TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Programación Lógica y Funcional

Unidad 3. Programación Lógica.

Lógica de Primer Orden

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Introducción

Los paradigmas de programación funcional (Haskell, Lisp puro, ML) y lógica (PROLOG) conforman la llamada programación declarativa cuyas características principales son:

- Un programa es una sucesión de definiciones.
- La principal estructura de control es la recursión.
- No existen ni ciclos ni operaciones de asignación.
- El programa específica qué se debe calcular. El cómo es irrelevante.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Un **lenguaje de programación lógica** es un lenguaje declarativo en el que los programas constan de:

- Definiciones de predicados.
- Los predicados son verdaderos o falsos al aplicarse a objetos.
- Un predicado no devuelve un valor como resultado, en contraste con una función.
- En lugar de programar una función de n argumentos, se programa un predicado de n + 1 argumentos.
- El mecanismo de ejecución se basa en la regla de resolución binaria con unificación de Robinson.
- Los fundamentos de programación lógica se sirven básicamente de la **lógica de primer orden**.

- El significado de un programa puede aclararse haciendo uso de la lógica.

- La idea de la programación lógica consiste en considerar la lógica de un programa como un programa en sí mismo.

- La programación lógica utiliza:

  - Lógica para la representación explícita de conocimiento, es decir, para la representación de problemas y soluciones.
  - El lenguaje de representación es un fragmento de la lógica de predicados llamado lógica de cláusulas definidas o cláusulas de Horn.
  - La inferencia lógica utilizada para solucionar problemas es la regla de resolución binaria de Robinson.
  - Durante las pruebas las variables involucradas se ligan a valores, que contienen la solución. Es decir, las pruebas son constructivas.

Lógica de Primer Orden

A la Programación Lógica atañe el uso de la **lógica** para **representar** y **resolver problemas**.

Para expresar conocimiento sobre situaciones que son de nuestro interés, solemos hacer uso de **enunciados declarativos:**

> *Las expresiones del lenguaje natural que son o verdaderas o falsas (a diferencia, por ejemplo, de las interrogativas).*

La Lógica Proposicional es declarativa, las proposiciones representan **hechos** que se dan o no en la realidad.

Lógica de Primer Orden

La Lógica de Primer Orden implica además, **objetos** y **relaciones** entre ellos.

Ejemplos de enunciados declarativos:

1. Julia es madre y Luis es hijo de Julia.
2. Toda madre ama a sus hijos.

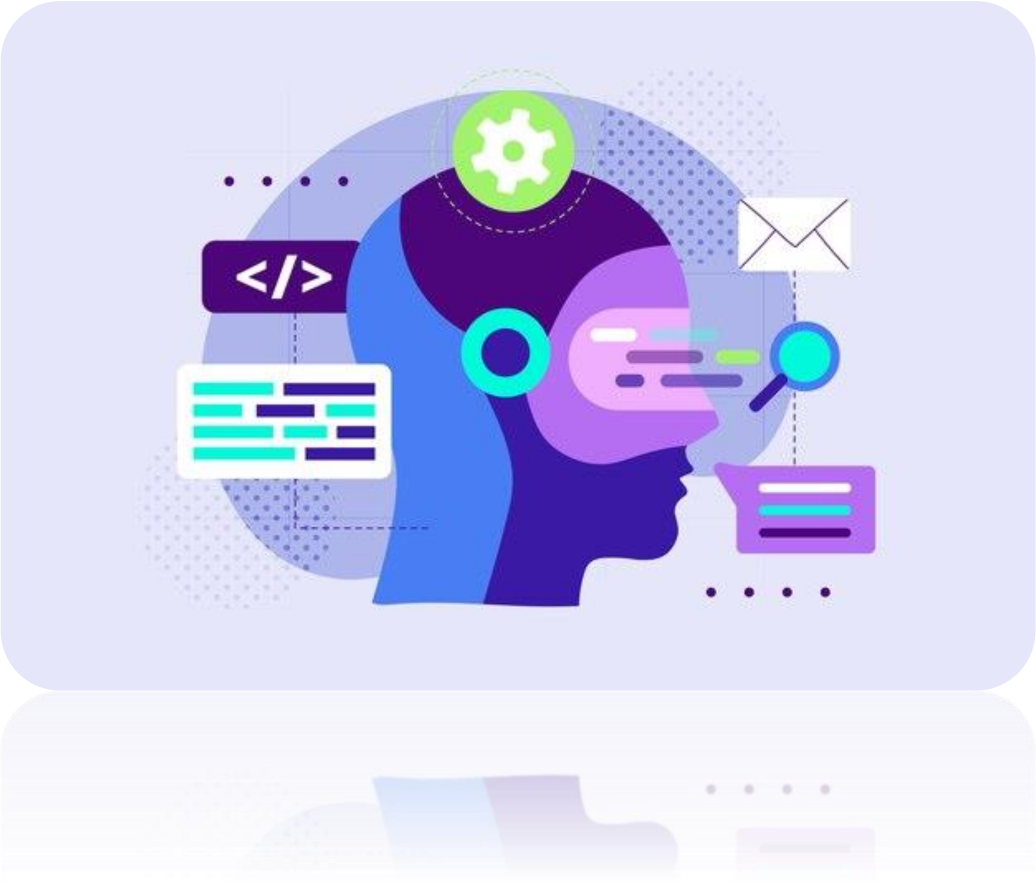
(1) se refiere a los objetos de discurso Julia y Luis, usando propiedades de estos objetos, como ser madre; así como relaciones entre éstos, como hijo.
(2) se refiere a relaciones que aplican a todas las madres.

