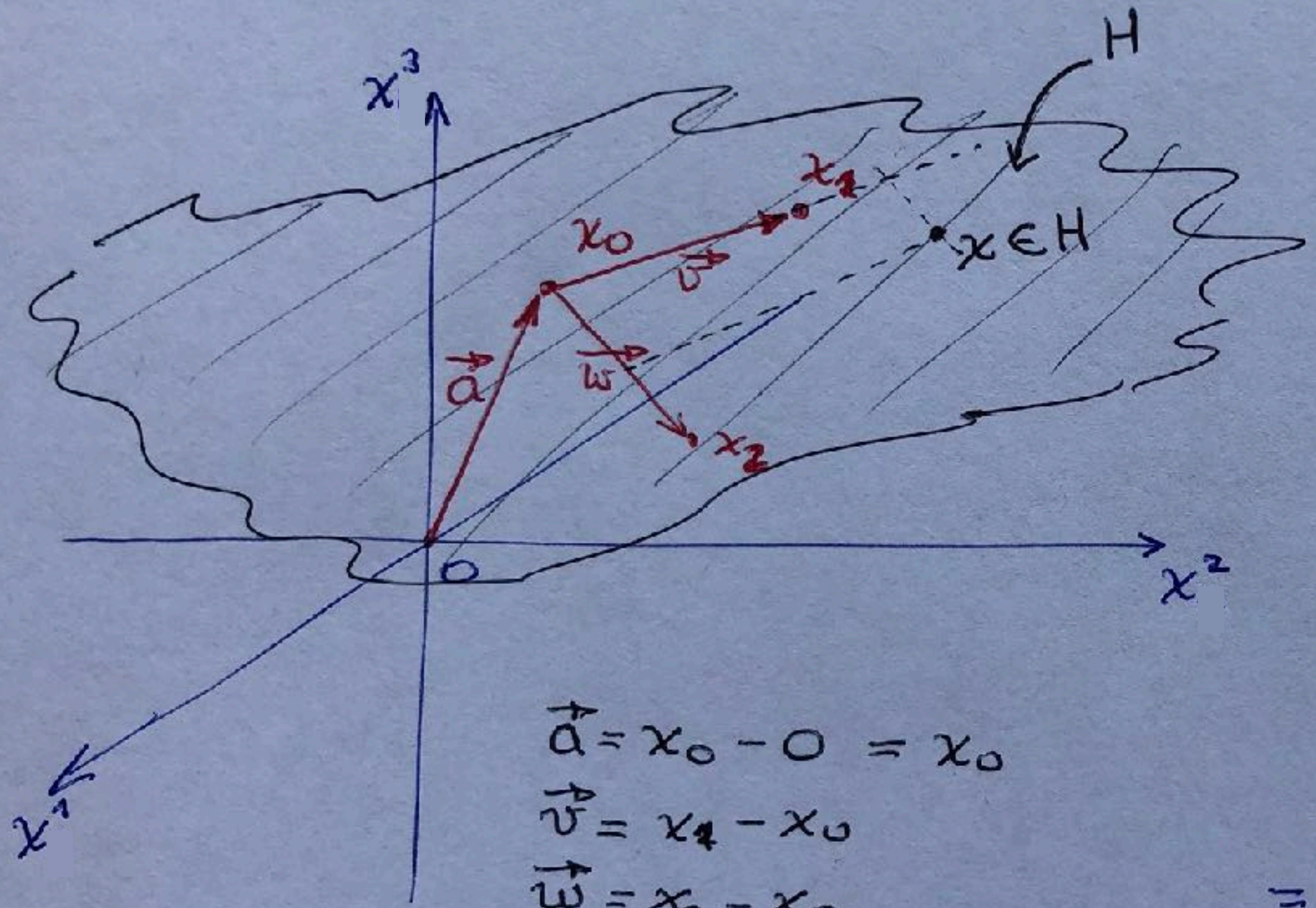
CAP. I NOCIONES BÁSICAS

1.1. ESPACIOS VECTORIALES Y AFINES

Ejemplo



$$\vec{a} = x_0 - O = x_0$$
$$\vec{v} = x_1 - x_0$$
$$\vec{w} = x_2 - x_0$$

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \vec{a} + \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

