3.3. Polaridad

Lema 3.5. Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polítopo y $y \in P$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) y no está contenida en una cara de P de dimensión estrictamente menor a d.

(ii) Si $a^T y = a_0$ y $a \neq 0$, entonces la desigualdad $a^T x \leq a_0$ no es válida para P.

(iii) y puede ser representado en la forma $y = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i x_i$, donde $x_0, \dots, x_d$ son $d+1$ puntos afínmente independientes en P, $\lambda_i > 0$, $\forall i = 0, \dots, d$ y $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$.

(iv) y puede ser representado en la forma $y = \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^{d} x_i$, donde $x_0, \dots, x_d$ son $d+1$ puntos afínmente independientes en P.

Demostración:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Notar que (i) implica que P es de dimensión completa. (Por qué?). Por tanto, si $a^T x \leq a_0$ fuera válida para P, definiría la cara $F = P \cap H$, con $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = a_0\}$. Con $\dim(F) < \dim(P)$ y $y \in F$, lo que contradice (i). Luego, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Por otra parte, si (ii) es verdadera, entonces y no puede pertenecer a ninguna cara propia de P y además P debe tener dimensión completa. (Por qué?). Luego, (ii) $\Rightarrow$ (i).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que se cumple (iii), pero que existe una desigualdad $a^T x \leq a_0$, con $a \neq 0$, válida para P y tal que $a^T y = a_0$.

En este caso, tenemos que:

$$a_0 = a^T y = \sum_{i=0}^{d} a^T(\lambda_i x_i) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i (a^T x_i) \leq \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_0 = a_0$$

$a^T x \leq a_0$ es válida para P

$\Rightarrow \quad a^T x_i = a_0, \ \forall i = 0, \dots, d$

$\Rightarrow \quad x_i \in H := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x = a_0\}, \ \forall i = 0, \dots, d$

$\Rightarrow \quad x_0, \dots, x_d$ no son afínmente independientes $\lightning$.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (iii)</u>: Trivial (Basta elegir $\lambda_i = \frac{1}{d+1}, \ \forall i = 0, \dots, d$)

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iv)</u>: Conocemos que P puede representarse en la forma $P = P(A, b)$ y podemos asumir que ninguna desigualdad del sistema $Ax \leq b$ es trivial, es decir, que $a_i \neq 0$ se cumple para toda fila $i \in \{1, \dots, m\}$ de la matriz A.

Notar que (ii) implica que

$$a_i^T y < b_i \,, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Por lo tanto, es posible encontrar un valor $\varepsilon > 0$ t.q.

$$a_i^T [y + \varepsilon e_j] \leq b_i \,, \quad \forall i = 1, \ldots, m \,, \ \forall j = 1, \ldots, d$$

$$a_i^T \Big[y - \varepsilon \sum_{j=1}^{d} e_j\Big] \leq b_i \,, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Definimos:

$$x_0 := y - \varepsilon \sum_{j=1}^{d} e_j$$

$$x_j := y + \varepsilon e_j \,, \quad \forall j = 1, \ldots, d$$

Tenemos que $x_0, \ldots, x_d$ son puntos afínmente independientes en P y además

$$\frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^{d} x_j = \frac{1}{d+1} \Big[y - \varepsilon \sum_{j=1}^{d} e_j + \sum_{j=1}^{d} (y + \varepsilon e_j) \Big] = y.$$

Definición (Interior de un politopo)

Un punto y que satisface las condiciones del Lema 3.5 se conoce como un punto interior de P.

El conjunto de todos los puntos interiores de P es el interior de P y se denota por $\mathrm{int}(P)$.

Observaciones

1) La definición de $\mathrm{int}(P)$ coincide con la definición de interior topológico

2) Si P no es de dimensión completa, es decir, si $\dim(P) < d$, entonces $\mathrm{int}(P) = \emptyset$.

Lema 3.6. Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polítopo con $\dim(P) = k \leq d$ y $y \in P$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) y no está contenido en una cara propia de P

(ii) Si $a^T x \leq a_0$ es válida para P y $a^T y = a_0$, entonces $a^T x = a_0$ se cumple $\forall x \in P$.

