En la clase pasada vimos que un árbol es un grafo conexo sin ciclos.

Más aún vimos que para cada pareja de vértices en un árbol existe uno y sólo un único camino simple que los conecta

Por otro lado, también vimos que si $T=(V,E)$ es un grafo de orden n y tamaño m, entonces T es un árbol si y solo si T es conexo y $m=n-1$.

El día de hoy probaremos que una forma de caracterizar a los grafos conexos es mediante árboles recubridores. (ó generadores, abarcadores).

Def Sea G un grafo y sea $T \leq G$ un subgrafo de G decimos que T es un árbol recubridor de G si T es un árbol y además T contiene todos los vértices de G.

Teorema. Si $G=(V,E)$ es un grafo no dirigido. Entonces G es conexo si y sólo si G tiene un árbol recubridor.

Dem: ($\Leftarrow$). En primer lugar, vamos a suponer que G tiene un árbol recubridor T. Entonces T contiene a todos los vértices de G y además para cada par de vértices $a, b \in V$, un cierto subconjunto de aristas y vertices de T proporciona un camino entre a y b. de modo que a y b estan conectados por un camino y por lo tanto G es conexo.

En la otra dirección, si G es conexo debemos probar que G contiene un árbol recubridor.

Como G es conexo, bien puede ser que G sea un árbol o que no lo sea.

Si G es un árbol, hemos terminado, G mismo es un árbol recubridor.

Pero si G no es un árbol, no lo es porque tiene por lo menos un ciclo C_1. Así para dicho ciclo podemos eliminar una de sus aristas digamos $e_1 \in C_1$. obteniendo $G - e_1$ una subgráfica conexa de G que bien puede ser un árbol o no.

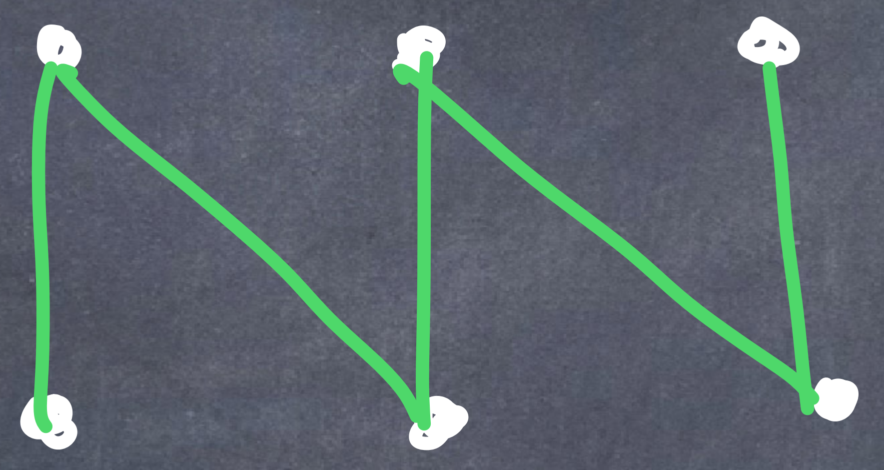
Si $G-e_1$ es un árbol, entonces dicho árbol al contener todos los vértices de G, resulta que este es el árbol recubridor que buscamos. y hemos terminado.

Si $G-e_1$ No es un árbol, esto ocurre porque $G-e_1$ tiene un ciclo, luego podemos eliminar una de sus aristas y continuar con este proceso un Número finito de pasos, hasta obtener el árbol recubridor requerido. $\square$

