CAP. III FLUJOS DE COSTO MÍNIMO

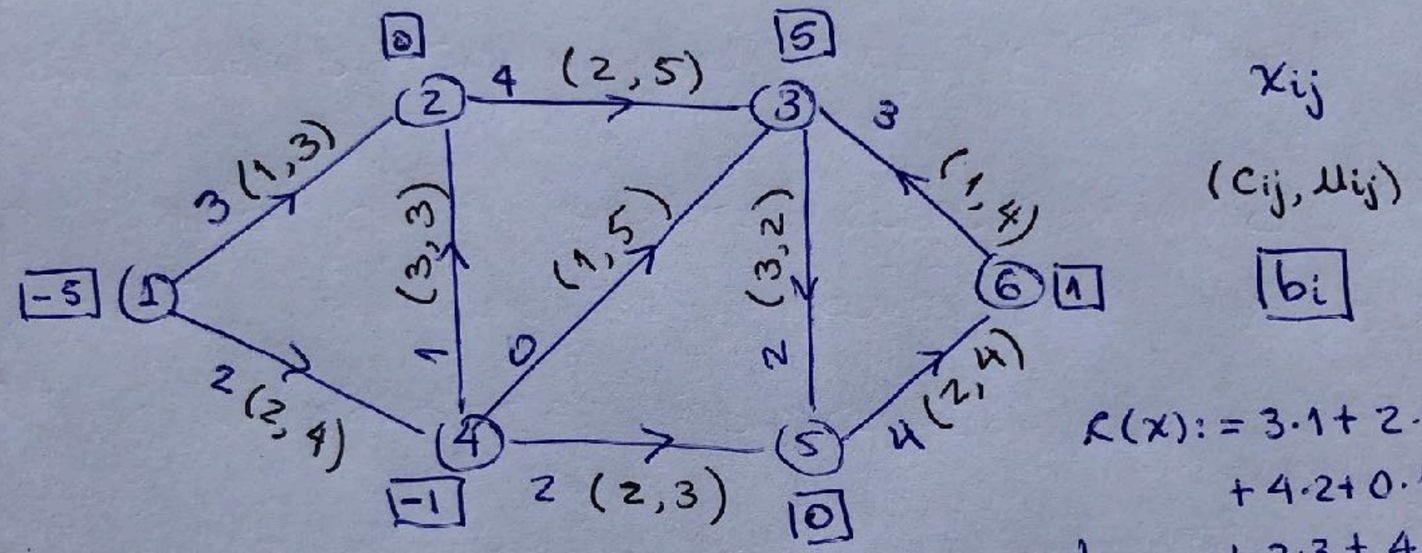
Considerar una red capacitada $R = (V, A, u)$, un vector de demandas sobre los nodos $b \in \mathbb{R}^V$ y un vector de costos sobre los arcos $c \in \mathbb{R}^A$.

El problema de flujo de costo mínimo [mincost flow, MCF] consiste en encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^A$ que satisfaga las condiciones:

- $f_x(i) = b_i$, (demanda) $\forall i \in V$ $\iff \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = b_i$
- $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, $\forall (i,j) \in A$ (capacidad)

y que además minimice el costo $c(x) := \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$.

Es decir, se pide encontrar un flujo factible respecto a las demandas de los nodos que minimice el costo (de transportación) sobre los arcos.



x_{ij}

(c_{ij}, u_{ij})

$\boxed{b_i}$

$$f(x) := 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 2 + 3\cdot 1$$
$$= 3+4+3+8+4+6+8+3$$
$$= 39$$

Este problema puede formularse como un programa lineal:

$$(MCF) \quad \begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.r.} \\ f_x(i) = b_i, \quad \forall i \in V \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

3.1. CONCEPTOS PRELIMINARES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Un programa lineal es el problema de optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal sobre una región factible definida mediante desigualdades lineales (= un poliedro).

Todo programa lineal puede formularse en cualquiera de las dos formas siguientes:

$$(PL)\begin{cases} \text{mín } c^t x \\ \text{s.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PC)\begin{cases} \text{máx } c^t x \\ \text{s.r.} \\ Ax \leq b \end{cases}$$

(forma estándar) (forma canónica)

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Consideraremos en adelante el programa lineal PL formulado en la forma estándar.

Decimos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es solución factible de PL si $A\bar{x} = b$ y $\bar{x} \geq 0$.

Decimos que PL es factible, si tiene al menos una solución factible, es decir, si el poliedro

$$P := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

es no vacío.

Decimos que PL es acotado, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $c^T x \geq \alpha$ se cumple para todo $x \in P$.

Lema 3.1.

Si PL es factible y acotado, entonces tiene al menos una solución óptima.

Dem: Ejercicio [Usar Teorema de Minkowski-Weyl]

Sea x^* una solución óptima de PL y sea $\alpha^* := c^T x^*$ su valor. Entonces, la desigualdad $c^T x \geq \alpha^*$ es válida para P, y la cara de P inducida por esta desigualdad es el conjunto de todas las soluciones óptimas de PL.

Recordar que el espacio lineal de P está definido por

$$\mathrm{lin}(P) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid x + ty \in P, \ \forall x \in P, \ t \in \mathbb{R} \}$$

Como $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, se tiene que $\text{lin}(P) = \{0\}$. En este caso, conocemos que P tiene al menos un vértice. Esto implica que cada cara de P tiene un vértice (Por qué?). En particular, al menos una solución óptima de PL corresponde a un vértice de P.

Todo programa lineal tiene asociado un programa dual; para el caso de PL:

$$(PL) \begin{cases} \text{mín } c^T x \\ \text{s.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (DL) \begin{cases} \text{máx } y^T b \\ \text{s.r.} \\ y^T A \leq c^T \end{cases}$$

Lema 3.2. (Dualidad débil)

Toda solución factible de DL tiene como valor una cota inferior al valor del óptimo de PL. Toda solución factible de PL tiene como valor una cota superior al valor del óptimo de DL.

Demostración

Sean $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ soluciones factibles para PL y DL, respectivamente. Luego,

$$\bar{y}^T b \underset{A\bar{x}=b}{=} \bar{y}^T A \bar{x} \underset{\substack{\bar{y}^T A \leq c^T \\ \bar{x} \geq 0}}{\leq} c^T \bar{x}$$

Corolario 3.3.

(i) Si PL es factible $\Rightarrow$ DL es acotado o no factible

(ii) Si DL es factible $\Rightarrow$ PL es acotado o no factible

Lema 3.4. (Lema de Farkas II)

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, uno y solamente uno de los dos enunciados siguientes es verdadero:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b \; , \; x \geq 0$

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}^m : \; y^T A \geq 0^T \; , \; y^T b < 0$

Dem: [Curso Geometría Discreta]

Lema 3.5. (Lema de Farkas V)

Sea $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \; x \geq 0\}$ un poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Sean además $c \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. La desigualdad $c^T x \geq \alpha$ es válida para P si y sólo si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

(i) $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}^m : \; \bar{y}^T A \leq c^T \; \wedge \; \bar{y}^T b \geq \alpha$

(ii) $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}^m : \; \bar{y}^T A \geq 0^T \; \wedge \; \bar{y}^T b < 0$.

Dem: Ejercicio [Revisar Lema Farkas III, curso Geometría Discreta].

<u>Teorema 3.6.</u> (Dualidad Fuerte)

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Considerar el programa lineal en forma estándar PL, y su programa dual DL. Se cumple que:

(i) PL tiene al menos una solución óptima $\Leftrightarrow$ DL tiene al menos una solución óptima.

(ii) Si $\bar{x}$ es solución óptima de PL y $\bar{y}$ es solución óptima de DL, entonces

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Demostración:

(i) "$\Rightarrow$":

Suponer que PL tiene al menos una solución óptima $\bar{x}$. Sea $\bar{\alpha} := c^T\bar{x}$. Como $\bar{x}$ es óptimo, se sigue que la desigualdad $c^Tx \geq \bar{\alpha}$ es válida para $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Por el Lema 3.5., se cumple entonces al menos una de las siguientes condiciones:

(i) $\exists\, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$: $\bar{y}^T A \leq c^T \wedge \bar{y}^T b \geq \bar{\alpha}$

(ii) $\exists\, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$: $\bar{y}^T A \geq 0^T \wedge \bar{y}^T b < 0$.

Notar que del Lema 3.4 se sigue que si (ii) es verdadera, entonces $P = \emptyset$. Como $\bar{x} \in P$, esto implica que (ii) debe ser falsa y por tanto (i) debe ser verdadera.

Es decir, existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\bar{y}^T A \leq c^T$. Por lo tanto, DL es factible.

Por otra parte, como PL es factible, se tiene del Corolario 3.3 que DL es acotado.

Finalmente, empleando un argumento similar al Lema 3.1., puede concluirse que si DL es factible y acotado, entonces DL admite una solución óptima. [Ejercicio]

<u>"$\Leftarrow$"</u> : Ejercicio : Emplear un argumento similar.
Considerar el poliedro $Q := \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y^T A \leq c^T \}$
y establecer resultados similares a los Lemas 3.4, 3.5.

<u>(ii)</u> : Sean $\bar{x}$ una solución óptima de PL y $\bar{\alpha} := c^T \bar{x}$.
En la parte anterior, hemos demostrado que existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\bar{y}^T A \leq c^T$ y $\bar{y}^T b \geq \bar{\alpha}$.
Pero entonces $\bar{y}$ es solución factible de DL y del

Lema 3.2. se sigue que $\bar{y}^T b \leq c^T \bar{x} = \bar{\alpha}$.

Es decir, $\bar{y}^T b = \bar{\alpha} = c^T \bar{x}$ y del Lema 3.2. se sigue que $\bar{y}$ es óptima para DL.

<u>Lema 3.7. (Condiciones de holgura complementaria)</u>

[Complementary slackness conditions]

Sean $\bar{x}, \bar{y}$ soluciones factibles para PL y DL, respectivamente. Entonces,

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ son óptimas} \iff (c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$$

Demostración: Observar que

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ son óptimas} \underset{\substack{\text{Teorema 3.6,} \\ \text{Lema 3.2.}}}{\iff} c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \underset{A\bar{x}=b}{\iff} (c^T - y^T A)\bar{x} = 0$$

Observación:

$$\underbrace{(c^T - \bar{y}^T A)}_{\geq 0} \underbrace{\bar{x}}_{\geq 0} = 0 \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad c_j - \bar{y}^T A_{\cdot j} = 0 \quad \vee \quad \bar{x}_j = 0$$

Algoritmo del simplex

Trabajaremos sobre el programa lineal en la forma estándar

$$(PL) \begin{cases} \text{mín } c^T x \\ \text{s.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Notar que $m < n$.

Definición (Base)

Una submatriz por columnas $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de A es una base si es cuadrada e invertible.

Notación

- Dada una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de A, denotaremos por $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ a la matriz formada por las columnas de A que no están en B.
- Llamaremos $[A] := \{1, .., n\}$ al conjunto de índices de las columnas de A y $[B], [N] \subseteq [A]$ a los conjuntos de índices de las columnas de B y de N, respectivamente.

Asumiremos en adelante (intercambiando el orden de las columnas de A) que $A = (B \; N)$, $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$.

Notar que, para $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple

$$
\begin{aligned}
Ax = b \iff & (B \;\; N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \\
\iff & B x_B + N x_N = b \\
\iff & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\
\iff & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N
\end{aligned}
$$

Definición (Solución básica)

Dada una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la solución $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ definida por $\bar{x}_B = B^{-1} b$, $\bar{x}_N = 0$ se llama solución básica de PL asociada a B. Notar que $A\bar{x} = b$.

Si además se cumple $\bar{x}_B \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es una

solución básica factible. (Notar que en este caso $\bar{x}$ es factible para PL).

Notar que el valor (costo) de la solución básica factible asociada a B está dado por:

$$c^T\bar{x} = c_B^T\bar{x}_B + c_N^T\bar{x}_N \underset{\bar{x}_N=0}{=} c_B^T\bar{x}_B \underset{\bar{x}_B=B^{-1}b}{=} c_B^T B^{-1} b.$$

Por otra parte, para cualquier solución factible $x \in \mathbb{R}^n$ de PL, se tiene que

$$Ax = b \iff x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

y por tanto

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\Leftrightarrow \qquad c^T x = c^T \bar{x} + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)\, x_N$$

Como $x_N \geq 0$, obtenemos el siguiente resultado:

<u>Proposición 3.8.</u>

Dada una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, si la solución básica $\bar{x}$ asociada a B es factible, y si se satisface la condición $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es solución óptima de PL.

<u>Dem:</u>

Basta ver que $\bar{x}$ es una solución factible para PL que satisface

$$c^T x = c^T \bar{x} + \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{\geq 0} \underbrace{x_N}_{\geq 0} \geq c^T \bar{x}$$

para cualquier otra solución factible $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición (Costos reducidos)

El vector $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{n-m}$ de costos reducidos asociados a una base B está dado por:

$$\tilde{c} := c_N - N^T (B^{-1})^T c_B$$

Notar que las componentes de $\tilde{c}$ están indexadas por el conjunto $[N]$.

Para $j \in [N]$, el valor

$$\tilde{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} \underbrace{N_{\bullet j}}_{\text{columna } j \text{ de } N}$$

es el costo reducido asociado a la variable x_j.

La Proposición 3.8. puede expresarse en la forma equivalente:

Corolario 3.9.

Dada una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la solución básica $\bar{x}$ asociada a B es una solución óptima para PL ssi $\bar{x}$ es factible para PL y además, para todo $j \in [N]$, se cumple que el costo reducido de la variable (no básica) x_j es no negativo.

Es decir:

$$\bar{x} \text{ es óptima} \iff \begin{cases} \bar{x} \text{ es factible} \\ \forall\, j \in [N],\ \tilde{c}_j \geq 0 \end{cases}$$

Algoritmo del simplex (Idea general)

- Construir una base inicial B, asociada a una solución básica factible $(\bar{x}_B \ \bar{x}_N)$

- Mientras exista $j \in [N]$ con $\tilde{c}_j < 0$, hacer:

  + Determinar $i \in [B]$ t.q. $[B] \setminus \{i\} \cup \{j\}$ sea el conjunto de índices de una base asociada a una solución básica factible

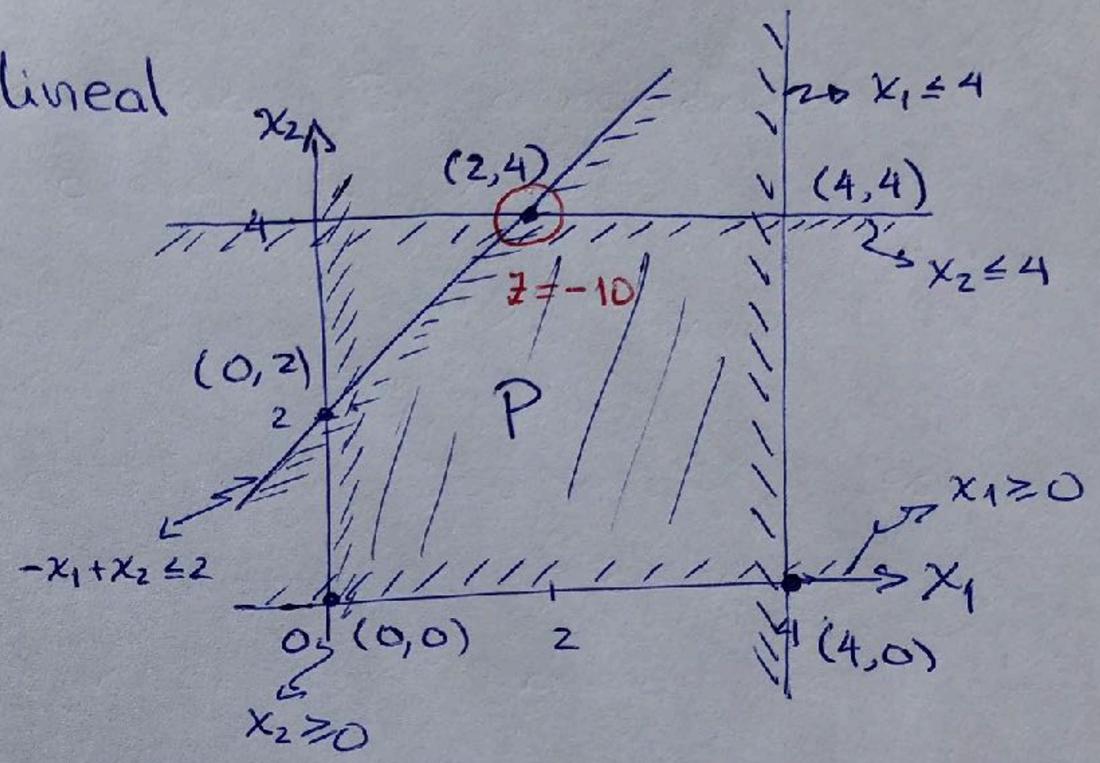
  + $[B] := [B] \setminus \{i\} \cup \{j\}$
    $[N] := [N] \setminus \{j\} \cup \{i\}$
    Recalcular $\bar{x}_B$, $\tilde{c}$

- Salida: $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$

Ejemplo:

Resolver el programa lineal

$$\begin{cases} \min\ x_1 - 3x_2 \\ \text{s.r.} \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Reformulamos primero el problema en la forma estándar:

$$\begin{cases} \min\ x_1 - 3x_2 \\ \text{s.r.} \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

① Seleccionamos como base inicial

$$[B] = \{3, 4, 5\} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[N] = \{1, 2\}$$

Asociada a esta base escribiremos un diccionario con la siguiente información:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$z = c^T x = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= c_B^T B^{-1} b + \tilde{c}^T x_N$$

$$\begin{array}{lcl} & & B^{-1}b \\ x_B & & \downarrow \\ x_3 & = & 2 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 4 - x_1 \\ x_5 & = & 4 - x_2 \\ \hline z & = & \boxed{0} + \boxed{x_1 - 3x_2} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -B^{-1}N x_N \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \tilde{c}^T x_N \end{array}$$

x_B

$c_B^T B^{-1} b$

Notar que $\tilde{c}_j < 0$ cuando $j = 2$.

② Elegimos $j=2$ $(\tilde{c}_2<0)$

Tenemos que determinar $i \in [B]$ t.q.

$[B] \setminus \{i\} \cup \{2\}$ sea conjunto de índices de una base asociada a una solución factible.

Las tres primeras ecuaciones del diccionario deben mantenerse, pues son equivalentes al sistema $Ax=b$.

