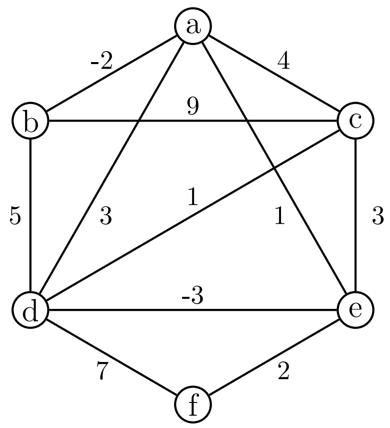
Redes de Transporte y Logística

Luis M. Torres *Diciembre, 2022*

Ejercicios Primer Capítulo

1. Encontrar un árbol generador de peso mínimo para el grafo mostrado en la siguiente figura:



   (a) Empleando el algoritmo de Prim.

   (b) Empleando el algoritmo de Kruskal.

   Explicar paso a paso las operaciones realizadas por ambos algoritmos.

2. Sea G un grafo con n nodos y m aristas. Demostrar que si $m \geq n$ entonces G contiene al menos un ciclo.

3. Sea G un grafo con n nodos y m aristas. Demostrar que si $m \leq n-1$ entonces G contiene al menos un nodo con grado menor o igual a 1.

4. Sea G un grafo sin ciclos, con n nodos, m aristas y c componentes conexas. Demostrar que:
$$m + c = n.$$

5. Sea $H = (V, T)$ un árbol que no contiene nodos de grado 2. Sean $V_1 \subset V$ el conjunto de nodos con grado 1 de H, y $V_2 := V \setminus V_1$. Demostrar que $|V_1| > |V_2|$.

6. Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo y $H_1 = (V, T_1)$, $H_2 = (V, T_2)$ dos árboles generadores de G. Demostrar que para cada arista $e \in T_1$ existe una arista $f \in T_2$ con la propiedad de que tanto $(V, T_1 \setminus \{e\} \cup \{f\})$ como $(V, T_2 \setminus \{f\} \cup \{e\})$ son árboles generadores de G.

7. Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo con pesos sobre las aristas y $H = (V, T)$ un árbol generador de peso mínimo para G. Sea además e una arista cualquiera de H. Demostrar que existe un conjunto de nodos W con la propiedad de que e es la arista de peso mínimo del corte $\delta(W)$.

8. Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo y $H = (V, T)$ un árbol generador de G. Demostrar que H es un MST (árbol generador de peso mínimo) si y sólo si para toda arista $e = ij \in E \setminus T$ se cumple que su costo c_e es mayor igual al costo c_f de cada arista f del sendero que conecta los nodos i y j en H.

9. Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo, $c \in \mathbb{R}^E$ un vector de costos sobre sus aristas y $H = (V, T)$ un árbol generador de G. El *costo minmax* de H se define como $\hat{c}(H) := \max\{c_e : e \in T\}$ (es decir, es el mayor costo de una arista del árbol). Decimos que H es un árbol generador minmax si $\hat{c}(H)$ es mínimo entre todos los árboles generadores de G.

   Demostrar que todo árbol generador de costo mínimo es un árbol generador minmax.

10. Sean X un conjunto finito y $k \in \mathbb{N}$ un número natural tal que $k < |X|$. Definimos:
$$\mathcal{I} := \{A \subset X \, : \, |A| \leq k\} .$$
    Demostrar que $(X, \mathcal{I})$ es un matroide.

11. Sean $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroide y A, B dos bases distintas de $\mathcal{M}$. Demostrar que para todo $a \in A \setminus B$ existe un $b \in B \setminus A$ tal que $B \cup \{a\} \setminus \{b\}$ es una base de $\mathcal{M}$.

12. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $Q \subseteq V$ se llama una *clique* en G si se satisface la condición:
$$\forall i, j \in Q : ij \in E.$$
    Es decir, Q es una clique si todo par de nodos que pertenecen a Q están conectados por una arista. Definimos:
$$\mathcal{I} := \{Q \subseteq V \, : \, Q \text{ es clique en } G\} .$$
    Demostrar que $(V, \mathcal{I})$ es un sistema de independencia, pero no un matroide.

13. Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un conjunto de aristas $F \subseteq E$ *está contenido en un corte de* G, si existe un conjunto de nodos $W \subseteq V$ tal que:

$$F \subseteq \delta(W).$$

Definimos:

$$\mathcal{I} := \{F \subseteq E \,:\, F \text{ está contenido en un corte de } G\}\,.$$

Demostrar que $(E, \mathcal{I})$ es un sistema de independencia, pero no un matroide.