(iii) y puede ser representado en la forma $y = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$, donde $x_0, \ldots, x_k$ son $k+1$ puntos afínmente independientes en P y $\lambda_i > 0$, $\forall i = 0, \ldots, k$, con $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

(iv) y puede ser representado como $y = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i$, donde $x_0, \ldots, x_k$ son $k+1$ puntos afínmente independientes en P.

Demostración: Ejercicio

Definición: (Interior relativo de un politopo)

Un punto y que satisface las condiciones del Lema 3.6. se llama un punto interior relativo de P. El conjunto de todos los puntos interiores relativos de P se conoce como el interior relativo de P y se denota por $\operatorname{relint}(P)$.

Observaciones:

1) Si $P \neq \emptyset \implies \operatorname{relint}(P) \neq \emptyset$

2) $P = \biguplus_{F \in L(P)} \operatorname{relint}(F)$

(P es la unión disjunta de los interiores relativos de sus caras)

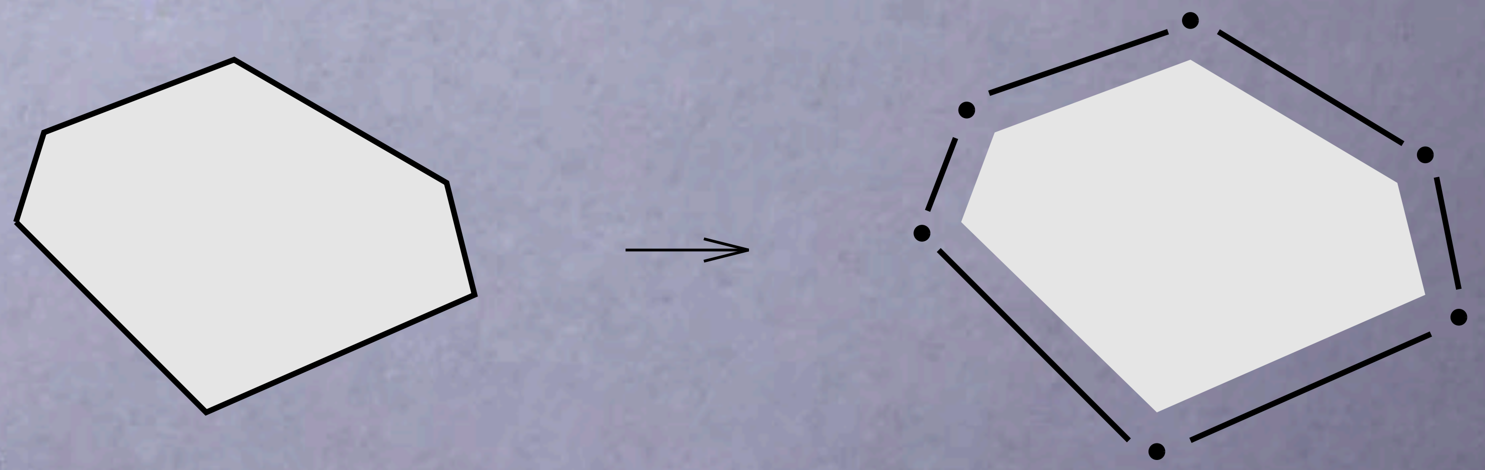


Figura tomada de Ziegler (2007), "Lectures on Polytopes".

Definición (Polar de un conjunto)

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$. El conjunto polar de P está definido por:

$$P^{\Delta} := \{ a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1, \ \forall x \in P \}$$