Tenemos que "despejar" x_2 al lado izquierdo en una de estas ecuaciones. Esto solamente puede hacerse en la primera o en la tercera.

1ra ec: $x_2 = 2 + x_1 - x_3$, en la próxima solución básica: $x_2=2$, $x_1=x_3=0$

3ra ec: $x_2 = 4 - x_5$, en la próxima solución básica: $x_2=4$, $x_1=x_5=0$

Notar que si elegimos la 3ra ecuación, la primera ecuación del diccionario implica que en la próxima solución tendremos $x_3 = 2 + x_1 - x_2 = 2 - 4 = -2$

Es decir, $x_3 < 0$ y la solución básica no será factible.

Por lo tanto, debemos elegir la primera ecuación:

$$x_2 = 2 + x_1 - x_3, \quad (1)$$

lo que equivale a escoger $i = 3$.

En general, podemos ver que la ecuación 1ra limita $x_2 \leq 2$, mientras que la 3ra ecuación limita $x_2 \leq 4$. Debe elegirse siempre la ecuación más limitante.

3 Sustituyendo (1) en las otras ecuaciones del diccionario obtenemos el diccionario correspondiente a la nueva base:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2 + x_1 - x_3 \\
x_4 &= 4 - x_1 \\
x_5 &= 2 - x_1 + x_3 \\
\hline
z &= -6 - 2x_1 + 3x_3
\end{aligned}
$$

$[B] = \{2, 4, 5\}$

$[N] = \{1, 3\}$

$\bar{x} = (0, 2, 0, 4, 2)$

$c^T\bar{x} = -6$

La operación de construir una nueva base junto con su diccionario se conoce como pivotaje (puede realizarse matricialmente de una manera más eficiente)

Notar que en esta nueva solución se tiene $\tilde{c}_1 < 0$. Luego, elegimos $j = 1$ (es decir, la variable x_1 "entrará" a la base)

Para determinar i, revisamos las tres ecuaciones superiores del diccionario.

Si empleamos la primera ecuación, obtenemos un valor negativo para x_1 en la próxima solución básica, que no es factible.

La segunda ecuación limita $x_1 \leq 4$.

La tercera ecuación limita $x_1 \leq 2$.

La ecuación más limitante es la tercera, por lo que elegimos $i = 5$. como variable que "sale" de la base.

$$[B] := [B] \setminus \{5\} \cup \{1\} \qquad [N] := [N] \setminus \{1\} \cup \{5\}$$

4 Empleando la tercera ecuación del último diccionario, sustituimos la expresión

$$x_1 = 2 - x_5 + x_3$$

en las demás ecuaciones, para expresar x_2, x_4 y z en función de x_3 y x_5:

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 - x_5 \\ x_4 &= 2 + x_5 - x_3 \\ x_1 &= 2 - x_5 + x_3 \\ \hline z &= -10 + 2x_5 + x_3 \end{aligned}$$

$[B] = \{1, 2, 4\}$

$[N] = \{3, 5\}$

$\bar{x} = (2, 4, 0, 2, 0)$

$c^T\bar{x} = -10$

Notar que en este nuevo diccionario se tiene

$$\tilde{c}_j \geq 0 \ , \ \forall j \in [N]$$

Luego, $\bar{x}$ es solución óptima.

Relación con el Teorema de Dualidad

Dadas una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y una solución básica factible asociada a esta $\bar{x} = (\bar{x}_B \ \bar{x}_N)$, con $\bar{x}_B = B^{-1} b$ y $\bar{x}_N = 0$, definimos $\bar{y}^T := c_B^T B^{-1} \in \mathbb{R}^m$.

Notar que:

$$
\begin{aligned}
(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} &= (c^T - c_B^T B^{-1} A)\bar{x} \\
&= \left[(c_B^T \ \ c_N^T) - c_B^T B^{-1} (B \ \ N) \right] \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} \\
&= \left[(c_B^T \ \ c_N^T) - (c_B^T \ \ c_B^T B^{-1} N) \right] \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (0 \ \ c_N^T - c_B^T B^{-1} N) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ satisfacen las condiciones de holgura complementarias. Luego,

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ son óptimas} \iff \bar{y} \text{ es factible para (DL)} \iff \bar{y}^T A \leq c^T$$

$$\iff c_B^T B^{-1} (B \;\; N) \leq (c_B^T \;\; c_N^T)$$

$$\iff (c_B^T \;\; c_B^T B^{-1} N) \leq (c_B^T \;\; c_N^T)$$

$$\iff c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$$

$$\iff \tilde{c}^T \geq 0.$$

Validez y eficiencia

- Si el algoritmo del simplex termina, encuentra una solución óptima, o prueba que el problema es no acotado (si en alguna iteración hay candidatos para entrar a la base, pero no para salir)

- Pueden ocurrir iteraciones degeneradas, en las que una variable ingresa a la base con valor de cero y la función objetiva no mejora.

- Es posible que se formen ciclos de iteraciones degeneradas y que el algoritmo no termine.

- Los ciclos pueden evitarse, utilizando reglas de pivotaje adecuadas (ej: regla de Bland)

- Con reglas adecuadas de pivotaje, se garantiza que el algoritmo del simplex termine en un número finito de iteraciones.

- El número de iteraciones requerido puede ser exponencial (Ver: cubos de Minty) en n.

- La existencia de una regla de pivotaje que garantice que el simplex termine en un número de iteraciones polinomial en m y n es un problema abierto.

- El simplex se comporta bien en la práctica y es (con modificaciones) uno de los algoritmos más usados en la actualidad para resolver problemas lineales.

3.2. EL PROBLEMA DE FLUJO DE COSTO MÍNIMO

Dados una red capacitada $R=(V,A,u)$, un vector $b\in\mathbb{R}^V$ de demandas sobre los nodos, con $\sum_{i\in V} b_i = 0$, y un vector $c\in\mathbb{R}^A$ de costos sobre los arcos, encontrar un flujo factible $x\in\mathbb{R}^A$ que satisfaga las demandas de todos los nodos, respete las capacidades de los arcos y minimize la función de costo: $c(x) = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$.

Puede formularse como un PL:

$$
(MCF)\quad \begin{cases} \text{mín } c^T x \\ \text{s.r.} \\ f_x(i) = b_i, \ \forall i\in V, \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j)\in A. \end{cases}
$$

Sea $H \in \{0, \pm 1\}^{V \times A}$ la <u>matriz de incidencia</u> de la red R, es decir, la matriz que tiene por entradas

$$h_{ia} = \begin{cases} -1, & \text{si } i \text{ es nodo inicial de } a, \\ 1, & \text{si } i \text{ es nodo final de } a, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Notar que el programa MCF puede ponerse en la forma:

$$(MCF) \begin{cases} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.r.} \\ \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = b_i, \ \forall i \in V, \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A \end{cases} \iff \begin{cases} \min c^T x \\ \text{s.r.} \\ Hx = b \\ -x \geq -u \\ x \geq 0 \end{cases}$$

De esta manera, el programa lineal dual de MCF es:

$$(DMCF)\quad \begin{cases} \text{máx } y^T b - z^T u \\ y^T H - z^T I \leq c^T \\ z \geq 0 \\ y \in \mathbb{R}^V,\ z \in \mathbb{R}^A \end{cases} \iff \begin{cases} \text{máx } \sum_{i \in V} b_i y_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} z_{ij} \\ \text{s.r.} \\ y_j - y_i - z_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \\ z_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

Observación:

Dado $\bar{y} \in \mathbb{R}^V$ arbitrario, es posible extender $\bar{y}$ a una solución factible $(\bar{y}, z) \in \mathbb{R}^{V+A}$ para DMCF eligiendo:

$$\bar{z}_{ij} := \text{máx}\left\{ \bar{y}_j - \bar{y}_i - c_{ij}, 0 \right\}$$

Además, esta extensión es óptima: alcanza el mejor valor en la función objetivo entre todas las soluciones con $y = \bar{y}$.

Notación:

En adelante llamaremos costo reducido del arco $(i,j) \in A$ respecto al vector $y \in \mathbb{R}^V$ a la expresión:

$$\bar{c}_{ij} := c_{ij} + y_i - y_j$$

Teorema 3.10. (Condiciones de holgura complementaria)

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^A$ una solución factible para MCF. Entonces, $\bar{x}$ es óptima si y sólo si existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^V$ tal que, para todo arco $(i,j) \in A$:

$$\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = u_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = 0$$

donde $\bar{c}_{ij}$ es el costo reducido de (i,j) respecto a $\bar{y}$.

Además, en este caso, se cumple que $(\bar{y}, \bar{z})$, con $\bar{z}$ extendida como se indicó antes, es solución óptima de DMCF.

Demostración:

"$\Rightarrow$": Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^A$ una solución óptima de MCF.

Por el Teorema 3.6. (Dualidad Fuerte PL), existe una solución óptima $(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{V+A}$ para DMCF t.q.:

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T b - \bar{z}^T u \underset{Hx=b}{\Leftrightarrow} c^T\bar{x} - \bar{y}^T H\bar{x} + \bar{z}^T u = 0$$

$$\Leftrightarrow (c^T - \bar{y}^T H)\bar{x} + \bar{z}^T u = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} - \bar{y}_j + \bar{y}_i)\, x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} \bar{z}_{ij} u_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{(i,j)\in A} \bar{c}_{ij}\, \bar{x}_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\, \bar{z}_{ij} = 0 \qquad (*)$$

Particionemos a $A := A^+ \uplus A^- \uplus A^0$ en tres conjuntos definidos por:

$$A^+ := \{(i,j) \in A \mid \bar{c}_{ij} > 0\}$$

$$A^- := \{(i,j) \in A \mid \bar{c}_{ij} < 0\}$$

$$A^0 := \{(i,j) \in A \mid \bar{c}_{ij} = 0\}$$

Luego, (*) puede ponerse en la forma

$$\sum_{(i,j) \in A^+ \uplus A^- \uplus A^0} \left[\bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij} + u_{ij} \bar{z}_{ij} \right] = 0. \quad (**)$$

Además, notar que $\bar{z}_{ij} = \text{máx}\{0, -\bar{c}_{ij}\}$. (Por qué?)

Luego, si $(i,j) \in A^+$:

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{ij} = 0 \Rightarrow \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij} + u_{ij}\bar{z}_{ij} = \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij}.$$

Si $(i,j) \in A^0$:

$$\bar{c}_{ij} = 0 \Rightarrow \bar{z}_{ij} = 0 \Rightarrow \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij} + u_{ij}\bar{z}_{ij} = 0$$

Si $(i,j) \in A^-$:

$$\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{z}_{ij} = -\bar{c}_{ij} \Rightarrow \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij} + u_{ij}\bar{z}_{ij} = \bar{c}_{ij}(\bar{x}_{ij} - u_{ij})$$

Sustituyendo estas expresiones en $(**)$, se sigue que:

$$\underbrace{\sum_{(i,j)\in A^+} \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij}}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{(i,j)\in A^-} \bar{c}_{ij}(\bar{x}_{ij} - u_{ij})}_{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{c}_{ij}\bar{x}_{ij} = 0, \ \forall (i,j) \in A^+ & \Leftrightarrow \ \bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = 0 \\ \bar{c}_{ij}(\bar{x}_{ij} - u_{ij}) = 0, \ \forall (i,j) \in A^- & \Leftrightarrow \ \bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = u_{ij}. \end{cases}$$

"$\Leftarrow$": Suponer que existen $\bar{x} \in \mathbb{R}^A$ factible para MCF y $\bar{y} \in \mathbb{R}^V$ t.q.

$$\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = u_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{x}_{ij} = 0$$

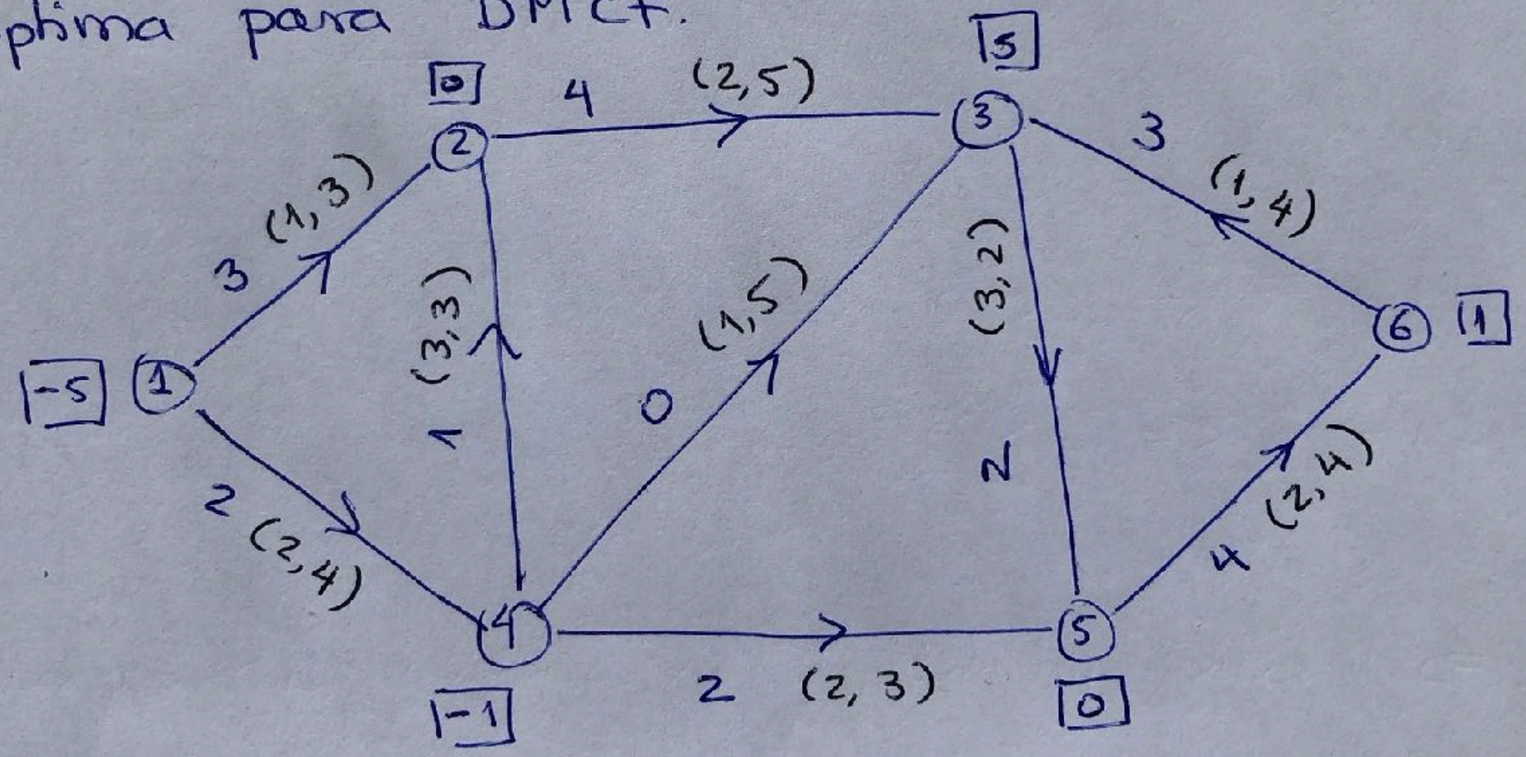
Definir $\bar{z}_{ij} := \text{máx}\{0, -\bar{c}_{ij}\}$, $\forall (i,j) \in A$.

Puede demostrarse que

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T b - \bar{z}^T u \quad \text{(Ejercicio)}$$

y por lo tanto, $\bar{x}$ es óptima para MCF y $(\bar{y}, \bar{z})$ es óptima para DMCF.

Ejemplo:



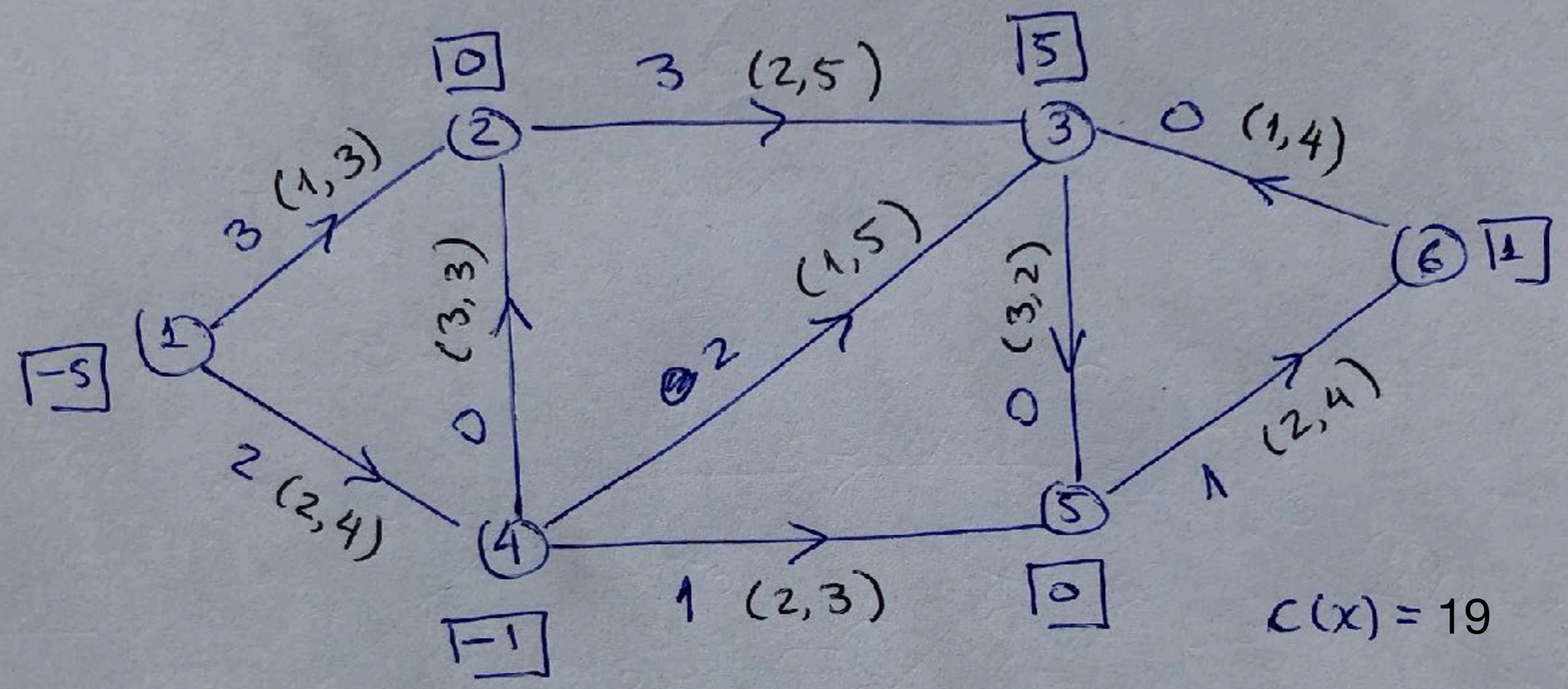
x_{ij}

(c_{ij}, u_{ij})

$\boxed{b_i}$

$c(x) = 39$

Notar que existe un flujo factible de menor costo:



$c(x) = 19$

Es óptimo?

