Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Engenharia Informática

Universidade do Minho

Dezembro 2020

Exploração de minas a céu aberto

Alexandre Costa - A78890

Luís Pereira – A77667

Ricardo Gomes - A93785

Rúben Rodrigues – A80960

Sara Marques - A89477

Conteúdo

Introdução

Este projeto surge no domínio da unidade curricular Modelos Determinísticos de Investigação Operacional com o objetivo de entender a capacidade de analisar problemas complexos, desenvolver modelos e interpretar as respetivas soluções. Neste trabalho prático será abordada a exploração mineira a céu aberto que é praticada quando o minério se encontra perto da superfície, focando apenas na modelação da fase de exploração.

Desenvolvimento do modelo

Muitos problemas práticos de Investigação Operacional podem ser expressos recorrendo a programação linear. Neste caso estamos a trabalhar um problema de fluxo máximo.

Definição do problema

O problema de fluxo máximo permite avaliar a capacidade de transporte de um bem ou mercadoria desde centros de produção até centros de consumo em redes com limites de capacidade nos arcos.

Neste caso concreto, pretende-se modelar a fase de exploração de uma mina a céu aberto. Para este tipo de exploração inicialmente é necessário realizar uma prospeção do minério, estimando assim o seu valor para garantir a maximização do lucro. Para um determinado bloco de minério ser explorado, é necessário primeiro remover três blocos, o que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes.

A figura seguinte apresenta o mapa bidimensional da concessão a explorar, destacando-se o inventário de minério estimado e salientado a cor vermelha, o valor do inventário do minério dos blocos determinado pelo número de aluno 93785.

						10	8				
_					12	14	15	40			_
_	_			16				20		_	_
_	_	_	3	18	3			7	_	_	_
_	_	_	_	20	8		5	_	_	_	_

Não se poderá escavar abaixo do último nível representado na figura e não será necessário escavar os blocos representados a sombreado. Os respetivos custos de exploração são os seguintes:

nível	-1	-2	-3	-4	-5
custo	1	2	3	4	5

Formulação do problema

O problema passa por encontrar o modelo de exploração de fecho máximo que maximiza o fluxo. Para tal, é indispensável considerar os custos inerentes, que aumentam com a profundidade. Por vezes poderá ser necessário remover algum bloco cujo balanço é negativo, mas cuja remoção será obrigatória para que seja possível escavar um outro bloco lucrativo.

Variáveis de decisão

Seja xj uma variável binária que toma o valor 1 se o vértice j pertencer ao fecho do grafo, e 0, caso contrário.

Restrições

O modelo a construir tem de obedecer a restrições lineares, sendo essas derivadas da regra que para extrair um bloco, é necessário extrair três blocos no nível de profundidade acima, o que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes. As restrições logicas de implicação traduzem que se o vértice i pertence ao fecho de um grafo, j também tem de pertencer. Ou seja, um bloco xi ser minado implica que o bloco xj também tem de ser.

$$x_i - x_j \leq 0, \forall (i, j) \in A$$
$$x_j \text{ binário}, \forall j \in V$$

Função objetivo

Analisando como um problema de fecho máximo de um grafo, cada bloco da mina é um vértice e cada variável binaria representa se um certo vértice pertence ao fecho do grafo ou não.

Então o problema de fecho máximo de um grafo pode ser determinado resolvendo o problema de fluxo máximo de um grafo auxiliar com dois vértices adicionais, uma fonte s e terminal t. O grafo auxiliar terá arcos (s, j) de s para todos os vértices j com ganho (valor positivo), com custo c j, e arcos (j,t) de todos os vértices j com custo (valor negativo) para t, com custo −c j. O fecho máximo do grafo G é determinado pelo corte mínimo (s,t) do grafo.

