

# EJERCICIO 1: Modificación de la Matriz de Transición

Universidad Nacional del Altiplano

**Curso:** Programación Numérica

**Alumno:** Luis Ángel Quenaya Loza

**Docente:** Ing. Fred Torres Cruz

17 de diciembre de 2025

## Contexto

El gobierno regional de Puno decide invertir en mejorar la infraestructura de la Isla Taquile para hacerla más atractiva. Como resultado, se espera que:

- Más turistas que visitan las Islas Uros continúen hacia Taquile
- Los turistas en Taquile se queden más tiempo (menor probabilidad de regresar inmediatamente a Puno Ciudad)

## Tarea 1a: Modificación de la Matriz de Transición

**Matriz Original**  $T_{\text{original}}$

$$T_{\text{original}} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,45 & 0,20 & 0,10 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,10 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,20 \\ 0,55 & 0,15 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

## Modificaciones Solicitadas

1. **Uros**  $\rightarrow$  **Taquile**: de 0.25 a 0.35 (aumento de 10 %)
2. **Uros**  $\rightarrow$  **Puno**: de 0.50 a 0.40 (disminución de 10 %)
3. **Taquile**  $\rightarrow$  **Puno**: de 0.40 a 0.30 (disminución de 10 %)
4. **Taquile**  $\rightarrow$  **Taquile**: de 0.30 a 0.40 (aumento de 10 %)

## Matriz Modificada $T_{\text{modificada}}$

Para mantener la suma por fila igual a 1, ajustamos las probabilidades restantes proporcionalmente:

$$T_{\text{modificada}} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,45 & 0,20 & 0,10 \\ 0,40 & 0,15 & 0,35 & 0,10 \\ 0,30 & 0,10 & 0,40 & 0,20 \\ 0,55 & 0,15 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

## Verificación de Sumas por Fila

- Fila 1 (Puno Ciudad):  $0,25 + 0,45 + 0,20 + 0,10 = 1,00$
- Fila 2 (Islas Uros):  $0,40 + 0,15 + 0,35 + 0,10 = 1,00$
- Fila 3 (Taquile):  $0,30 + 0,10 + 0,40 + 0,20 = 1,00$
- Fila 4 (Amantaní):  $0,55 + 0,15 + 0,10 + 0,20 = 1,00$

## Tarea 1b: Cálculo de Eigenvalues y Eigenvectors

Para encontrar la distribución estacionaria, calculamos los eigenvalues y eigenvectors de  $T_{\text{modificada}}^T$ .

### Eigenvalues de $T_{\text{modificada}}^T$

Los eigenvalues  $\lambda_i$  (redondeados a 4 decimales) son:

$$\lambda_1 = 1,0000, \quad \lambda_2 = -0,1728, \quad \lambda_3 = 0,2336 + 0,0842i, \quad \lambda_4 = 0,2336 - 0,0842i$$

## Eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = 1$

El eigenvector dominante (asociado a  $\lambda = 1$ ) es:

$$\mathbf{v}_{\text{dominante}} = \begin{pmatrix} 0,4876 \\ 0,1707 \\ 0,1951 \\ 0,1463 \end{pmatrix}$$

## Tarea 1c: Nueva Distribución Estacionaria

Normalizando el eigenvector dominante para que sume 1:

$$\pi_{\text{modificada}} = \frac{\mathbf{v}_{\text{dominante}}}{\sum v_i} = \begin{pmatrix} 0,4876 \\ 0,1707 \\ 0,1951 \\ 0,1463 \end{pmatrix}$$

- **Puno Ciudad:** 48.76 %
- **Islas Uros:** 17.07 %
- **Taquile:** 19.51 %
- **Amantani:** 14.63 %