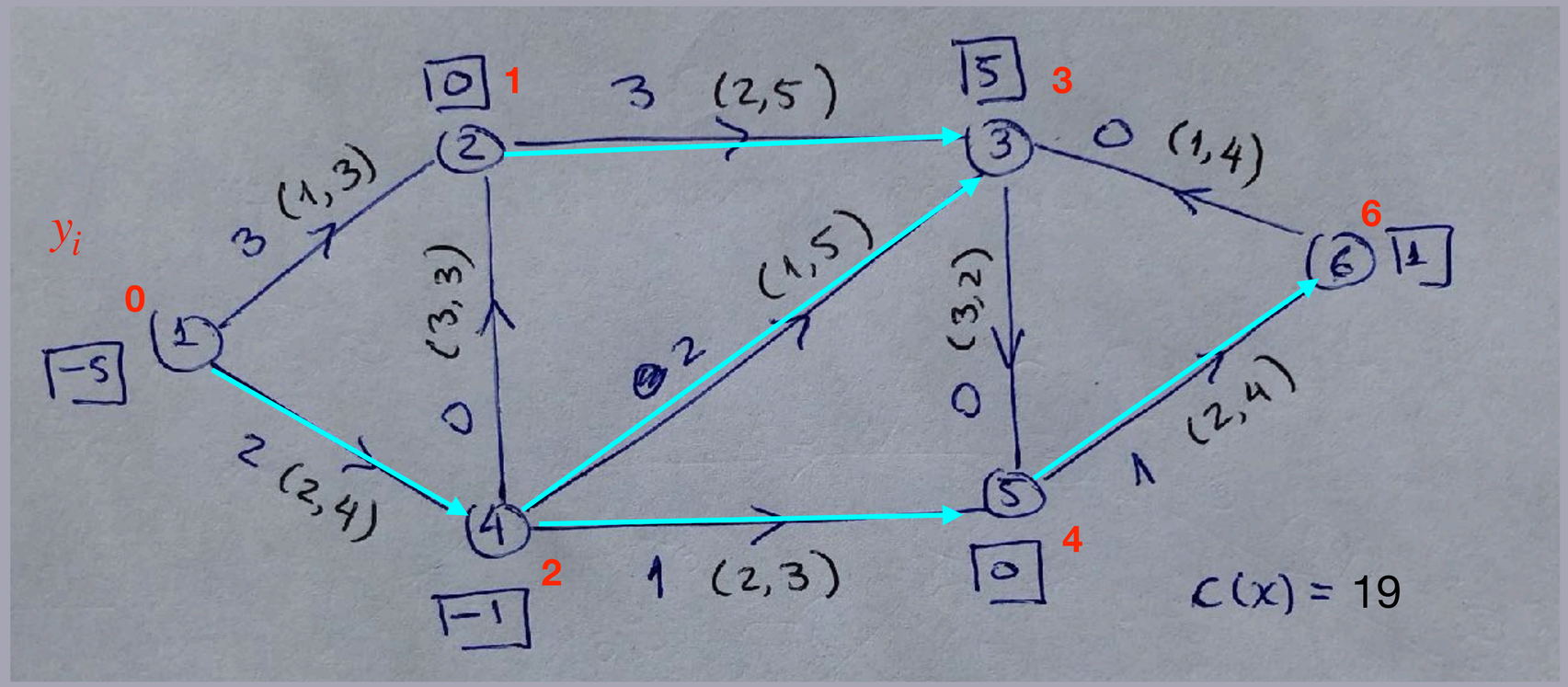
Buscar $\bar{y} \in \mathbb{R}^V$ que satisfaga condiciones del Teorema 3.10

Notar que las condiciones de holgura complementaria:

$$\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$$
$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

implican $\quad 0 < x_{ij} < u_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} = 0 \Leftrightarrow y_j = y_i + c_{ij}$

Resaltamos los arcos con $0 < x_{ij} < u_{ij}$, fijamos $y_1 = 0$ y empleamos la condición anterior para determinar y_i sobre los demás nodos:



El vector y obtenido verifica las condiciones de holgura complementaria en todos los arcos de la red.

Luego, x es un flujo de costo mínimo.

3.3. CICLOS x-AUMENTANTES

Definición:

Sea $C: i_0, a_1, i_1, a_2, i_2, \ldots, a_k, i_k = i_0$ un ciclo en R.

Definimos los conjuntos:

$$C^+ := \{a_\ell \mid a_\ell = (i_{\ell-1}, i_\ell)\} \qquad C^- := \{a_\ell \mid a_\ell = (i_\ell, i_{\ell-1})\}$$

(arcos "hacia adelante") (arcos "en reversa")

La capacidad $\varepsilon(C)$ del ciclo está dada por:

$$\varepsilon(C) := \min\left\{ \min_{(i,j)\in C^+} \{u_{ij} - x_{ij}\}, \min_{(i,j)\in C^-} \{x_{ij}\} \right\}.$$

Si $\varepsilon > 0$, decimos que C es un ciclo x-aumentante.

El costo del ciclo C es:

$$c(C) := \sum_{(i,j)\in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} c_{ij}$$

Lema 3.11

Sean $\bar{x} \in \mathbb{R}^A$ una solución factible para MCF y C un ciclo $\bar{x}$-aumentante. Entonces el vector $\tilde{x} \in \mathbb{R}^A$ definido por

$$\tilde{x}_{ij} := \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \varepsilon(C), & \text{si } (i,j) \in C^+, \\ \bar{x}_{ij} - \varepsilon(C), & \text{si } (i,j) \in C^-, \\ \bar{x}_{ij}, & \text{en los demás casos,} \end{cases}$$

es un flujo factible para MCF. El costo de $\tilde{x}$ está dado por:

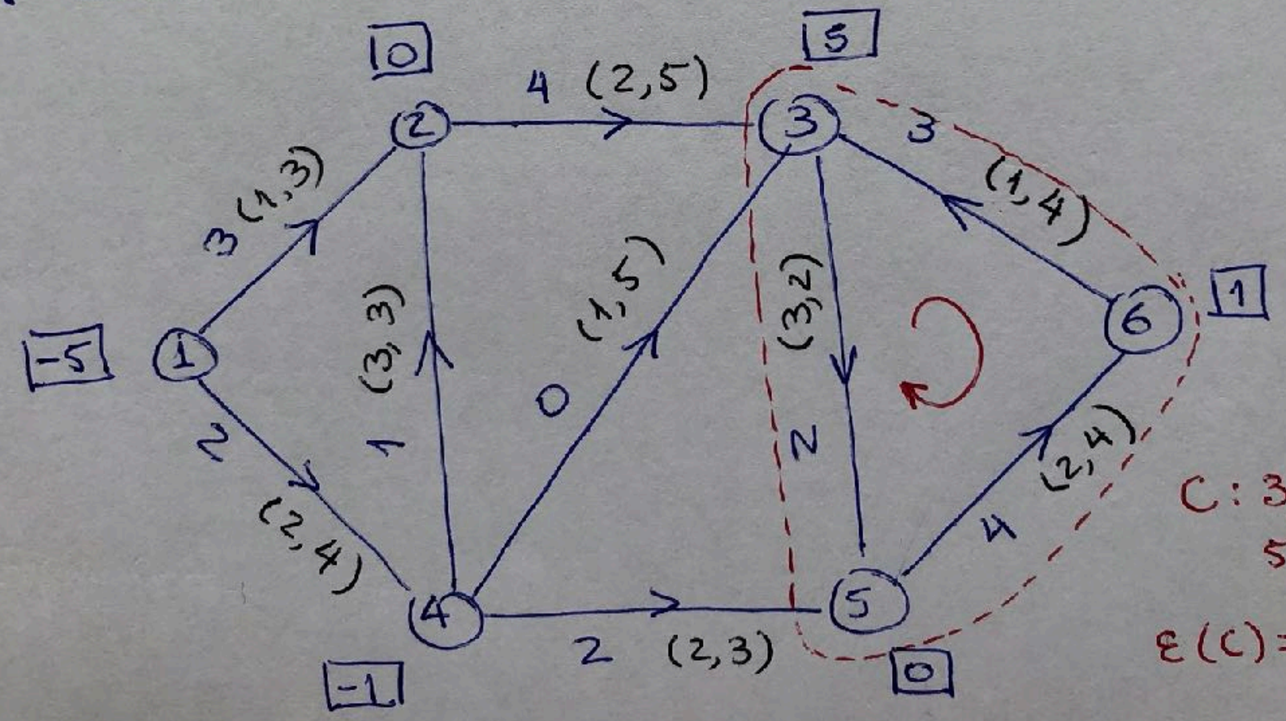
$$c(\tilde{x}) = c(\bar{x}) + c(C) \cdot \varepsilon(C).$$

Dem: Ejercicio

Corolario 3.12:

- Si $\bar{x}$ es solución óptima para MCF, entonces no existen ciclos $\bar{x}$-aumentantes de costo negativo.
- Todo ciclo $\bar{x}$-aumentante de costo negativo, permite obtener a partir de $\bar{x}$ un nuevo flujo $\tilde{x}$ de menor costo.

Ejemplo:



$x_{ij}\ (c_{ij}, u_{ij})$

$\boxed{b_i}$

C: 3, (6,3), 6, (5,6), 5, (3,5), 3

$\varepsilon(C) = 2 \quad c(C) = -6$

Definición (Red residual $G(x)$)

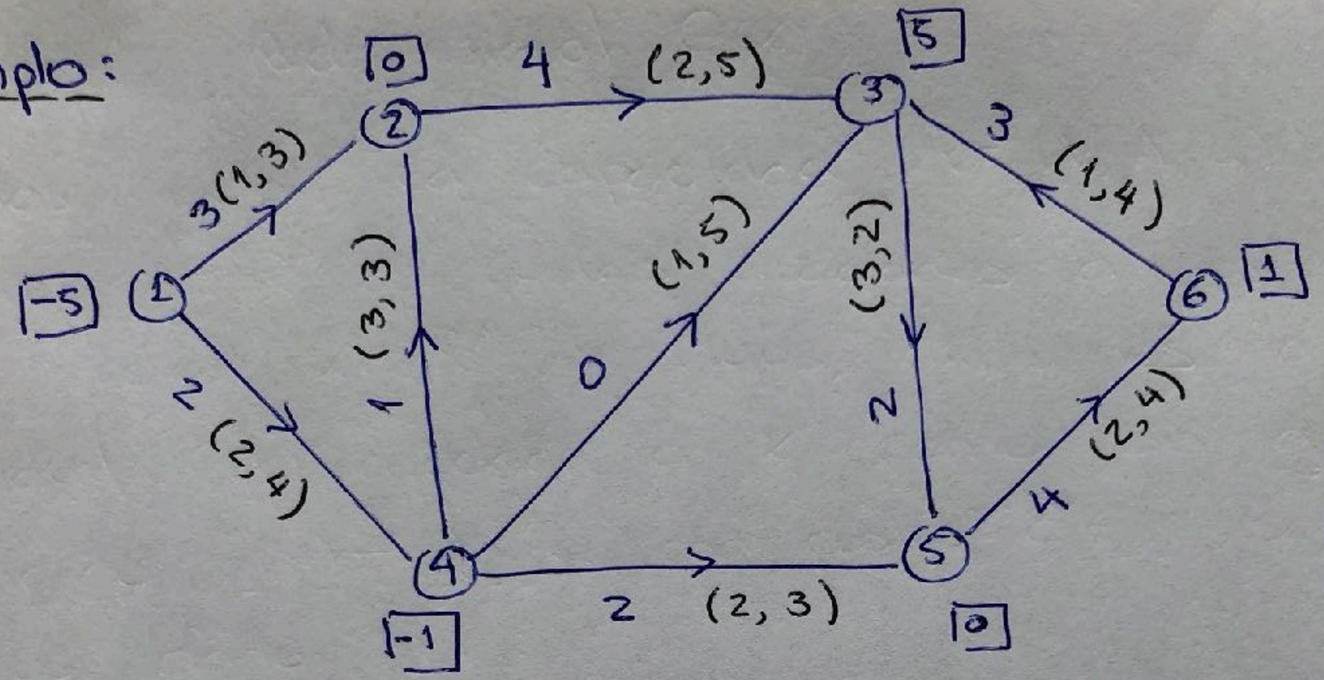
Dados una red capacitada $R = (V, A, u)$, un vector $c \in \mathbb{R}^A$ de costos asociados a los arcos y un vector $x \in \mathbb{R}^A$ de flujos, definimos la red residual $G(x)$ asociada a x como un grafo dirigido $G(x) := (V, \hat{A})$ con costos $\hat{c} \in \mathbb{R}^{\hat{A}}$ sobre sus arcos, dado por:

$$\hat{A} := \hat{A}_1 \uplus \hat{A}_2, \qquad \hat{A}_1 := \{(i,j) \mid (i,j) \in A \wedge x_{ij} < u_{ij}\}$$

$$\hat{A}_2 := \{(j,i) \mid (i,j) \in A \wedge x_{ij} > 0\}$$

$$\hat{c}_{ij} := \begin{cases} c_{ij}, & \text{si } (i,j) \in \hat{A}_1 \\ -c_{ji}, & \text{si } (i,j) \in \hat{A}_2 \end{cases}$$

Ejemplo:

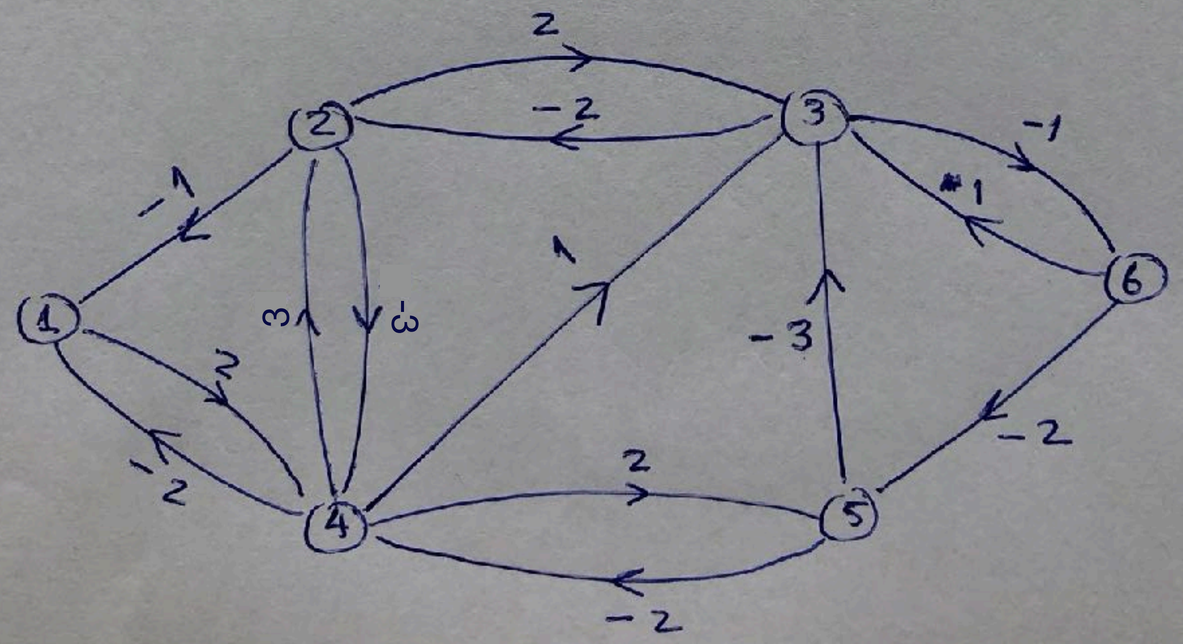


$R = (V, A, u)$

c, b

$x_{ij}\ (c_{ij}, u_{ij})$

$\boxed{b_i}$



$G(x)$, $\hat{c}$

$\hat{c}_{ij}$

Observación:

Cada ciclo x-aumentante en R está asociado a un circuito (dirigido) en $G(x)$, y viceversa. Los costos de los ciclos x-aumentantes corresponden a los costos de los circuitos en $G(x)$ (= la suma de los costos de sus arcos).

En particular, cada ciclo x-aumentante de costo negativo en R corresponde a un circuito de costo negativo en $G(x)$, y viceversa.

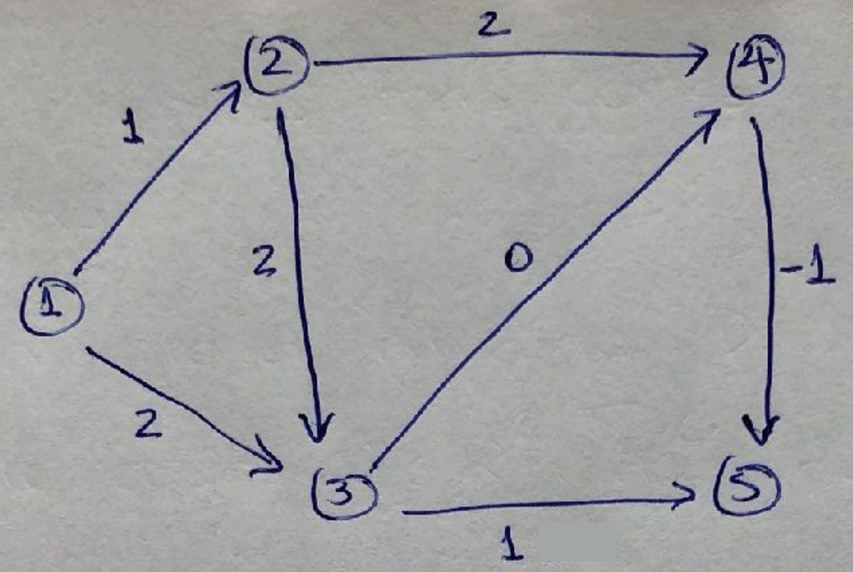
Problema: Cómo encontrar circuitos de costo negativo en $G(x)$, o probar que estos no existen?

