UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	**Escuela de Ingeniería**	PROBLEMARIO
	Área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIÓN
	Carrera:	N/A
	Alumno(a):UN SOLUCIONARIO	

Ejercicio 1. Suponga que al inicio del ciclo escolar la matrícula total de una universidad es de 4 689 con un total de 60 estudiantes inscritos en el curso Math113, 42 estudiantes inscritos en el curso Lab114 y 24 estudiantes tomando ambos cursos. Determine la cantidad de estudiantes que están inscritos en los dos cursos.

Solución. Utilizaremos el lenguaje de conjuntos, sea A el conjunto de ls estudiantes inscritos en Math113 y sea B el conjunto de los estudiantes inscritos en Lab114. Entonces se tiene que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Por lo tanto, la solución es $42 + 60 - 24 = 78$

Ejercicio 2. Suponga que una placa de automóvil en la ciudad de Nueva York, consiste de tres letras seguidas de cuatro dígitos. Determine la cantidad de placas que tienen la letra K al inicio o un ocho como primer dígito.

Solución. La palabra clave aquí es la palabra "o", pues calcularemos uno, el otro caso y el caso en el que ocurren ambas situaciones y aplicaremos la relga de la suma

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

Si fijamos K, entonces el resto de espacios, se puede cubrir con $26^2 \cdot 10^4$. Ahora, si fijamos 8, se tienen $26^3 \cdot 10^3$ placas distintas. Por último, calculamos la cantidad de placas que tienen ambos K y 8 fijos, entonces $26^2 \cdot 10^3$. Por lo tanto, el resultado es

$$26^2 10^4 + 26^3 10^3 - 26^2 10^3.$$

Ejercicio 3. Investiga que conjunto es $\mathbb{Z}_{22}$, como se define y que cantidad de elementos tiene. Y en base a dicha información determina la cantidad de funciones

$$f : \{1, 3, 4, 7, 9\} \to \mathbb{Z}_{22}$$

que existen en cada caso:

(a) f debe ser uno a uno, o inyectiva.

(b) f tiene que se sobreyectiva.

(c) f puede ser cualquier función.

Solución. En primer lugar vamos a definir que conjunto es $\mathbb{Z}_2 2$, el cual podemos definir la colección de todos los posibles residuos de dividir cualquier entero entre 22, resulta ser

$$\mathbb{Z}_{22} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ..., 20, 21\}$$

Es decir, el número de elementos es 22. Ahora, para conjuntos finitos lo que distingue una función de otra, es la asignación que cada una tiene de los elementos de su dominio más allá de su formula. Para determinar el número de funciones que hay de $\{1,3,4,7,9\}$ a $\mathbb{Z}_{22}$, debemos determinar la cantidad de maneras de asignar valores a $f(1), f(3), f_(4), f(7)$ y $f(9)$.

imágenes	$f(1)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(7)$	$f(9)$
elecciones	___	___	___	___	___

Para el inciso (c), si no hay restricciones y f puede ser cualquier función, entonces tenemos 22 posibilidades para cada imagen, por lo tanto tenemos

$$(22)(22)(22)(22)(22) = 22^5$$

funciones distintas. Para el inciso (a), si la función tiene que ser uno a uno, (o inyectiva), entonces la función no puede tener imágenes repetidas, el hecho de que $f(i)$ debe ser distinto de $f(j)$ si $i \neq j$ para todo $i, j \in \{13, 4, 7, 9\}$ es precisamente la definición de inyectividad, de modo que tenemos

$$(22)(21)(20)(19)(18) = \frac{22!}{(22-5)!}.$$

Finalmente para el inciso (b), recordemos que una función es sobreyectiva cuando todos los elementos de su contradominio tienen una preimagen, en este caso a lo más se pueden asignar 5, por lo que 17 elementos de los 22 no son asignados, esto no implica sobreyectividad por lo tanto, ninguna función puede ser sobreyectiva, así el número de funciones sobreyectivas de $\{1,3,4,7,9\}$ a $\mathbb{Z}_{22}$ es cero.