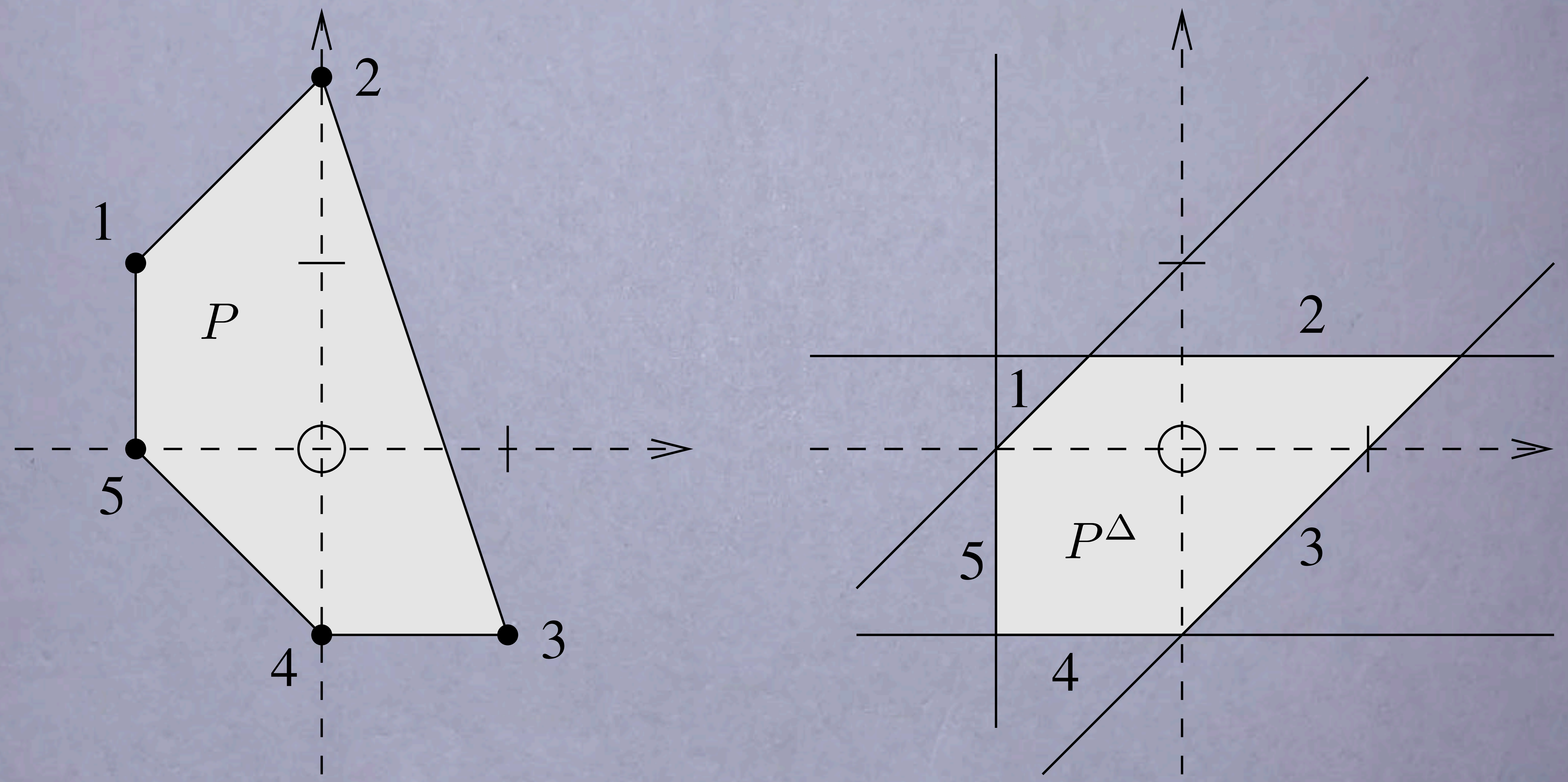


Figura tomada de Ziegler (2007), "Lectures on Polytopes".

La construcción de un polar puede ser iterada.
El doble polar de P es:

$$P^{\Delta\Delta} := \{ y \in \mathbb{R}^d \mid a^T y \leq 1 \text{ se cumple para todo } a \in \mathbb{R}^d \text{ que satisface } a^T x \leq 1 \ \forall x \in P \}$$

Teorema 3.7. (Propiedades básicas de la polaridad)

Sean $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$.