Potenciales, caminos más cortos y circuitos de costo negativo

Dados un grafo dirigido $D=(V,\hat{A})$, un vector de costos $\hat{c} \in \mathbb{R}^{\hat{A}}$ asociado a los arcos de D y un nodo de salida $s \in V$, se pide encontrar los caminos de menor costo (longitud) desde s hacia los demás nodos de V, donde el costo (o longitud) de un camino se define como la suma de los costos de los arcos que lo forman.

$$P: i_0, a_1, i_1, a_2, i_2, \dots, a_k, i_k \implies \hat{c}(P) = \sum_{l=1}^{k} \hat{c}_{a_l} = \sum_{l=1}^{k} \hat{c}_{i_{l-1}, i_l}$$

Ejemplo:



Caminos de 1 a 5:

P_1: 1, (1,2), 2, (2,4), 4, (4,5), 5 $\quad \hat{c}(P_1) = 2$

P_2: 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,4), 4, (4,5), 5 $\quad \hat{c}(P_2) = 2$

P_3: 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,5), 5 $\quad \hat{c}(P_3) = 4$

P_4: 1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,5), 5 $\quad \hat{c}(P_4) = 1 \leftarrow$ camino "más corto" (=de menor costo)

P_5: 1, (1,3), 3, (3,5), 5 $\quad \hat{c}(P_5) = 3$

Definición (Potencial)

Un vector $y \in \mathbb{R}^V$ es un potencial, si satisface la condición:

$$\hat{c}_{ij} \geq y_j - y_i \ , \quad \forall (i,j) \in \hat{A}.$$

Lema 3.13.:

Si $y \in \mathbb{R}^V$ es un potencial y $y_s = 0$, entonces y_i es una cota inferior al costo de cualquier camino de s hasta i, para todo $i \in V$.

Demostración:

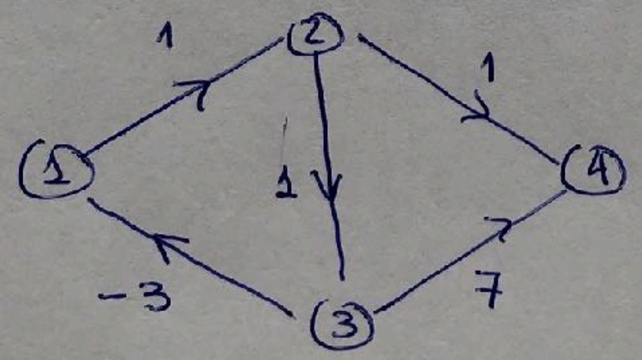
Sea $P: i_0 = s, a_1, i_1, a_2, i_2, \ldots, a_k, i_k = i$ un camino desde s hasta i. Luego,

$$\hat{c}(P) = \sum_{\ell=1}^{k} \hat{c}_{i_{\ell-1}, i_\ell} \geq \sum_{\ell=1}^{k} (y_{i_\ell} - y_{i_{\ell-1}}) = y_{i_k} - y_{i_0} = y_i - y_s = y_i.$$

Corolario 3.14.:

Si $y \in \mathbb{R}^V$ es un potencial con $y_s = 0$, y P es un camino desde s hasta $i \in V$, tal que $\hat{c}(P) = y_i$, entonces P es un camino de costo mínimo.

Si D contiene (al menos) un circuito de costo negativo, es posible construir caminos de costo arbitrariamente bajo al repetir los arcos del circuito:



Caminos de 1 a 4:

P_1 : 1, (1,2), 2, (2,4), 4
$\hat{c}(P_1) = 2$

P_2 : 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,1), 1, (1,2), 2, (2,4), 4
$\hat{c}(P_2) = 1$

P_3 : 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,1), 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,1), 1, (1,2), 2, (2,4), 4 $\hat{c} = 0$..

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado:

<u>Lema 3.15.</u>

Un digrafo admite un potencial si y solamente si no contiene circuitos de costo negativo.

<u>Demostración</u>

"$\Rightarrow$": Sean $D=(V,\hat{A})$ un digrafo y $\hat{c}\in\mathbb{R}^{\hat{A}}$ un vector de costos asociado a sus arcos.

Supongamos que D admite un potencial $y\in\mathbb{R}^{V}$ y sea $C: i_0, a_1, i_1, \dots, a_k, i_k = i_0$ un circuito en D.

Tenemos que:

$$c(C) = \sum_{l=1}^{k} c_{i_{l-1},i_l} \underset{c_{ij}\geq y_j - y_i}{\geq} \sum_{l=1}^{k} \left(y_{i_l} - y_{i_{l-1}} \right) = y_{i_k} - y_{i_0} \underset{i_k = i_0}{=} 0$$

"$\Leftarrow$": (Ver Cap. 2 de "Combinatorial Optimization", Cook, Cunningham, Pulleyblank, Schrijver)

Algoritmo (Ford-Bellman)

Entrada: $D=(V,\hat{A})$, $\hat{c}\in\mathbb{R}^{\hat{A}}$, $s\in V$

Salida: $y\in\mathbb{R}^{V}$, $p\in V^{V}$

Inicializar:

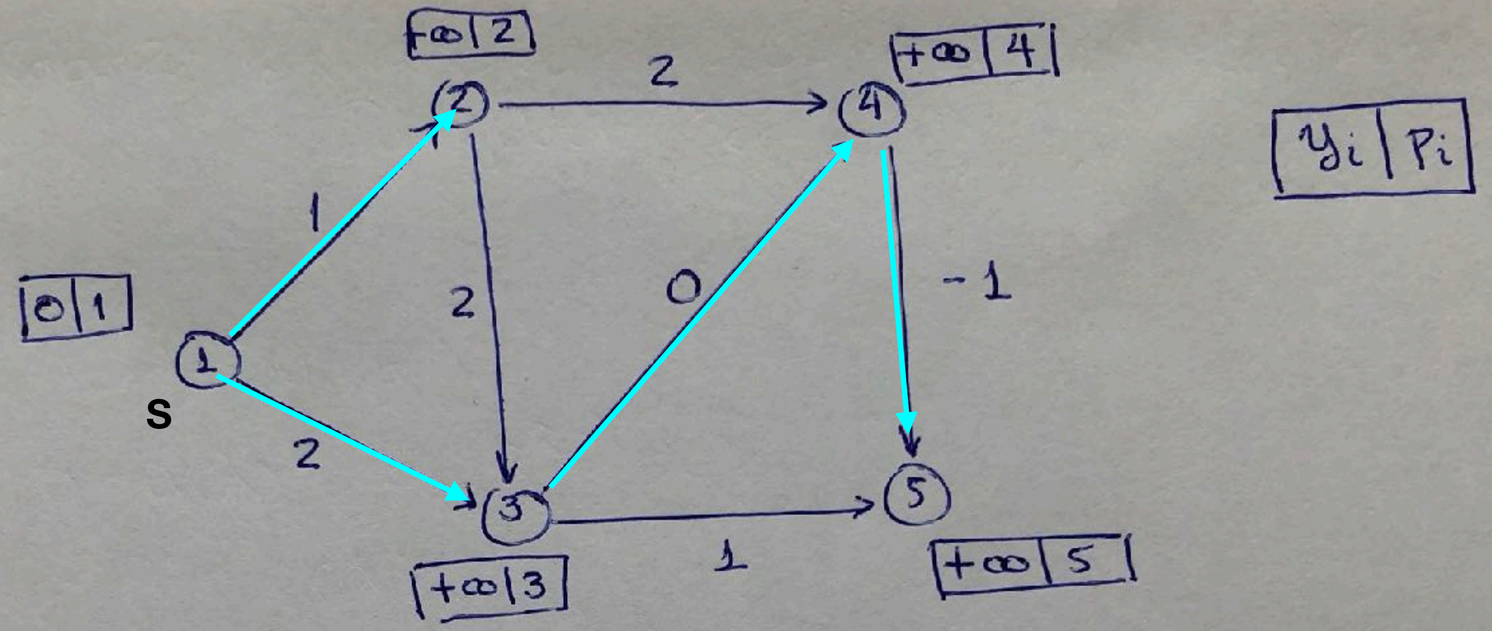
$y_s := 0$, $y_i := +\infty$, $\forall i\in V\setminus\{s\}$

$p_i := i$, $\forall i\in V$

Para $k=1,\dots,n$ hacer:

- Para $(i,j)\in\hat{A}$ hacer
  - Si $y_j > \hat{c}_{ij} + y_i$ hacer:
    - $y_j := \hat{c}_{ij} + y_i$
    - $p_j := i$

Ejemplo :



$y_i \mid p_i$

$$A = [(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,5)]$$

	0		1		2	
	y_i	p_i	y_i	p_i	y_i	p_i
1	0	1	0	1	0	1
2	inf	2	1	1	1	1
3	inf	3	2	1	2	1
4	inf	4	2	3	2	3
5	inf	5	1	4	1	4

Lema 3.16.

Si D no contiene circuitos de costo negativo, entonces el algoritmo de Ford-Bellman retorna un potencial $y \in \mathbb{R}^V$ y un vector $p \in V^V$ que codifica un conjunto de caminos de costo mínimo desde s hacia los demás nodos del grafo.

Demostración:

(Ver, p.ej., Cap 2 de "Combinatorial Optimization" por Cook, Cunningham, Pulleyblank & Schrijver)

Teorema 3.17.

Dados una red capacitada $R=(V,A,u)$, con un vector de demandas $b \in \mathbb{R}^V$ y un vector de costos $c \in \mathbb{R}^A$, y un flujo $x \in \mathbb{R}^A$,

R no contiene ciclos x-aumentantes de costo negativo $\iff$ x es un flujo de costo mínimo

Demostración:

"$\Leftarrow$": Corolario 3.12

"$\Rightarrow$":

Si R no contiene ciclos x-aumentantes de costo negativo, entonces la red residual $G(x)$ no contiene circuitos (dirigidos) de costo negativo.

Del Lema 3.15, se sigue que $G(x)$ admite un potencial, es decir, existe $y \in \mathbb{R}^V$ t.q.

$$\forall (i,j) \in \hat{A} : \quad \hat{c}_{ij} \geq y_j - y_i . \quad (*)$$

Vamos a demostrar que x y y satisfacen las condiciones del Teorema 3.10.

(i) Sea $(i,j) \in A$ t.q. $\bar{c}_{ij} < 0 \Leftrightarrow c_{ij} + y_i - y_j < 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $x_{ij} < u_{ij}$. Entonces $G(x)$ contiene un arco $(i,j) \in \hat{A}_1$ con costo $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$. Para este arco se tiene

$$\hat{c}_{ij} + y_i - y_j < 0 \Leftrightarrow \hat{c}_{ij} < y_j - y_i,$$

lo que contradice $(*)$. Luego, $x_{ij} = u_{ij}$.

(ii) Sea $(i,j) \in A$ t.q. $\bar{c}_{ij} > 0 \Leftrightarrow c_{ij} + y_i - y_j > 0$.

Supongamos que $x_{ij} > 0$. Entonces $G(x)$ contiene el arco $(j,i) \in \hat{A}_2$ con $\hat{c}_{ji} = -c_{ij}$. Además, para este arco se cumple:

$$-\hat{c}_{ji} + y_i - y_j > 0 \Leftrightarrow \hat{c}_{ji} < y_i - y_j,$$

lo que contradice (*). Luego, $x_{ij} = 0$.

$\Rightarrow$ x es un flujo de costo mínimo.

Teorema 3.10

El Lema 3.16 y el Teorema 3.17 justifican la validez del siguiente algoritmo para encontrar un flujo de costo mínimo.

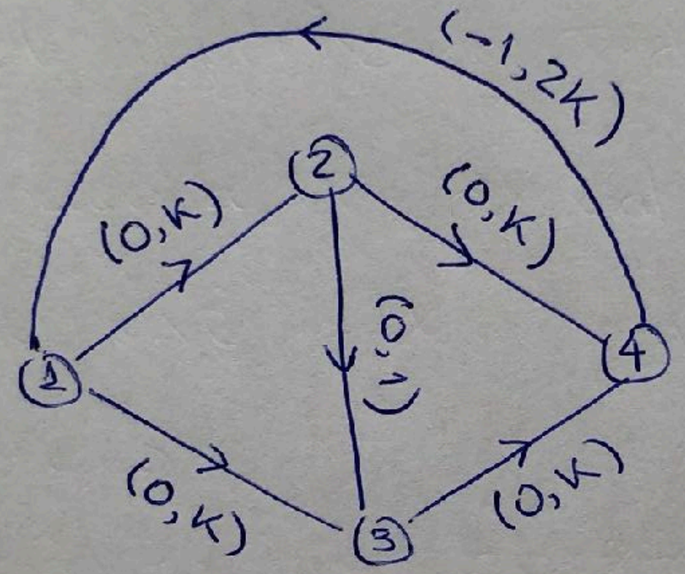
Algoritmo (Ciclos x-aumentantes de costo negativo)

1. Construir un flujo factible inicial (Ford-Fulkerson) $x \in \mathbb{R}^A$
2. Ejecutar el algoritmo de Ford-Bellman sobre $G(x)$.
3. Si se encuentra un potencial $y \in \mathbb{R}^A$:
   - TERMINAR $\rightarrow$ x es flujo de costo mínimo

   Caso contrario
   - Determinar un ciclo x-aumentante de costo negativo a partir de un circuito de costo negativo en $G(x)$
   - Modificar x como se indica en el Lema 3.11
   - Ir a 2.

Este algoritmo puede requerir de un número excesivo de iteraciones, si los ciclos no son elegidos adecuadamente.

Ejemplo:



$b = 0$

(c_{ij}, u_{ij})

Considerar los ciclos: C_1 : 1, (1,2), 2, (2,4), 4, (4,1), 1

C_2 : 1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,1), 1

C_3 : 1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,4), 4, (4,1), 1

C_4 : 1, (1,3), 3, (2,3), 2, (2,4), 4, (4,1), 1

Si empezamos con $x=0$ y utilizamos los ciclos C_1 y C_2, alcanzamos en dos iteraciones un flujo de costo $-2K$. Notar que $\varepsilon(C_1) = \varepsilon(C_2) = K$.

Por otra parte, si empleamos alternadamente los ciclos $C_3, C_4, C_3, C_4, C_3, C_4 \ldots$ tenemos en cada iteración $\varepsilon(C_3) = \varepsilon(C_4) = 1$, y requerimos de $2K$ iteraciones para llegar al mismo flujo.

3.4. ALGORITMO DEL SIMPLEX EN REDES [NETWORK SIMPLEX]

Definición (Solución de árbol)

Dadas una red capacitada $R=(V,A,u)$ y una partición

$$A = L \uplus U \uplus T$$

de los arcos de R, donde T son los arcos de un árbol generador de (V,A), una solución factible para MCF que satisface además

$$x_{ij}=0, \quad \forall\ (i,j)\in L$$
$$x_{ij}=u_{ij}, \quad \forall\ (i,j)\in U$$

se conoce como solución de árbol asociada a (L,U,T).

Observación:

Para esta definición se ha extendido la definición de árboles generadores de la manera natural a grafos dirigidos (ignoramos la dirección de los arcos).

Proposición 3.18.

Dada una partición (L, U, T) de los arcos de R, donde T son los arcos de un árbol generador, entonces existe máximo una solución de árbol asociada a (L, U, T).

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}^A$ una solución de árbol asociada a (L, U, T).

Conocemos que, por definición,

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i,j) \in L, \text{ y},$$

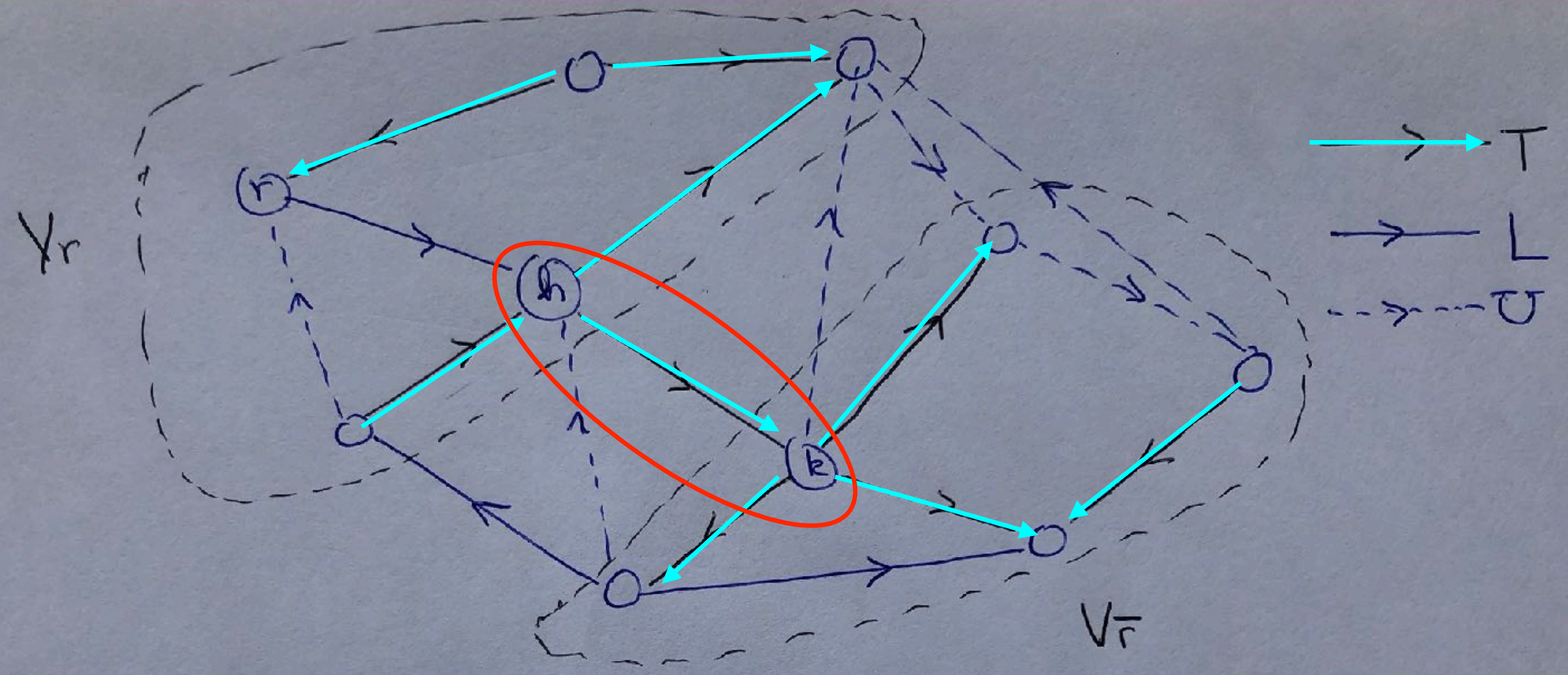
$$x_{ij} = u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in U.$$

Por lo tanto, basta con demostrar que los valores de x_{ij} están también determinados sobre los arcos de T de forma única.

