Luis M. Torres *Agosto, 2021*

Ejercicios Capítulo 3

1. Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos. Demostrar que existe $V' \subseteq V$ tal que V' satisface las dos propiedades siguientes:
   (a) $\operatorname{conv}(V') = \operatorname{conv}(V)$, y
   (b) ningún punto de V' puede expresarse como combinación convexa de los demás puntos de ese conjunto.

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que existen una submatriz de A por filas $A' \in \mathbb{R}^{m' \times d}$ y un subvector $b' \in \mathbb{R}^{m'}$, con $m' \leq m$, tal que A' y b' satisfacen las dos propiedades siguientes:
   (a) $\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^d : A'x \leq b'\}$, y
   (b) ninguna desigualdad del sistema $A'x \leq b'$ puede obtenerse como combinación de las demás desigualdades.

3. Sean P un polítopo y F, G dos caras de P, con $F \subseteq G$.
   (a) Demostrar que $F \cap G$ es una cara de P.
   (b) Demostrar que F es una cara de G.
   (c) Demostrar que si $F \subset G$, entonces $\dim(F) < \dim(G)$.

4. Sean $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $P = \operatorname{conv}(V)$. Suponer que existe $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $a^T v_i < a^T v_1$, para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$. Demostrar que v_1 es un vértice de P.

5. Sean $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos y $W \subset V$. Suponer que existen $a \in \mathbb{R}^d$ y $b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a^T x = b_0$ se cumple para todo $x \in W$, y $a^T x < b_0$ se cumple para todo $x \in V \setminus W$. Demostrar que $\operatorname{conv}(W)$ es una cara de $\operatorname{conv}(V)$.

6. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$ tales que $x_2 \in \operatorname{conv}(\{x_1, x_3\})$. Sea además $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $a^T x_2 \leq a^T x_3$. Demostrar que $a^T x_1 \leq a^T x_2$.

7. Sean P un poliedro y F una cara no vacía de P, minimal respecto a la inclusión (es decir, F no contiene otra cara propia de P).
   (a) Demostrar que $F = \operatorname{aff}(F)$.

(b) Sea $x_0 \in F$. Empleando el resultado de la parte anterior, demostrar que

$$F - x_0 := \{x - x_0 \,:\, x \in F\},$$

es un espacio vectorial y que $F - x_0 = \operatorname{lin}(P)$.

Observación: Recordar que $\operatorname{aff}(F)$ es el conjunto formado por todas las combinaciones afines de elementos de F, y que

$$\operatorname{lin}(P) = \left\{y \in \mathbb{R}^d \,:\, x + ty \in P,\, \forall x \in P,\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

8. Sean $P = P(A, b) \subset \mathbb{R}^d$ un polítopo y $x \in P$. Demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes:

   (a) x es un vértice de P.

   (b) x no es combinación convexa estricta de dos elementos distintos de P, es decir, no existen $y, z \in P$, $y \neq z$ tales que $x = ty + (1-t)z$ para algún $0 < t < 1$.

   (c) $P \setminus \{x\}$ es convexo.

   (d) $\operatorname{rango}(A_=) = d$, donde $A_=$ es la submatriz que contiene todas las filas de A que corresponden a desigualdades que x satisface con igualdad.

   (e) Existe $c \in \mathbb{R}^d$ tal que x es la solución óptima única del programa lineal $\max\left\{c^T y \,:\, y \in P\right\}$.

9. *(Caracterización de puntos interiores relativos de un polítopo).* Sean $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polítopo con $\dim(P) = k \leq d$, y $y \in P$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) y no está contenido en una cara propia de P.

   (b) Si $a^T x \leq b_0$ es válida para P y $a^T y = b_0$, entonces $a^T x = b_0$ se cumple para todo $x \in P$.

   (c) $y = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$, donde $x_0, \ldots, x_k$ son $k+1$ puntos afínmente independientes de P, y $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$.

   (d) $y = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i$, donde $x_0, \ldots, x_k$ son $k+1$ puntos afínmente independientes de P.

10. Demostrar que si $P = \{x\}$, entonces $P = \operatorname{relint}(P)$. ¿Qué puede decirse acerca de $\operatorname{int}(P)$?

11. Sean P un polítopo de dimensión 4 y u, v dos vértices de P. Demostrar que existe una arista entre u y v si y sólo si existen al menos tres facetas que contienen a u y v.

12. Sea P un polítopo tridimensional. Demostrar que P debe contener una faceta combinatoriamente equivalente a un triángulo, o un vértice v tal que la figura de vértice asociada P/v sea combinatoriamente equivalente a un triángulo (o ambas cosas a la vez).
Sugerencias:

    (a) Suponer que P tiene n vértices, e aristas y m facetas. Sean además $d(i)$ el número de aristas que contienen a un vértice $i \in \{1, \ldots, n\}$ (es decir, el grado de i) y $r(j)$ el número de aristas contenidas en una faceta $j \in \{1, \ldots, m\}$ (es decir, el número de lados del polígono formado por esta faceta). Demostrar la identidad:

    $$\sum_{i=1}^{n} d(i) = \sum_{j=1}^{m} r(j) = 2e.$$

    (b) Emplear la identidad anterior conjuntamente con la fórmula de Euler para polítopos tridimensionales,

    $$n - e + m = 2$$

13. En los siguientes ejercicios, considerar conjuntos parcialmente ordenados formados por una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos finitos, con la relación de orden dada por la inclusión de conjuntos. Dar ejemplos de $\mathcal{F}$ para que el poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ sea:

    (a) no acotado

    (b) acotado pero no graduado

    (c) acotado y graduado, pero no retícula

    (d) retícula no graduada

    (Se pide un ejemplo en cada caso).

14. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un prisma sobre un triángulo.

    (a) Dibujar el diagrama de Hasse de la retícula de caras $L(P)$.

    (b) Seleccionar arbitrariamente un vértice v de P, indicar a qué polítopo corresponde la figura de vértice P/v e identificar la retícula $L(P/v)$ dentro del diagrama de $L(P)$.

    (c) Construir un polítopo P' cuya retícula de caras $L(P')$ sea isomorfa a la retícula opuesta a $L(P)$, es decir $L(P') \cong L^{\mathrm{op}}(P)$.

15. Construir una retícula que satisfaga todas las propiedades del Teorema 3.4, pero que no sea la retícula de caras de un polítopo.

16. Sea P un polítopo con 7 vértices y 7 facetas, cuyas relaciones de inclusión están dadas por la siguiente matriz M de incidencia facetas-vértices ($M_{ij} = 1$ si y sólo si el vértice j está contenido en la faceta i).

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar la retícula de caras de P.

(b) ¿Cuál es la dimensión de P? Si $\dim(P) \leq 4$, dibujar (un bosquejo de) P.

17. Un polítopo P tiene cinco vértices $1, \ldots, 5$ y cinco facetas $F_1, \ldots, F_5$. Cada faceta contiene los siguientes vértices:

$$F_1 = \{1, 2, 4, 5\} \qquad F_2 = \{1, 2, 3\}$$
$$F_3 = \{2, 3, 4\} \qquad F_4 = \{3, 4, 5\}$$
$$F_5 = \{1, 3, 5\}$$

Reconstruir la retícula de caras de P y determinar la dimensión de P.

18. Demostrar que la retícula de caras de un polítopo puede reconstruirse a partir de la información de incidencia entre vértices y facetas, es decir, si se conoce cuáles son los vértices contenidos en cada faceta del polítopo.

19. Sean P un conjunto arbitrario en $\mathbb{R}^d$ y $P^{\triangle}$ su conjunto polar. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $P^{\triangle}$ es un conjunto convexo que contiene al origen.

(b) $P \subseteq P^{\triangle\triangle}$.

(c) $P^{\triangle\triangle}$ es un conjunto convexo que contiene al origen.

20. Sea $P := P(A, \mathbf{1})$. Demostrar que $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(P)$. ¿Qué se concluye en este caso acerca de la dimensión de P?

21. Sean $P := P(A, \mathbf{1})$ un polítopo y F una cara de P. Demostrar que A puede descomponerse en dos submatrices por filas A', A'' que satisfacen las siguientes propiedades:

    (a) $F = \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, A'x = \mathbf{1} \wedge A''x \leq \mathbf{1}\}$.

    (b) Si $y \in \operatorname{relint}(F)$, entonces $A'y = \mathbf{1}$ y $A''y < \mathbf{1}$.

22. Sea P una pirámide cuadrada de dimensión 3.

    (a) Escribir la retícula de caras de P.

    (b) Escribir la retícula de caras de $P^{\triangle}$.

    (c) Determinar qué polítopo es $P^{\triangle}$. Justificar la respuesta.

23. Sea P un polítopo con $0 \in \operatorname{int}(P)$. Sean $F_1, \ldots, F_m$ las facetas y $v_1, \ldots, v_n$ los vértices de P. La *matriz de incidencia facetas-vértices* de P es una matriz $M(P) := (m_{ij}) \in \{0,1\}^{m \times n}$ definida por:

    $$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } v_j \text{ está contenido en la faceta } F_i, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

    Demostrar que $M(P) = M^T(P^{\triangle})$.

24. Sean $P \subset \mathbb{R}^d$ un polítopo y F, G dos caras de P. Demostrar que:

    (a) $F^{\diamond}$ es una cara de $P^{\triangle}$.

    (b) $F \subseteq G \;\Leftrightarrow\; G^{\diamond} \subseteq F^{\diamond}$.

25. Sean $V := \{(2,2), (2,-2), (-2,1), (-2,-1)\}$ y $P := \operatorname{conv}(V)$.

    (a) Determinar $P^{\triangle}$ como un sistema de desigualdades lineales.

    (b) Graficar P y $P^{\triangle}$.

    (c) Sea F la cara de P que contiene los vértices $(-2,1)$ y $(-2,-1)$. Determinar $F^{\diamond}$.

26. Un polítopo se dice *autopolar* si es combinatoriamente equivalente con cualquier polítopo con el que sea combinatoriamente polar. Demostrar que el simplex Δ_d es autopolar para cualquier $d \geq 1$.

27. Demostrar que una pirámide construida sobre un polígono es autopolar. ¿Ocurre lo mismo con pirámides de dimensiones mayores?

28. Demostrar el Teorema 3.13 (Caracterización de polítopos simples) a partir del Teorema 3.12 (Caracterización de polítopos simpliciales), empleando criterios de polaridad.