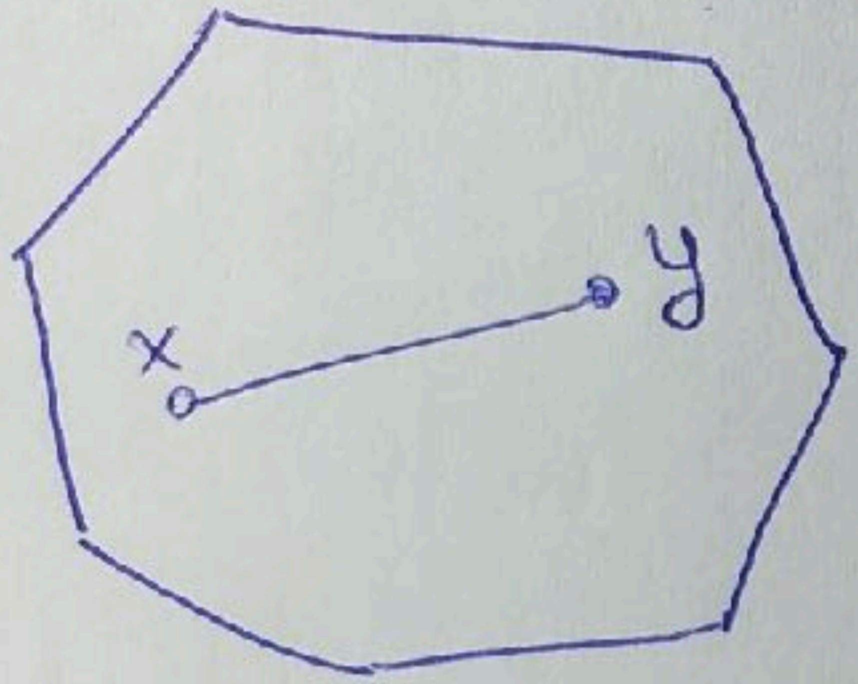
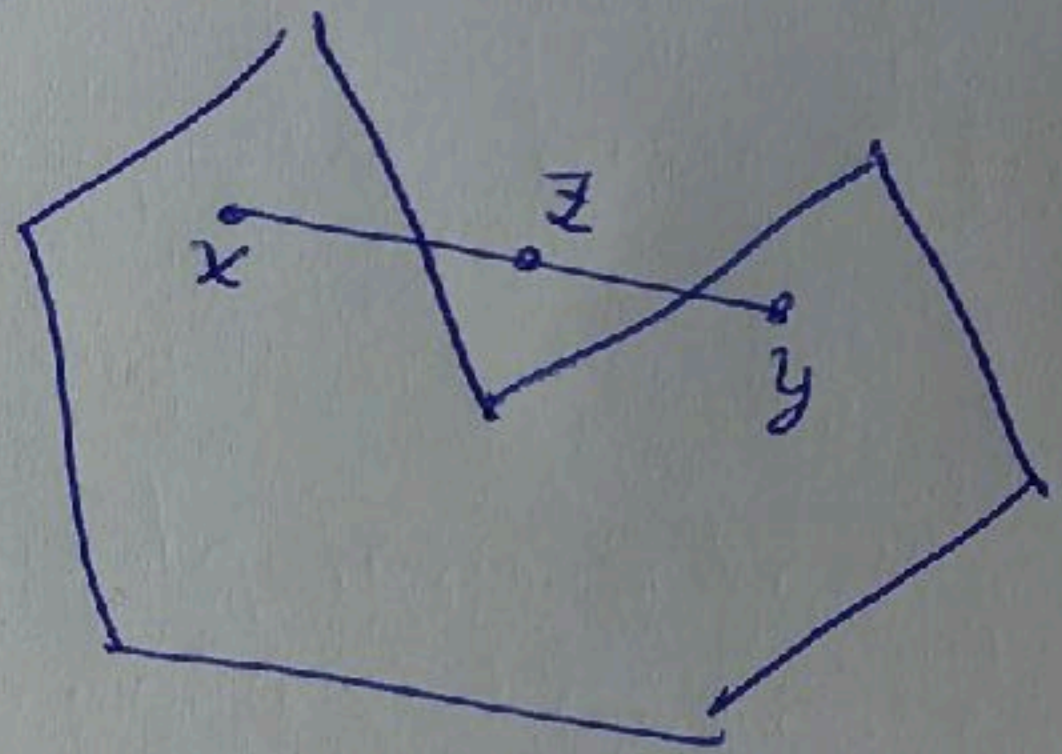
1.2. Combinaciones convexas y cónicas

Convexidad

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in K$ se cumple que el segmento $[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda) y \mid 0 \le \lambda \le 1\}$ está contenido en K.



CONVEXO



NO CONVEXO:

$z \in [x,y]$, pero $z \notin K$

Envolvente convexa:

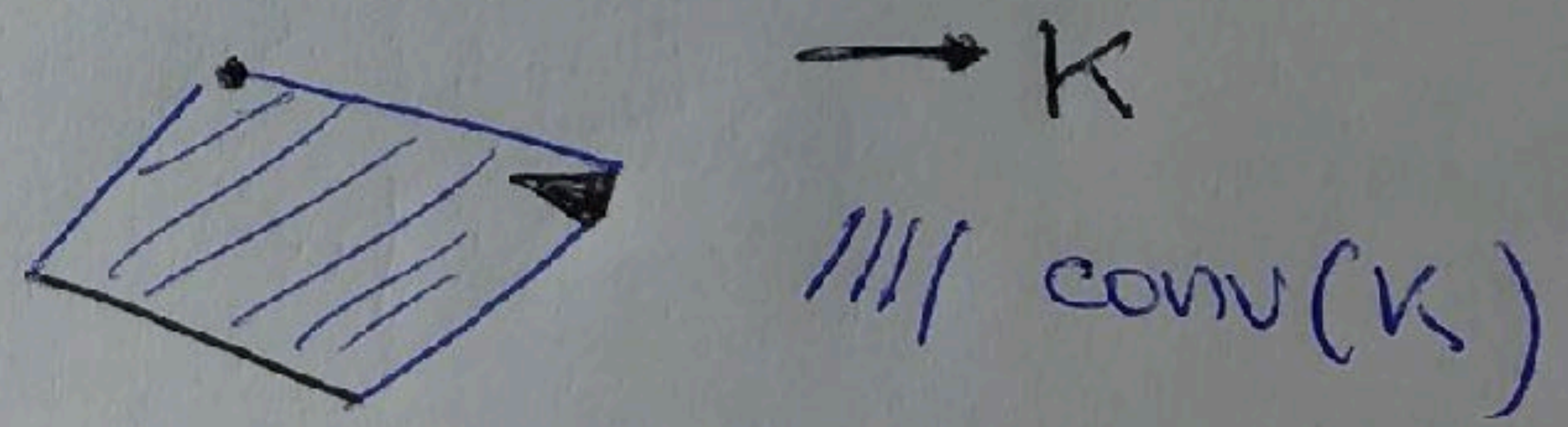
<u>Lema</u>: La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Ejercicio: (Demostrar).