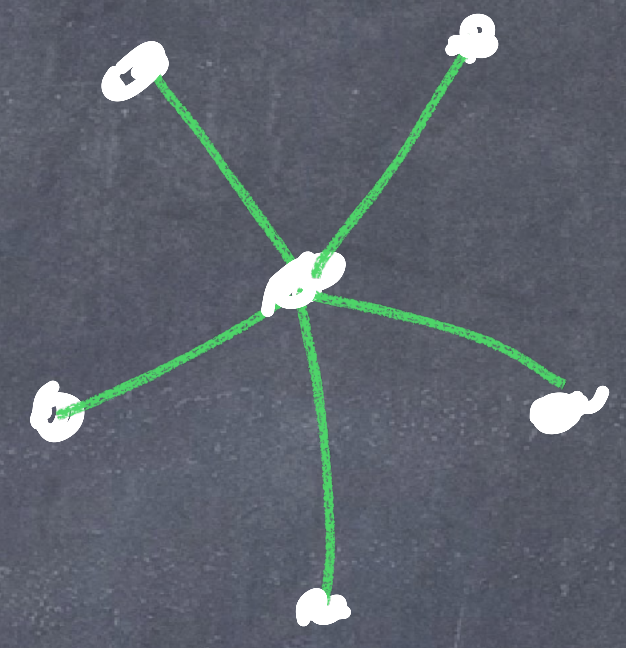
Matemáticas Discretas UP

9/11/2020

Ejercicio 1

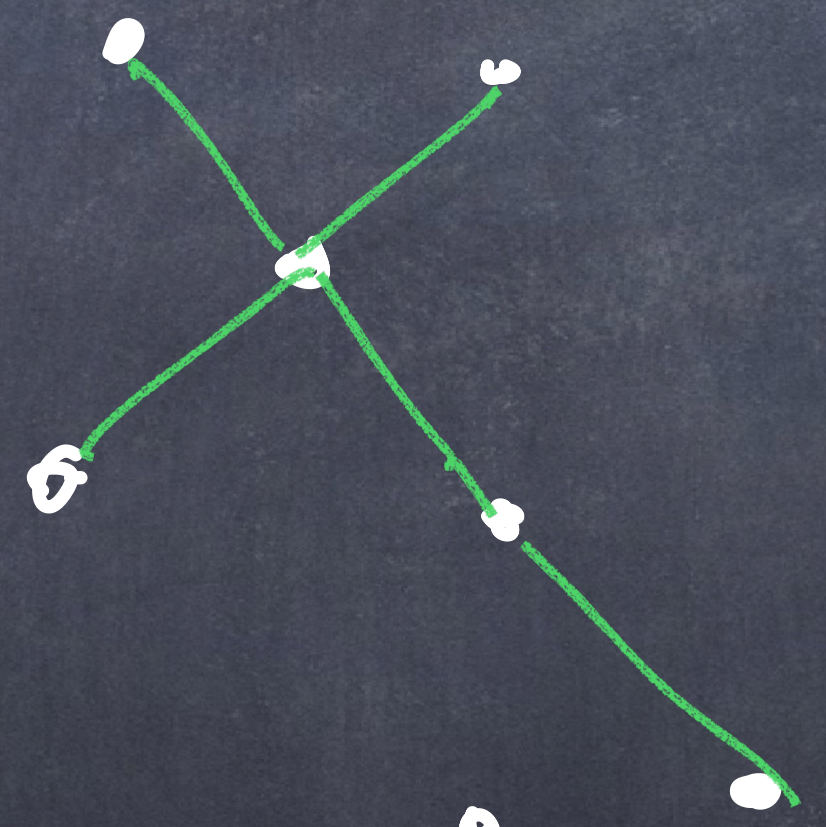


T_1

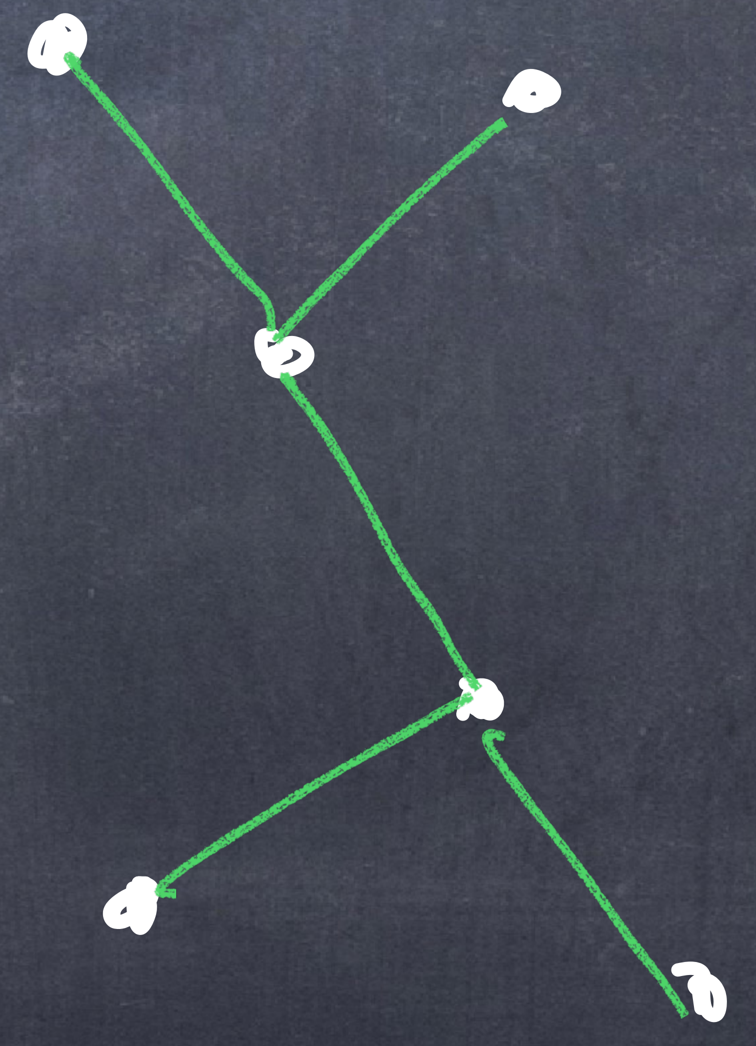


T_2

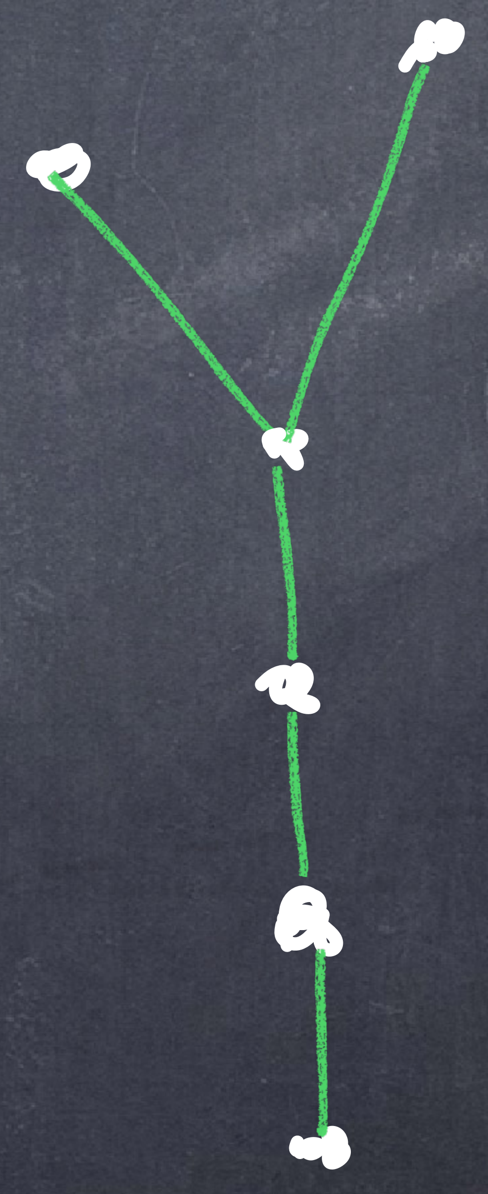
T_3

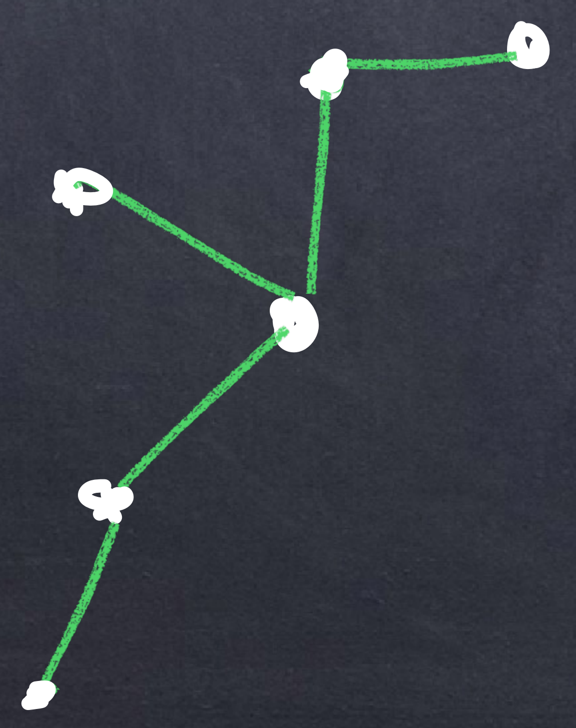


T_4



T_5





T_6

Matemáticas Discretas UP
9/11/2020

Ejercicio 2 . $T_1 = (V_1, E_1)$, $T_2 = (V_2, E_2)$ son árboles

$|E_1| = 17$

$|V_2| = 2|V_1|$

$|V_1| = ?$
$|V_2| = ?$
$|E_2| = ?$

Sabemos que:

$|V_1| = |E_1| + 1$
$= 17 + 1$
$= 18$

Sabemos que:

$|V_2| = 2(18) = 36$

$36 = |E_2| + 1$

$|E_2| = 35$

