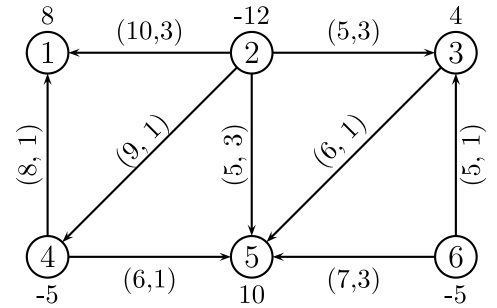
Ejercicios Tercer Capítulo

1. Considerar la instancia del problema de flujo de costo mínimo dada en la siguiente figura. Las etiquetas sobre los nodos indican demandas, las etiquetas sobre los arcos indican los valores de (u_{ij}, c_{ij}).

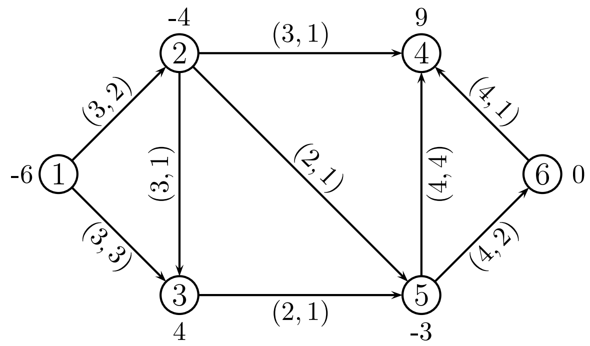


   (a) Usar el algoritmo de la cadena aumentante de Ford-Fulkerson para construir un flujo factible inicial. Indicar la red utilizada para el problema de flujo máximo correspondiente, así como todas las cadenas aumentantes empleadas y sus capacidades.

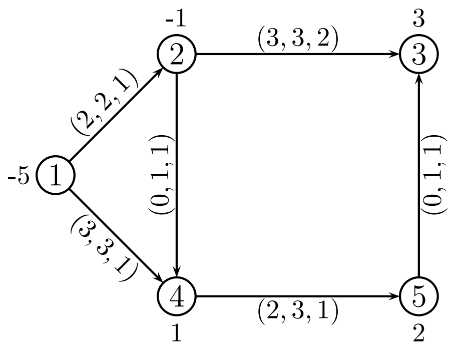
   (b) Emplear el algoritmo de ciclos x-aumentantes de costo negativo para minimizar el costo del flujo. Indicar en cada caso la red auxiliar $G(x)$, el ciclo empleado, su costo y su capacidad. (Los ciclos pueden encontrarse por inspección en $G(x)$).

   (c) Cuando ya no existan ciclos x-aumentantes de costo negativo, utilizar el algoritmo de Ford-Bellmann para encontrar un potencial $y \in \mathbb{R}^V$ que permita verificar la condición de optimalidad del flujo. Verificar esta condición sobre cada arco de la red.

2. Emplear el algoritmo del simplex en redes para encontrar un flujo factible de costo mínimo en la siguiente red. La etiqueta sobre cada arco $(i, j) \in A$ indica los valores de (u_{ij}, c_{ij}).



3. Demostrar que el flujo factible en la siguiente red es de costo mínimo. Encontrar para ello un vector $y \in \mathbb{R}^V$ que satisfaga las condiciones de optimalidad. Las etiquetas sobre los arcos indican los valores de (x_a, u_a, c_a).



4. Sean (L, U, T) una partición asociada a una solución factible de árbol, $r \in V$ un nodo arbitrario y fijo, $y \in \mathbb{R}^V$ un vector de distancias asociadas a (T, r) y $(i, j) \in U$. Demostrar que para el costo del ciclo $C(i, j)$ asociado a (i, j) se cumple que:
$$c(C(i,j)) = -\bar{c}_{ij},$$
donde $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + y_i - y_j$.

