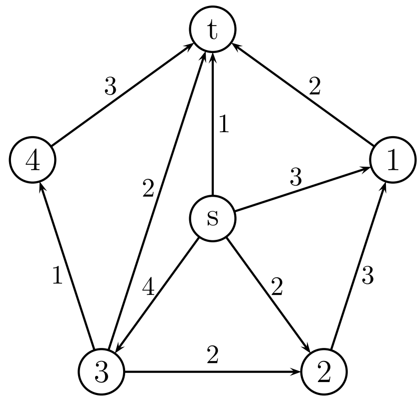
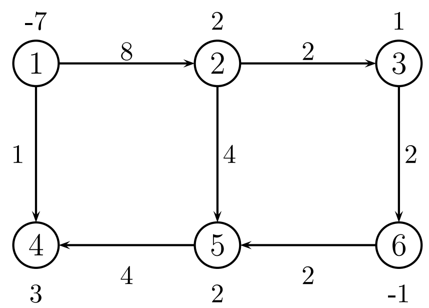
Redes de Transporte y Logística
Luis M. Torres *Enero, 2022*

Ejercicios Segundo Capítulo

1. Encontrar un flujo de valor máximo de s a t en la siguiente red empleando el algoritmo de Ford-Fulkerson.



2. Encontrar un flujo factible en la siguiente red, o demostrar que el mismo no existe. Los valores junto a los nodos indican sus demandas, las etiquetas de los arcos indican sus capacidades.



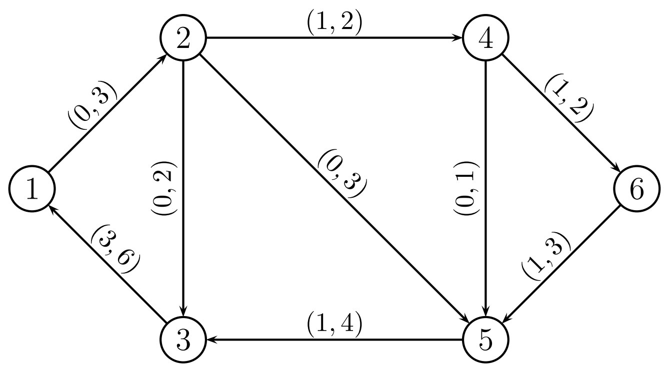
Transformar este problema en un problema de flujo máximo y resolverlo empleando el algoritmo de la cadena aumentante.

3. Encontrar una circulación factible en la siguiente red $R = (V, A, u, \ell)$, o demostrar que la misma no existe. Los valores (ℓ_a, u_a) sobre cada arco $a \in A$ indican la cota mínima de flujo y la capacidad del arco, respectivamente.

   (a) Transformar el problema de circulación en un problema de flujo de factible con demandas en los nodos.

(b) Transformar este problema de flujo factible en uno de flujo máximo.

(c) Resolver el problema de flujo máximo empleando el algoritmo de la cadena aumentante. Transformar la solución obtenida en una solución para cada uno de los otros dos problemas.



4. Demostrar que en un digrafo la suma de los grados entrantes sobre todos los nodos es siempre igual a la suma de los grados salientes.

5. Considerar un flujo-(s,t) x sobre una red capacitada $R = (V, A, u)$, con s, $t \in V$. Denotaremos por $f_x(i)$ al flujo neto en el nodo $i \in V$, es decir, la suma de los valores de flujo sobre los arcos entrantes a i, menos la suma de los valores de flujo sobre los arcos salientes de i. Demostrar que:

$$\sum_{i \in V} f_x(i) = 0.$$

6. Considerar una red capacitada $R = (V, A, u)$ en la que los nodos están particionados en tres subconjuntos: $V = S \uplus T \uplus I$, donde los nodos de S son nodos fuente de flujo, los nodos de T son nodos sumidero y los nodos de I son nodos de tránsito. Un flujo (S, T)-factible es un vector $x \in \mathbb{R}^A$ que satisface la restricción de capacidad para cada arco y la restricción de conservación de flujo para cada nodo de tránsito $i \in I$. El valor de este flujo está definido por $f_x(T) := \sum_{\delta^-(T)} x_{ij} - \sum_{\delta^+(T)} x_{ij}$, donde $\delta^-(T)$ y $\delta^+(T)$ denotan al corte entrante y al corte saliente de T, respectivamente.

   Demostrar que:

$$\begin{aligned} &\text{máx}\,\{f_x(T) \,:\, x \text{ es flujo } (S,\, T)\text{-factible}\} = \\ &\qquad\qquad \text{mín}\left\{u(\delta^+(W)) \,:\, W \subset V,\, S \subseteq W,\, W \cap T = \emptyset\right\} \end{aligned}$$

   donde $u(\delta^+(W)) := \sum_{\delta^+(W)} u_{ij}$.