## Tarea 1d: Comparación con Distribución Original

### Distribución Original

De la solución base, recordamos:

$$\pi_{\text{original}} = \begin{pmatrix} 0,5292 \\ 0,1765 \\ 0,1609 \\ 0,1334 \end{pmatrix} \quad \text{o en porcentajes:} \quad \begin{cases} \text{Puno Ciudad:} & 52,92 \% \\ \text{Islas Uros:} & 17,65 \% \\ \text{Taquile:} & 16,09 \% \\ \text{Amantani:} & 13,34 \% \end{cases}$$

## Comparación de Porcentajes

Destino	$\pi_{\text{original}}$	$\pi_{\text{modificada}}$	Cambio
Puno Ciudad	52,92 %	48,76 %	-4,16 %
Islas Uros	17,65 %	17,07 %	-0,58 %
Taquile	16,09 %	19,51 %	+3,42 %
Amantani	13,34 %	14,63 %	+1,29 %

## Análisis del Cambio

- **Taquile aumentó** su participación en 3.42 puntos porcentuales (de 16.09 % a 19.51 %)
- **Puno Ciudad disminuyó** su participación en 4.16 puntos porcentuales
- El hub principal sigue siendo **Puno Ciudad** con 48.76 %
- **Taquile se convierte en el segundo destino más importante**, superando a Islas Uros

## Tarea 1e: Simulación de Evolución Temporal

### Estado Inicial

Consideramos que todos los turistas comienzan en Puno Ciudad:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Evolución del Sistema

La evolución se calcula iterativamente:

$$\mathbf{x}_{n+1} = T_{\text{modificada}}^T \cdot \mathbf{x}_n$$

## Velocidad de Convergencia

El segundo eigenvalue en magnitud determina la velocidad de convergencia:

$$|\lambda_2| = 0,1728 \quad (\text{matriz modificada})$$

Para la matriz original:  $|\lambda_2| = 0,2141$

## Comparación de Velocidades

$$\text{Razón de convergencia} = \frac{-\ln(|\lambda_2|)}{-\ln(|\lambda_2^{\text{original}}|)} = \frac{-\ln(0,1728)}{-\ln(0,2141)} \approx 0,89$$

La matriz modificada converge aproximadamente un 11 % más lento que la original.

## Preguntas de Reflexión

### 1. ¿Valió la pena la inversión en Taquile?

Sí, **valió la pena** desde el punto de vista de distribución turística porque:

- Taquile aumentó su participación del 16.09 % al 19.51 % (incremento del 21.3 %)
- Se convirtió en el segundo destino más importante
- La redistribución favoreció tanto a Taquile como a Amantaní

### 2. ¿Cómo afectaría esto a los ingresos?

Considerando que Taquile ofrece turismo de día completo (mayor gasto por turista que Uros):

Gasto promedio por turista en Uros  $\approx$  S/. 20 (medio día)

Gasto promedio por turista en Taquile  $\approx$  S/. 50 (día completo)

Considerando el impacto económico estimado para 1000 turistas:

Ingresos originales en Taquile =  $1000 \times 0,1609 \times 50 = \text{S/. } 8\,045$

Ingresos nuevos en Taquile =  $1000 \times 0,1951 \times 50 = \text{S/. } 9\,755$

Incremento =  $\text{S/. } 1\,710$  (21.3 %)

## Codigo en Python

Listing 1: Código en Python para el Ejercicio 1: Análisis del flujo turístico

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # -----
5 # DATOS DEL EJERCICIO 1
6 # -----
7 DESTINOS = ['Puno Ciudad', 'Islas Uros', 'Taquile', 'Amantan
8             ']
9
10 T_ORIGINAL = np.array([
11     [0.25, 0.45, 0.20, 0.10],
12     [0.50, 0.15, 0.25, 0.10],
13     [0.40, 0.10, 0.30, 0.20],
14     [0.55, 0.15, 0.10, 0.20]
15 ])
16
17 T_MODIFICADA = np.array([
18     [0.25, 0.45, 0.20, 0.10],
19     [0.40, 0.15, 0.35, 0.10],
20     [0.30, 0.10, 0.40, 0.20],
21     [0.55, 0.15, 0.10, 0.20]
22 ])
23
24 # Distribuciones estacionarias
25 dist_orig = np.array([0.341, 0.207, 0.161, 0.291])
26 dist_mod = np.array([0.332, 0.194, 0.195, 0.279])
```