Conociéndo (1) y (2) y utilizando reglas de inferencia, es posible inferir:

Julia ama a Luis.

La representación de un problema en el contexto de la Programación Lógica consiste en describir una situación en términos de objetos y relaciones entre ellos

Lógica de Primer Orden



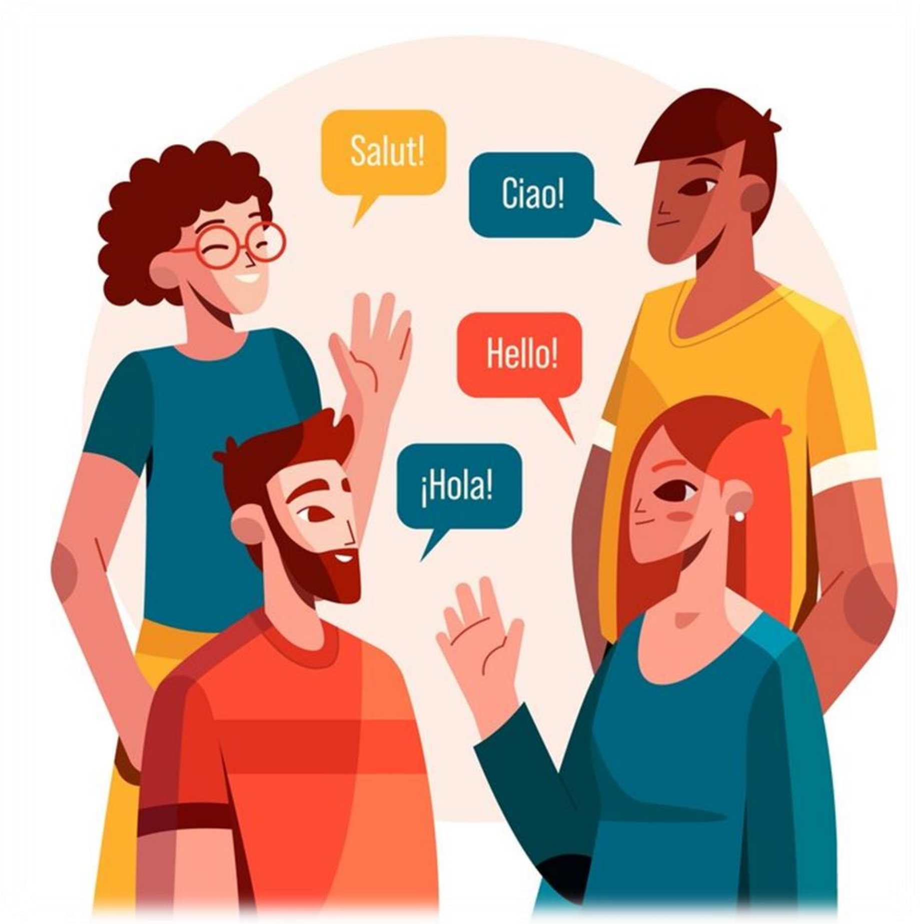
La idea central de la programación lógica es describir los objetos que conforman un **universo de discurso**, personas en el ejemplo; así como las **relaciones** entre ellos, siguiendo con el ejemplo: hijo y madre; y computar tales descripciones para obtener **conclusiones** como ***Julia ama a Luis.***

Componentes de un Sistema formal

- Sistema Formal
  - Sintáxis
    - Alfabeto
    - Reglas sintácticas
  - Semántica
    - Teoría del Modelo
      - Universo de Discurso
      - Intepretación
    - Teoría de Prueba
      - Axiomas
      - Reglas de Inferencia

Componentes de un Sistema formal

Lenguaje. La sintaxis del sistema formal está dada por un conjunto de símbolos conocido como **alfabeto** y una serie de **reglas de sintácticas**. Una expresión es cualquier secuencia de símbolos pertenecientes al alfabeto. Cualquier expresión es, o no, una **fórmula bien formada** (fbf). Las fbfs son las expresiones que pueden formarse con los símbolos del alfabeto a partir de las reglas sintácticas.



