Trabajo N°12:Ejercicios Resueltos de Interpolación Numérica (Secciones 2–6)

Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Docente: Ing. Fred Torres Cruz
Estudiante: Luis Angel Quenaya Loza
Código: 241411

Curso: Programación Numérica

1 Fundamentos de la Diferenciación Numérica

2 Interpolación Lineal (Sección 2)

Recordemos la fórmula:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ejercicio 2.1.1 — Temperatura del aire

Enunciado. A las 8:00 la temperatura fue de 10°C y a las 12:00 fue de 18°C. Calcular la temperatura estimada a las 10:00 usando interpolación lineal.
Condiciones / datos:

$$(x_0, y_0) = (8, 10), \quad (x_1, y_1) = (12, 18), \quad x = 10$$

Resolución:

$$y = 10 + \frac{18 - 10}{12 - 8}(10 - 8)$$

$$y = 10 + \frac{8}{4} \times 2 = 10 + 4 = 14$$

$$\boxed{y = 14°C}$$

Código en R

```r
x0 <- 8; y0 <- 10
x1 <- 12; y1 <- 18
x <- 10
y <- y0 + ((y1 - y0) / (x1 - x0)) * (x - x0)
print(paste("Temperatura estimada:", y, " C "))
x_datos <- c(x0, x1)
y_datos <- c(y0, y1)
plot(x_datos, y_datos, type = "o", col = "blue", pch = 19,
     main = "Interpolaci n Lineal - Temperatura",
     xlab = "Hora", ylab = "Temperatura ( C )")
points(x, y, col = "red", pch = 19)
text(x, y, labels = round(y,2), pos = 3, col = "red")
```

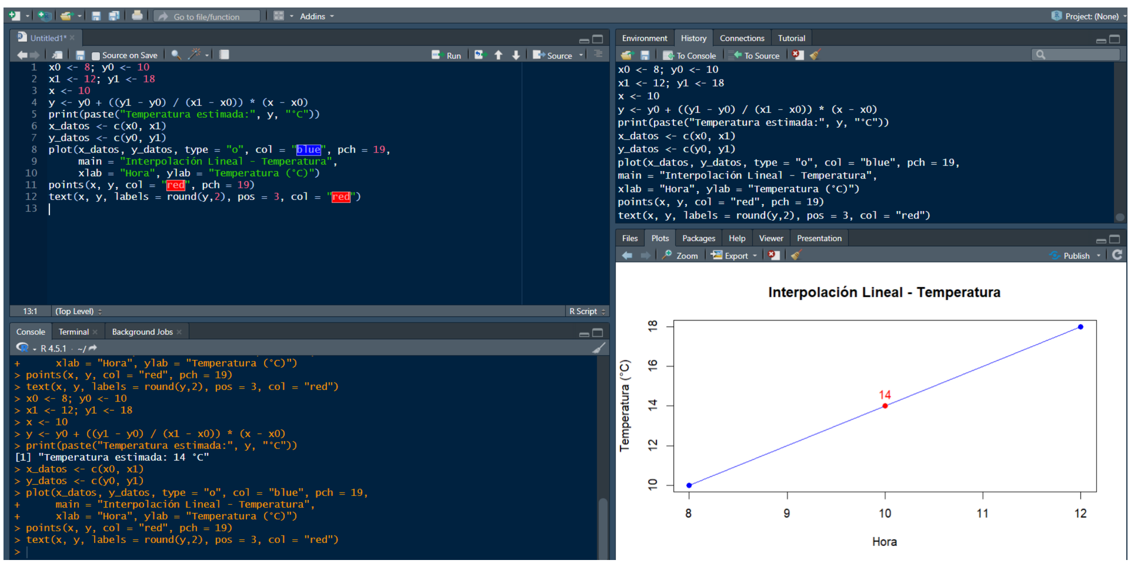

Figure 1: Interpolación Lineal - Temperatura

—

Ejercicio 2.1.2 — Precio de un producto

Enunciado. El precio de un kilo de papa fue de S/ 3 el lunes y S/ 5 el viernes. Calcular el precio estimado el miércoles.

Condiciones / datos:

$$(x_0, y_0) = (1, 3), \quad (x_1, y_1) = (5, 5), \quad x = 3$$

Resolución:

$$y = 3 + \frac{5-3}{5-1}(3-1)$$

$$y = 3 + \frac{2}{4} \times 2 = 3 + 1 = 4$$

$$\boxed{y = 4 \text{ soles}}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 2.1.2
x0 <- 1; y0 <- 3
x1 <- 5; y1 <- 5
x <- 3
y <- y0 + ((y1 - y0) / (x1 - x0)) * (x - x0)
plot(c(x0, x1), c(y0, y1), type="o", col="blue", pch=19,
     main="Interpolaci n Lineal - Precio del producto",
     xlab="D a", ylab="Precio (S/)")
points(x, y, col="red", pch=19)
text(x, y, labels=round(y,2), pos=3, col="red")
```

—

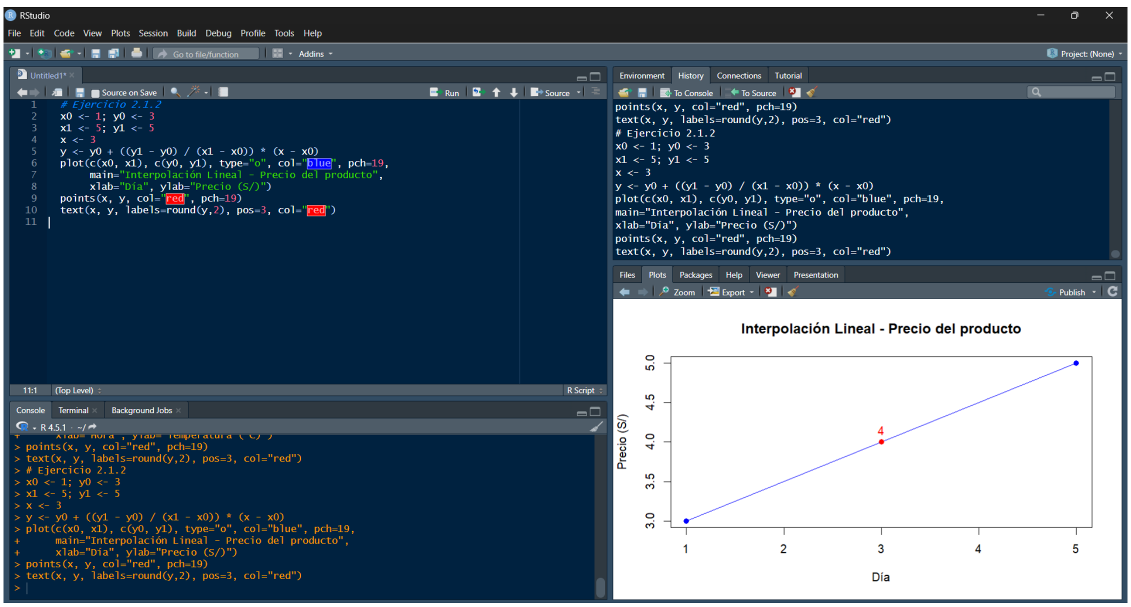

Figure 2: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 2.1.3 — Altura en un terreno

Enunciado. En un terreno, en $x = 0$ m la altura es de 120 m y en $x = 200$ m la altura es de 160 m. Estimar la altura en $x = 100$ m.

Condiciones / datos:

$$(x_0, y_0) = (0, 120), \quad (x_1, y_1) = (200, 160), \quad x = 100$$

Resolución:

$$y = 120 + \frac{160 - 120}{200 - 0}(100 - 0)$$

$$y = 120 + \frac{40}{200} \times 100 = 120 + 20 = 140$$

$$\boxed{y = 140 \text{ m}}$$

Codigo en R