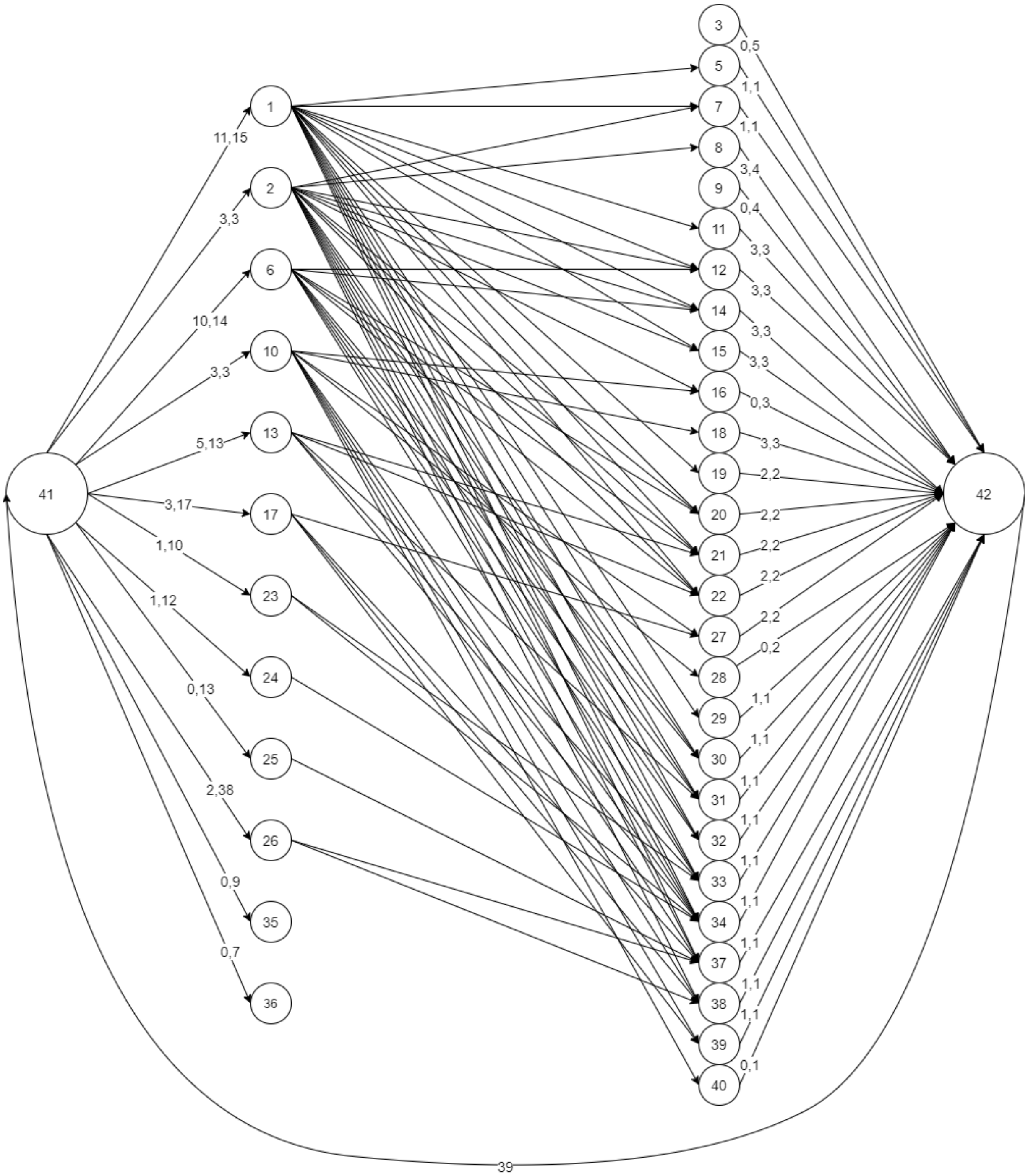
$$\max \quad \sum_{j \in V} c_j x_j$$

Lucro de Operação

$$\begin{aligned}
\text{lucro de operação} &= \sum_{j \in S} l_j - \sum_{i \in I} c_i \\
&= \sum_{j \in S} l_j + \sum_{j \in \bar{S}} l_j - \Big(\sum_{j \in \bar{S}} l_j + \sum_{i \in I} c_i\Big) \\
&= \sum_{j \in (S \cup \bar{S})} l_j - \text{capacidade do corte}
\end{aligned}$$

O lucro vai ser dado pela diferença entre o valor da soma do lucro (valor positivo) de todos os vértices e o valor da capacidade do corte. Como a primeira parcela é uma constante, minimizar a capacidade do corte equivale a maximizar o lucro da operação.