Ejercicio 4. En los siguientes incisos de n y ϕ, demuestre que el $\text{mcd}(n, \phi) = 1$ y encuentre el inverso s de n módulo ϕ que satisface $0 < s < \phi$.

i. $n = 2$, $\phi = 3$

ii. $n = 7$, $\phi = 20$

iii. $n = 50$, $\phi = 231$

Solución. Vamos a iniciar este problema, mencionando lo que se entiende por inverso multiplicativo de un número entero, decimos que $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5, por que $5 \times \frac{1}{5} = 1$, similarmente 22 es el inverso multiplicativo del número $\frac{1}{22}$ pues $22 \times \frac{1}{22}$. Por cierto 0 no tiene inverso multplicativo. En la aritmética modular sucede lo mismo hay números que tienen inverso multiplicativo y otros que no lo tienen, todo depende de la operación de multiplicación, la multiplicación modulo ϕ se define como $n * s = Res(\frac{ns}{\phi})$. Por ejemplo, $5 * 8$ módulo 9 es igual a 4, ya que $40 \,\text{modulo}\, 9 = Res(\frac{40}{9}) = 4$, esto se escribe como $(5)(8) = 4 \,\text{módulo}\, 9$, pues $40 = (9)(4) + 4 = 36 + 4$. Análogamente, 2 es el inverso multiplicativo de 5, ya que $(5)(2) = 1$ módulo 9, pues $(2)(5) = 9 * 1 + 1$.
Para resolver, el ejercicio, hay una técnica que se basa en el algoritmo de Euclides para calcular el $mcd(n, \phi)$, lo ilustraremos en los tres incisos.

	Escuela de Ingeniería	PROBLEMARIO
UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	Área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIÓN
	Carrera:	N/A
	Alumno(a):UN SOLUCIONARIO	

Inciso i, calculamos el $mcd(2,3)$, siguiendo el algoritmo de Euclides, se tiene que

$$\begin{aligned} 3 =& \ 1*2+1 \\ 1 =& \ 1*1+0 \end{aligned} \quad \text{de modo que} \quad 1 = 1*3+(-1)*2$$

y definimos el inverso multiplicativo s de $n=2$ modulo $\phi = 3$, como

$$s = (-1) \text{ modulo } \phi = Res(\frac{-1}{3}) = 2 \quad \text{ya que } -1 = (-1)*3+2$$

y comprobamos, notando que $(2)(2) = 1 \,\text{modulo}\, 3$, en efecto $1 = Res(\frac{(2)(2)}{3})$ ya que $4 = 1*3+1$.

Inciso ii, calculamos el $mcd(7,20)$, siguiendo el algoritmo de Euclides, se tiene que

$$\begin{aligned} 20 =& \ 2*7+6 \\ 7 =& \ 1*6+1 \\ 6 =& \ 1*6+0 \end{aligned} \quad \text{de modo que} \quad \begin{aligned} 1 =& \ 1*7+(-1)*6 \\ =& \ 1*7+(-1)(20-2*7) \\ =& \ 3*7+(-1)*20 \end{aligned}$$

y definimos el inverso multiplicativo s de $n=7$ modulo $\phi = 20$, como

$$s = (3) \text{ modulo } 20 = Res(\frac{3}{20}) = 3 \quad \text{ya que } 3 = (0)*20+3$$

y comprobamos, notando que $(7)(3) = 1 \,\text{modulo}\, 3$, en efecto $1 = Res(\frac{(3)(7)}{3})$ ya que $21 = 1*20+1$.

Inciso iii, calculamos el $mcd(50,231)$, siguiendo el algoritmo de Euclides, se tiene que

$$\begin{aligned} 231 =& \ 4*50+31 \\ 50 =& \ 1*31+19 \\ 31 =& \ 1*19+12 \\ 19 =& \ 1*12+7 \\ 12 =& \ 1*7+5 \\ 7 =& \ 1*5+2 \\ 5 =& \ 2*2+1 \\ 2 =& \ 2*1+0 \end{aligned} \quad \text{de modo que} \quad \begin{aligned} 1 =& \ 1*5+(-2)*2 \\ =& \ 1*5+(-2)(7-1*5) \\ =& \ 3*5+(-2)*7 \\ =& \ 3*(12-1*7)+(-2)*7 \\ =& \ 3*12+(-5)*7 \\ =& \ 3*12+(-5)*(19-1*12) \\ =& \ 8*12+(-5)*19 \\ =& \ 8*(31-1*19)+(-5)*19 \\ =& \ 8*31-(13)*19 \\ =& \ 8*31-(13)(50-1*31) \\ =& \ 21*31+(-13)*50 \\ =& \ 21(231-4*50)+(-13)*50 \\ =& \ 21*231+(-97)*50 \end{aligned}$$

