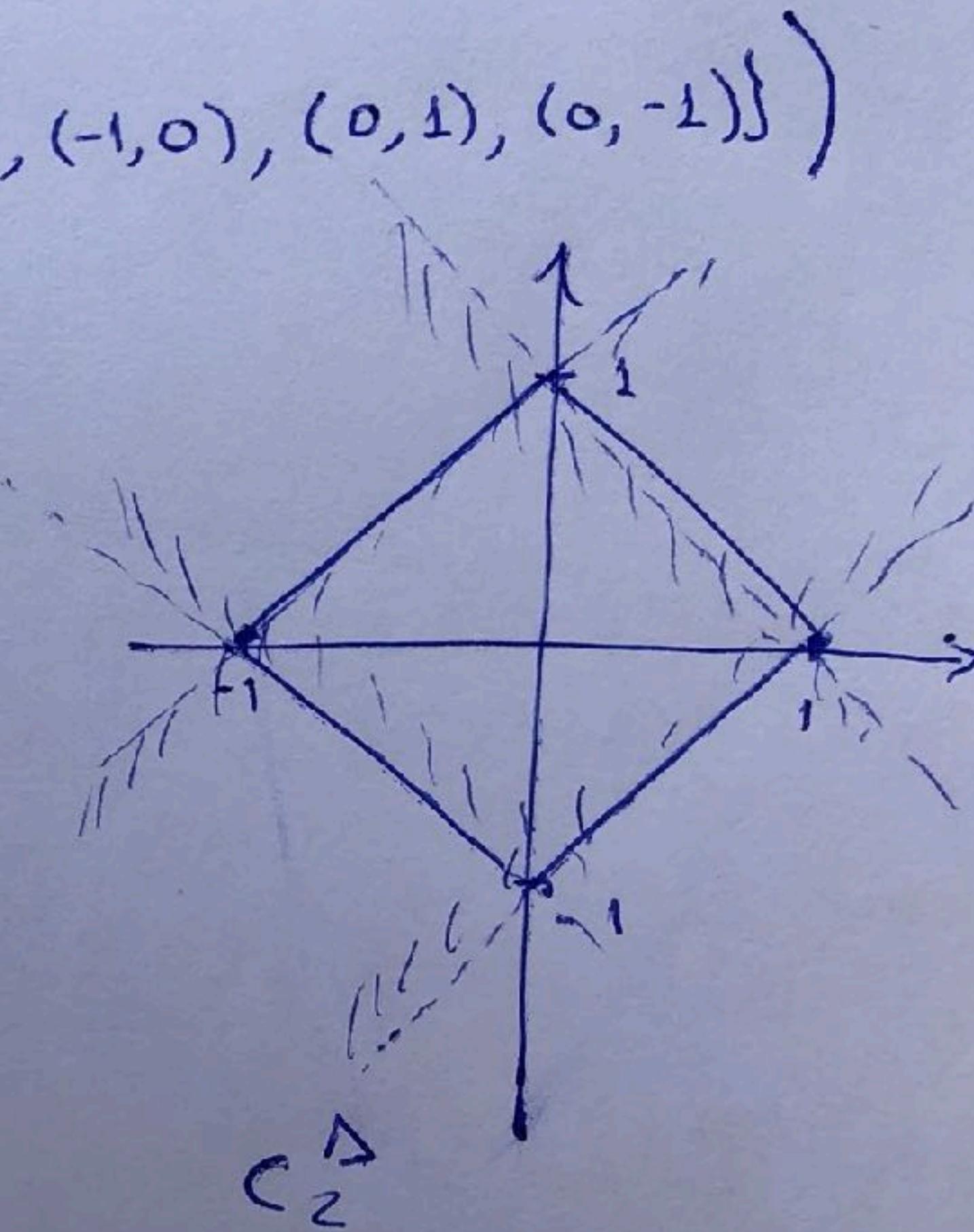
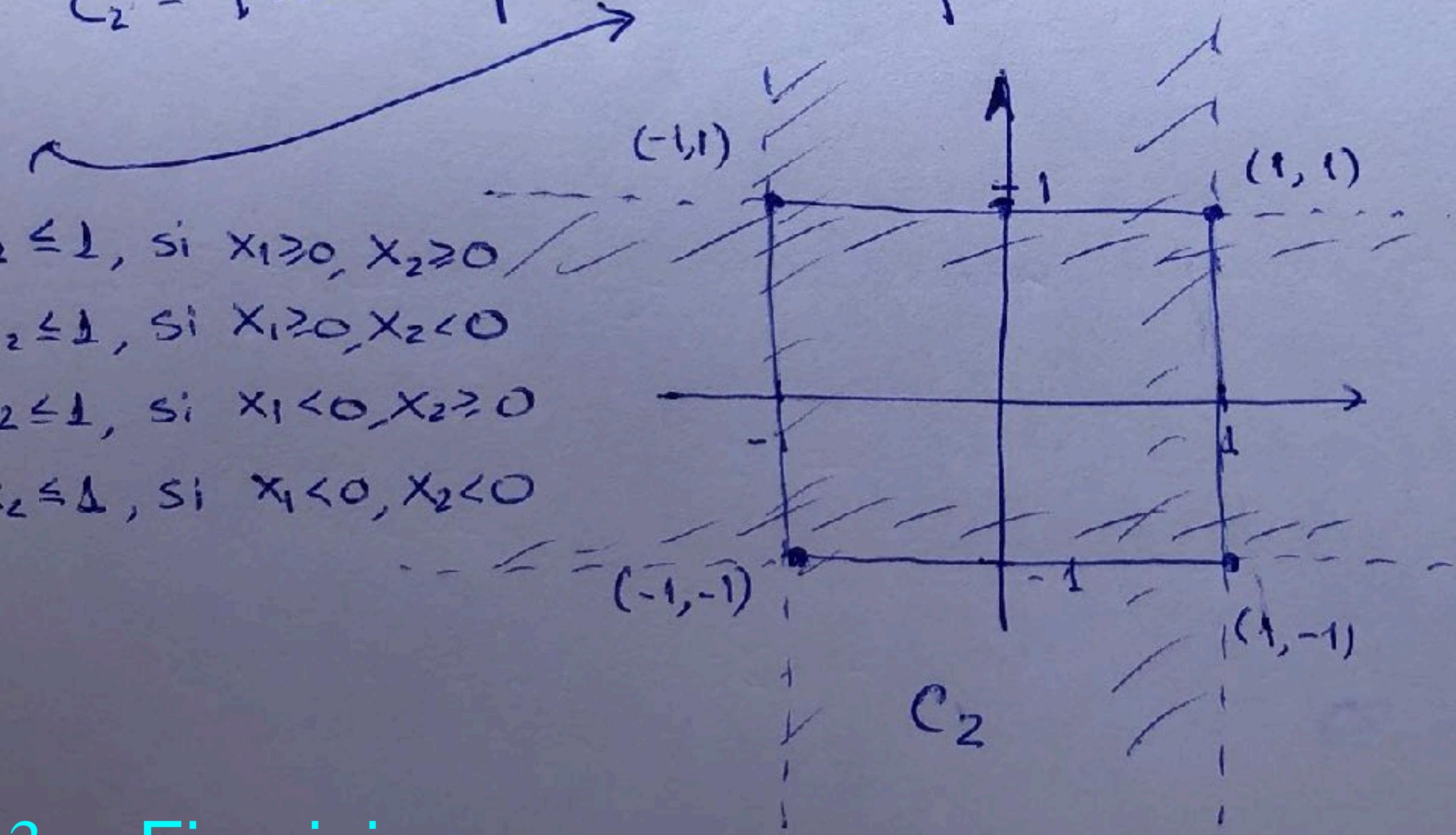
$$C_2^\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\} = \text{conv}(\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\})$$

$$x_1 + x_2 \leq 1, \text{ si } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 1, \text{ si } x_1 \geq 0, x_2 < 0$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \text{ si } x_1 < 0, x_2 \geq 0$$

$$-x_1 - x_2 \leq 1, \text{ si } x_1 < 0, x_2 < 0$$



$d = 3 :$  Ejercicio

- Los hipercubos y polítopos de crut satisfacen una relación interesante conocida como polaridad

$$C_d^\Delta \cong \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1, \forall x \in C_d\}$$

$$C_d \cong \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1, \forall x \in C_d^\Delta\}$$

- (Estudiaremos polaridad con más detalle en el Capítulo 3)



- Los polítopos de cruz son polítopos simpliciales: cada cara propia de un polítopo de cruz es un simplex.
- Los hipercubos son polítopos simples: cada vértice está contenido exactamente en d facetas del polítopo (que es el menor número posible).
- Tanto polítopos de cruz como hipercubos son polítopos regulares: sus caras son congruentes entre sí.

En 3D existen solamente 5 polítopos regulares.





# Regular Convex Polytopes in 3D

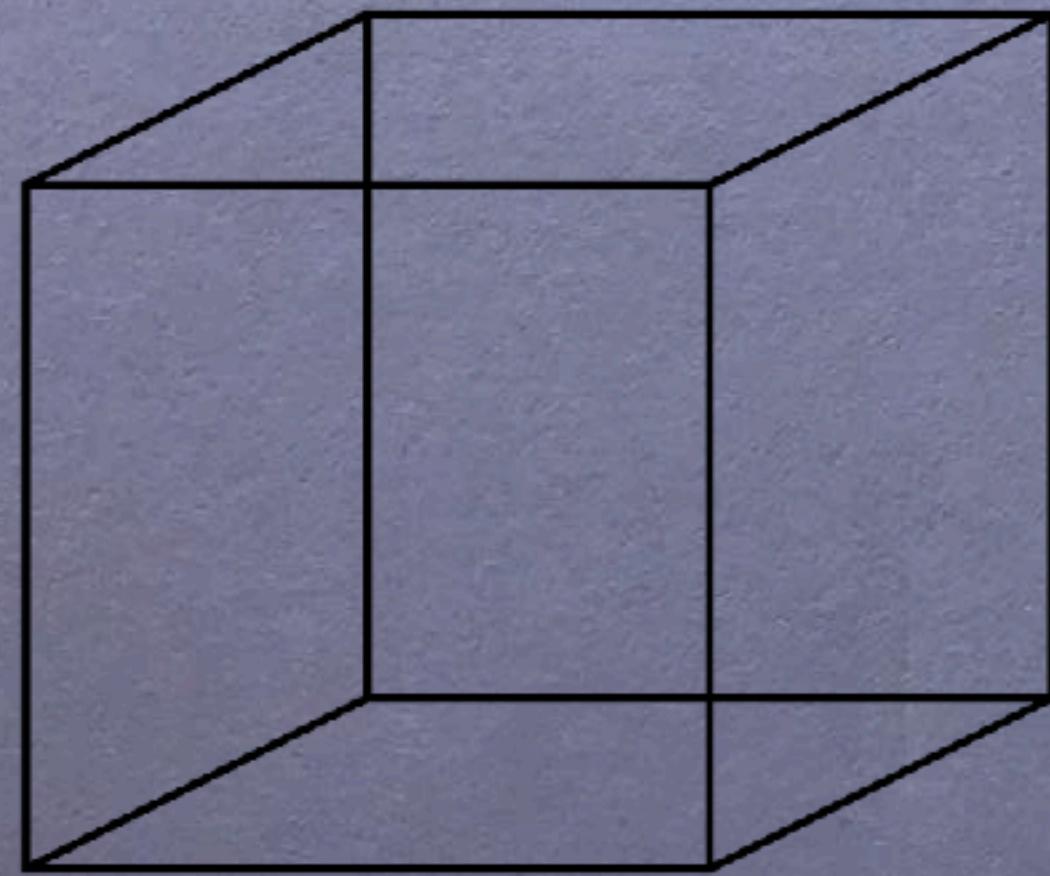
The Platonic Solids:



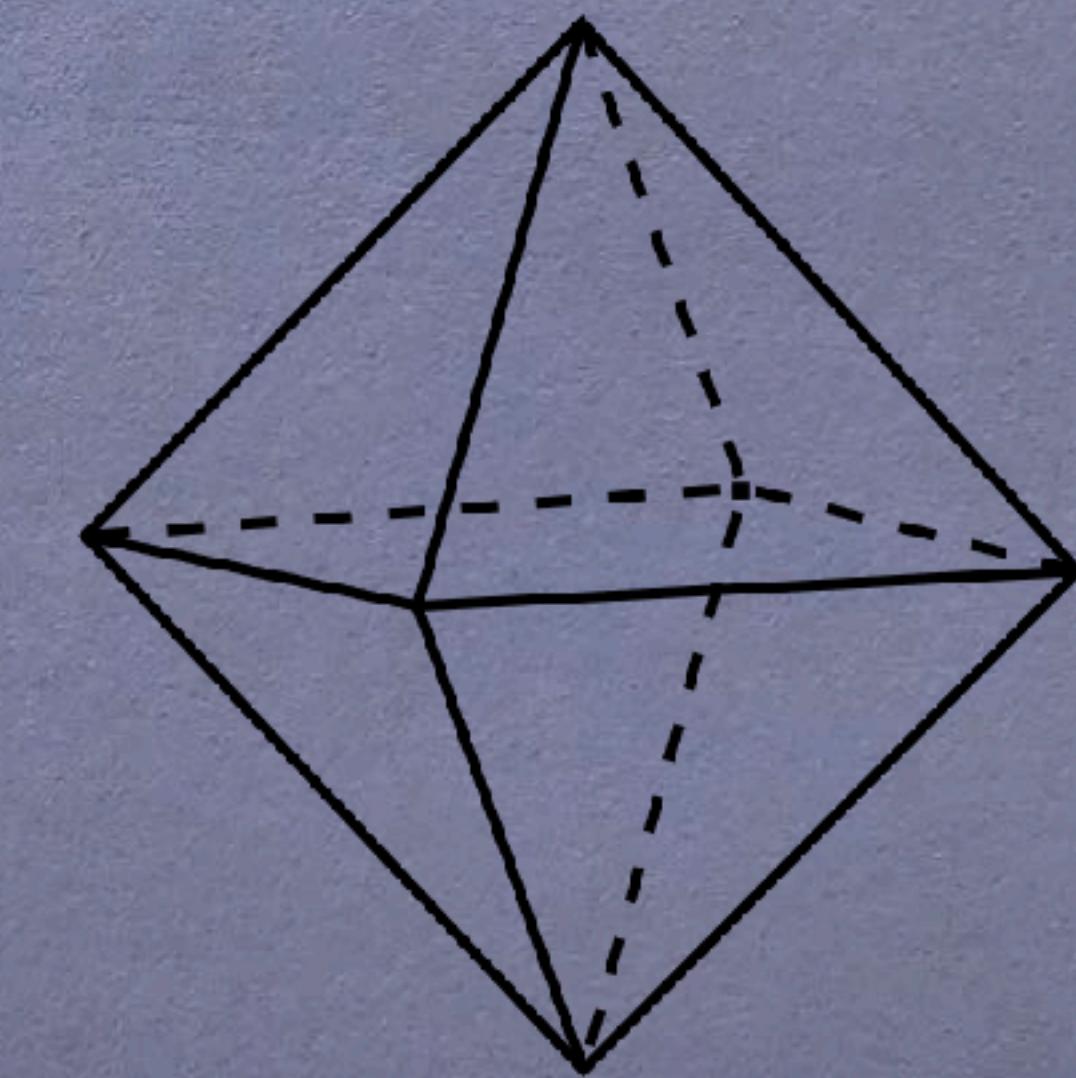
There are only 5. Why ? ...



- Un hipercubo contiene  $2^d$  vértices y  $2^d$  facetas

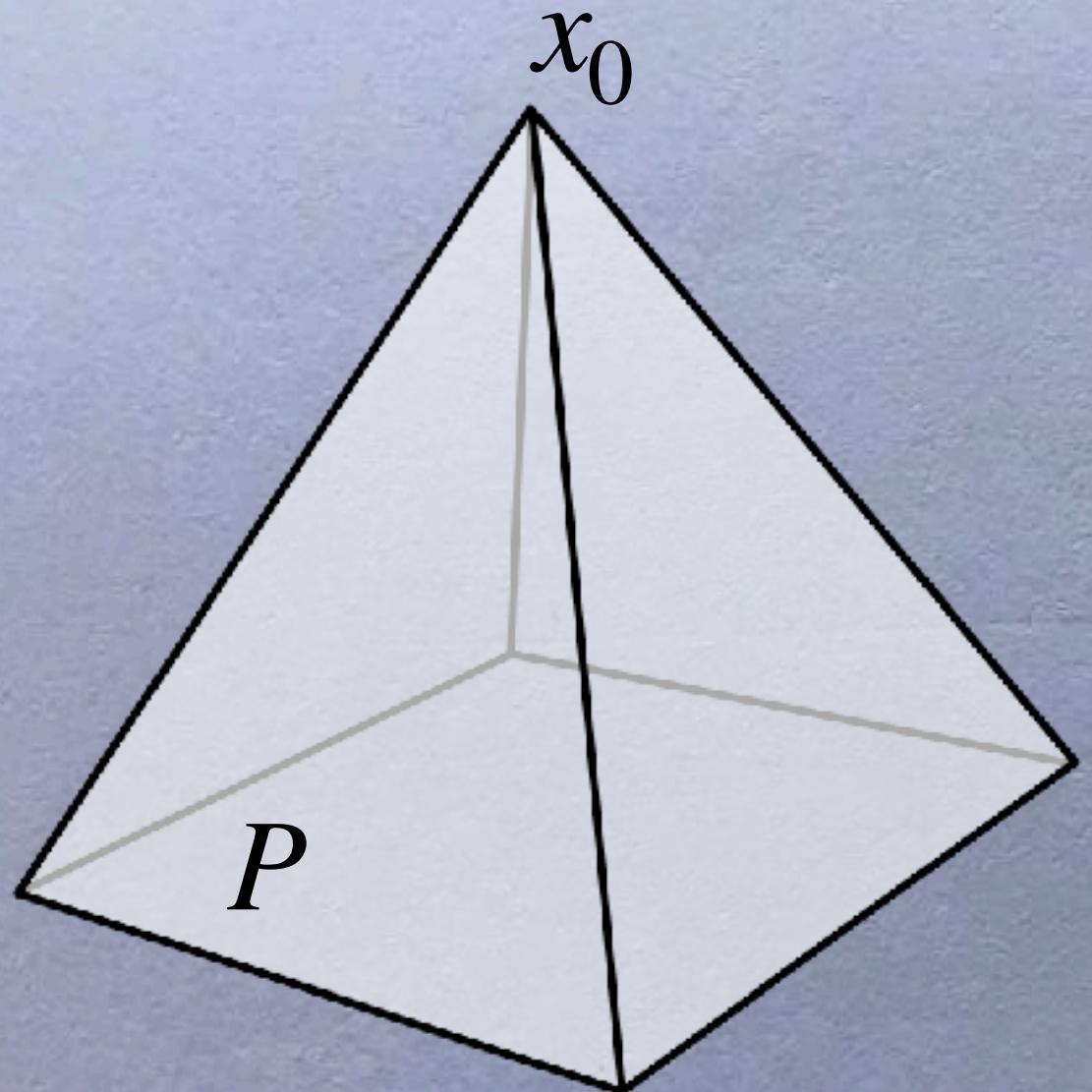


- Un polítopo de cruz contiene  $2d$  vértices y  $2^d$  facetas



## ⑥ Construcciones de polítopos a partir de otros:

Pirámide:

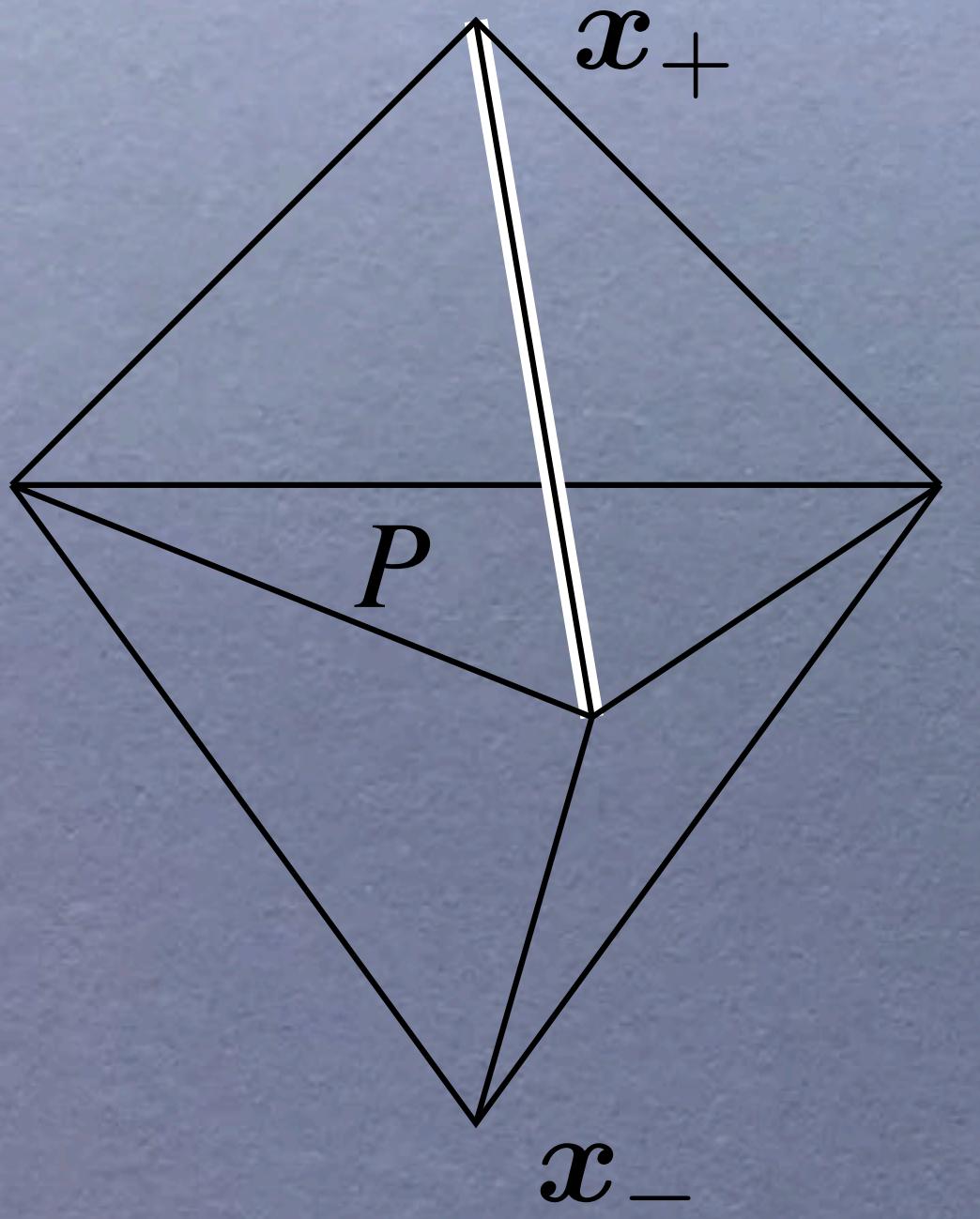


Dados  $P \subset \mathbb{R}^d$ , con  $\dim(P) = \hat{d} < d$ ,  
y  $x_0 \notin \text{aff}(P)$ , el polítopo de dimensión  
 $\hat{d} + 1$  dado por

$$\text{pyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{x_0\})$$

es una pirámide sobre  $P$ .