Sean $(h,k) \in T$ y $r \in V$, arbitrario. Notar que (h,k) induce una partición de los nodos de la red en dos conjuntos, $V = V_r \oplus V_{\bar{r}}$, donde

$$V_r := \{ i \in V \mid \text{el sendero de } r \text{ a } i \text{ en } T \text{ no contiene } (h,k) \}$$

$$V_{\bar{r}} := \{ i \in V \mid \text{el sendero de } r \text{ a } i \text{ en } T \text{ contiene a } (h,k) \}$$



Como x es un flujo factible, debe satisfacer las demandas en todos los nodos, en particular

$$\sum_{i \in V_{\bar{r}}} b_i = \sum_{i \in V_{\bar{r}}} f_x(i) = \sum_{(i,j) \in \delta^-(V_{\bar{r}})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(V_{\bar{r}})} x_{ij} \qquad [*]$$

Dem. Prop. 2.3.

Notar que $\{(h,k)\} = [\delta^-(V_{\bar{r}}) \cup \delta^+(V_{\bar{r}})] \cap T$.

Adicionalmente, identificamos los siguientes conjuntos:

$$\delta_L^-(V_{\bar{r}}) := \delta^-(V_{\bar{r}}) \cap L \quad ; \quad \delta_U^-(V_{\bar{r}}) := \delta^-(V_{\bar{r}}) \cap U$$

$$\delta_L^+(V_{\bar{r}}) := \delta^+(V_{\bar{r}}) \cap L \quad ; \quad \delta_U^+(V_{\bar{r}}) := \delta^+(V_{\bar{r}}) \cap U.$$

Consideremos dos casos posibles:

<u>(i) $(h,k) \in \delta^+(V_{\bar{r}})$:</u>

En este caso, la ecuación [*] puede ponerse en la forma:

$$\sum_{i \in V_{\bar{r}}} b_i = \sum_{(i,j) \in \delta^-(V_{\bar{r}})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(V_{\bar{r}})} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in \delta_L^-(V_{\bar{r}})} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in \delta_U^-(V_{\bar{r}})} x_{ij}$$

$$- \sum_{(i,j) \in \delta_L^+(V_{\bar{r}})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta_U^+(V_{\bar{r}})} x_{ij} - x_{hk}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in V_{\bar{r}}} b_i = \sum_{(i,j) \in \delta^-_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta^+_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} - x_{erk}$$

$\uparrow$

$x_{ij} = 0, \ \forall (i,j) \in L$

$x_{ij} = u_{ij}, \ \forall (i,j) \in U$

$$\Leftrightarrow x_{erk} = \sum_{(i,j) \in \delta^-_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta^+_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} - \sum_{i \in V_{\bar{r}}} b_i$$

$$=: g(L, U, T, \bar{r})$$

Notar que si $g(L, U, T, \bar{r}) < 0$ o $g(L, U, T, \bar{r}) > u_{erk}$, entonces el único valor posible para x_{erk} debido a las restricciones de demanda no satisface la restricción de capacidad, es decir, en estos casos no hay un flujo factible asociado a (L, U, T).

(ii) $(l_n, k) \in \delta^-(V_{\bar{r}})$:

En este caso, es posible demostrar, a partir de [*], que:

$$x_{l_n k} = \sum_{i \in V_{\bar{r}}} b_i + \sum_{(i,j) \in \delta^+_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in \delta^-_U(V_{\bar{r}})} u_{ij} = -g(L, U, T, \bar{r}).$$

[Ejercicio].

Nuevamente, si $g(L, U, T, \bar{r}) > 0$ ó $g(L, U, T, \bar{r}) < -u_{ij}$, entonces no existe un flujo factible asociado a (L, T, U).

Finalmente, puede verificarse que el valor de $x_{l_n k}$ es independiente de la elección de r. Luego, existe máximo un flujo factible para MCF asociado a (L, U, T).

Proposición 3.19.

Si una instancia de MCF admite una solución factible, entonces admite una solución factible de árbol. Si admite una solución óptima, entonces admite una solución óptima de árbol.

Demostración:

Sea x una solución factible para una instancia de MCF. Vamos a demostrar que es posible construir una solución de árbol $\tilde{x}$ cuyo costo es menor o igual al costo de x. Definimos:

$$L(x) := \{(i,j) \in A \mid x_{ij} = 0\}$$
$$U(x) := \{(i,j) \in A \mid x_{ij} = u_{ij}\}$$
$$F(x) := \{(i,j) \in A \mid 0 < x_{ij} < u_{ij}\}.$$

Si $F(x)$ es el conjunto de arcos de un árbol generador de (V,A), entonces x es una solución de árbol asociada a $(L(x), U(x), F(x))$ y basta tomar $\tilde{x} := x$.

Caso contrario, si $(V, F(x))$ contiene ciclos, sea C un ciclo de este grafo. Observar que, como $0 < x_{ij} < u_{ij}$, se tiene $\varepsilon(C) > 0$ para los dos posibles sentidos para "recorrer" C. Elegimos el sentido para que el costo de C sea no positivo, y construimos un nuevo flujo factible x' a partir de x como se indica en el Lema 3.11. Notar que el costo de x' es menor o igual que el costo de x y que $(V, F(x'))$ tiene (al menos) un ciclo menos que $(V, F(x))$.

(Por qué?)

Repitiendo este procedimiento, construimos una sucesión de flujos $x^2, x^3, \dots, x^k$, donde x^k es un flujo factible, con costo menor o igual al costo de x y tal que $(V, F(x^k))$ no contiene ciclos. Elegimos $\tilde{x} := x^k$.

Si $(V, F(\tilde{x}))$ es conexo, entonces $\tilde{x}$ es una solución de árbol de costo menor o igual al costo de x, asociada a la partición $(L(\tilde{x}), U(\tilde{x}), F(\tilde{x}))$.

Caso contrario, es posible "transferir" arcos de $L(\tilde{x})$ o $U(\tilde{x})$ hacia $F(\tilde{x})$, sin modificar el valor del flujo, para obtener una nueva partición $(\hat{L}(\tilde{x}), \hat{U}(\tilde{x}), \hat{F}(\tilde{x}))$ donde $(V, \hat{F}(\tilde{x}))$ sea un árbol generador de (V, A). Esto prueba que $\tilde{x}$ es una solución de árbol.

Recordemos que en un árbol, cualquier par de nodos están conectados entre sí por un sendero único. Empleando esta propiedad, podemos asociar a cualquier partición (L,U,T) un vector de distancias

Definición (Vector de distancias asociado a (L,U,T))

Dados una instancia del MCF, una partición (L,U,T) de los arcos de R y un nodo $r \in V$, definimos el vector $y \in \mathbb{R}^V$ de distancias asociado a (L,U,T) respecto a r por medio de:

$$y_i := c(P_i), \ \forall i \in V,$$

donde P_i es el sendero único que va desde r hasta i en el árbol (V,T). El costo de P_i está dado

por:

$$c(P_i) := \sum_{(i,j)\in P_i^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in P_i^-} c_{ij}$$

donde P_i^+, P_i^+ son los conjuntos de arcos "hacia adelante" y "en reversa", respectivamente.

Notar que, en particular, $y_r = 0$.

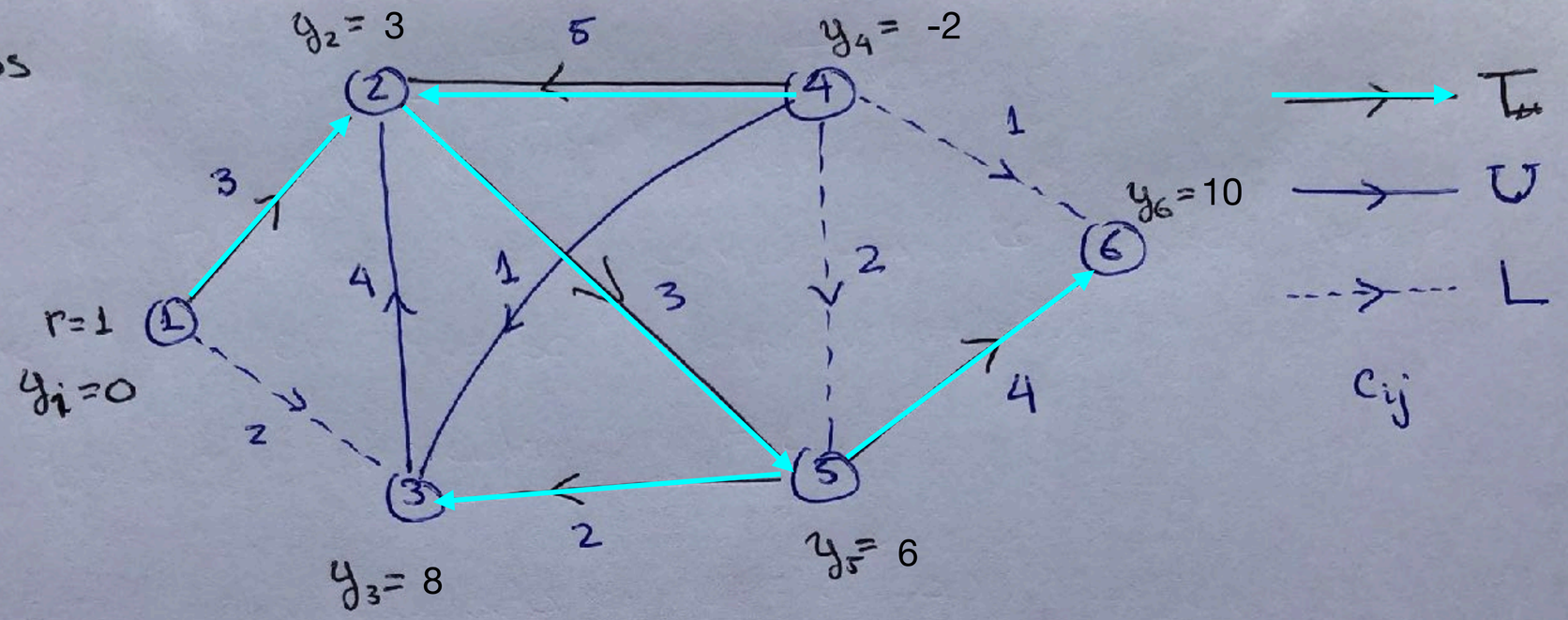
Definición (Ciclo asociado a un arco)

Dados una partición (L, U, T) y un arco $(i,j) \in L \cup U$, definimos el ciclo $C(i,j)$ asociado a (i,j) como el único ciclo del grafo $(V, T \cup \{(i,j)\})$, recorrido en el sentido tal que

(i) $(i,j) \in C^+$, si $(i,j) \in L$

(ii) $(i,j) \in C^-$, si $(i,j) \in U$.

Ejemplos



$C(1,3) =$ 1,(1,3),3,(5,3),5,(2,5),2,(1,2),1

$c(3,2) =$ 2,(3,2),3,(5,3),5,(2,5),2

$c(4,3) =$ 3,(4,3),4,(4,2),2,(2,5),5,(5,3),3

Proposición 3.20.

Sean (L,U,T) una partición asociada a una solución de árbol, $r \in V$, $y \in \mathbb{R}^V$ un vector de distancias asociado a (L,U,T) respecto a r, y $(i,j) \in L \cup U$.

Entonces, el costo del ciclo $C(i,j)$ asociado a (i,j) satisface la identidad:

(i) $\kappa(C(i,j)) = \bar{c}_{ij}$, si $(i,j) \in L$,

(ii) $\kappa(C(i,j)) = -\bar{c}_{ij}$, si $(i,j) \in U$,

donde $\bar{c}_{ij} := c_{ij} + y_i - y_j$ es el costo reducido de (i,j) respecto a y.

Demostración

(i): Sea $(i,j) \in L$.

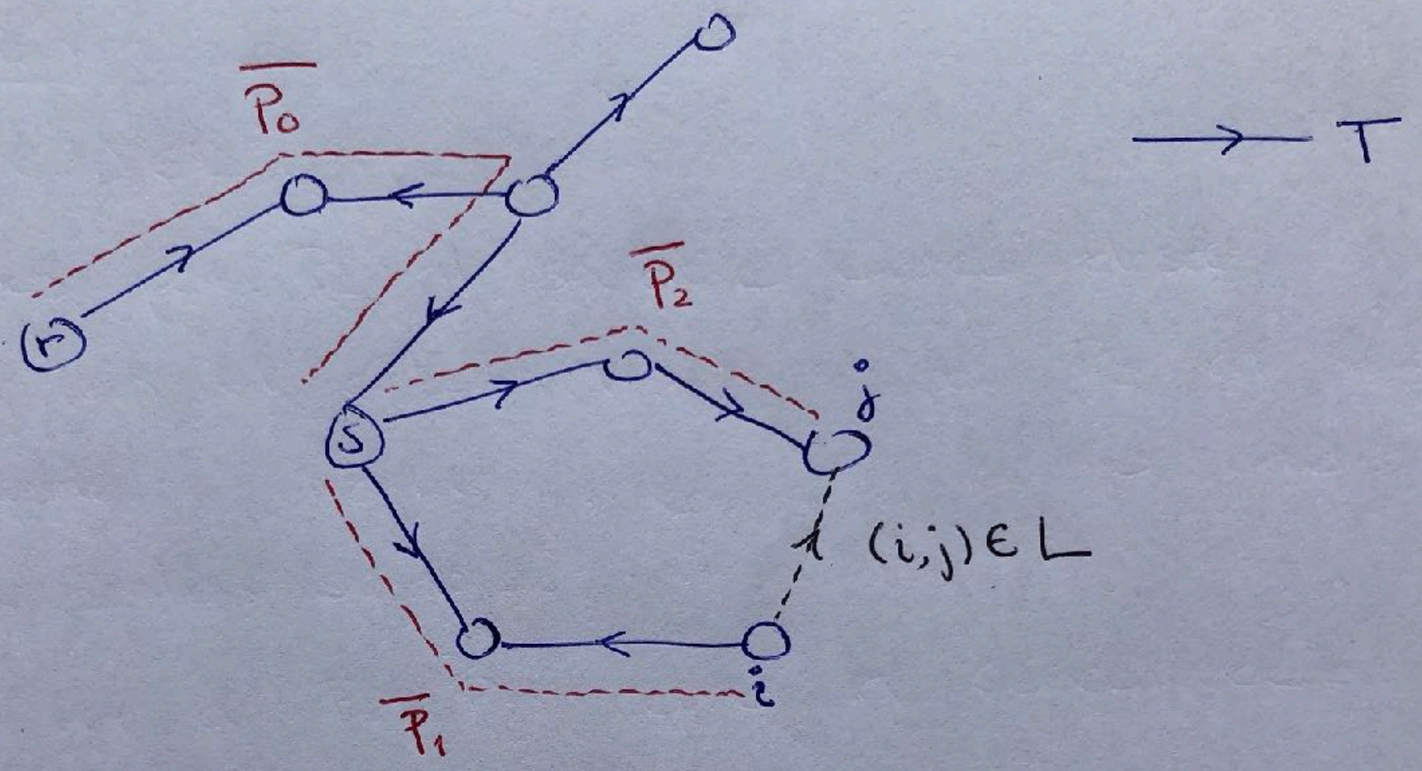
Denotemos por P_1 al sendero único desde r hasta i en el árbol (V,T), y por P_2 al sendero único desde r hasta j. Sea s el último nodo común de ambos senderos.

Podemos ver a P_1, P_2 como la concatenación de senderos más pequeños:

$$P_1 : \overline{P_0}, \overline{P_1}$$

$$P_2 : \overline{P_0}, \overline{P_2}$$

donde $\overline{P_0}$ es el sendero de r hasta s, $\overline{P_1}$ es el sendero desde s hasta i, y $\overline{P_2}$ es el sendero desde s hasta j.



Observar que:

$$c(C(i,j)) = c(\overline{P_1}) + c_{ij} - c(\overline{P_2})$$

$$= c(\overline{P_0}) + c(\overline{P_1}) + c_{ij} - [c(\overline{P_0}) + c(\overline{P_2})]$$

$$= c(P_1) + c_{ij} - c(P_2)$$

$$= y_i + c_{ij} - y_j = \overline{c}_{ij}.$$

(ii) $\underline{(i,j) \in U}$: Ejercicio.

Teorema 3.21.

Dados una solución de árbol $x \in \mathbb{R}^A$ asociada a una partición (L, U, T), un nodo $r \in V$, y un vector $y \in \mathbb{R}^V$ de distancias asociado a (L, U, T) respecto a r,

si se cumple que

$$\bar{c}_{ij} \leq 0 \quad , \quad \forall\, (i,j) \in U \,, \text{ y}$$

$$\bar{c}_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall\, (i,j) \in L \,,$$

entonces x es un flujo de costo mínimo.

Demostración

Sean $x \in \mathbb{R}^A$, $y \in \mathbb{R}^V$ que satisfacen las condiciones señaladas en el enunciado. Vamos a verificar que para estos vectores se cumplen las condiciones de holgura complementaria del Teorema 3.10.

Sea $(i,j) \in A$.

(i) Supongamos que $\bar{c}_{ij} < 0$.

Tenemos que $(i,j) \notin L$, pues $\bar{c}_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in L$.

Además, puede verse que $\bar{c}_{ij} = 0$, $\forall (i,j) \in T$. Por qué?

Luego, $(i,j) \in U$ y por tanto $x_{ij} = u_{ij}$.

(ii) Si $\bar{c}_{ij} > 0$, entonces $(i,j) \notin U$, pues $\bar{c}_{ij} \leq 0$, $\forall (i,j) \in U$.

Además $(i,j) \notin T$, pues $\bar{c}_{ij} = 0$, $\forall (i,j) \in T$. Luego, $(i,j) \in L$.

