Propiedad del buen orden

La **propiedad del buen orden para enteros no negativos** establece que todo conjunto no vacío de enteros no negativos tiene un elemento menor. Esta propiedad es equivalente a las dos formas de inducción (vea los ejercicios 27 al 29). Se usará la propiedad del buen orden para probar algo familiar de la división: cuando se divide un entero n entre un entero positivo d, se obtiene el cociente q y un residuo r que satisface $0 \leq r < d$ de manera que $n = dq + r$.

Ejemplo 1.8.4 ▶

Cuando se divide $n = 74$ entre $d = 13$

$$\begin{array}{r@{}l} & 5 \\ 13 & \overline{)74} \\ & 65 \\ & 9 \end{array}$$

se obtiene el cociente $q = 5$ y el residuo $r = 9$. Observe que r satisface $0 \leq r < d$; es decir, $0 \leq 9 < 13$. Se tiene

$$n = 74 = 13 \cdot 5 + 9 = dq + r. \qquad \blacktriangleleft$$

Teorema 1.8.5

Teorema del cociente-residuo

Si d y n son enteros, $d > 0$, existen enteros q (cociente) y r (residuo) que satisfacen

$$n = dq + r \qquad 0 \leq r < d.$$

Más aún, q y r son únicos; es decir, si

$$n = dq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < d$$

y

$$n = dq_2 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < d$$

entonces $q_1 = q_2$ y $r_1 = r_2$.

Es posible idear una prueba del teorema 1.8.5 observando con cuidado la técnica usada en la división. ¿Por qué es 5 el cociente en el ejemplo 1.8.4? Porque $q = 5$ hace que el residuo $n - dq$ sea no negativo y tan pequeño como es posible. Si, por ejemplo, $q = 3$, el residuo sería $n - dq = 74 - 13 \cdot 3 = 35$, que es demasiado grande. Como otro ejemplo, si $q = 6$, el residuo sería $n - dq = 74 - 13 \cdot 6 = -4$, que es negativo. La existencia del residuo no negativo más pequeño $n - dq$ está garantizada por la propiedad del buen orden.

Demostración del teorema 1.8.5 Sea X el conjunto de todos los enteros de la forma $n - dk$ donde $n - dk \geq 0$ y k es un entero. Se demostrará que X es no vacío usando la prueba por casos. Si $n \geq 0$, entonces

$$n - d \cdot 0 = n \geq 0$$

así que n está en X. Suponga que $n < 0$. Como d es un entero positivo, $1 - d \leq 0$. Por tanto,

$$n - dn = n(1 - d) \geq 0.$$

En este caso, $n - dn$ está en X. Por lo tanto, X es no vacío.

Como X es un conjunto no vacío de enteros negativos, por la propiedad del buen orden, X tiene un elemento más pequeño que denotamos por r. Sea q el valor específico de k para el que $r = n - dq$. Entonces

$$n = dq + r.$$

Como r está en X, $r \geq 0$. Se usa la prueba por contradicción para demostrar que $r < d$. Suponga que $r \geq d$. Entonces

$$n - d(q + 1) = n - dq - d = r - d \geq 0.$$

Así, $n - d(q + 1)$ está en X. Además, $n - d(q + 1) = r - d < r$. Pero r es el entero más pequeño en X. Esta contradicción demuestra que $r < d$.

Se ha demostrado que si d y n son enteros, $d > 0$, existen enteros q y r que satisfacen

$$n = dq + r \qquad 0 \leq r < d.$$

Ahora se analiza la unicidad de q y r. Suponga que

$$n = dq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < d$$

y

$$n = dq_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < d.$$

Debe demostrarse que $q_1 = q_2$ y $r_1 = r_2$. Restando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$0 = n - n = (dq_1 + r_1) - (dq_2 + r_2) = d(q_1 - q_2) - (r_2 - r_1),$$

que se rescribe como

$$d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

La ecuación anterior demuestra que d divide a $r_2 - r_1$. Sin embargo, $0 \le r_1 < d$ y $0 \le r_2 < d$,

$$-d < r_2 - r_1 < d.$$

Pero el único entero estrictamente entre $-d$ y d divisible por d es 0. Por lo tanto,

$$r_1 = r_2.$$

Así,

$$d(q_1 - q_2) = 0;$$

y con ello

$$q_1 = q_2.$$

Y la prueba queda completa. ◀

Observe que, en el teorema 1.8.5, el residuo r es cero si y sólo si d divide a n.

Sugerencias para resolver problemas

En el paso inductivo de la forma fuerte de inducción matemática, la meta es probar el caso n. Para hacerlo, se pueden suponer *todos* los casos precedentes (no sólo el precedente inmediato como en la sección 1.7). Siempre es posible usar la forma fuerte de inducción matemática. Si ocurre que se necesita sólo el caso precedente inmediato en el paso inductivo, simplemente se usa la forma de inducción matemática de la sección 1.7. No obstante, suponer todos los casos anteriores potencialmente da más con qué trabajar para probar el caso n.

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie la forma fuerte de inducción matemática.

2. Enuncie la propiedad del buen orden.

3. Enuncie el teorema del cociente-residuo.