## Bipirámide:



Dados  $P \subset \mathbb{R}^d$ , con  $\dim(P) = \hat{d} < d$ , y  $x_+, x_- \notin \text{aff}(P)$ , tales que el segmento  $[x_-; x_+]$  y  $P$  se interesan en puntos interiores, el polítopo de dimensión  $\hat{d} + 1$  dado por

$$\text{bipyrr}(P) := \text{conv}(P \cup \{x_-, x_+\})$$

es una bipirámide sobre  $P$ .

Figura tomada de Ziegler (2007), “Lectures on Polytopes”.



## Producto cartesiano - 4 - Prisma

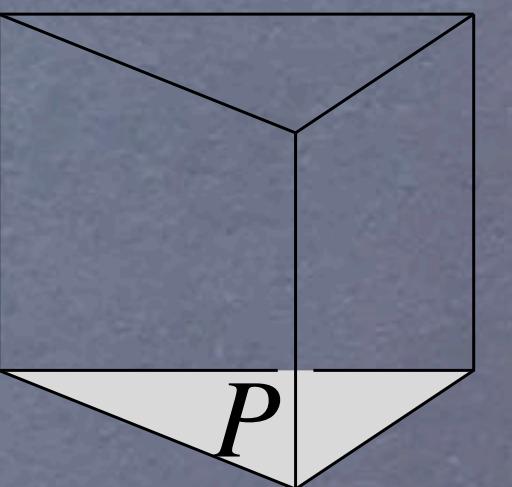
Dados dos polítopos  $P \subset \mathbb{R}^d$  y  $Q \subset \mathbb{R}^e$ , el producto cartesiano de  $P$  y  $Q$  es el polítopo de dimensión  $\dim(P) + \dim(Q)$  definido por:

$$P \times Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+e} : x \in P, y \in Q \right\}.$$

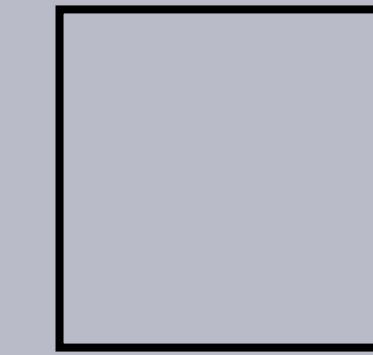
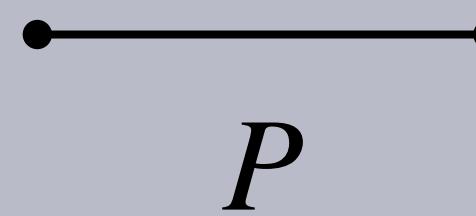
Puede demostrarse que las caras no vacías de  $P \times Q$  son los productos cartesianos de las caras no vacías de  $P$  con las caras no vacías de  $Q$ .

Un prisma sobre un polítopo  $P$  es el producto cartesiano de  $P$  con un segmento  $\Delta_1$ .

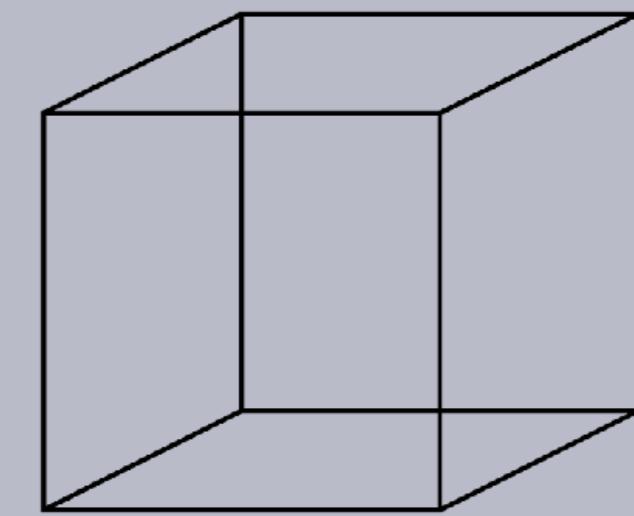
$$\text{prism}(P) := P \times \Delta_1$$



Los **hipercubos** pueden construirse al aplicar recursivamente la operación prisma sobre un segmento:

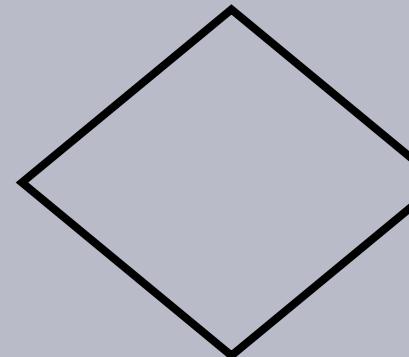
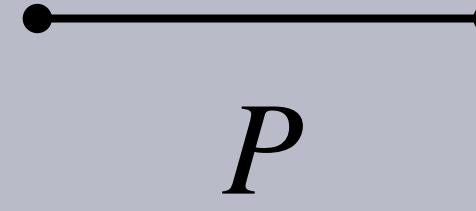


$\text{prism}(P)$

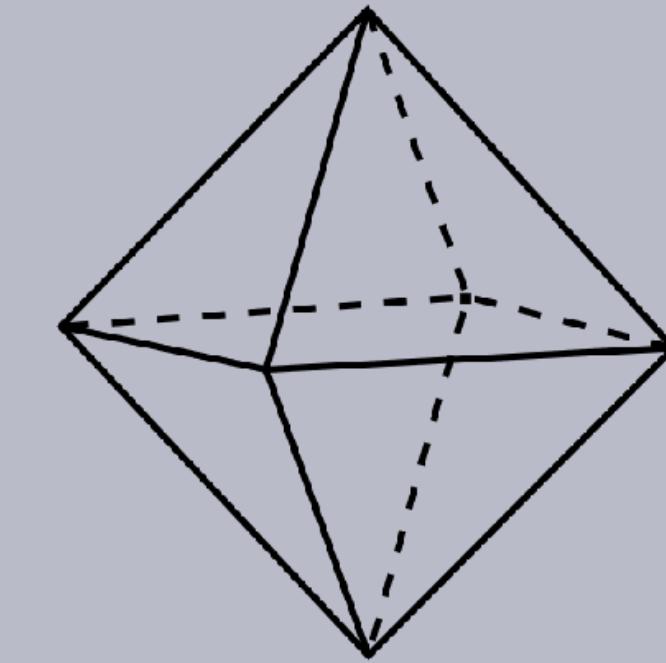


$\text{prism}(\text{prism}(P))$

Los **polítopos de cruz** pueden construirse al aplicar recursivamente la operación bipirámide sobre un segmento:



$\text{bipyr}(P)$



$\text{bipyr}(\text{bipyr}(P))$

## ⑦ Polítopos cíclicos

La curva de momento en  $\mathbb{R}^d$  es la función

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por:

$$t \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

El polítopo cíclico  $C_d(t_1, \dots, t_n)$  está definido por:

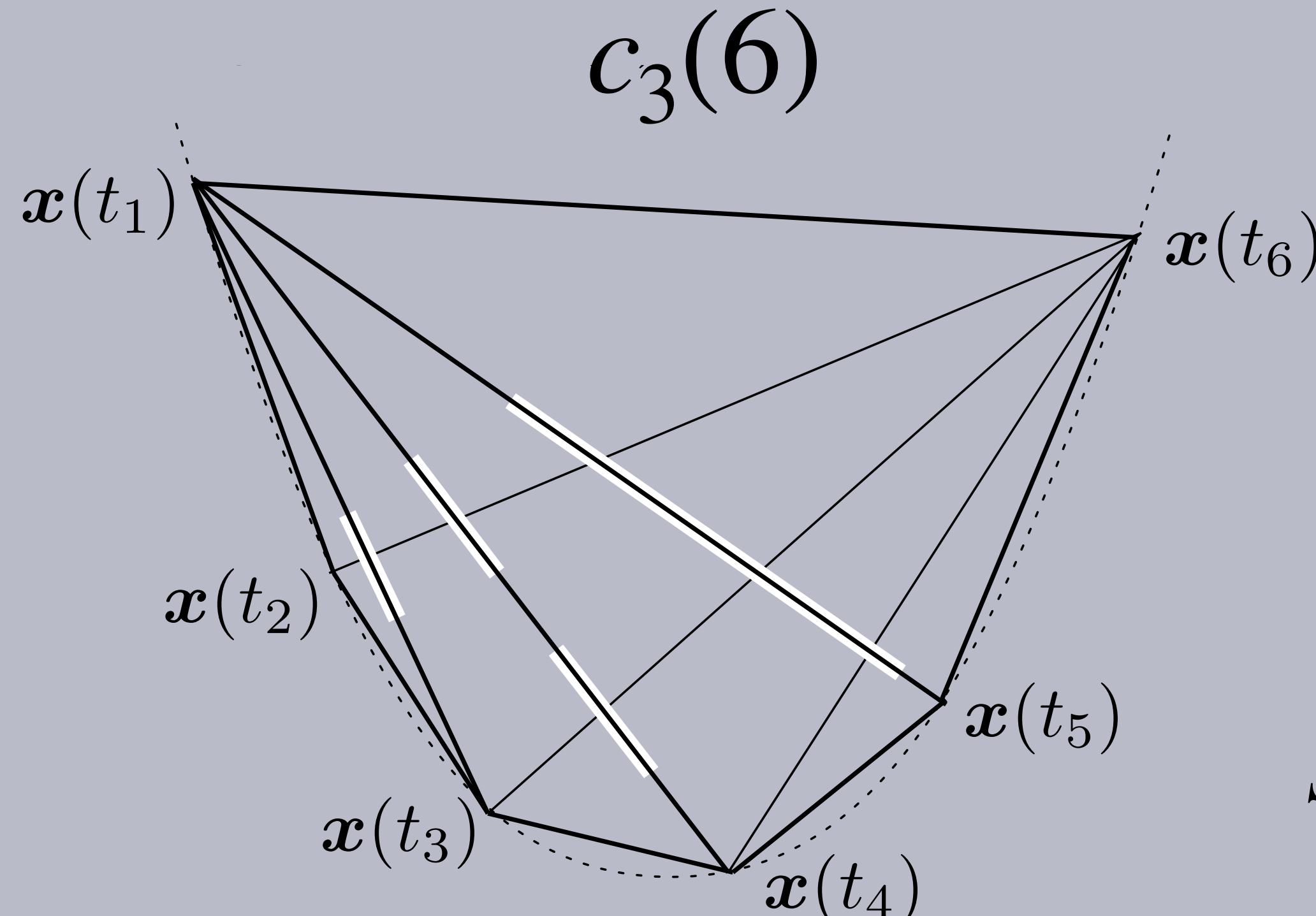
$$C_d(t_1, \dots, t_n) := \text{conv}(\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}) \subset \mathbb{R}^d$$

Demostaremos que si  $P = C_d(t_1, \dots, t_n)$  y  $Q = C_d(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n)$ , con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $\hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_n$ , entonces  $P \cong Q$ .

Esto justifica la notación  $C_d(n)$  para designar a la clase de equivalencia de d-polítopos cíclicos con n vértices.

d-polítopos  
(dimensión)

Ejemplo:



$$d = 3 \quad n = 6$$

$$[n] = \{1, \dots, 6\}$$

$$S_1 = \{2, 3, 6\}$$

$$S_2 = \{2, 5, 6\}$$

$S_1$  induce una faceta:

$\forall i, j \in [n] \setminus S_1 : \left| \{k \in S_1 : i < k < j\} \right|$  es par

$S_2$  no induce una faceta:

$\exists 1, 3 \in [n] \setminus S_2 : \left| \{k \in S_2 : 1 < k < 3\} \right| = 1$  (impar)

## Condición de paridad de Gale: (Teorema)

Sean  $n > d \geq 2$ ,  $[n] := \{1, \dots, n\}$  y  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

El polítopo cíclico:

$$C_d(n) := \text{conv}(\{\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)\})$$

es un polítopo simplicial de dimensión  $d$ .