(i) $P \subseteq Q$ implica $P^\Delta \supseteq Q^\Delta$ y $P^{\Delta\Delta} \subseteq Q^{\Delta\Delta}$

(ii) $P \subseteq P^{\Delta\Delta}$

(iii) P^Δ y $P^{\Delta\Delta}$ son convexos

(iv) $0 \in P^\Delta$ y $0 \in P^{\Delta\Delta}$

(v) Si P es un politopo y $0 \in P$, entonces $P = P^{\Delta\Delta}$

(vi) Si $P = \mathrm{conv}(V)$ y $0 \in \mathrm{int}(P)$, entonces

$P^\Delta = \{ a \in \mathbb{R}^d \mid a^T V \leq \mathbb{1}^T \} = P(V^T, \mathbb{1})$ y además P^Δ es un politopo.

(vii) Si $P = P(A, \mathbb{1})$ un politopo, entonces

$P^\Delta = \{ \lambda^T A \mid \lambda \geq 0, \lambda^T \cdot \mathbb{1} = 1 \} = \mathrm{conv}(A^T)$, y además $0 \in \mathrm{int}(P^\Delta)$

Demostración:

(i) Suponer que $P \subseteq Q$. Demostremos primero que $P^\Delta \supseteq Q^\Delta$.

Sea $a \in Q^\Delta$. Entonces $a^T x \leq 1$ se cumple para todo $x \in Q$. Pero $P \subseteq Q$ y luego esta desigualdad se cumple para todo $x \in P$. Por tanto, $a \in P^\Delta$.

Aplicando una vez más el mismo razonamiento a Q^Δ y P^Δ, tenemos que de $Q^\Delta \subseteq P^\Delta$ se sigue $P^{\Delta\Delta} \subseteq Q^{\Delta\Delta}$.

(ii) – (iv): Ejercicio

(v) Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo tal que $0 \in P$.

De (ii) conocemos que $P \subseteq P^{\Delta\Delta}$. Resta por demostrar el otro sentido de la inclusión.

Sea $\bar{x} \in P^{\Delta\Delta}$. Demostraremos que $\bar{x} \in P$ verificando que

$\bar{x}$ satisface todas las desigualdades válidas para P.

Sea $a^T x \leq a_0$ una desigualdad válida para P.

Notar que $0 \in P \Rightarrow a_0 \geq 0$.

Supongamos primero que $\underline{a_0 > 0}$:

Tenemos que $\frac{1}{a_0} a^T x \leq 1$, $\forall x \in P$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_0} a \in P^\Delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_0} a^T \bar{x} \leq 1, \text{ pues } \bar{x} \in P^{\Delta\Delta}$$

y luego $\bar{x}$ satisface en este caso $a^T \bar{x} \leq a_0$.

Supongamos ahora que $\underline{a_0 = 0}$:

Asumamos que $\bar{x}$ viola la desigualdad. Luego

$$a^T \bar{x} > 0$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$a^T \bar{x} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} a^T \bar{x} > 1$$

Pero esto implica que $\frac{1}{\varepsilon} a \notin P^\Delta$, pues $\bar{x} \in P^{\Delta\Delta}$.

A su vez, si $\frac{1}{\varepsilon}a \notin P^\Delta$, entonces existe $\hat{x} \in P$ t.q.

$$\frac{1}{\varepsilon}a^T \hat{x} > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a^T \hat{x} > \varepsilon > 0$$

Pero entonces $\hat{x} \in P$ viola la desigualdad $a^T x \leq 0$ válida para P ↯.

Por tanto, $\bar{x}$ debe satisfacer toda desigualdad válida para P.

$$\Rightarrow \bar{x} \in P$$

$$\Rightarrow P^{\Delta\Delta} \subseteq P$$

$$\Rightarrow P = P^{\Delta\Delta} \quad \text{(junto con (ii))}.$$

(vi) Sea $P = \text{conv}(V)$ tal que $0 \in \text{int}(P)$.

Sea $a \in P^\Delta$. Tenemos que

$$a^T x \leq 1, \quad \forall\, x \in P.$$

En particular,

$$a^T v \leq 1 \, , \quad \forall\, v \in V \, , \quad \text{pues } V \subseteq P.$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \in P(V^T, \mathbb{1})$$

$$\Rightarrow \quad P^{\Delta} \subseteq P(V^T, \mathbb{1}).$$

Por otra parte, supongamos que $a \in P(V^T, \mathbb{1})$. Es decir, $a^T v \leq 1, \ \forall\, v \in V$.