Matemáticas Discretas UP
9/11/2020

Ejercicio 3. $F1 = (V1, E1)$ es un bosque de 7 árboles y $|E1| = 40$ ¿cuánto vale $|V1|$?

Vamos a llamar $F_{11}, F_{12}, F_{13}, \ldots, F_{17}$ a los 7 árboles que constituyen el Bosque $F1$, entonces cada F_{1i} es un árbol y por lo tanto satisface $|V_{1i}| = |E_{1i}| + 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Así que
$$
\begin{aligned}
|V1| &= |V_{11}| + |V_{12}| + |V_{13}| + \cdots + |V_{17}| \\
&= |E_{11}| + 1 + |E_{12}| + 1 + \cdots + |E_{17}| + 1 \\
&= \underbrace{|E_{11}| + \cdots + |E_{17}|} + 7 \\
&= |E1| + 7 \\
&= 40 + 7 \\
&= 47
\end{aligned}
$$

Bosque

etc.

Matemáticas Discretas UP

9/11/2020

Ejercicio 4

Sea $F2 = (V2, E2)$ un bosque con $|V2| = 62$, y $|E2| = 51$

cuantos árboles determina $F2$.

$$62 = 51 + x$$

$$\Rightarrow x = 11 \text{ árboles}$$

Ejercicio 5

Sea $G = (V, E)$ n vertices, m aristas y k árboles

que relación existe entre n, m, k.

Matemáticas Discretas UP
9/11/2020

Ejercicio 5

Sea $G=(V,E)$ ~~bosque~~ bosque n vertices, m aristas y k árboles

que relación existe entre n, m, k.

$$n = m + k$$

Demostración

$k=1$, entonces $m = n-1 \Rightarrow n = m+1$.

$k=2$, entonces $m = n-2 \Rightarrow n = m+2$.