7. Demostrar el siguiente teorema para la existencia de un flujo factible en una red capacitada con demandas sobre los nodos, a partir del Teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo:

   Dados una red capacitada $R = (V, A, u)$ y un vector $b \in \mathbb{R}^V$ de demandas asociadas a los nodos, tal que $\sum_{i \in V} b_i = 0$, existe un flujo factible $x \in \mathbb{R}^A$ que satisface todas las demandas si y sólo si para todo $W \subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$, se cumple la condición

   $$\sum_{i \in W} b_i \;\leq \sum_{(i,j) \in \delta^-(W)} u_{ij},$$

   donde $\delta^-(W) := \{(i,j) \in A \,:\, i \notin W, j \in W\}$.

8. Demostrar el Teorema de la Circulación de Hoffman, empleando el Teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo:

   Dada una red $R = (V, A, u, \ell)$ con capacidades u_{ij} y niveles mínimos de flujo ℓ_{ij} sobre cada arco $(i,j) \in A$, existe una circulación en R si y sólo si para todo $W \subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$, se cumple la condición

   $$\sum_{(i,j) \in \delta^-(W)} u_{ij} \;\geq \sum_{(i,j) \in \delta^+(W)} \ell_{ij},$$

   donde $\delta^-(W) := \{(i,j) \in A \,:\, i \notin W, j \in W\}$ y
   $\delta^+(W) := \{(i,j) \in A \,:\, i \in W, j \notin W\}$.

9. Sea $G = (V_1 \uplus V_2, E)$ un grafo bipartito, es decir, un grafo no dirigido tal que toda arista de E tiene un extremo en V_1 y otro en V_2. Un emparejamiento es un conjunto de aristas $M \subseteq E$, tal que ningún nodo de G es incidente a más de una arista de M.

   (a) Demostrar que el problema de encontrar un *emparejamiento de cardinalidad máxima* en G puede transformarse en un problema de flujo máximo sobre una red auxiliar R. (Definir esta red).

   (b) Un *recubrimiento* en G es un conjunto de nodos $C \subseteq V$ que satisface la condición de que toda arista del grafo tiene al menos un extremo en C. El Teorema de König establece que en un grafo bipartito la mínima cardinalidad de un recubrimiento coincide con la máxima cardinalidad de un emparejamiento. Demostrar este teorema a partir del Teorema de Flujo Máximo - Costo Mínimo sobre la red auxiliar R.

10. Una empresa de servicios técnicos cuenta con un equipo de K especialistas con los que debe atender a n peticiones de clientes. Como cada cliente tiene restricciones de horario y de tiempos de espera, las peticiones no pueden

ser atendidas en cualquier orden. Por el contrario, se tiene especificada una matriz de compatibilidad $A = (a_{ij})_{n \times n}$, donde $a_{ij} = 1$ si es posible que un mismo especialista atienda la petición j inmediatamente después de atender la petición i, y $a_{ij} = 0$ caso contrario. Formular un problema de circulación que permita conocer si es posible (y de qué manera) atender a las n peticiones con los K especialistas. Se supone que cada uno de los especialistas está técnicamente calificado para atender cualquiera de las peticiones.

Observación: La respuesta a este ejercicio debe incluir la definición de una red y de todos los parámetros correspondientes al problema de circulación, así como la justificación de por qué una solución a la instancia propuesta permite encontrar una solución al problema original.

11. Considerar un torneo en el que compiten n equipos bajo el sistema "todos contra todos" (con un sólo partido entre cada par de equipos, y sin la posibilidad de que un partido termine empatado). Para cada equipo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se denota por w_i al número de partidos ganados. Dado un vector $\mathbf{w} := (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, se quiere saber si $\mathbf{w}$ es *consistente*, es decir, si existen resultados para los encuentros, para los cuales se obtengan tales cantidades de partidos ganados por cada equipo.

    (a) Mostrar que $\mathbf{w}$ debe satisfacer $\sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{n(n-1)}{2}$. Indicar con un contraejemplo que no todo vector que satisface esta condición es consistente.

    (b) Reducir el problema de determinar si un vector $\mathbf{w}$ es consistente a un problema de flujo factible.

12. Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, se requiere orientar las aristas de G (es decir, asignar a cada arista $ij \in E$ una de las dos posibles direcciones: (i, j) ó (j, i)), de tal forma que en el grafo dirigido resultante cada nodo tenga a lo sumo k arcos entrantes, donde $k \in \mathbb{N}$ es un parámetro fijo y conocido. Transformar este problema en un problema de factibilidad de flujos sobre una red capacitada con demandas.

13. Se desea utilizar una flota de vehículos idénticos entre sí para atender un conjunto de n viajes programados. Cada viaje debe realizarse en un horario previsto, desde un punto de partida hasta un punto de llegada. En base a esta información, en una fase de preprocesamiento, se ha determinado una matriz de compatibilidad de viajes $A = (a_{ij})_{n \times n}$, donde $a_{ij} = 1$ si es posible cubrir con un mismo vehículo el viaje j luego de concluido el viaje i, y $a_{ij} = 0$ caso contrario. Dado un valor de K (fijo), se requiere determinar si es posible cubrir todos los viajes empleando máximo K vehículos. Formular este problema como un problema de circulación sobre una red.