Coordenadas

Coordenadas Cartesianas

El vector posición lo expresamos, como una terna ordenada de números reales o como una expresión en función de los versores que indican la referencia de tres ejes concurrentes al origen.

El vector indica un punto en relación con el origen de coordenadas. $\vec{r}_{P\,-\,O}$

$$\vec{r}_{P\,-\,O} = x_p\hat{i} + y_p\hat{j} + z_p\hat{k}$$

El módulo de este vector es la distancia que existe entre P y O:

$$|\vec{r}_{P\,-\,O}| = \sqrt{(x_p)^2 + (y_p)^2 + (z_p)^2}$$

x_P , y_P , z_P : son coordenadas del punto, y que variarán en función del tiempo en la medida que la partícula se mueva.

Coordenadas Polares

$$\vec{r}_{P\,-\,O} = \pm|\vec{r}_{P\,-\,O}|\breve{e}_r$$

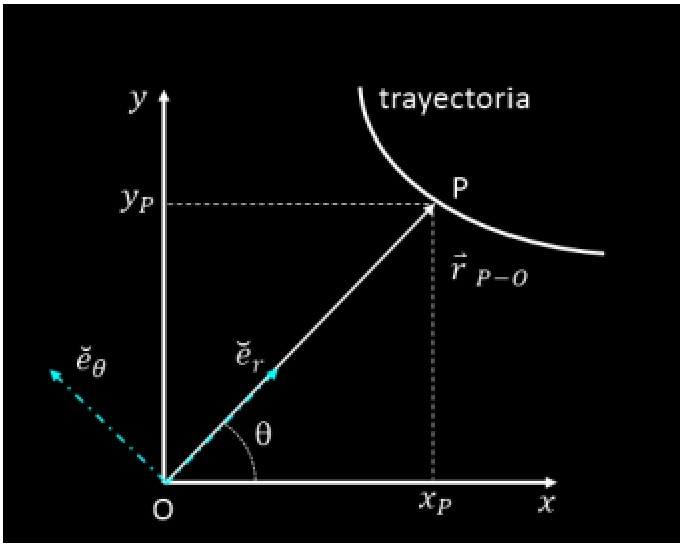
El vector se escribe como módulo del vector en la dirección radial con el signo más si es un vector que apunta del centro hacia afuera como el versor radial $\breve{e}_r$ o el signo menos si apunta hacia adentro contrario a $\breve{e}_r$.

Lo interesante es que ***tenemos un versor que acompañará la posición del punto material***, y esta propiedad es muy útil para describir movimientos curvilíneos en general.

El versor radial se puede escribir en cartesianas, es decir podemos dar la transformación de polar a cartesiano de este versor.

$$\breve{e}_r = cos(\theta)\,\hat{i} + sen(\theta)\,\hat{j}$$

Tenemos que entender que el versor $\breve{e}_r$ es variable en θ, que es el ángulo que forma el versor con el eje "$+x$", cuando deseamos transformar la notación polar en notación cartesiana.



El versor $\breve{e}_\theta$ es normal al versor radial, matemáticamente se puede calcular mediante la derivada (usando la regla de la cadena) del versor $\breve{e}_r$.

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = \frac{d(\cos\theta\,\breve{\imath} + \ sen\,\theta\,\breve{\jmath}\,)}{dt}$$

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \ \cos\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

Recordando que el módulo de la velocidad angular (w) es $\frac{d\theta}{dt}$ y llamando a $\breve{e}_\theta = -sen(\theta)\,\hat{\imath} + cos(\theta)\,\hat{\jmath}$

$$\breve{e}_\theta = -sen\,\theta\,\breve{\imath} + \ \cos\theta\,\breve{\jmath}$$

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \ \cos\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = \omega\breve{e}_\theta$$

Esta ecuación nos está indicando que la derivada de un versor es perpendicular a dicho versor y además su módulo es igual a la velocidad angular del movimiento del punto que estamos estudiando.

