2.2. Eliminación de Fourier-Motzkin

Transformando un $\mathscr{V}$-cono en un $\mathscr{H}$-cono

Dado $C = \text{cone}(Y)$, con $Y \in \mathbb{R}^{d\times k}$:

1. Definimos $C_0 := P(A_0, \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{d+k}$ con:

$$A_0 := \begin{pmatrix} I_d & -Y \\ -I_d & Y \\ O & -I_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2d+k)\times(d+k)},$$

$$C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+k} : A_0 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+k} : \begin{pmatrix} x - Yt \\ -x + Yt \\ -t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Para $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$A_i := (A_{i-1})^{/t_i}$$

Notar que:

$$P(A_k, \mathbf{0}) = \text{elim}_{t_k}(\text{elim}_{t_{k-1}}(\cdots \text{elim}_{t_1}(C_0)\cdots))$$

Además, por otra parte

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in C_0, \text{ para algún } t \in \mathbb{R}^k \right\}$$

$$\Leftrightarrow C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \text{elim}_{t_k}(\text{elim}_{t_{k-1}}(\cdots \text{elim}_{t_1}(C_0)\cdots)) \right\}$$

$$\Leftrightarrow C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in P(A_k, \mathbf{0}) \right\}$$

Notar que las columnas de A_k correspondientes a $t_1, \ldots, t_k$ son todas iguales a cero. Luego,

$$C = P(\hat{A}, \mathbf{0})$$

donde $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ se obtiene de A_k al eliminar estas columnas.

Transformando un $\mathscr{H}$-cono en un $\mathscr{V}$-cono

Dado $C = P(A, \mathbf{0})$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$:

1. Definimos $C_0 := \mathrm{cone}(Y_0) \subset \mathbb{R}^{d+m}$ con:

$$C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : Ax \leq w \right\}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} I_d & -I_d & O \\ A & -A & I_m \end{pmatrix}$$

2. Para $i \in \{1,\ldots,m\}$:

$$Y_i := (Y_{i-1})^{/w_i}$$

Notar que:

$$\mathrm{cone}(Y_m) = C_0 \cap H_{w_1} \cap \cdots \cap H_{w_m}$$

Además, por otra parte

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in C_0, \right\}$$

$$\Leftrightarrow C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in C_0 \cap H_{w_1} \cap \cdots \cap H_{w_m} \right\}$$

$$\Leftrightarrow C = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \text{cone}(Y_m) \right\}$$