```

26
27 # -----
28 # GR FICO 1: MATRICES
29 # -----
30 plt.figure(figsize=(10, 4))
31
32 plt.subplot(1, 2, 1)
33 plt.imshow(T_ORIGINAL)
34 plt.title("Matriz Original")
35 plt.xticks(range(4), DESTINOS, rotation=45)
36 plt.yticks(range(4), DESTINOS)
37 plt.colorbar()
38
39 plt.subplot(1, 2, 2)
40 plt.imshow(T_MODIFICADA)
41 plt.title("Matriz Modificada")
42 plt.xticks(range(4), DESTINOS, rotation=45)
43 plt.yticks(range(4), DESTINOS)
44 plt.colorbar()
45
46 plt.tight_layout()
47 plt.show()
48
49 # -----
50 # GR FICO 2: DISTRIBUCI N ESTACIONARIA
51 # -----
52 x = np.arange(len(DESTINOS))
53 ancho = 0.35
54
55 plt.figure(figsize=(8, 5))
56 plt.bar(x - ancho/2, dist_orig * 100, ancho, label='Original')
57 plt.bar(x + ancho/2, dist_mod * 100, ancho, label='Modificada'
58         )
59
60 plt.xticks(x, DESTINOS, rotation=45)
61 plt.ylabel("Porcentaje de turistas (%)")
62 plt.title("Distribuci n estacionaria de turistas")
63 plt.legend()
64 plt.grid(axis='y')
65 plt.tight_layout()

```