$\vdots$

k, " $m = n-k \Rightarrow n = m+k$

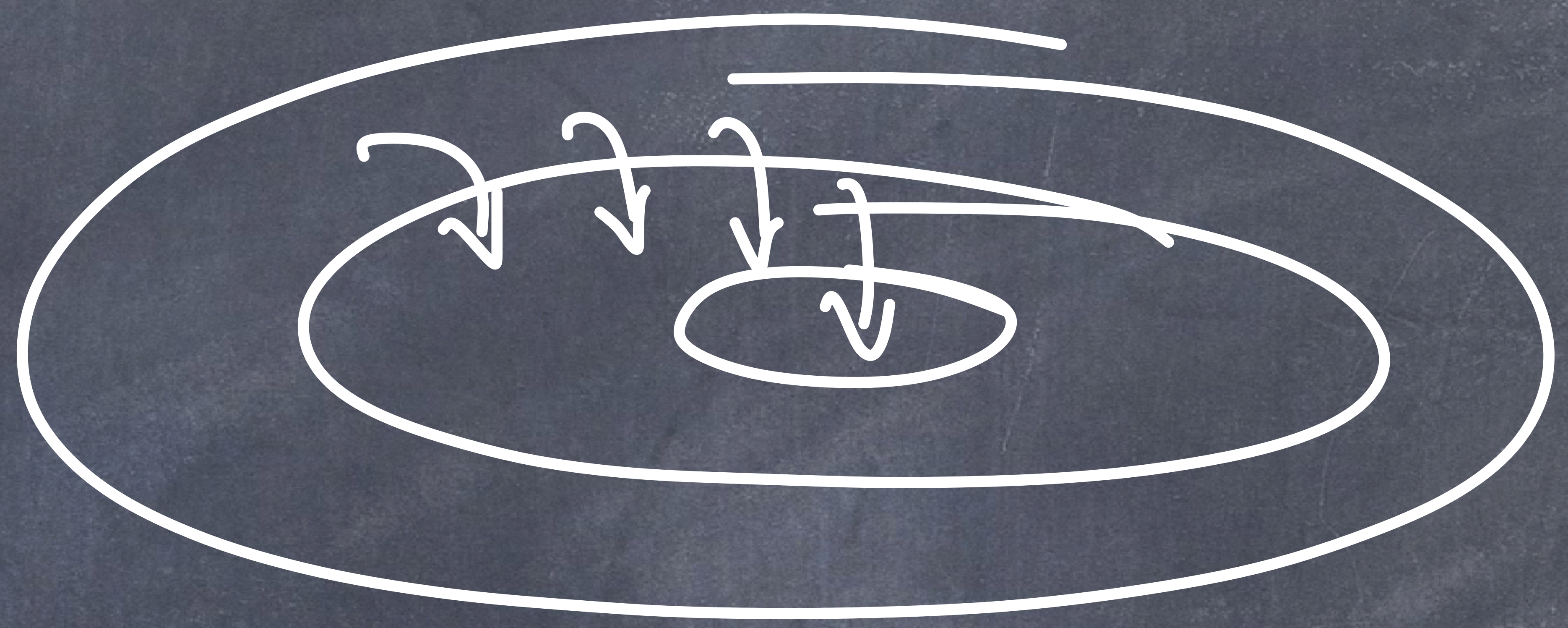
$\square$

Matemáticas Discretas UP

9/11/2020

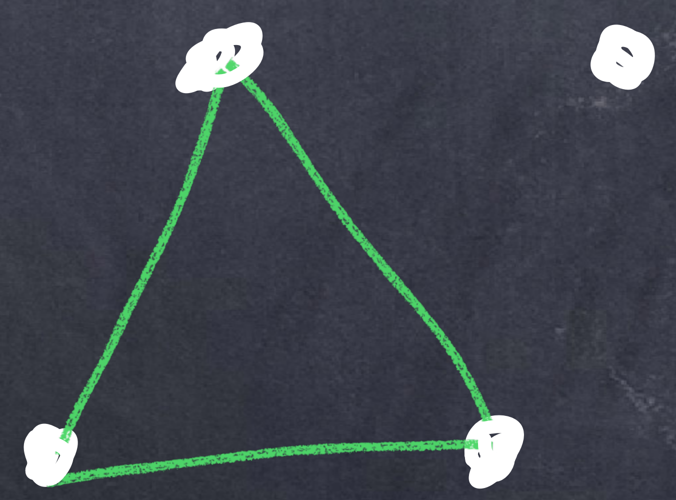
ejercicio 6.

