2.5. Teorema de Carathédory

Teorema 2.16. (Carathéodory):

Sean $X \in \mathbb{R}^{d\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^d$

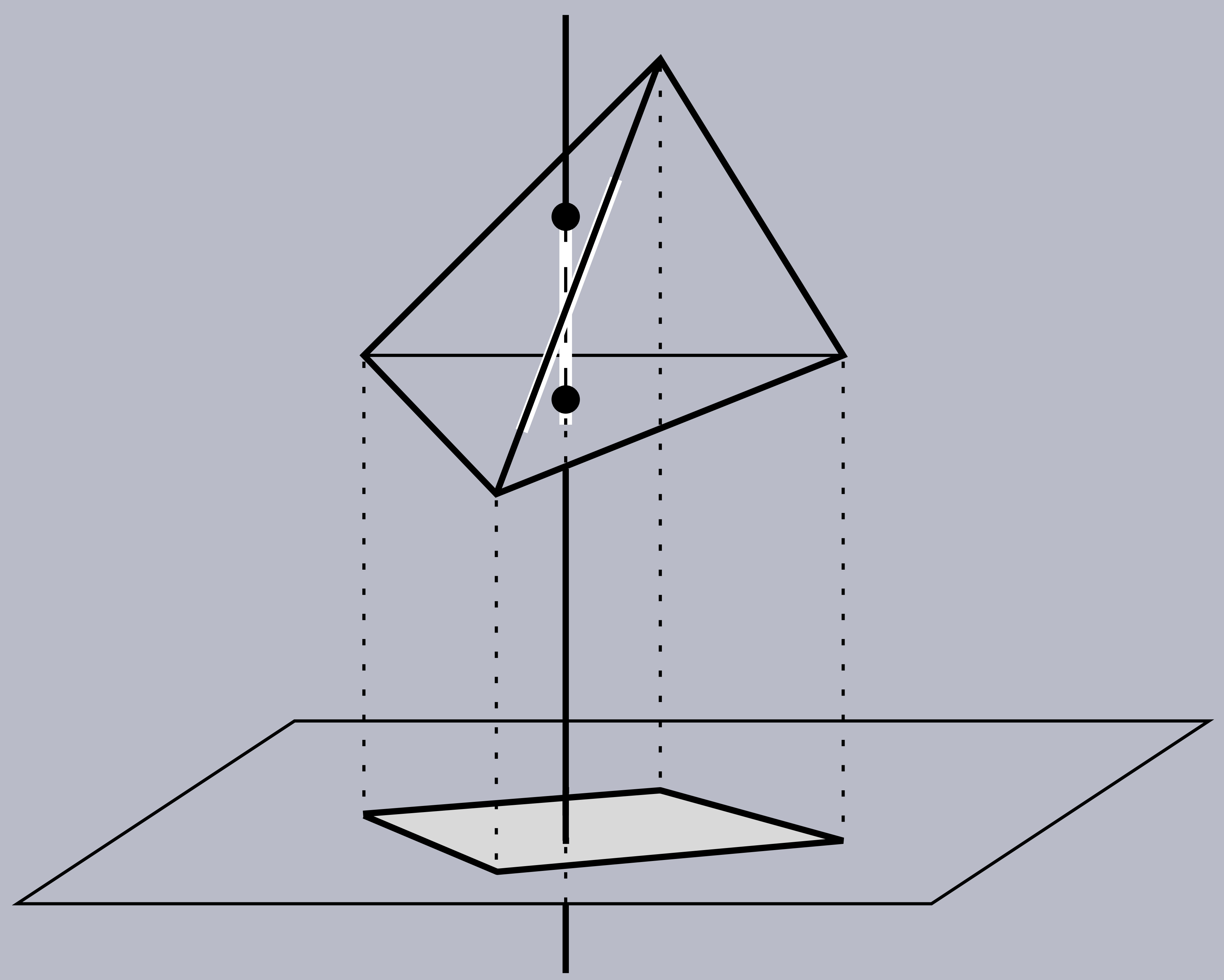
(i) Si $x \in \text{cone}(X)$, entonces existe $X' \subseteq X$, con $|X'| \leq \dim(\text{cone}(X)) = \text{rango}(X)$ t.q. $x \in \text{cone}(X')$.