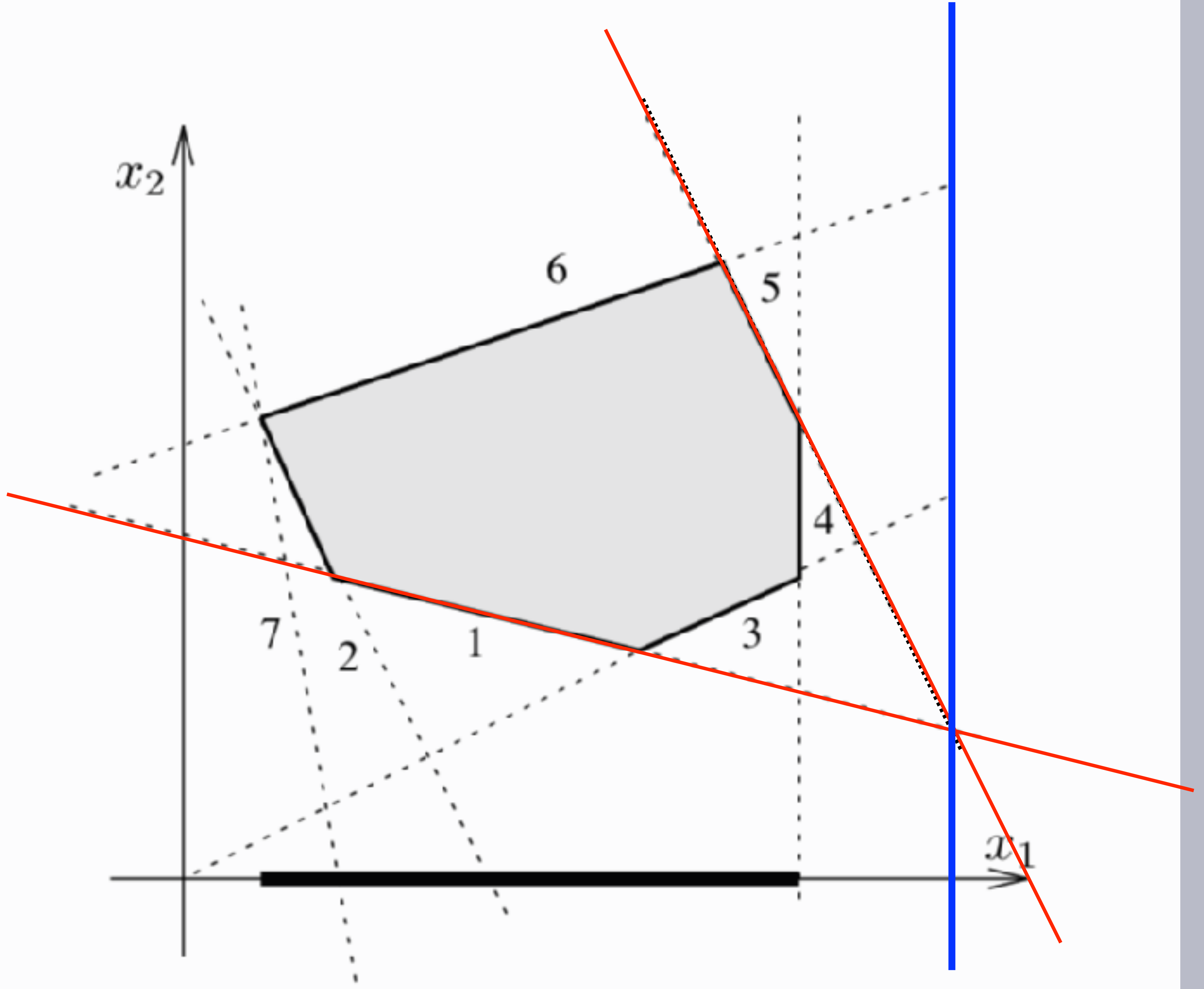
Notar que las filas de Y_m correspondientes a $w_1, \ldots, w_m$ son todas iguales a cero. Luego,

$$C = \text{cone}(\hat{Y})$$

donde $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ se obtiene de Y_m al eliminar estas filas.

Eliminación de Fourier-Motzkin — Ejemplo:

(1)	$-$	x_1	$-$	$4\,x_2$	$\leq$	-9
(2)	$-$	$2\,x_1$	$-$	x_2	$\leq$	-4
(3)	$+$	x_1	$-$	$2\,x_2$	$\leq$	0
(4)	$+$	x_1			$\leq$	4
(5)	$+$	$2\,x_1$	$+$	x_2	$\leq$	11
(6)	$-$	$2\,x_1$	$+$	$6\,x_2$	$\leq$	17
(7)	$-$	$6\,x_1$	$-$	x_2	$\leq$	-6