Sea $x \in P$. conocemos que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, con $v_i \in V$, $\lambda_i \geq 0$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Luego,

$$a^T x = a^T \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a^T v_i) \underset{\substack{\uparrow \\ a^T v_i \leq 1, \\ \forall\, v_i \in V}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\Rightarrow \quad a \in P^{\Delta}$$

$$\Rightarrow \quad P(V^T, \mathbb{1}) \subseteq P^{\Delta}.$$

Resta por demostrar que $P(V^T, \mathbb{1})$ es un polítopo, es decir, que

$$rec(P(V^T, \mathbb{1})) = P(V^T, 0) = \{0\}.$$

cono de recesión

Sea $\bar{a} \in P(V^T, 0)$. Luego

$$\bar{a}^T v \leq 0, \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \bar{a}^T x \leq 0, \quad \forall x \in P.$$

Pero $0 \in int(P)$ satisface esta desigualdad con igualdad. Por lo tanto, del Lema 3.5 (ii) se concluye que $\bar{a} = 0$.

(vii) Sea $P = P(A, \mathbb{1})$ un polítopo.

Sea $a \in conv(A^T)$. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$a^T = \lambda^T A, \quad \lambda^T \cdot \mathbb{1} = 1, \quad \lambda \geq 0$$

Sea $x \in P$. Conocemos que

$$Ax \leq \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \lambda^T A x \leq \lambda^T \mathbb{1} \quad (\lambda \geq 0)$$

$$\Rightarrow a^T x \leq 1$$

$\Rightarrow a \in P^\Delta$

$\Rightarrow conv(A^T) \subseteq P^\Delta$.

Supongamos ahora que $a \in P^\Delta$, es decir, $a^T x \leq 1$ se cumple para todo $x \in P = P(A, \mathbb{1})$.

Como conocemos que $P \neq \emptyset$ (Por qué?), del Lema de Farkas III se cumple que existe $\lambda_1 \geq 0$ con $\lambda_1^T A = a^T$ y $\lambda_1^T \mathbb{1} \leq 1$.

Por otra parte, como P es acotado, puede demostrarse que $P(A, -\mathbb{1}) = \emptyset$. (Ejercicio).

Aplicando en este sistema el Lema de Farkas (II), concluimos que existe $\lambda_2 \geq 0$ con $\lambda_2^T A = 0^T$ y $\lambda_2^T \mathbb{1} > 0$.

Sea

$$\lambda := \lambda_1 + \frac{1-\lambda_1^T \mathbb{1}}{\lambda_2^T \mathbb{1}} \lambda_2 .$$

Tenemos que $\lambda \geq 0$,

$$\lambda^T \mathbb{1} = \lambda_1^T \mathbb{1} + \frac{1-\lambda_1^T \mathbb{1}}{\lambda_2^T \mathbb{1}} \lambda_2^T \mathbb{1} = 1$$

$$\lambda^T A = \underbrace{\lambda_1^T A}_{a^T} + \left(\frac{1-\lambda_1^T \mathbb{1}}{\lambda_2^T \mathbb{1}}\right) \underbrace{\lambda_2^T A}_{=0^T} = a^T$$

$\Rightarrow a \in \operatorname{conv}(A^T)$

$\Rightarrow P^\Delta \subseteq \operatorname{conv}(A^T)$.

Veamos ahora que $0 \in \operatorname{int}(P^\Delta)$.

Notar primero que $0 \in P^\Delta$ se sigue de la existencia de λ_2.

Aplicando el Lema 3.5. (ii), tenemos que demostrar que, para todo $\bar{x} \neq 0$, la desigualdad

$$a^T \bar{x} \leq 0$$

no es válida para P^Δ (es decir, existe al menos un $\bar{a} \in P^\Delta$ que no la satisface).

En efecto, supongamos que existe $\bar{x} \neq 0$ t.q.

$$a^T \bar{x} \leq 0 \quad , \forall\, a \in P^\Delta = \operatorname{cono}(A^T)$$

En particular,

$$a_i^T \bar{x} \leq 0$$

se cumple para toda fila a_i de la matriz A

$$\Rightarrow A\bar{x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in P(A,0) = \operatorname{rec}(P(A,\mathbb{1}))$$

y como $\bar{x} \neq 0$, se sigue entonces que P es no acotado $\lightning$.