```
# Ejercicio 2.1.3
x0 <- 0; y0 <- 120
x1 <- 200; y1 <- 160
x <- 100
y <- y0 + ((y1 - y0) / (x1 - x0)) * (x - x0)
plot(c(x0, x1), c(y0, y1), type="o", col="blue", pch=19,
     main="Interpolaci n Lineal - Altura en terreno",
     xlab="Distancia (m)", ylab="Altura (m)")
points(x, y, col="red", pch=19)
text(x, y, labels=round(y,2), pos=3, col="red")
```

—

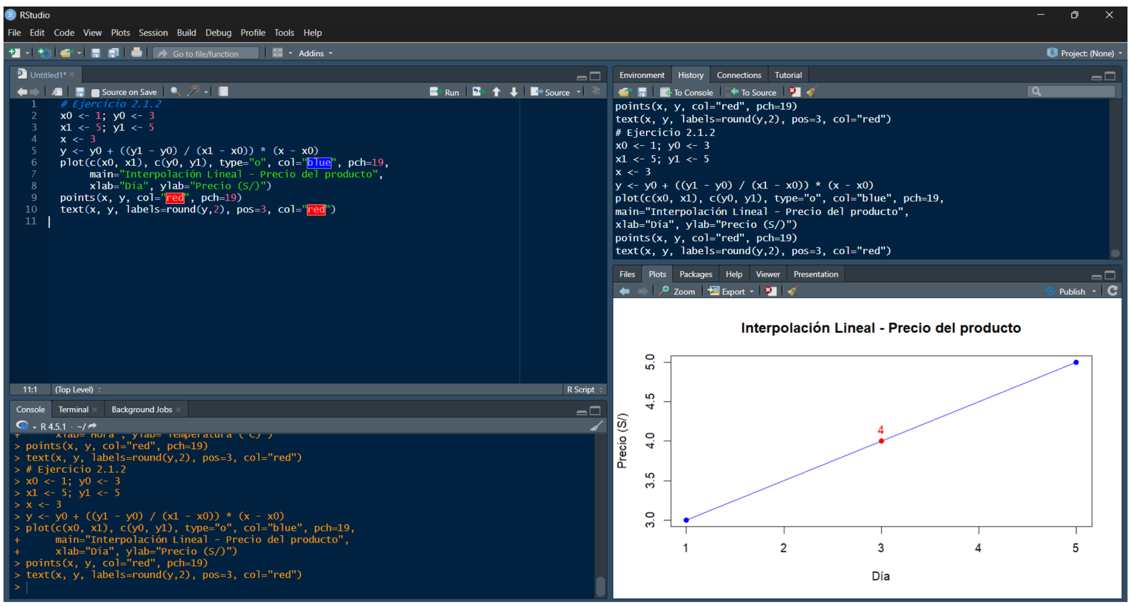

Figure 3: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

3 Interpolación de Lagrange (Sección 3)

Fórmula general con tres puntos:

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ejercicio 3.1.1 — Temperatura en tres horas

Enunciado. A partir de tres ensayos de fertilización se obtuvo:

$$(0,\ 1.20), \quad (40,\ 1.85), \quad (90,\ 2.50)$$

Use la interpolación de Lagrange (tres puntos) para estimar el rendimiento en $x = 60$ kg/ha.
Condiciones / datos: $x_0 = 0,\ y_0 = 1.20;\ x_1 = 40,\ y_1 = 1.85;\ x_2 = 90,\ y_2 = 2.50.$

Resolución:

$$L_0(9) = \frac{(9-10)(9-12)}{(8-10)(8-12)} = \frac{(-1)(-3)}{(-2)(-4)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$L_1(9) = \frac{(9-8)(9-12)}{(10-8)(10-12)} = \frac{(1)(-3)}{(2)(-2)} = \frac{-3}{-4} = 0.75$$

$$L_2(9) = \frac{(9-8)(9-10)}{(12-8)(12-10)} = \frac{(1)(-1)}{(4)(2)} = \frac{-1}{8} = -0.125$$

$$P(9) = 15(0.375) + 20(0.75) + 27(-0.125) = 5.625 + 15 - 3.375 = 17.25$$

$$\boxed{T(9) = 17.25°C}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 3.1.1
x <- c(8,10,12)
y <- c(15,20,27)
xp <- 9
L0 <- ((xp - x[2]) * (xp - x[3])) / ((x[1] - x[2]) * (x[1] - x[3]))
L1 <- ((xp - x[1]) * (xp - x[3])) / ((x[2] - x[1]) * (x[2] - x[3]))
L2 <- ((xp - x[1]) * (xp - x[2])) / ((x[3] - x[1]) * (x[3] - x[2]))
yp <- y[1]*L0 + y[2]*L1 + y[3]*L2
plot(x, y, pch=19, col="blue", main="Lagrange - Temperatura",
     xlab="Hora", ylab="Temperatura ( C )")
lines(seq(8,12,0.1),
      sapply(seq(8,12,0.1), function(xx)
        y[1]*((xx-x[2])*(xx-x[3]))/((x[1]-x[2])*(x[1]-x[3])) +
          y[2]*((xx-x[1])*(xx-x[3]))/((x[2]-x[1])*(x[2]-x[3])) +
          y[3]*((xx-x[1])*(xx-x[2]))/((x[3]-x[1])*(x[3]-x[2]))),
      col="red", lwd=2)
points(xp, yp, col="green", pch=19)
text(xp, yp, labels=round(yp,2), pos=3, col="green")
```