Rede do problema



Ficheiro de input

De seguida, é apresentado o ficheiro de input definido de acordo com o modelo implementado.

```
42
107
41 1 0 15
41 2 0 3
41 6 0 14
41 10 0 3
41 13 0 13
41 17 0 17
41 23 0 10
41 24 0 12
41 25 0 13
41 26 0 38
41 35 0 9
41 36 0 7
1 5 0 1000
1 7 0 1000
1 11 0 1000
1 12 0 1000
1 14 0 1000
1 15 0 1000
1 19 0 1000
1 20 0 1000
1 21 0 1000
1 22 0 1000
1 29 0 1000
1 30 0 1000
1 31 0 1000
1 32 0 1000
1 33 0 1000
1 34 0 1000
1 37 0 1000
2 7 0 1000
2 8 0 1000
2 12 0 1000
2 14 0 1000
2 15 0 1000
2 16 0 1000
2 20 0 1000
2 21 0 1000
2 22 0 1000
2 30 0 1000
2 31 0 1000
2 32 0 1000
2 33 0 1000
2 34 0 1000
2 37 0 1000
2 38 0 1000
6 12 0 1000
6 14 0 1000
6 20 0 1000
6 21 0 1000
6 22 0 1000
6 30 0 1000
6 31 0 1000
6 32 0 1000
6 33 0 1000
6 34 0 1000
10 16 0 1000
10 18 0 1000
10 27 0 1000
10 28 0 1000
10 34 0 1000
10 37 0 1000
10 38 0 1000
10 39 0 1000
10 40 0 1000
13 21 0 1000
13 22 0 1000
13 31 0 1000
13 33 0 1000
13 34 0 1000
17 27 0 1000
17 37 0 1000
17 38 0 1000
17 39 0 1000
23 33 0 1000
23 34 0 1000
24 34 0 1000
25 37 0 1000
26 37 0 1000
26 38 0 1000
3 42 0 5
5 42 0 1
7 42 0 1
8 42 0 4
9 42 0 4
11 42 0 3
12 42 0 3
14 42 0 3
15 42 0 3
16 42 0 3
18 42 0 3
19 42 0 2
20 42 0 2
21 42 0 2
22 42 0 2
27 42 0 2
28 42 0 2
29 42 0 1
30 42 0 1
31 42 0 1
32 42 0 1
33 42 0 1
34 42 0 1
37 42 0 1
38 42 0 1
39 42 0 1
40 42 0 1
42 41 -1 1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

Ficheiro de output

