Polinomio interpolante de Hermite

29/03/2021

Llamamos a los polinomios oscurantismo como una generalizacion de polinomios de Taylor y Lagrange.
Dados n+1 numeros distintos $X_0, X_1, \dots, X_n$ y los numeros enteros no negativos $M_0, M_1, \dots, M_n$ el polinomio oscilante que aproxima una funcion $f \in \mathcal{C}^m[a,b]$ donde $m = \max\{m_0, \dots m_n\}$ y $X_i \in [a,b]$ $\forall\ i = 0, \dots n$, es el polinomio de menor grado que concuerda con la funcion f y con todos sus derivadas de orden menor o igual que M_i en X_i

Tenemos entonces $X_0, X_1, \dots X_n$ numeros distintos en $[a,b]$, entonces habiamos dicho que el polinomio osculante que aproxima a f es un polinomio $P(X) \cdot \ni \cdot$

$$\left\{ \frac{d^k}{dx^k} P(X_i) = \frac{d^k}{dx^k} f(X_i) \quad \begin{array}{l} \forall\ i = 0, \dots, n \\ y \quad k = 0, 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Nota: si n 0, el polinomio osculante que aproxima a f es el polinomio de Taylor alrededor de X_0
Nota 2: Cuando $m_2 = 0$ $\forall i$, el polinomio osculante sera el polinomio de Lagrange de grado n que interpola a la funcion f
Nota 3: Cuando $m_i = 1$ $\forall i = 0, \dots n$ se produce una clase polinomios llamados Hemite, en una funcion dada f, estos polinomios concuerdan con f en $X_0, X_1, \dots, X_n$ asi como sus primeras derivadas concuerdan con las derivadas de f

De lo anterior tenemos que se tienen X_i datos $[a,b]$ y una función $f \in \mathcal{C}'[a,b]$. Deseamos construir un polinomio $H(x)$ tal que la funcion coincida en los puntos del polinomio y sus derivadas, esto es, $f(X_i) = H(X_i)$ $\forall i = 0, 1, \dots, n$ y $\frac{df}{dx} f(x)\Big|_{x-x_i} = \frac{dH}{dx}(x)\Big|_{x-x_i}$ $\forall i = 0, \dots, n$ para encontrar este polinomio se usa el siguiente teorema.

Teorema: si $f \in \mathcal{C}'[a,b]$ y si $X_0, \dots X_n \in [a,b]$ distintos, el polinomio unico, de menor grado que concuerda con f y f' en $X_0, \dots X_n$, en el polinomio de Hermite de grado $2n+1$ que esta dado por:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\, \hat{H}_{n,j}(x) \quad \text{donde} \quad H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)\, L'_{n,j}(x_j)]\, L^2_{n,j}(x) \quad \text{donde} \quad L_{n,j} = \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq 1}} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$\hat{H}_{n,j} = (x - x_j)\, L^2_{n,j}$ $L_{n,j}$ denota el j-ésimo coeficiente de Lagrange de grado n, definido anteriormente

Nota: este teorema proporciona una descripcion completa de los polinomios de Hermite, pero tendriamos la necesidad de determinar y evaluar los polinomios de Lagrange y sus derivadas, lo cual es muy tedioso generar aproximaciones de Hermite tiene como base las diferencias divididas de Newton. Para facilitar la construccion haremos lo siguiente:

Supongamos que los n+1 numeros distintos $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, junto con los valores de f y f' en esos numeros.
Definimos una sucesion Z_0, Z_1, Z_{n+1} por medio de lo siguiente $Z_{2i} = Z_{2i+1} = X_i$ $\forall\ i = 0, 1, \dots n$ // 2 puntos consecutivos coinciden
Construir la tabla de diferencias divididas que utiliza $Z_0, Z_1, \dots Z_{n+1}$ ya que $Z_{2i} = Z_{2i+1} = X_i$ no podemos definir $f[Z_{2i}, Z_{2i+1}]$, $f[Z_{2i}, Z_{+1}] = f'(Z_{2i}) = f'(X_i)$

$Z_0 = Z_1 = X_0$
$Z_2 = Z_3 = X_1$
$Z_4 = Z_5 = X_2$

$$\{Z_j\} = Z_{2i} = Z_{i+1} = X_i$$

$$f[Z_j] = f[Z_i]$$

$$f[Z_{2i+1}, Z_{2i}] = f'[Z_{2i}]$$

$$f[Z_{k+1}, Z_k] = \frac{f[Z_{k+1}] - f[Z_k]}{Z_{k+1} - Z_k}$$

$$f[Z_{k+i}, Z_{k+i-1}, \dots Z_{k+1}, Z_k] = \frac{f[Z_{k+i}, Z_{2k+i-2}, \dots Z_{k+1}] - f[Z_{k+i-1}, \dots Z_k]}{Z_{k+i} - Z_k}$$

El polinomio osculante de Hermite esta dado por

$$H(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_k, \dots z_0](x-z_1)\dots(x-z_{k-1})$$

z	$f(z)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$	$f[z_1, z_2] = f'(x_0)$	$f[z_2, z_1, z_0] = \dfrac{f[z_2, z_1] - f[z_1, z_0]}{z_2 - z_0}$
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$	$f[z_2, z_1] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_3, z_2, z_1] = \dfrac{f[z_3, z_2] - f[z_2, z_1]}{z_3 - z_1}$
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$	$f[z_3, z_2] = f'(x_1)$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$	$f[z_4, z_3] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		
	$\vdots$	$f[z_5, z_4] = f'(x_2)$	
		$\vdots$	

Ejemplo: usa el polinomio de Hermite que concuerda con los siguientes datos y obtén una aproximacion para $f(1.5)$

	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

z	$f[z]$	Primeras diferencias divididas
$z_0 = 1.3$	0.6200860	$f[z_1, z_0] = f'[z_0]$
$z_1 = 1.3$	0.6200860	
$z_2 = 1.6$	0.4554022	
$z_3 = 1.6$	0.4554022	
$z_4 = 1.9$	0.2818186	
$z_5 = 1.9$	0.2818186	

	z	f[z]	f'	1ra dif div	2da dif div	3era dif div	4ta dif div	5ta dif div
z0	1.3	0.62008600	-0.52202320	-0.52202320	-0.08974267	0.06636556	0.00266667	-0.00277469
z1	1.3	0.62008600		-0.54894600	-0.06983300	0.06796556	0.00100185	
z2	1.6	0.45540220	-0.56989590	-0.56989590	-0.02905367	0.06856667		
z3	1.6	0.45540220		-0.57861200	-0.00848367			
z4	1.9	0.28181860	-0.58115710	-0.58115710				
z5	1.9	0.28181860						