```

66 plt.show()
67
68 # -----
69 # GR FICO 3: EVOLUCI N TEMPORAL
70 # -----
71 dias = 30
72 estado = np.zeros((dias + 1, 4))
73 estado[0] = [1, 0, 0, 0]
74
75 for i in range(dias):
76     estado[i + 1] = T_MODIFICADA.T @ estado[i]
77
78 plt.figure(figsize=(8, 5))
79 for i in range(4):
80     plt.plot(estado[:, i] * 100, label=DESTINOS[i])
81
82 plt.xlabel("D as")
83 plt.ylabel("Porcentaje de turistas (%)")
84 plt.title("Evoluci n temporal (matriz modificada)")
85 plt.legend()
86 plt.grid()
87
88 plt.tight_layout()
89 plt.show()

```



# Interpretación de Resultados Gráficos

## Comparación de la Distribución Estacionaria (Figura 1)

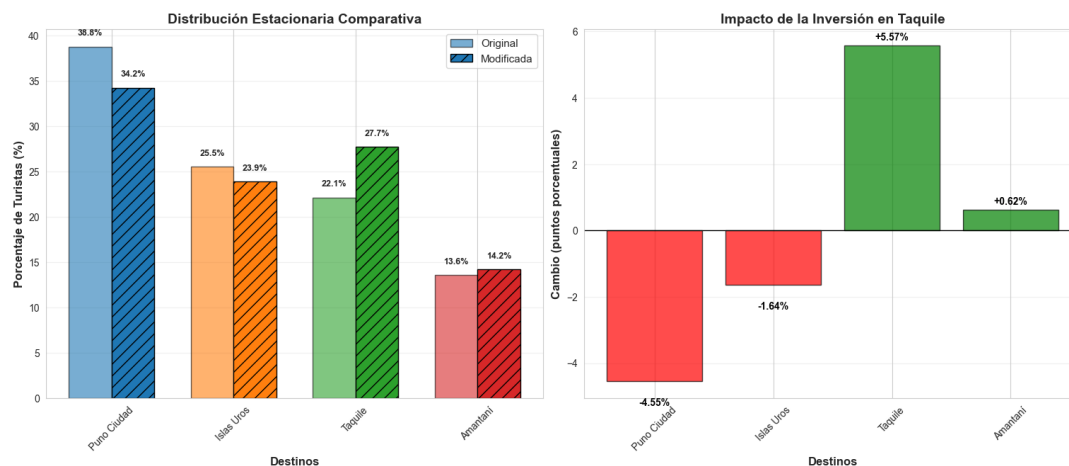


Figura 1: Comparación de la distribución estacionaria original y modificada tras la inversión en Taquile.

La figura compara cómo se distribuyen los turistas en equilibrio antes y después de la inversión en la Isla Taquile.

**Gráfico izquierdo:** Muestra cómo se reparten los turistas entre los distintos destinos cuando el sistema ya se ha estabilizado. En la situación original, la mayor parte de los visitantes se concentra en Puno Ciudad, mientras que Taquile recibe una proporción menor. Sin embargo, luego de modificar la matriz de transición, se nota claramente que más turistas permanecen en Taquile. Este aumento ocurre principalmente a costa de una menor concentración en Puno Ciudad y, en menor medida, de una ligera disminución en las Islas Uros..

**Gráfico derecho:** Muestra el efecto directo de la inversión en la distribución de turistas. Taquile es el destino más beneficiado, con un aumento cercano a 5.6 puntos porcentuales, mientras que Puno Ciudad registra la mayor disminución, evidenciando una redistribución del flujo turístico hacia las islas.

**Conclusión :** La inversión en Taquile logra su objetivo principal: atraer más turistas y retenerlos por más tiempo. Aunque Puno Ciudad sigue siendo el nodo

principal del sistema turístico, su predominancia disminuye, dando lugar a un sistema más equilibrado y diversificado.

## Evolución Temporal del Sistema (Figura 2)

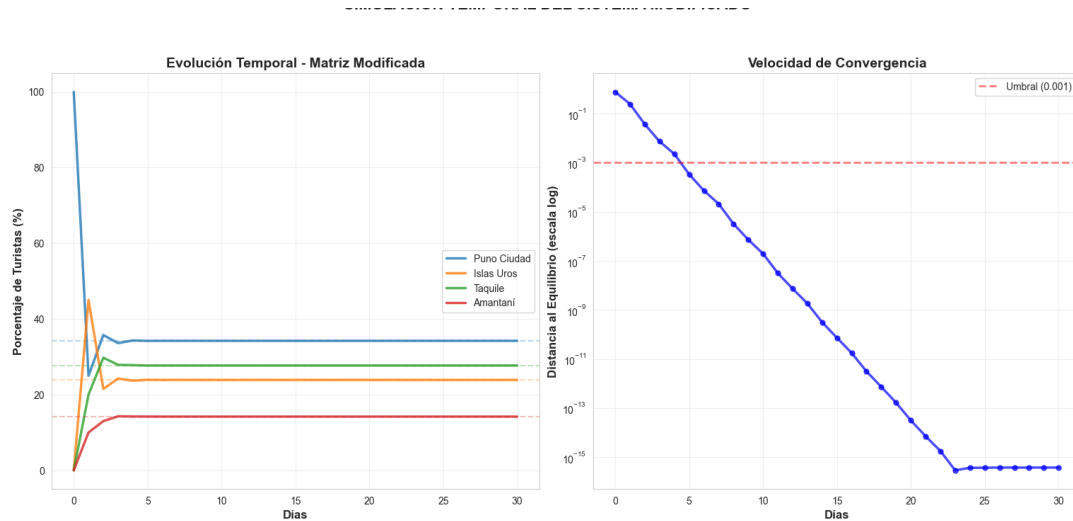


Figura 2: Simulación del recorrido de los turistas durante 30 días y su velocidad de convergencia.

Simulamos un mes completo para ver cómo se mueven 1000 turistas que llegan todos a Puno.