Dado $K \subseteq \mathbb{R}^d$, la <u>envolvente convexa</u> de K es el conjunto convexo "más pequeño" que contiene a K, es decir, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a K:

$$\mathrm{conv}(K) := \bigcap \{ M \subseteq \mathbb{R}^d \mid K \subseteq M \wedge M \text{ es convexo} \}$$

"envolvente convexa de K"



Teorema:

Sea $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq K$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, k$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in \operatorname{conv}(K)$$

Dem: (Idea)

Observar que:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = (1-\lambda_k) \underbrace{\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \dots \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} x_{k-1} \right]}_{y_{k-1}} + \lambda_k x_k$$

- puede asumirse que $\lambda_k < 1$ (Por qué)
- basta con demostrar que $y_{k-1} \in \operatorname{conv}(K)$ (Por qué?)
- para demostrar esto, utilizamos inducción (Cómo?)

Ejercicio: completar la demostración

<u>Definición</u>: Llamamos a la operación anterior "<u>combinación convexa</u>". De manera más precisa, decimos que "<u>x es combinación convexa de $x_1, \ldots, x_k$</u>" si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no negativos y con suma igual a 1 tales que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

<u>Teorema</u>: Sea $K \subset \mathbb{R}^d$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq K,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

<u>Demostración</u>:

- la inclusión "$\subseteq$" se da porque el conjunto de la derecha es un conjunto convexo que contiene a K (Ejercicio: Demostrar)
- la inclusión "$\supseteq$" se da como consecuencia del teorema anterior (Por qué?)

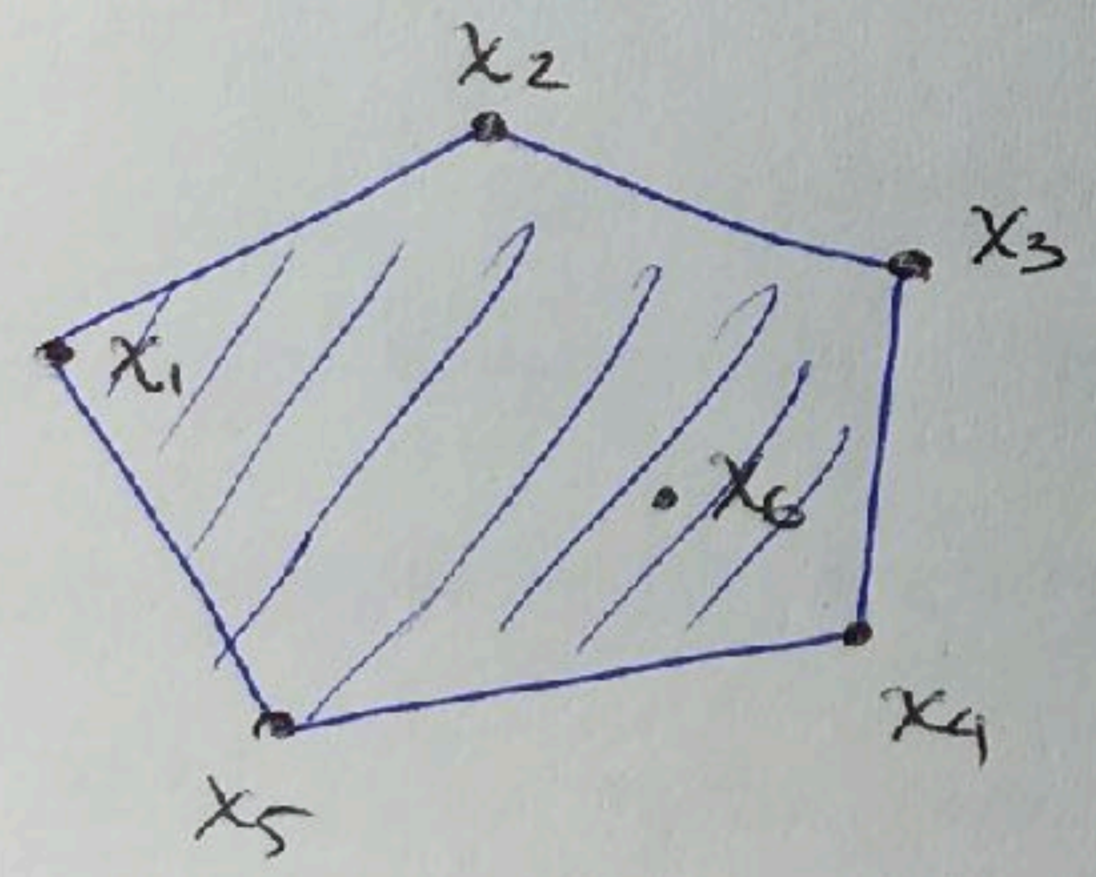
Caso especial:

Si $K = \{x_1, \dots, x_k\}$, entonces

$$\operatorname{conv}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Es decir, si K es un conjunto finito de puntos, entonces $\operatorname{conv}(K)$ es el conjunto de sus combinaciones convexas.

Ejemplos:



$K = \{x_1, \dots, x_6\}$

//// $\operatorname{conv}(K)$

notar que si $K_2 = \{x_1, \dots, x_5\}$ entonces

$$\operatorname{conv}(K) = \operatorname{conv}(K_2)$$

(el punto x_6 es combinación convexa de los demás)

Definiciones :

- Un $\mathcal{V}$-polítopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^d$

- Un $\mathcal{H}$-poliedro es la intersección de un conjunto finito de semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^d$

