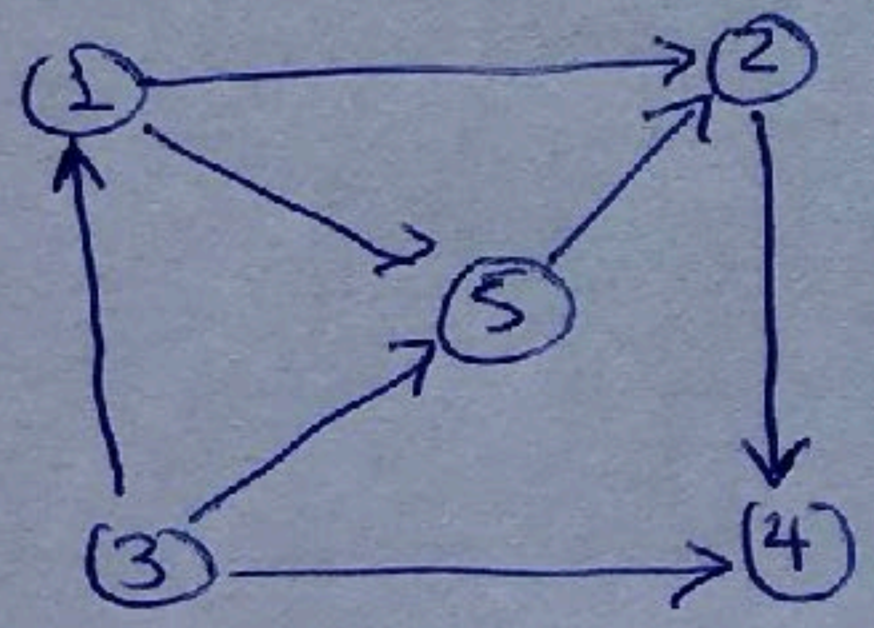
2. PROBLEMAS DE FLUJO MÁXIMO EN REDES

2.1. FLUJOS EN REDES

Un grafo dirigido o digrafo [=digraph] es un par ordenado (V, A) de un conjunto finito de nodos y un multi-conjunto finito $A \subset V \times V$ de arcos.



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

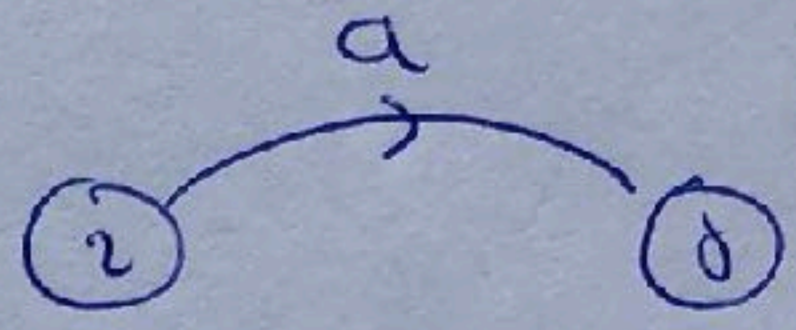
$$A = \{(1,2), (1,5), (2,4), (3,1), (3,4), (3,5), (5,2)\}$$

Los elementos repetidos en A se llaman arcos paralelos. Los arcos de la forma (i,i), con $i \in V$, se llaman lazos. Un digrafo sin arcos paralelos ni lazos es simple.

Si $a = (i,j) \in A$ entonces

i es el nodo inicial de a

j es el nodo final de a



i es un nodo predecesor de j

j es un nodo sucesor de i

a es incidente a i y j

i, j son vecinos

a es arco saliente de i

a es arco entrante a j

$\delta^+(i)$ es el conjunto de arcos salientes de i

$\delta^-(i)$ es el conjunto de arcos entrantes a i

$d^+(i) = |\delta^+(i)|$ (grado saliente) $\quad d^-(i) := |\delta^-(i)|$ (grado entrante)

$N^+(i)$ es el conjunto de nodos sucesores de i

$N^-(i)$ es el conjunto de nodos predecesores de i

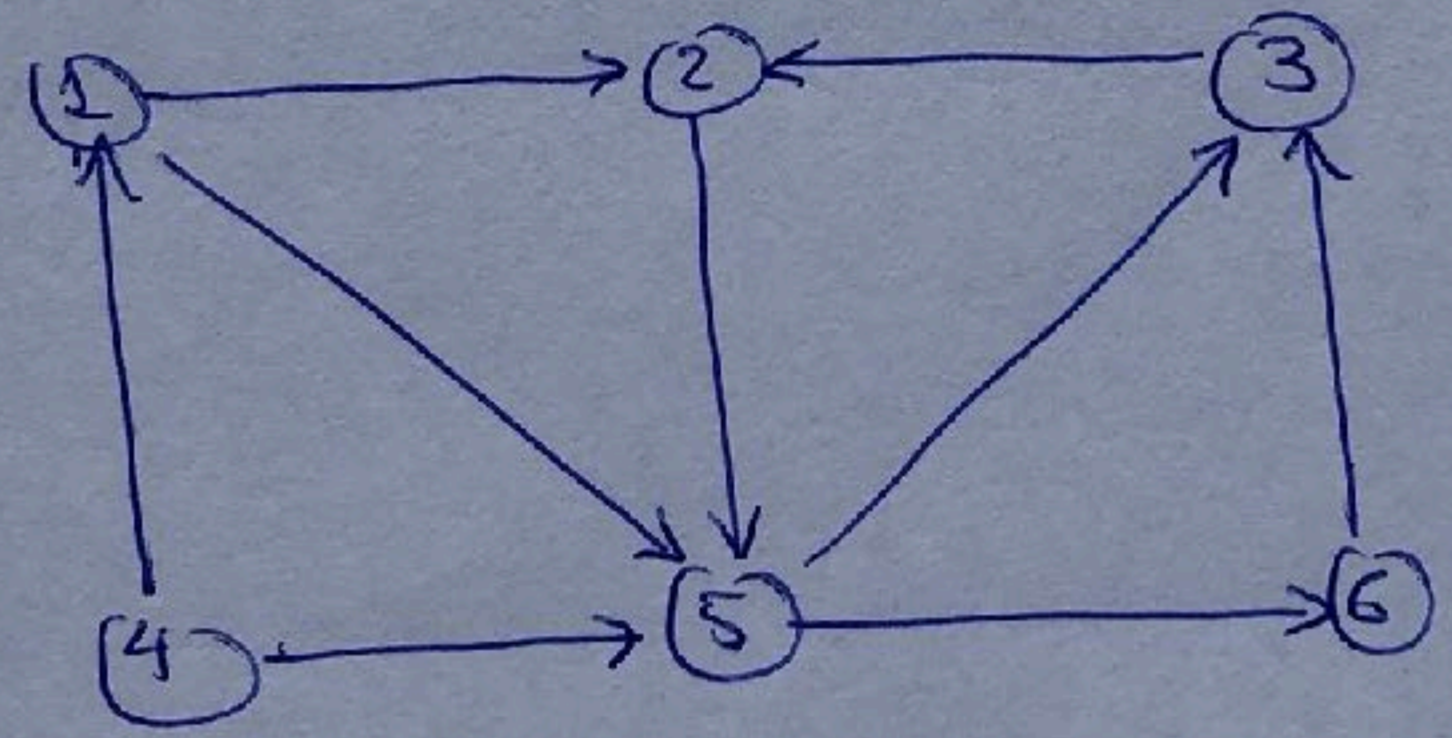
Adicionalmente, se mantienen los conceptos de grafos no dirigidos:

$$\delta(i) := \delta^+(i) \cup \delta^-(i)$$

$$d(i) := d^+(i) + d^-(i)$$

$$N(i) := N^+(i) \cup N^-(i)$$

Ejemplo



$\delta^+(1) = \{(1,2), (1,5)\}$

$\delta^-(5) = \{(1,5), (2,5), (4,5)\}$

$d^+(4) = 2$

$d^-(3) = 2$

$N^+(4) = \{1,5\}$

$N^-(2) = \{1,3\}$

Proposición 2.1. Sea $D=(V,A)$ un digrafo simple. Demostrar que la suma de los grados entrantes de todos los nodos es igual a la suma de los grados salientes.

[Ejercicio]

Definición: (Cadena y camino)

Una cadena [chain] es una sucesión alternada de nodos y arcos de la forma

$$P: i_0, a_1, i_1, a_2, i_2, \dots, a_k, i_k$$

donde

$i_0, \dots, i_k \in V$

$a_1, \dots, a_k \in A$

a_l tiene como extremos a i_{l-1} y i_l, $\forall l \in \{1, \dots, k\}$.

Si $a_\ell = (i_{\ell-1}, i_\ell)$, decimos que a_ℓ es un arco "hacia adelante" en la cadena. Por el contrario, si $a_\ell = (i_\ell, i_{\ell-1})$, entonces a_ℓ es un arco "en reversa".

Denotaremos por $A^+(P)$ al conjunto de arcos "hacia adelante" en P, por $A^-(P)$ al conjunto de arcos "en reversa", y por $A(P) := A^+(P) \cup A^-(P)$ al conjunto de arcos de P.

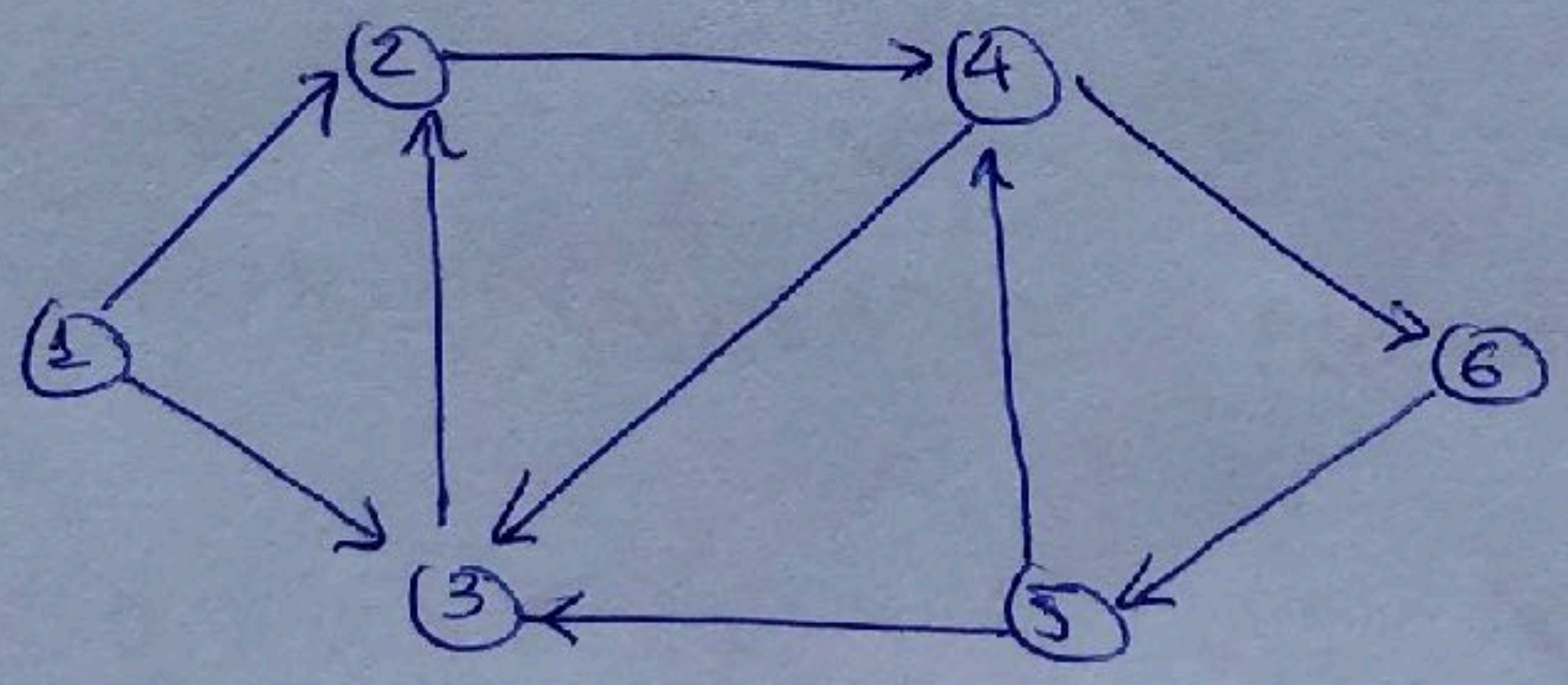
Un camino es una cadena que no contiene arcos en reversa. Es decir, P es un camino si $A^-(P) = \emptyset$ y, por tanto, $A(P) = A^+(P)$. [directed path, dipath]

Los conceptos de sendero simple, sendero elemental y sendero cerrado se extienden de manera natural a cadenas y caminos.

Una cadena elemental cerrada es un ciclo. [cycle]
Un camino elemental cerrado es un circuito. [directed circuit]

Ejercicio:

Identificar ejemplos de las definiciones anteriores en el siguiente grafo dirigido:



Una red capacitada (D, u) está formada por un digrafo $D=(V,A)$ y un vector $u \in \mathbb{R}_+^A$ de capacidades no negativas asociadas a los arcos de A.

Dados una red capacitada $R=(D,u)=(V,A,u)$ y dos nodos $s,t \in V$ un (s,t)-flujo es un vector $x \in \mathbb{R}_+^A$ de valores no negativos asociados a los arcos de A que satisface las dos condiciones siguientes:

(i) $$\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} = 0 \quad , \forall\, i \in V \setminus \{s,t\}$$

(conservación de flujo)

(ii) $$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad , \forall\, (i,j) \in A$$

(capacidad)

<u>Notación</u>: Para un nodo $i \in V$, el <u>flujo neto</u> en i se define por:

$$f_x(i) := \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij}$$

La restricción de conservación de flujo puede escribirse en la forma:

$$f_x(i) = 0 \quad , \forall \ i \in V \setminus \{s,t\} .$$

La cantidad <u>$f_x(t)$</u> se conoce como <u>valor</u> del flujo-(s,t)

<u>Proposición 2.2.</u>: Si $R = (V, A, u)$ es una red capacitada y x es un flujo-(s,t) en R, entonces

$$\sum_{i \in V} f_x(i) = 0 .$$

[Ejercicio]

Solución:

$$\sum_{i\in V} f_x(i) = \sum_{i\in V}\left(\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i\in V}\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{i\in V}\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}$$

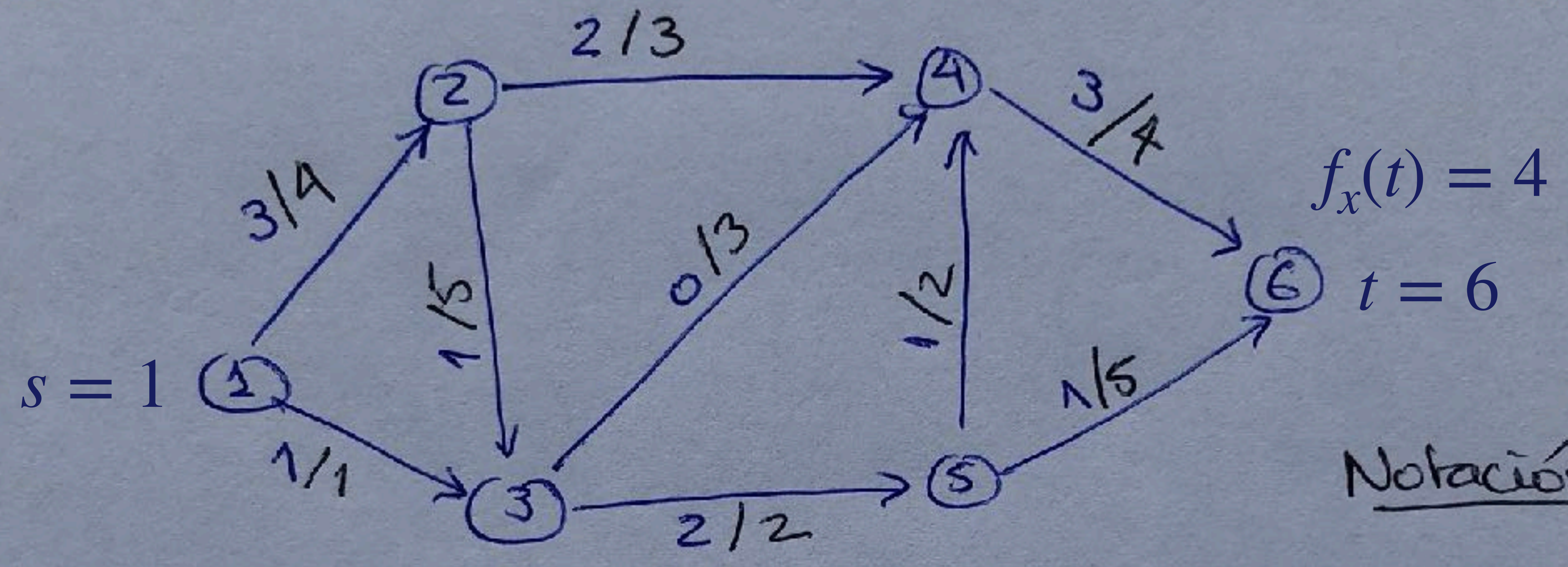
$$= \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 0$$

todo arco
llega exactamente
a un nodo

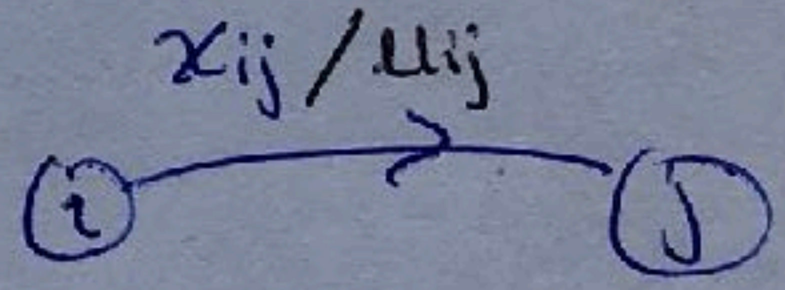
todo arco
sale
exactamente
de un nodo

Ejemplo

Verificar que x es un flujo-(s,t) en la siguiente red, y determinar su valor.