Componentes de un Sistema formal

Teoría de modelo. Establece la interpretación de las fbfs en un sistema formal. Su función es relacionar las fbfs con alguna representación simplificada de la realidad que nos interesa, para establecer cuando una fbf es falsa y cuando verdadera.

Esta versión de realidad corresponde a lo que informalmente llamamos “modelo”. Sin embargo, en lógica, el significado de “modelo” está íntimamente relacionado con el lenguaje del sistema formal: si la interpretación M hace que la fbf α sea verdadera, se dice que M es un **modelo** de α o que M **satisface** α, y se escribe $M \models \alpha$. Una fbf es **válida** si toda interpretación es un modelo para ella.

Componentes de un Sistema formal

Teoría de prueba. Este elemento está asociado con el razonamiento deductivo.

Su objetivo es hacer de cada enunciado matemático, una fórmula demostrable y rigurosamente deducible. Para ello, la actividad matemática debería quedar reducida a la manipulación de símbolos y sucesiones de símbolos regulada por un conjunto de instrucciones dadas al respecto. Su construcción implica un subconjunto de fbf que tendrán el papel de **axiomas** en el sistema, y un conjunto de **reglas de inferencia** que regulen diversas operaciones sobre los axiomas. Las fbf obtenidas mediante la aplicación sucesiva de las reglas de inferencia a partir de los axiomas se conocen como **teoremas** del sistema.

Componentes de un Sistema formal

Resumen operadores de lógica de primer orden.

Operador	Función	Proposición	Lectura	Precedencia	Tipo	Conmutativo
Disyunción Inclusiva	OR	$p \vee q$	p o q	3	Binario	Si
Disyunción Exclusiva	EXOR	$p \dot{\vee} q$	p exor q	4	Binario	Si
Conjunción	AND	$p \wedge q$	p y q	2	Binario	Si
Negación	NOT	$\neg p$	no p	1	Unario	No Aplica
Condicional		$p \rightarrow q$	sí p, entonces q	5	Binario	No
Bicondicional		$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q	6	Binario	No
Equivalentes lógicos		$P \equiv Q$	p y q son lógicamente equivalentes	$\sim$	Binario	Si

Componentes de un Sistema formal

Cuantificadores

El **cuantificador "para todo"** (∀) nos permite expresar hechos acerca de todos los objetos en el universo del discurso, sin necesidad de enumerarlos.

Por ejemplo: toda madre, todos los hombres …

El **cuantificador "existe"** (∃) nos permite expresar la existencia de un objeto en el universo de discurso con cierta propiedad en particular.

Por ejemplo: $\exists X\ esAve(X)\ \land \exists X\ puedeVolar(X)$

Existe al menos un elemento que es Ave y puede Volar.

Componentes de un Sistema formal

Cuantificadores

Cuantificadores lógicos.			
Cuantificador	Función Proposicional	Lectura	Conmutativo
Universal	$\forall x\, P(x)$	Para *toda* x en D tal que $P(x)$	Solo si son del mismo tipo
Existencial	$\exists x\, P(x)$	Existe una x en D tal que $P(x)$	

Cuantificadores lógicos anidados.			
Cuantificadores	Función Proposicional	Lectura	Conmutativo
Universales	$\forall x \forall y\ P(x, y)$	Para *toda* x y para *toda* y en D tal que $P(x, y)$	Si
Universal & existencial	$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$	Para *toda* x, *existe una* y en D tal que $P(x, y)$	No
Existencial & universal	$\exists x \forall y\ P(x, y)$	*Existe una* x *para toda* y en D tal que $P(x, y)$	No
Existenciales	$\exists x \exists y\ P\ (x, y)$	Existe *una* x en D y *una* y en D tal que $P(x, y)$	Si

Componentes de un Sistema formal

Otros símbolos de conexión para lógica de predicados

Conexión	Símbolo	Ejemplo	Lectura Ejemplo
Tal que	:	$\exists\, x : P(x)$	$Existe\ por\ lo\ menos\ una\ x$ tal que $P(x)$ es verdadera.
Por lo tanto	∴	$(x=2) \wedge (z=1) \therefore x - z=1$	$x\ es\ igual\ a\ 2$ y $z\ es\ igual\ a\ 1$, por lo tanto $x\ menos\ z\ es\ igual\ a\ 1$