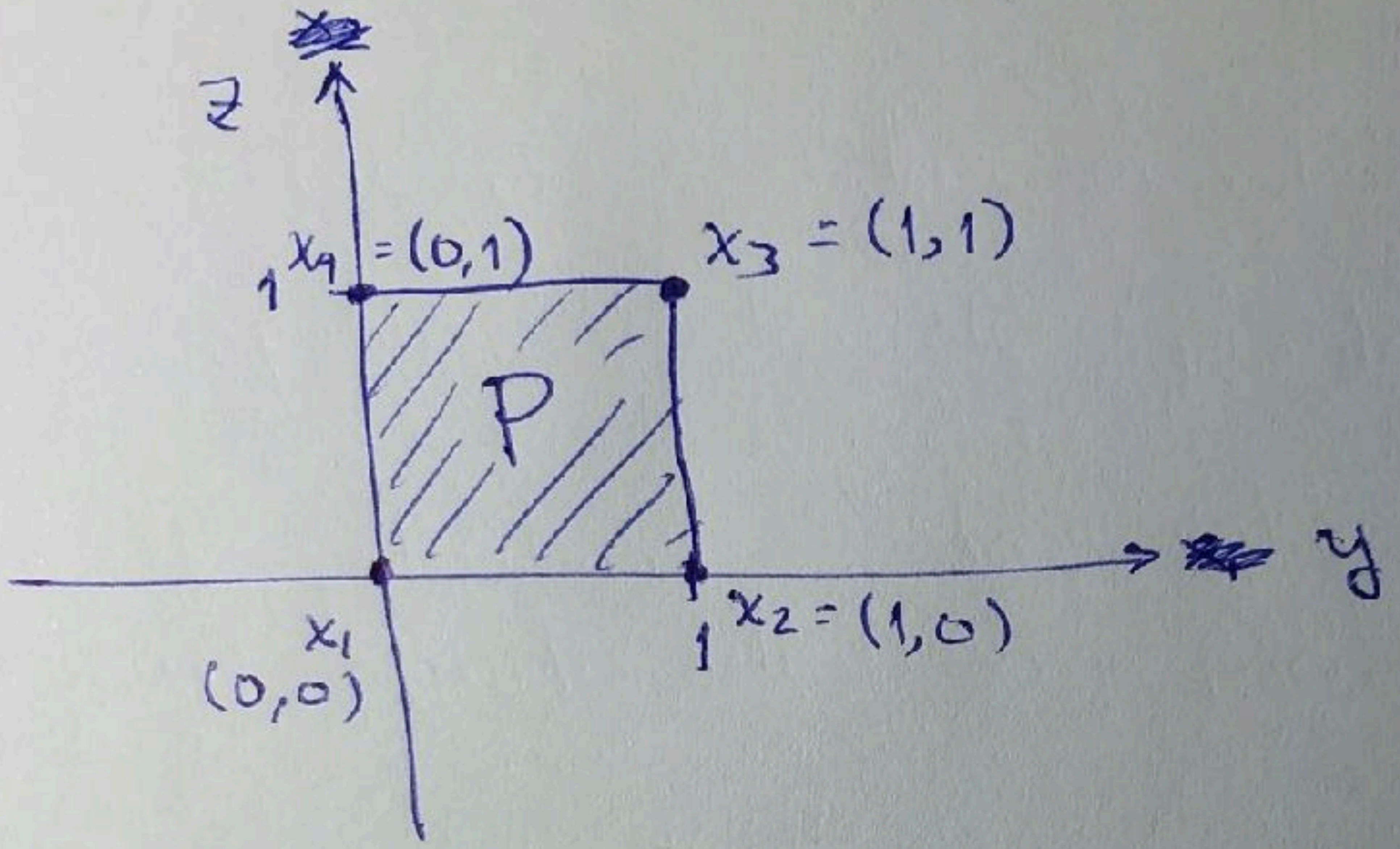
  (obs: un "semiespacio cerrado" en $\mathbb{R}^d$ es un conjunto de la forma $H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid a^T x \leq \gamma\}$, para algún $a \in \mathbb{R}^d$ y $\gamma \in \mathbb{R}$)

  Es decir, un $\mathcal{H}$-poliedro es el conjunto solución de un sistema finito de desigualdades lineales

- Un $\mathcal{H}$-polítopo es un $\mathcal{H}$-poliedro acotado.

  (obs: Decimos que un conjunto es acotado, si no contiene un "rayo" $R := \{x + ty \mid t \geq 0\}$)

Ejemplo:



$$P = \operatorname{conv}\left(\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}\right)$$

$$P = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1,\ z \leq 1\}$$

P es $\mathcal{V}$-politopo y $\mathcal{H}$-politopo.

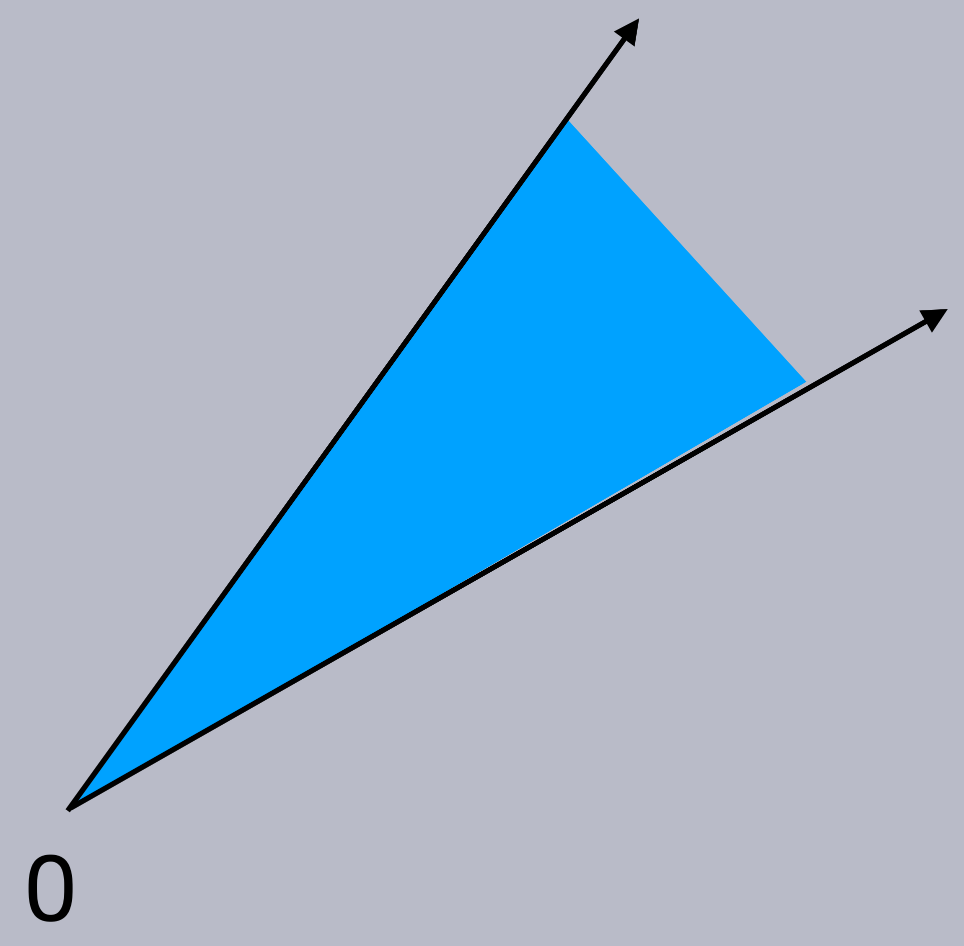
|| Son todos los $\mathcal{V}$-politopos $\mathcal{H}$-politopos? (y vice versa?)