Notación:



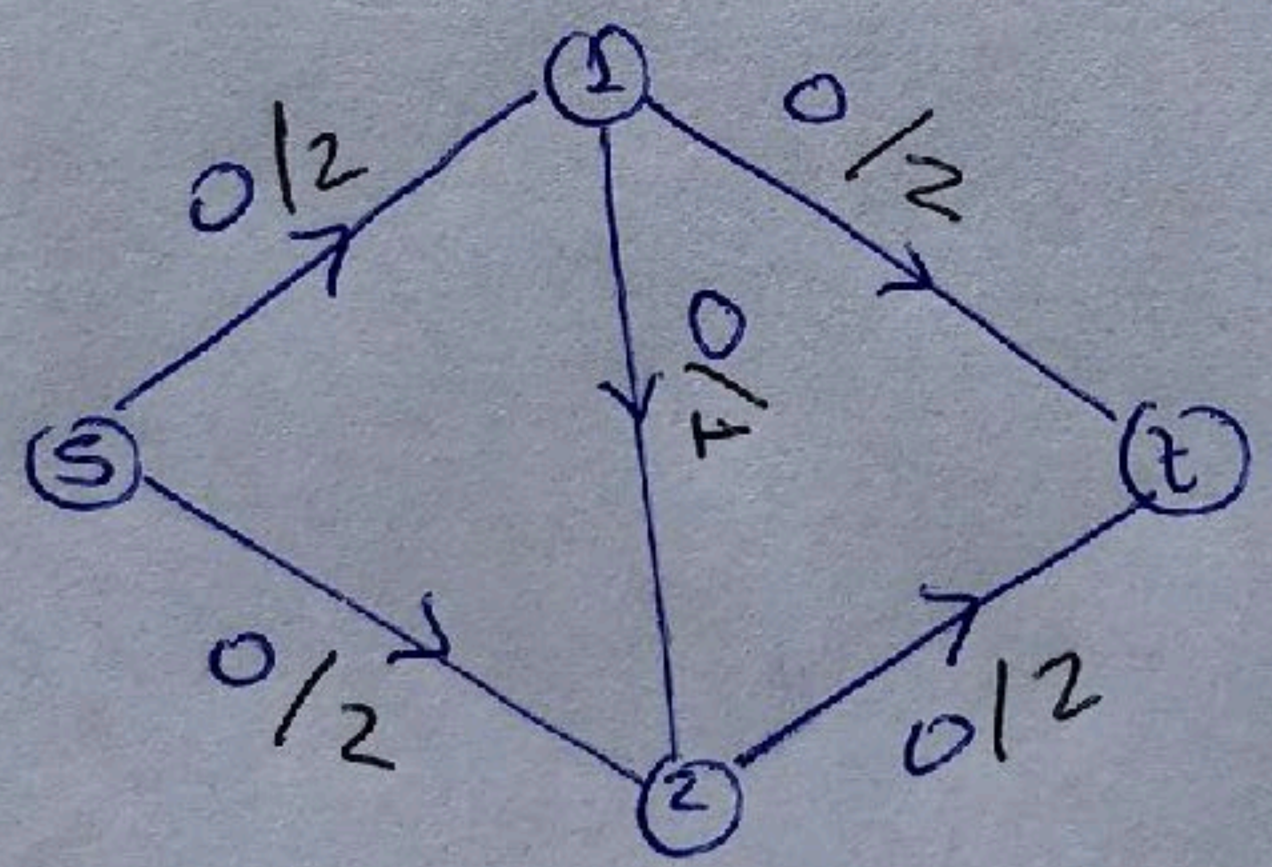
En un flujo-(s,t) el nodo s suele llamarse fuente [source] y el nodo t es el sumidero [sink].

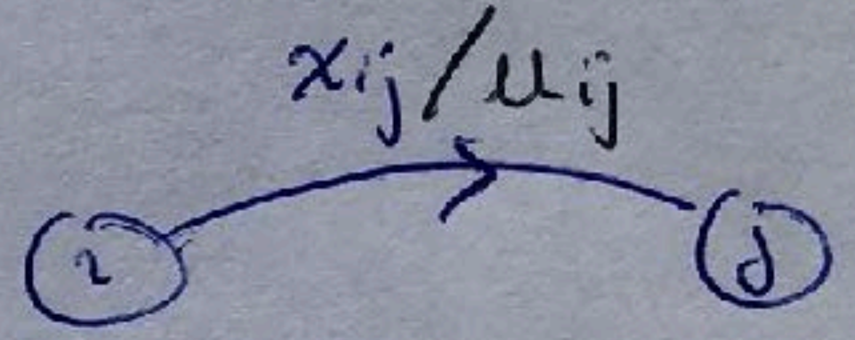
Problema (Flujo Máximo) [MAXFLOW]

Dados una red capacitada $R=(V,A,u)$
un nodo fuente $s\in V$
un nodo sumidero $t\in V$

Encontrar un flujo-(s,t) cuyo valor sea máximo.

Idea: Construir un flujo "por caminos"



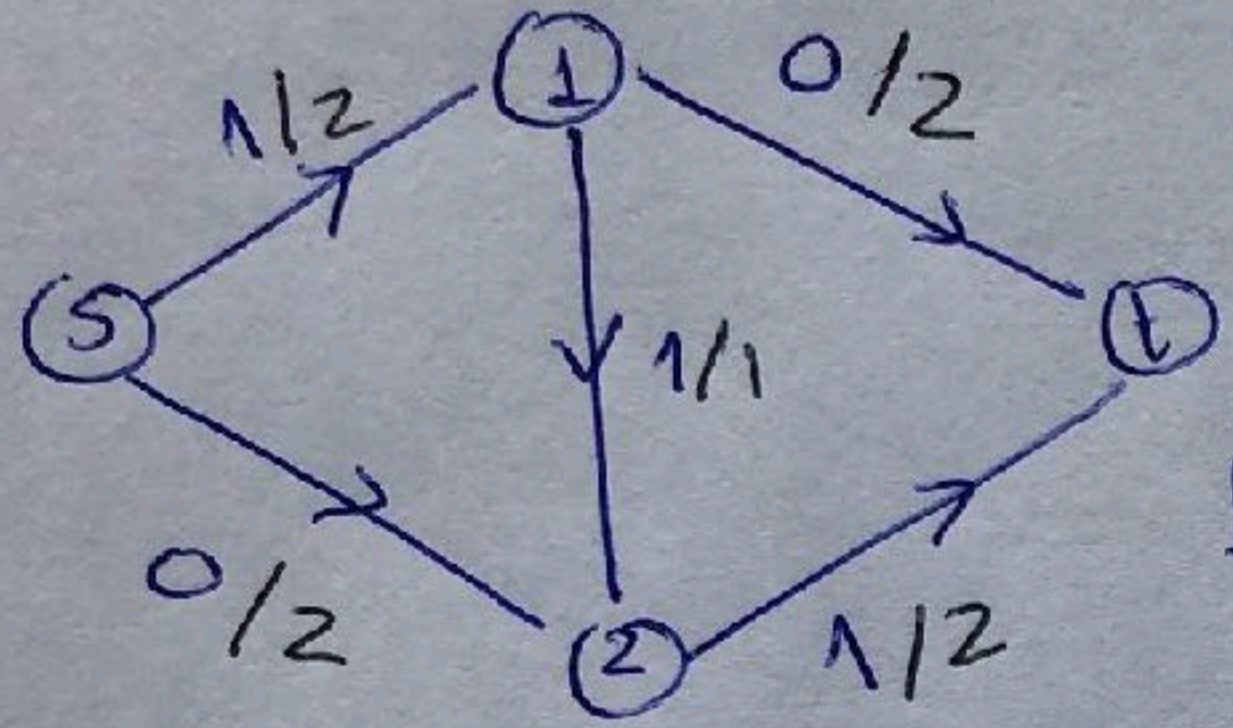


$f_x(t)=0$

P_1: $s,(s,1),1,(1,2),2,(2,t),t$ $\qquad$ $\min\{u_{s1},u_{12},u_{2t}\}=1$

"Enviamos una unidad de flujo por P_1"

②



$f_x(t) = 1$

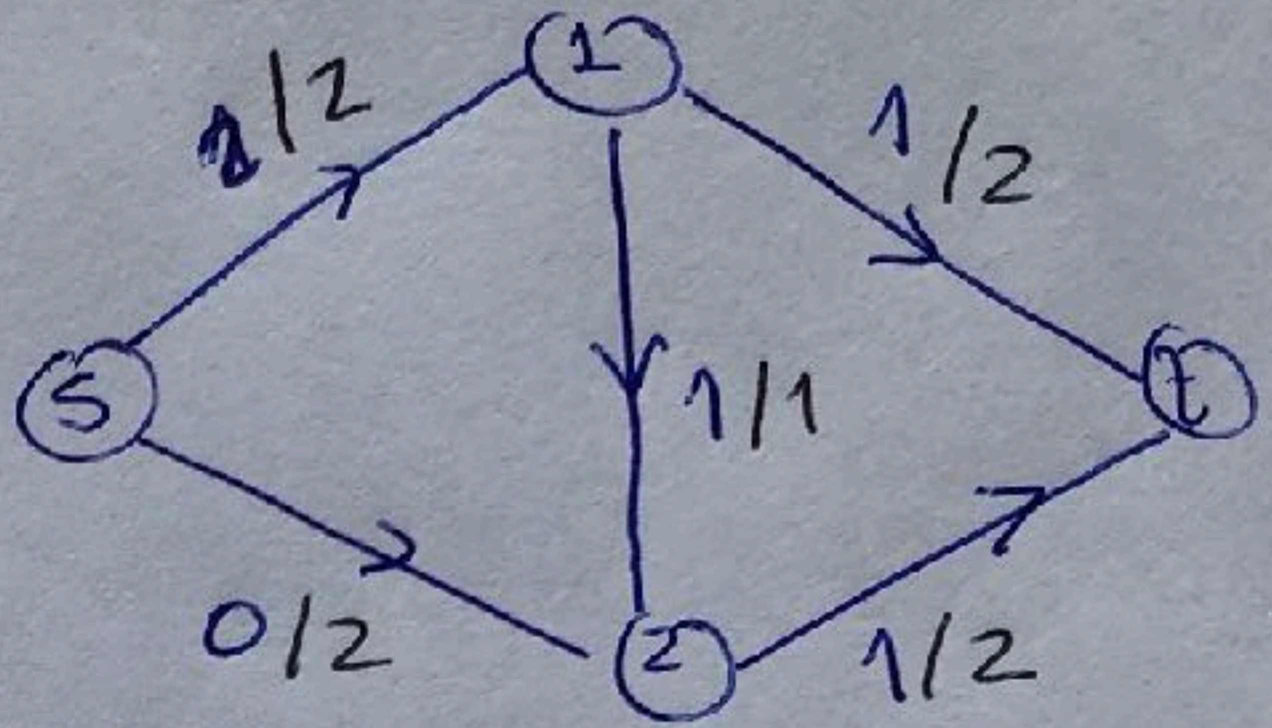
$P_2 = s, (s,1), 1, (1,t), t$

$\text{mín}\{u_{s1} - x_{s1}, u_{1t} - x_{1t}\}$

$= \text{mín}\{2-1, 2-0\} = 1$

"Enviamos 1 unidad de flujo por P_2"

③



$f_x(z) = 2$

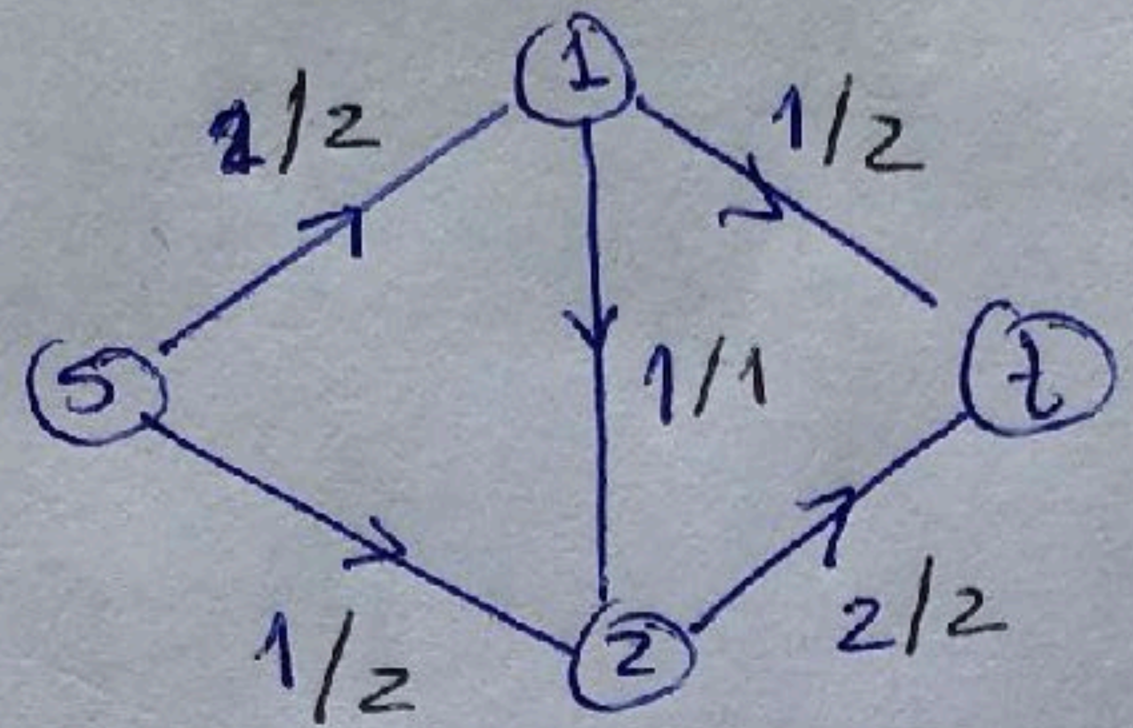
$P_3 = s, (s,2), 2, (2,t), t$

$\text{mín}\{u_{s2} - x_{s2}, u_{2t} - x_{2t}\}$

$= \text{mín}\{2-0, 2-1\} = 1$

"Enviamos una unidad de flujo por P_3."

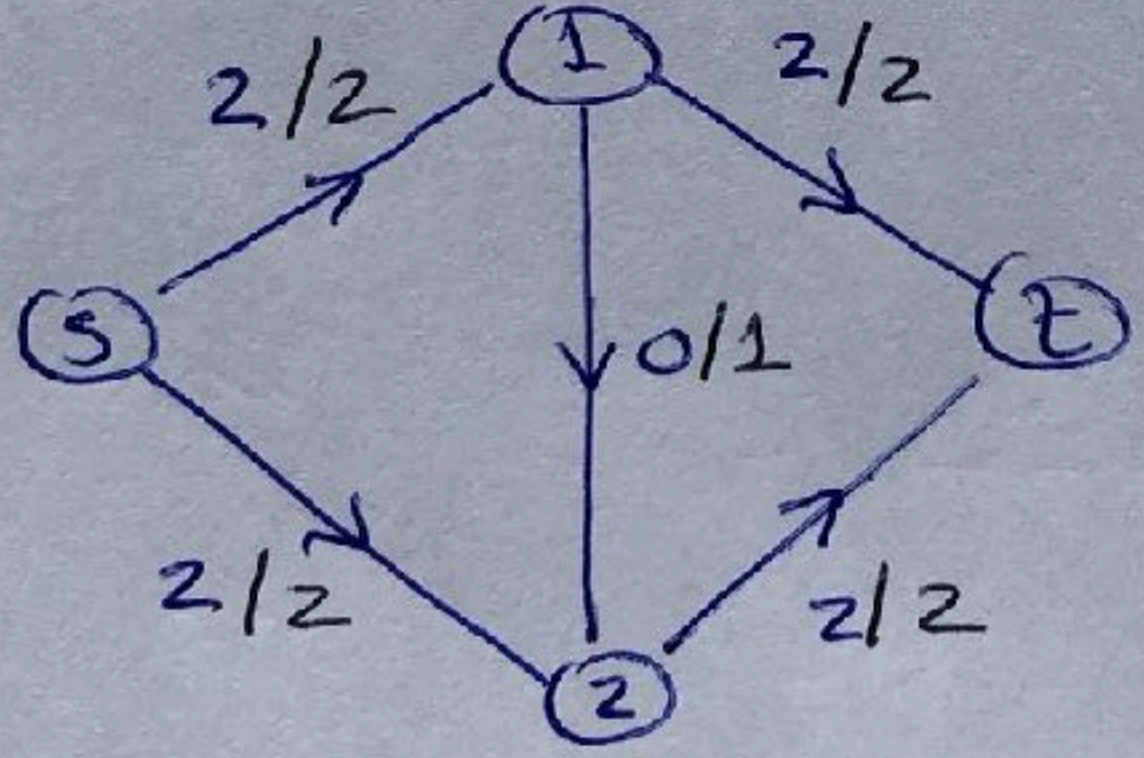
(4)



$f_x(t) = 3$

Todos los caminos de s a t contienen al menos un arco saturado (un arco con $x_{ij} = u_{ij}$). No es posible seguir aumentando el flujo de esta manera.

Sin embargo, el último flujo obtenido NO es el flujo de valor máximo:



$f_x(t) = 4$

¿Puede mejorarse esta idea?

