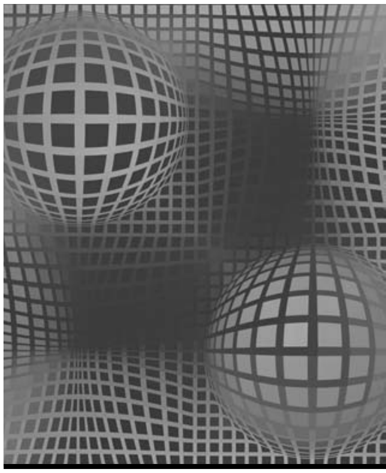

Capítulo 6

MÉTODOS DE CONTEO Y EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

Existe sólo un número dado de manos en una baraja.

DE SHANE

En muchos problemas discretos nos enfrentamos al problema de contar. Por ejemplo, en la sección 4.3 se vio que para estimar el tiempo de corrida de un algoritmo, era necesario contar el número de veces que se ejecutaban ciertos pasos o ciclos. Contar, también tiene un papel crucial en la teoría de probabilidad. En virtud de la importancia del conteo, se ha desarrollado una variedad de ayudas útiles, algunas bastante elaboradas. En este capítulo se desarrollan varias técnicas para contar. Dichas técnicas resultan útiles para derivar el teorema del binomio. El capítulo concluye con un análisis del principio del palomar, que con frecuencia permite probar la existencia de un objeto con ciertas propiedades.

6.1 ➜ Principios básicos

WWW

El menú de Comida Rápida de Kay se muestra en la figura 6.1.1. Como se observa, contiene dos entremeses, tres platos fuertes y cuatro bebidas. ¿Cuántas comidas diferentes están formadas por un plato fuerte y una bebida?

Si se listan todas las comidas posibles que consisten en un plato fuerte y una bebida,

HT, HM, HC, HR, CT, CM, CC, CR, FT, FM, FC, FR,

se ve que existen 12 comidas diferentes. (La comida que consiste en un plato fuerte cuya primera letra es X y una bebida cuya primera letra es Y se denota por XY. Por ejemplo, CR se refiere a una comida que consiste en carne asada y raspado de sabor). Observe que se tienen tres platos fuertes y cuatro bebidas, lo que da $12 = 3 \cdot 4$.

† Estas secciones se pueden omitir sin pérdida de continuidad.

ENTREMÉS

Nachos 2.15

Salami especial 1.90

PLATO FUERTE

Hamburguesa 3.25

Carne asada 3.65

Filete de pescado 3.15

BEBIDAS

Té 70

Malteada .85

Cola 75

Refresco de sabor 75

Figura 6.1.1 Comida Rápida de Kay.

Existen 24 comidas posibles de un entremés, un plato fuerte y una bebida.

NHT, NHM, NHC, NHR, NCT, NCM, NCC, NCR,
NFT, NFM, NFC, NFR, SHT, SHM, SHC, SHR,
SCT, SCM, SCC, SCR, SFT, SFM, SFC, SFR.

(La comida que consiste en un entremés cuya primera letra es X, un plato fuerte cuya primera letra es Y y una bebida cuya primera letra es Z se denota por XYZ). Observe que se ofrecen dos entremeses, tres platos fuertes y cuatro bebidas, y que $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

En cada uno de estos ejemplos se encuentra que el número total de comidas es igual al producto de los números de cada categoría. Estos ejemplos ilustran el **principio de la multiplicación**.

Principio de la multiplicación

Si una actividad se puede construir en t pasos sucesivos y el paso 1 *se puede hacer de* n_1 *maneras, el paso 2 se puede realizar de* n_2 *maneras, . . . , y el paso t de* n_t *maneras, entonces el número de actividades posibles diferentes es* $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdot \cdot n_t$.

En el problema de contar el número de comidas que consisten en un plato fuerte y una bebida, el primer paso es "seleccionar el plato fuerte" y el segundo paso es "seleccionar la bebida". Así, $n_1 = 3$ y $n_2 = 4$ y, por el principio de la multiplicación, el número total de comidas es $3 \cdot 4 = 12$. La figura 6.1.2. muestra por qué se multiplica 3 por 4; se tienen tres grupos de cuatro objetos,

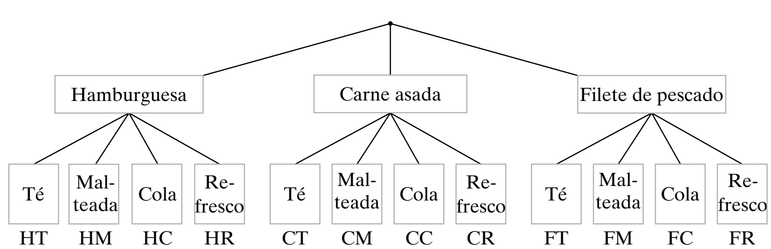

Figura 6.1.2 Ilustración del principio de la multiplicación.