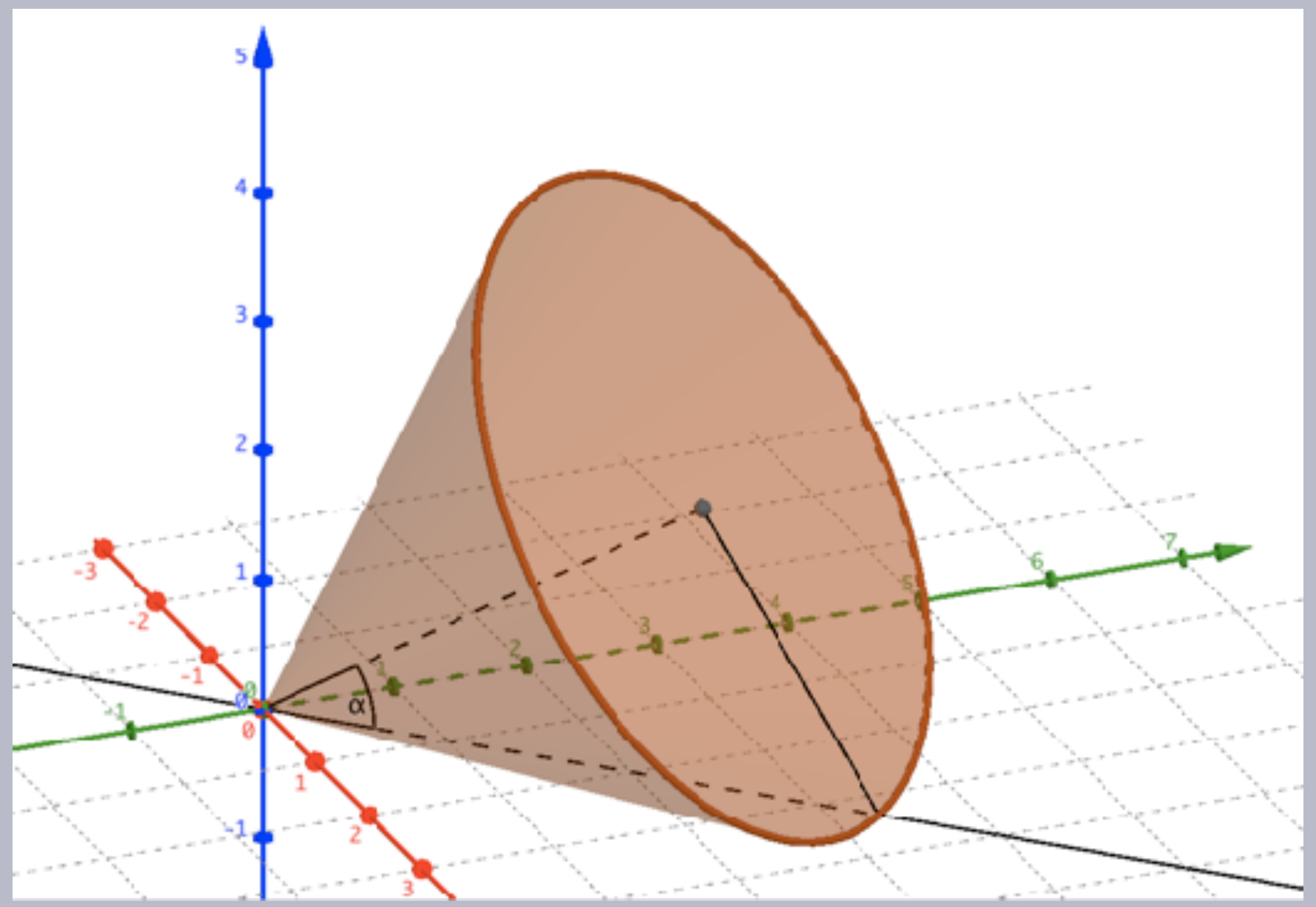
Sí $\longrightarrow$ Capítulo 2.

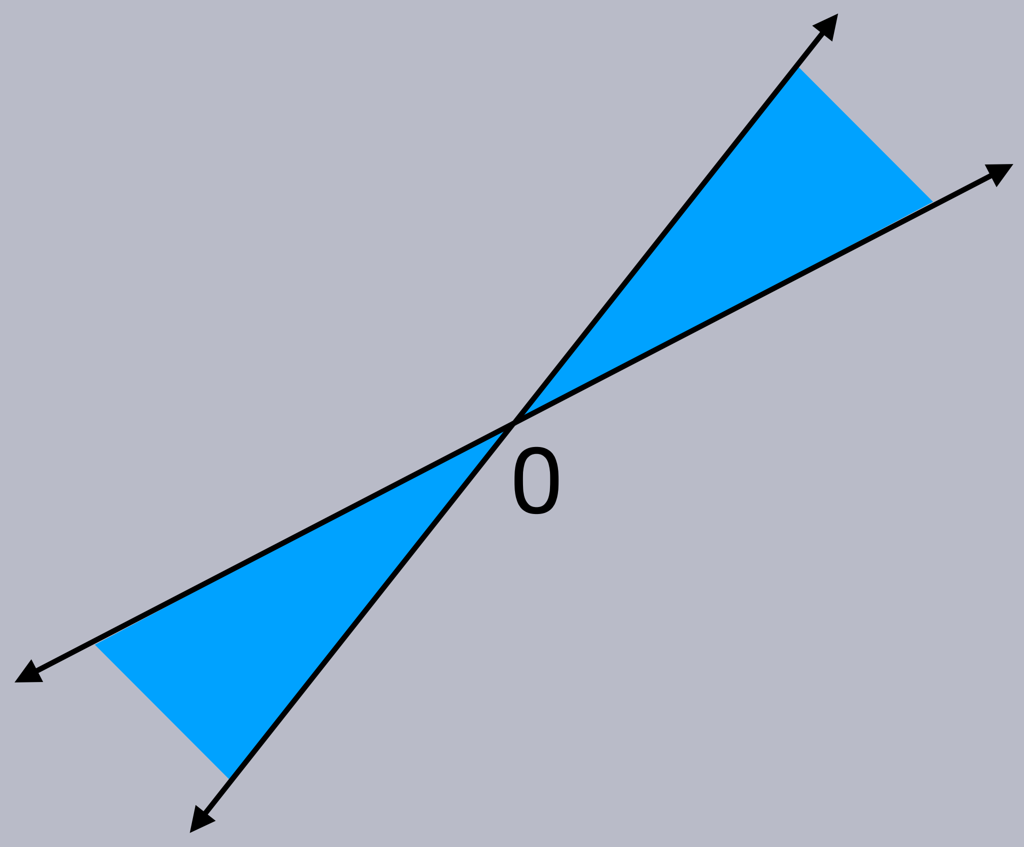
Definición (Cono)