Un conjunto  $S \subseteq [n]$ , con  $|S| = d$  induce una faceta de  $C_d(n)$  si y sólo si se satisface la siguiente condición de paridad:

Si  $i, j \in [n] \setminus S$ ; con  $i < j$ :

$$\left| \{k \in S \mid i < k < j\} \right| \text{ es par.}$$



## Condiciones de paridad de Gale (demonstración):

Por la identidad de Vandermonde para determinantes,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x(t_d) & x(t_1) & \dots & x(t_d) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{d-1} & t_1^{d-1} & \dots & t_d^{d-1} \\ t_0^d & t_1^d & \dots & t_d^d \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i)$$

Por lo tanto, si tomamos  $d+1$  puntos cualesquiera de  $x(t_1), \dots, x(t_n)$ , el determinante anterior es distinto de cero.

⇒  $d+1$  puntos de  $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$  son siempre afínmente independientes entre sí

⇒  $C_d(n)$  tiene dimensión  $d$  y toda faceta de  $C_d(n)$  es un simplex (pues tiene  $d$  vértices y su dimensión es  $d-1$ )



Sea ahora  $S := \{i_1, \dots, i_d\} \subset [n]$ . Definimos la función

$F_S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F_S(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & x(t_{i_1}) & \cdots & x(t_{i_d}) \end{pmatrix}$$

Notar que  $F_S(x)$  es una función afín. Por lo tanto

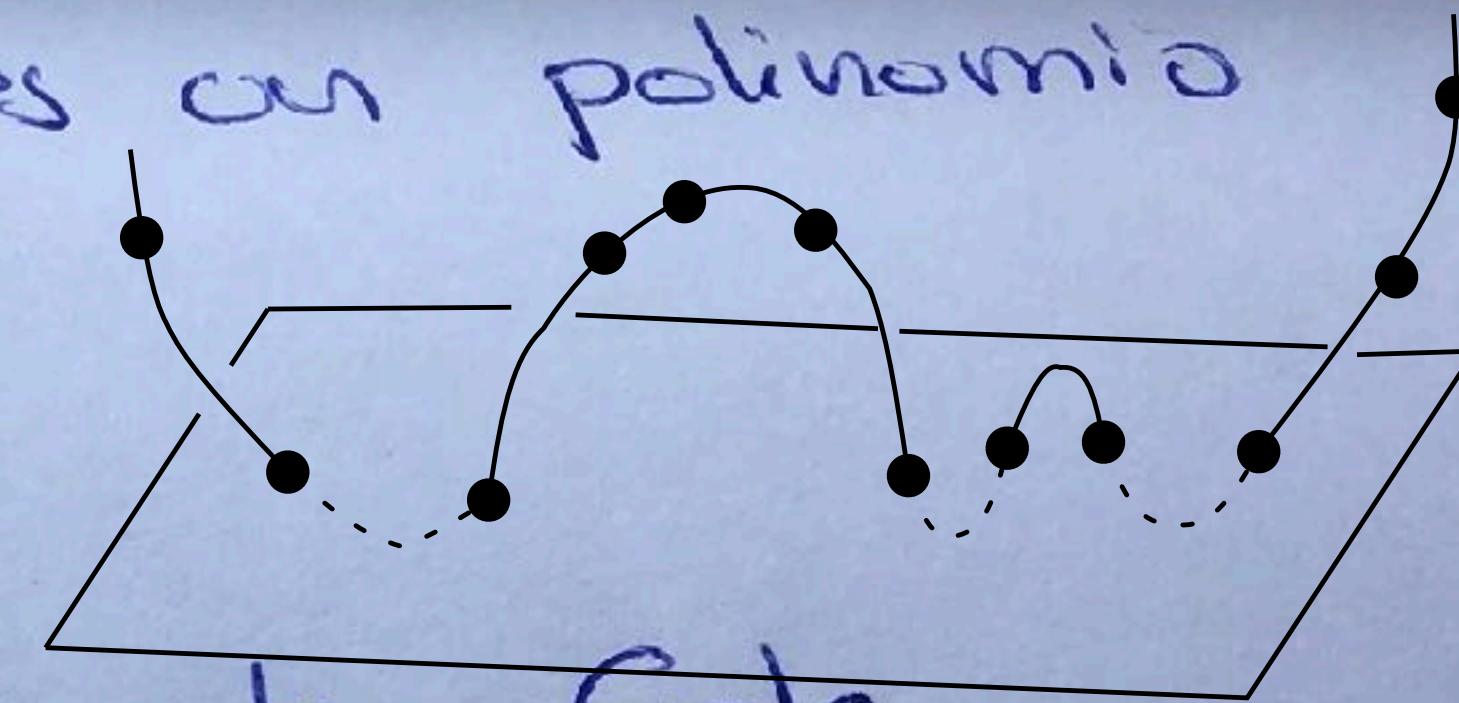
$$H_S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid F_S(x) = 0\}$$

es un hiperplano en  $\mathbb{R}^d$ . Notar que  $x(t_{i_l}) \in H_S, \forall i_l \in S$ .  
(Por qué?)

Basta con demostrar que  $\{x(t_i) \mid i \in [n] \setminus S\}$  están todos en el mismo semiespacio delimitado por  $H_S$ .

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) := F_S(x(t))$ . Lo anterior equivale a demostrar que  $f(t_i)$  tiene el mismo signo para todo  $i \in [n] \setminus S$ .

Para ello, basta observar que  $f$  es un polinomio de grado  $d$  con  $d$  raíces distintas:  
 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{id}$



Además, la condición de paridad de Gale puede re-escribirse en la siguiente forma:

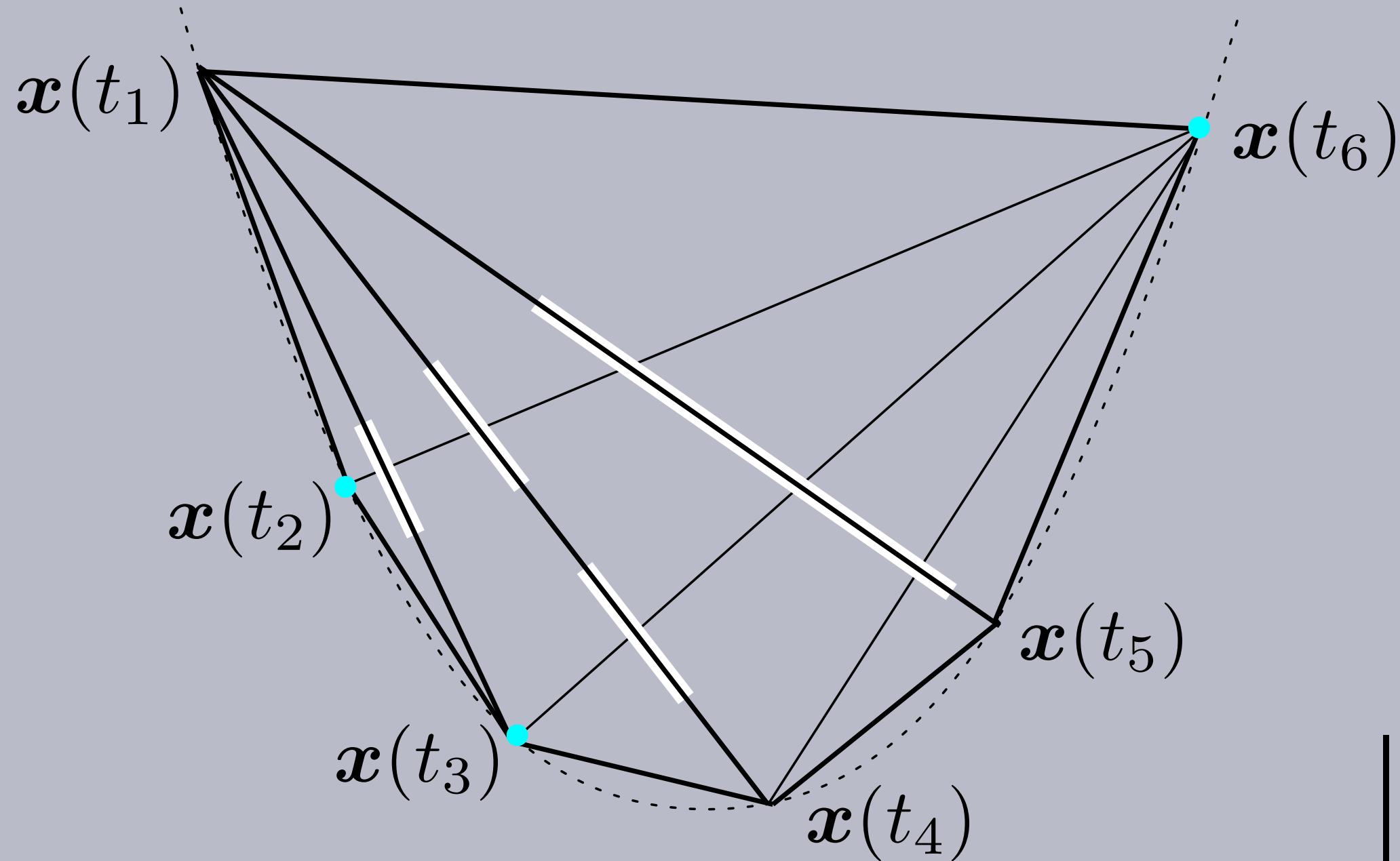
" $\forall i, j \in [n] - S$ , el número de raíces de  $f$  en el intervalo  $[t_i; t_j]$  debe ser par."

Puede verificarse que esta es una condición necesaria y suficiente para que  $f(t_i)$  y  $f(t_j)$  tengan el mismo signo.

Ejemplo:

$$d = 3 \quad n = 6 \quad S_1 = \{2,3,6\}$$

$$t_2 = -1, \quad x(t_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$t_3 = 1, \quad x(t_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t_6 = 3, \quad x(t_6) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$F_{S_1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & -1 & 1 & 3 \\ x_2 & 1 & 1 & 9 \\ x_3 & -1 & 1 & 27 \end{vmatrix} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

Notar que  $F_{S_1}(x) = 0$  es la ecuación del plano que contiene a  $x(t_2)$ ,  $x(t_3)$  y  $x(t_6)$ .

Figura tomada de Ziegler (2007), “Lectures on Polytopes”.

Notar que  $F_{S_1}(x) = 0$  es la ecuación del plano que contiene a  $x(t_2), x(t_3)$  y  $x(t_6)$ . ¿Por qué?

Queremos demostrar que  $F_{S_1}(x)$  tiene el mismo signo para todo  $x \in c_d(n)$ . ¿Por qué?