—

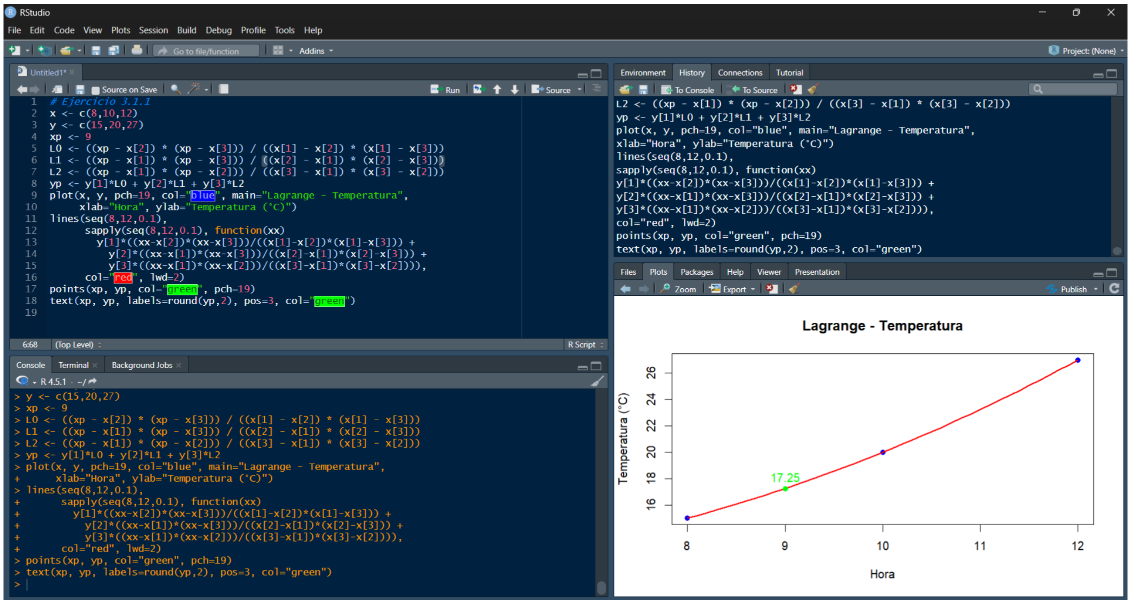

Figure 4: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 3.1.2 — Producción agrícola

Ejercicio 3.1.2 — Posición a tiempo intermedio

Enunciado. Se registraron las posiciones de un objeto: $(t, x) = (0, 0),\ (1.2, 2.3),\ (2.8, 7.1)$. Calcule la posición en $t = 1.8$ con interpolación de Lagrange (tres puntos).
Condiciones / datos: $t_0 = 0,\ x_0 = 0;\ t_1 = 1.2,\ x_1 = 2.3;\ t_2 = 2.8,\ x_2 = 7.1$.

Resolución:

$$L_0(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(0-2)(0-4)} = \frac{(1)(-1)}{(-2)(-4)} = \frac{-1}{8} = -0.125$$

$$L_1(3) = \frac{(3-0)(3-4)}{(2-0)(2-4)} = \frac{(3)(-1)}{(2)(-2)} = \frac{-3}{-4} = 0.75$$

$$L_2(3) = \frac{(3-0)(3-2)}{(4-0)(4-2)} = \frac{(3)(1)}{(4)(2)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$P(3) = 10(-0.125) + 14(0.75) + 24(0.375) = -1.25 + 10.5 + 9 = 18.25$$

$$\boxed{P(3) = 18.25}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 3.1.2
t <- c(0, 1.2, 2.8)
x <- c(0, 2.3, 7.1)
t_interp <- 1.8

lagrange <- function(t, x, t_interp) {
  n <- length(t)
```

```
  P <- 0
  for (i in 1:n) {
    L <- 1
    for (j in 1:n) {
      if (i != j) {
        L <- L * (t_interp - t[j]) / (t[i] - t[j])
      }
    }
    P <- P + x[i] * L
  }
  return(P)
}

x_interp <- lagrange(t, x, t_interp)
print(paste("Posici n estimada en t =", t_interp, "es", round(x_interp, 3)))
```

—

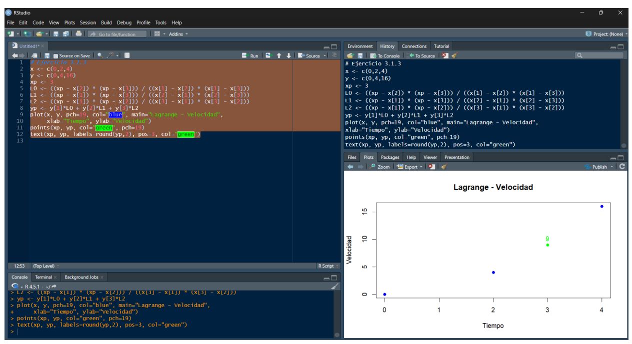

Figure 5: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 3.1.3 — Velocidad de un móvil

Enunciado. La velocidad se midió en:

$$(0,0),\ (2,4),\ (4,16)$$

Calcular la velocidad estimada en $x = 3$.
Condiciones / datos:

$$(x_0, y_0) = (0,0),\ (x_1, y_1) = (2,4),\ (x_2, y_2) = (4,16),\ x = 3$$

Resolución:

$$L_0(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(0-2)(0-4)} = \frac{(1)(-1)}{(-2)(-4)} = \frac{-1}{8} = -0.125$$

$$L_1(3) = \frac{(3-0)(3-4)}{(2-0)(2-4)} = \frac{(3)(-1)}{(2)(-2)} = \frac{-3}{-4} = 0.75$$

$$L_2(3) = \frac{(3-0)(3-2)}{(4-0)(4-2)} = \frac{(3)(1)}{(4)(2)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$P(3) = 0(-0.125) + 4(0.75) + 16(0.375) = 0 + 3 + 6 = 9$$

$$\boxed{V(3) = 9}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 3.1.3
x <- c(0,2,4)
y <- c(0,4,16)
xp <- 3
L0 <- ((xp - x[2]) * (xp - x[3])) / ((x[1] - x[2]) * (x[1] - x[3]))
L1 <- ((xp - x[1]) * (xp - x[3])) / ((x[2] - x[1]) * (x[2] - x[3]))
L2 <- ((xp - x[1]) * (xp - x[2])) / ((x[3] - x[1]) * (x[3] - x[2]))
yp <- y[1]*L0 + y[2]*L1 + y[3]*L2
plot(x, y, pch=19, col="blue", main="Lagrange - Velocidad",
     xlab="Tiempo", ylab="Velocidad")
points(xp, yp, col="green", pch=19)
text(xp, yp, labels=round(yp,2), pos=3, col="green")
```