Componentes de un Sistema formal

Tablas de verdad lógicas

Conjunción
p y q

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Disyunción inclusiva
p o q, o ambas

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Disyunción exclusiva
p o q, pero no ambas

p	q	$p \dot{\vee} q$
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

$p \dot{\vee} q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Condicional
p implica q

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Bicondicional
p si y sólo si q

p	q	$p \leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Componentes de un Sistema formal

Reglas de Inferencia

Modus ponens	Modus tollens	Silogismo hipotético	Silogismo disyuntivo	Conjunción	Suma	Simplificación
$p \rightarrow q$ $\underline{p}$ $\therefore\ q$	$p \rightarrow q$ $\underline{\neg q}$ $\therefore\ \neg p$	$p \rightarrow q$ $\underline{q \rightarrow r}$ $\therefore\ p \rightarrow r$	$p \lor q$ $\underline{\neg p}$ $\therefore\ q$	p $\underline{q}$ $\therefore\ p \land q$	$\underline{p}$ $\therefore\ p \lor q$	$\underline{p \land q}$ $\therefore\ p$

Componentes de un Sistema formal

Reglas de Inferencia

Ejemplos:

1. $\forall X \forall Y madre(X) \wedge hijo\_de(Y, X) \Rightarrow ama(X, Y)$
2. $madre(julia) \wedge hijo\_de(luis, julia)$

Al aplicar la eliminación de cuantificador universal ($\forall$E) a (1) obtenemos:

3. $\forall Y(madre(julia) \wedge hijo\_de(Y, julia) \Rightarrow ama(julia, Y)$

Al aplicar nuevamente ($\forall$E) a (3) obtenemos:

4. $madre(julia) \wedge hijo\_de(luis, julia) \Rightarrow ama(julia, luis)$

Finalmente, al aplicar Modus Ponens a (2) y (4):

5. $ama(julia, luis)$

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Componentes de un Sistema formal

- Una **substitución** es un mapeo de las variables del lenguaje a los términos del mismo

$$\mathrm{ama}(X,Y) \wedge \mathrm{madre}(X)\{X/\mathrm{julia}, Y/\mathrm{luis}\} = \mathrm{ama}(\mathrm{julia}, \mathrm{luis}) \wedge \mathrm{madre}(\mathrm{julia})$$

- Ejemplos:
  - Si usamos *x* para representar a algún humano, la afirmación *"cada persona es hombre o mujer"* se puede representar como

$$\forall x(H(x) \vee M(x))$$

donde H(x)= *"x es hombre" y* M(x)= *"x es mujer"*

Componentes de un Sistema formal

Si P(x) representa "el padre de x", y M(x,y) representa "x es menor que y", entonces

"toda persona es menor que su padre" se representa por $\forall x\ M(x,P(x))$

La frase " Todos los estudiantes de Sistemas son Listos" podría formalizarse empleando los predicados:

S(x)= x estudia sistemas

L(x)= x es listo

$\forall x\ (S(x) \rightarrow L(x))$

Ejercicios

"no todas las aves pueden volar"

$\neg(\forall x\ (A(x) \rightarrow V(x)))$

"Todos quieren a Juan y a María".

$(\forall x\ (Q(x,juan) \wedge Q(x,maria)))$

"Alguien quiere a Juan y a María".

$\exists\ x\ (Q(x,juan) \wedge Q(x,maria)))$

"todos los hombres son mortales. Socrates es un hombre. Por lo tanto Socrates es mortal."

$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))\ ,\ H(s) \rightarrow M(s))$

"Existe un hermano de Ana que le gusta a Blanca"

$\exists x\ (H(x,a) \wedge G(x,b))$

"Todos se gustan entre sí"

$\forall x\ \forall y\ (G(x,y))$

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Filosofía del paradigma

“Modelar problemas por medio de la abstracción, utilizando un sistema de lógica formal que permite llegar a una conclusión por medio de hechos y reglas”.

No se busca un algoritmo que resuelva el problema, se proporcionan las bases para que el lenguaje de programación lógica lo resuelva a través de la deducción controlada.