$\Rightarrow x_{ij} = 0$.

Algoritmo (Simplex en redes)

- Seleccionar $r \in V$ (arbitrario)
- Construir solución de árbol inicial y partición asociada (L, U, T)
- Construir vector de distancias $y \in \mathbb{R}^V$
- Mientras exista $(i,j) \in \{(i,j) \in L \mid \bar{c}_{ij} < 0\} \cup \{(i,j) \in U \mid \bar{c}_{ij} > 0\}$
  - + Determinar $\varepsilon(C(i,j))$.
  - + Si $\varepsilon(C(i,j)) > 0$
    - Usar $C(i,j)$ para transformar x en $\tilde{x}$ (Lema 3.11)
  - + Caso contrario:
    - $\tilde{x} := x$
  - + Sea $(k,l) \in C(i,j) \setminus \{(i,j)\}$ t.q. $\tilde{x}_{kl} = 0 \vee \tilde{x}_{kl} = u_{kl}$
    - Actualizar $T := T \cup \{(i,j)\} \setminus \{(k,l)\}$, L y U
  - + Recalcular y

Construcción de la solución de árbol inicial:

- Para cada nodo $i \in V$ con $b_i > 0$, enviamos $x_{ri} = b_i$ unidades de flujo sobre el arco (r,i). Si $(r,i) \notin A$ ó $u_{ri} < b_i$, agregamos a la red un arco artificial (r,i), con $u_{ri} = b_i$ y $c_{ri} = M$, donde $M \in \mathbb{R}$ es una constante muy grande (mayor a la suma de los costos de todos los arcos de la red.

- Para cada nodo $i \in V$ con $b_i < 0$, fijamos $x_{ir} = -b_i$ Si $(i,r) \notin A$ ó $u_{ir} < -b_i$, agregamos un arco artificial (i,r) con $u_{ir} = -b_i$ y $c_{ir} = M$.

- Fijamos $x_{ij} := 0$ sobre los arcos restantes

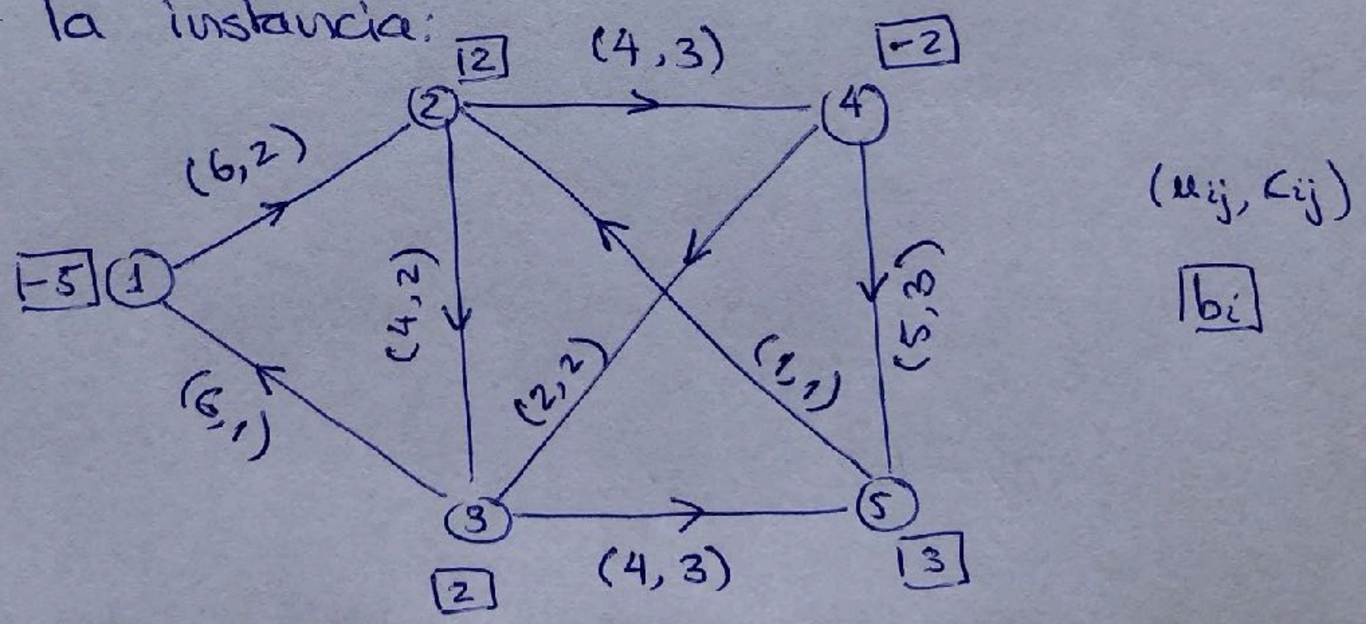
La partición (L, U, T) asociada a este flujo inicial está dada por:

$$T := \{(i,j) \in \hat{A} \mid x_{ij} > 0\}$$

$$L := \hat{A} \setminus T \quad , \quad U := \emptyset ,$$

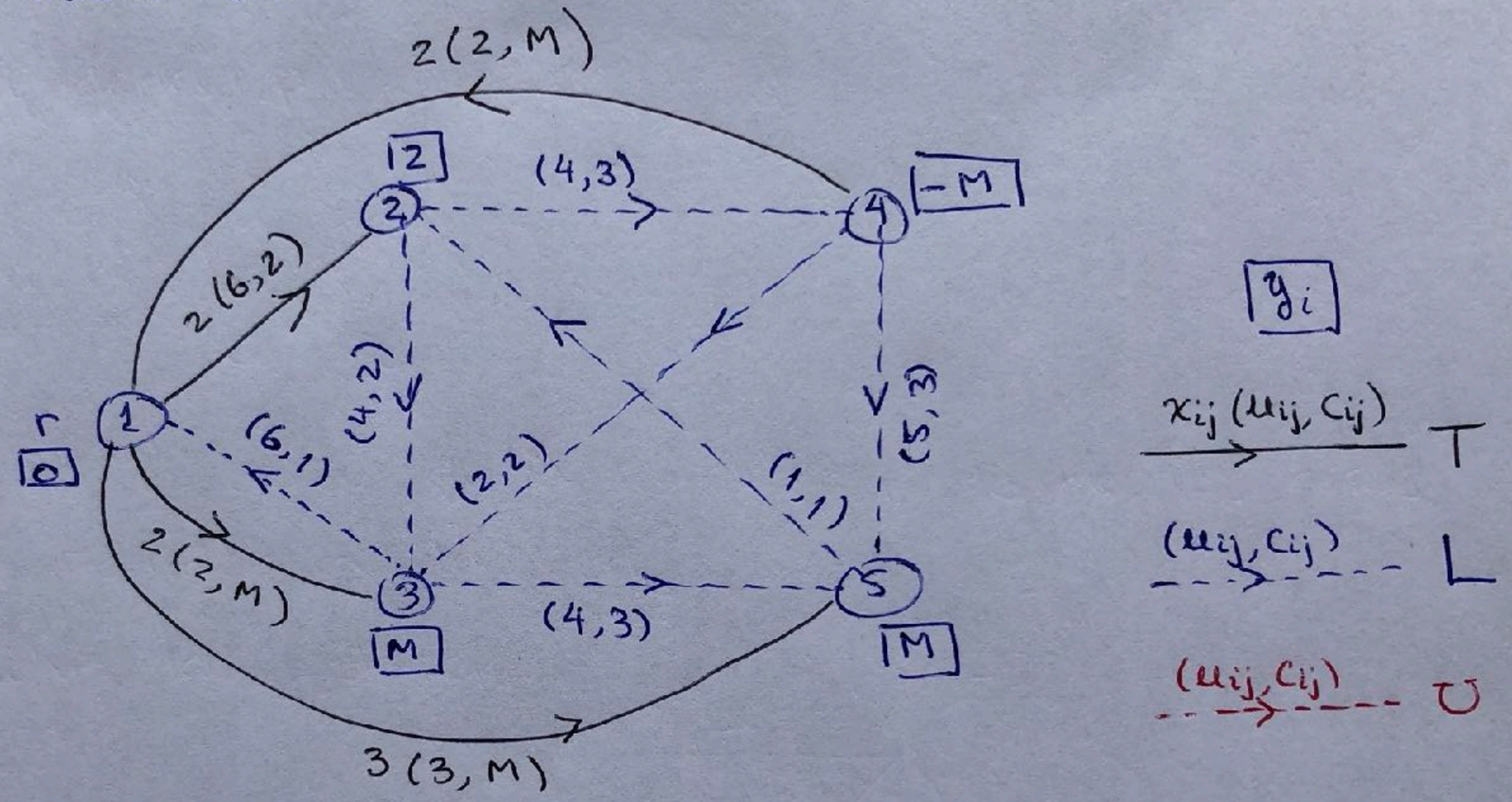
donde $\hat{A}$ es la unión de A y el conjunto de los arcos artificiales añadidos a la red.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la instancia:

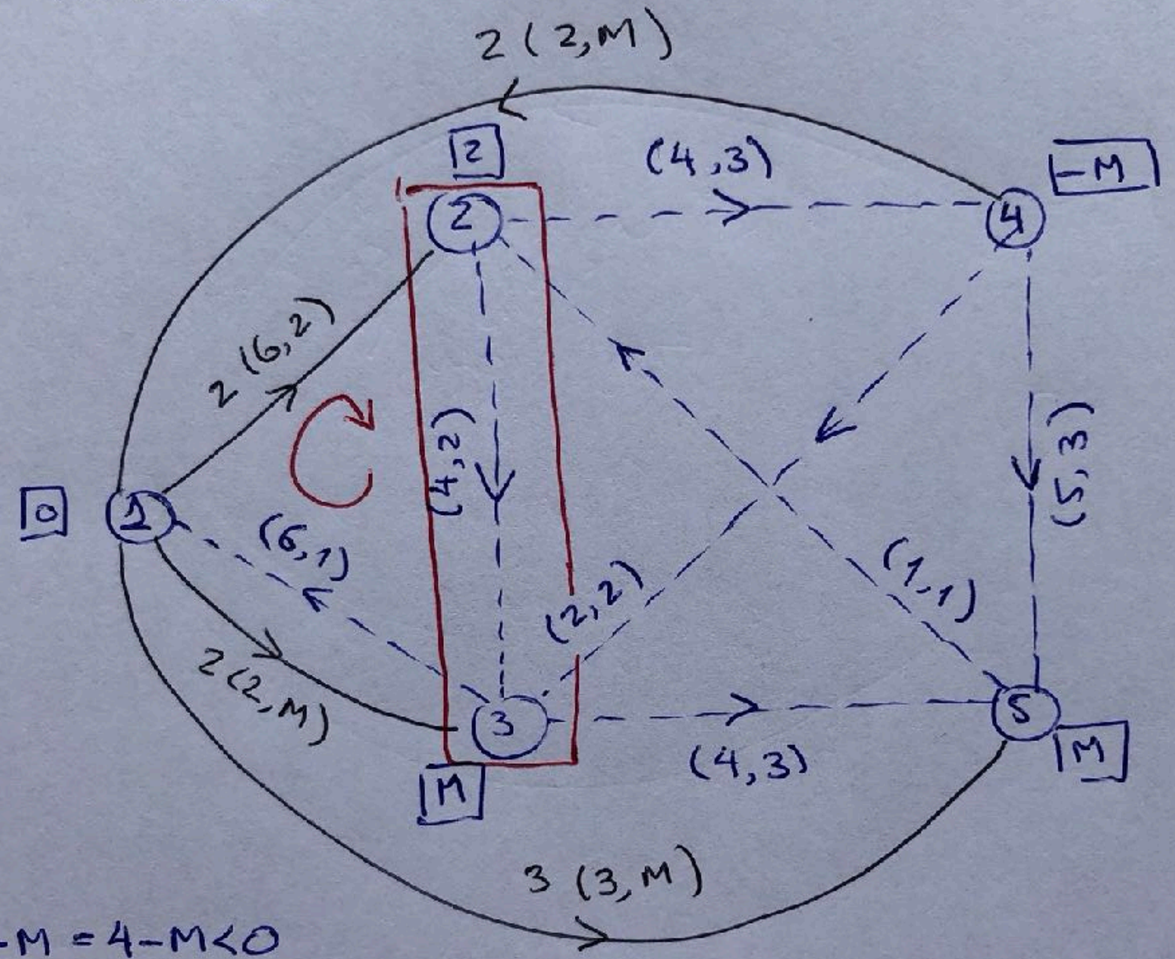


Solución inicial de árbol

r=1



Primera iteración



$(i,j) = (2,3)$

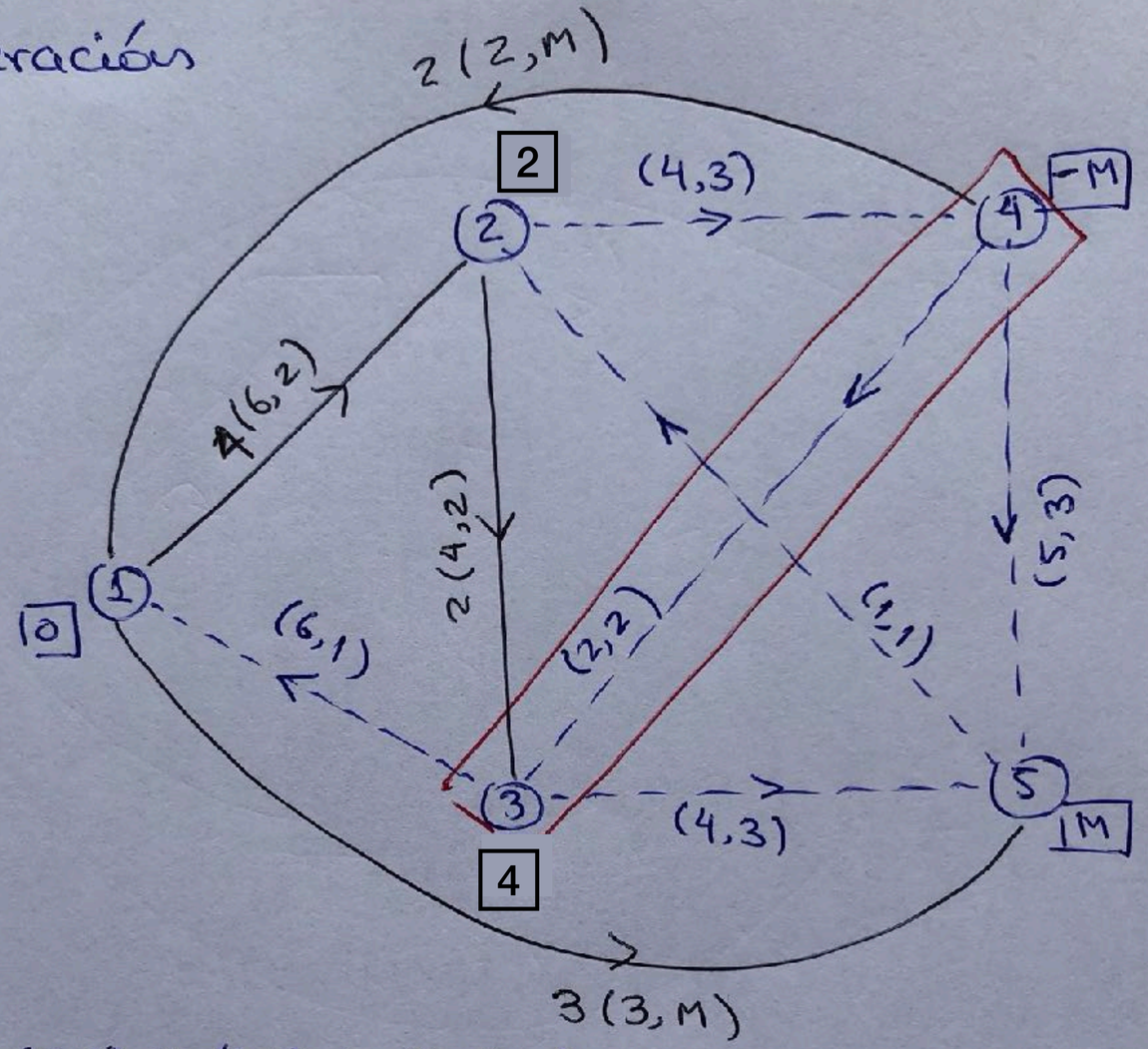
$\overline{c}_{23} = 2 + 2 - M = 4 - M < 0$