<u>Notación</u>: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo, con $0 \in \text{int}(P)$.

Sea F una cara de P, denotaremos por $F^\diamond$ al conjunto:

$$F^\diamond := \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1, \forall x \in P, \; a^T x = 1, \forall x \in F\}$$

<u>Teorema 3.8.</u> Si $P = \text{conv}(V) = P(A, \mathbb{1})$ y

$$F = \text{conv}(V') = \{x \in \mathbb{R}^d \mid A'' x \leq \mathbb{1}, \; A' x = \mathbb{1}\}$$

es una cara de P, con $V = V' \uplus V''$, $A = A' \uplus A''$, entonces

$$F^\diamond = \text{conv}((A')^T) = \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T V'' \leq \mathbb{1}^T, \; a^T V' = \mathbb{1}^T\}.$$

(Observación: consideramos a V como un conjunto de vectores columna y a A como un conjunto de vectores fila)

Mode Mat

Demostración:

(i) P.D. $F^{\Diamond} = \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T V'' \leq \mathbb{1}^T,\ a^T V' = \mathbb{1}^T\}$:

$$F^{\Diamond} = \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1,\ \forall x \in P,\ a^T x = 1,\ \forall x \in F\}$$

$P = \operatorname{conv}(V)$

$F = \operatorname{conv}(V')$

$$= \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T v \leq 1,\ \forall v \in V,\ a^T \bar{v} = 1,\ \forall \bar{v} \in V'\} \quad \text{(Ejercicio)}$$

$V = V' \uplus V''$

$$= \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T v \leq 1,\ \forall v \in V'',\ a^T \bar{v} = 1,\ \forall \bar{v} \in V'\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T V'' \leq \mathbb{1}^T,\ a^T V' = \mathbb{1}^T\}$$

(ii) P.D. $F^\diamond = \mathrm{conv}((A')^T)$:

$$F^\diamond = \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq 1, \ \forall x \in P, \ a^T x = 1, \ \forall x \in F\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^d \mid a \in P^\Delta, \ a^T x = 1, \ \forall x \in F\}$$

Lema 3.7(vii)

$$= \{a \in \mathbb{R}^d \mid a^T = \lambda^T A, \ \lambda \geq 0, \ \lambda^T \mathbb{1} = 1, \ a^T x = 1, \ \forall x \in F\}$$

Sea $\bar{a} \in \mathrm{conv}((A')^T)$. Entonces existe λ_1, con $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1^T \mathbb{1} = 1$ t.q. $\bar{a}^T = \lambda_1^T A'$. Por definición de F, se tiene que

$$\forall x \in F, \qquad A' x = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \bar{a}^T x = \lambda_1^T A' x = \lambda_1^T \mathbb{1} = 1.$$

Definimos ahora $\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, completando con multiplicadores igual a cero a las filas correspondientes a A''.

Se tiene que $\lambda \geq 0$, $\lambda^T \cdot \mathbb{1} = \lambda_1^T \mathbb{1} + 0^T \mathbb{1} = 1$ y además

$$\lambda^T A = (\lambda_1^T \;\; 0^T) \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} = \lambda_1^T A' + 0^T A'' = \bar{a}^T$$

$\Rightarrow \bar{a} \in F^\diamond$

$\Rightarrow \operatorname{conv}((A')^T) \subseteq F^\diamond$.

Para probar la inclusión inversa, sea $\bar{a} \in F^\diamond$.

Conocemos que existe $\lambda \geq 0$, $\lambda^T \mathbb{1} = 1$ t.q. $\bar{a}^T = \lambda^T \cdot A$.

Además, se cumple que $\bar{a}^T x = 1$, $\forall\, x \in F$.

Sea $\bar{x} \in \operatorname{relint}(F)$. Del Lema 3.6. (ii) tenemos que

$A' \bar{x} = \mathbb{1}$ y $A'' \bar{x} < \mathbb{1}$. (Por qué?)

