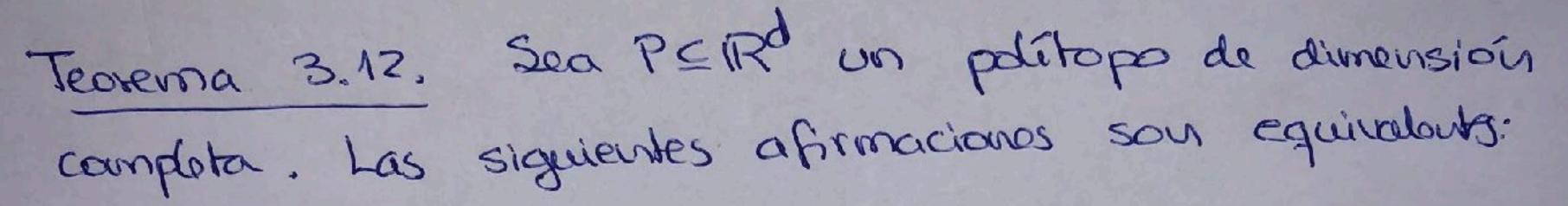
3.5. Polítopos simples y simpliciales



- (i) cada faceta de Pes on simplex (es decir, Pes simplicial)
- (11) cada cara propia de P es ou simplex.
- (iii) cada faceta tiene d vértices
- (iv) cada cara de dimensión k, con $k \le d-1$ tiene k+1 vérticos
- (v) cada intervalo [\$; F] en la réticola de caras L(P), con F ≠ P, es un poset booleano.





Teorema 3.13. : Sea PERª un polítopo de dimensión completa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) cada figura de vértice de P es our simplex (es decir, P es simple)
- (ii) cada figura de vértice iterada de P es our simplex
- (iii) cada vértice está contenido en d facetes
- (iv) cada cara de dimensión le, con le >0, está contenida en d-le facetas
- (v) coda intervalo [F; P] en la retícula de caras L(P), con $F \neq \phi$, es un poset booleano.





Ejercicio: Usar polaridad para demostrar el Teorema 3.13 a partir del Teorema 3.12.

Mode Mat SM

Corolario 3.14.

- · Un polítopo es simple soi cualquier polítopo combinatoriamente polar es simplicial.
- · Un polítopo es simplicial si y sólo si cualquier polítopo combinatoriamente poter es simplo.

Corolario 3.15.

Un polítopo de dimensión d, can d > 3, es simple y simplicial si y sólo si es on simplex



Demostración

"=" : Trivical

"=>" Sea P on pdítopo, con $\dim(P) = d \ge 3$, tal que P es simple y simplicial.

Sea v un vértice de P. Notar que la figura de Vértice P/v es un simplex (P es simple) y tiene dimensión d-1. Es door, P/v tiene dimensión d-1. Es door, P/v tiene dimensión de los cuales corresponde a una axista cada una de los cuales corresponde a una axista de P que conocta a v con otro vértico vi, con vi vi.

Adomás, v esta contenido en d facetas v1, ..., v3 Notar que un conjunto cualquiera de d-1 vértices de $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_d\}$ forma una faceta de P/v, la cual está asociada a una faceta F_i de P que contiene a v.

$$\Rightarrow$$
 vert $(F_i) \supset \{v, v_1, \dots v_d\} \setminus \{v_i\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$







Por otra parte, como P es simplicial, todas sus facetas son símplices:

$$\Rightarrow F_i$$
 es un simplex, $\forall i \in \{1,...,d\}$

$$\Rightarrow \operatorname{vert}(F_i) = \{v, v_1, \dots v_d\} \setminus \{v_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

Considerando la figura de vértice P/v_i , para cualquier $i \in \{1, ..., d\}$ se sigue además que los vértices $\{v_1, ..., v_d\}$ inducen también una faceta de P que es un simplex:

 \Rightarrow vert $(P) = \{v, v_1, ..., v_d\}$ \land todo conjunto de d vértices induce una faceta

 $\Rightarrow P$ es un simplex





Ejercicios

1) Demostrar el Teorema 3.13 a partir del Teorema 3.12, usando argumentos de polaridad.

2) Un polítopo se llama *autopolar* si es combinatoriamente equivalente a todo polítopo con el que sea combinatoriamente polar. Demostrar que el simplex Δ_d es autopolar para cualquier $d \leq 1$.

3) Demostrar que una pirámide construida sobre un polígono es autopolar. ¿Ocurre lo mismo con pirámides de dimensiones mayores?