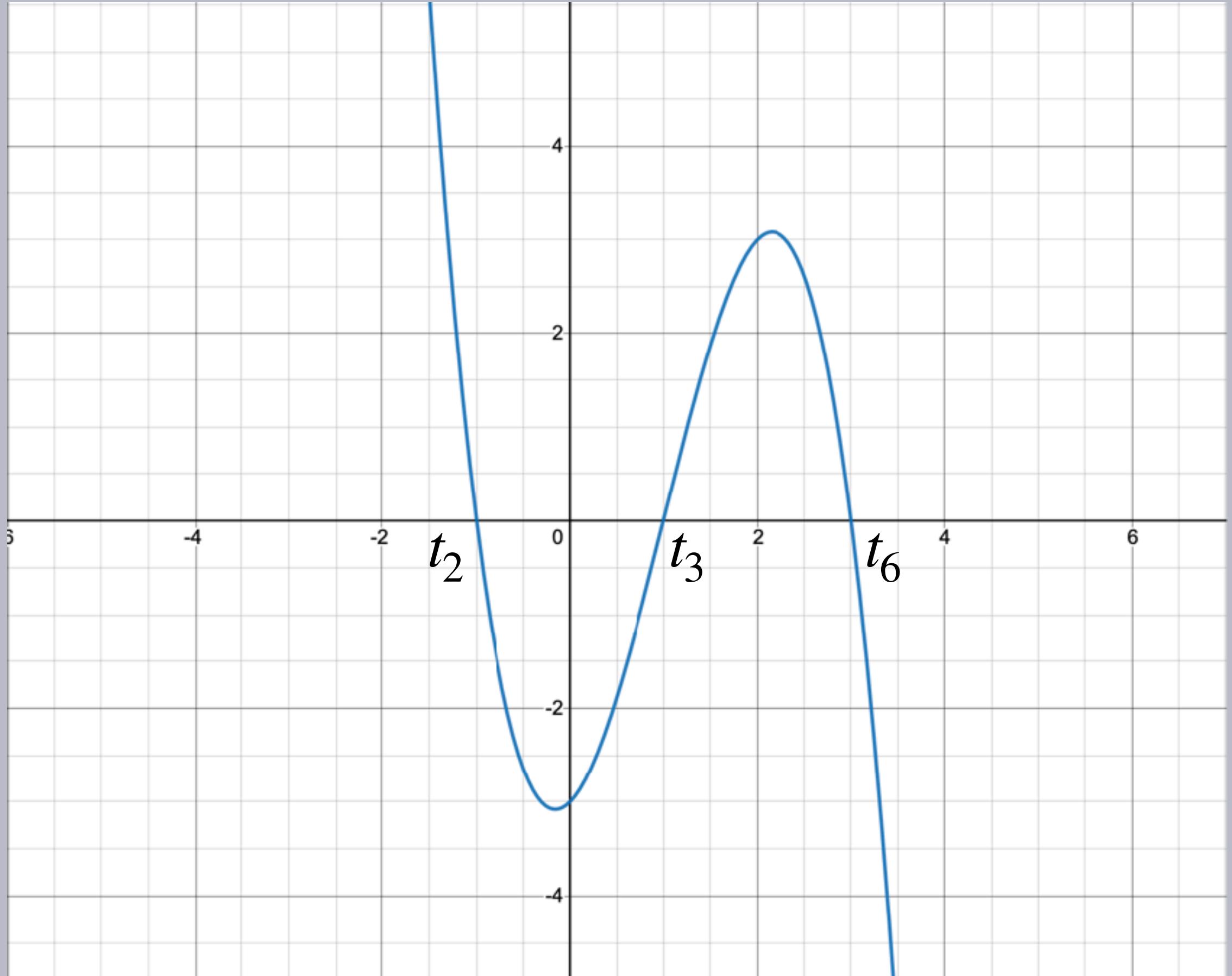
Esto equivale a demostrar que  $F_{S_1}(x(t_i))$  tiene el mismo signo para todo  $1 \leq i \leq n$ . ¿Por qué?

Por la identidad de Vandermonde:

$$F_{S_1}(x(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 & 3 \\ t^2 & 1 & 1 & 9 \\ t^3 & -1 & 1 & 27 \end{vmatrix} = c(-1-t)(1-t)(3-t), \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow F_{S_1}(x(t))$  es un polinomio de grado 3 con tres raíces distintas  $t_2, t_3$  y  $t_6$ .





Sea  $f(t_i) := F_{S_1}(x(t_i))$ .

$f(t_i)$  tiene el mismo signo para todo  $1 \leq i \leq n$ :

$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i < j \leq n : f(t_i)$  y  $f(t_j)$  tienen el mismo signo

$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i < j \leq n :$ la curva tiene un número par de raíces entre  $t_i$  y  $t_j$ .

$\Leftrightarrow \forall i, j \in [n] \setminus S_1 : \left| \{k \in S_1 : i < k < j\} \right|$  es par



Corolario: El polítopo cíclico  $C_d(n)$  es  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -vecinal, es decir, cualquier conjunto  $S \subseteq [n]$  con  $|S| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  está asociado a una cara de  $C_d(n)$ .

Demonstración: Sea  $C_d(n) = C_d(t_1, \dots, t_n)$ , con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

Sea  $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ , con  $k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ .

Elegimos:  $\varepsilon > 0$  t.q.  $t_i < t_i + \varepsilon < t_{i+1}, \forall i = 1, \dots, n-1$   
 $M \in \mathbb{N}$  t.q.  $M > t_n + \varepsilon$

Construimos la función línea

$$F_S(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x & x(t_{i_1}) & x(t_{i_1} + \varepsilon) & x(t_{i_2}) & \dots & x(M) & \dots & x(M + d - z) \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse que  $F_S(x(t_{i_\ell})) = 0, \forall i_\ell \in S$ .



- Puede demostrarse además que  $F_S(x)$  tiene el mismo signo (positivo o negativo), para todo  $x \in C_d(n)$
- Para ello, basta demostrar que  $F_S(x)$  tiene el mismo signo, para todo  $x = x(t_i)$ , con  $1 \leq i \leq n$ .
- Definimos  $f(t) := F_S(x(t))$ . Notar que  $f$  es un polinomio de grado  $d$  en  $t$ , con  $d$  distintos ceros:

$$t_1, t_{1+\varepsilon}, t_{12}, \dots, t_k, t_{k+\varepsilon}, M, M+1, \dots, M+d-2k$$

- Sean  $j, h \in [n] \setminus S$ . Sea

$$T = \{i \in S \mid j < i < h\} = \{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_r\}$$

par
impar

Entre  $t_j$  y  $t_h$  existe un número de par de ceros def.

$$\Rightarrow t_{\hat{i}_1}, t_{\hat{i}_1+\varepsilon}, t_{\hat{i}_2}, t_{\hat{i}_2+\varepsilon}, \dots, t_{\hat{i}_r}, t_{\hat{i}_r+\varepsilon}$$

$\Rightarrow f(t_j)$  &  $f(t_h)$  tienen el mismo signo!!

Como consecuencia del Corolario anterior:

- Si  $d \geq 2$ , demostramos que todos los puntos  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  son vértices de  $C_d(n)$
- Si  $d \geq 4$ , demostramos que entre cada par de puntos  $x(t_i)$  y  $x(t_j)$ , el polítopo  $C_d(n)$  contiene una arista. Esto es contraintuitivo (En  $d=3$  no puede construirse un polítopo, además del simplex, que tenga esta propiedad).



- ⑥ • Sea  $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$  una transformación afín.
- Si  $P \subset \mathbb{R}^d$  es un  $\mathcal{V}$ -polítopo, entonces  $\pi(P) \subset \mathbb{R}^e$  es también un  $\mathcal{V}$ -polítopo. (Ejercicio: demostrar)
- Si  $\pi$  restringida a  $P$  es inyectiva, entonces  $\pi(P)$  es afinamente equivalente a  $P$ .
- Caso contrario,  $\pi(P)$  es una proyección de  $P$ .

Todo  $\mathcal{V}$ -polítopo  
 $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$   
 puede verse como la  
 proyección de un simplex  
 $\Delta_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  (Ejercicio)

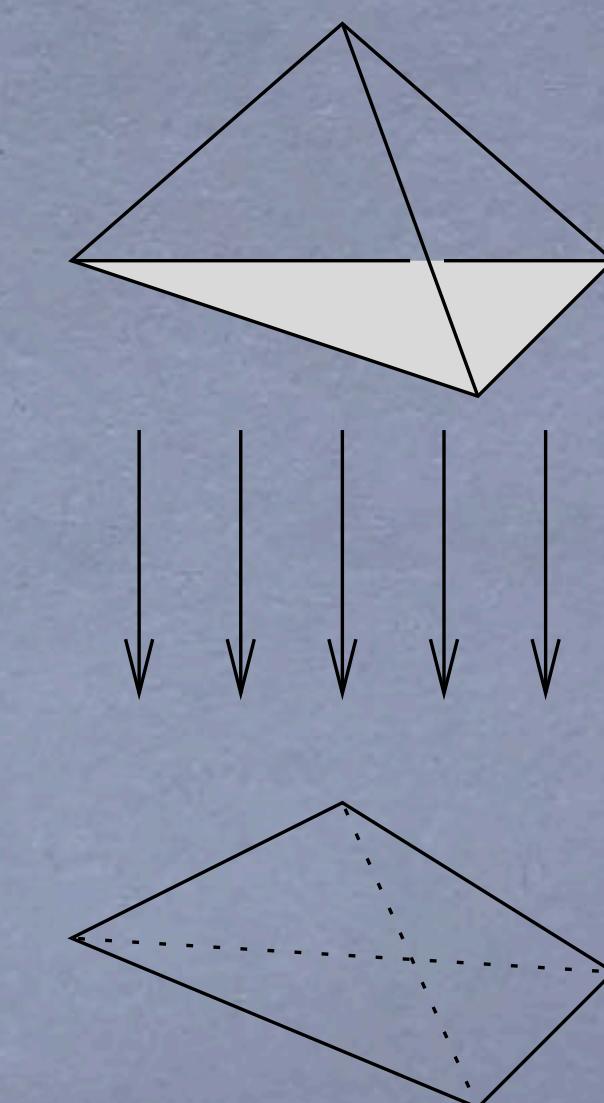


Figura tomada de Ziegler (2007), "Lectures on Polytopes".

- Un polítopo  $P \subset \mathbb{R}^d$  es centralmente simétrico si tiene un centro, es decir, un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  tal que  $x_0 + x \in P \Leftrightarrow x_0 - x \in P$ . Notar que si

$$P = \{Ax + x_0 \mid x \in C_d\}$$

entonces  $P$  es centralmente simétrico y su centro es  $x_0$ . Es decir, toda proyección de un polítopo de cruz es centralmente simétrica. Se puede demostrar que todo polítopo centralmente simétrico es la proyección de un polítopo de cruz.

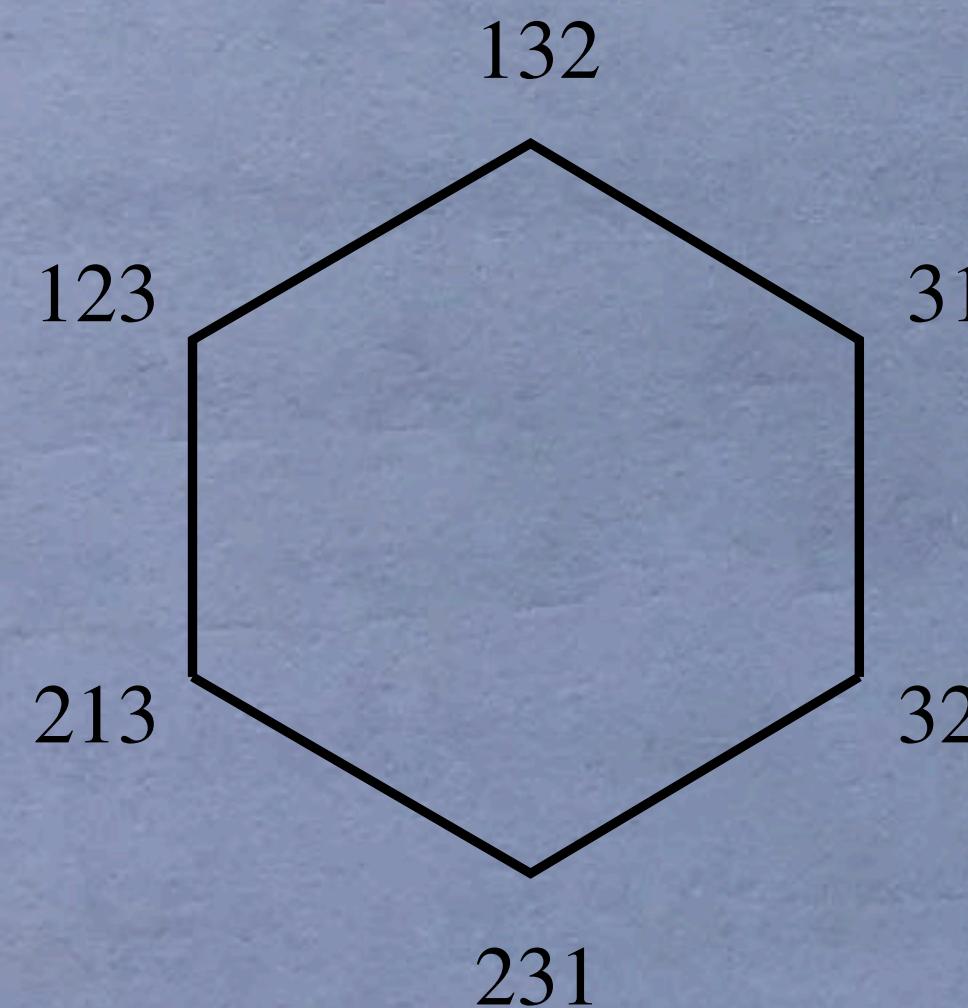
- Las proyecciones de cubos se conocen como zonótopos.