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ es un cono si para todo $y \in C$ se cumple que:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : ty \in C$$



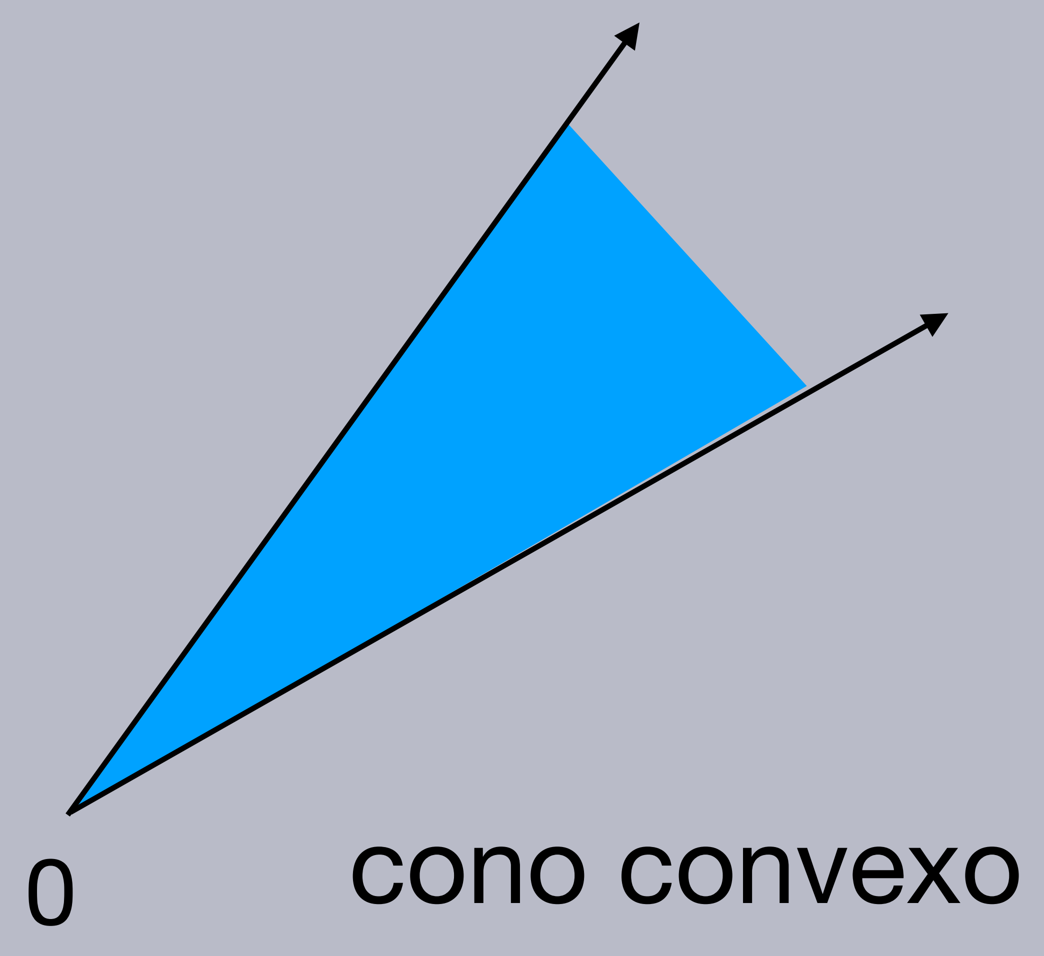


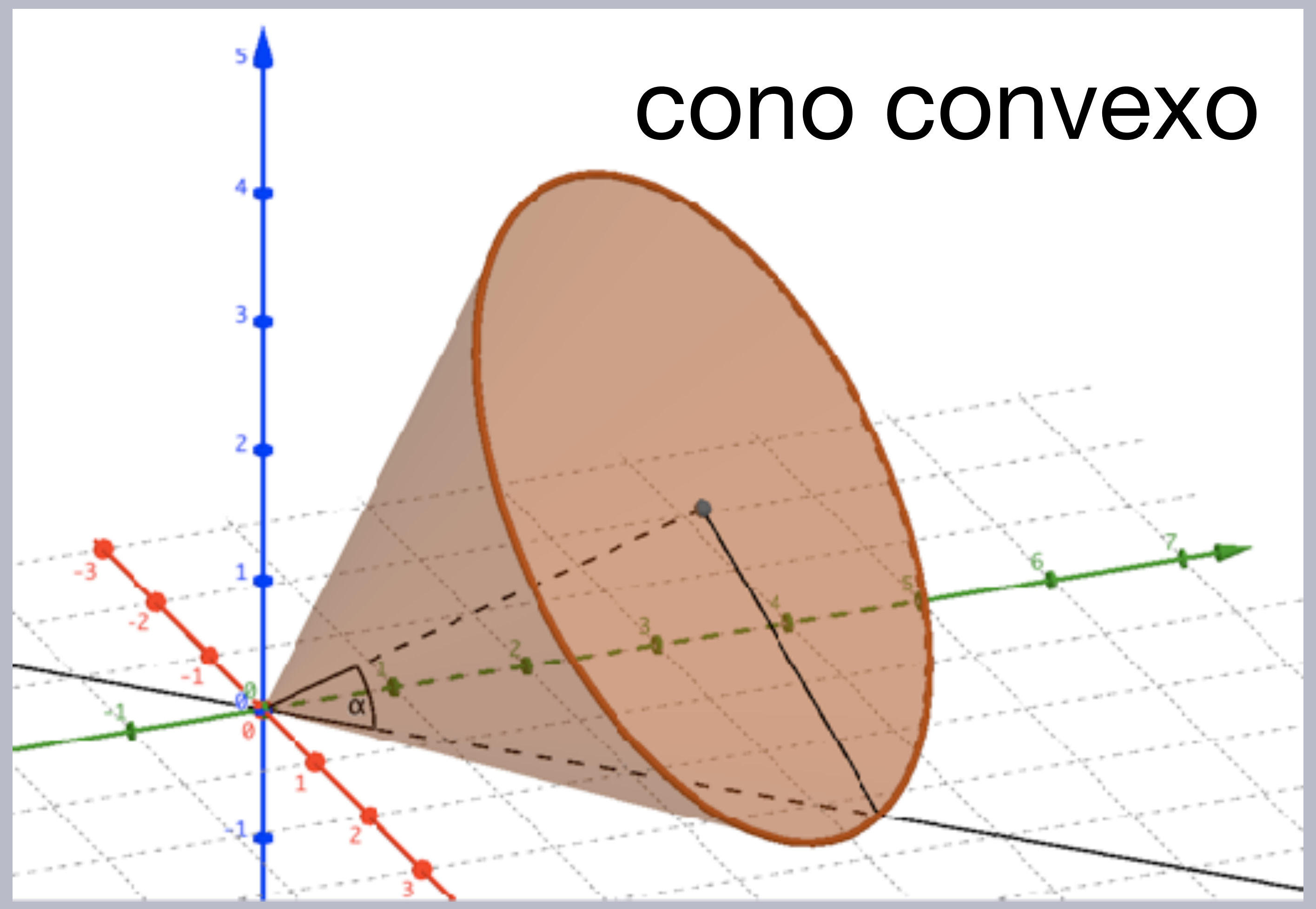


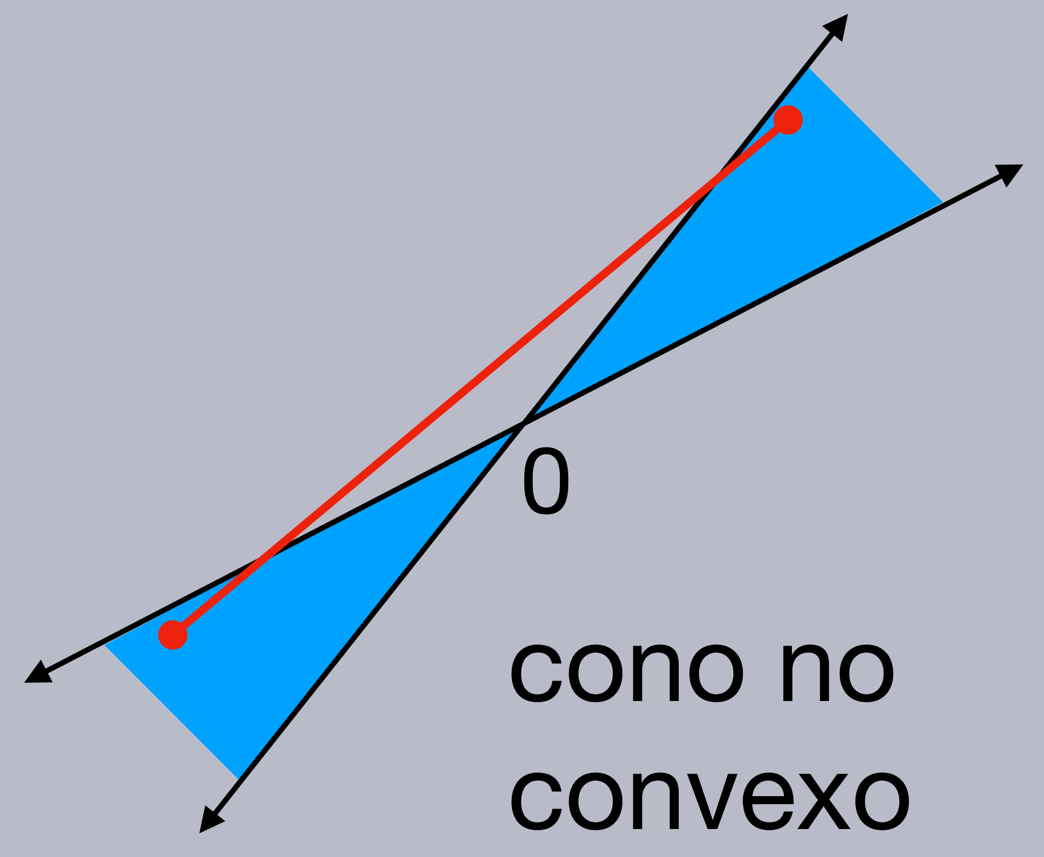
Observación: $0 \in C$

Definición (Cono convexo)

Un cono que además es un conjunto convexo se llama *cono convexo*.







En adelante consideraremos únicamente conos convexos.

Proposición:

C es cono convexo $\quad \Leftrightarrow \quad \forall y_1, y_2 \in C,\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ :$
$t_1 y_1 + t_2 y_2 \in C$