En resumen, el principio de la multiplicación afirma que, cuando una actividad se construye en pasos sucesivos, se multiplican los números de maneras de realizar cada paso.

Ejemplo 6.1.1 ▶

¿Cuántas comidas de un plato fuerte y una bebida *opcional* están disponibles en Comida Rápida de Kay?

Una comida consistente en un plato fuerte y una bebida opcional se forma mediante un proceso de dos pasos. El primer paso es "seleccionar el plato fuerte" y el segundo es "seleccionar una bebida opcional". Existen $n_1 = 3$ maneras de seleccionar el plato fuerte (hamburguesa, carne asada, filete de pescado) y $n_2 = 5$ maneras de seleccionar la bebida opcional (té, malteada, cola, refresco, ninguno). Por el principio de la multiplicación, existen $3 \cdot 5 = 15$ comidas. Como confirmación, he aquí una lista de las 15 comidas (N = sin bebida):

HT, HM, HC, HR, HN, CT, CM, CC, CR, CN, FT, FM, FC, FR, FN. ◀

Ejemplo 6.1.2 ▶

Virus Melissa

A fines de los 90, un virus de computadora llamado Melissa causó estragos al acabar con los recursos del sistema. El virus se esparció por un correo electrónico que contenía un archivo adjunto de procesador de texto con un macro maligno. Cuando se abría el documento, el macro reenviaba el mensaje junto con el archivo del documento a las primeras 50 direcciones obtenidas de la libreta de direcciones del usuario. Cuando se recibían estas copias y se abrían, el macro de nuevo reenviaba el mensaje por correo electrónico y el documento de procesador de textos, y así sucesivamente. El virus causó problemas creando mensajes más rápido de lo que podían enviarse. Los mensajes listos para enviarse se almacenaban temporalmente en un disco. Si el disco se llenaba, el sistema podía caer en bloqueo permanente (congelarse o lo que se conoce habitualmente como "inhibirse") o incluso descomponerse.

Después de que el virus enviaba el correo a las primeras 50 direcciones, cada uno de esos receptores enviaba entonces el correo a 50 direcciones. Por el principio de la multiplicación, se tenían $50 \cdot 50 = 2500$ receptores más. Cada uno de ellos enviaba el correo a 50 direcciones. De nuevo, por el principio de la multiplicación, ahora había $50 \cdot 50 \cdot 50 = 125{,}000$ receptores adicionales. Después de más iteraciones, habría $50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 = 6{,}250{,}000$ receptores adicionales. Así, después de sólo cuatro iteraciones se habían enviado

$$6{,}250{,}000 + 125{,}000 + 2500 + 50 + 1 = 6{,}377{,}551$$

copias del mensaje. ◀

Ejemplo 6.1.3 ▶

a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 se pueden formar usando las letras *ABCDE* si no se aceptan repeticiones?
b) ¿Cuántas cadenas del inciso *a)* comienzan con la letra *B*?
c) ¿Cuántas cadenas del inciso *a)* no comienzan con la letra *B*?

a) Se usa el principio de la multiplicación. Una cadena de longitud 4 se construye en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera letra; se elige la segunda; se elige la tercera; y se elige la cuarta letra. La primera letra se puede seleccionar de cinco maneras. Una vez elegida la primera letra, la segunda se puede elegir de cuatro maneras. Cuando se elige la segunda letra, la tercera se puede elegir de tres maneras. Una vez seleccionada la tercera letra, la cuarta se puede seleccionar de dos maneras. Por el principio de la multiplicación, existen

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

cadenas.

b) Las cadenas que comienzan con la letra *B* se pueden construir en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera, la segunda, la tercera y la cuarta letra. La primera letra (*B*) se puede escoger de una manera, la segunda letra de cuatro maneras, la tercera de tres maneras y la cuarta de dos. Entonces, por el principio de la multiplicación, existen

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

cadenas que comienzan con la letra B.

c) El inciso *a)* muestra que existen 120 cadenas de longitud 4 que se pueden formar usando las letras $ABCDE$, y el inciso *b)* prueba que 24 de ellas comienzan con la letra B. Se deduce que existen

$$120 - 24 = 96$$

cadenas que no comienzan con la letra B. ◀

Ejemplo 6.1.4 ▶

En una fotografía digital, deseamos codificar la cantidad de luz en cada punto como una cadena de ocho bits. ¿Cuántos valores son posibles en un punto?

