Hacer los impares y el 15.4-40

15.3

59-60 Encuentre el valor promedio de f sobre la región D.

59. $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$

15.4

19-27 Use coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

19. Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$

20. Bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy

21. Encerrada por el hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 2$

22. Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Una esfera de radio a

24. Acotado por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante

25. Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

29-32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

30. $\int_{0}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 y\, dx\, dy$

31. $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$

32. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

15.10 Ejercicios

1-6 Encuentre el jacobiano de la transformación

1. $x = 5u - v$, $y = u + 3v$

2. $x = uv$, $y = u/v$

3. $x = e^{-r} \operatorname{sen} \theta$, $y = e^{r} \cos \theta$

4. $x = e^{s+t}$, $y = e^{s-t}$

5. $x = u/v$, $y = v/w$, $z = w/u$

6. $x = v + w^2$, $y = w + u^2$, $z = u + v^2$

15-20 Utilice las transformaciones dadas para evaluar la integral.

15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, donde R es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$; $x = 2u + v$, $y = u + 2v$

16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, donde R es el paralelogramo con vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ y $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

17. $\iint_R x^2\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$

19. $\iint_R xy\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$

40. a) Se define la integral impropia (sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$
$$= \lim_{a \to \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi$$

b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \lim_{a \to \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use est[e] para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \pi$$

c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

d) Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{2}\, x$, demuestre qu[e]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

(Éste es un resultado fundamental para probabilidad y estadística.)

41. Use el resultado del ejercicio 40 inciso c) para evaluar las siguientes integrales

a) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ b) $\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

15.3

59. $\frac{3}{4}$

15.4

17. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$ **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

25. $(2\pi/3)\left[1 - \left(1/\sqrt{2}\right)\right]$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$ **33.** 4.5951

41. a) $\sqrt{\pi}/4$ b) $\sqrt{\pi}/2$

15.10

EJERCICIOS 15.10 ■ PÁGINA 1047

1. 16 **3.** $\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$ **5.** 0

15. -3 **17.** 6π **19.** $2\ln 3$