5. Suponer que al pasar de la iteración k a la iteración $k+1$, el algoritmo del simplex en redes cambia del árbol $H^k := (V, T)$ al árbol $H^{k+1} := (V, T \cup \{e\} \setminus \{h\})$, con $e = (i, j)$. Sean y^k y y^{k+1} los vectores de distancias correspondientes a estos dos árboles, para algún nodo $r \in V$ fijo y previamente determinado. Demostrar que:
$$y_\ell^{k+1} = y_\ell^k, \quad \forall \ell \in R,$$
$$y_\ell^{k+1} = y_\ell^k + s\bar{c}_{ij}, \quad \forall \ell \notin R,$$

donde R es la componente conexa de $(V, T \setminus \{h\})$ que contiene a r y

$$s = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in R, \\ -1, & \text{si } i \notin R. \end{cases}$$

6. Construir un ejemplo de una iteración del algoritmo del simplex en redes, en la que una solución factible de árbol sea sustituida por otra solución factible de árbol de igual costo.

7. Dados un conjunto de n procesadores $p_1, \ldots, p_n$ y un conjunto de n tareas $t_1, \ldots, t_n$, se busca asignar cada tarea a uno de los procesadores, sin asignar a ningún procesador más de una tarea. Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, el tiempo de procesamiento de la tarea t_i en el procesador p_j es igual a c_{ij}. Formular el problema de encontrar una asignación donde la suma de los tiempos de procesamiento sea la menor posible como un problema de flujo de costo mínimo.

8. Dado un grafo dirigido $D = (V, A)$, un *circuito euleriano* es un camino (dirigido) cerrado que pasa exactamente una vez por cada arco de A. Se conoce que D contiene un circuito euleriano si y sólo si para cada nodo $v \in V$ se cumple que el número de arcos salientes de v es igual al número de arcos entrantes a v, es decir, $|\delta^-(v)| = |\delta^+(v)|$.

   Supongamos ahora que el grafo D no satisface la condición anterior, pero satisface la condición más débil: para cada $v \in V$, la cantidad $|\delta^-(v)|+|\delta^+(v)|$ es un número par. En este caso, es posible invertir el sentido de algunos arcos para obtener un nuevo digrafo D' que admita un circuito euleriano.

   Considerar el problema de invertir la menor cantidad de arcos posible hasta que el digrafo contenga un cirucuito euleriano. Demostrar que este problema puede reducirse a un problema de flujo de costo mínimo.
   (**Sugerencia:** Intentar resolver el problema primero sobre digrafos pequeños y generalizar luego la construcción obtenida.)

9. Un grafo dirigido se llama *acíclico*, si no contiene ningún circuito dirigido como subgrafo. Un camino que visita cada vértice de un grafo exactamente una vez se llama *camino hamiltoniano* (el camino debe ser abierto, es decir, no debe retornar al vértice inicial). Dados un grafo dirigido acíclico $D = (V, A)$ y un vector de costos $c \in \mathbb{R}^A$ asociados a los arcos del grafo, se pide encontrar un camino hamiltoniano con el menor costo posible, donde el costo de un camino es la suma de los costos de sus arcos. Formular este problema como un problema de flujo de costo mínimo.

Observación. Para este ejercicio se deben definir una red capacitada $(\hat{V}, \hat{A}, \hat{u})$, y vectores de costos $\hat{c} \in \mathbb{R}^{\hat{A}}$ y de demandas $\hat{b} \in \mathbb{R}^{\hat{V}}$ tal que al resolver la instancia correspondiente del problema de flujo de costo mínimo se pueda obtener la solución del problema original. Justificar la respuesta.

10. Dados un grafo no dirigido bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, donde toda arista de E tiene un extremo en V_1 y otro en V_2, y un vector $c \in \mathbb{R}^E$ de costos asociados a las aristas, se pide encontrar un *emparejamiento perfecto de costo mínimo.* Un emparejamiento perfecto es un conjunto de aristas $M \subseteq E$ tal que cada nodo de $V_1 \cup V_2$ es incidente *exactamente* con una arista de M. El costo de un emparejamiento es la suma de los costos de las aristas que lo conforman, es decir, $c(M) := \sum_{e \in M} c_e$.

    Transformar este problema en un problema de flujo de costo mínimo.