2.2. FLUJOS VERSUS CORTES

Definición: Corte-(s,t)

Sea $D=(V,A)$ y $W \subseteq V$. Los cortes entrante y saliente de W son los conjuntos de arcos

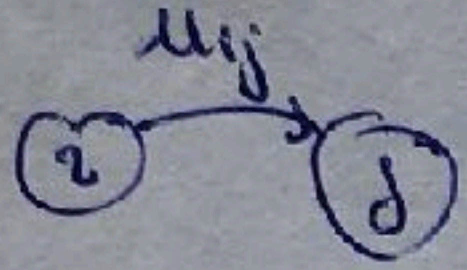
$$\delta^{-}(W) := \{(i,j) \in A \mid i \notin W \wedge j \in W\} \quad \text{(corte entrante)}$$

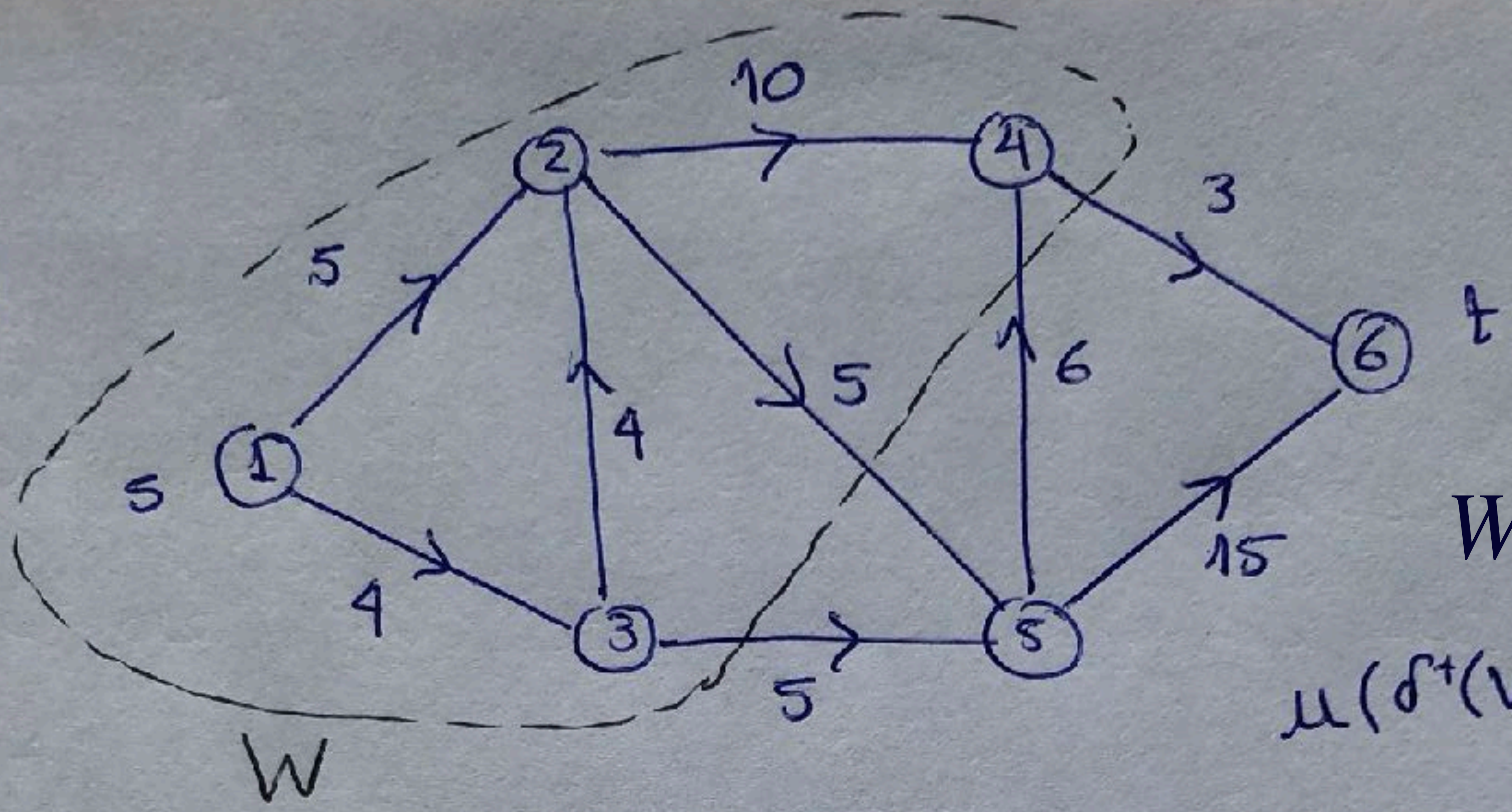
$$\delta^{+}(W) := \{(i,j) \in A \mid i \in W \wedge j \notin W\} \quad \text{(corte saliente).}$$

Si $R=(V,A,u)$ es una red capacitada, $s,t \in V$, y $W \subseteq V$ con $s \in W \wedge t \notin W$, decimos que $\delta^{+}(W)$ es un corte-(s,t). La capacidad de este corte es:

$$u(\delta^{+}(W)) := \sum_{(i,j)\in\delta^{+}(W)} u_{ij}$$

Ejemplo





$W = \{1,2,3,4\}$

$\mu(\delta^+(W)) = 3+5+5 = 13$

Proposición 2.3.

Sean $R=(V,A,\mu)$ una red capacitada, $s,t \in V$, $x \in \mathbb{R}^A_+$ un flujo-(s,t) y $W \subseteq V$ con $s \in W$, $t \notin W$. Entonces,

$$f_x(t) \leq \mu(\delta^+(W))$$

Demostración: Notar que, por la Proposición 2.2:

$$f_x(t) = -f_x(s) \quad , \quad \text{pues } f_x(i)=0, \ \forall\, i \in V \setminus \{s,t\}.$$

Luego,

$$\sum_{i\in W} f_x(i) = f_x(s) = -f_x(t),$$

y por tanto,

$$f_x(t) = -\sum_{i\in W} f_x(i) = -\sum_{i\in W}\left(\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}\right)$$

$$= -\cancel{\sum_{(j,i)\in A[W]} x_{ji}} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(W)} x_{ji} + \cancel{\sum_{(i,j)\in A[W]} x_{ij}} + \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} x_{ij}$$

Donde $A[W] := \{(i,j)\in A \mid i\in W,\ j\in W\}$

$\Rightarrow$

$$f_x(t) = \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} x_{ij} - \underbrace{\sum_{(j,i)\in\delta^-(W)} x_{ji}}_{\geq 0} \leq \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} \overbrace{x_{ij}}^{\leq u_{ij}} \leq \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} u_{ij}$$

$$= u(\delta^+(W)).$$

Notar que el número de cortes-(s,t) en una red es finito. Por lo tanto, de la Proposición 2.3. se sigue como corolario:

$$\max\{f_x(t) \mid x \text{ es flujo-}(s,t)\} \leq \min\{u(\delta^+(W)) \mid \delta^+(W) \text{ es corte-}(s,t)\}$$

(T. Dualidad Débil)

2.3. TEOREMA DE FLUJO MÁXIMO – CORTE MÍNIMO

Definición (Capacidad de una cadena, cadenas aumentantes)

Sean

$$P: s = i_0, a_1, i_1, \ldots, a_k, i_k = t$$

una cadena desde s hasta t en la red capacitada $R = (V, A, u)$, y $x \in \mathbb{R}_+^A$ un flujo-(s,t) en R.

La capacidad $\varepsilon(P)$ de P se define por:

$$\varepsilon(P) := \min \left\{ \min\{u_{ij} - x_{ij} \mid (i,j) \in A^+(P)\}, \min\{x_{ij} \mid (i,j) \in A^-(P)\} \right\}$$

Notar que $\varepsilon(P) \geq 0$. (Por qué?)

Si $\varepsilon(P) > 0$, decimos que P es una cadena x-aumentante.

Lema 2.4.

Sean x un flujo-(s,t) y P una cadena x-aumentante.
Entonces $\bar{x} \in \mathbb{R}^A$ definido por

$$\bar{x}_{ij} := \begin{cases} x_{ij} + \varepsilon(P), & \text{si } (i,j) \in A^+(P) \\ x_{ij} - \varepsilon(P), & \text{si } (i,j) \in A^-(P) \\ x_{ij}, & \text{si } (i,j) \notin A(P) \end{cases}$$

es un flujo-(s,t) y su valor es $f_{\bar{x}}(t) = f_x(t) + \varepsilon(P) > f_x(t)$

Demostración

Verifiquemos primero que $\bar{x}$ satisface las condiciones de conservación de flujo y capacidad:

(i) Conservación de flujo:

Sea $i \in V \setminus \{s,t\}$. Si i no es un nodo de P, entonces

$f_{\bar{x}}(i) = f_x(i) = 0.$

Si i es un nodo de P, hay cuatro casos posibles: Sean a_i^- y a_i^+ los arcos que anteceden y siguen a i en la cadena P.

a) $a_i^- \in A^+(P)$, $a_i^+ \in A^+(P)$

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, "a_i^-", "\bar{x}_{ji} = x_{ji} + \varepsilon(P)"'] & i \arrow[r, "a_i^+", "\bar{x}_{ik} = x_{ik} + \varepsilon(P)"'] & k \end{tikzcd}$$

$a_i^- \in \delta^-(i)$

$a_i^+ \in \delta^+(i)$

Luego, $$f_{\bar{x}}(i) = \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} \bar{x}_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} \bar{x}_{ij}$$

$$= \underbrace{\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} + \varepsilon(P)} - \left(\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} + \varepsilon(P) \right) = f_x(i) = 0$$

$\bar{x}_{ji} = x_{ji}$ se cumple $\forall (j,i) \in \delta^-(i)$, excepto para a_i^-. Para este arco se tiene

$$\bar{x}_{a_i^-} = x_{a_i^-} + \varepsilon(P)$$

b) $a_i^- \in A^+(P)$, $a_i^+ \in A^-(P)$
c) $a_i^- \in A^-(P)$, $a_i^+ \in A^+(P)$ (Ejercicios)
d) $a_i^- \in A^-(P)$, $a_i^+ \in A^-(P)$

(ii) Capacidad:

Sea $(i,j) \in A$. Si $(i,j) \notin A(P)$, entonces $\bar{x}_{ij} = x_{ij}$ y por tanto $0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij}$.

Si $(i,j) \in A^+(P)$, entonces

$$0 \leq x_{ij} \underset{\uparrow_{\varepsilon(P) \geq 0}}{\leq} \bar{x}_{ij} = x_{ij} + \varepsilon(P) \underset{\uparrow_{\varepsilon(P) \leq \min\{u_{ij} - x_{ij} \mid (i,j) \in A^+(P)\}}}{\leq} x_{ij} + u_{ij} - x_{ij} = u_{ij}$$

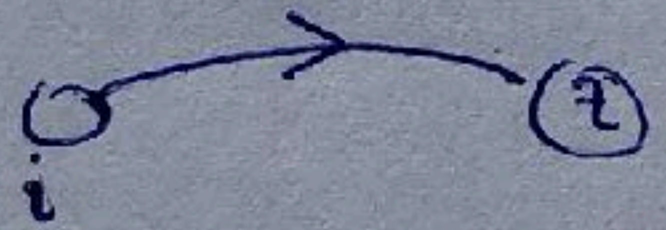
Si $(i,j) \in A^-(P)$, entonces

$$0 = x_{ij} - x_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon(P) \le \min\{x_{ij} \mid (i,j) \in A^-(P)\}}}{\le} \bar{x}_{ij} = x_{ij} - \varepsilon(P) \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon(P) \ge 0}}{\le} x_{ij} \le u_{ij}$$

Por lo tanto, $\bar{x}$ es un flujo-(s,t).

Veamos ahora que $f_{\bar{x}}(t) = f_x(t) + \varepsilon(P)$. Sea a_k el último arco de P. Consideremos dos casos

(i) $a_k \in A^+(P)$



$\Rightarrow a_k = (i,t)$, para algún $i \in V$. Además, $\bar{x}_{it} = x_{it} + \varepsilon(P)$ y $(i,t) \in \delta^-(t)$.

Notar que ningún otro arco $(i,j) \in \delta(t)$ pertenece a P.

Luego, $$f_{\bar{x}}(t) = \sum_{(j,t)\in\delta^-(t)} \bar{x}_{jt} - \sum_{(t,j)\in\delta^+(t)} \bar{x}_{tj} = \sum_{(j,t)\in\delta^-(t)} x_{jt} - \sum_{(t,j)\in\delta^+(t)} x_{tj} + \varepsilon(P)$$

$$\Rightarrow f_{\bar{x}}(t) = f_x(t) + \varepsilon(P)$$

(ii) $a_k \in A^-(P)$. $\quad i \longleftarrow t$

(Ejercicio)

$$\Rightarrow f_{\bar{x}}(t) = f_x(t) + \varepsilon(P) \underset{\varepsilon(P)>0}{\underset{\uparrow}{>}} f_x(t)$$

<u>Corolario</u>: Si x es un flujo-(s,t) y existe una cadena x-aumentante de s a t, entonces x NO es un flujo máximo.

Lema 2.6.

Dados una red capacitada $R=(V,A,u)$, dos nodos $s,t\in V$ y un flujo-(s,t) $x\in\mathbb{R}^A$,

si no existe ninguna cadena x-aumentante de s a t $\Rightarrow$ $\exists\ W\subseteq V$, con $s\in W$, $t\notin W$ t.q.

$$u(\delta^+(W)) = f_x(t).$$

Dem:

Sean $R=(V,A,u)$ una red capacitada, $s,t\in V$ y $x\in\mathbb{R}^A$ un flujo-(s,t). Suponer además que no existe en la red ninguna cadena aumentante que inicie en s y termine en t.

Definimos el conjunto de nodos:

$$W := \{ i\in V \mid \text{existe una cadena aumentante de } s \text{ a } i \} \cup \{s\}$$

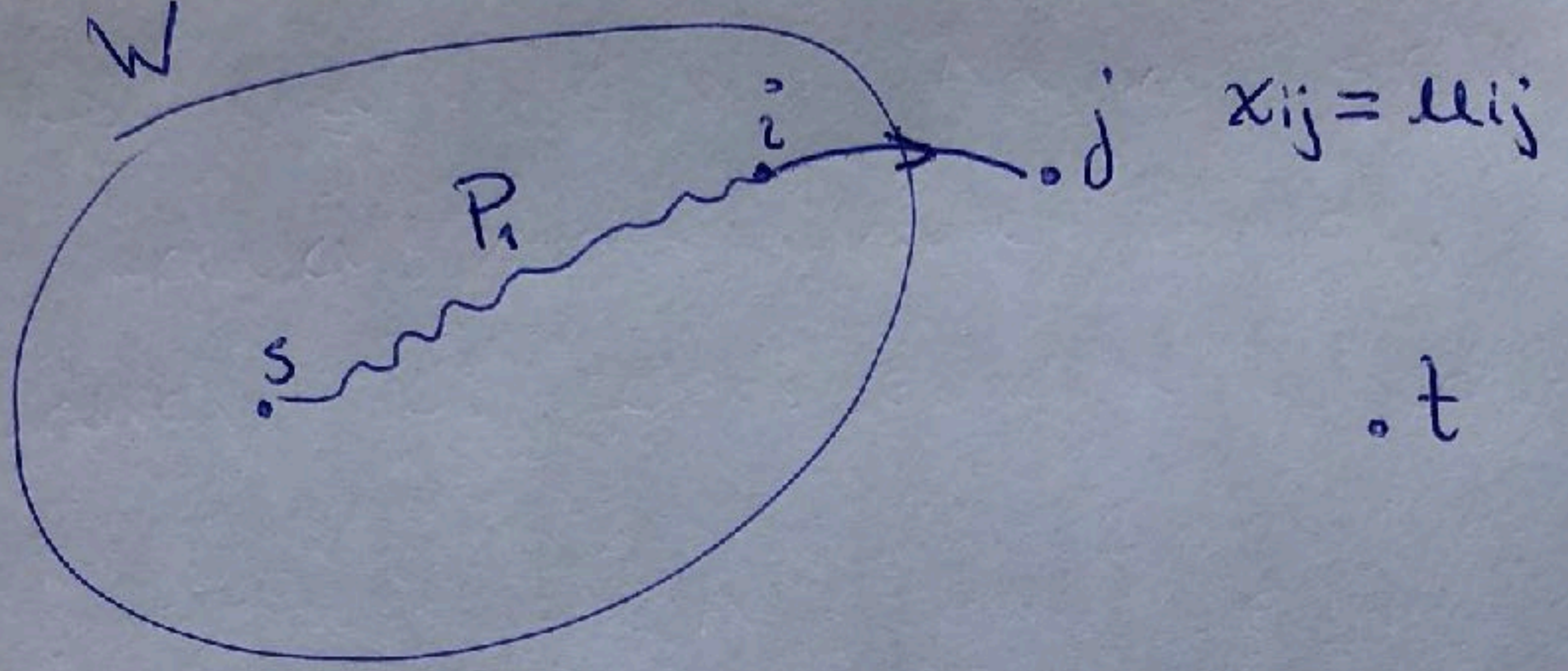
Tenemos que $t \notin W$. Además $s \in W$ por construcción.

