2.4. Conos de recesión y homogeneización

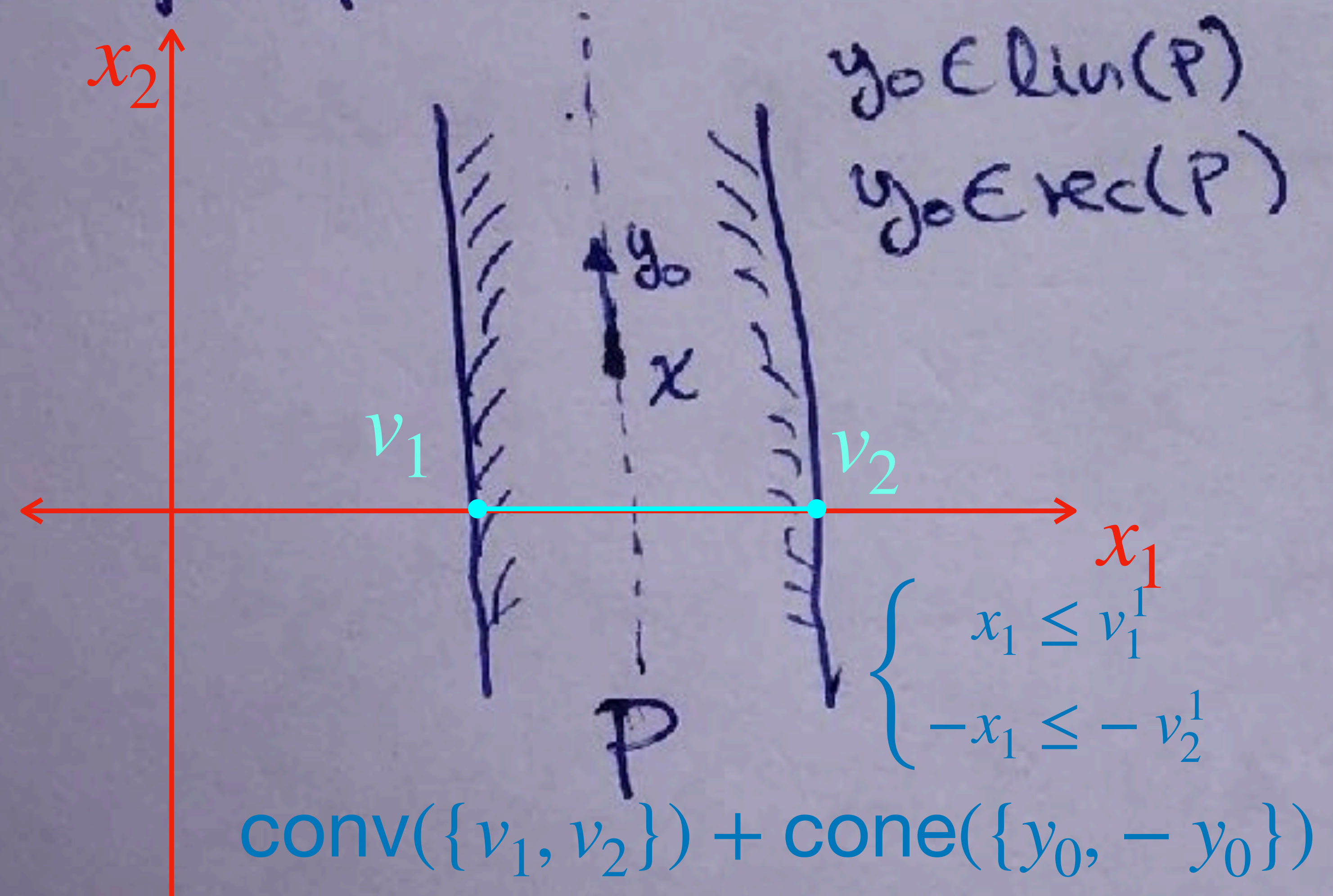
Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. El <u>espacio de linealidad de P</u> está definido por