Versores Polares

$$\breve{e}_r = cos(\theta)\,\hat{\imath} + sen(\theta)\,\hat{\jmath}$$

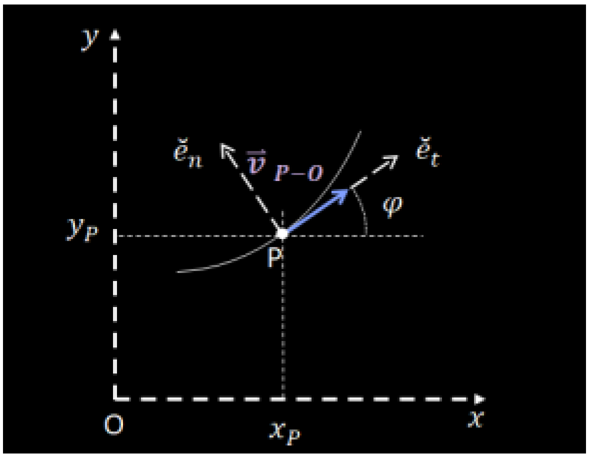
$$\breve{e}_\theta = -sen(\theta)\,\hat{\imath} + cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

- $\breve{e}_r \perp \breve{e}_\theta$
- $\frac{d\breve{e}_r}{dt} = w\,\breve{e}_\theta$
- $\breve{e}_r$ es un versor que acompañará la posición del punto material.

Coordenadas Intrinsecas

La velocidad es tangente a la trayectoria.

Esta propiedad la utilizamos para encontrar el versor tangente y expresar la velocidad de la partícula "P".



$$\vec{v}_{P\,-\,O} = |\vec{v}_{P\,-\,O}|\breve{e}_t$$

El versor tangente, es el vector velocidad dividido por su módulo.

$$\breve{e}_t = \frac{\vec{v}_{P\,-\,O}}{|\vec{v}_{P\,-\,O}|}$$

- $|\vec{v}_{P\,-\,O}|$: es el módulo del vector velocidad.
- $\breve{e}_t$: es el versor tangencial a la trayectoria o versor tangente.

La expresión en coordenadas cartesianas de este versor es:

$$\breve{e}_t = cos(\varphi)\,\hat{\imath} + sen(\varphi)\,\hat{\jmath}$$

Otra vez, **como para polares**, en este sistema, se verifica que el ángulo φ, es una variable que se toma desde el eje de abscisas y que depende del tiempo en la medida que se mueve el punto "P".

Para definir el versor normal utilizaremos la técnica de la derivada del versor tangente.

$$\frac{d\breve{e}_t}{dt} = (-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \,cos\,\varphi\,\breve{\jmath})\,\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\breve{e}_t}{dt} = (-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \,cos\,\varphi\,\breve{\jmath})\,\omega$$

El paréntesis es un versor que se denomina **versor normal:**

$$\breve{e}_n = -sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \,cos\,\varphi\,\breve{\jmath}$$

Versores Intrinsecos

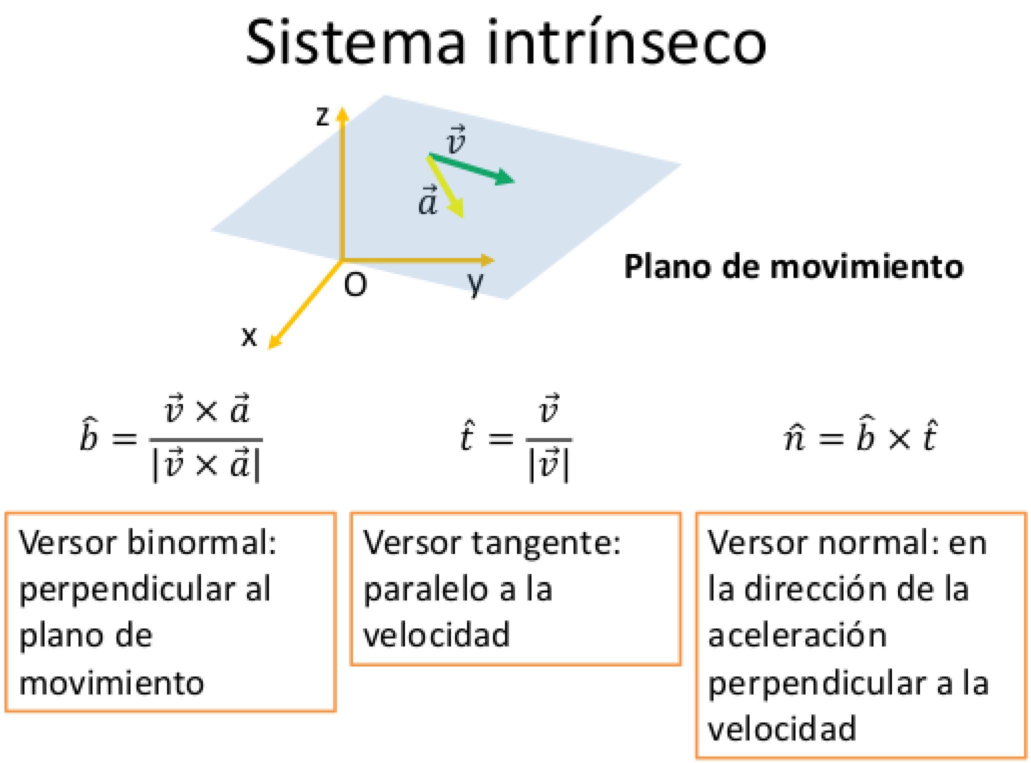
$$\breve{e}_t = cos(\varphi)\,\hat{\imath} + sen(\varphi)\,\hat{\jmath}$$