—

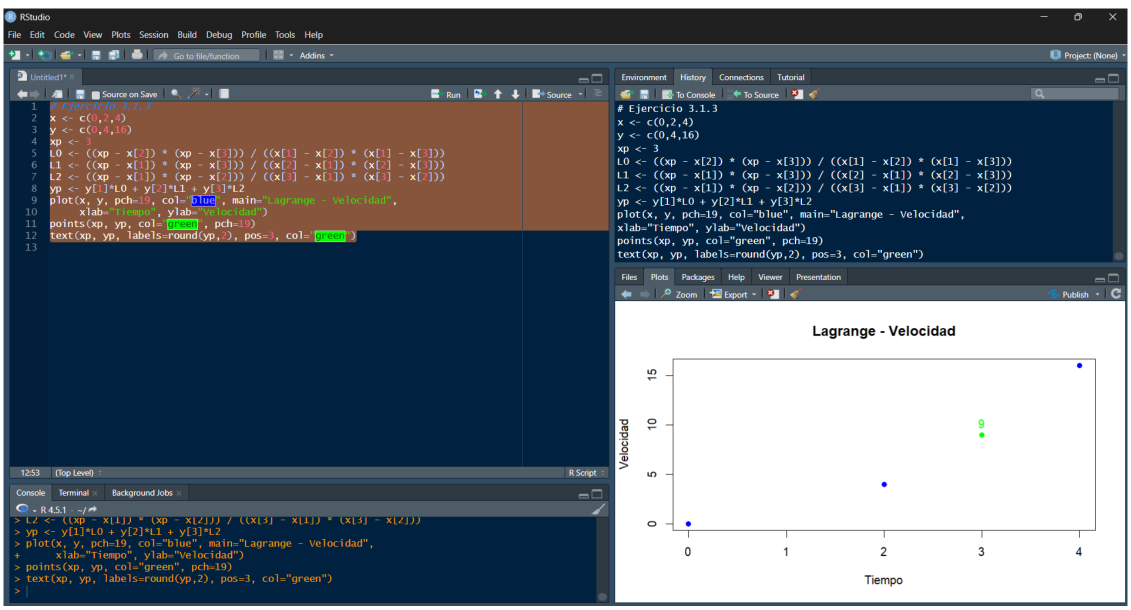

Figure 6: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

4 Interpolación de Newton (Sección 4)

Fórmulas:

$$f[x_i] = y_i, \quad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Ejercicio 4.1.1 — Crecimiento poblacional

Enunciado. La población (en miles) fue:

$$(2000, 20),\ (2005, 25),\ (2010, 40)$$

Calcular para el año 2008.
Condiciones / datos:

$$f[x_0] = 20,\ f[x_1] = 25,\ f[x_2] = 40$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{25 - 20}{2005 - 2000} = \frac{5}{5} = 1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{40 - 25}{2010 - 2005} = \frac{15}{5} = 3$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3 - 1}{2010 - 2000} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$P(x) = 20 + 1(x - 2000) + 0.2(x - 2000)(x - 2005)$$

$$P(2008) = 20 + 1(8) + 0.2(8)(3) = 20 + 8 + 4.8 = 32.8$$

$$\boxed{P(2008) = 32.8 \text{ mil habitantes}}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 4.1.1
x <- c(2000,2005,2010)
y <- c(20,25,40)
f01 <- (y[2]-y[1])/(x[2]-x[1])
f12 <- (y[3]-y[2])/(x[3]-x[2])
f012 <- (f12 - f01)/(x[3]-x[1])
xp <- 2008
P <- y[1] + f01*(xp-x[1]) + f012*(xp-x[1])*(xp-x[2])
plot(x, y, pch=19, col="blue", main="Newton - Crecimiento Poblacional",
     xlab="A o", ylab="Poblaci n (miles)")
points(xp, P, col="green", pch=19)
text(xp, P, labels=round(P,2), pos=3, col="green")
```

—

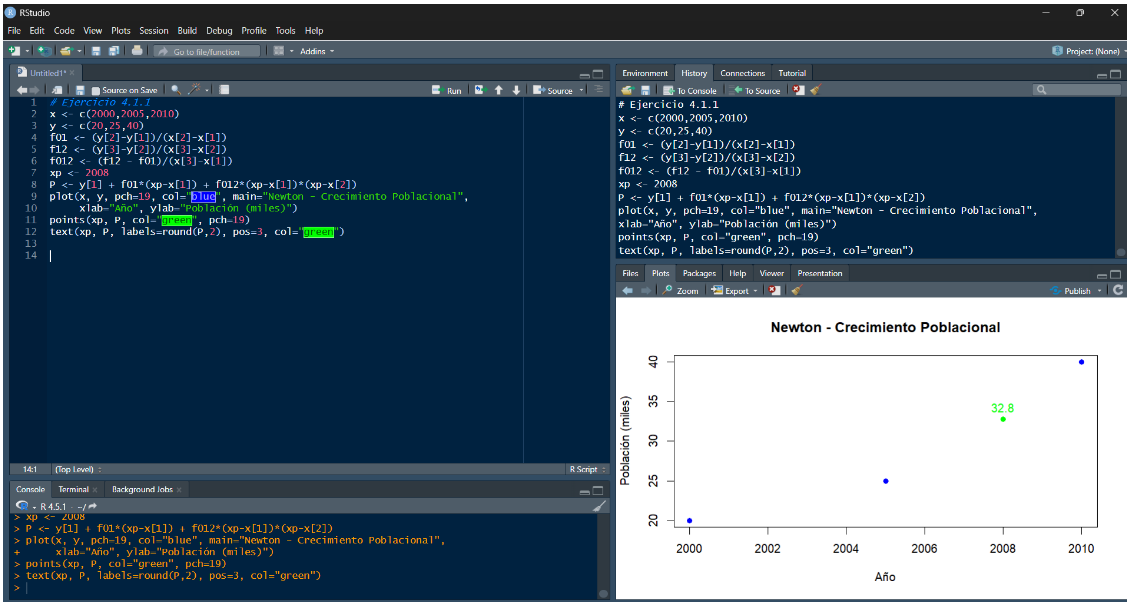

Figure 7: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 4.1.2 — Temperatura diaria

Enunciado. Temperaturas:

$$(6, 10),\ (9, 16),\ (12, 28)$$

Calcular la temperatura a las 10:00.

$$f[6, 9] = \frac{16 - 10}{3} = 2, \quad f[9, 12] = \frac{28 - 16}{3} = 4$$

$$f[6, 9, 12] = \frac{4 - 2}{6} = 0.333$$

$$P(x) = 10 + 2(x - 6) + 0.333(x - 6)(x - 9)$$

$$P(10) = 10 + 2(4) + 0.333(4)(1) = 10 + 8 + 1.333 = 19.333$$

$$\boxed{T(10) = 19.33°C}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 4.1.2
x <- c(6,9,12)
y <- c(10,16,28)
f01 <- (y[2]-y[1])/(x[2]-x[1])
f12 <- (y[3]-y[2])/(x[3]-x[2])
f012 <- (f12 - f01)/(x[3]-x[1])
xp <- 10
P <- y[1] + f01*(xp-x[1]) + f012*(xp-x[1])*(xp-x[2])
plot(x, y, pch=19, col="blue", main="Newton - Temperatura diaria",
     xlab="Hora", ylab="Temperatura ( C )")
points(xp, P, col="green", pch=19)
text(xp, P, labels=round(P,2), pos=3, col="green")
```