La respuesta es caminos $\supseteq$ recorridos $\supseteq$ caminos simples



Heredan la Propiedad.

ejercicio 7



$|V| = 4$

$|E| = 3$

$4 = 3 + 1$

$|V| \stackrel{?}{=} |E| + 1$ ¿se cumple o no?

Matemáticas Discretas UP
9/11/2020

género 8.

$G=(V,E)$ con $V=\{v_1 v_2 \dots v_n\}$

$gr(v_1)=1$ $gr(v_i)\geq 2$.

"condiciones"

en otras palabras G no puede ser un árbol.

Como G es conexo, entonces o bien G es un árbol o bien no lo es.

Entonces, Bastará probar que es imposible que G sea un árbol.

Matemáticas Discretas UP

9/11/2020

Buscando una contradicción vamos a suponer que G es un árbol.

Así, siendo G un árbol se cumple que $|V| = |E| + 1$.

$$|E| = |V| - 1$$

Por otro lado, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|E|.$$

De modo que

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|V| - 2 = 2n-2$$

$gr(v_i) \geq 2$ $\forall i = 2 \dots n$

Pero, en vista de las condiciones que se tienen del problema, resulta que

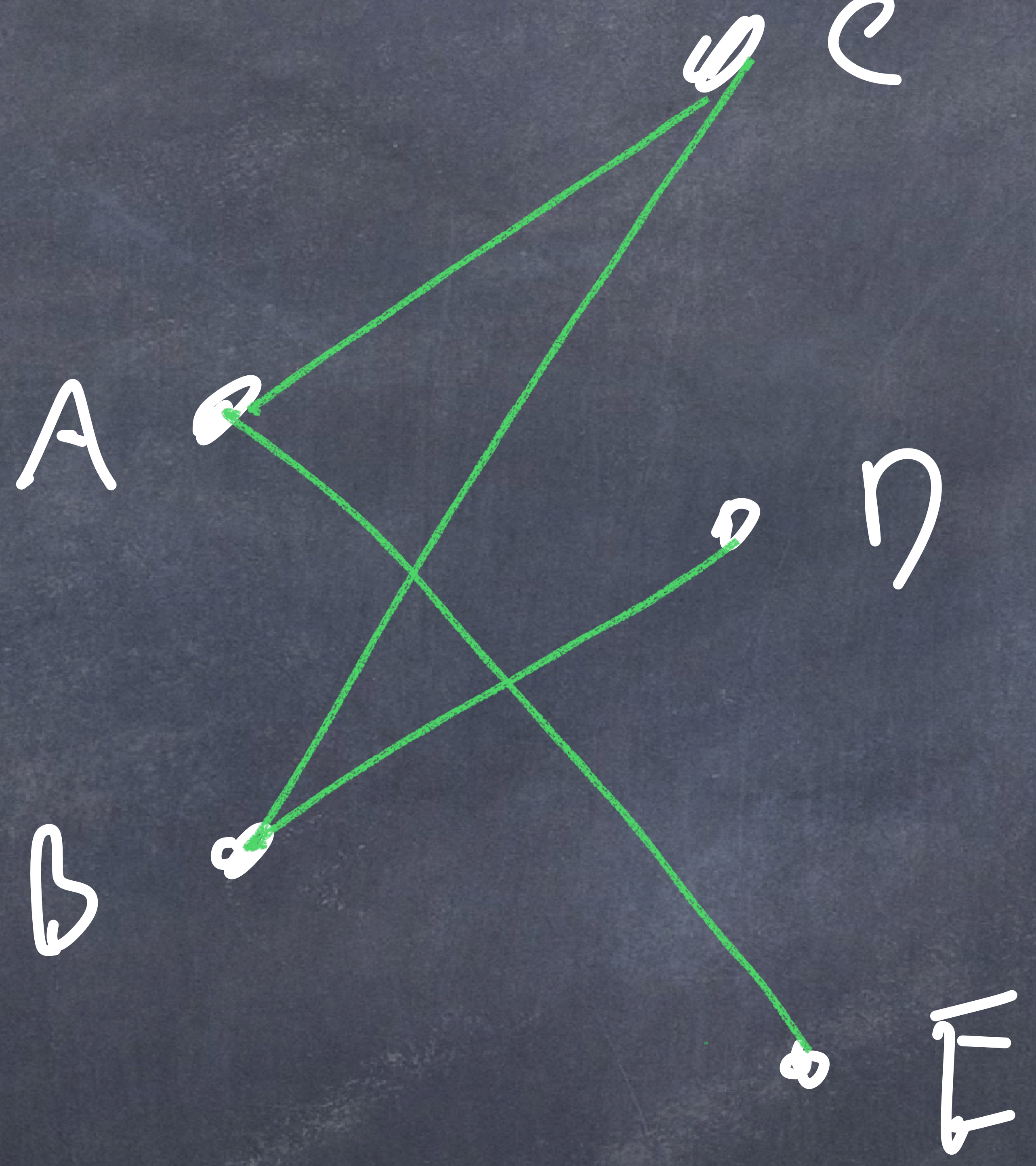
$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = gr(v_1) + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} gr(v_i)}_{\underbrace{gr(v_2)}_{\geq 2} + \underbrace{gr(v_3)}_{\geq 2} + \cdots + \underbrace{gr(v_n)}_{\geq 2} \geq (n-1)2.} \geq 1 + (n-1)2 = 2n-1$$