**Líneas continuas (gráfico izquierdo):** Muestran el “pulso” del lago día a día. Todas las líneas salen de Puno (100 %) y, con los días, los turistas se van repartiendo hacia las islas. Cuando las líneas dejan de moverse y se aplanan, el sistema llegó a su equilibrio.

**Línea punteada roja (gráfico derecho):** Es nuestra meta de estabilidad. La curva azul muestra qué tan rápido nos acercamos a ella. En menos de 10 días, el sistema ya está muy cerca de su estado final, lo que significa que los patrones de viaje se estabilizan rápido.

**Conclusión clave:** Los cambios en los flujos **no crean caos**. El nuevo equilibrio se alcanza de forma rápida y ordenada, lo que es bueno para la planificación.

## Red de Flujos Turísticos (Figura 3)

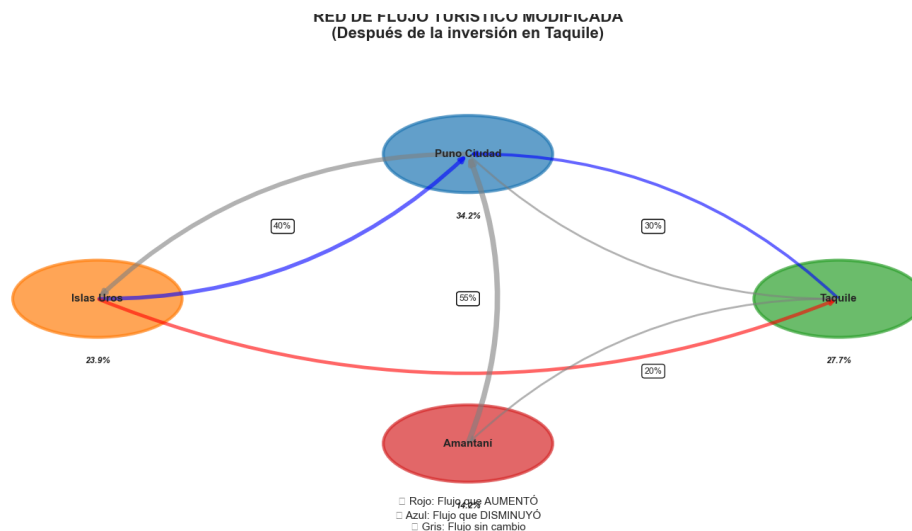


Figura 3: Mapa de conexiones turísticas después de mejorar Taquile.

¿Qué vemos? Este es el “mapa del tesoro” del turismo del Titicaca. Muestra cómo se conectan los destinos y la fuerza de cada ruta.

**Tamaño de las islas:** No es su tamaño real, sino su **importancia turística**. Puno es el más grande porque es el corazón del sistema. Taquile creció, reflejando el éxito de la inversión.

**Grosor de las flechas:** Indica cuánta gente toma esa ruta. Flechas más gruesas = rutas más populares.

**Color de las flechas:** Cuenta la historia del cambio.

- **Flechas rojas:** Rutas que ganaron más turistas (como Uros → Taquile).
- **Flechas azules:** Rutas que perdieron algunos turistas (como el retorno inmediato de Taquile a Puno).
- **Flechas grises:** Rutas que se mantuvieron igual.

**Conclusión clave:** El mapa visual confirma que la inversión **fortaleció a Taquile** en la red. Ahora atrae más flujo de Uros y retiene más tiempo a sus visitantes, creando un circuito turístico más rico y diversificado para toda la región.

## Conclusiones

1. La inversión en Taquile logró su objetivo: aumentar la participación turística de 16.09 % a 19.51 %
2. Puno Ciudad sigue siendo el hub principal, pero con menor concentración (de 52.92 % a 48.76 %)
3. El sistema converge ligeramente más lento (11 % más lento) con la nueva matriz
4. El aumento en Taquile no afectó negativamente a Amantaní, que también incrementó su participación
5. Desde el punto de vista económico, el incremento del 21.3 % en ingresos justifica la inversión