Una codificación de ocho bits se puede construir en ocho pasos sucesivos: se selecciona el primer bit; el segundo bit; . . . ; el octavo bit. Como hay dos maneras de elegir cada bit, por el principio de la multiplicación, el número total de codificaciones de ocho bits es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256.$$ ◀

Se dará una prueba usando el principio de la multiplicación de que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. Con anterioridad, se dio una prueba de este resultado usando inducción matemática (Teorema 2.1.6).

Ejemplo 6.1.5 ▶

Use el principio de la multiplicación para demostrar que un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Un subconjunto se construye en n pasos sucesivos: se elige o no se elige x_1; se elige o no x_2; . . . ; se elige o no x_n. Cada paso se puede realizar de dos maneras. Entonces, el número de subconjuntos posibles es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ factores}} = 2^n.$$ ◀

Ejemplo 6.1.6 ▶

Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$?

Se tiene un par ordenado (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$; se ve que cada elemento en X está exactamente en uno de A, $B - A$ o en $X - B$. Inversamente, si se asigna cada elemento de X a uno de los tres conjuntos A (y, por suposición, también a B y a X), $B - A$ (y, por suposición, también a X), o a $X - B$, se obtiene un par ordenado único (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$. Entonces el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es igual al número de maneras para asignar a los elementos de X a los tres conjuntos A, $B - A$ y $X - B$. Se pueden hacer tales asignaciones mediante el siguiente proceso de n pasos: se asigna el primer elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$; se asigna el segundo elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$; . . . ; se asigna el n-ésimo elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$. Como cada paso se puede hacer de tres maneras, el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n \text{ factores}} = 3^n.$$ ◀

Ahora se ilustrará el principio de la suma mediante un ejemplo y después se presentará el principio.

Ejemplo 6.1.7 ▶

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o con 111?

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 se puede construir en cinco pasos sucesivos: se selecciona el cuarto bit; se selecciona el quinto bit; . . . ; se selecciona el octavo bit. Como cada uno de los cinco bits se puede seleccionar de dos maneras, por el principio de la multiplicación, existen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

cadenas de ocho bits que comienzan con 101. El mismo argumento se utiliza para mostrar que existen 32 cadenas de ocho bits que comienzan con 111. Como hay 32 cadenas de 8 bits que comienzan con 101 y 32 cadenas de 8 bits que comienzan con 111, existen $32 + 32 = 64$ cadenas de 8 bits que comienzan con 101 o 111. ◀

En el ejemplo 6.1.7 se sumaron los números de cadenas de 8 bits (32 y 32) de cada tipo para determinar el resultado final. El **principio de la suma** dice cuándo sumar para calcular el número total de posibilidades.

Principio de la suma

Suponga que $X_1, \ldots, X_t$ son conjuntos y que el i-ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{X_1, \ldots, X_t\}$ es una familia de conjuntos ajenos por pares (es decir, si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$), el número de elementos posibles que se puede seleccionar de X_1 o X_2 o . . . o X_t es

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t.$$

(De manera equivalente, la unión $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$ contiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ elementos).

En el ejemplo 6.1.7, X_1 podría denotar el conjunto de cadenas de 8 bits que comienzan con 101 y X_2 el conjunto de cadenas de 8 bits que comienzan con 111. Como X_1 es ajeno a X_2, de acuerdo con el principio de la suma, el número de cadenas de 8 bits de cualquier tipo, que es el número de elementos en $X_1 \cup X_2$, es $32 + 32 = 64$.

El principio de la suma se resume diciendo que se suma el número de elementos en cada subconjunto cuando es posible descomponer los elementos que se cuentan en subconjuntos ajenos.

Si se trata de contar objetos que se construyen en pasos sucesivos, se usa el principio de la multiplicación. Si se tienen conjuntos ajenos de objetos y se desea saber el número total de objetos, se usa el principio de la suma. Es importante reconocer cuándo aplicar cada principio. Esta habilidad se adquiere con la práctica y el análisis cuidadoso de cada problema.