Denotando por λ_1 y λ_2 a los subvectores de λ correspondientes a los multiplicadores de las filas de A'

y A'', tenemos que:

$$1 = \bar{a}^T \bar{x} = \lambda^T A \bar{x} = (\lambda_1^T \ \lambda_2^T) \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \bar{x} = \lambda_1^T A' \bar{x} + \lambda_2^T A'' \bar{x}$$

$$\leq \lambda_1^T \mathbb{1} + \lambda_2^T \cdot \mathbb{1}$$

$$= \lambda^T \cdot \mathbb{1} = 1 .$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1^T A' \bar{x} + \lambda_2^T A'' \bar{x} = \lambda_1^T \mathbb{1} + \lambda_2^T \mathbb{1}$$

$$\underset{A'\bar{x} = \mathbb{1}}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda_1^T \cdot \mathbb{1} + \lambda_2^T A'' \bar{x} = \lambda_1^T \mathbb{1} + \lambda_2^T \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \lambda_2^T A'' \bar{x} = \lambda_2^T \mathbb{1}$$

$$\underbrace{\lambda_2^T}_{\geq 0} \underbrace{(A'' \bar{x} - \mathbb{1})}_{< 0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow \bar{a}^T = \lambda^T A = (\lambda_1^T \ \lambda_2^T) \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} = \lambda_1^T A' + \lambda_2^T A'' \underset{\lambda_2 = 0}{\uparrow}{=} \lambda_1^T A'$$

y además $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1^T \cdot \mathbb{1} = (\lambda_1^T \ \lambda_2^T) \mathbb{1} = 1$,

$\Rightarrow \bar{a} \in \mathrm{conv}((A')^T) \implies F^\Delta \subseteq \mathrm{conv}((A')^T)$.

Corolario 3.9.

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo con $0 \in \mathrm{int}(P)$. Sean F, G dos caras de P. Entonces,

(i) $F^\diamond$ es una cara de P^Δ (Por qué?) (Ejercicio)

(ii) $F^{\Delta\diamond} = F$ (Por qué?)

(iii) $F \subseteq G \iff F^\diamond \supseteq G^\diamond$ (Ejercicio)

Corolario 3.10.

$$L(P^\Delta) \cong L^{op}(P).$$

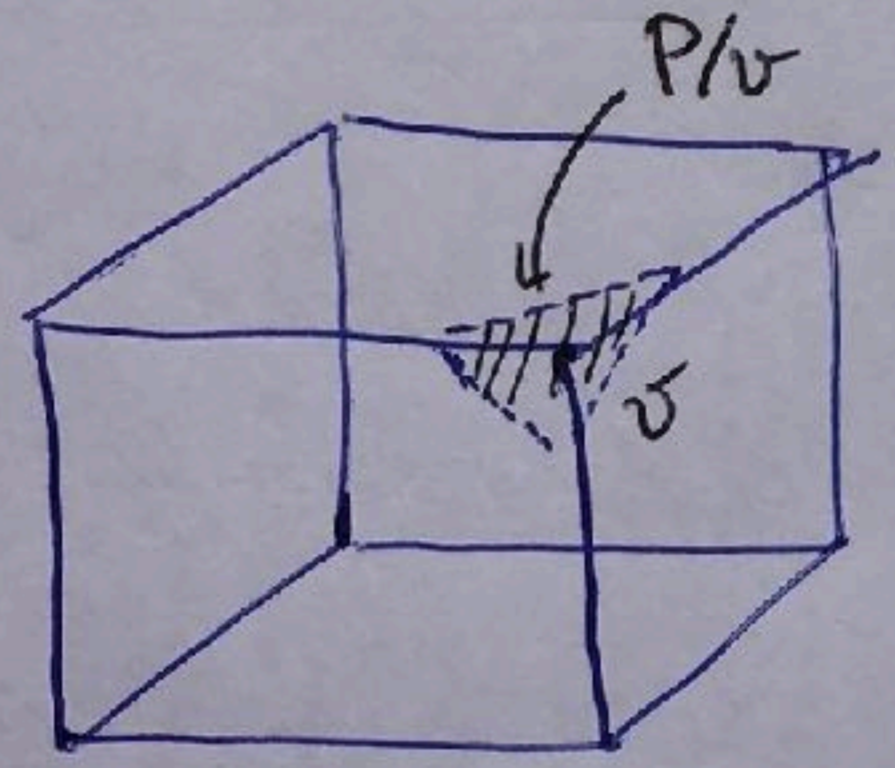
(En particular, esto demuestra el Teorema 3.4. (iv))