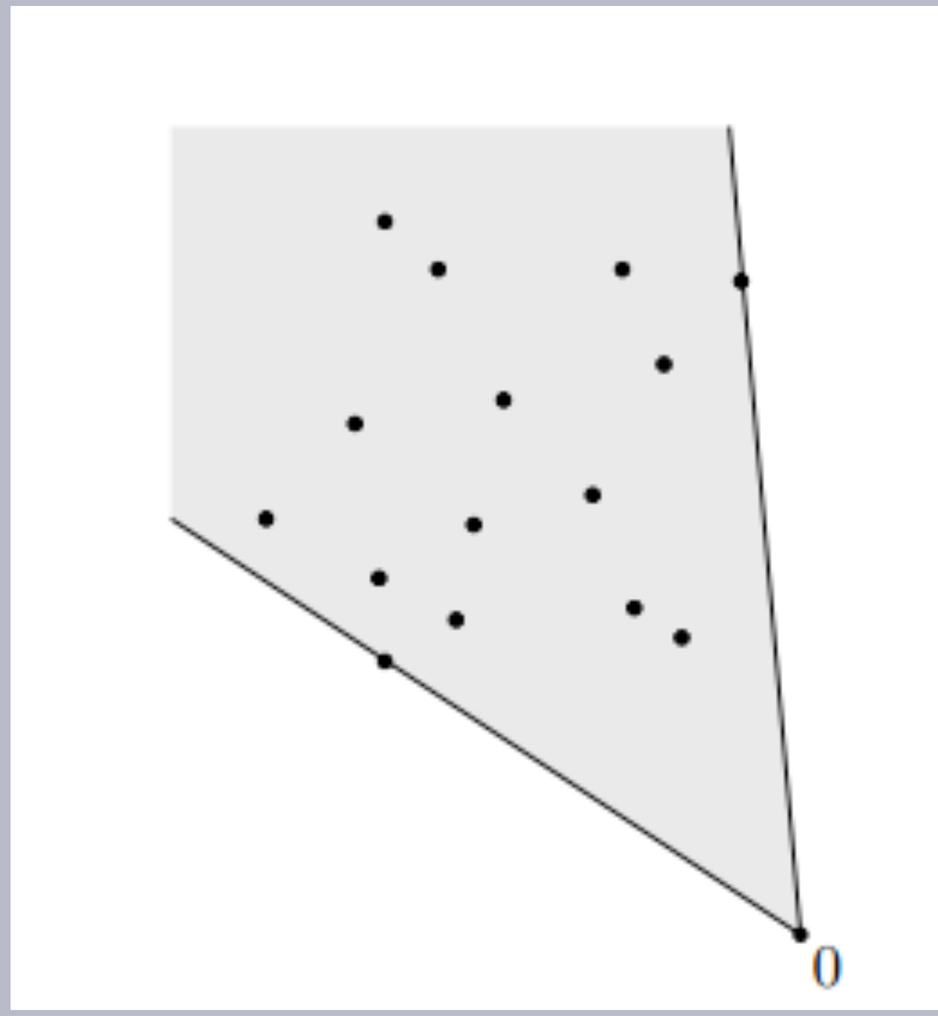
Proposición

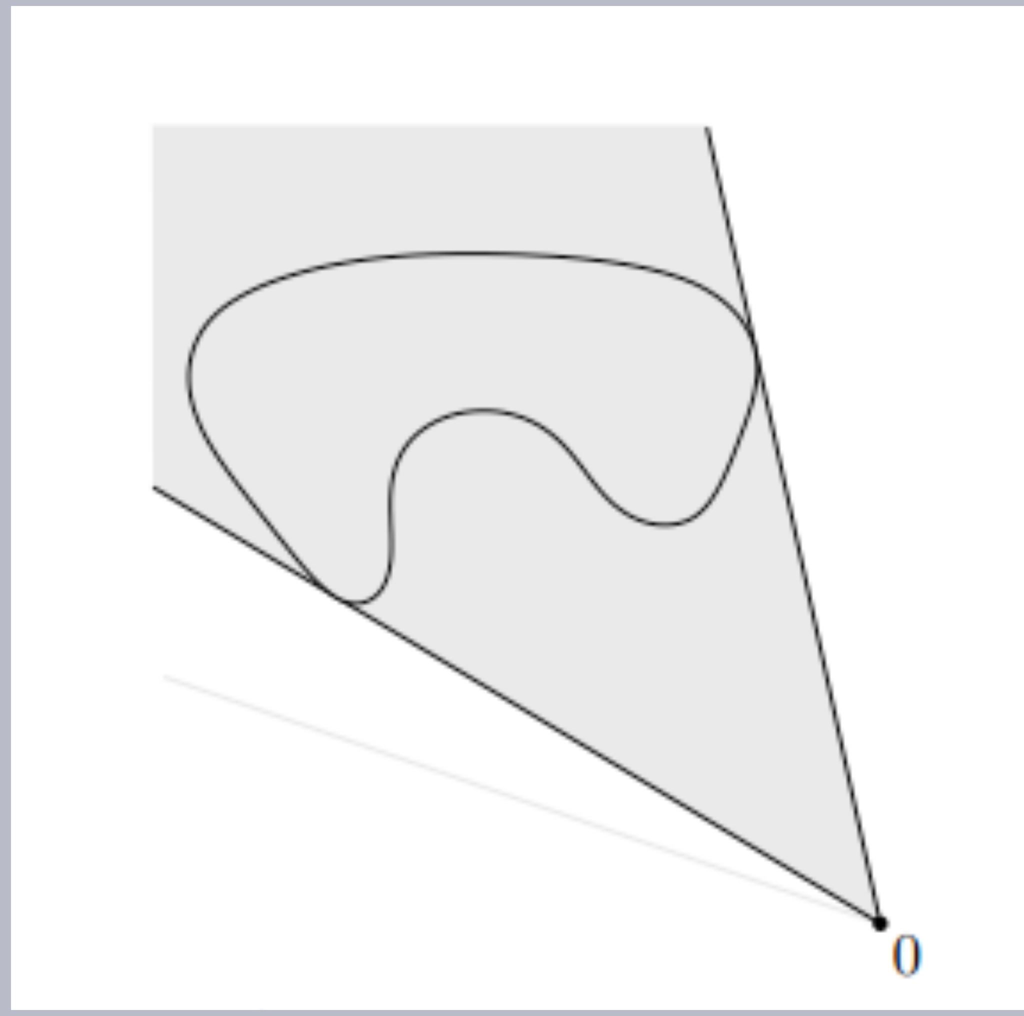
La intersección de dos conos convexos es un cono convexo.

Definición (Envolvente cónica [conic hull])

Sea $K \subset \mathbb{R}^d$. La envolvente cónica de K es el cono convexo más pequeño que contiene a K. Está dado por la intersección de todos los conos convexos que contienen a K:

$$\text{cone}(K) := \bigcap \left\{ C \subset \mathbb{R}^d \; : \; K \subset C \wedge K \text{ es cono convexo} \right\}$$





Proposición

Sean $y_1, \ldots, y_k \in K$ y $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+$. Entonces:

$$t_1 y_1 + t_2 y_2 + \cdots + t_k y_k \in \text{cone}(K)$$

Demostración: Ejercicio (usar inducción)

Proposición

Sea $K \subset \mathbb{R}^d$. Se tiene que:

$$\text{cone}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i y_i \ : \ \{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq K \wedge t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Demostración:

- La inclusión $\subseteq$ se da porque el conjunto de la derecha es un cono convexo que contiene a K (Ejercicio)
- La inclusión $\supseteq$ se da por la proposición anterior

Corolario

Sea $K := \{y_1, \ldots, y_k\} \subset \mathbb{R}^d$. Se tiene que:

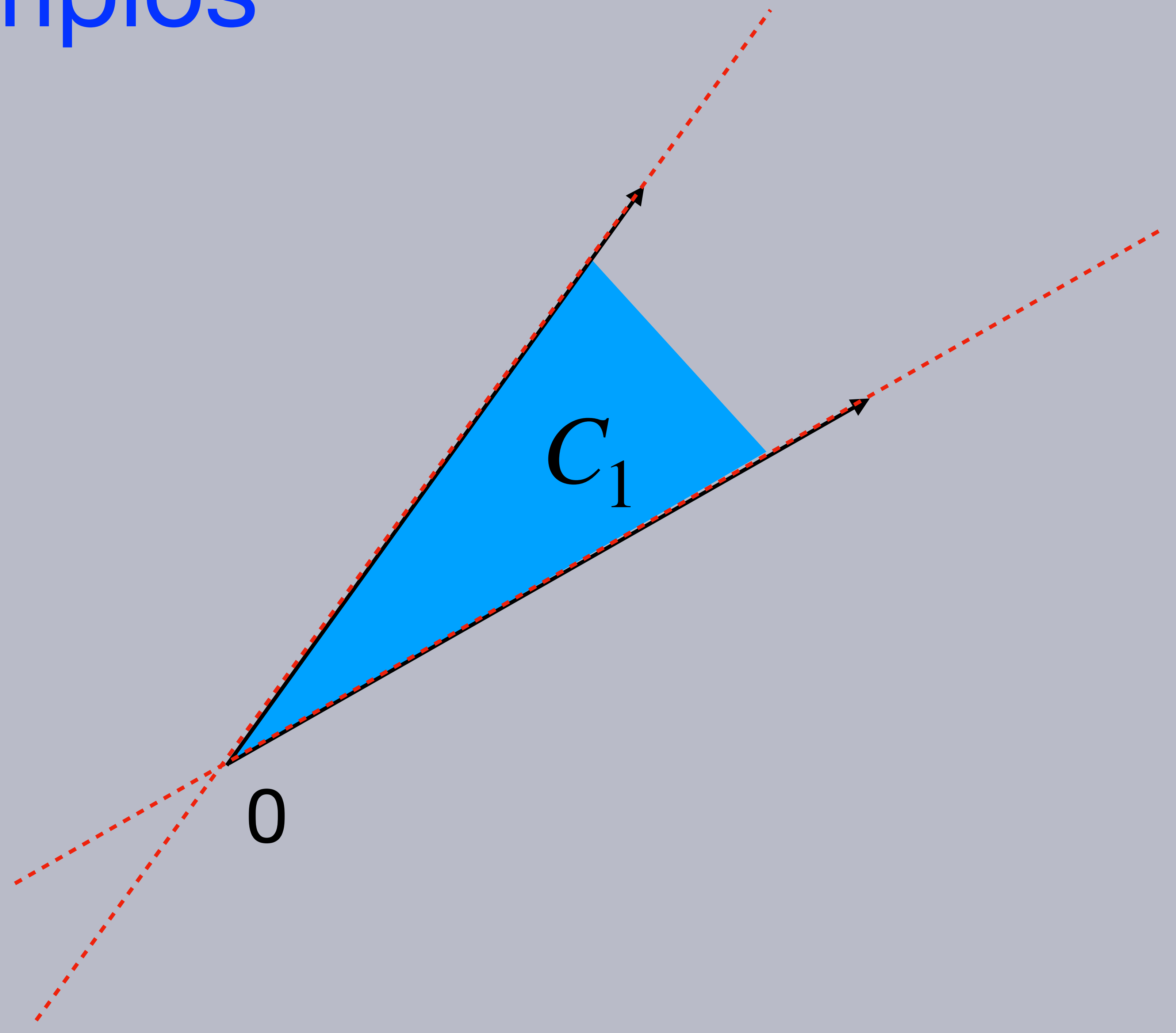
$$\text{cone}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i y_i \;:\; t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

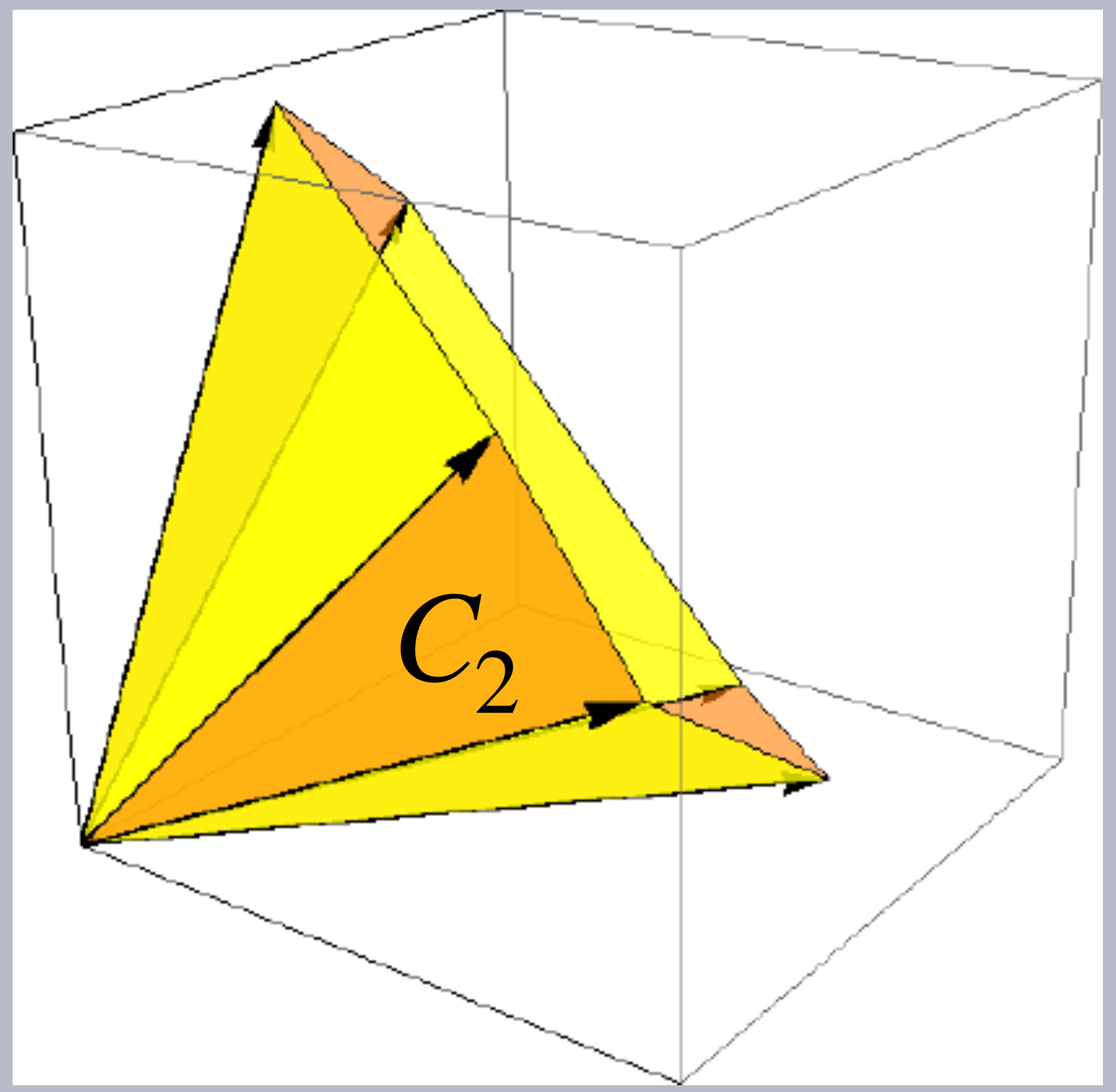
combinación cónica

Definición (conos poliedrales):

- Un $\mathscr{V}$-cono (poliedral) es la envolvente cónica de un conjunto finito de vectores
- Un $\mathscr{H}$-cono (poliedral) es el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales homogéneas $\{y \in \mathbb{R}^d : Ax \leq 0\}$.

Ejemplos





C_1 y C_2 con tanto $\mathscr{V}$-conos como $\mathscr{H}$-conos

¿Se cumple esto en general para todo cono poliedral?
(Sí: Capítulo 2)