```
*****************************************************************
 NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 107
 DEFAULT INITIALIZATION USED
 ***********************************
 Total algorithm solution time =   0.00308394432 sec.
 OPTIMAL COST =  -39.
 NUMBER OF ITERATIONS =  78
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  15
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  1
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  15
 ***********************************
s -39.
f 41 1 11
f 41 2 3
f 41 6 10
f 41 10 3
f 41 13 5
f 41 17 3
f 41 23 1
f 41 24 1
f 41 25 0
f 41 26 2
f 41 35 0
f 41 36 0
f 1 5 1
f 1 7 1
f 1 11 3
f 1 12 0
f 1 14 0
f 1 15 3
f 1 19 2
f 1 20 0
f 1 21 0
f 1 22 0
f 1 29 1
f 1 30 0
f 1 31 0
f 1 32 0
f 1 33 0
f 1 34 0
f 1 37 0
f 2 7 0
f 2 8 3
f 2 12 0
f 2 14 0
f 2 15 0
f 2 16 0
f 2 20 0
f 2 21 0
f 2 22 0
f 2 30 0
f 2 31 0
f 2 32 0
f 2 33 0
f 2 34 0
f 2 37 0
f 2 38 0
f 6 12 3
f 6 14 3
f 6 20 2
f 6 21 0
f 6 22 0
f 6 30 1
f 6 31 0
f 6 32 1
f 6 33 0
f 6 34 0
f 10 16 0
f 10 18 3
f 10 27 0
f 10 28 0
f 10 34 0
f 10 37 0
f 10 38 0
f 10 39 0
f 10 40 0
f 13 21 2
f 13 22 2
f 13 31 1
f 13 33 0
f 13 34 0
f 17 27 2
f 17 37 0
f 17 38 0
f 17 39 1
f 23 33 1
f 23 34 0
f 24 34 1
f 25 37 0
f 26 37 1
f 26 38 1
f 3 42 0
f 5 42 1
f 7 42 1
f 8 42 3
f 9 42 0
f 11 42 3
f 12 42 3
f 14 42 3
f 15 42 3
f 16 42 0
f 18 42 3
f 19 42 2
f 20 42 2
f 21 42 2
f 22 42 2
f 27 42 2
f 28 42 0
f 29 42 1
f 30 42 1
f 31 42 1
f 32 42 1
f 33 42 1
f 34 42 1
f 37 42 1
f 38 42 1
f 39 42 1
f 40 42 0
f 42 41 39
```

Solução ótima

Blocos a minar											
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
_	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	_
_	_	11	12	13	14	15	16	17	18	_	_
_	_	_	5	6	7	8	9	10	_	_	_
_	_	_	_	1	2	3	4	_	_	_	_

A solução ótima dada pelo software representa o valor do corte mínimo pela qual podemos retirar o proveito da escavação utilizando a fórmula do lucro de operação mencionada em cima. Os blocos a ser minados representam o fluxo dos vértices com lucro. Os blocos 2 e 10 não geram lucro suficiente para pagar a restrição. Todos os vértices representados a verde pertencem ao corte mínimo.

Lucro = 154

Custo de operação = 39

Proveito = 154 – 39 = 115

Validação do modelo

De modo a confirmar os valores obtidos pelo software de otimização de rede, Relax4, foi também desenvolvido o respetivo modelo com recurso ao lpsolve e um modelo alternativo recorrendo à recursividade de implicações que deu uma solução com valores de fluxo (variáveis de decisão) alternativos, corte mínimo e a solução em termos dos blocos a retirar igual. Também foi testado a versão online do Relax4, chamada Relax4 Neos que nos deu soluções de fluxo alternativas e solução ótima igual.

Na figura seguinte pudemos observar o ficheiro de input desta formulação:

```
/* Objective function */
max: 15 x1 + 3 x2 - 5 x3 + 0 x4
     - x5 +  14 x6 - x7 - 4 x8 - 4 x9 + 3 x10
     - 3 x11 - 3 x12 + 13 x13 - 3 x14 - 3 x15 - 3 x16 + 17 x17 - 3 x18
     - 2 x19 - 2 x20 - 2 x21 - 2 x22 + 10 x23 + 12 x24 + 13 x25 + 38 x26 - 2 x27 - 2 x28
     - x29 - x30 - x31 - x32 - x33 - x34 + 9 x35 +  7 x36 - x37 - x38 - x39 - x40;

/* Variable bounds */

x5 + x6 + x7 >= 3 x1;
x6 + x7 + x8 >= 3 x2;
x7 + x8 + x9 >= 3 x3;
x8 + x9 + x10 >= 3 x4;
x11 + x12 + x13 >= 3 x5;
x12 + x13 + x14 >= 3 x6;
x13 + x14 + x15 >= 3 x7;
x14 + x15 + x16 >= 3 x8;
x15 + x16 + x17 >= 3 x9;
x16 + x17 + x18 >= 3 x10;
x19 + x20 + x21 >= 3 x11;
x20 + x21 + x22 >= 3 x12;
x21 + x22 + x23 >= 3 x13;
x22 + x23 + x24 >= 3 x14;
x23 + x24 + x25 >= 3 x15;
x24 + x25 + x26 >= 3 x16;
x25 + x26 + x27 >= 3 x17;
x26 + x27 + x28 >= 3 x18;
x29 + x30 + x31 >= 3 x19;
x30 + x31 + x32 >= 3 x20;
x31 + x32 + x33 >= 3 x21;
x32 + x33 + x34 >= 3 x22;
x33 + x34 + x35 >= 3 x23;
x34 + x35 + x36 >= 3 x24;
x35 + x36 + x37 >= 3 x25;
x36 + x37 + x38 >= 3 x26;
x37 + x38 + x39 >= 3 x27;
x38 + x39 + x40 >= 3 x28;