$C(2,3) = 2, (2,3), 3, (1,3), 1, (1,2), 2$

$\mathcal{E}(C(2,3)) = \min\{4, 2, 4\} = 2$

$(h,k) = (1,3)$

Segunda iteración



Si un arco artificial queda vacío, lo podemos retirar de la red

$(i,j) = (4,3)$

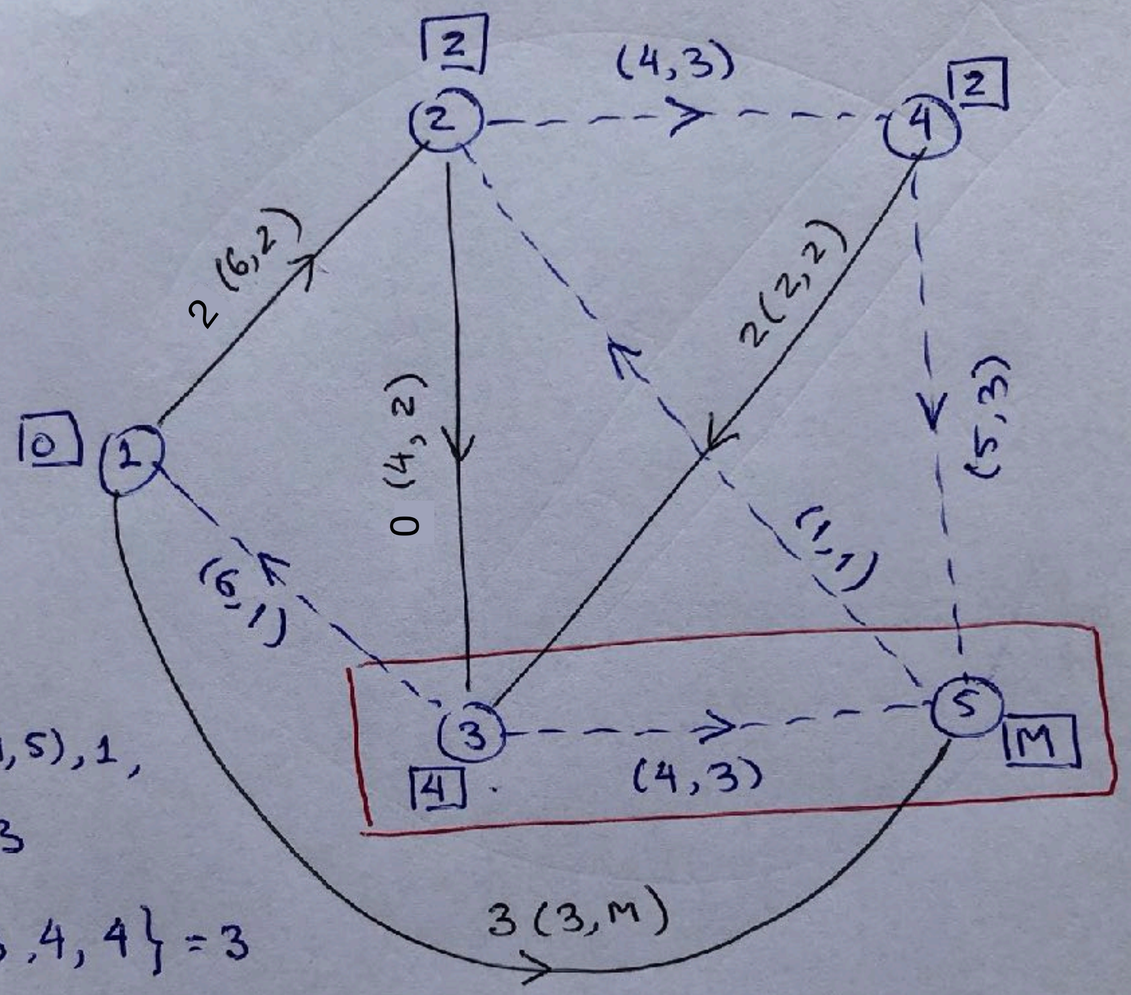
$\overline{c}_{ij} = 2 - M - 6 < 0$

$C(i,j) = 4, (4,3), 3, (2,3), 2, (1,2), 1, (4,1), 4$

$\varepsilon(C(i,j)) = \min\{2, 2, 4, 2\} = 2$

$(h,k) = (4,1)$

Tercera iteración



$(i,j) = (3,5)$

$\overline{c_{ij}} = 3+4-M < 0$

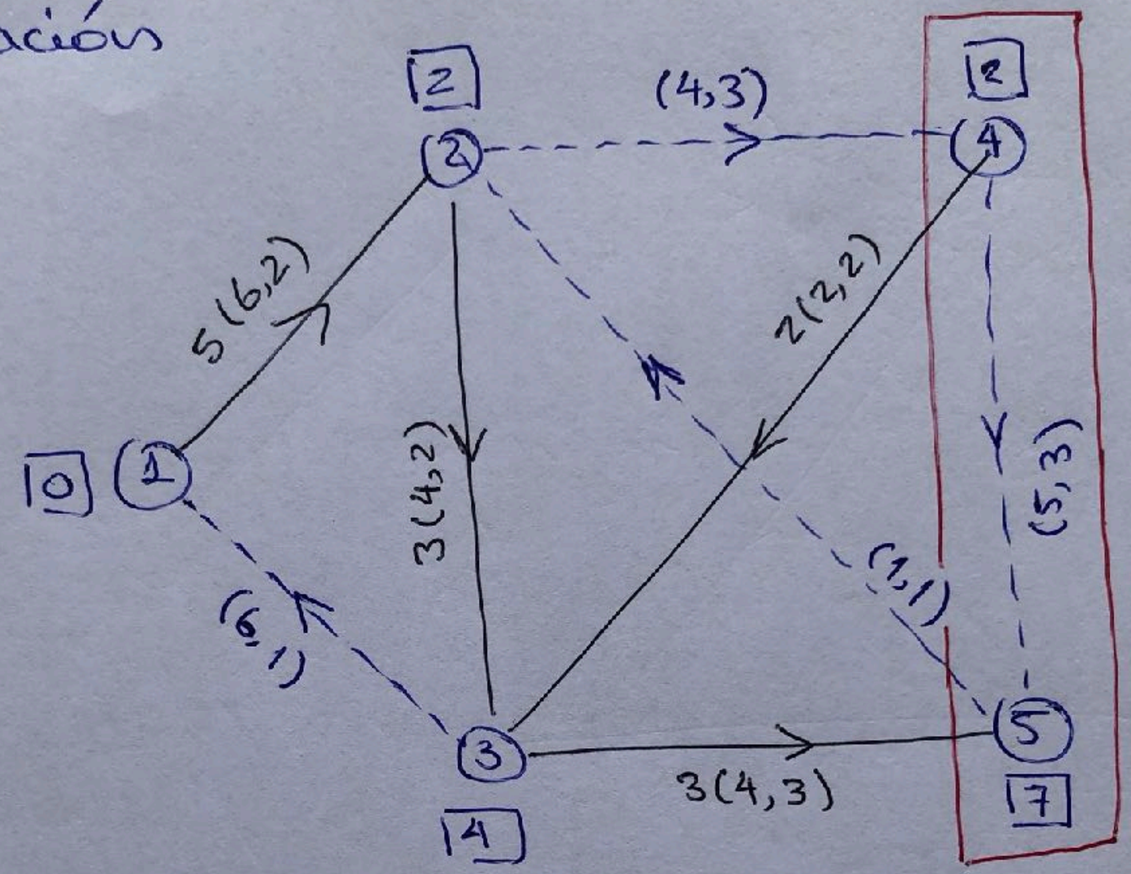
$C(i,j) = 3,\ (3,5),\ 5,\ (1,5),\ 1,$

$(1,2),\ 2,\ (2,3),\ 3$

$\varepsilon(C(i,j)) = \min\{4,3,4,4\} = 3$

$(h,k) = (1,5)$

Cuarta iteración



$(i,j) = (4,5)$

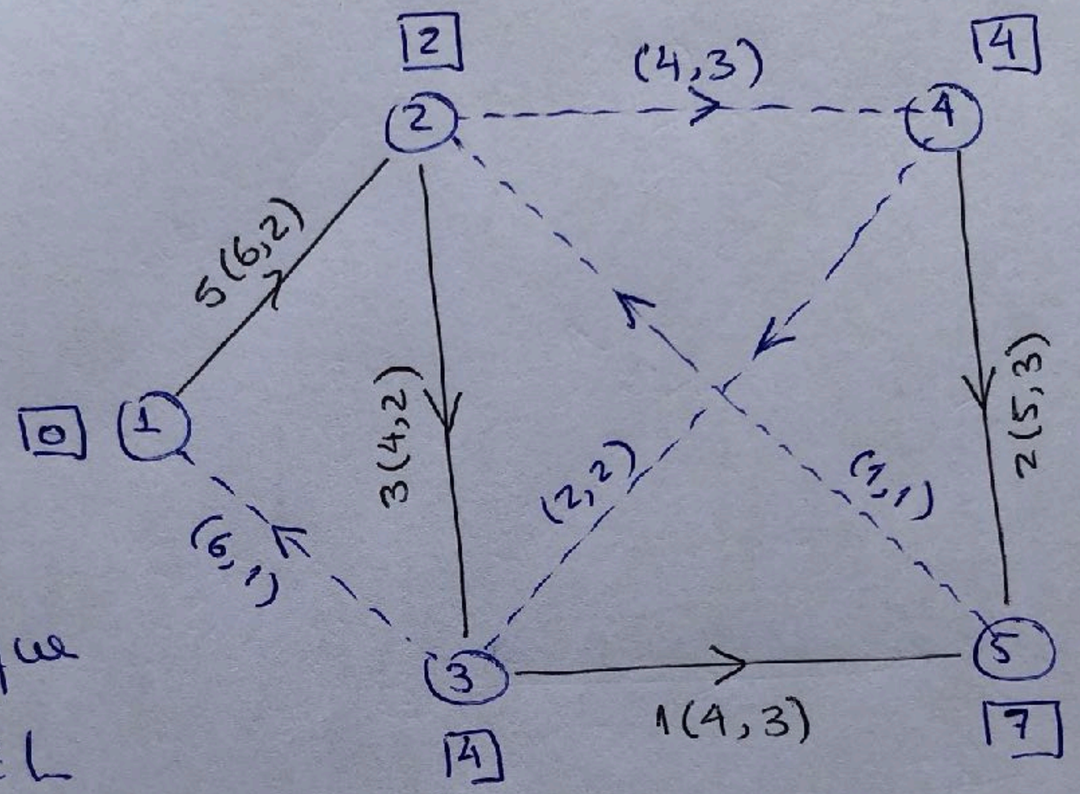
$\overline{c_{ij}} = 3+2-7<0$

$C(i,j) = 4,(4,5),5,(3,5),3,(4,3),4$

$\varepsilon(C(i,j)) = \min\{5,3,2\} = 2$

$(h,k) = (4,3)$

Quinta iteración



Puede verificarse que

$\bar{c}_{ij} \geq 0 \ , \ \forall (i,j) \in L$

Además

$U = \emptyset$

$\Rightarrow$ Flujo es óptimo.

Proposición 3.22:

Suponer que en la k-ésima iteración el conjunto de aristas del árbol generador se actualiza de T^k a

$$T^{k+1} := T^k \cup \{(i,j)\} \setminus \{(k,l)\}.$$

Sean $y^k, y^{k+1} \in \mathbb{R}^V$ los vectores de distancias asociados a T^k, T^{k+1}, respectivamente. Entonces, se cumple que:

$$y^{k+1}_{h} = y^k_{h}, \quad \forall\, h \in V_r$$

$$y^{k+1}_{h} = y^k_{h} + \bar{c}_{ij} \cdot \hat{s}, \quad \forall\, h \notin V_r,$$

donde V_r es la componente conexa de $(V, T^k \setminus \{(k,l)\})$ que contiene a r, y $\hat{s} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in V_r, \\ -1, & \text{caso contrario.} \end{cases}$

Dem: [Ejercicio].

Validez y eficiencia del algoritmo de simplex en redes

- Si el algoritmo termina, entonces por el Teorema 3.21, encuentra una solución óptima a MCF sobre la red con arcos artificiales.

- Como el costo de cada arco artificial es suficientemente alto, si la solución óptima encontrada contiene al menos un arco artificial, entonces la instancia original es no factible.

- Caso contrario, el algoritmo retorna una solución óptima para la instancia original del MCF.

- ¿Está garantizado que el algoritmo siempre termina?

- El número de soluciones de árbol es finita.
(Por qué?)

- Luego, si el algoritmo no repite soluciones de árbol, debe terminar en un número finito de iteraciones.

- Suponer que en la k-ésima iteración se pasa del flujo $x^{k-1} \in \mathbb{R}^V$ al flujo $x^k \in \mathbb{R}^V$. Del Lema 3.11, conocemos que:

$$c(x^k) = c(x^{k-1}) + c(C(i,j)) \cdot \varepsilon(C(i,j))$$

donde (i,j) es el arco que ingresa al árbol T en esta iteración. Por la forma en como $C(i,j)$ está definido, conocemos que $c(C(i,j)) \leq 0$.

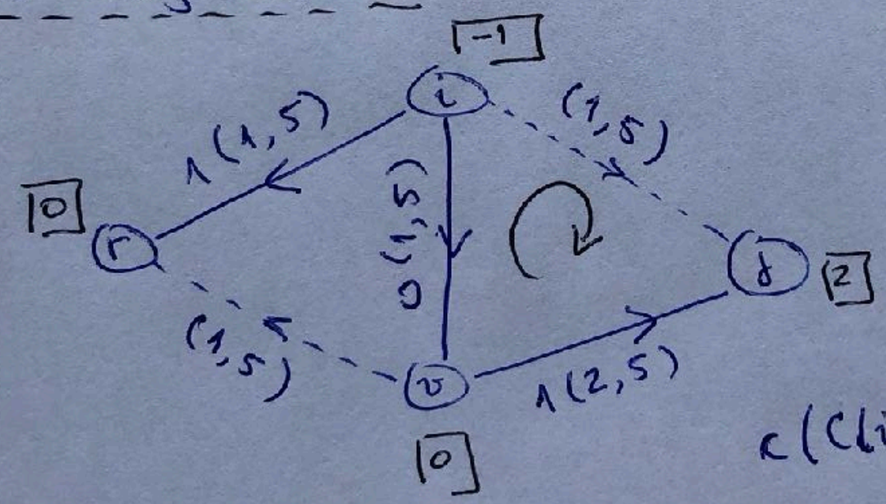
Luego, $c(x^k) \leq c(x^{k-1})$.

- Si $\varepsilon(C(i,j)) > 0$, se sigue que $c(x^k) < c(x^{k-1})$.

- Si el costo de la solución disminuye en cada iteración, no es posible revisitar (= repetir) soluciones anteriores.

- Sin embargo, puede darse que $\varepsilon(C(i,j)) = 0$ y $c(x^k) = c(x^{k-1})$.

Una iteración en la que esto ocurre se llama <u>iteración degenerada</u>



$\longrightarrow$ T

$- - \rightarrow - - -$ L

$x_{ij}\,(c_{ij}, u_{ij})$ $\boxed{y_i}$

$c(C(i,j)) = \overline{c}_{ij} = 1 - 1 - 2 < 0$

$\varepsilon(C(i,j)) = \min\{5, 1, 0\} = 0$

· Eventualmente, el algoritmo del simplex en redes podría caer en un ciclo infinito de iteraciones degeneradas que lo lleven a repetir las mismas soluciones.

· Estos ciclos pueden evitarse usando reglas de pivotaje adecuadas que indican un orden para determinar el próximo arco a entrar / salir de T cuando existen varias alternativas. Una regla de pivotaje que evita ciclos es:

"Al seleccionar el arco (k,l) que será retirado de T, seleccionar el primer arco del sendero de j a i en T que satisfaga una de las dos condiciones siguientes:

- ser un arco "hacia adelante" $a \in C^+$, con $x_a = u_a - \varepsilon$

- ser un arco "en reversa" $a \in C^-$, con $x_a = \varepsilon$ "

Aunque el algoritmo del simplex en redes se comporta bien en la práctica, durante mucho tiempo se mantuvo abierta la pregunta sobre si existe una versión que sea polinomial.

En 1997, Orlin[1] propuso una versión que requiere de $O(\min(n^2 m \cdot \log n\, C, n^2 m^2 \log n))$ operaciones.

Posteriormente, Tarjan (1997), mejoró este orden de complejidad al disminuir las operaciones promedio por iteración de $O(n)$ a $O(\log n)$.

---

[1] Orlin, J.B. (1997). *A polynomial time primal network simplex algorithm for minimum cost flows.* Mathematical Programming 78 (109-129). https://link.springer.com/article/10.1007/BF02614365.

3.5. GENERALIZACIONES Y APLICACIONES

1) Problema del transporte

Dado un grafo bipartito $G = (P \uplus Q, E)$, donde los nodos de P se llaman nodos productores, y los nodos de Q son nodos consumidores, definimos un vector $c \in \mathbb{R}^E$ de costos sobre las aristas de G. Cada nodo productor $p \in P$ tiene asociada una cantidad de producción a_p. De manera similar, cada nodo consumidor $q \in Q$ tiene asociada una demanda b_q.

El valor c_{pq} es el costo unitario de transporte desde $p \in P$ hasta $q \in Q$. Se conoce además que

$$\sum_{p \in P} a_p = \sum_{q \in Q} b_q .$$

Tarea:

Establecer un plan de transporte que permita enviar toda la producción de los nodos de P a los nodos de Q al menor costo posible.

Para todo $pq \in E$, este plan debe indicar la cantidad x_{pq} de producto a enviar desde p hasta q.

Este problema es un caso especial de MCF y puede formularse como:

$$\begin{cases} \min \sum_{pq \in E} c_{pq} x_{pq} \\ \text{s.r.} \\ \sum_{pq \in \delta(p)} x_{pq} = a_p, \ \forall p \in P \\ \sum_{pq \in \delta(q)} x_{pq} = b_q, \ \forall q \in Q \\ x_{pq} \geq 0, \ \forall pq \in E \end{cases}$$

2) Problema general de flujo de costo mínimo

Dados: . Una red capacitada $R=(V,A,u)$

. Un vector $l \in \mathbb{R}^A$ de flujo mínimo sobre los arcos

. Costos $c \in \mathbb{R}^A$ sobre los arcos

. Un vector $a \in \mathbb{R}^V$ de demandas mínimas en los nodos

. Un vector $b \in \mathbb{R}^V$ de demandas máximas en los nodos

Encontrar un flujo factible $x \in \mathbb{R}^A$ que satisfaga:

$$(GMCF) \begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.r.} \\ a_i \leq f_x(i) \leq b_i \quad , \quad \forall\, i \in V, \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad , \quad \forall\, (i,j) \in A. \end{cases}$$

Aunque este problema parece más general, puede reducirse al MCF clásico.

Vamos a reducir GMCF primero a un problema con demandas fijas en los nodos. Agregamos un nuevo nodo r a la red, conjuntamente con arcos (r,i), $\forall i \in V$. Para estos arcos, definimos $l_{ri} := 0$, $u_{ri} := b_i - a_i$, $c_{ri} := 0$. Finalmente, fijamos las demandas sobre los nodos $\hat{b}_i := b_i$, $\forall i \in V$ y $\hat{b}_r := -\sum_{i \in V} \hat{b}_i$.