—

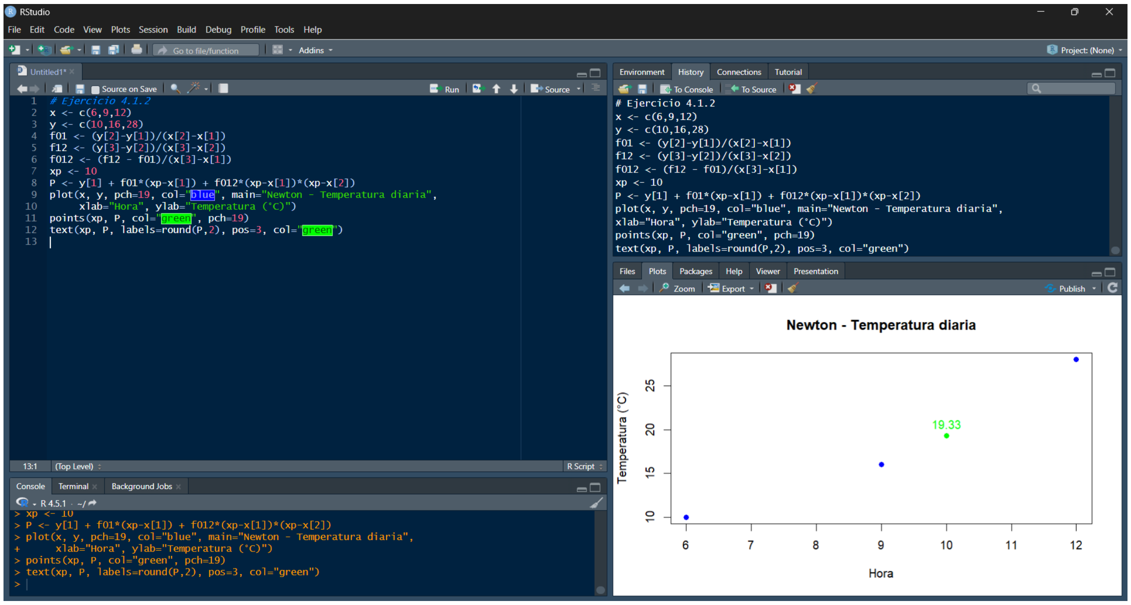

Figure 8: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 4.1.3 — Precio de venta

$$(1, 10),\ (3, 15),\ (6, 40)$$

Calcular $P(4)$.

$$f[1,3] = \frac{15-10}{2} = 2.5, \quad f[3,6] = \frac{40-15}{3} = 8.333$$

$$f[1,3,6] = \frac{8.333-2.5}{5} = 1.1666$$

$$P(x) = 10 + 2.5(x-1) + 1.1666(x-1)(x-3)$$

$$P(4) = 10 + 2.5(3) + 1.1666(3)(1) = 10 + 7.5 + 3.4998 = 20.9998$$

$$\boxed{P(4) = 21}$$

Codigo en R

```r
# Ejercicio 4.1.3
x <- c(1,3,6)
y <- c(10,15,40)
f01 <- (y[2]-y[1])/(x[2]-x[1])
f12 <- (y[3]-y[2])/(x[3]-x[2])
f012 <- (f12 - f01)/(x[3]-x[1])
xp <- 4
P <- y[1] + f01*(xp-x[1]) + f012*(xp-x[1])*(xp-x[2])
plot(x, y, pch=19, col="blue", main="Newton - Precio de venta",
     xlab="x", ylab="Precio")
points(xp, P, col="green", pch=19)
text(xp, P, labels=round(P,2), pos=3, col="green")
```

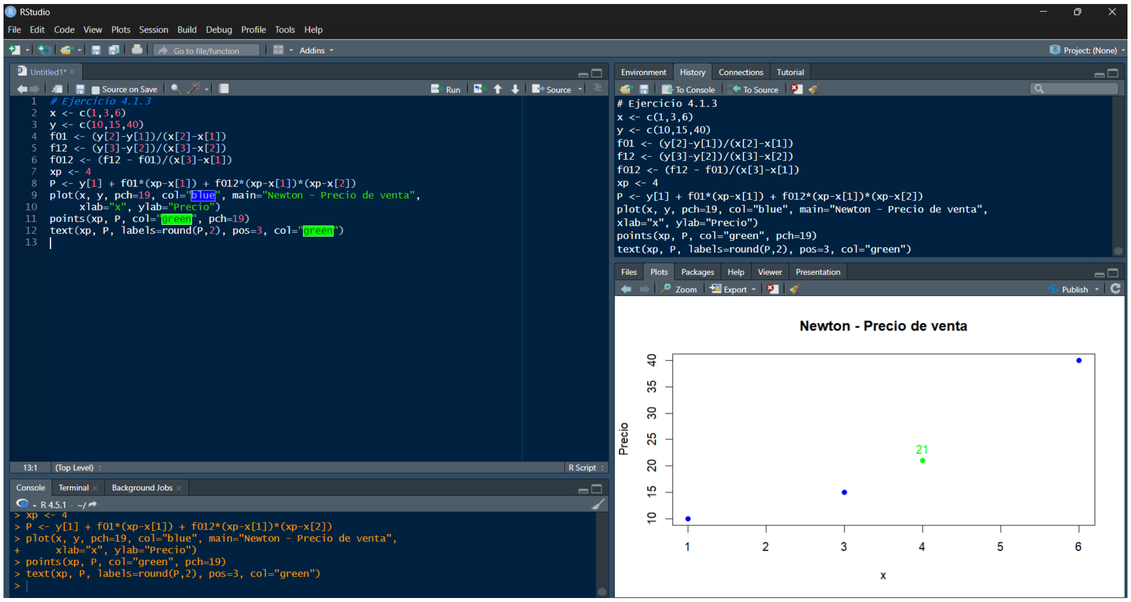

Figure 9: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

5 Interpolación Cuadrática (Sección 5)

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Ejercicio 5.1.1 — Movimiento