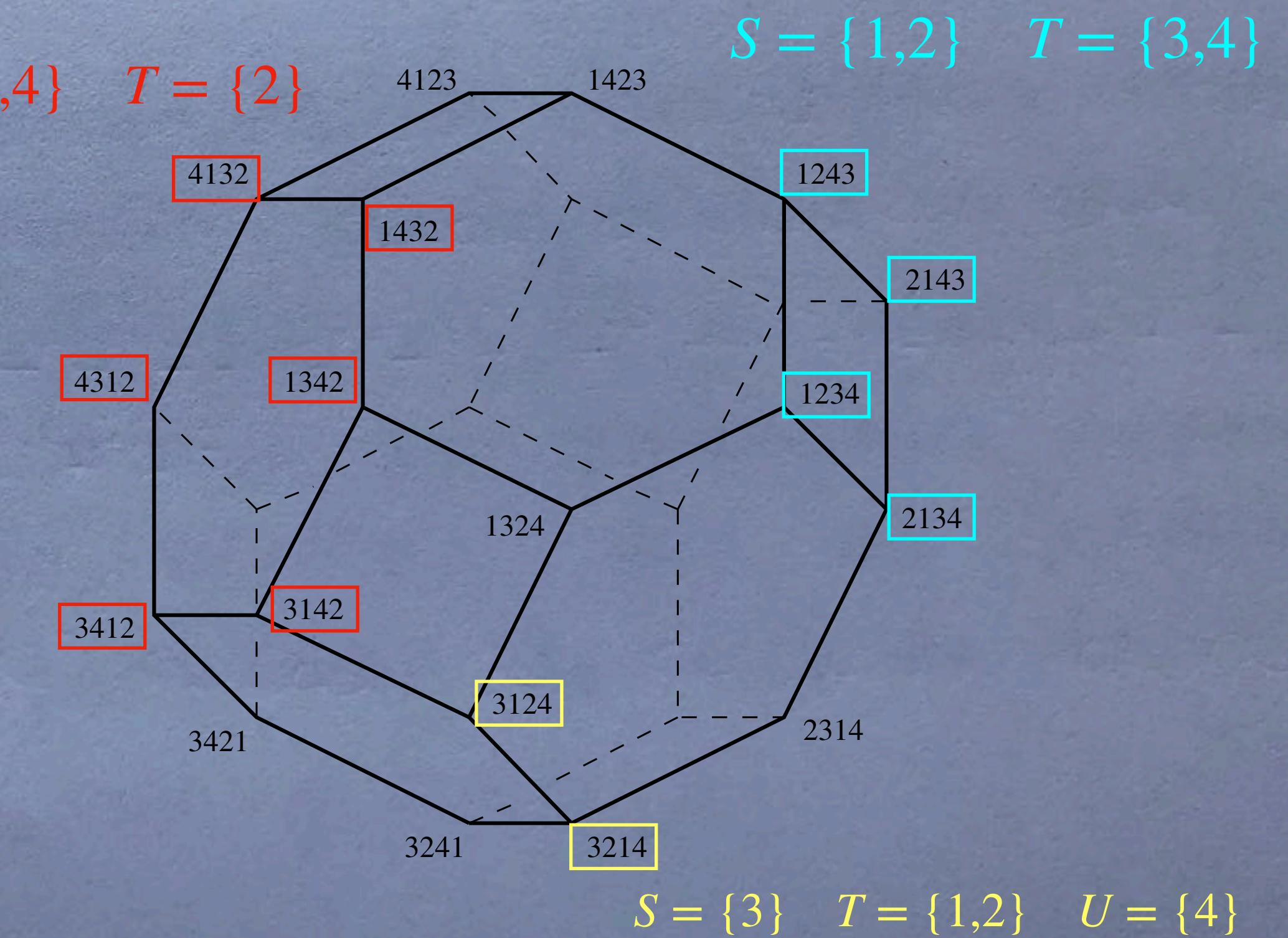
## ⑤ Permutaedro

El permutaedro  $\Pi_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  es el polítopo obtenido al calcular la envolvente convexa de todos los puntos en  $\mathbb{R}^d$  cuyas coordenadas son permutaciones de  $(1, 2, \dots, d)$ .

$$[d] = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$S = \{1, 3, 4\} \quad T = \{2\}$$



- $\Pi_{d-1}$  tiene dimensión  $d-1$
- $\Pi_{d-1}$  es la proyección de un hipercubo (es decir, es un zonotopo)  $\rightarrow$  Ejercicio!!
- $\Pi_{d-1}$  es un polítopo simple: cada vértice está contenido en  $d-1$  facetas.
- Las caras de dimensiones k de  $\Pi_{d-1}$  tienen una interpretación combinatoria; corresponden a particiones ordenadas del conjunto [d] en  $d-k$  subconjuntos no vacíos. Así, los vértices son permutaciones de  $[d]$ , mientras que las facetas están asociadas a particiones de  $[d]$  de la forma  $(S, [d] \setminus S)$ , con  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq [d]$ .

## ⑩ Polítopos - 0/1

- Se obtienen al tomar la envolvente convexa de puntos en  $\mathbb{R}^d$  con coordenadas iguales a 0 o 1
- Pueden verse como los polítopos obtenidos al tomar las envolventes convexas de subconjuntos de vértices del hiper cubo
- Son importantes en optimización combinatoria y combinatoria - poliedral
- Ejemplos ej) Hipersimplex  $\Delta_{d-1}(k) \subset \mathbb{R}^d$ , con  $k \in \{1, \dots, d-1\}$

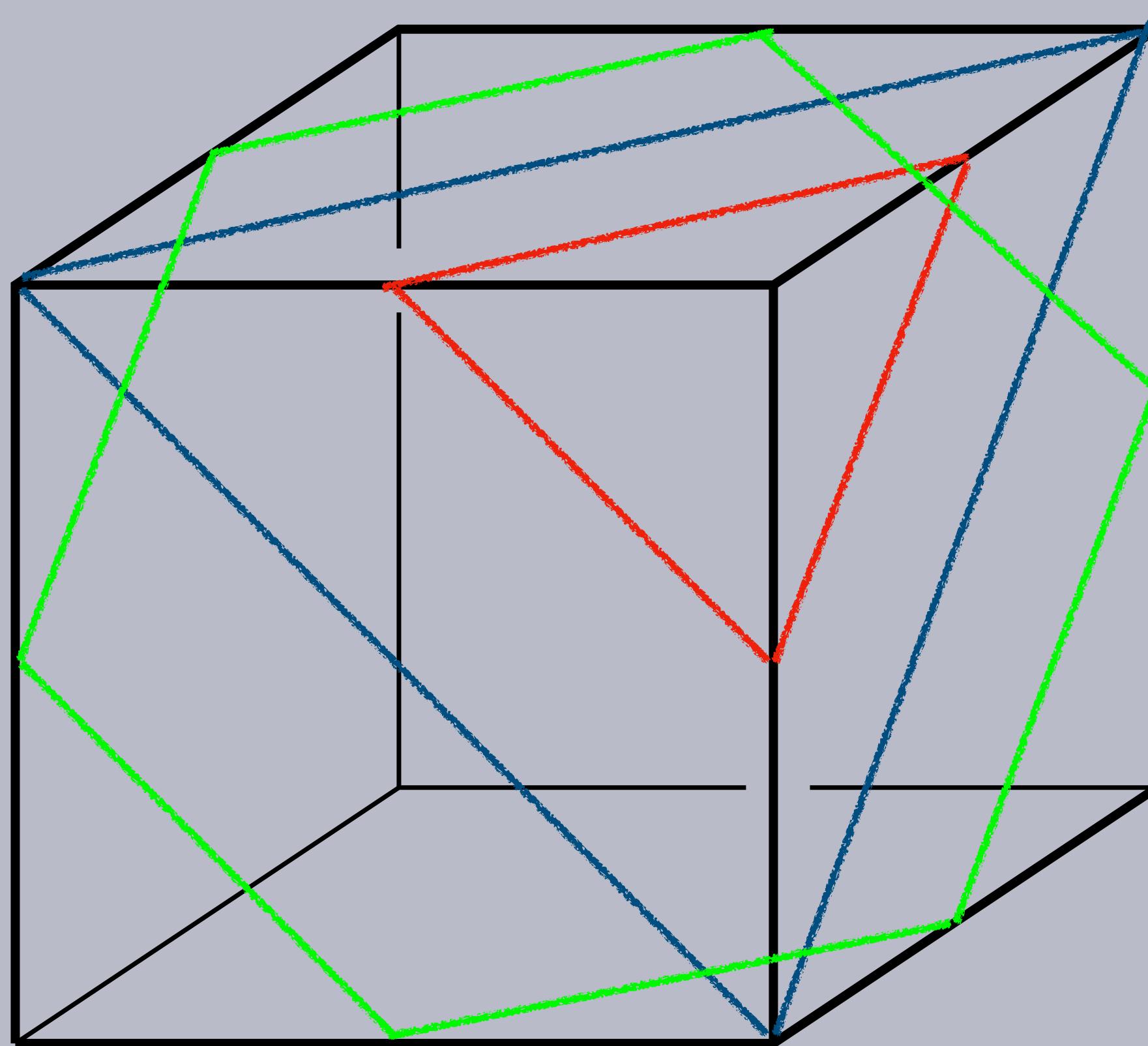
$$\Delta_{d-1}(k) = \text{conv}(\{x \in \{0,1\}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i = k\})$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_i \leq 1, \forall i=1, \dots, d, \sum_{i=1}^d x_i = k\}$$

Notar que  $\Delta_{d-1} = \Delta_{d-1}(1)$ . Ejercicio: dibujar  $\Delta_2(1)$  y  $\Delta_2(2)$

# Intersecando un cubo de dimensión 3 con hiperplanos de la forma

$$H_k := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = k\}$$



$$k = \frac{5}{2}$$

$$k = 2$$

$$k = \frac{3}{2}$$



## b) Polítopos de Birkhoff.

- Sea  $S_d$  el conjunto de todas las permutaciones de  $[d]$ . A cada  $\sigma \in S_d$  le asociamos una matriz  $X^\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  definida por:

$$X_{ij}^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma(i)=j \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Podemos interpretar a cada matriz  $X^\sigma$  como un vector de componentes 0 o 1 en  $\mathbb{R}^{d^2}$ . Con esto definimos el polítopo  $P_d$ :

$$P_d := \text{conv}\left(\{X^\sigma \in \{0,1\}^{d^2} \mid \sigma \in S_d\}\right) \subset \mathbb{R}^{d^2}$$

Este polítopo ha sido ampliamente estudiado y se conoce por varios nombres: polítopo de Birkhoff, polítopo de asignación, polítopo de matrizes doblemente estocásticas, ...



- El polítopo  $P(d)$  tiene  $d!$  vérticos,  $d^2$  facetas y su dimensión es de  $(d-1)^2$ .