Sobre esta red extendida, resolvemos el problema:

$$\min \sum_{(i,j) \in \hat{A}} c_{ij} \hat{x}_{ij}$$

s.r.

$$f_{\hat{x}}(i) = \hat{b}_i \ , \ \forall i \in V \cup \{r\},$$

$$l_{ij} \leq \hat{x}_{ij} \leq u_{ij} \ , \ \forall (i,j) \in \hat{A},$$

donde $\hat{A}$ es el conjunto de arcos de la red extendida. Llamemos $f^{A}_{\hat{x}}(i)$ al flujo neto en el nodo i si se toman en cuenta únicamente los arcos originales de la red. Notar que

$$f_{\hat{x}}(i) = f^{A}_{\hat{x}}(i) + \hat{x}_{ri} = \hat{b}_i \ , \ \forall i \in V$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_{ri} = \hat{b}_i - f^{A}_{\hat{x}}(i)$$

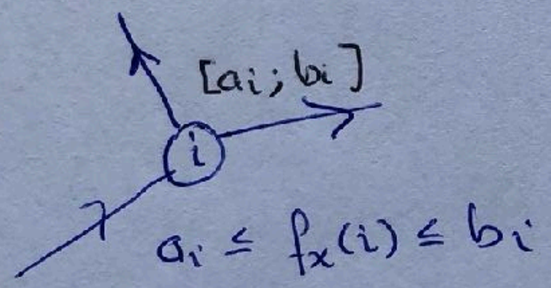
Por otra parte, como $l_{ri} = 0$ y $u_{ri} = b_i - a_i$, se tiene

$$0 \leq \hat{x}_{ri} = \hat{b}_i - f^{A}_{\hat{x}}(i) \leq b_i - a_i$$

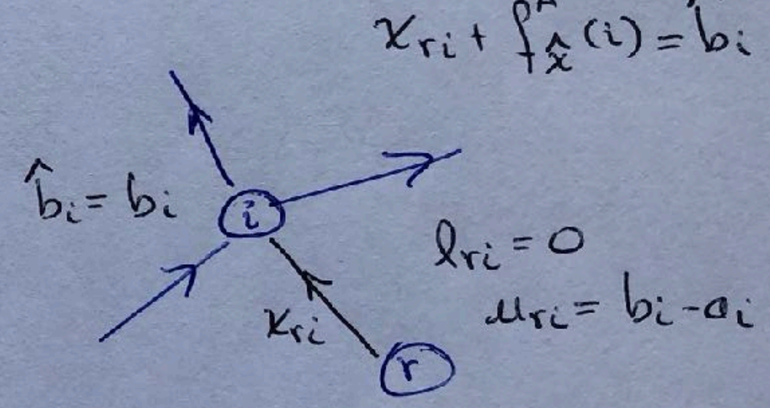
$$\Leftrightarrow \quad -b_i \leq -f^A_{\hat{x}}(i) \leq -a_i$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i \leq f^A_{\hat{x}}(i) \leq b_i$$

Luego, el flujo $\hat{x} \in \mathbb{R}^{\hat{A}}$ restringido a los arcos de la red original, satisface las restricciones de demanda generalizada de GMCF.



Red original



Red extendida

Finalmente, realizando la sustitución $\bar{x}_{ij} = \hat{x}_{ij} - l_{ij}$, $\forall (i,j) \in \hat{A}$,

podemos poner al problema anterior en la forma:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in\hat{A}} c_{ij}\, \bar{x}_{ij} \\ \text{s.t.} \\ f_{\bar{x}}(i) = \hat{b}_i - f_l(i), \quad \forall i \in V \cup \{r\}, \\ 0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \hat{A}. \end{cases}$$

donde $f_l(i) := \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} l_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} l_{ij}$. [Demostrar]

3) Problema de asignación de flota vehicular

[Vehicle scheduling problem]

Problema:

Dados: un conjunto T de viajes programados
una flota de vehículos estacionados en un depósito

Diseñar un plan para cubrir todos los viajes aprovechando de la mejor manera la flota de los vehículos.

"Aprovechar de la mejor manera" puede significar:

- minimizar número de vehículos utilizados
- minimizar tiempos muertos de vehículos
- balancear la carga entre todos los vehículos
- etc...

Cada viaje usualmente están caracterizado por:

- tiempo de salida
- lugar de salida
- tiempo de llegada
- lugar de llegada

Con esta información, es posible determinar un criterio de compatibilidad: $j \in T$ es compatible con $i \in T$, si un mismo vehículo puede realizar el viaje i y luego realizar el viaje j.

Supongamos que se quiere minimizar el número de vehículos utilizados para cubrir todos los viajes. Este problema puede formularse como un MCF.

El conjunto de nodos de la red está dado por:

$$V = \{o, d\} \cup \{v_i, \hat{v}_i \mid i \in T\}$$

Los arcos de la red se definen por:

$$\hat{A}_1 := \{(o, v_i) \mid i \in T\} \cup \{(\hat{v}_i, d) \mid i \in T\}$$

$$\hat{A}_2 := \{(v_i, \hat{v}_i) \mid i \in T\}$$

$$\hat{A}_3 := \{(\hat{v}_i, v_j) \mid i, j \in T,\ j \text{ es compatible con } i\}$$

$$A := \hat{A}_1 \cup \hat{A}_2 \cup \hat{A}_3 \cup \{(d, o)\}$$

Las capacidades de todos los arcos son iguales a 1; excepto (d,o):

$$u_{ij} = 1, \quad \forall\ (i,j) \in A \setminus \{(d,o)\}, \quad u_{do} = K$$

tamaño de la flota

Imponemos condiciones de flujo mínimo sobre los arcos de $\hat{A}_2$:

$$l_{ij} = 1, \quad \forall (i,j) \in \hat{A}_2, \qquad l_{ij} = 0, \quad \forall (i,j) \in A \setminus \hat{A}_2.$$

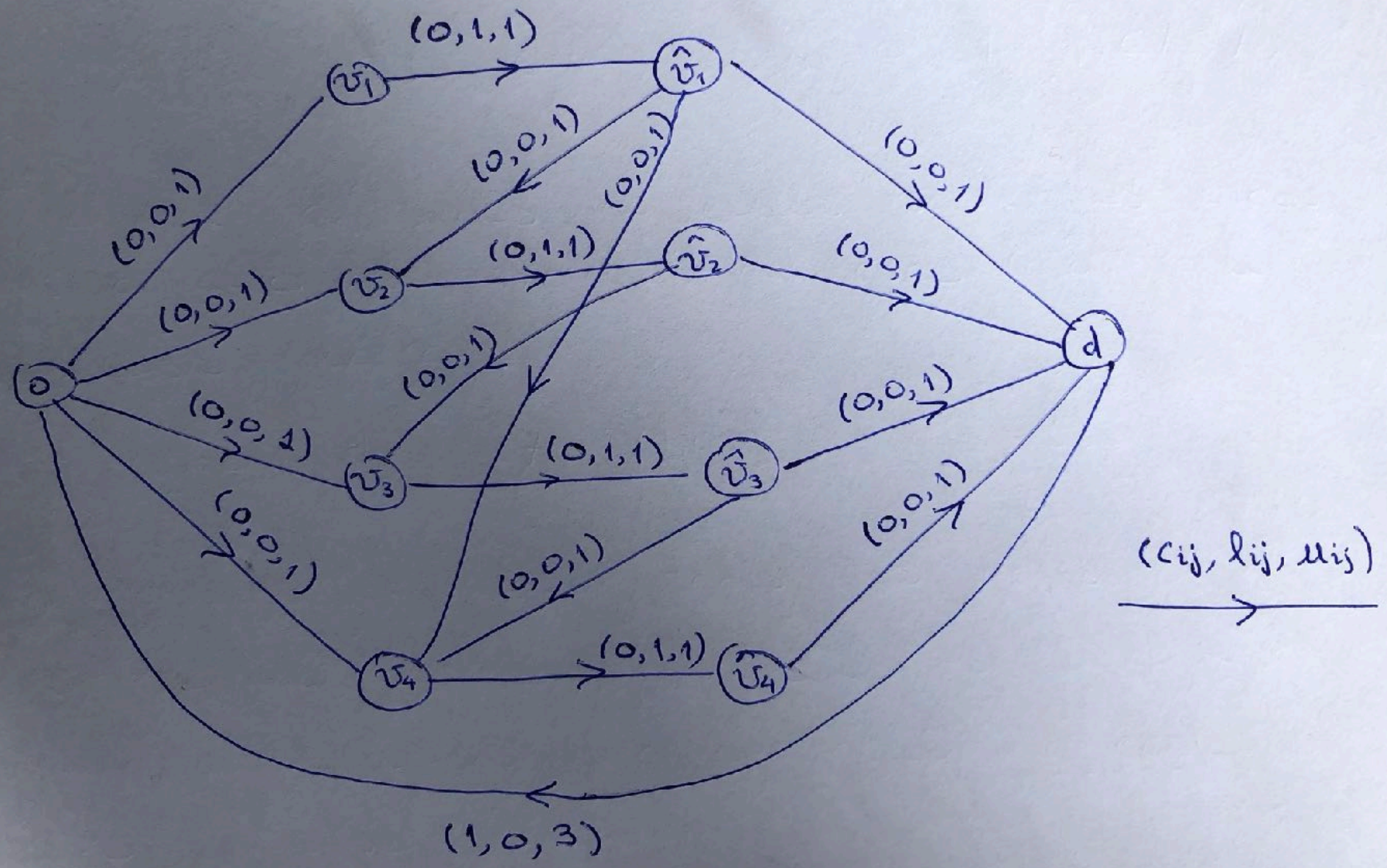
Finalmente, definimos los costos sobre los arcos iguales a cero, con excepción del arco (d,o) que tiene costo igual a 1:

$$c_{ij} = 0, \quad \forall (i,j) \in A \setminus \{(d,o)\}, \qquad c_{do} = 1.$$

El problema de asignar todos los viajes al menor número posible de vehículos es equivalente al problema de encontrar una circulación de costo mínimo en esta red.

Ejemplo: $T = \{1, 2, 3, 4\}$, $K = 3$

$C = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4)\}$ ($(i,j) \in C \Leftrightarrow j$ es compatible con i)



Toda circulación factible entera asignará valores de flujo x_{ij} iguales a cero o uno sobre los arcos de $A \setminus \{(d,o)\}$, y un valor $x_{do} \in \mathbb{Z}$ a este último arco. Los arcos con $x_{ij} = 1$ en $A \setminus \{(d,o)\}$ corresponden a un conjunto de caminos desde o hasta d, que indican rutas de servicio para los vehículos de la flota. Cada ruta de servicio incluye uno o varios viajes compatibles.

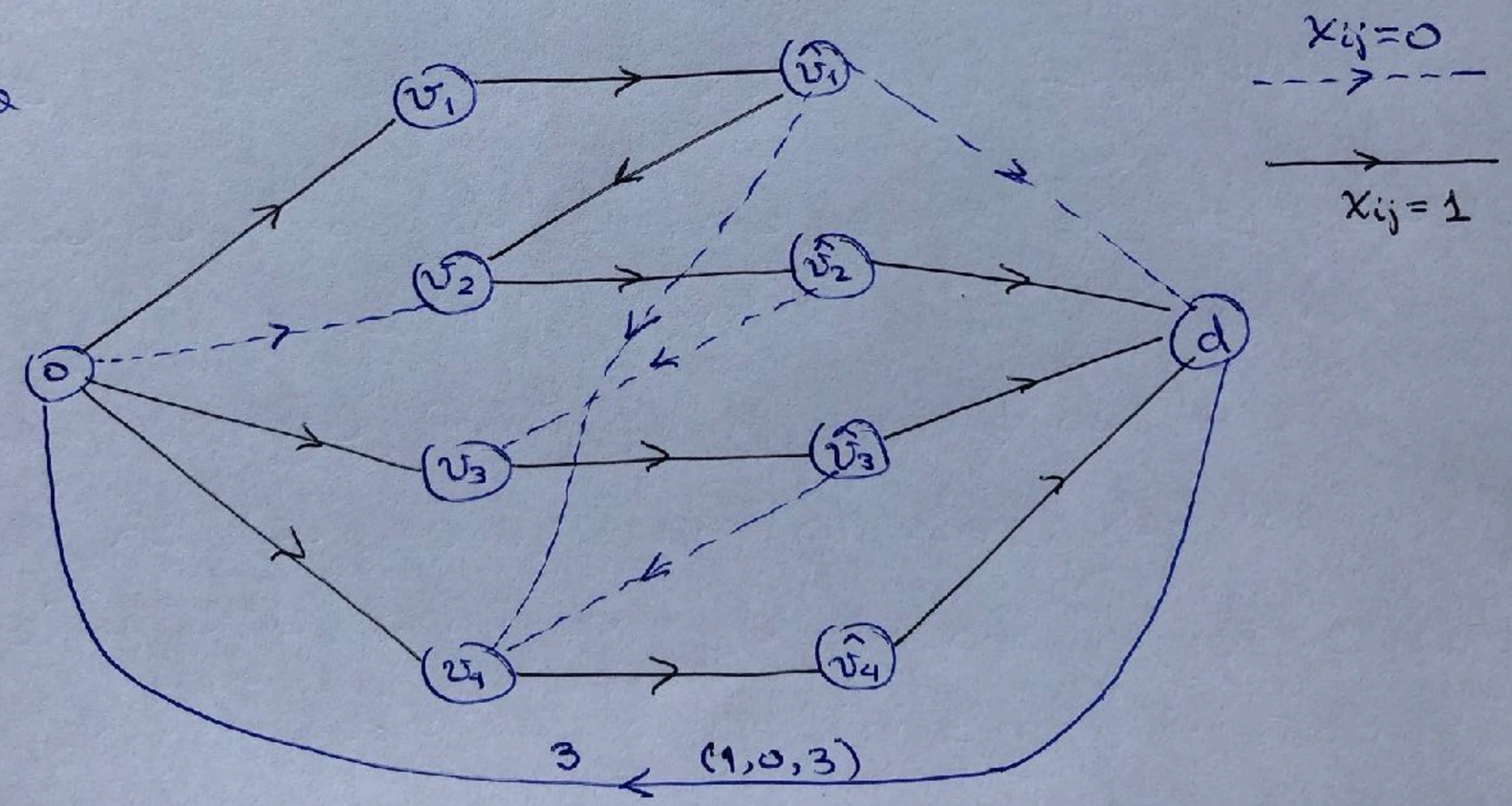
El número de rutas de servicio es igual al flujo entrante en el nodo d, que a su vez es igual al flujo sobre el arco (d,o) y, en virtud de la definición de los costos, igual al costo de la circulación. Como cada ruta es asignada a un vehículo, al minimizar el costo de la circulación minimizamos

el número de vehículos requeridos.

Notar que el parámetro de flujo mínimo l_{ij} es igual a 1 sobre todos los arcos de la forma $(v_i, \hat{v}_i)$, $i \in T$. Esto garantiza que las rutas de servicio cubran todos los viajes.

<u>Ejemplo</u>:

Solución de costo 3. Induce 3 rutas de servicio.



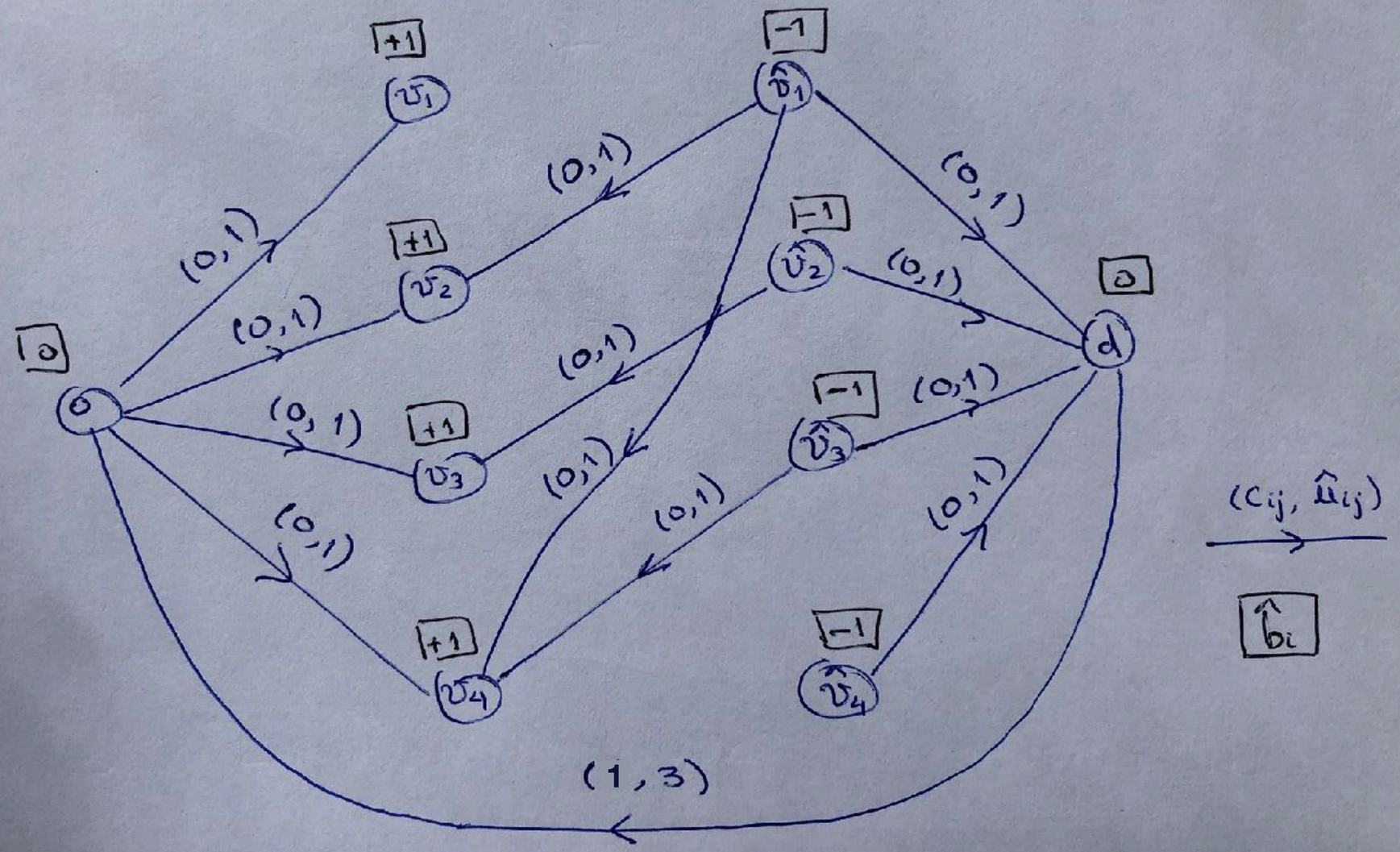
Podemos reducir este problema a una instancia de MCF con la sustitución $\bar{x}_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$.

Al hacerlo, tenemos:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\,\bar{x}_{ij} \\ \text{s.r.} \\ f_{\bar{x}}(i) = -f_l(i), \quad \forall i \in V, \\ 0 \le \bar{x}_{ij} \le u_{ij} - l_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A. \end{cases}$$

$$f_l(i) := \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} l_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} l_{ij}$$

Notar que esta transformación implica que los arcos $(v_i, \hat{v}_i)$, $i \in T$, pasan a tener capacidad cero, por lo que pueden ser retirados de la red.

Podemos resolver este problema con el algoritmo

del simplex en redes. Como todas las capacidades y demandas son enteras, el algoritmo retorna una solución entera.