Esta sección termina con ejemplos que ilustran ambos principios de conteo.

Ejemplo 6.1.8 ▶

¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos libros de temas diferentes entre cinco libros de computación distintos, tres libros de matemáticas diferentes y dos libros de arte distintos?

Mediante el principio de la multiplicación, se encuentra que podemos seleccionar dos libros, uno de computación y uno de matemáticas, de $5 \cdot 3 = 15$ maneras. De forma similar, podemos seleccionar dos libros, uno de computación y uno de arte, de $5 \cdot 2 = 10$ maneras, y podemos seleccionar dos libros, uno de matemáticas y uno de arte, de $3 \cdot 2 = 6$ maneras. Como estos conjuntos de selecciones son ajenas por pares, podemos usar el principio de la suma para concluir que existen

$$15 + 10 + 6 = 31$$

maneras de seleccionar dos libros con temas diferentes entre los libros de computación, matemáticas y arte. ◀

Ejemplo 6.1.9 ▶

Un comité de seis personas, compuesto por Alicia, Benjamín, Consuelo, Adolfo, Eduardo y Francisco, debe seleccionar un presidente, secretario y tesorero.

a) ¿De cuántas maneras pueden hacer esto?

b) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Alicia o Benjamín debe ser el presidente?

c) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Eduardo debe ocupar uno de los puestos?

d) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si tanto Adolfo como Francisco deben ocupar un puesto?

a) Se usa el principio de la multiplicación. Se selecciona a los directivos en tres pasos sucesivos: se elige el presidente, se elige el secretario, se elige el tesorero. El presidente se puede elegir de seis maneras. Una vez elegido, el secretario se puede elegir de cinco maneras. Después de elegir al presidente y el secretario, el tesorero se puede seleccionar de cuatro maneras. Por lo tanto, el número total de posibilidades es

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

b) Con un argumento como el del inciso *a)*, si Alicia es presidente, se tienen $5 \cdot 4 = 20$ maneras de seleccionar los puestos restantes. De igual manera, si Benjamín es presidente, existen 20 maneras de seleccionar los puestos restantes. Como estos casos son ajenos, por el principio de la suma, existen

$$20 + 20 = 40$$

posibilidades.

c) [Primera solución] Con un argumento como el del inciso *a)*, si Eduardo es presidente, se tienen 20 maneras de elegir los puestos restantes. De forma similar, si Eduardo es secretario, hay 20 posibilidades, y si Eduardo es tesorero, se tienen 20 posibilidades. Como estos tres casos son ajenos por pares, por el principio de la suma se tienen

$$20 + 20 + 20 = 60$$

posibilidades.

[Segunda solución] Considere que la actividad de asignar a Eduardo y otros dos para los puestos está compuesta por tres pasos sucesivos: asignar a Eduardo a un puesto, asignar el puesto más alto que queda, asignar el último puesto. Existen tres maneras de asignar a Eduardo a un puesto. Una vez asignado, existen cinco maneras de asignar el puesto más alto que queda. Una vez asignados estos dos puestos, hay cuatro maneras de asignar el último puesto. Por el principio de la multiplicación, existen

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

posibilidades.

d) Considere que la actividad de asignar a Adolfo, Francisco y otra persona a los puestos se compone de tres pasos sucesivos: asignar a Adolfo, a Francisco y el puesto que queda. Existen tres maneras de asignar a Adolfo. Una vez asignado, hay dos maneras de asignar a Francisco. Una vez asignados Adolfo y Francisco, hay cuatro maneras de asignar el último puesto. Por el principio de la multiplicación, existen

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

posibilidades. ◀

Sugerencias para resolver problemas

La clave para resolver problemas en esta sección es determinar cuándo usar el principio de la multiplicación y cuándo el principio de la suma. Utilice el principio de la multiplicación cuando tenga un proceso paso por paso para *construir una actividad*. Por ejemplo, para diseñar una comida del menú de Comida Rápida de Kay (figura 6.1.1) que consista en un entremés, un plato fuerte y una bebida, se requiere un proceso de tres pasos:

1. Elegir un entremés.
2. Elegir un plato fuerte.
3. Elegir una bebida.

El número de actividades diferentes posibles es el producto del número de maneras en que se puede realizar cada paso. En este caso, el entremés se puede seleccionar de 2 maneras, un plato fuerte de 3 maneras y una bebida de 4 maneras. Entonces, el número de comidas es $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Utilice el principio de la suma cuando desee contar el número de elementos en un conjunto y pueda dividir el conjunto en subconjuntos que no se traslapan. Suponga, por ejemplo, que se desea contar el número total de artículos disponibles en Comida Rápida de Kay. Como hay 2 entremeses, 3 platos fuertes y 4 bebidas, y ningún artículo pertenece a dos categorías, el número total de artículos disponibles es

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Observe la diferencia entre los dos ejemplos. Para construir una comida compuesta de un entremés, un plato fuerte y una bebida en Comida Rápida de Kay se usa un proceso paso por paso. El tamaño del conjunto de comidas *no* se cuenta dividiendo el conjunto en subconjuntos que no se traslapen. Para contar el número de comidas se usa el principio de la multiplicación. Para contar el número de artículos disponibles en el restaurante de Kay, sólo se suma el número de artículos en cada categoría ya que las categorías son una división natural en subconjuntos que no se traslapan. *No* estamos contando los artículos individuales disponibles usando un proceso paso por paso. Para contar el número total de artículos disponibles, se usa el principio de la adición.

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie el principio de la multiplicación y dé un ejemplo de su aplicación.

2. Enuncie el principio de la adición y dé un ejemplo de su aplicación.

Ejercicios

Encuentre el número de comidas en Comida Rápida de Kay (figura 6.1.1) que satisfacen las condiciones de los ejercicios 1 al *3.*

1. Un entremés y una bebida

2. Un entremés, un plato fuerte y una bebida opcional

3. Un entremés opcional, un plato fuerte y una bebida opcional

4. Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántos atuendos diferentes son posibles?

5. Las opciones disponibles en un modelo específico de automóvil son cinco colores para el interior, seis colores de exterior, dos tipos de asientos, tres tipos de motor y tres tipos de radio. ¿De cuántas posibilidades diferentes dispone el cliente?

6. El sistema Braille para representar caracteres fue desarrollado a principios del siglo IX por Louis Braille. Los caracteres especiales para el invidente consisten en puntos en relieve. Las posiciones para los puntos se seleccionan en dos columnas verticales de tres puntos cada una. Debe haber al menos un punto en relieve. ¿Cuántos caracteres distintos de Braille puede haber?

7. Comente la siguiente nota del *New York Times*:

> Las camionetas de carga también llaman la atención por el aparente número infinito de maneras de personalizarlas; se necesitan las habilidades matemáticas de Will Hunting para obtener el total de configuraciones. Para comenzar, hay 32 combinaciones de cabinas (estándar, cabina club, cuadrángulo), cajas de carga (6.5 u 8 pies) y motores (3.9 litros V6, 5.2 litros V8, 5.9 litros V8, 5.9 litros V8, 5.9 litros turbo diesel alineado 6, 8 litros V10).

En los ejercicios 8 al 16, se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo.

8. ¿Cuántos resultados posibles hay?

9. ¿Cuántos resultados suman 4?

10. ¿Cuantos resultados son dobles? (Un doble ocurre cuando los dos dados muestran el mismo número).

11. ¿Cuántos resultados suman 7 u 11?

12. ¿En cuántos resultados el dado azul muestra 2?

13. ¿En cuántos resultados exactamente un dado muestra 2?

14. ¿Cuántos resultados tienen al menos un dado que muestra 2?

15. ¿En cuántos resultados ningún dado muestra 2?

16. ¿Cuántos resultados dan una suma par?

En los ejercicios 17 al 19, suponga que existen 10 caminos de Oz a Media Tierra y 5 de Media Tierra a la Isla de la Fantasía.

17. ¿Cuántas rutas hay de Oz a la Isla de la Fantasía que pasan por Media Tierra?

18. ¿Cuántos viajes redondos de la forma Oz-Media Tierra-Isla de la Fantasía-Media Tierra-Oz hay?

19. ¿Cuántos viajes redondos de la forma Oz-Media Tierra-Isla de la Fantasía-Media Tierra-Oz hay donde en el viaje de regreso no se invierte la ruta original de Oz a la Isla de la Fantasía?

20. ¿Cuántas placas de automóvil se puede hacer que contengan tres letras seguidas de dos dígitos y si se permite que haya repeticiones? Y ¿si no hay repeticiones?

21. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 1100?

22. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan y terminan con 1?

23. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen 1 en el segundo o el cuarto bit (o en ambos)?