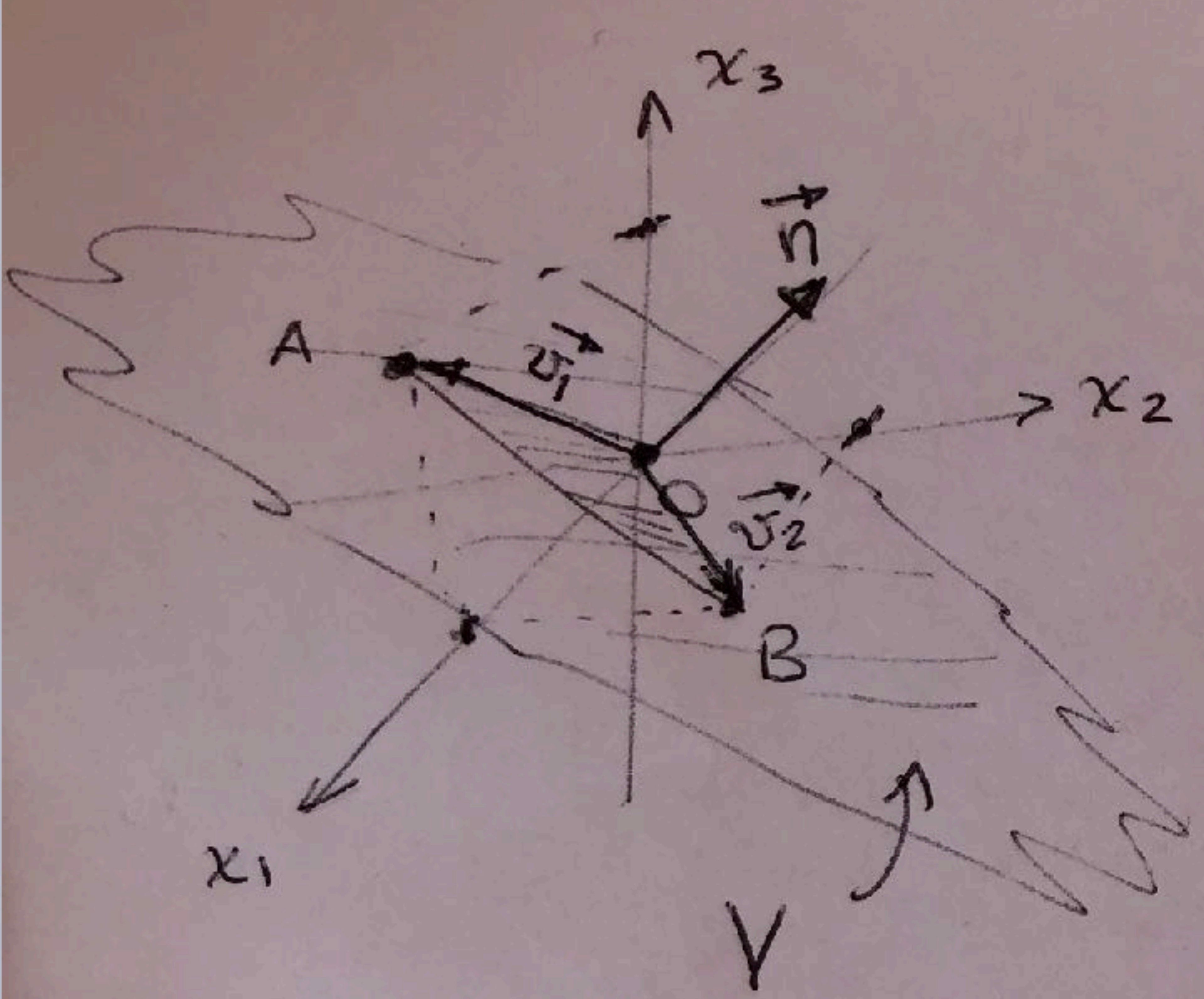
$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0 + \lambda_1 (x_1 - x_0) + \lambda_2 (x_2 - x_0), \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \overbrace{(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}^{\lambda_0} x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1 \}.$$