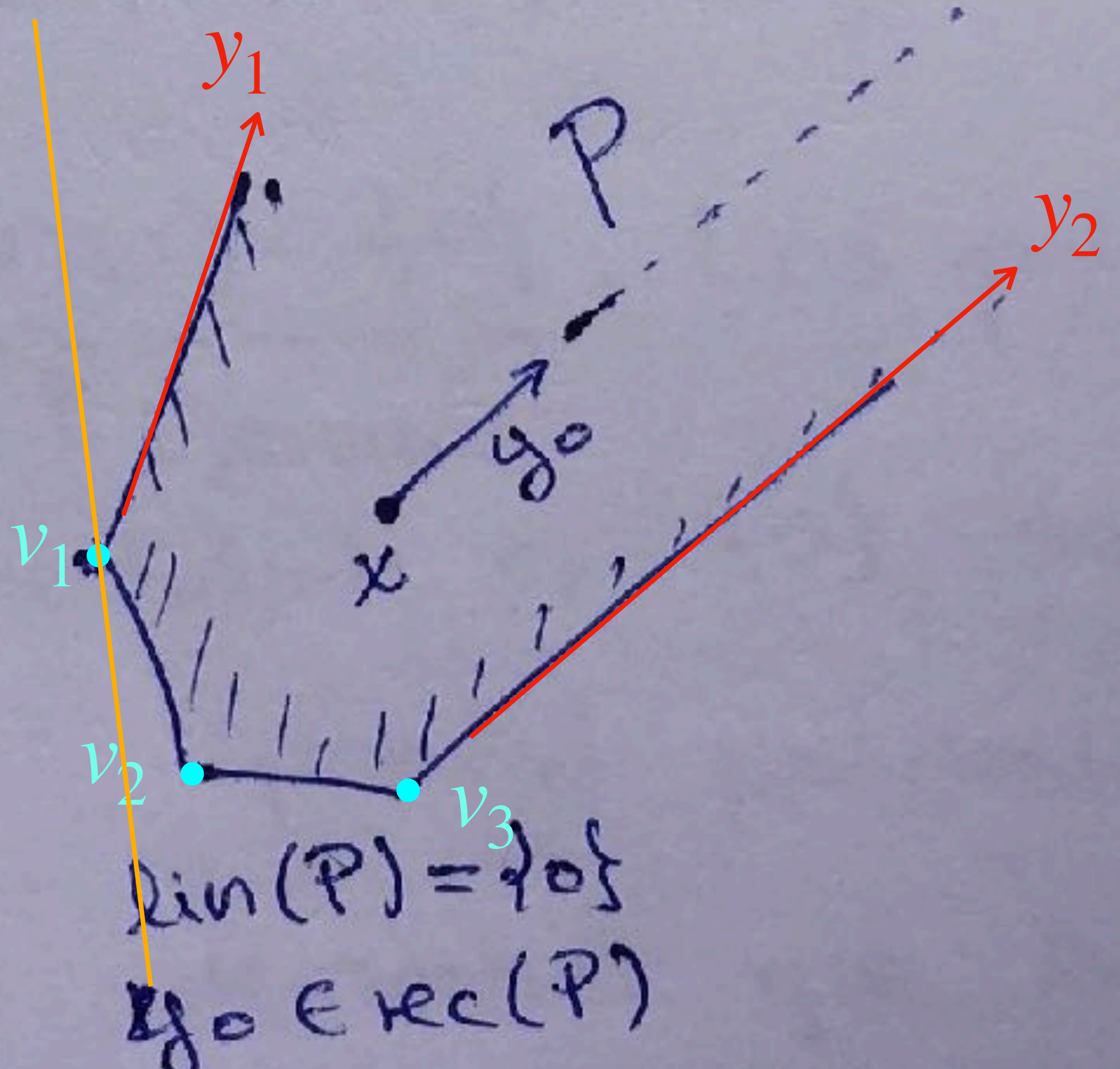
$$\operatorname{lin}(P) := \{ y \in \mathbb{R}^d \mid x + ty \in P,\ \forall x \in P,\ t \in \mathbb{R} \}.$$