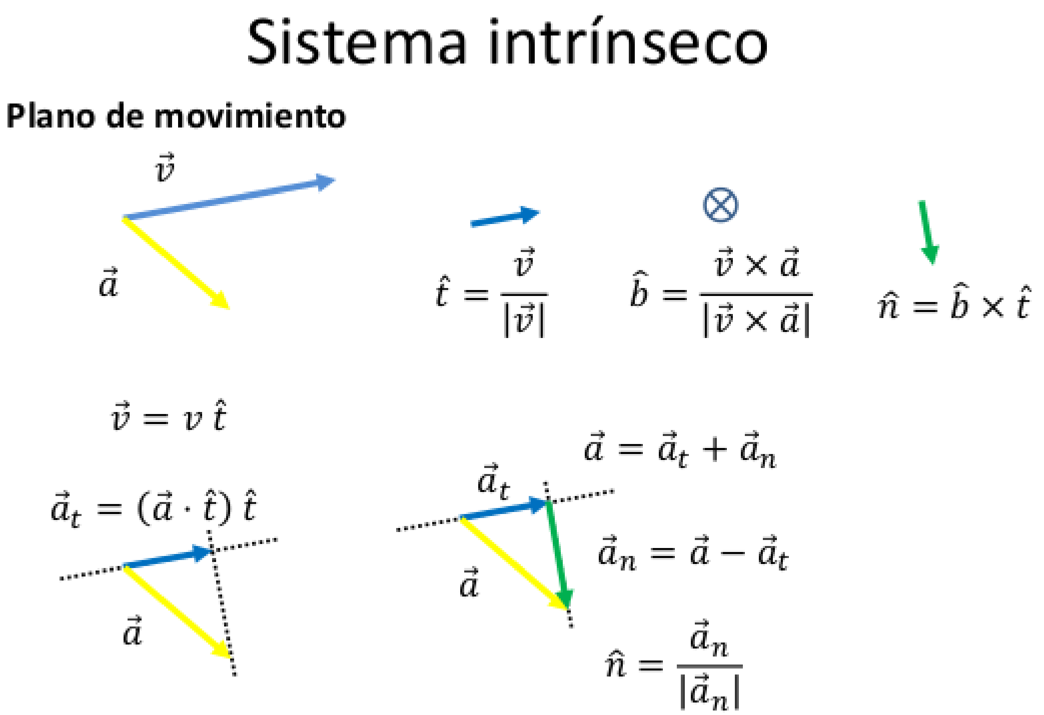
$$\breve{e}_n = -sen(\varphi)\,\hat{\imath} + cos(\varphi)\,\hat{\jmath}$$

- $\breve{e}_r \perp \breve{e}_n$

- $\frac{d\breve{e}_t}{dt} = w\,\breve{e}_n$
- $\breve{e}_t$ es un versor **tangente a la trayectoria**, por tanto tiene la misma dirección que la velocidad en ese instante $\vec{v}_{P\,-\,O}$

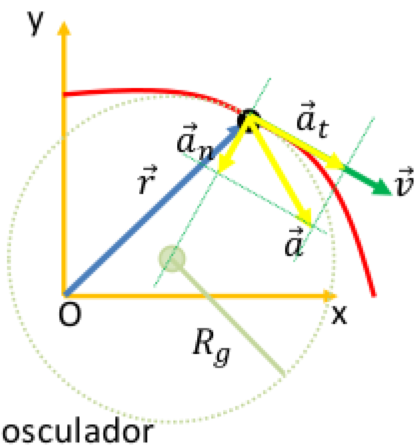
Obtener vectores intrinsecos y normal





Radio de Giro

Círculo osculador y radio de giro



$a_t = \partial v / \partial t$

$a_n = v^2 / R_g$

R_g Radio de giro

$$\vec{v} = v\,\hat{t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial v}{\partial t}\,\hat{t} + \frac{v^2}{R_g}\,\hat{n}$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R_g = \frac{v^2}{R_g}$$

Recordar $v = \omega \cdot r$