Considerar los cortes entrante y saliente asociados a W:

$$\delta^-(W) := \{(i,j) \in A \mid i \notin W,\ j \in W\} \quad \text{(corte entrante a } W\text{)}$$

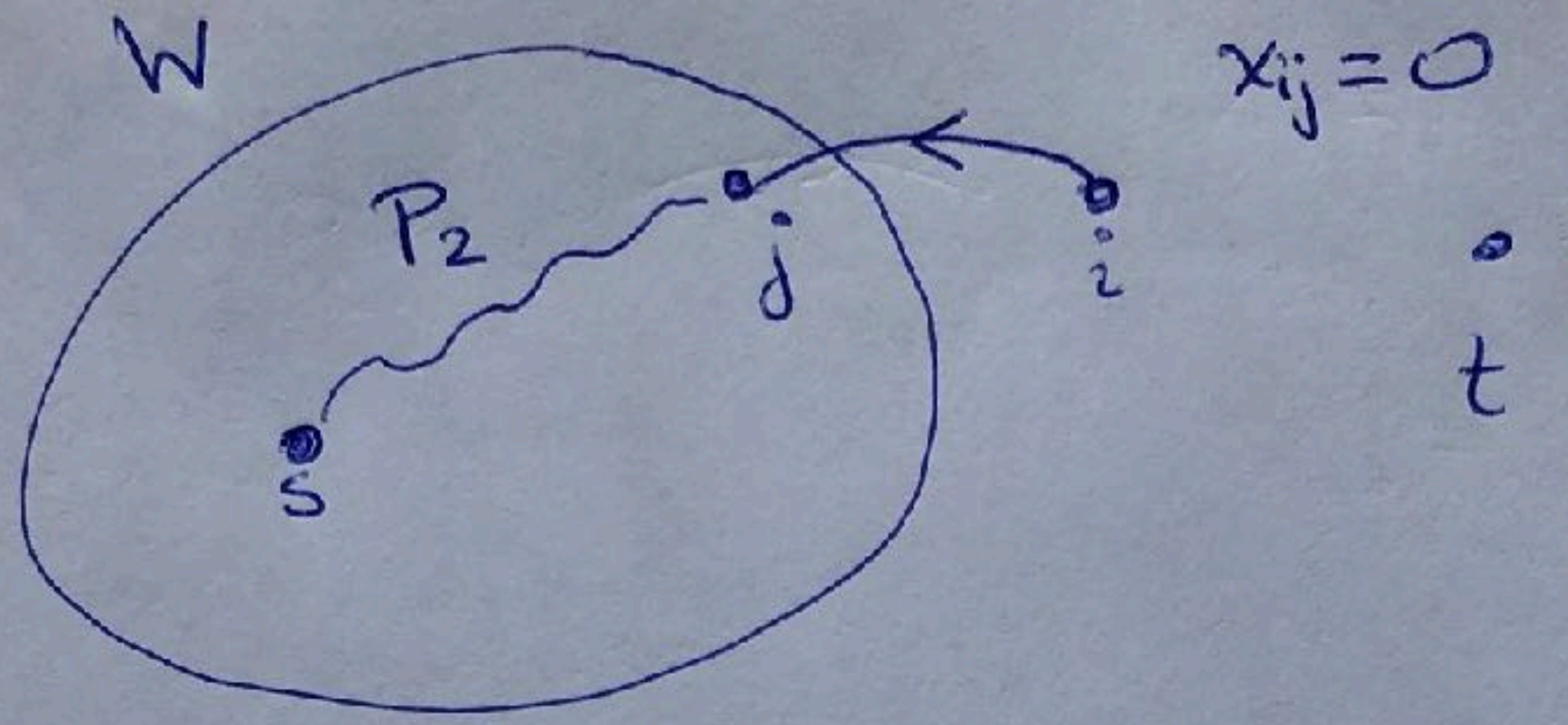
$$\delta^+(W) := \{(i,j) \in A \mid i \in W,\ j \notin W\} \quad \text{(corte saliente de } W\text{)}.$$

Sea $(i,j) \in \delta^+(W)$. Como $i \in W$, conocemos que existe una cadena x-aumentante P_1 desde s hasta i. Si $x_{ij} < u_{ij}$, entonces es posible extender P_1 con el arco (i,j) como un nuevo arco hacia adelante. Obtenemos así una nueva cadena $\hat{P}_1$ desde s hasta j cuya capacidad es $\varepsilon(\hat{P}_1) := \min\{\varepsilon(P_1),\ u_{ij} - x_{ij}\} > 0$. Es decir, $\hat{P}_1$ es una cadena aumentante y por tanto $j \notin W$ $\lightning$



Luego, $x_{ij} = u_{ij}$, $\forall\ (i,j) \in \delta^+(W)$. [*]

De manera similar, sea $(i,j) \in \delta^-(W)$, lo que significa que $i \notin W$ y $j \in W$. Luego, existe una cadena x-aumentante P_2 desde s hasta j. Si $x_{ij} > 0$, entonces es posible extender P_2 con el arco en reversa (i,j) para construir una cadena $\hat{P}_2$ desde s hasta i. La capacidad de esta cadena es $\varepsilon(\hat{P}_2) = \min\{\varepsilon(P_2), x_{ij}\} > 0$. Por tanto, $\hat{P}_2$ es cadena x-aumentante y se tiene $i \in W$ $\lightning$.



Luego, $x_{ij}=0$, $\forall\ (i,j)\in\delta^-(W)$. [**]

Finalmente, en la demostración de la Proposición 2.3. establecimos que

$$f_x(t) = -\sum_{i\in W} f_x(i) = \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\delta^-(W)} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} u_{ij} = u(\delta^+(W))$$

$f_x(t)=-f_x(s)$

Por qué?

[*] y [**]

En virtud de la Proposición 2.3., obtenemos como corolario

Teorema 2.7. (Flujo máximo - Corte mínimo)

Sean $R=(V,A,u)$ una red capacitada y $s,t \in V$.
Entonces,

$$\max\{f_x(t) \mid x \text{ es flujo-}(s,t)\} = \min\{u(\delta^+(W)) \mid \delta^+(W) \text{ es corte-}(s,t)\}$$

(T. Dualidad Fuerte)

Además,

$f_x(t)$ es máximo $\Longleftrightarrow$ no existen cadenas x-aumentantes de s a t (toda cadena de s a t tiene capacidad igual a cero)

2.4. ALGORITMO DE LA CADENA AUMENTANTE

Algoritmo (Ford-Fulkerson, 1956)

Entrada: $R=(V,A,u)$

$s,t\in V$

Salida : $x\in\mathbb{R}^A$, x flujo-(s,t) máximo

$x_{ij}:=0$, $\forall (i,j)\in A$.

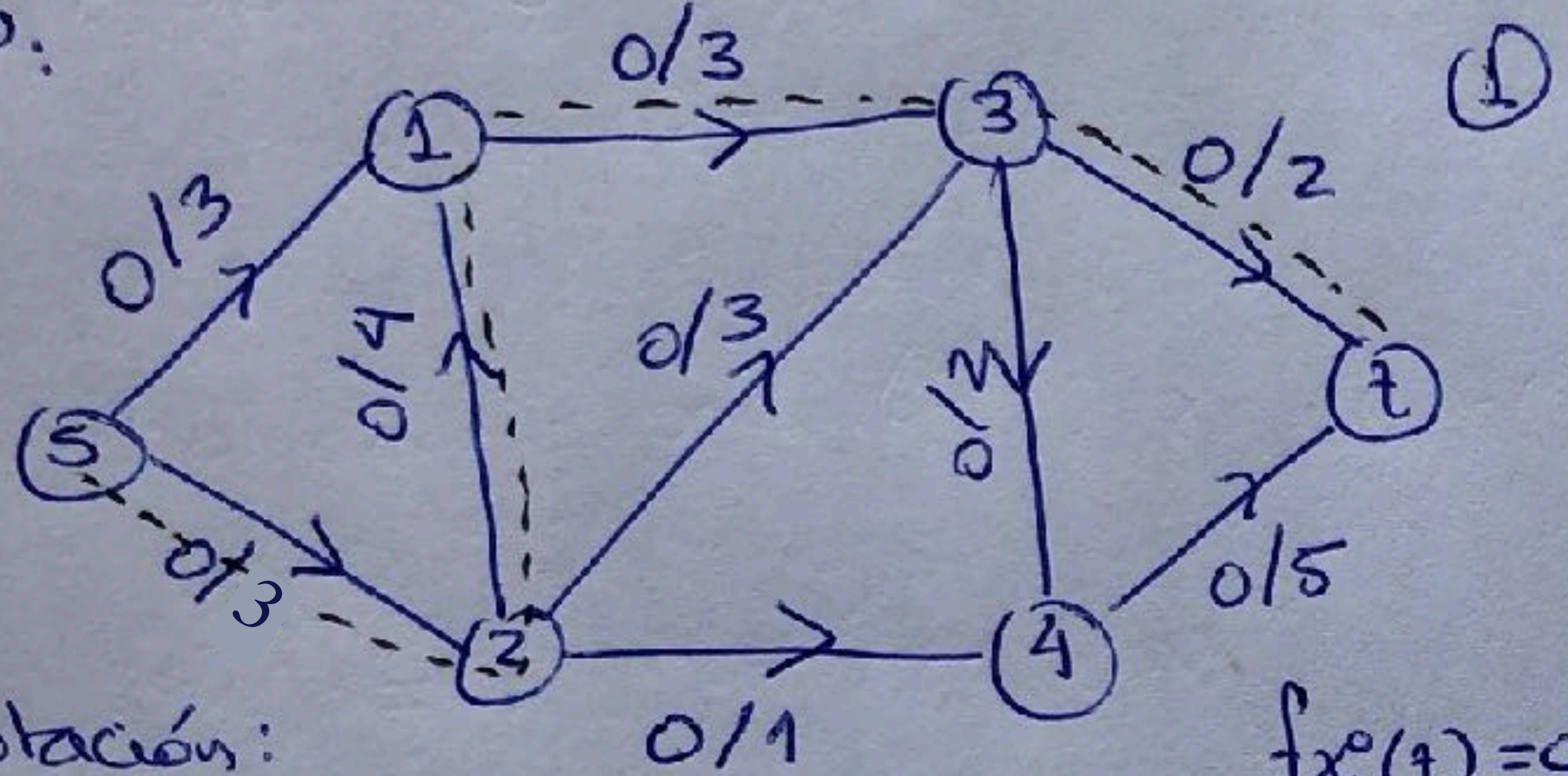
Mientras exista cadena x-aumentante P de s a t:

$$x_{ij}:=\begin{cases} x_{ij}+\varepsilon(P) & ,\ \text{si } (i,j)\in A^+(P) \\ x_{ij}-\varepsilon(P) & ,\ \text{si } (i,j)\in A^-(P) \\ x_{ij} & ,\ \text{si } (i,j)\notin A(P). \end{cases}$$

Ejemplo:

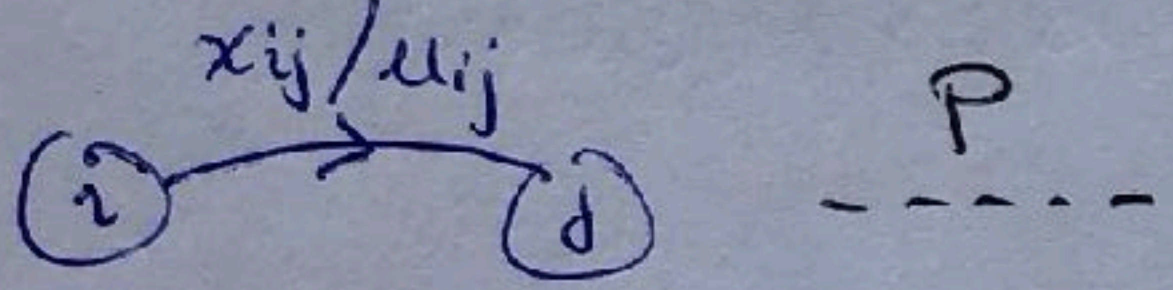
Considerar la red:

x^0:



$f_{x^0}(t) = 0$

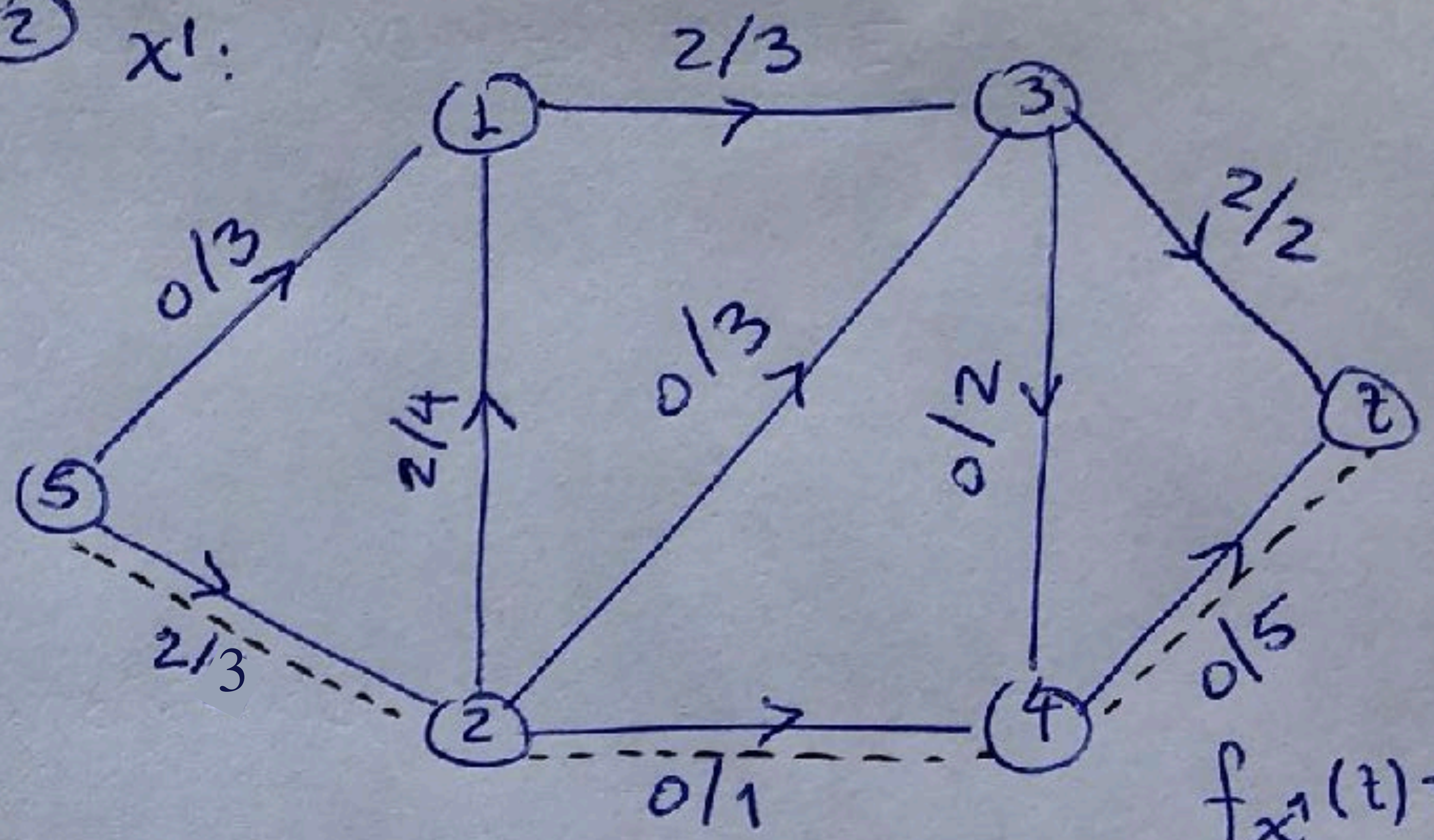
Notación:



P_1: s, (s,2), 2, (2,1), 1, (1,3), 3, (3,t), t

$\varepsilon(P_1) = \min\{3, 4, 3, 2\} = 2$

② x^1:



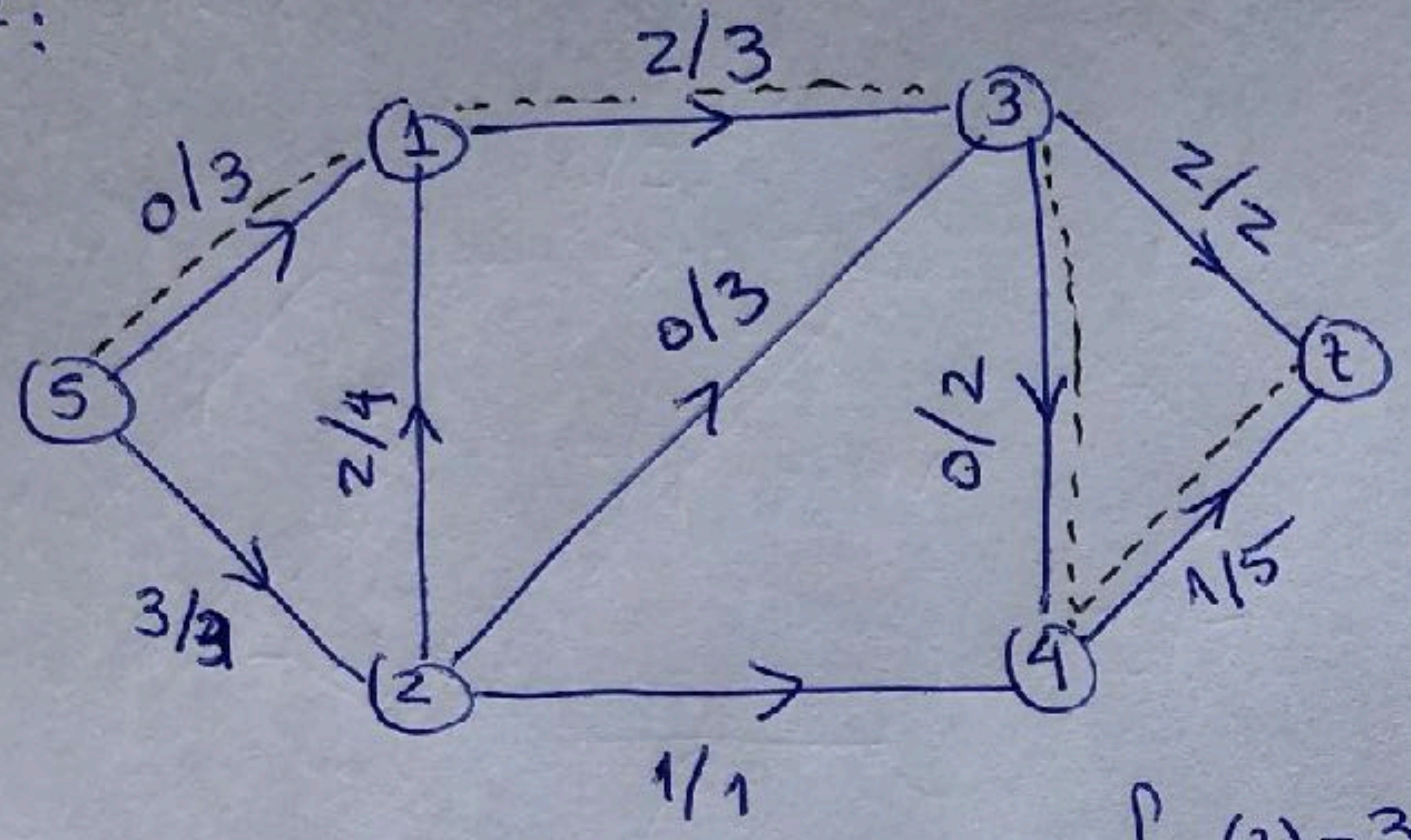
$f_{x^1}(t) = 2$

P_2: s, (s,2), 2, (2,4), 4, (4,t), t

$\varepsilon(P_2) = \min\{1, 1, 5\} = 1$

(3)

x^2:



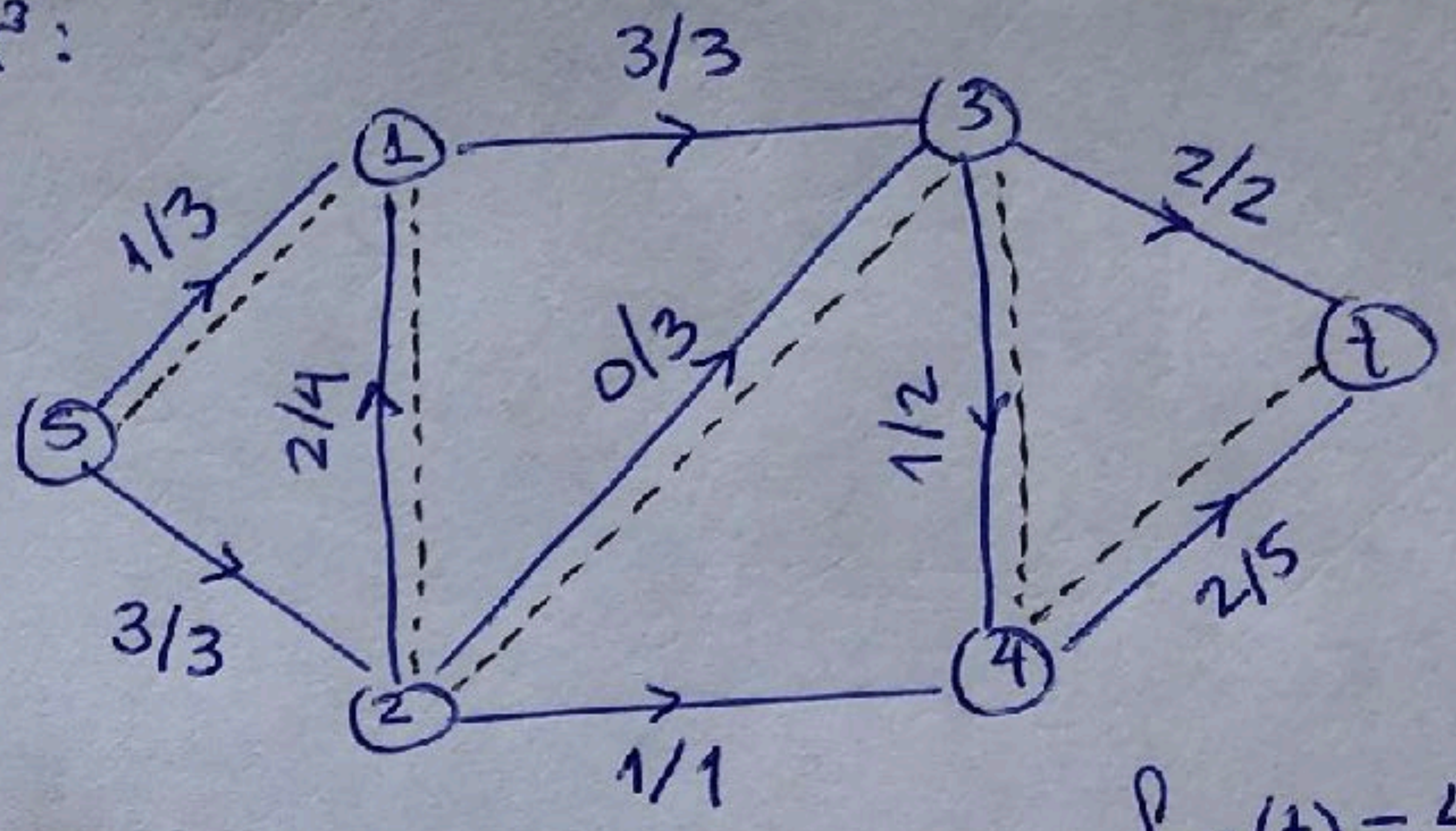
$f_{x^2}(t) = 3$

P_3: s, (s,1), 1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,t), t

$\varepsilon(P_3) = \min\{3, 1, 2, 4\} = 1$

(4)

x^3:



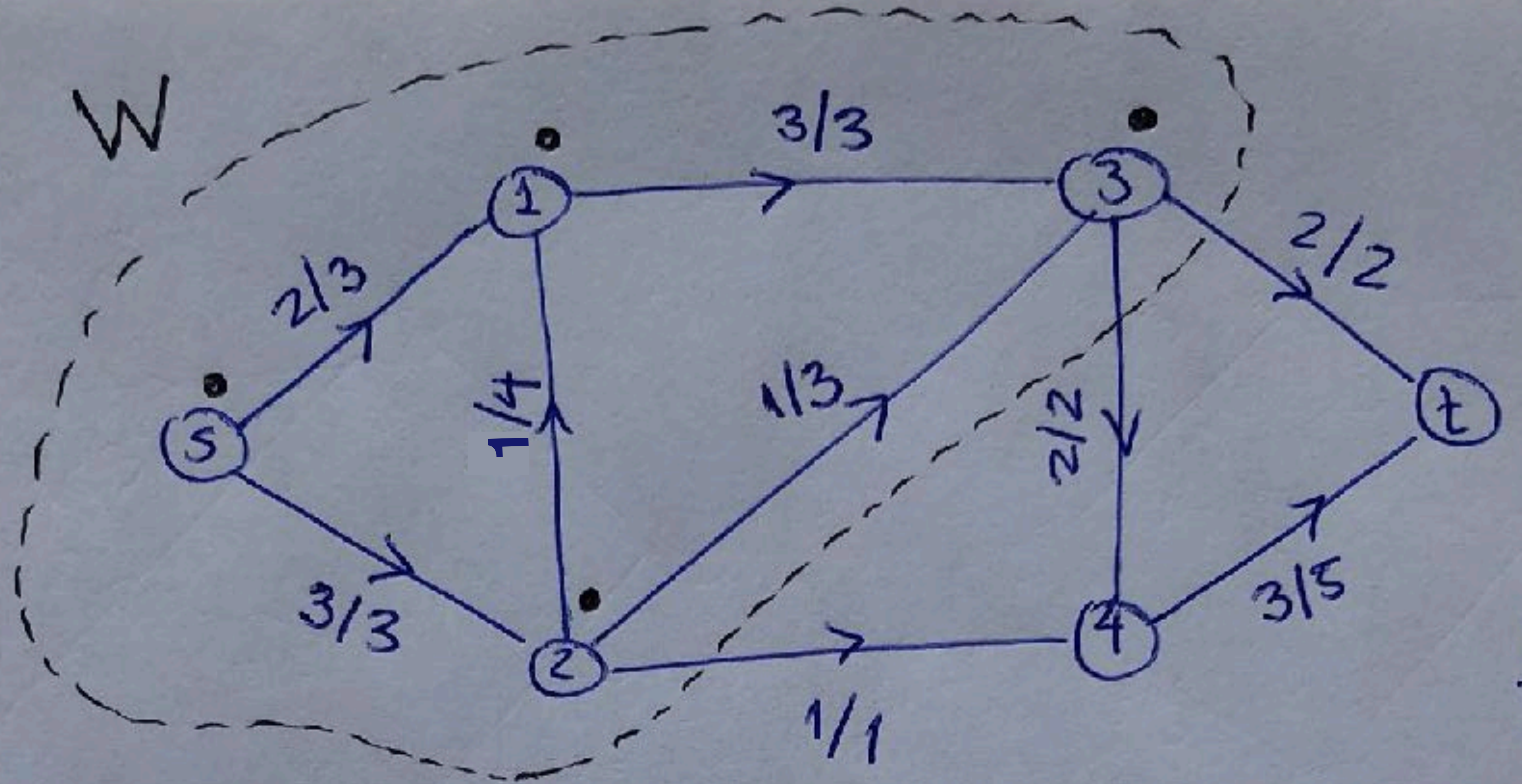
$f_{x^3}(t) = 4$

P_4: s, (s,1), 1, (2,1), 2, (2,3), 3, (3,4), 4, (4,t), t

$\varepsilon(P_4) = \min\{2, 2, 3, 1, 3\} = 1$

5

x^4:



$f_{x^4}(t) = 5$

Notación:

$\bullet$ (i) : existe cadena x-aumentante de s hasta el nodo i

$$u(\delta^+(W)) = 2 + 2 + 1 = 5 = f_{x^4}(t)$$

$\Rightarrow x^4$ es flujo óptimo

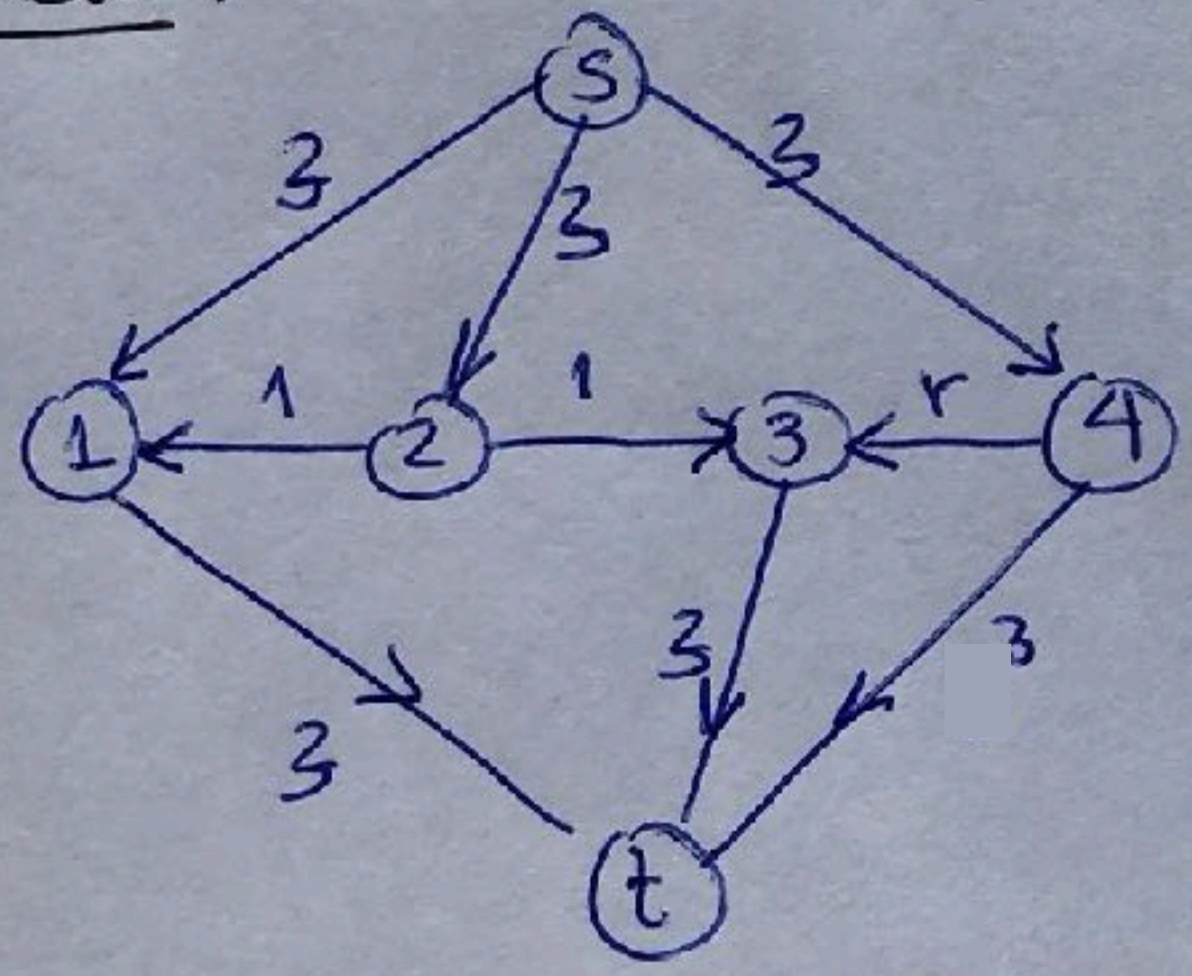
Validez del algoritmo de Ford-Fulkerson

Está claro que si el algoritmo termina, retorna un flujo óptimo, pues ya no existen cadenas x-aumentantes.

Pero... <u>termina?</u>

No necesariamente en un caso general...

Ejercicio:



$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, notar que $r^2 = 1 - r$

Sean:

P_0: $s, (s,2), 2, (2,3), 3, (3,t), t$

P_A: $s, (s,4), 4, (4,3), 3, (2,3), 2, (2,1), 1, (1,t), t$

P_B: $s, (s,2), 2, (2,3), 3, (4,3), 4, (4,t), t$

P_C: $s, (s,1), 1, (2,1), 2, (2,3), 3, (3,t), t$

Aplicar: $P_0, P_A, P_B, P_A, P_C, P_A, P_B, P_A, P_C, \ldots$

$$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$$

P_A :	$0/1$	$1/1$	$\boxed{0/r}$	$\varepsilon = r$	
P_B :	$r/1$	$\boxed{r^2/1}$	$\boxed{r/r}$	$\varepsilon = r$	$1-r=r^2$
P_A :	$\boxed{r/1}$	$1/1$	$0/r$	$\varepsilon = r^2$	
P_B :	$1/1$	$\boxed{r/1}$	r^2/r	$\varepsilon = r^2$	
P_A :	$r/1$	$1/1$	$\boxed{r^2/r}$	$\varepsilon = r^3$	$r-r^2=r^3$
P_B :	$r+r^3/1$	$\boxed{1-r^3/1}$	r/r	$\varepsilon = r^3$	
P_A :	$\boxed{r+r^3/1}$	$1/1$	r^2/r	$\varepsilon = r^4$	$1-r-r^3 = r^2-r^3 = r^4$

El valor del flujo construido por el algoritmo converge a:

$$\lim_{n\to\infty} f_{x^n}(t) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r^i = 2\sum_{i=0}^{\infty} r^i - 1 = \frac{1+r}{1-r} = 2+\sqrt{5}$$

El valor del flujo óptimo es 7.

Lema 2.8.

Dados $R=(V,A,u)$ y $s,t\in V$, si $u\in\mathbb{Z}_+^A$ (las capacidades son valores enteros), entonces el algoritmo de Ford-Fulkerson termina en máximo K iteraciones, con $K:=\sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\in\mathbb{Z}$.

Dem:

Sea $\overline{W}\subseteq V$, con $s\in\overline{W}$, $t\notin\overline{W}$ y $u(\delta^+(\overline{W}))=\min\{u(\delta^+(W)) \mid W \text{ es corte-}(s,t)\}$. Por el Teorema 2.7., el flujo máximo $\bar{x}$ de s a t tiene el valor $f_{\bar{x}}(t)=u(\delta^+(\overline{W}))=\sum_{(i,j)\in\delta^+(\overline{W})} u_{ij}\leq\sum_{(i,j)\in A} u_{ij}=K$.

Por otra parte, como todas las capacidades son enteras, se tiene que $\varepsilon(P)\in\mathbb{Z}$ para cualquier cadena x-aumentante P. (Por qué?)