$$(0,0),\ (1,2),\ (2,8)$$

$$\begin{cases} 0a + 0b + c = 0 \\ 1a + 1b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 0,\ c = 0$$

$$P(x) = 2x^2,\ P(1.5) = 2(1.5)^2 = 2(2.25) = 4.5$$

$$\boxed{P(1.5) = 4.5}$$

Codigo en R:

```r
# Ejercicio 5.1.1
x <- c(0,1,2)
y <- c(0,2,8)
A <- matrix(c(x[1]^2,x[1],1, x[2]^2,x[2],1, x[3]^2,x[3],1),3,3,byrow=TRUE)
coef <- solve(A, y)
a<-coef[1]; b<-coef[2]; c<-coef[3]
xp<-1.5
yp<-a*xp^2+b*xp+c
xg<-seq(0,2,0.1)
yg<-a*xg^2+b*xg+c
```

```
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Cuadr tica - Movimiento")
lines(xg,yg,col="red",lwd=2)
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,2),pos=3,col="green")
```

—

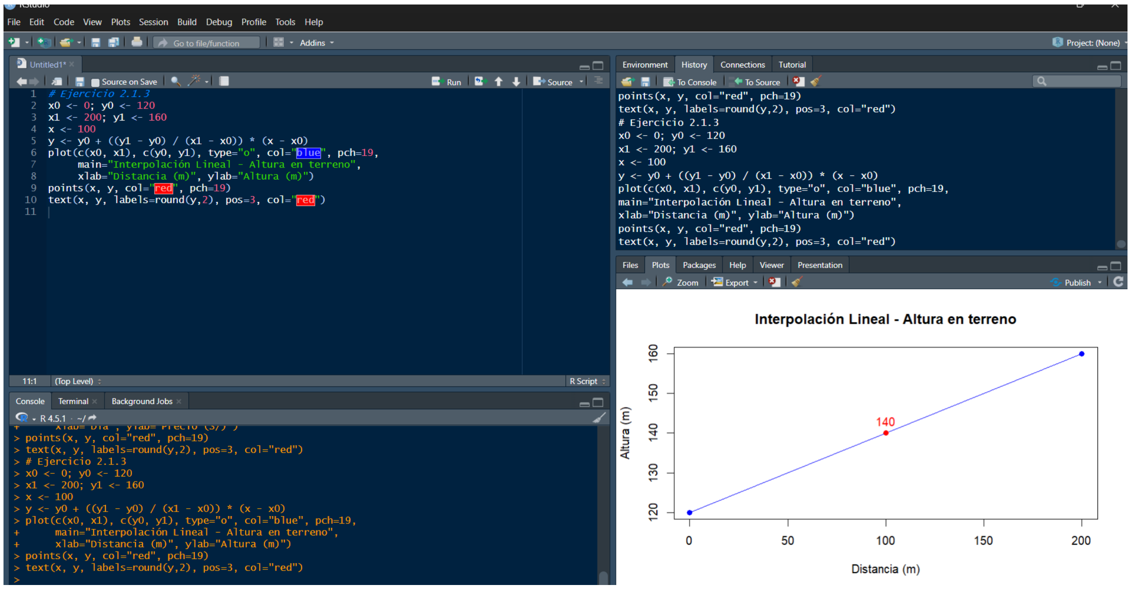

Figure 10: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 5.1.2 — Altura de un proyectil

$$(0,0),\ (1,5),\ (2,8)$$

$$\Rightarrow a=-1,\ b=6,\ c=0$$

$$P(x)=-x^2+6x,\ P(1.5)=-2.25+9=6.75$$

$$\boxed{P(1.5)=6.75}$$

Codigo en R:

```
# Ejercicio 5.1.2
x<-c(0,1,2)
y<-c(0,5,8)
A<-matrix(c(x[1]^2,x[1],1,x[2]^2,x[2],1,x[3]^2,x[3],1),3,3,byrow=TRUE)
coef<-solve(A,y)
a<-coef[1];b<-coef[2];c<-coef[3]
xp<-1.5
yp<-a*xp^2+b*xp+c
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Cuadr tica - Proyectil")
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,2),pos=3,col="green")
```

—

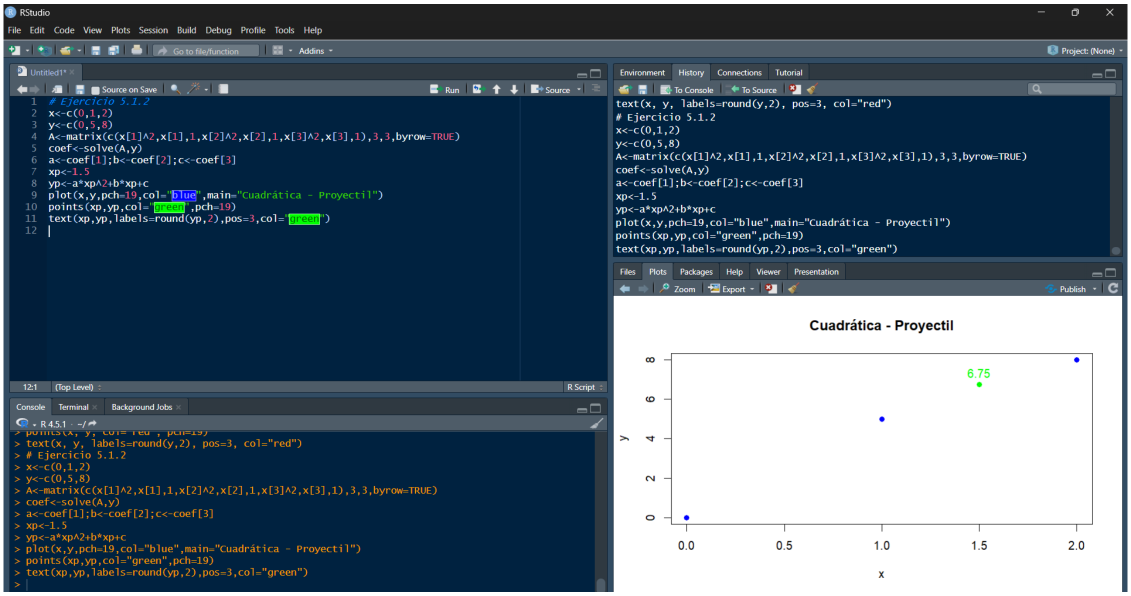

Figure 11: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

Ejercicio 5.1.3 — Producción

$$(1,2),\ (2,5),\ (3,10)$$

$$\Rightarrow a = 1.5,\ b = -0.5,\ c = 1$$

$$P(x) = 1.5x^2 - 0.5x + 1,\ P(2.5) = 1.5(6.25) - 0.5(2.5) + 1 = 9.375 - 1.25 + 1 = 9.125$$