y definimos el inverso multiplicativo s de $n = 50$ modulo $\phi = 231$, como

$$s = (-97) \text{ modulo } 231 = Res(\frac{-97}{231}) = 134 \quad \text{ya que } 3 = (0) * 20 + 3$$

y comprobamos $(7)(3) = 1 \,\text{modulo}\, 3$, notando que $1 = Res(\frac{(3)(7)}{3})$ ya que $-97 = (-1) * 231 + 134$.

Ejercicio 5. ¿cuál es la cantidad de enteros positivos que contienen exactamente tres sietes, pero que no exceden 99999?

Solución. Notemos que todo número antes de 99999 se escribe con cinco lugares, por ejemplo 357 se escribe como 00357. Ahora, estos cinco lugares se ocupan por los números del 0 al 9, pero si queremos que en tres de esos lugares aparezca el 7, entonces tenemos $\binom{5}{3}$ maneras de elegirlos, y como exactamente debe haber 3 sietes, entonces para los dos lugares que quedan se tienen (9)(9) elecciones. En definitiva, tenemos

$$\binom{5}{3} 9^2.$$

Ejercicio 6. ¿Cuál es el término constante en el desarrollo $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$?

Solución. El teorema del binomio nos dice que

$$(a+b)^n = \sum_{k}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k,$$

donde el coeficiente binomial $C(n,k) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. En el ejercicio la letra a corresponde a x y la letra b corresponde a $\dfrac{2}{x}$ y $n = 8$. Entonces considerando esos valores se tiene

$$\left(x + \left(\frac{2}{x}\right)\right)^8 = \sum_{k}^{8} \binom{8}{k} x^{8-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k$$

y así el término genérico de la expansión está dado por

$$\binom{8}{k} x^{8-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \binom{8}{k} x^{8-k} \left(\frac{2^k}{x^k}\right) = \binom{8}{k} 2^k x^{8-k} x^{-k} = \binom{8}{k} 2^k x^{8-2k}$$

Por otro lado, el término constante del desarrollo $\left(x + \left(\frac{2}{x}\right)\right)^8$ ocurre precisamente cuando el término genérico no tiene x, eso es cuando la potencia de x es 0, de modo que, se debe de tener $8 - 2k = 0$, es decir, $k = 4$. Finalmente con $k = 4$, se calcula que el coeficiente debe ser, $\binom{8}{4} 2^4$.

UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	Escuela de Ingeniería	PROBLEMARIO
	Área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIÓN
	Carrera:	N/A
	Alumno(a):UN SOLUCIONARIO	

Ejercicio 7. Utilice el Teorema del Binomio para probar la fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

¿Qué interpretación se puede dar a esta fórmula en términos de subconjuntos de un conjunto?

Solución. El teorema del binomio nos dice que

$$(a+b)^n=\sum_{k}^{n}C(n,k)a^{n-k}b^k,$$

donde el coeficiente binomial $C(n,k)=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. En este ejercicio tomareemos $a=1$ y $b=-1$, de modo que

$$0=(1+(-1))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

En otras palabras

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots$$

y por lo tanto

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

Ahora, respecto a la interpretación en términos de subconjuntos de un conjunto que podemos dar a esta identidad, una es la siguiente: la identidad nos dice que el número de subconjuntos de cardinalidad par es el mismo número de subconjuntos de cardinalidad impar. De hecho para soportar esto, definiremos una biyección entre ambas familias de subconjuntos. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{I}$ las familias de subconjuntos del conjunto finito $[n]=\{1,2,3,4,...,n\}$, que tienen tamaños par e impar, respectivamente. Por ejemplo, $\emptyset,\{1,2\}\in\mathcal{P}$, $\{1\},\{1,2,3\}\in\mathcal{I}$, etc. Y definamos $\psi:\mathcal{P}\to\mathcal{I}$, mediante la asignación

$$A\mapsto A\Delta\{1\}=\begin{cases}A\cup\{1\}, \text{ si } 1\notin A\\ A\setminus\{1\}, \text{ si } 1\in A.\end{cases}$$

Es claro, por ejemplo que el conjunto vacío de cardinalidad par 0, se asigna al conjunto unitario $\{1\}$ de cardinalidad 1. El conjunto $\{1,2\}$ de cardinalidad 2 se asigna al conjunto unitario $\{2\}$ de cardinalidad 1, etc.