Pero entonces,

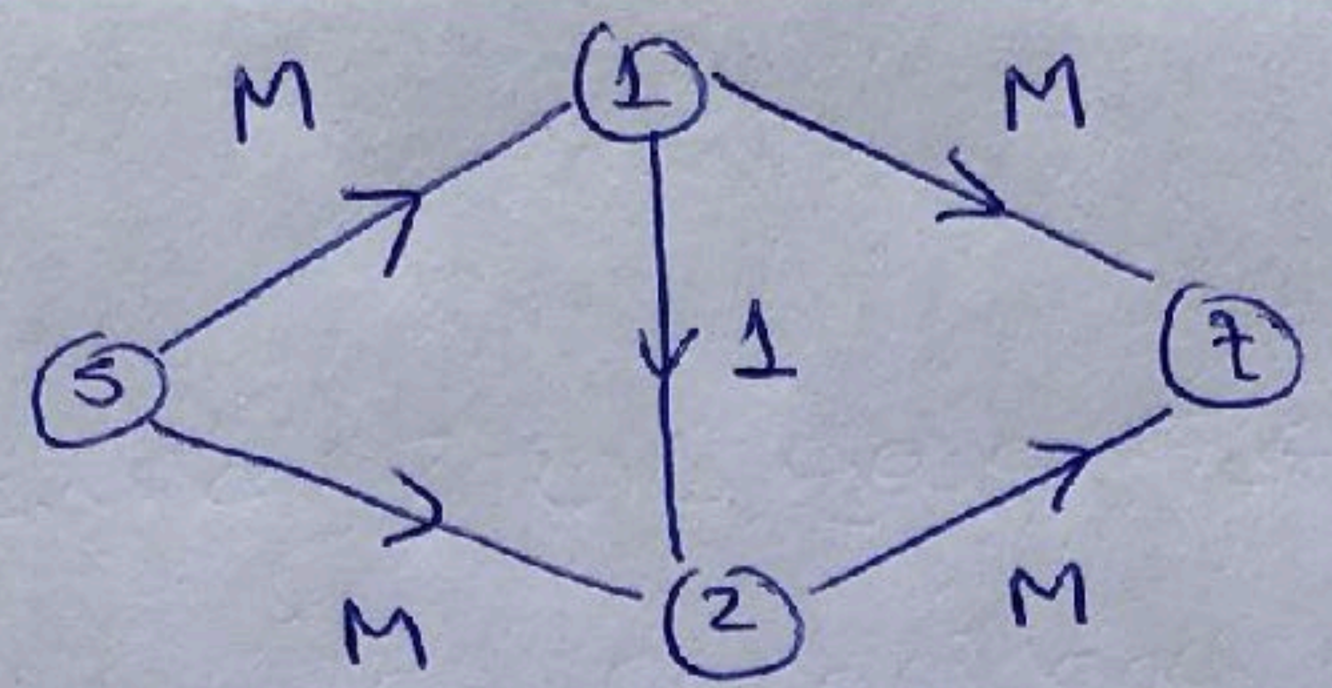
$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(P) > 0 \\ \varepsilon(P) \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon(P) \geq 1.$$

Es decir, en cada iteración el flujo aumenta su valor por lo menos en una unidad. Luego, el algoritmo termina máximo en K iteraciones.

Eficiencia del algoritmo de Ford-Fulkerson

Aunque el Lema 2.8. garantiza que el algoritmo termina cuando las capacidades son enteras (o racionales), no garantiza su polinomialidad.

Consideremos el siguiente contraejemplo:



con $M \in \mathbb{Z}$

Es fácil ver que el flujo-(s,t) de valor máximo tiene un valor de $f_x(t) = 2M$.

Si el algoritmo elige alternadamente las siguientes cadenas aumentantes

P_1 : $s, (s,1), 1, (1,2), 2, (2,t), t$

P_2 : $s, (s,2), 2, (1,2), 1, (1,t), t$

aumentará el valor del flujo en una unidad en cada iteración, y requerirá por tanto de $2M$ iteraciones. Luego, el tiempo de ejecución puede crecer arbitrariamente para un "mismo" grafo.

Notar que el problema se debe (nuevamente) a una mala elección en las cadenas aumentantes: si se eligen las cadenas $s, (s,1), 1, (1,t), t$ y $s, (s,2), 2, (2,t), t$, se obtiene la solución óptima en dos iteraciones.

Esto sugiere la siguiente corrección:

Algoritmo de la cadena aumentante más corta:
(Dinits, 1970; Edmonds-Karp, 1972)

- Inicializar $x_{ij} = 0, \ \forall (i,j) \in A$
- Mientras existan cadenas x-aumentantes de s a t:
  - Elegir una cadena x-aumentante P con el menor número posible de arcos.
  - Emplear P para aumentar el flujo x

Esta versión modificada del algoritmo de Ford-Fulkerson es polinomial. Para demostrarlo, necesitamos algunos resultados previos.

Definición (Grafo auxiliar $G(x)$)

Dados una red capacitada $R=(V,A,u)$, dos nodos $s,t \in V$ y un flujo-(s,t) $x \in \mathbb{R}^A$, definimos el digrafo auxiliar $G(x)$ asociado al flujo-(s,t) x como $G(x) := (V, A(x))$, donde:

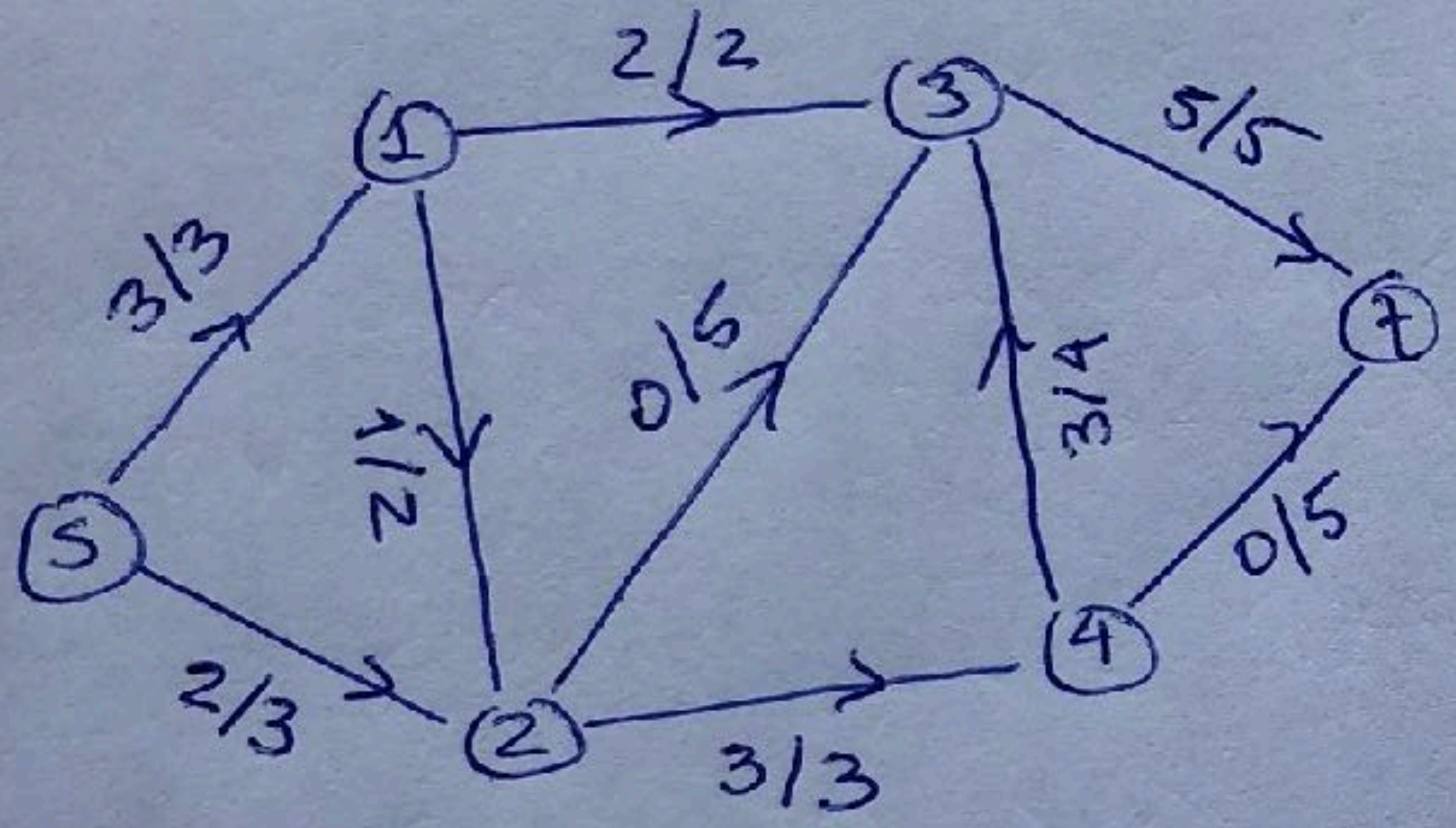
$$A(x) := A_1(x) \cup A_2(x)$$

$$A_1(x) := \{(i,j) \mid (i,j) \in A \wedge x_{ij} < u_{ij}\}$$

$$A_2(x) := \{(j,i) \mid (i,j) \in A \wedge x_{ij} > 0\}$$

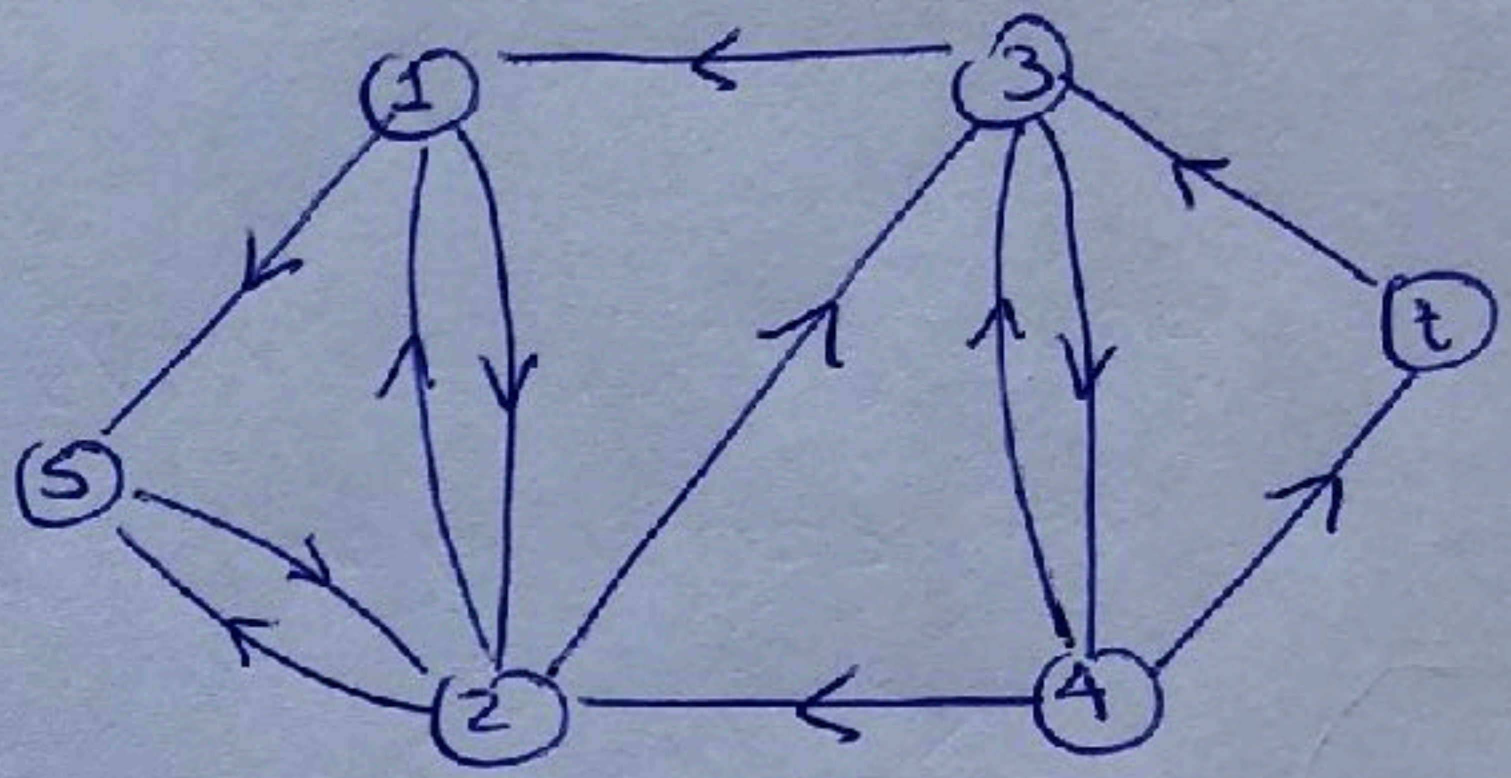
Observar que $A(x)$ puede contener arcos paralelos, si A contiene arcos antiparalelos.

Ejemplo



$R = (V, A, u)$

$x \in \mathbb{R}_+^A$



$G(x)$

Notar que las cadenas x-aumentantes en R corresponden a caminos en $G(x)$.

Notación:

En adelante, $\bar{x}$ denotará al flujo-(s,t) obtenido a partir de flujo x utilizando una cadena x-aumentante P, con el menor número posible de arcos.

$d_x(i,j)$ y $d_{\bar{x}}(i,j)$ denotan el menor número de arcos de un camino desde $i \in V$ hasta $j \in V$ en los digrafos auxiliares $G(x)$ y $G(\bar{x})$, respectivamente. (Si no existe un camino entre ambos nodos, fijamos la cantidad correspondiente a $+\infty$).

Lema 2.9.

Si $(i,j) \in A(\bar{x}) \setminus A(x)$, entonces

$$d_x(s,j) + 1 = d_x(s,i)$$

$$d_x(j,t) - 1 = d_x(i,t)$$

Dem:

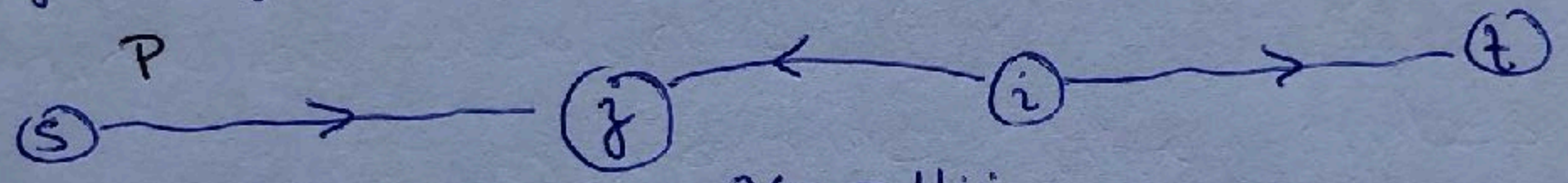
Consideremos dos casos posibles

(i) $(i,j) \in A_1(\bar{x})$

Esto significa que $(i,j) \in A$ y además $\bar{x}_{ij} < u_{ij}$.

Por otra parte, como $(i,j) \notin A(x)$ se tiene que

$x_{ij} = u_{ij}$.



$x_{ij} = u_{ij}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \varepsilon(P)$

$\bar{x}_{ij} < u_{ij}$

$\Rightarrow (i,j) \in A^-(P)$.

Por lo tanto, al pasar de x a $\bar{x}$, el flujo sobre el arco (i,j) disminuyó, lo que significa que (i,j) es un arco en reversa de la cadena P utilizada para aumentar el flujo x.

Esto implica que (j,i) es un arco de un camino de s a t en $G(x)$ con el menor número posible de arcos.

Como cualquier subcamino de un camino "más corto" (= con el menor número de arcos) es a su vez un camino más corto, se tiene que

$$d_x(s,i) = d_x(s,j) + 1$$
$$d_x(j,t) = d_x(i,t) + 1$$

(ii) $(i,j) \in A_2(\bar{x})$ [Ejercicio].

Lema 2.10.

Para $i \in V$ se cumple:

$$d_x(s,i) \leq d_{\bar{x}}(s,i)$$

$$d_x(i,t) \leq d_{\bar{x}}(i,t)$$

Dem:

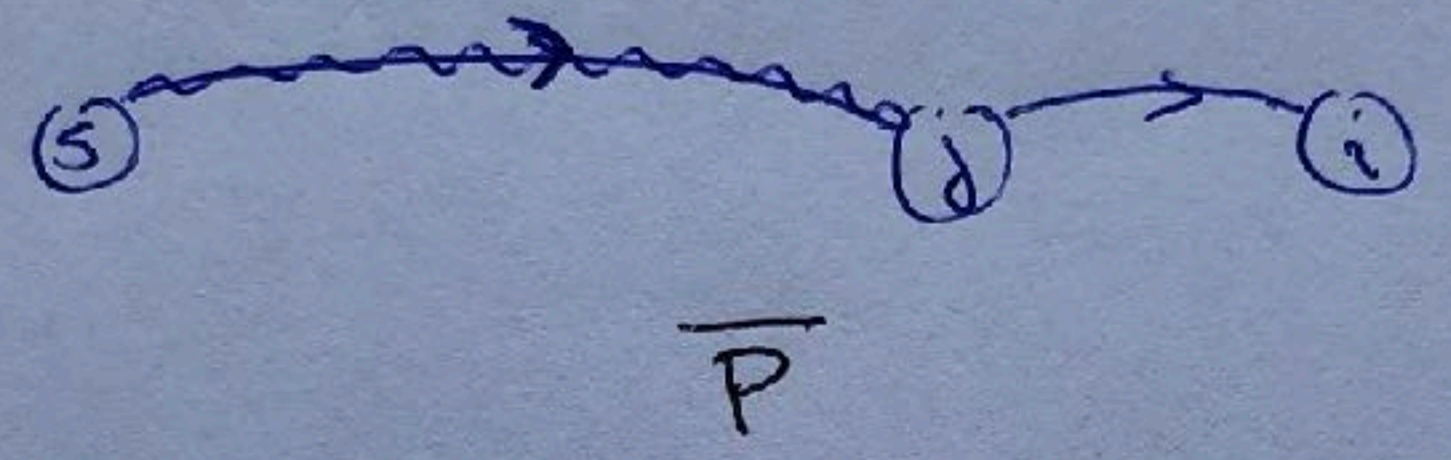
(i) P.D. : $d_x(s,i) \leq d_{\bar{x}}(s,i)$; $\forall\, i \in V$:

Supongamos que existe al menos un nodo $i \in V$ para el cual $d_x(s,i) > d_{\bar{x}}(s,i)$, y elijamos i de tal manera que $d_{\bar{x}}(s,i)$ sea mínimo.

(Notar que $d_{\bar{x}}(s,i) > 0$. ¿Por qué?)

Sea $\overline{P}$ un camino de s hasta i en $G(\bar{x})$ con $d_{\bar{x}}(s,i)$ arcos. Sea j el penúltimo nodo de este camino.

$G(\bar{x})$:



Como $d_{\bar{x}}(s,j) < d_{\bar{x}}(s,i)$, tenemos que $d_x(s,j) \leq d_{\bar{x}}(s,j)$, por la minimalidad en la elección de i.