Además, conocemos que $H = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n, x \rangle = b, \ n \in \mathbb{R}^3, \ b \in \mathbb{R} \}$.

Espacios vectoriales



$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \underbrace{\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}}\}$$

combinación lineal

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

sistema lineal homogéneo

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$$

Ejercicio:

Escribir dos formulaciones equivalentes a las anteriores para:

- Una recta que pase por el origen
- Una recta que no pase por el origen
- Un punto distinto del origen
- El origen

Teorema 1.1: (Espacios vectoriales)

Sea $L \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que L es un (sub)espacio vectorial o lineal de $\mathbb{R}^d$ si se cumple una de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existen $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i, \ \text{con } \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Leftrightarrow$ existe $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tal que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ x = V\lambda, \ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}^n \right\} =: \text{span}(V)$$

"envolvente lineal de V"

(ii) Existe $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ Ax = 0 \right\}$$

Teorema 1.2: (Espacios afines)

Sea $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Decimos que F es un (sub)espacio afín de $\mathbb{R}^d$ si se cumple una de las dos siguientes condiciones equivalentes:

(i) Existen $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i, \text{ con } \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1 \right\}$$

$\Leftrightarrow$ existe $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ tal que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; x = V\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda^T \mathbf{1} = 1 \right\} =: \mathrm{aff}(V)$$

"envolvente afín de V"

(ii) Existen $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; Ax = b \right\}$$

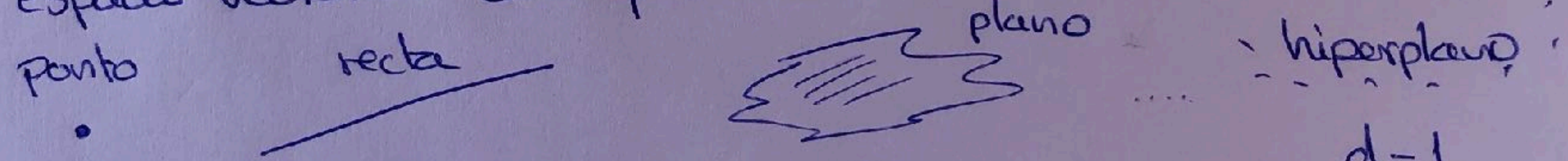
Espacios afines

- Ejemplos de (sub-) espacios afines son: puntos, rectas, planos e hiperplanos.

- Los espacios vectoriales son espacios afines que contienen al cero, es decir, todo espacio afín es un espacio vectorial trasladado

- La dimensión de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial correspondiente

$\mathcal{F}$:



$\dim(\mathcal{F})$	0	1	2		$d-1$

- Una aplicación (función) afín de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ es un función de la forma

$$x \longmapsto Ax+b, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{e\times d}, \ b \in \mathbb{R}^e$$

Espacios afines (cont.)

- Un conjunto de $n>0$ puntos en $\mathbb{R}^d$ se dice afínmente independiente si:

(i) ninguno de los puntos puede escribirse como una combinación afín de las demás

$\Leftrightarrow$ (ii) la envolvente afín del conjunto tiene dimensión igual a $n-1$

$\Leftrightarrow$ (iii) la envolvente afín de cualquier subconjunto propio es estrictamente menor (es decir, es un subconjunto propio) que la envolvente afín del conjunto.