$$x_1 \leq 4$$

$$\boxed{-x_1 - 4x_2 \leq -9} \quad *(1)$$

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$-6x_1 - x_2 \leq -6$$

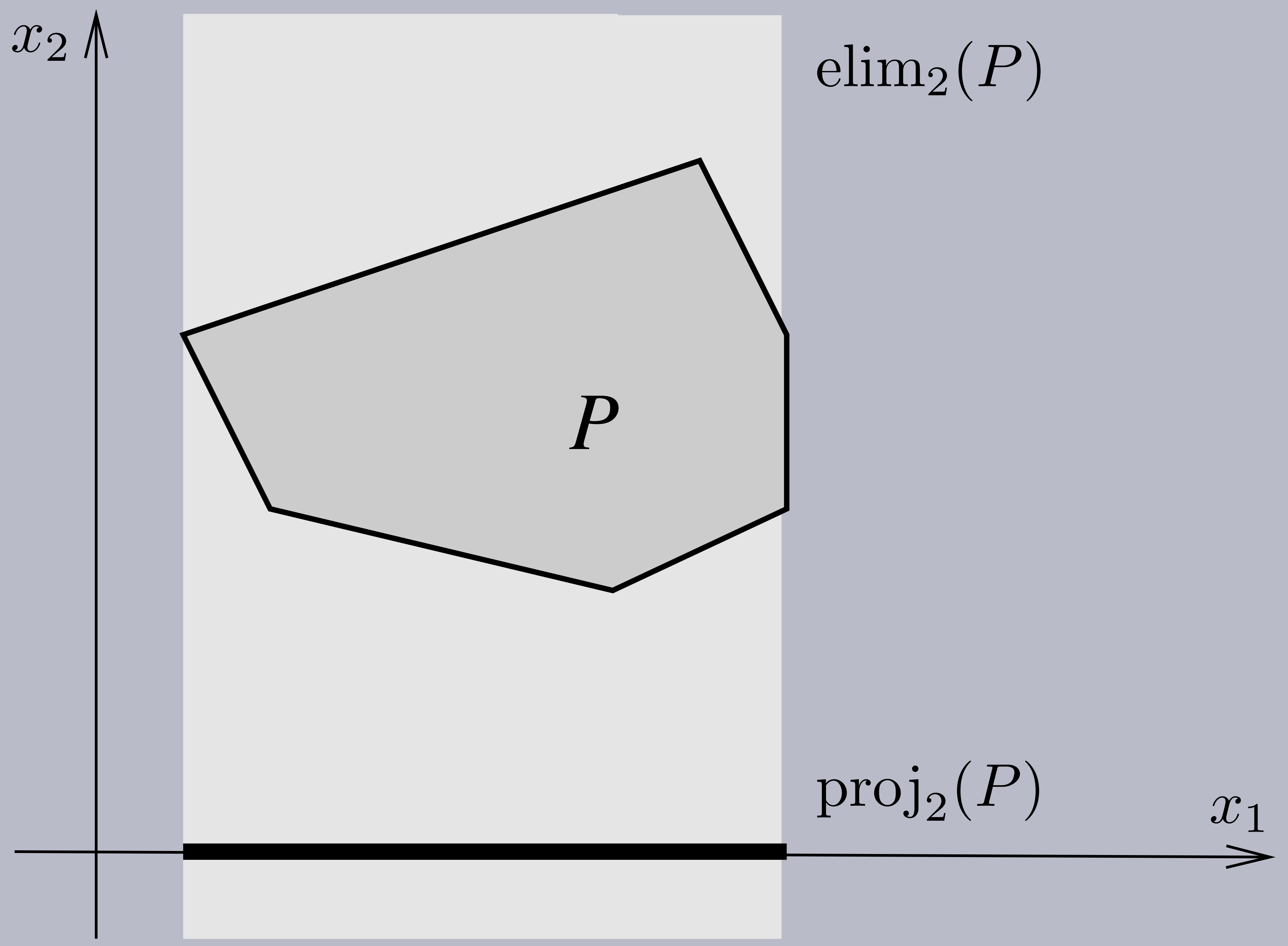
$$7x_1 \leq 35$$

$$\boxed{2x_1 + x_2 \leq 11} \quad *(4)$$

$$-2x_1 + 6x_2 \leq 17$$

Al hacer todas las combinaciones posibles, obtenemos el nuevo sistema:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 \leq 4 & & x_1 \leq 4 \\
7x_1 \leq 35 & & x_1 \leq 5 \\
-7x_1 \leq 7 & & x_1 \geq -1 \\
0 \leq 7 & & 0 \leq 7 \\
-14x_1 \leq -7 & \Leftrightarrow & x_1 \geq \frac{1}{2} \\
5x_1 \leq 22 & & x_1 \leq \frac{22}{5} \\
x_1 \leq 17 & & x_1 \leq 17 \\
-4x_1 \leq 5 & & x_1 \geq -\frac{5}{4} \\
-38x_1 \leq -19 & & x_1 \geq \frac{1}{2}
\end{array}
$$



En $\mathbb{R}^2$ este sistema describe a $\mathrm{elim}_2(P)$.

En $\mathbb{R}$ este sistema describe a un polítopo isomorfo a $\mathrm{proj}_2(P)$.

Figura tomada de Ziegler (2007), “Lectures on Polytopes”.

Matricialmente:

Si el sistema original tiene la forma:

$$Ax \leq b$$

La primera desigualdad del segundo sistema tiene la forma:

$$w_1^T A x \leq w_1^T b, \qquad \text{con } w_1 = (0,0,0,1,0,0,0)^T$$

La segunda desigualdad tiene la forma:

$$w_2^T A x \leq w_2^T b, \qquad \text{con } w_2 = (1,0,0,0,4,0,0)^T$$

Colocando $w_1^T, w_2^T, \ldots, w_9^T$ como filas en una matriz W, el nuevo sistema es:

$$WAx \leq Wb$$

Observar que cada fila de W tiene máximo dos entradas positivas y el resto nulas.