- Para este polítopo se conoce una descripción lineal completa, es decir, una representación como 2B-polítopo:

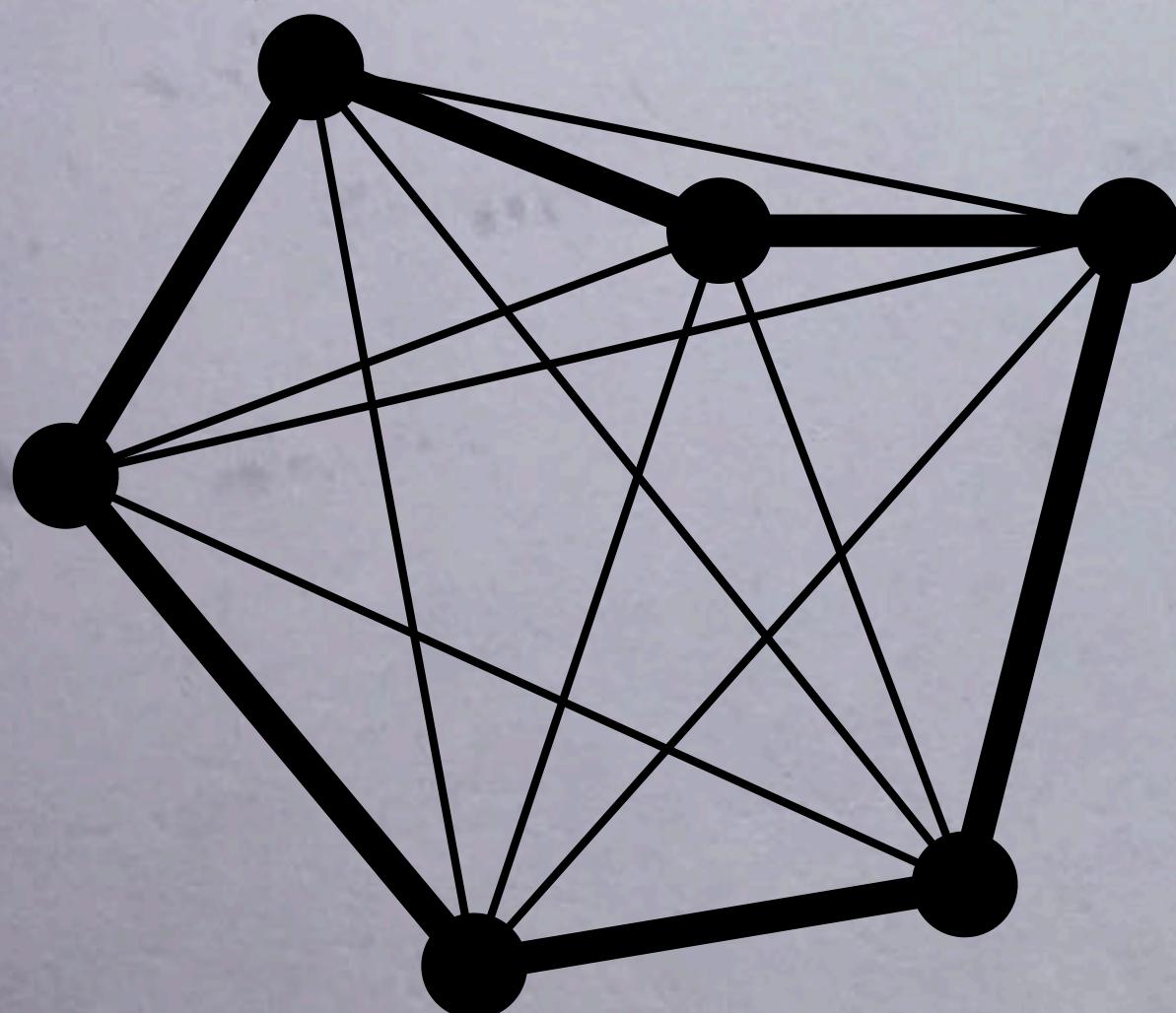
$$P(d) = \{ X \in \mathbb{R}^{d \times d} : \begin{aligned} & x_{ij} \geq 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq d, \\ & \sum_{k=1}^d x_{ik} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \\ & \sum_{k=1}^d x_{kj} = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq d \end{aligned} \}$$

- Se conocen algoritmos eficientes para optimizar una función lineal sobre  $P(d)$



### c) Polytope del agente viajero ("TSP-polytope")

Dadas  $n$  ciudades (o puntos sobre el plano euclídeo), el problema del agente viajero (traveling salesman problem, TSP) consiste en construir un tour para visitar todas las ciudades y regresar al punto de partida, recomendando la menor distancia posible.



- Sea  $K_n$  el grafo completo sobre los  $n$  vértices dados (ciudades)
- Cada tour  $T$  puede considerarse como un conjunto de aristas  $T \subseteq E(K_n)$
- Denotaremos por  $\chi_T \in \{0,1\}^{\binom{n}{2}}$  al vector de incidencia de  $T$ .

El polítopo del agente viajero se define por:

$$Q_T(n) := \text{conv} \left( \left\{ X_T \in \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \mid T \text{ es un tour en } V_n \right\} \right) \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$$

- Se conoce que  $Q_T(n)$  es un polítopo de dimensiones  $\binom{n}{2}$  -  $n = \frac{n(n-3)}{2}$  con  $\frac{(n-1)!}{2}$  vértices, correspondientes a todos los tours válidos
- La estructura de las caras de  $Q_T(n)$  es muy compleja. No se conocen las desigualdades que definen sus facetas.
- Se ha demostrado que todo polítopo 0/1 es combinatorialmente equivalente a alguna cara de  $Q_T(n)$ , para  $n$  suficientemente grande.



# Diagramas de Schlegel

Un diagrama de Schlegel permite representar un  $d$ -polítopo como un **complejo politopal** en dimensión  $d-1$ .

Son de utilidad (entre otras cosas) para estudiar propiedades de los polítopos de dimensión 4.

**Idea:** Proyectar al polítopo sobre una de sus caras.

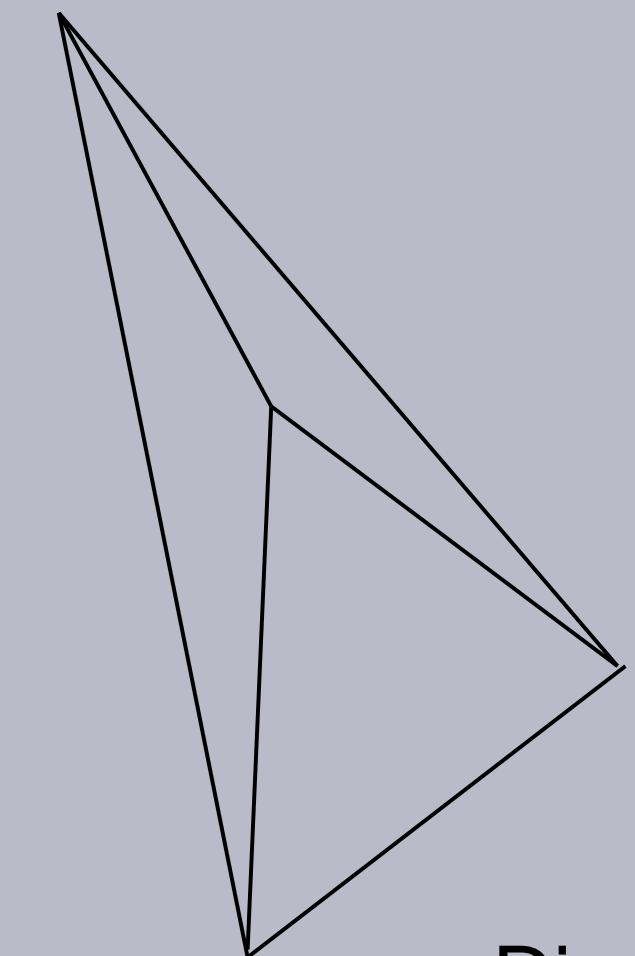
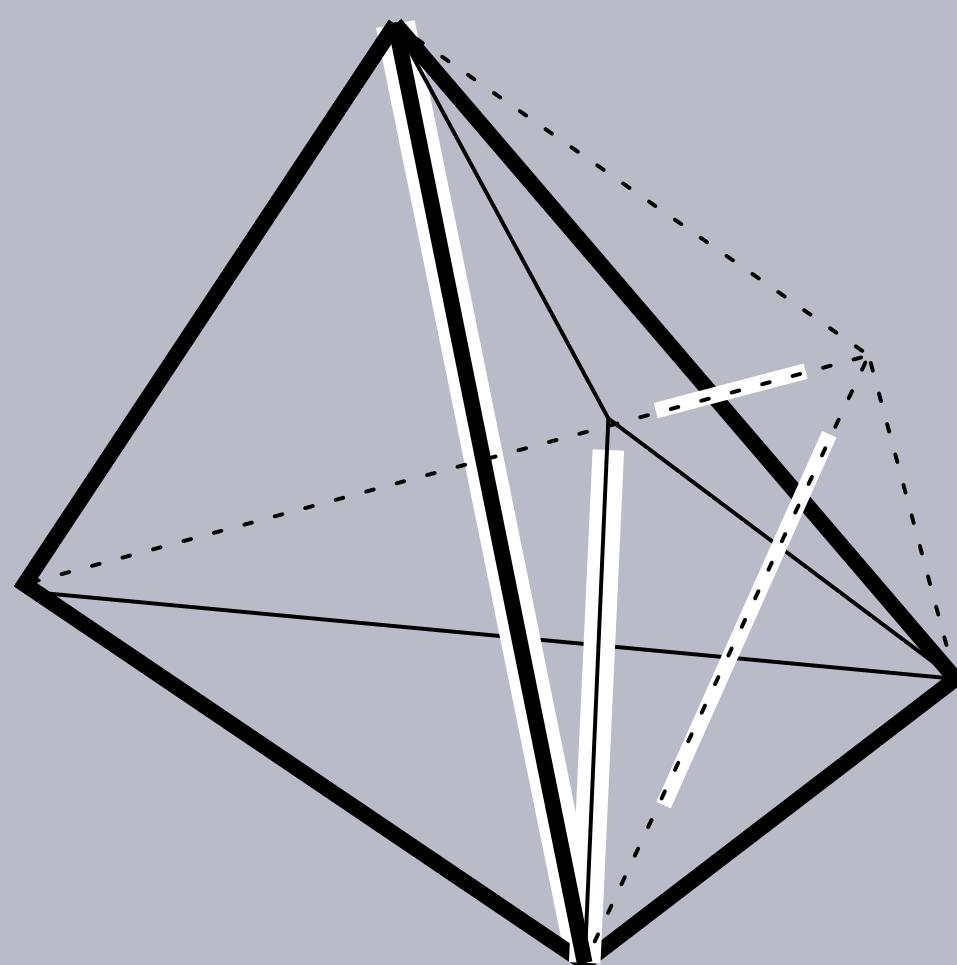