Luego,

$$d_x(s,j) + 1 \leq d_{\bar{x}}(s,j) + 1 = d_{\bar{x}}(s,i) < d_x(s,i)$$

Esto significa que el arco (j,i) pertenece a $A(\bar{x})$, pero no a $A(x)$, pues de lo contrario se tendría que $d_x(s,i) \leq d_x(s,j) + 1$.

Pero entonces, aplicando el Lema 2.9., tenemos que $d_x(s,i) + 1 = d_x(s,j)$ y por tanto, sustituyendo en la última expresión:

$$d_x(s,j) + 1 \leq d_x(s,i) = d_x(s,j) - 1 \quad \lightning$$

Luego, $d_x(s,i) \leq d_{\bar{x}}(s,i)$, $\forall i \in V$.

(ii) P.D. $d_x(i,t) \leq d_{\bar{x}}(i,t)$, $\forall i \in V$. [Ejercicio]

Definición:

Decimos que un arco $(i, j) \in A(x)$ es crítico para x si $(i, j) \in A(x) \backslash A(\bar{x})$.

Notación:

Llamaremos x^k al flujo obtenido luego de k iteraciones del algoritmo. Definimos $d_{x^k}(s, i)$ de manera correspondiente.

Lema: 2.11

Supongamos que (i, j) es crítico en una iteración k y luego nuevamente es crítico en una iteración $h > k$. Entonces, $d_{x^h}(s, i) \geq d_{x^k}(s, i) + 2$.

Demostración:

Como (i, j) es crítico en la iteración k, entonces $(i, j) \notin A(x^{k+1})$. Para que el mismo arco sea nuevamente crítico en la iteración h debe existir (al menos) una iteración ℓ, con $k < \ell < h$ tal que $(i, j) \in A(x^{\ell}) \backslash A(x^{\ell-1})$. Aplicando los Lemas 2.9 y 2.10, concluimos entonces que:

$$d_{x^k}(s, i) + 1 = d_{x^k}(s, j) \leq d_{x^\ell}(s, j) = d_{x^\ell}(s, i) - 1 \leq d_{x^h}(s, i) - 1$$

(i, j) pertenece a la cadena aumentante para x^k

Lema 2.10

Lema 2.9

Lema 2.10

$$\Rightarrow \quad d_{x^h}(s, i) \geq d_{x^k}(s, i) + 2$$

Corolario 2.12:

Un arco $(i, j) \in A(x)$ puede ser crítico a mucho $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ veces.

Demostración:

Se sigue del hecho que $d_x(s, i) \leq n - 1$ para todo $i \in V$.

Corolario 2.13:

El algoritmo de la cadena aumentante más corta termina luego de $O(mn)$ iteraciones.

Demostración:

En cada iteración del algoritmo, al menos un arco de $G(x)$ es crítico. Por otra parte, cada grafo auxiliar $G(x)$ tiene a lo sumo $2m$ arcos, y cada uno de estos arcos puede ser crítico a lo sumo $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ veces.

Teorema 2.14:

El algoritmo de la cadena aumentante más corta calcula un flujo-(s, t) de valor máximo en $O(m^2 n)$ operaciones.

Demostración:

Del Corolario 2.13, el algoritmo termina luego de $O(mn)$ iteraciones del lazo principal. Al terminar, retorna un vector $x \in \mathbb{R}^A$ que por construcción es un flujo-(s, t) factible, para el cual no existen cadenas aumentantes. Del Teorema 2.7, se sigue que $f_x(t)$ es máximo.

Cada iteración del lazo principal consiste de:

- la búsqueda de una cadena aumentante de s a t, que puede realizarse en $O(m)$ operaciones, por ejemplo, empleando el algoritmo BFS.
- el cálculo de un nuevo flujo empleando la cadena aumentante, lo que requiere de $O(n)$ operaciones.

Luego, cada iteración del lazo principal requiere de $O(m+n) = O(m)$ operaciones, y se sigue que el algoritmo de la cadena aumentante más corta calcula un flujo-(s, t) de valor máximo en $O(m^2 n)$ operaciones.

2.5. APLICACIONES Y GENERALIZACIONES

1) Flujos con varias fuentes y sumideros

Dados:

Una red capacitada $R=(V,A,u)$

Un conjunto $S\subseteq V$ de nodos fuente

Un conjunto $T\subseteq V$ de nodos sumidero

Encontrar un flujo $x\in\mathbb{R}^A_+$ que satisfaga las restricciones

$$0\leq x_{ij}\leq u_{ij} \quad \text{(capacidad)}$$

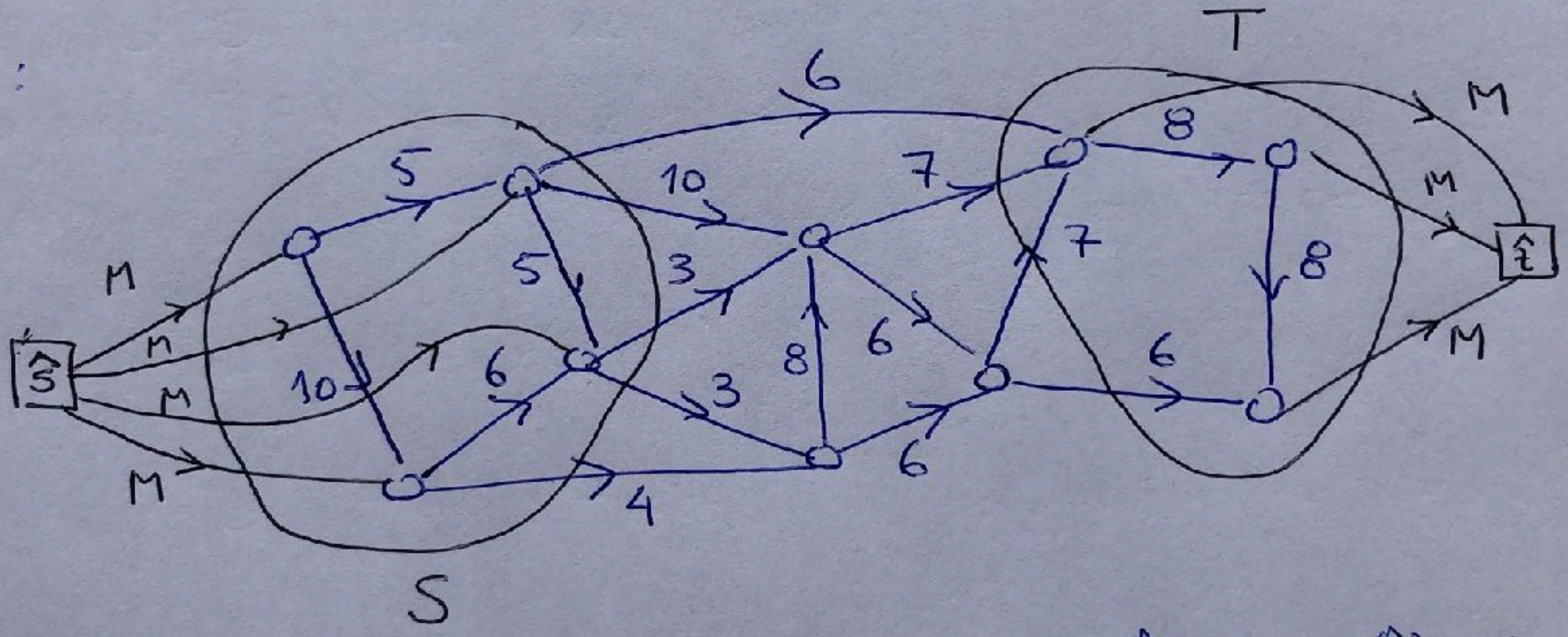
$$f_x(i)=0 \,,\ \forall i\in V\setminus(S\cup T) \quad \text{(conservación de flujo)}$$

y que maximice el valor de

$$f_x(T):=\sum_{i\in T} f_x(i) = \sum_{(i,j)\in\delta^-(T)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(T)} x_{ij}$$

Idea:

Agregar a R dos nodos nuevos $\hat{s}$ y $\hat{t}$, así como arcos de la forma $(\hat{s}, i)$, $\forall i \in S$ y $(j, \hat{t})$, $\forall j \in T$, con capacidades iguales a una constante $M \in \mathbb{R}$ suficientemente alta:



El problema se reduce a encontrar un flujo-$(\hat{s}, \hat{t})$ de valor máximo.

M debe ser un valor suficientemente alto, para que los nuevos arcos tengan capacidades que no sean una limitante para el flujo. Puede elegirse, por ejemplo,

$$M := \max\left\{ \max_{i\in S}\left\{ \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} u_{ij} \right\}, \max_{i\in T}\left\{ \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} u_{ji} \right\} \right\}$$

En el último ejemplo, $M = 21$.

Como consecuencia del Teorema de Flujo-Máximo Corte Mínimo, se puede probar el siguiente resultado:

<u>Proposición 2.13</u>

Para M suficientemente grande, se tiene que

$$\max\left\{ f_x(T) \;\middle|\; x \text{ es flujo de } S \text{ a } T \right\} = \min\left\{ u(\delta^+(W)) \;\middle|\; \begin{array}{l} W\subseteq V,\ S\subseteq W \\ W\cap T=\emptyset \end{array} \right\}$$

Demostración: Ejercicio.

2) Flujos factibles

Dados:

Una red capacitada $R = (V, A, u)$

Un vector de demandas en los nodos $b \in \mathbb{R}^V$

Encontrar un flujo $x \in \mathbb{R}_+^A$ que satisfaga las restricciones

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{(capacidad)}$$

$$f_x(i) = b_i \;, \; \forall i \in V \quad \text{(demanda)}.$$

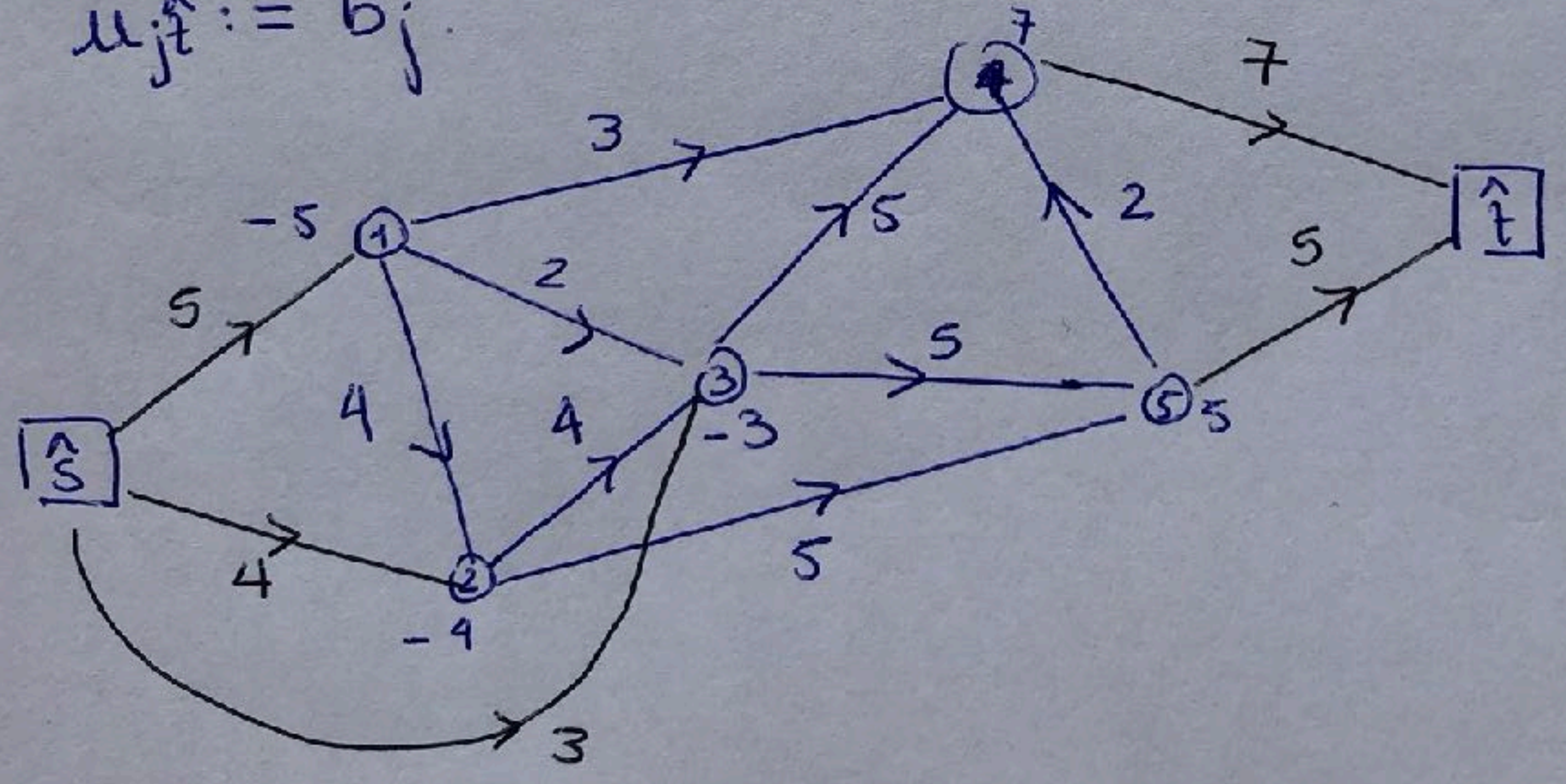
Este NO es un problema de optimización, sino de factibilidad. Se busca determinar si existe o no un flujo con las características señaladas.

<u>Idea</u>: Agregar a R dos nodos nuevos $\hat{s}$ y $\hat{t}$, así como los sigeientes arcos:

$$A_1 := \{ (\hat{s}, i) \mid \forall\, i \in V,\ b_i < 0 \}$$

$$A_2 := \{ (j, \hat{t}) \mid \forall\, j \in V,\ b_j > 0 \}$$

Definir sobre cada arco $(\hat{s}, i) \in A_1$ una capacidad de $u_{\hat{s}i} := -b_i$; y sobre cada arco $(j, \hat{t}) \in A_2$ una capacidad de $u_{j\hat{t}} := b_j$.



Proposición 2.14.

Existe un flujo-$(\hat{s},\hat{t})$ de valor $\sum_{i:b_i>0} b_i$ en la red extendida $\iff$ Existe un flujo factible que satisface las demandas de los nodos en la red original

Dem:

Notar primero que

$$\sum_{i:b_i>0} b_i = -\sum_{i:b_i<0} b_i$$

pues de lo contrario no es posible encontrar un flujo factible que satisfaga las demandas. (Por qué?)

Además, un flujo-$(\hat{s},\hat{t})$ con valor $\sum_{i:b_i>0} b_i$ es necesariamente un flujo máximo y satura todos los arcos de A_1 y A_2.
(Por qué?)

"$\Rightarrow$": Sea $\hat{x}$ un flujo-$(\hat{s},\hat{t})$ sobre la red extendida con valor $f_{\hat{x}}(\hat{t}) = \sum_{i:b_i>0} b_i$. Sea x la restricción de $\hat{x}$ a la red original.

Es fácil ver que x satisface las restricciones de capacidad.

Sea $i \in V$, con $b_i > 0$. En la red extendida existe un arco $(i,\hat{t})$ con capacidad $u_{i\hat{t}} = b_i$. Además, $\hat{x}$ satura este arco, luego $\hat{x}_{i\hat{t}} = b_i$.

Todo arco incidente a i y distinto a $(i,\hat{t})$ pertenece a la red original, luego:

$$f_x(i) = \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} \hat{x}_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} \hat{x}_{ij} = f_{\hat{x}}(i) + \hat{x}_{i\hat{t}}$$

$$= \hat{x}_{i\hat{t}} = b_i$$

en la red original

Luego, $f_x(i) = b_i$, $\forall i \in V$ t.q. $b_i > 0$.

De manera similar, puede demostrarse que $f_x(i) = b_i$, $\forall i \in V$ t.q. $b_i < 0$. Por último, si $i \in V$ es tal que $b_i = 0$, entonces $f_x(i) = f_{\hat{x}}(i) = 0 = b_i$.

$\Rightarrow$ x satisface la condición de demanda

$\Rightarrow$ x es un flujo factible en la red original.

<u>"$\Leftarrow$"</u>:

Sea x un flujo factible en la red original. Definimos $\hat{x}$ sobre la red extendida por

$$\hat{x}_{ij} := \begin{cases} x_{ij}, & \text{si } (i,j) \in A \\ -b_j, & \text{si } i = \hat{s}, \quad (i,j) \in A_1 \\ b_i, & \text{si } j = \hat{t}, \quad (i,j) \in A_2 \end{cases}$$

Al igual que en el caso anterior, puede verificarse que $\hat{x}$ satisface las condiciones de capacidad sobre los arcos de la red extendida.

Además, puede demostrarse que

$$f_{\hat{x}}(i) = f_x(i) + \hat{x}_{\hat{s}i} = f_x(i) - b_i = 0, \ \forall i \in V \text{ t.q. } b_i < 0$$

$$f_{\hat{x}}(i) = f_x(i) - \hat{x}_{i\hat{t}} = f_x(i) - b_i = 0, \ \forall i \in V \text{ t.q. } b_i > 0$$

$$f_{\hat{x}}(i) = f_x(i) = 0, \quad \forall i \in V \text{ t.q. } b_i = 0$$

Luego, $\hat{x}$ satisface la conservación de flujo en todo nodo de V

$\Rightarrow$ $\hat{x}$ es un flujo-$(\hat{s},\hat{t})$ sobre la red extendida.

Además, el valor de $\hat{x}$ es:

$$f_{\hat{x}}(\hat{t}) = \sum_{(j,\hat{t}) \in A_2} x_{j\hat{t}} = \sum_{\substack{j \in V, \\ b_j > 0}} b_j$$

El Teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo implica el siguiente resultado:

Proposición 2.15.