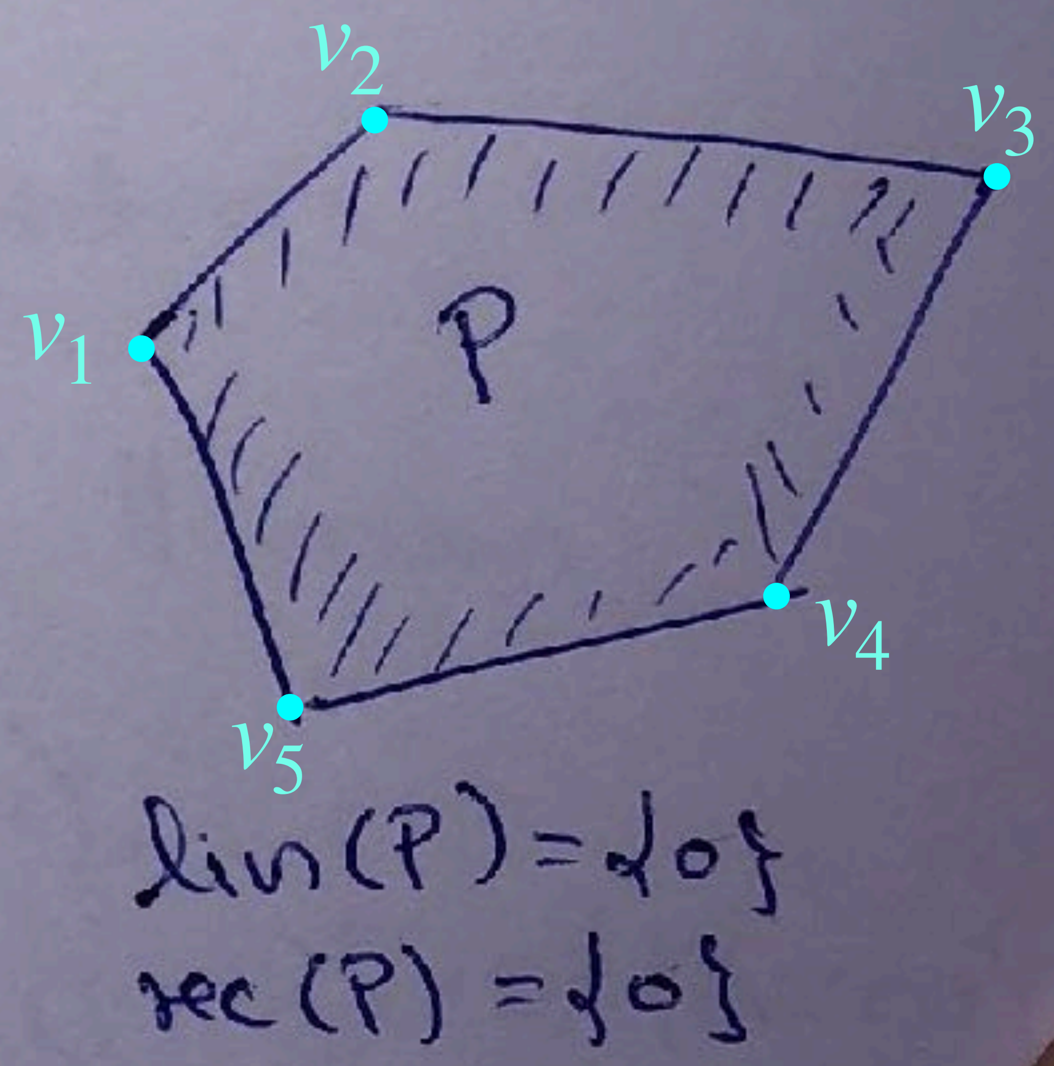
y el cono de recesión de P está definido por:

$$\operatorname{rec}(P) := \{ y \in \mathbb{R}^d \mid x + ty \in P,\ \forall x \in P,\ t \geq 0 \}$$

Ejemplos:







- Notar que $\text{lin}(P)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$:

  $0 \in \text{lin}(P)$.