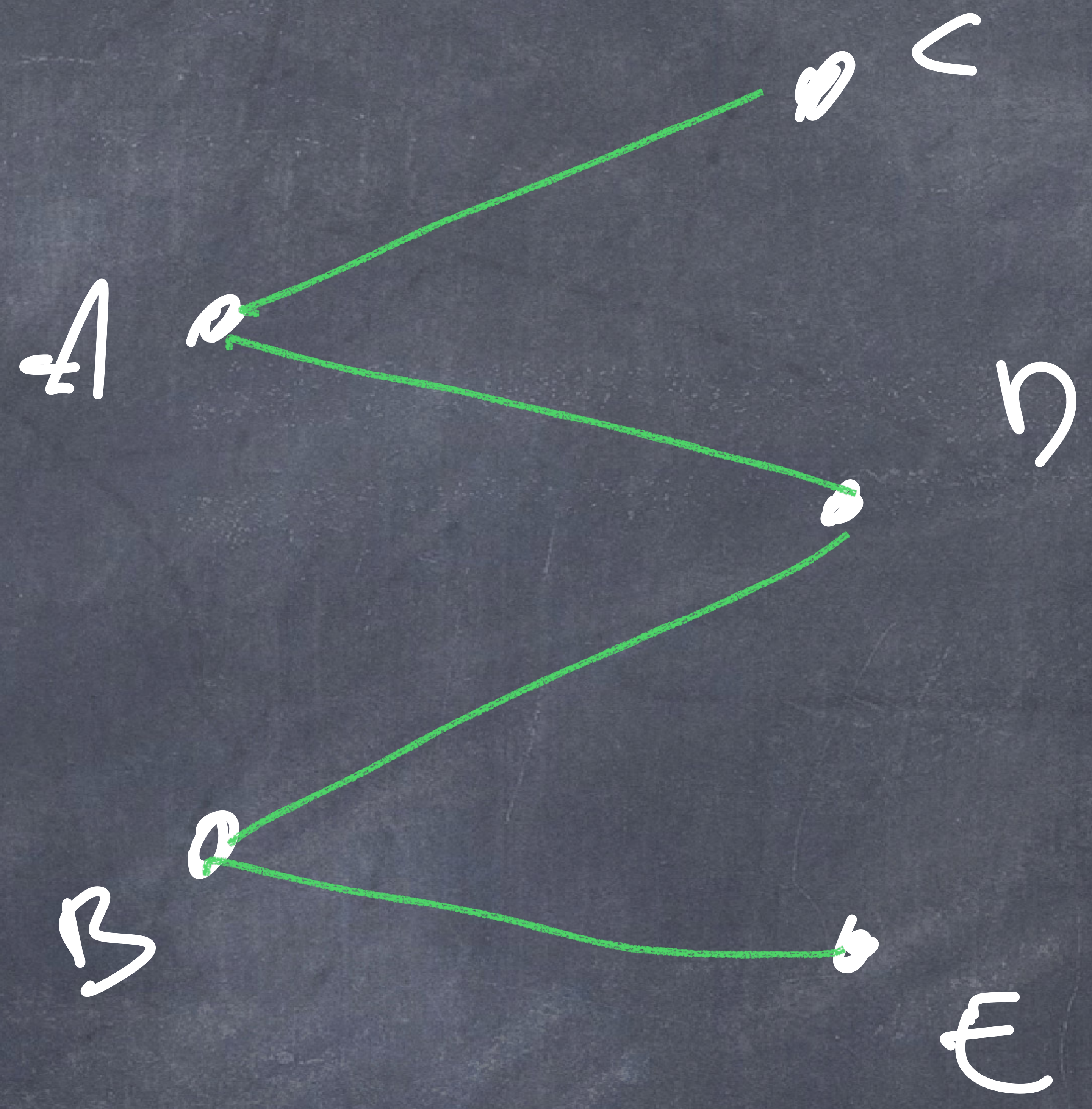
$\therefore$ $2n-2 \geq 2n-1$! ⚡ $\square$