(ii) Si $x \in \text{conv}(X)$, entonces existe $X' \subseteq X$, con $|X'| \leq \dim(\text{conv}(X)) + 1 = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbb{1}^T \\ X \end{pmatrix}$ t.q. $x \in \text{conv}(X')$

Notación: Consideramos a la matriz $X \in \mathbb{R}^{d\times n}$ como un conjunto de n vectores columna $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$.

Idea geométrica:

Sea $x \in P$ combinación convexa de k' vértices.



Todo polítopo es proyección de un simplex.

"La proyección de una combinación convexa es combinación convexa de las proyecciones ."

Si $k' > \dim(P) + 1$ esta proyección disminuye la dimensión, existen rectas que se proyectan en un mismo punto.

Estas rectas atraviesan el simplex y definen puntos en su "envoltura", con estos puntos, podemos encontrar un conjunto de $k'' < k'$ elementos .

Figura tomada de Ziegler (2007), "Lectures on Polytopes".

Demostración

(i) Notar primero que

$$\dim(\operatorname{cone}(X)) = \dim(\operatorname{lin}(\operatorname{cone}(X))) = \operatorname{rango}(X).$$

Sea k' la menor cantidad de vectores en X requeridos para expresar a x como una combinación cónica, y supongamos que $k' > \operatorname{rango}(X)$. Sean X' este conjunto de vectores y I el conjunto de sus índices.

Luego,

$$x = \sum_{i \in I} t_i x_i \,, \quad \text{con } t_i > 0$$

(por minimalidad de k')

Como $k' > \operatorname{rango}(X)$, el conjunto X' es linealmente dependiente. Esto implica que el conjunto de vectores

$$\{t_i x_i : i \in I\} \text{ es también l.d.}$$

Pero entonces, existen λ_i, $i \in I$, no todos iguales a cero, tales que:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i t_i x_i = 0$$

Notar que podemos asumir que al menos para un $i \in I$ se cumple $\lambda_i > 0$ (en el peor de los casos, multiplicando todos los coeficientes por -1).

Sea $\lambda^* := \text{máx} \{ \lambda_i : i \in I \} > 0$.

Definimos $\hat{\lambda}_i := \dfrac{\lambda_i}{\lambda^*}$. Notar que:

$$\sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i t_i x_i = 0 \quad \text{y además} \quad \hat{\lambda}_i \leq 1, \ \forall i \in I$$

Luego,

$$x = \sum_{i \in I} t_i x_i = \sum_{i \in I} t_i x_i - \underbrace{\sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i t_i x_i}_{=0} = \sum_{i \in I} \underbrace{(1 - \hat{\lambda}_i)}_{\geq 0} t_i x_i$$

Sea $\hat{I} := \{i \in I : \lambda_i = \lambda^*\}$. Notar que $|\hat{I}| \geq 1$ por construcción y que $(1-\hat{\lambda}_i) = 0 \quad \forall i \in \hat{I}$.

Pero entonces

$$x = \sum_{i \in I} (1-\hat{\lambda}_i) t_i x_i = \sum_{i \in I \setminus \hat{I}} \underbrace{(1-\hat{\lambda}_i)}_{\geq 0} \underbrace{t_i}_{\geq 0} x_i$$

y x es combinación cónica de los vectores $\{x_i : i \in I \setminus \hat{I}\}$, con $|I \setminus \hat{I}| < k'$. $\cancel{\text{y}}$

(ii) En este caso, basta notar que

$$x \in \operatorname{conv}(X) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbb{1}^T \\ X \end{pmatrix} \quad [\text{Ejercicio}]$$

Además

$$\dim(\operatorname{conv}(X)) = \dim\left(\operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbb{1}^T \\ X \end{pmatrix}\right) - 1 \quad [\text{Ejercicio}]$$

Ejercicios:

Sean $X \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^{d}$. Demostrar que:

(i) $x \in \operatorname{conv}(X) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ X \end{pmatrix}$

(ii) $\dim(\operatorname{conv}(X)) = \dim\left(\operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ X \end{pmatrix}\right) - 1$