  Si $y_0, y_1 \in \text{lin}(P)$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, entonces, $\forall\, x \in P$ $t \in \mathbb{R}$:

$$x + t(\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1) = \underbrace{x + (t\alpha_0) y_0}_{\substack{\in P, \text{ pues} \\ y_0 \in \text{lin}(P)}} + (t\alpha_1) y_1 \in P.$$

- Sea U el complemento ortogonal de $\text{lin}(P)$ en $\mathbb{R}^d$.

  Entonces:

$$P = \text{lin}(P) + (P \cap U)$$

- Notar que $\text{lin}(P \cap U) = \{0\}$. Los poliedros
  Ejercicio

  cuyo espacio de linealidad es $\{0\}$ se llaman "poliedros con punta" (pointed polyhedra).

- Ejercicio: Si $P = P(A,b)$, demostrar que $\text{lin}(P) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax = 0\}$.

- $\operatorname{rec}(P)$ es un cono convexo [Ejercicio]

<u>Lema 2.14.</u> (Conos de recesión)

(i) Si $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^d$ es un $\mathcal{H}$-poliedro, entonces

$$\operatorname{rec}(P) = P(A,0)$$

(ii) Si $P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(Y)$ es un $\mathcal{V}$-poliedro, entonces

$$\operatorname{rec}(P) = \operatorname{cone}(Y)$$

Demostración

(i) Sean $y \in P(A,0)$ y $x \in P(A,b)$.

Entonces, $\forall t \geq 0$ se cumple que

$$A(x+ty) = Ax + t \cdot \underbrace{Ay}_{\leq 0} \leq Ax \leq b \implies y \in rec(P).$$

Supongamos ahora que $y \in rec(P)$ y existe una fila a_i^T de A t.q. $a_i^T y > 0$. Entonces, para $t \geq 0$ suficientemente grande, se tiene

$$a_i^T(x+ty) = a_i^T x + \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{a_i^T y}_{\geq 0} > b_i$$

Luego, $x+ty \notin P$ para algún $x \in P$ y $t \geq 0$

$\implies y \notin rec(P)$ ↯

Por lo tanto, $a_i^T y \leq 0$ para toda fila a_i^T de A

$\implies y \in P(A,0)$.

(ii) a) $\text{cone}(Y) \subseteq \text{rec}(P)$:

Sean $y \in \text{cone}(Y)$, $x \in P$ y $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Sabemos que existen $\hat{v} \in \text{conv}(V)$ y $\hat{y} \in \text{cone}(Y)$ tales que $x = \hat{v} + \hat{y}$. Luego,

$$x + ty = \hat{v} + \underbrace{\hat{y} + ty}_{\substack{\parallel \\ \tilde{y}}}$$

Pero $\tilde{y} := \hat{y} + ty \in \text{cone}(Y)$, pues $\text{cone}(Y)$ es un cono convexo

$\Rightarrow x + ty \in P$

$\Rightarrow y \in \text{rec}(P)$

b) $\text{rec}(P) \subseteq \text{cone}(Y)$:

Supongamos que $y \in \text{rec}(P)$ pero $y \notin \text{cone}(Y)$.

Del Lema de Farkas (II), [Ejercicio]

$\exists\, a_0 \in \mathbb{R}^d$ tq $a_0^T Y \leq 0^T$, $a_0^T y > 0$

Sea $x \in P$. Tenemos que $x \in \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$, $\mathbb{1}^T \alpha = 1$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, $\mu \geq 0$

ModeMat

$$x = V\cdot\alpha + \varphi\cdot u$$

$$\Rightarrow a_0^T x = a_0^T V\cdot\alpha + \underbrace{a_0^T\varphi}_{\leq 0^T}\cdot\underbrace{u}_{\geq 0} \leq a_0^T\cdot V\cdot\alpha$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_0^T v_j\,\alpha_j$$

$$\leq \max_{j=1,\dots,n}\{a_0^T v_j\} =: K$$

Luego, $a_0^T x \leq K$ es una desigualdad válida para P.