$\therefore$ G No puede ser un árbol y por lo tanto debe tener al menos un ciclo.

Matemáticas Discretas UP
9/11/2020

Penúltimo ejercicio.

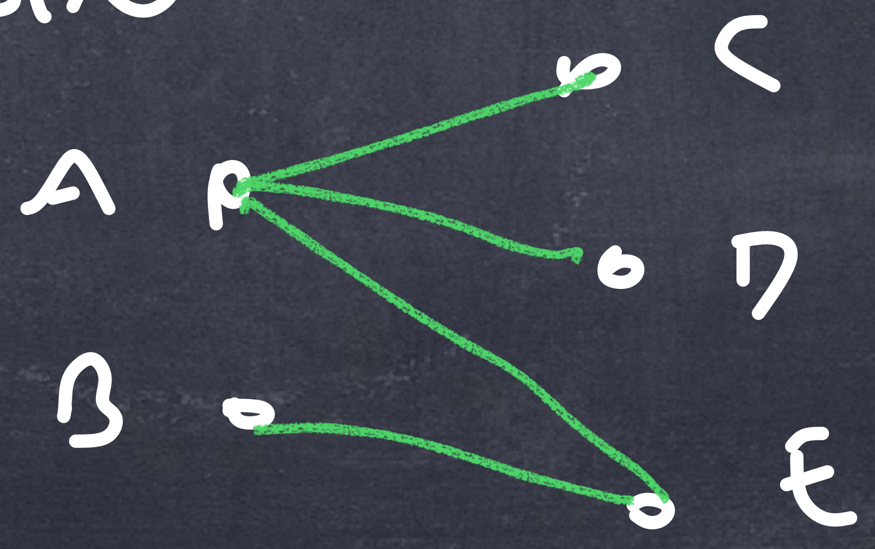




¿Son Isomorfos?

Qué tal este otro

¿



?