Lógica proposicional

Proposición	→ Proposición atómica | Proposición compleja
Proposición atómica	→ Verdadero | Falso | Símbolo proposicional
Símbolo proposicional	→ P | Q | R | …
Proposición compleja	→ $\neg$Proposición (Proposición $\wedge$ Proposición) (Proposición $\vee$ Proposición) (Proposición $\Rightarrow$ Proposición) (Proposición $\Leftrightarrow$ Proposición)

Lógica proposicional

Ejemplos:

✗ $5 + 20$

✓ $\text{Falso} \wedge (P \vee Q)$ Proposición compleja

✓ $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg R$ Proposición compleja

✓ S Proposición

Lógica de primer orden

Extiende la lógica proposicional permitiendo además el uso de **cuantificadores** y declarar **predicados** sobre diferentes objetos.

Cuantificadores

Operador sobre un conjunto de individuos permitiendo construir proposiciones sobre conjuntos.

Símbolo	**Nombre**	**Lectura**
$\forall$	Cuantificador universal.	Para todo...
$\exists$	Cuantificador existencial.	Existe un...
$\exists!$	Cuantificador existencial único.	Existe exactamente un...

Lógica de primer orden

Predicados

Funciones sobre objetos que se usan para expresar propiedades o relaciones entre éstos.

esAve(aguila)
padre(homero,bart)
estudia(elliot,danza)

Lógica de orden superior

Extiende la lógica de primer orden, permitiendo reducir conjuntos (como podrían ser las proposiciones) a una variable sobre la cual se pueden expresar nuevas proposiciones o hacer uso de los cuantificadores.

$$\forall P\ \forall x\ (Px \lor \neg Px)$$

Cláusulas de Horn

En lógica proposicional, una fórmula lógica es una cláusula de Horn si es una cláusula (disyunción de literales) con, como máximo, un literal positivo. Se llaman así por el lógico Alfred Horn, el primero en señalar la importancia de estas cláusulas en 1951.

Esto es un ejemplo de una cláusula de Horn:

$$\neg p \lor \neg q \lor \ldots \lor \neg t \lor u$$

Con base en las leyes de Morgan ($\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$) la fórmula anterior se puede reescribir así:

$$\neg(p \land q \land \ldots \land t) \lor u$$

Cláusulas de Horn

Continuando con las leyes de la lógica proposicional tenemos que:

$$\neg(p \wedge q \wedge \ \ldots \wedge t) \vee \ u$$

Es equivalente a:

$$p \wedge q \wedge \ \ldots \wedge t \rightarrow u$$

Cláusulas de Horn

Partiendo entonces de esta representación de una cláusula Horn

$$p \wedge q \wedge \ \ldots \wedge t \rightarrow u$$

Y conociendo que en Prolog la sintaxis de una cláusula tiene el siguiente aspecto:

u :- p , q , ... , t.

hija(A,B) :- mujer(A), padre(B,A).

En términos lógicos la cláusula anterior representa la siguiente implicación:

$$mujer(A) \wedge padre(B,A) \rightarrow hija(A,B)$$

Hecho

Expresión atómica que verifica una relación sobre un objeto.

Por ejemplo: El loro es un ave.

Reglas

Conjunto de proposiciones lógicas que permiten inferir el valor de verdad de una nueva proposición.

Por ejemplo: Todas las aves tienen alas. Todos los animales que tienen alas, ponen huevos.

Consultas

Proposición construida con el propósito de ser demostrada o de encontrar el conjunto de valores que la convierten verdadera.

Por ejemplo: ¿El loro pone huevos?.

Aridad

Es un número que indica el número de variables individuales que utiliza el predicado para formar una oración.

Oración	**Predicado**	**Aridad**
Juan pasó.	paso(juan)	1
Juan pasó el parcial.	paso(juan, parcial)	2
Juan pasó el parcial de cálculo.	paso(juan, parcial, calculo)	3

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Nombre según aridad

Es un número que indica el número de variables individuales que utiliza el predicado para formar una oración.

Aridad	Nombre del predicado
0	Enunciado
1	Propiedad
2	Relación

Unificación

Proceso ejecutado sobre una variable para poder ser usada en la evaluación de una proposición.

Ventajas y desventajas

Ventajas

Descripciones independientes de la implementación (unificación semántica).

Expresión simple y precisa de los problemas.

Puede llevar a una reducción de la complejidad.

Permite su optimización sin modificar el código.

Base de conocimiento fácilmente escalable.

Desventajas

Puede llegar a ser extremadamente ineficiente.

Dificultad en su depuración.

Pocas herramientas disponibles.

Inferencia limitada por su base de conocimiento.

Áreas de aplicación muy específica.

Aplicaciones de este paradigma

- Sistemas Expertos
- Comprobación automática de teoremas
- Inteligencia Artificial
  - Sistemas basados en reglas
  - Reconocimiento de Lenguaje Natural
  - Búsqueda de patrones