Por otra parte,

$$a_0^T(x+ty) = a_0^T x + t\cdot\underbrace{a_0^T y}_{>0}$$

de donde, para t suficientemente grande,

$$a_0^T(x+ty) > K$$

$$\Rightarrow x+ty \notin P$$

$$\Rightarrow y \notin rec(P) \quad \lightning$$

Definición: (Cono de homogeinización)

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo.
La homogeinización de P se define por:

$$\text{homog}(P) := \left\{ t\binom{1}{x} \mid x \in P,\ t \geq 0 \right\} + \left\{ \binom{0}{y} \mid y \in \text{rec}(P) \right\}$$

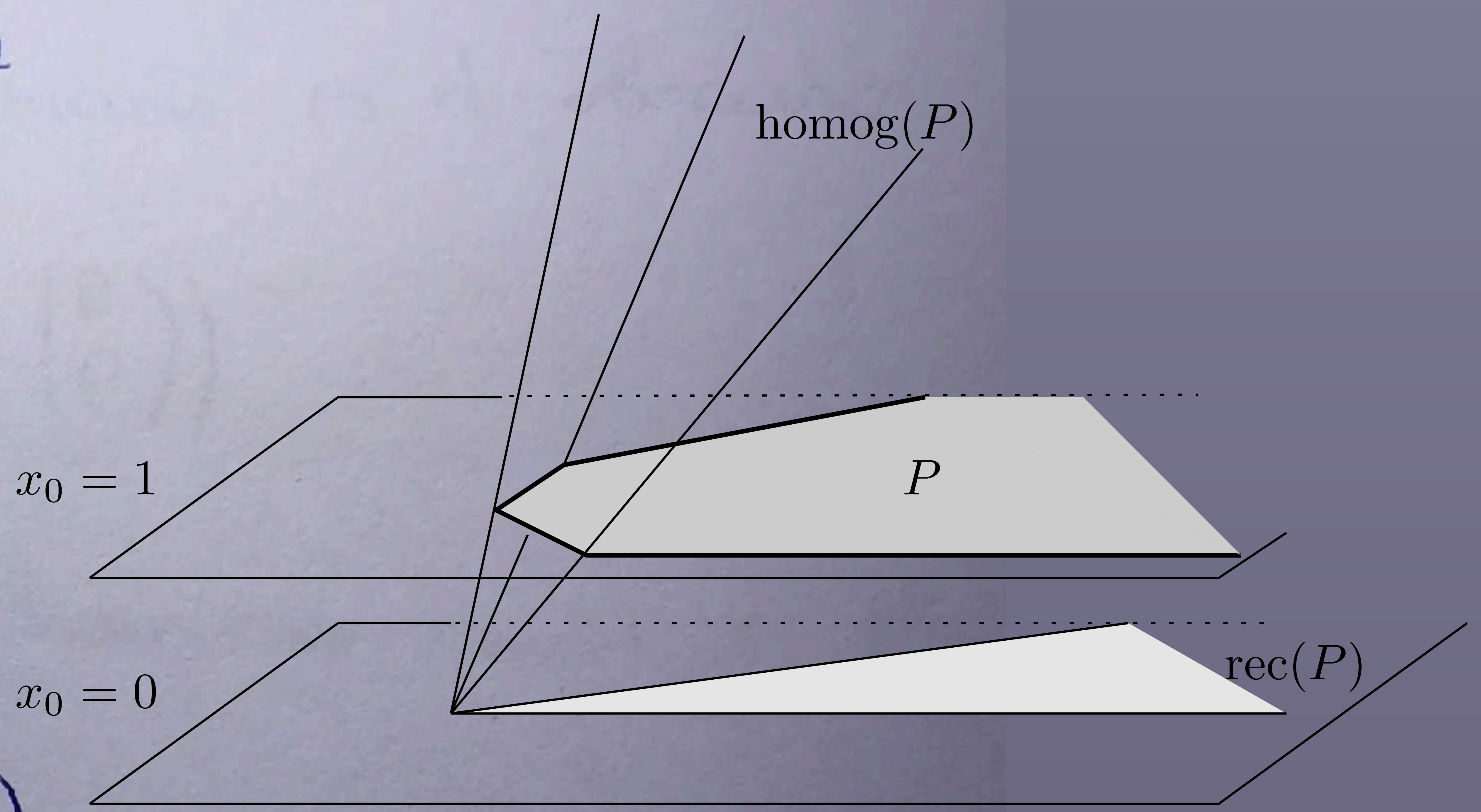


Figura tomada de Ziegler (2007), "Lectures on Polytopes".

- Se puede demostrar que homog(P) es un cono convexo en $\mathbb{R}^{d+1}$ [Ejercicio]

- Se tiene que:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \binom{1}{x} \in \text{homog}(P) \right\}$$ [Ejercicio]

Lema 2.15. (Conos de homogeinización)

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un poliedro

(i) Si $P = P(A, b)$, su homogeinización es el $\mathcal{H}$-cono dado por:

$$\operatorname{homog}(P) = P\left(\begin{pmatrix} -1 & 0^T \\ -b & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(ii) Si $P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(Y)$, su homogeinización es el $\mathcal{V}$-cono dado por:

$$\operatorname{homog}(P) = \operatorname{cone}\begin{pmatrix} \mathbb{1}^T & 0^T \\ V & Y \end{pmatrix}$$

Demostración

(i) Sea $\tilde{P} := P\left(\begin{pmatrix} -1 & 0^T \\ -b & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

a) homog(P) $\subseteq \tilde{P}$:

Sea $z \in$ homog(P). Se tiene que $z = \begin{pmatrix} t \\ tx + y \end{pmatrix}$ para ciertos $t \geq 0$, $x \in P \wedge y \in \text{rec}(P)$.