Existe un flujo factible que satisface todas las demandas $b \in \mathbb{R}^V_*$ de la red $R = (V, A, u)$ si $\sum_{i \in V} b_i = 0$ y además

$$\sum_{i \in W} b_i \leq u(\delta^-(W)) \, , \quad \forall \, W \subset V.$$

Demostración : Ejercicio

3) Circulaciones

Dadas una red $R = (V, A, u, l)$ con capacidades $u \in R^A_+$ y cotas mínimas de flujo $l \in \mathbb{R}^A_+$ asociadas a sus arcos, determinar si existe una circulación sobre R, es decir, un vector $x \in \mathbb{R}_+^A$ t.q.

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad , \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$f_x(i) = 0 \quad , \quad \forall i \in V.$$

<u>Idea</u>:

Transformar a este problema en un problema de flujos factible al hacer la sustitución:

$$\hat{x}_{ij} := x_{ij} - l_{ij}$$

Con esto, la primera condición toma la forma

$$0 \leq \hat{x}_{ij} = x_{ij} - l_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij} =: \hat{u}_{ij}$$

Por otra parte, para la segunda condición del problema se tiene:

$$f_{\hat{x}}(i) = f_x(i) - f_\ell(i) = -f_\ell(i) =: \hat{b}_i$$

Demostrar (Ejercicio)

$$f_\ell(i) := \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} \ell_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} \ell_{ij}$$

y con esto obtenemos el problema de encontrar un flujo factible sobre una red con capacidades de los arcos $\hat{u}_{ij} = u_{ij} - \ell_{ij}$ y demandas sobre los nodos $\hat{b}_i = -f_\ell(i)$.

El Teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo implica en este caso al Teorema de Circulación de Hoffman:

Teorema 2.16.

Existe una circulación si y solamente si para todo $W \subset V$ se cumple:

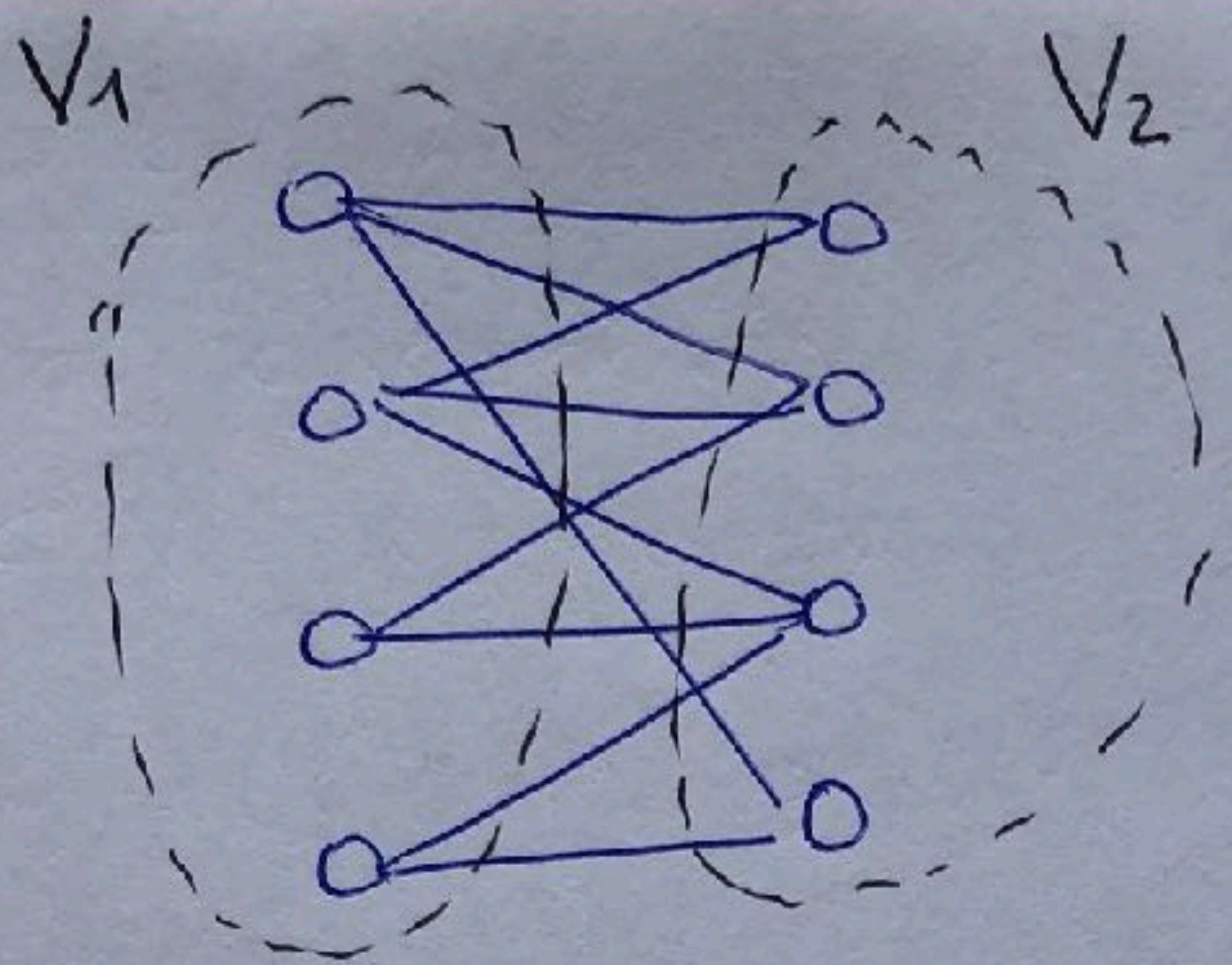
$$u(\delta^-(W)) \geq l(\delta^+(W)),$$

donde $u(\delta^-(W)) := \sum_{(i,j)\in\delta^-(W)} u_{ij}$, $l(\delta^+(W)) := \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} l_{ij}$.

Demostración: Ejercicio.

4) Emparejamiento sobre grafos bipartitos

Un grafo no dirigido $G=(V,E)$ es bipartito si V puede particionarse en dos subconjuntos, $V = V_1 \uplus V_2$, de tal manera que toda arista de E tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2.



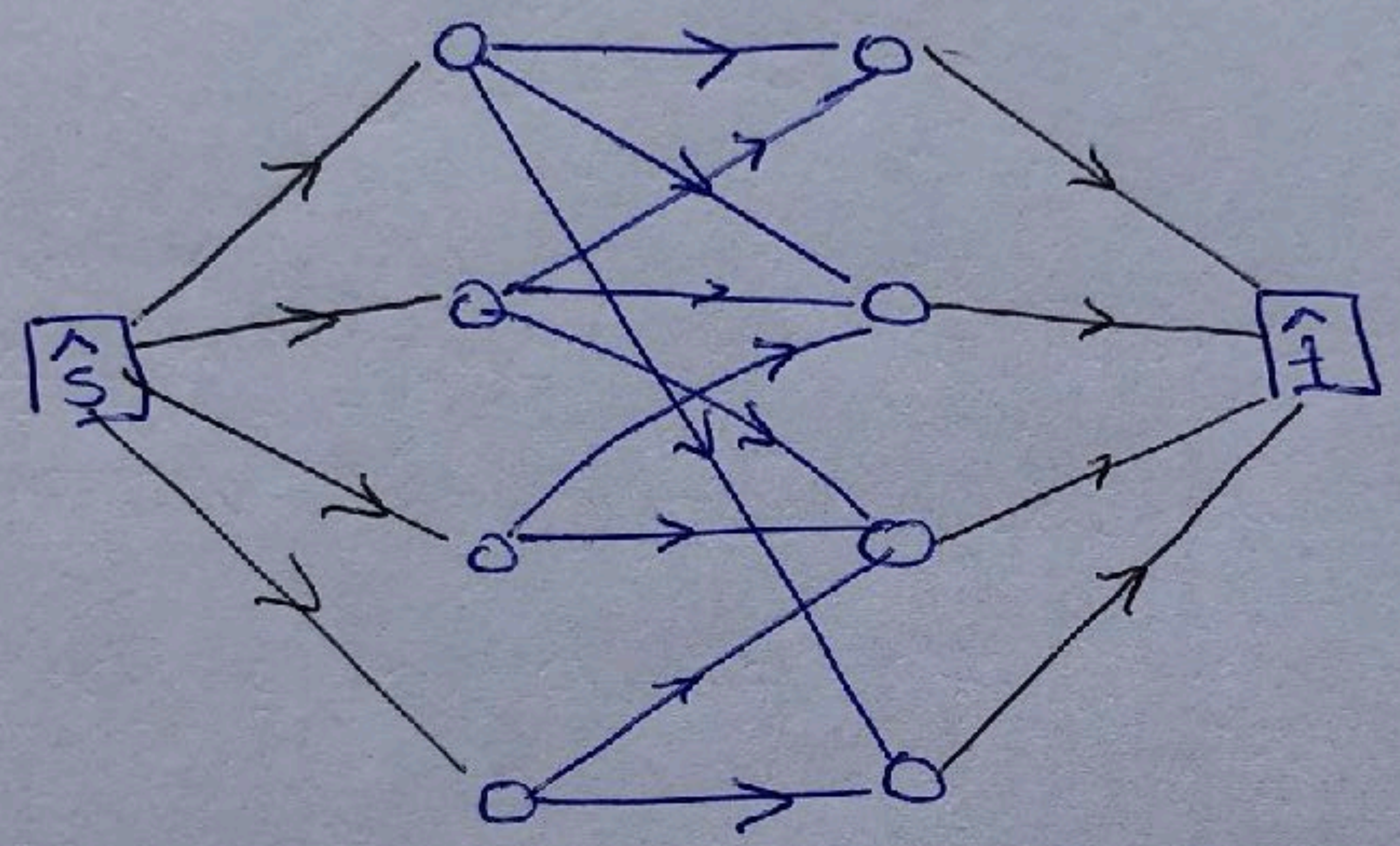
[matching]

Un emparejamiento en G es un conjunto de aristas $M \subseteq V$ t.q. cada nodo del grafo es incidente máximo a una arista de M.

Problema: Encontrar un emparejamiento cuya cardinalidad $|M|$ sea máxima.

Idea: "Orientar" las aristas desde V_1 a V_2 para obtener un grafo dirigido. Añadir dos nodos $\hat{s}$ y $\hat{t}$, así como arcos desde $\hat{s}$ a todos los nodos de V_1 y desde cada nodo de V_2 a $\hat{t}$. Fijar capacidades iguales a 1 sobre todos los arcos.

Encontrar un flujo-$(\hat{s},\hat{t})$ de valor máximo.



(Todas las capacidades son iguales a 1)

Notar que este flujo tendrá valores de 0 ó 1 sobre cada arco (Por qué?)

El conjunto de arcos de la forma (i,j), con $i \in V_1$, $j \in V_2$ y $x_{ij} = 1$ induce un emparejamiento de cardinalidad máxima en G. (Por qué?)

5) Flujos multiproducto [Multicommodity flows]

Dados: Una red $R=(V,A,u)$

Un conjunto de productos K

Un conjunto de pares origen-destino (s_k, t_k), $k \in K$

$s_k, t_k \in V, \forall k$

Un conjunto de demandas d_k, $k \in K$

Determinar un flujo multiproducto $x_{ij}^k \in \mathbb{R}^{A \times K}$

que satisfaga

$\forall k \in K$:

$$\sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -d_k, & \text{si } i = s_k \\ d_k, & \text{si } i = t_k \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

(Demanda multiproducto)

$$0 \leq \sum_{k\in K} x_{ij}^k \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A$$

(Capacidad)

Este problema puede formularse como un programa lineal, o como un programa lineal entero, si se requiere que los valores de x_{ij}^k sean enteros. En este último caso, se conoce que el problema es NP-difícil aún cuando $|K| = 2$.

Material adicional

Demostración alternativa de la eficiencia del algoritmo de la cadena aumentante más corta (Edmonds-Karp-Dinits)

Notación: Dado un flujo-(s,t) x, definimos el conjunto

$$\tilde{A}(x) := \{(i,j) \in A \mid (i,j) \text{ pertenece a una cadena } x\text{-aumentante con el menor número posible de arcos}\}$$

Lema 2.11.

Si $d_x(s,t) = d_{\bar{x}}(s,t)$ entonces $\tilde{A}(\bar{x}) \subset \tilde{A}(x)$

inclusión estricta.

Dem:

Supongamos que $d_x(s,t) = d_{\bar{x}}(s,t) = k$.

Sea $(i,j) \in \tilde{A}(\bar{x})$. Esto significa que existe un arco $(a,b) \in \{(i,j),(j,i)\}$ en $G(\bar{x})$ que forma parte de un camino de s a t de longitud k.

("longitud" se refiere al número de arcos).

Por lo tanto,

$$d_{\bar{x}}(s,a) + d_{\bar{x}}(b,t) = k-1$$

$$\Rightarrow d_x(s,a) + d_x(b,t) \leq k-1 \qquad \text{(Lema 2.10)}$$

Si $(a,b) \notin A(x)$, del Lema 2.9 tenemos que $d_x(s,b)+1$
$= d_x(s,a)$

y por tanto

$$\underbrace{d_x(s,b) + d_x(b,t)}_{\geq d_x(s,t) = k} + 1 \leq k-1$$

Luego, $(a,b) \in A(x)$ y $(i,j) \in \tilde{A}(x)$.

$\Rightarrow \tilde{A}(\bar{x}) \subseteq \tilde{A}(x)$.

Por otra parte, al menos un arco $(i,j) \in \tilde{A}(x)$ aumenta su flujo de $x_{ij} < u_{ij}$ a $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$, o disminuye su flujo de $x_{ij} > 0$ a $\bar{x}_{ij} = 0$ al modificar x empleando la cadena x-aumentante P.

<u>Caso (i): $x_{ij} < u_{ij}$, $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$</u>

En este caso, la única forma de que $(i,j) \in \tilde{A}(\bar{x})$ es que exista un camino de s a t en $G(\bar{x})$ de longitud igual a k y que contenga al arco (j,i)

Luego,

$$k = d_{\bar{x}}(s,j) + d_{\bar{x}}(i,t) + 1 \underset{\text{Lema 2.10}}{\geq} d_x(s,j) + d_x(i,t) + 1$$

Por otra parte, como $\bar{x}_{ij} > x_{ij}$, se sigue que (i,j) es un arco hacia adelante de P y luego $d_x(s,j) = d_x(s,i) + 1$. Sustituyendo en la última expresión:

$$k \geq d_x(s,j) + d_x(i,t) + 1 \underset{d_x(s,j) = d_x(s,i)+1}{=} d_x(s,i) + d_x(i,t) + 2 \underset{\substack{i \text{ pertenece} \\ \text{a } P}}{=} k + 2 \quad \lightning$$

$\Rightarrow (i,j) \notin \tilde{A}(\bar{x})$

<u>Caso (ii): $x_{ij} > 0$, $\bar{x}_{ij} = 0$</u>

Si $(i,j) \in \tilde{A}(\bar{x})$, entonces este arco debe ser un arco hacia adelante de alguna cadena $\bar{x}$-aumentante de longitud k. En otras palabras, (i,j) es un arco de un camino de s a t de longitud k en $G(\bar{x})$.

Luego,

$$k = d_{\bar{x}}(s,i) + d_{\bar{x}}(j,t) + 1 \underset{\text{Lema 2.10}}{\geq} d_x(s,i) + d_x(j,t) + 1$$

Por otra parte, de $x_{ij} > \bar{x}_{ij}$ se sigue que (i,j) es un arco en reversa de la cadena P empleada para obtener $\bar{x}$ a partir de x. Es decir, (j,i) es un arco de un camino de s a t de longitud k en $G(x)$. Luego, $d_x(s,i) = d_x(s,j) + 1$. Sustituyendo en la última expresión:

$$k \geq d_x(s,i) + d_x(j,t) + 1 = d_x(s,j) + d_x(j,t) + 2 = k+2 \;\lightning$$

Teorema 2.12.

El algoritmo de la cadena x-aumentante más corta termina en $O(m^2n)$ operaciones y retorna un flujo-(s,t) de valor máximo.

Dem:

Por el Lema 2.10, el valor de $d_x(s,t)$ se mantiene igual, o aumenta, entre dos iteraciones sucesivas del algoritmo.

Por otra parte, el Lema 2.11 afirma que si $d_x(s,t)$ se mantiene constante entre dos iteraciones sucesivas, entonces el conjunto de arcos que pueden formar parte de cadenas x-aumentantes de longitud $d_x(s,t)$ se reduce. Luego, $d_x(s,t)$ no puede permanecer constante por más de m iteraciones.

Como $d_x(s,t) \in \mathbb{Z}$, cada vez que aumenta lo hace al menos en una unidad. Además, debido a que $d_x(s,t)$ es la longitud de un camino simple en $G(x)$, se tiene que $d_x(s,t) \leq n-1$

Luego, $d_x(s,t)$ no puede aumentar de valor más de $n-1$ veces y no puede permanecer con el mismo valor por más de m iteraciones consecutivas del algoritmo. Por lo tanto, el algoritmo de la cadena x-aumentante más corta termina luego de máximo $m(n-1)$ iteraciones de aumento de flujo.

Cada iteración consiste de:

- la búsqueda de una cadena x-aumentante de longitud mínima, que puede realizarse en $O(m)$ operaciones al buscar un camino de s a t con el menor número de arcos en $G(x)$, empleando el algoritmo BFS (búsqueda primero a lo ancho)

- el aumento de flujo empleando la cadena encontrada, que puede implementarse en $O(n)$ operaciones.

Es decir, cada iteración del algoritmo requiere de $O(m+n) = O(m)$ operaciones.

De aquí se concluye que el algoritmo de la cadena x-aumentante más corta termina luego de $O(m^2(n-1)) = O(m^2 n)$ operaciones.

Adicionalmente, conocemos que al terminar el algoritmo retorna un flujo-(s,t) de valor máximo, pues ya no existen cadenas aumentantes para el mismo.