Ejercicio 8. Hay 12 hombres en un baile. a) ¿De cuántas formas pueden ser elegidos ocho de ellos para formar un grupo de limpieza? b) ¿De cuántas formas formas se pueden formar parejas con ocho mujeres que hay en el baile y ocho de estos 12 hombres?

Solución. En el inciso a) la respuesta es $\binom{12}{8}$, pues se trata de escoger sin repetición solamente 8 de un total de 12. Para formar parejas, inciso b) también se trata de elegir a 8 de los 12 pero ahora si importa el orden pues no es lo mismo elegir a Jose para Alice y Juan para Mary, que Juan para Alice y Jose para Mary, entonces se trata de permutaciones sin repetición, para la primer mujer se tienen 12 posibilidades, para la segunda mujer se tienen 11, y así hasta llegar a la octava mujer que tiene 5 alternativas de elección de pareja, de modo que en total se tiene

$$(12)(11)(10)(9)(8)(7)(6)(5) = \frac{12!}{(12-8)!} = P(12, 8)$$

Ejercicio 9. Determine el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra SALESPERSONS.

Solución. En este ejercicio aplicamos directamente la fórmula de las permutaciones con repetición, tenemos

$$PR_{12}^{4,2} = \frac{12!}{4!2!}$$

Ejercicio 10. ¿Cuántas palabras se pueden formar ordenando las letras SALESPERSONS si dos S no pueden estar juntas?

Solución. Ahora, en primer lugar consideramos las letras ALEPERON, con las cuales tenemos

$$\frac{8!}{2!}$$

palabras distintas. Y observamos los 9 lugares

$$\_\_A\_\_L\_\_E\_\_P\_\_E\_\_R\_\_O\_\_N\_\_$$

donde podrían colocarse las letras S, entonces tenemos

$$\binom{9}{4}\frac{8!}{2!}$$

Ejercicio 11. Demuestre que el producto de cualquier entero positivo y sus $k-1$ sucesores es divisible entre $k!$.

Solución. Sea $a \in \mathbb{Z}_+$ cualquier entero positivo, entonces

$$1(2)(3)\cdots a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = (a+(k-1))!$$

Por lo tanto

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = \frac{(a-(k-1))!}{(a-1)!}$$

es igual al producto de a y sus $k-1$ primeros sucesores.

En seguida, dividimos entre $k!$, para obtener

$$\frac{(a+(k-1))!}{k!(a-1)!} = \frac{(a+(k-1))!}{k!(a+(k-1)-k)!} = C(a+k-1,k) = \binom{a+k-1}{k} \in \mathbb{N}$$

en otras palabras $a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = k!C(a+k-1,k)$, es decir

$$k! \mid a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)).$$

Nuestra demostración queda completa si probamos que el coeficiente binomial $\binom{a+k-1}{k} \in \mathbb{N}$. Pero esto es un hecho ya que todo coeficiente binomial es un entero positivo, basta por ejemplo utilizar la identidad de Pascal para notar que todo coeficiente binomial se obtiene de la suma de dos enteros positivos.

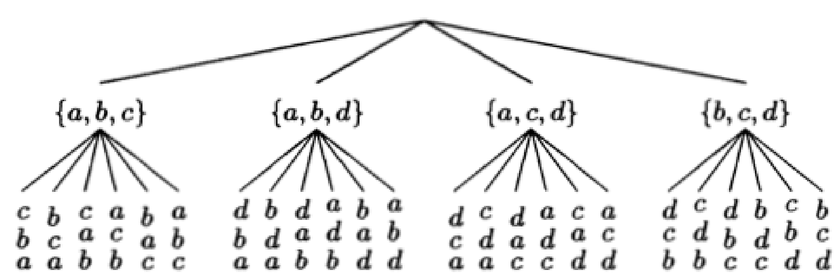
Ejercicio 12. Considere un club cuyos miembros son 6 hombres y 7 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 personas que tenga al menos una mujer?