Luego,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -b & A \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -1 & 0^T \\ -b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ tx+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t \\ -t(b - Ax) + Ay \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} t \geq 0 \Rightarrow -t \leq 0 \\ x \in P \Rightarrow Ax \leq b \Rightarrow -t(b-Ax) \leq 0 \\ y \in \text{rec}(P) \Rightarrow Ay \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -t(b-Ax) + Ay \leq 0$$

Por lo tanto, $\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ -b & A \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $z \in \tilde{P}$.

b) $\tilde{P} \subseteq \text{homog}(P)$:

Sea $z = \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \in \tilde{P}$. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0^T \\ -b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_0 \geq 0 \\ A\bar{x} \leq x_0 b \end{cases}, \quad \text{con } \begin{matrix} x_0 \in \mathbb{R} \\ \bar{x} \in \mathbb{R}^d \end{matrix}$$

Si $x_0 = 0$:

Entonces $A\bar{x} \leq 0 \cdot b = 0$ y luego $\bar{x} \in \text{rec}(P)$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow z \in \text{homog}(P)$.

Si $x_0 > 0$:

Entonces $A \cdot \left(\frac{1}{x_0}\bar{x}\right) \leq b$. Denotando $\hat{x} = \frac{1}{x_0}\bar{x}$ se sigue entonces que $\hat{x} \in P$ y además

$$z = \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \text{ con } x_0 > 0 \wedge \hat{x} \in P$$

$\Rightarrow z \in \text{homog}(P)$.

Ejercicios

1) Demostrar que si $P=P(A,b)$ entonces

$$\text{lin}(P) = \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, Ax = 0\}\,.$$

2) Demostrar que si U es el complemento ortogonal de lin(P) entonces

$$\text{lin}(P \cap U) = \{0\}\,.$$

3) Demostrar que si P es un conjunto convexo, entonces rec(P) es un cono convexo.

4) Demostrar que si P es un conjunto convexo, entonces homog(P) es un cono convexo.

5) Demostrar la parte (ii) del Lema 2.15