Bin x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10,
    x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18, x19, x20,
    x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28, x29, x30,
    x31, x32, x33, x34, x35, x36, x37, x38, x39, x40;
```

A função objetivo Max $\Sigma\ L_i * X_i$, $i \in [1,40]$ traduz a relação entre o lucro e o valor binário de cada variável. Se a variável X_i fizer parte da solução ótima tomará valor 1, caso contrário tomará o valor 0.

As restrições garantem que, tratando-se de variáveis binárias, os três blocos imediatamente por cima do bloco a remover são também escavados.

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	re...
	108	111	115	115
x1	1	1	1	1
x5	1	1	1	1
x6	1	1	1	1
x7	1	1	1	1
x11	1	1	1	1
x12	1	1	1	1
x13	1	1	1	1
x14	1	1	1	1
x15	1	1	1	1
x17	1	1	1	1
x19	1	1	1	1
x20	1	1	1	1
x21	1	1	1	1
x22	1	1	1	1
x23	1	1	1	1
x24	1	1	1	1
x25	1	1	1	1
x26	1	1	1	1
x27	1	1	1	1
x29	1	1	1	1
x30	1	1	1	1
x31	1	1	1	1
x32	1	1	1	1
x33	1	1	1	1
x34	1	1	1	1
x35	1	1	1	1
x36	1	1	1	1
x37	1	1	1	1
x38	1	1	1	1
x39	1	1	1	1
x2	1	1	0	0
x3	0	0	0	0
x4	0	0	0	0
x8	1	1	0	0
x9	0	0	0	0
x10	1	0	0	0
x16	1	1	0	0
x18	1	0	0	0
x28	1	0	0	0
x40	1	0	0	0

Nesta figura é possível verificar que a solução ótima corresponde ao proveito que nos deu com valor do corte mínimo dado pela solução ótima do Relax4 e as variáveis de decisão com valor 1 / True que são escolhidas para minar na solução do lpsolve corresponde aos blocos a minar dos vértices da solução ótima dada pelo Relax4. A solução ótima encontrada também respeita a conservação do fluxo entra a fonte S e o terminal T como pode ser visto na rede de fluxo acima.

Conclusão

Num contexto de programação linear, procura-se primeiro encontrar o modelo que melhor descreve o problema, quer seja de maximização ou minimização. Problemas de investigação operacional podem ser expressos como modelos de programação linear, para determinar a solução de, por exemplo, o fluxo de redes de transportes. Neste caso em concreto deparámo-nos com um problema de maximização de lucro.

Este projeto modela uma operação mineira em que é necessário selecionar quais os blocos a remover de modo a maximizar o lucro.

De modo a validar o modelo de otimização de redes do programa relax4, foi também desenvolvido o respetivo modelo de fluxo de transportes para lpsolve, tendo-se obtido a mesma solução ótima. Uma vez que todas as restrições foram obedecidas e a solução foi verificada através de dois modelos, podemos concluir que a solução ótima é válida.

O modelo apresentado modela qualquer problema do mundo real, desde que contemple as mesmas restrições de remoção de blocos.

Por todas estas razões, consideramos que o trabalho modelado é efetivamente correto e obtém o melhor plano de exploração a seguir.

Referências

Valério de Carvalho J.M., “Programação Linear - modelos - Investigação Operacional”, 2 de outubro de 2020