Diagrama de Schlegel  
de un tetraedro

## Diagrama de Schlegel de un cubo

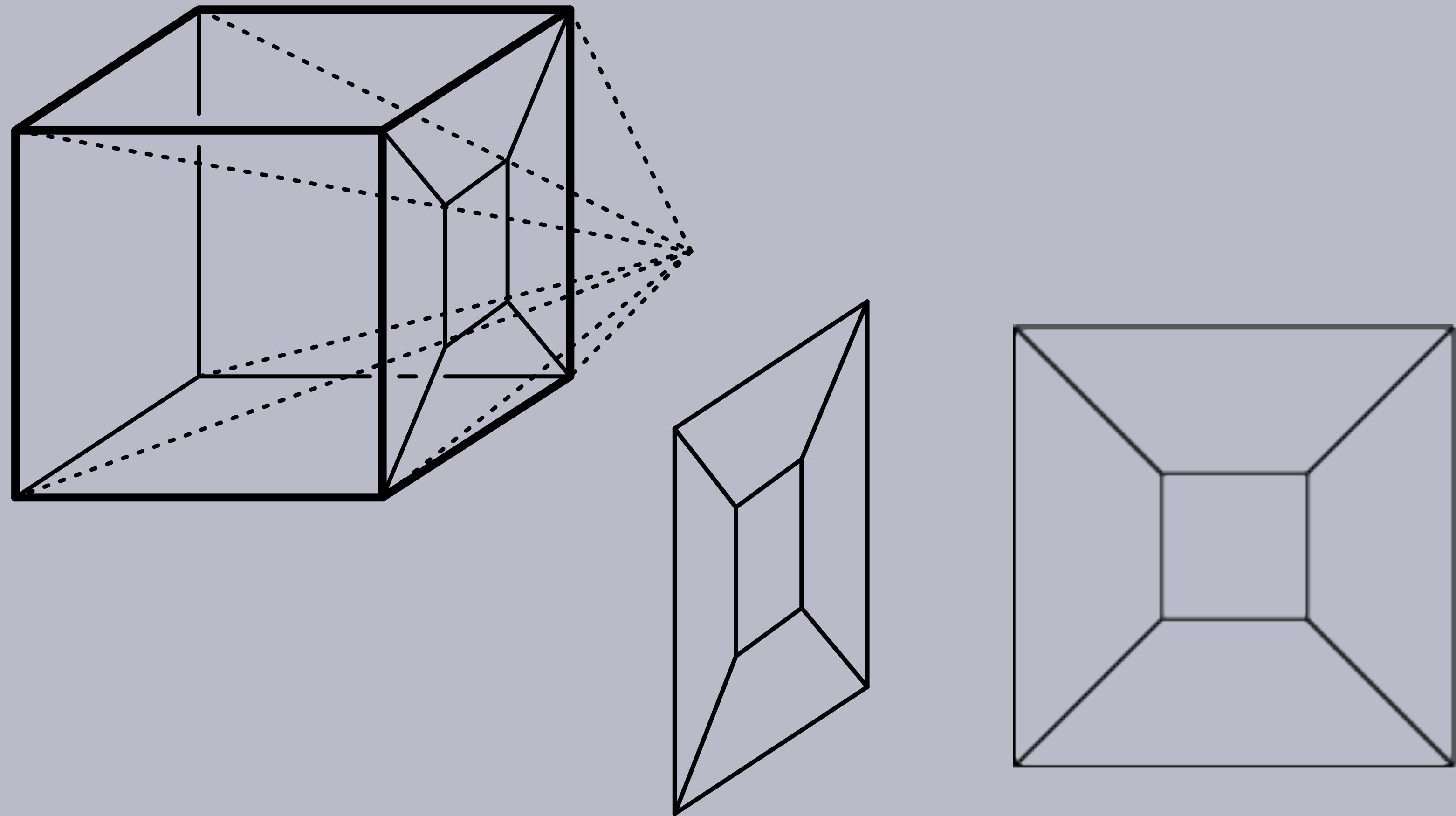
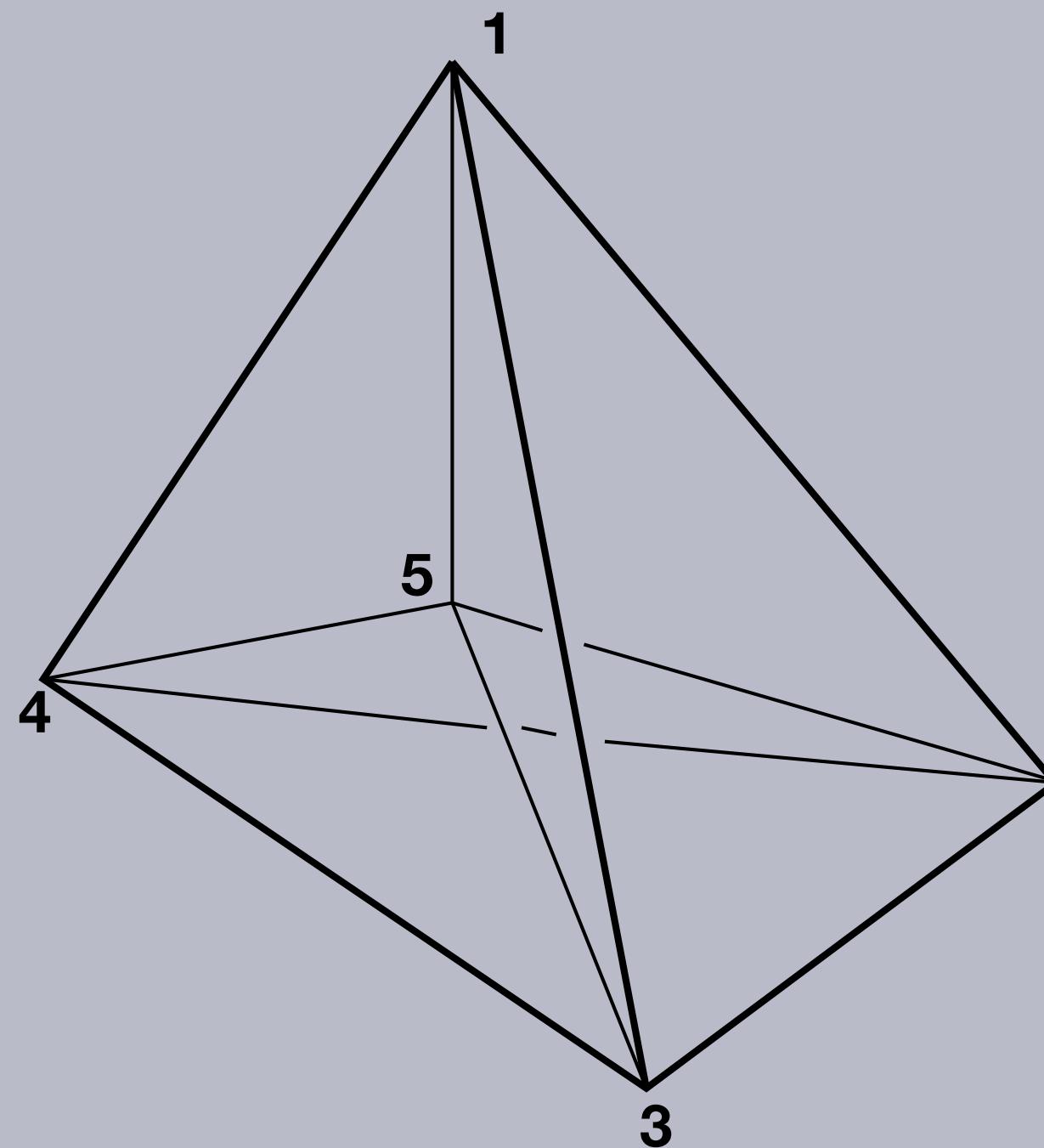


Figura tomada de Ziegler (2007), “Lectures on Polytopes”.



## Diagrama de Schlegel de un 4-simplex



5 vértices

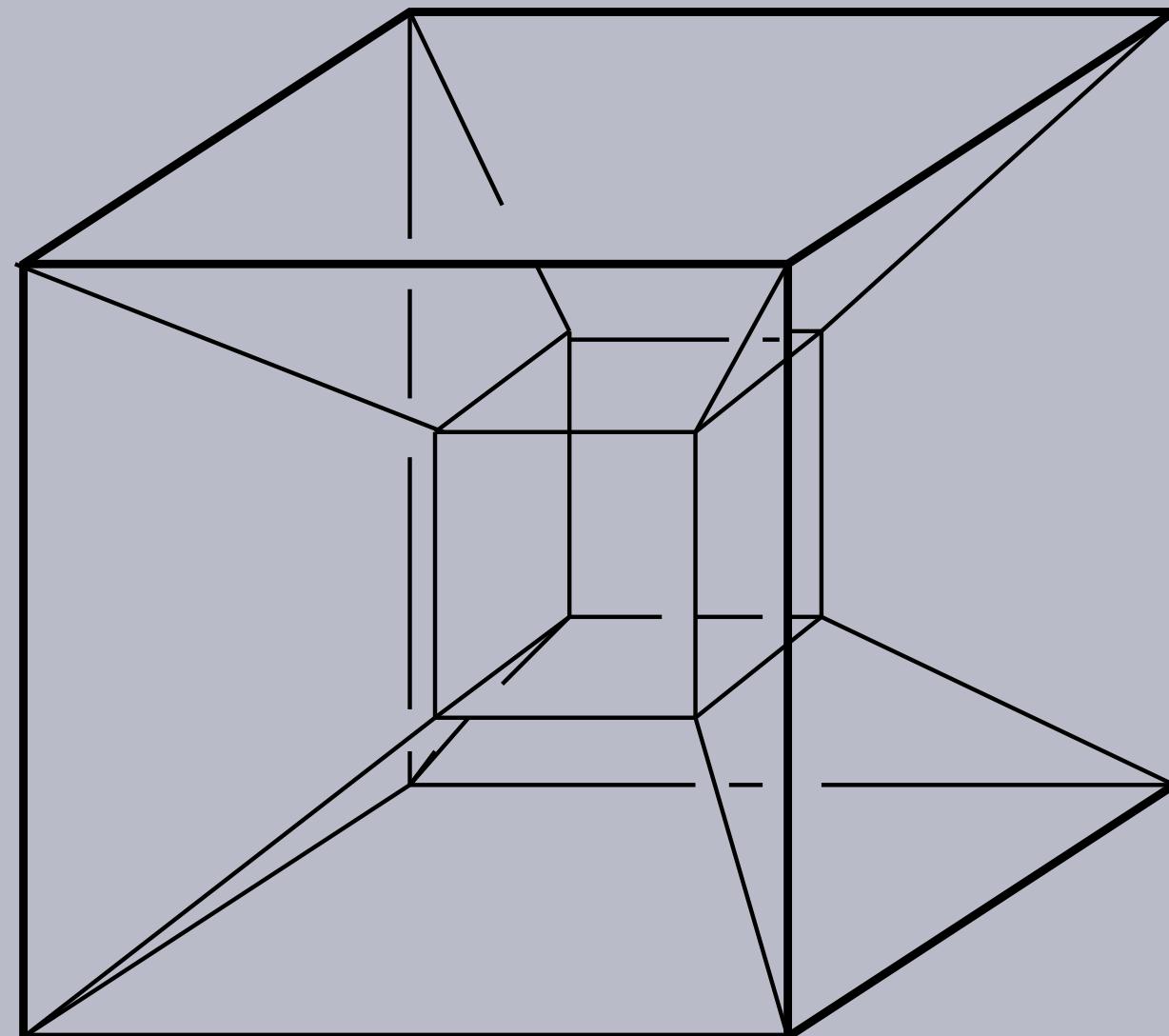
10 aristas

10 caras de dim 2

5 facetas

$\forall S \subseteq \{1, \dots, 5\}$ ,  $S$  induce una cara de dimensión  $|S| - 1$

# Diagrama de Schlegel de un 4-hipercubo



16 vértices

$32 \text{ aristas} = 12 \text{ (cubo grande)} + 12 \text{ cubo pequeño} + 8 \text{ (entre ellos)}$

$24 \text{ caras de dim 2} = 6 \text{ (cubo grande)} + 6 \text{ (cubo pequeño)} + 12 \text{ (entre ellos)}$

8 facetas, comb. equivalentes a 3-cubos

# Ejercicios

- Dibujar el diagrama de Schlegel de un prisma triangular en 3d
- Dibujar el diagrama de Schlegel de un prisma en 4d construido a partir del prisma anterior
- Dibujar el diagrama de Schlegel de un octaedro
- Dibujar el diagrama de Schlegel de un polítopo de cruz de 4d
- Dibujar el diagrama de Schlegel de un polítopo cíclico en 4d con 6 vértices

En todos los casos, contar el número de caras de cada dimensión que tienen los polítopos.

