Tarea 2

1. Encuentra la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(4, -1, 2)$ y $(1, 1, 5)$.

2. Encuentra la distancia del origen a la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

3. Usa un graficador para dibujar la siguientes curvas

a) $\begin{cases} x(t) = 16\,\mathrm{sen}^3(t) \\ y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t) \end{cases}$

b) $(2t + 2\cos(22.5t) + 2/t, 2t + 2\,\mathrm{sen}(24t) + 2/t), t \in [0.5, 15]$

c) $(t + \cos(16t), t + 2\,\mathrm{sen}(16t)/t), t \in [0.2, 20]$

d) $x = \frac{\mathrm{sen}(2t)}{4+t^2}, \quad y = \frac{\cos(2t)}{4+t^2}$

4. Encuentra la ecuación de la circunferencia, en forma paramétrica tal que:

a) Tiene radio 4 y su centro es el origen.

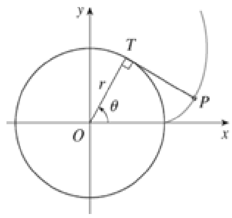
b) Tiene radio 4 y su centro es $(-3, 1)$.

c) El segmento de $(8, 6)$ a $(10, 4)$ es un diámetro.

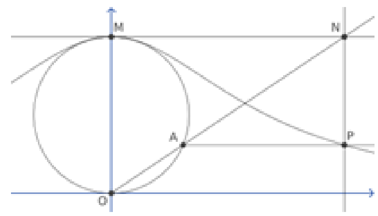
5. Si una cuerda enrollada alrededor de un círculo fijo se desenrolla manteniéndola tensa en el plano del círculo, su extremo P describe una curva que se llama *envolvente* o *involuta* [1] del círculo.
Problema: Considera una circunferencia de radio r centrada en el origen. θ el ángulo formado por el eje X y el segmento que va del origen al punto de tangencia, demuestra que las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = r\,(\cos(\theta) + \theta\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ y = r\,(\mathrm{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)) \end{cases}$.

---

[1] En general una evolvente o involuta de una curva, es la curva que genera el punto extremo de una cuerda tensa imaginaria a la curva.
Chisme: Una aplicación de esta curva es la creación de engranes, (esto lo hizo Leonhard Euler). Este tipo de engranes se llaman engranes involuta (*involute gear*).
En esta página puedes verlos en acción: `http://www.micro-machine-shop.com/gears.htm`



Involuta



Curva de Agnesi

6. En matemáticas, la bruja de Agnesi[2] (pronunciado Áñesi'), también llamada la Hechicera de Agnesi o la Bruja de María Agnesi (nombrada así por Maria Agnesi) es la curva definida por lo siguiente:
Considera una circunferencia de radio a, O y M puntos diametralmente opuestos, y A cualquier punto de la circunferencia.

I. Dibuja la recta OA secante.

II. La línea OA interseca a la recta tangente a la circunferencia N.

III. Traza una línea paralela a OM que pase por N y una paralela a MN que pase por A.

IV. Las dos rectas anteriores se cortan en P. La trayectoria que genera P al mover A es la bruja de Agnesi.

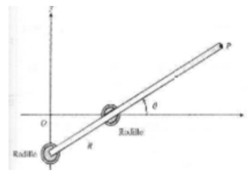
Problema: Tomando O como el origen, M un punto en la parte positiva del eje Y, y θ el ángulo formado por el eje X y OA demuestra que:

a) Las ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = 2a\cot(\theta) \\ y = 2a\operatorname{sen}^2(\theta) \end{cases}$

b) Demuestra que se cumplen la ecuación cartesiana: $y = 8\frac{a^3}{x^2+4a^2}$.

7. El compás de Arquímedes consiste en una barra rígida de longitud L y uno de sus extremos está unido a un rodillo que gira a lo largo del eje Y.
A una distancia fija R de este extremo, la barra está unida a un segundo rodillo sobre el eje X. Sea P el punto del extremo libre de la barra y sea θ el ángulo que la barra forma con el eje positivo. Calcula sus ecuaciones paramétricas.
Puedes en acción en `https://www.youtube.com/watch?v=iM-r8bhTT8k`

[2]Chisme: Esta curva fue estudiada por Pierre de Fermat en 1630, Guido Grandi en 1703, y por Maria Gaetana Agnesi en 1748.
Grandi llamó a la curva versoria, del latín vertere, que significa virar, girar, y versiera en italiano es un término naval, que identifica la cuerda o cabo que hace girar la vela. María Gaetana Agnesi escribió a su vez la versiera, añadiendo el artículo femenino llama la versiera di Agnesi que significa la curva de Agnesi.
Los principios de esta curva fueron traducidos al inglés por el profesor de la Universidad de Cambridge, John Colson, con poco conocimiento del italiano, "confundió" versiera con avversiera (que en italiano significa 'diablesa', 'demonia'). y se tradujo como witch, "mujer contraria a Dios", esto es, "bruja", el error de la traducción al inglés permanece hasta nuestros días, dando lugar a su nombre actual.