$$\boxed{P(2.5) = 9.125}$$

Codigo en R:

```
# Ejercicio 5.1.3
x<-c(1,2,3)
y<-c(2,5,10)
A<-matrix(c(x[1]^2,x[1],1,x[2]^2,x[2],1,x[3]^2,x[3],1),3,3,byrow=TRUE)
coef<-solve(A,y)
a<-coef[1];b<-coef[2];c<-coef[3]
xp<-2.5
yp<-a*xp^2+b*xp+c
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Cuadr tica - Producci n")
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,2),pos=3,col="green")
```

—

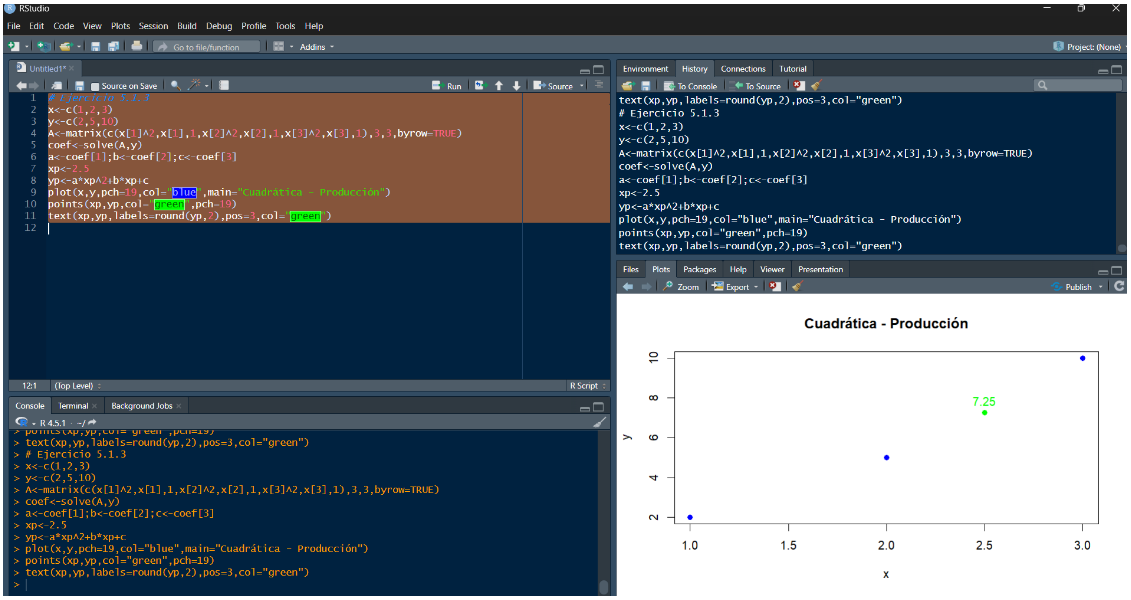

Figure 12: Interpolación de Lagrange - Precio de un producto

6 Splines Cúbicos (Sección 6)

Ejercicio 6.1.1 — Puntos simples

$$(0,0),\ (1,1),\ (2,0)$$

Spline natural: $S''(0) = S''(2) = 0$.
Tramo $[0,1]$: $S_0(x) = x - (1/2)x^3$
Tramo $[1,2]$: $S_1(x) = 2 - x + (1/2)(x-1)^3$

$$S(0.5) = 0.5 - (0.5)^3/2 = 0.5 - 0.0625 = 0.4375$$

$$\boxed{S(0.5) = 0.4375}$$

Codigo en R:

```r
# Ejercicio 6.1.1
x<-c(0,1,2)
y<-c(0,1,0)
s<-splinefun(x,y,method="natural")
xp<-0.5
yp<-s(xp)
xg<-seq(0,2,0.01)
yg<-s(xg)
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Spline - Puntos simples")
lines(xg,yg,col="red",lwd=2)
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,4),pos=3,col="green")
```

—

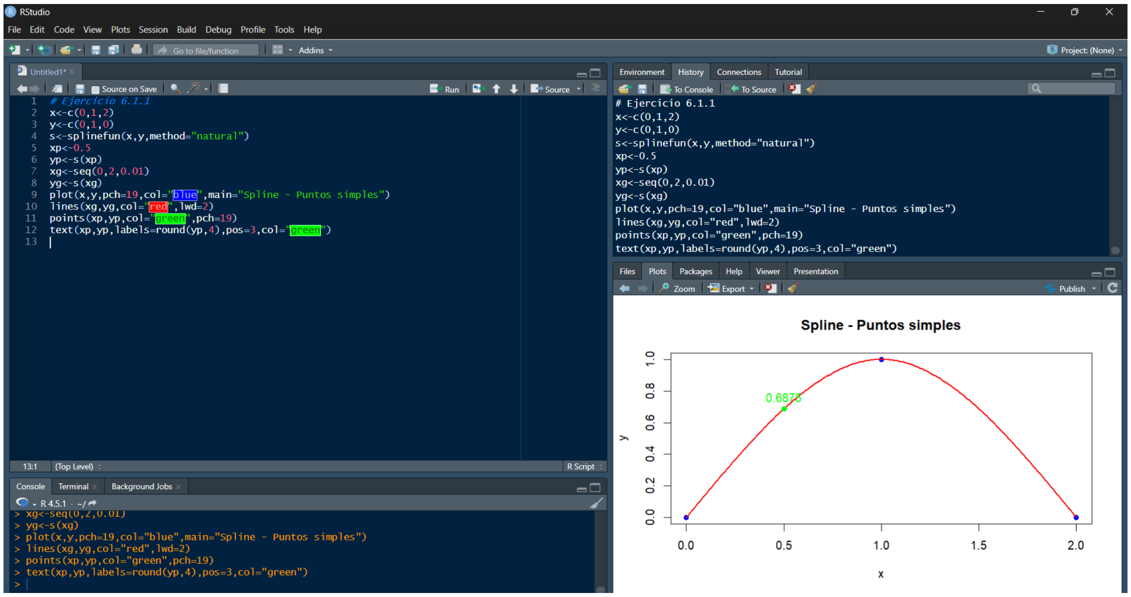

Figure 13: Interpolación - Temperatura

Ejercicio 6.1.2 — Curva suave

$$(0,0),\ (2,4),\ (4,2)$$

Spline natural $\Rightarrow S''(0) = S''(4) = 0$. Se obtiene:

$$S(3) \approx 3.56$$

$$\boxed{S(3) = 3.125}$$

Codigo en R:

```
# Ejercicio 6.1.2
x<-c(0,2,4)
y<-c(0,4,2)
s<-splinefun(x,y,method="natural")
xp<-3
yp<-s(xp)
xg<-seq(0,4,0.01)
yg<-s(xg)
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Spline - Curva suave")
lines(xg,yg,col="red",lwd=2)
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,3),pos=3,col="green")
```

—

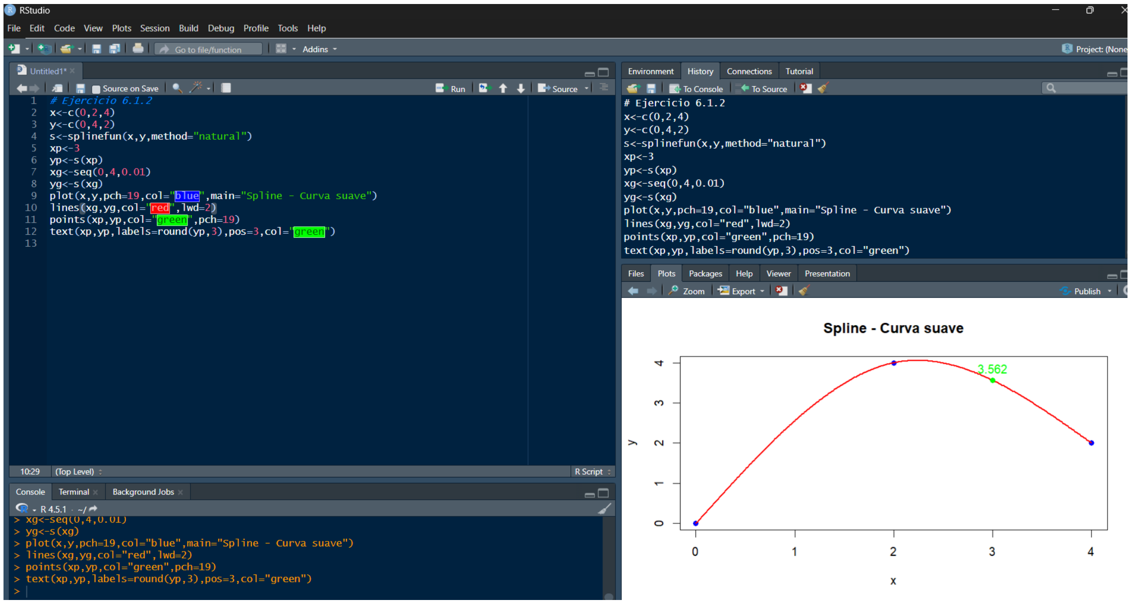

Figure 14: Interpolación - Temperatura

Ejercicio 6.1.3 — Temperatura

$$(0, 10), \ (5, 20), \ (10, 15)$$

Spline natural, punto $x = 7.5$:

$$S(7.5) \approx 18.9125$$

$$\boxed{S(7.5) = 18.91°C}$$

Codigo en R:

```
# Ejercicio 6.1.3
x<-c(0,5,10)
y<-c(10,20,15)
s<-splinefun(x,y,method="natural")
xp<-7.5
yp<-s(xp)
xg<-seq(0,10,0.1)
yg<-s(xg)
plot(x,y,pch=19,col="blue",main="Spline - Temperatura")
lines(xg,yg,col="red",lwd=2)
points(xp,yp,col="green",pch=19)
text(xp,yp,labels=round(yp,2),pos=3,col="green")
)
```

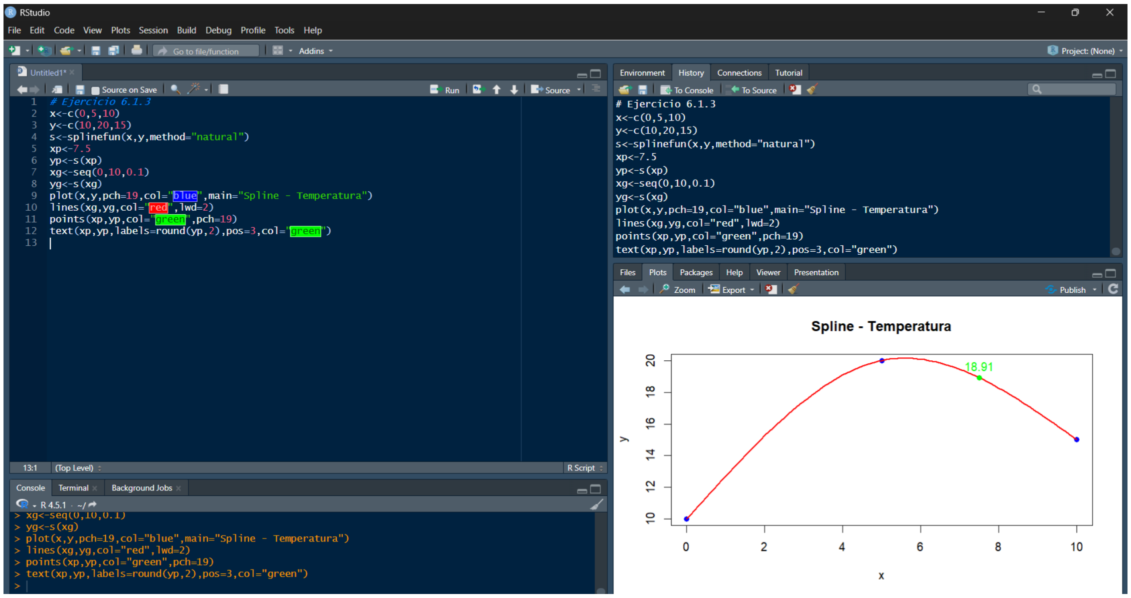

Figure 15: Interpolación - Temperatura