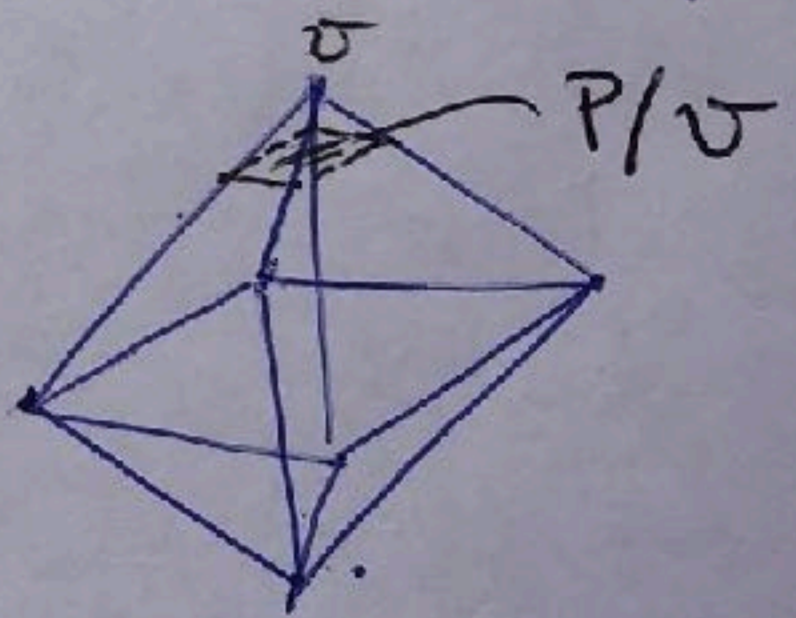
Definición: Decimos que P y Q son combinatoriamente polares si $L(P) \cong L^{op}(Q)$.

Observación:

Las retículas de caras asociadas a facetas de un politopo P (es decir, los intervalos $[\emptyset; F]$ de $L(P)$) son isomorfas a las retículas de caras asociadas a las figuras de vértice de P^Δ (los intervalos $[F^\diamond; P^\Delta]$ de $L(P^\Delta)$).

$\Rightarrow$ Las facetas de P y las figuras de vértice de P^Δ son politopos combinatoriamente equivalentes





Ejercicios

1) Demostrar el Lema 3.6.

2) Demostrar que si $P = \{x\}$ entonces $P =$ relint(P). ¿Qué ocurre con int(P)?

3) Demostrar el Teorema 3.7. (ii) - (iv).

4) Sea $P = P(A, \mathbf{1})$. Demostrar $0 \in$ int(P). ¿Qué se concluye para $\dim(P)$?

5) Sean $P = P(A, \mathbf{1})$ un polítopo y F una cara de P. Demostrar A puede descomponerse en dos submatrices por filas A' y A'' tales que:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \, : \, A'x = \mathbf{1}, A''x \leq \mathbf{1}\} \, .$$

6) En el ejercicio anterior, considerar $\bar{x} \in \text{relint}(F)$. Demostrar que $A'\bar{x} = \mathbf{1}$ y $A''\bar{x} < \mathbf{1}$.

7) Sean $P = \text{conv}(V)$ y $F = \text{conv}(V')$ una cara de P, con $V' \subset V$. Demostrar que
$F^\diamond = \{a \in \mathbb{R}^d \,:\, a^T v \leq 1, \forall v \in V, \quad a^T v' = 1, \forall v' \in V'\}$.

8) Sean $P \subset \mathbb{R}^d$ un polítopo y F, G dos caras de P. Demostrar que:

(i) $F^\diamond$ es una cara de P^Δ.

(ii) $F \subseteq G \quad \Leftrightarrow \quad F^\diamond \supseteq G^\diamond$.