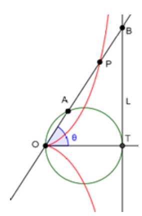


Compás de Arquímedes

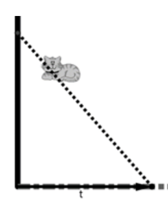
8. Se llama cisoide a la curva generada por la suma o resta de los vectores posición de dos curvas dadas. La cisoide de Diocles es la cisoide de una circunferencia y una recta. Basándonos en la figura, O es un punto de la circunferencia y trazamos una recta L tangente a la circunferencia por un punto T que es diametralmente opuesto a O. Por cada recta que pasa por O, llamaremos A y B a los puntos que corta dicha recta a la circunferencia y a L respectivamente. La cisoide estará formada por los puntos P que cumplen: $P = OB - OA$. Problema: Considerando $O = (0,0)$, $T = (2r, 0)$ y como parámetro a θ, el ángulo formado por el segmento OT y la recta:

i) Demuestra que las ecuaciones paramétricas a cisoide de Diocles son: $\begin{cases} x(t) = 2r\,\text{sen}^2(\theta) \\ y(t) = 2r\,\text{sen}^3(\theta)\sec(\theta) \end{cases}$

ii) Comprueba que las ecuaciones paramétricas cumplen: $(x^2 + y^2)x = 2ry^2$



Cisoide de Diocles



Problema 9a

9.

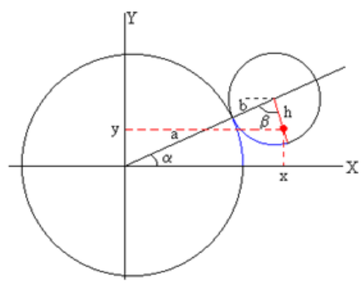
a) Calcula las ecuaciones paramétricas que te den la posición del gato, en función del parámetro t que mide la distancia del origen al pie de la escalera. ¿Cuál es la rapidez de caída del gato en el momento que cae al suelo? (La longitud de la escalera es L y el gato está a una distancia g del pie de la escalera).

b) Calcula las ecuaciones paramétricas que te den la posición del gato, en función del parámetro t que mide el ángulo que forma la escalera con el piso. ¿Cuál es la rapidez de caída del gato en el momento que cae al suelo? (La longitud de la escalera es L y el gato está a una distancia g del pie de la escalera).

10. El Epipotrocoide es la curva que se traza desde un punto P situado a una distancia h del centro de un círculo móvil de radio b que rueda, sin resbalar, fuera de un círculo de radio a, fijo. Si el punto de inicio es $(a+b-h, 0)$ y α es el ángulo entre el eje X y el segmento entre los centros de los círculos, demuestra que sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = (a+b)\cos(\alpha) - h\cos\left(\frac{a+b}{b}\alpha\right) \\ y(t) = (a+b)\operatorname{sen}(\alpha) - h\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}\alpha\right) \end{cases}$$

Pa' jugar un rato: `http://www.artbylogic.com/parametricart/spirograph/spirograph.htm`



11. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el valor indicado.

a) $x = 1 + 4t - t^2$, $y = 2 - t^3$, $t = 1$.

b) $x = \operatorname{sen}^3(t)$, $y = \cos^3(t)$, $t = \frac{\pi}{6}$.

12. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$. ¿En que valores t la función es cóncava hacia arriba?

a) $x = t^2 + 1$, $y = t^2 + t$

b) $x = e^t$, $y = te^{-t}$

Respuestas

1 $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

2 $\frac{3}{\sqrt{2}}$

4

a) $\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = 4\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) - 3 \\ y(t) = 4\,\mathrm{sen}(t) + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) + 9 \\ y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t) + 5 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x(t) = L\cos(\theta) \\ y(t) = (L - R)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$

9

a) $\frac{1}{L}\left((L-g)t, g\sqrt{L^2 - t^2}\right)$;
`http://www.math.toronto.edu/mathnet/falseProofs/ladder.html`

b) $((L-g)\cos(t), g \cdot \sin(t))$: g.

11

a) $y = -\frac{3}{2}x + 7$

b) $y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

12

a) $\frac{2t+1}{2t}$, $-\frac{1}{4t^3}$, $t < 0$

b) $e^{-2t}(1-t)$, $e^{-3t}(2t-3)$, $t > \frac{3}{2}$