Solución. Tenemos un total de 13 personas a ocupar 4 lugares, por lo que el número de maneras en que estas se pueden seleccionar es $\binom{13}{4}$ pero de ese total de comités que podemos formar, debemos descartar todos los que no incluyen una mujer los cuales son $\binom{6}{4}$, por lo tanto la respuesta es

$$\binom{13}{4} - \binom{6}{4}$$

Ejercicio 13. Sea $X = \{a,b,c,d\}$. Muestre la relación entre las permutaciones de 3 y las combinaciones de 3 elementos de X con un dibujo como el de la figura 6.2.4. página 233.

Solución. El dibujo es como sigue



donde en la primer linea aparecen las combinaciones de 3 que sabemos son

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\cdot 3!}{3!\cdot 1!} = 4,$$

y las otras son las permutaciones, de las cuales contamos 4!.

UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	**Escuela de Ingeniería**	PROBLEMARIO
	Área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIÓN
	Carrera:	N/A
	Alumno(a):UN SOLUCIONARIO	

Ejercicio 14. Use el resultado del ejercicio 65 página 227 para resolver este y el siguiente ejercicio. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 1 o terminan con 1?

Solución. Las indicaciones nos señalan utilizar la fórmula

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

de modo que si definimos X como todas las cadenas de 8bits que empiezan con 1, y Y todas las cadenas de 8bits que terminan con 1. Obtenemos

$$2^7 + 2^7 - 2^6$$

O equivalentemente, $2 \cdot 2^7 - 2^6 = 2^8 - 2^6$ que indica que del total de cadenas de 8 bits eliminamos aquellas que inician y terminan con 1.

Ejercicio 15. Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo. ¿Cuántos resultados tienen un 3 en el dado azul o una suma par?

Solución. También aquí utilizaremos la fórmula anterior, sea X que la cara del dado azul sea 3, y sea Y que la suma sea par. Entonces $X \cup Y$ significa que el resultado sea 3 en el dado azul o una suma par y, $X \cap Y$ significa que la cara del dado azul es 3 y que la suma es par.
Ahora, tenemos dos resultados a llenar

$$\underline{\quad},\underline{\quad}$$

si fijamos que el resultado en la cara del dado azul es 3, entonces se tienen 6 posibilidades para el otro dado, así tenemos $|X| = 6$. Ahora, para calcular $|Y|$, puesto que los posibles resultados de lanzar un dado son poquitos de hecho solo 6, podemos en una tabla esquematizar todas las posibles sumas, y de ellas contar cuales dan resultado par.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Asi que $|Y| = 18$, con ayuda de esa misma tabla podemos ver que $|X \cap Y| = 3$. Por lo tanto, la respuesta es

$$6 + 18 - 3 = 21$$

Ejercicio 16. Dé un ejemplo de primos consecutivos $p_1 = 2, p_2, ..., p_n$ donde

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

no es primo.

Solución. Una solución es

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 509 \cdot 59$$

Ejercicio 17. Encuentre la factorización primaria de 11!.

Solución. Notemos que

$$11! = (11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)$$

de modo que

$$\begin{aligned} 11! &= (11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) \\ &= (11)(5 \cdot 2)(3 \cdot 3)(2 \cdot 2 \cdot 2)(7)(3 \cdot 2)(5)(2 \cdot 2)(3)(2)(1) \\ &= 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^8 \end{aligned}$$

Ejercicio 18. Considere las parejas de números $67942, 4209$ y $490256, 337$ y $331, 993$, encuentre enteros s y t tales que $sa + tb = mcd(a, b)$, siendo a y b el primero y segundo numerito de cada pareja.

Solución. Solo resolveremos el último y penúltimo caso: Para 331 y 993, aplicamos el algoritmo de Euclides,

$$993 = \quad 3 * 331 + 0$$

Por lo tanto $mcd(993, 331) = 331 = 1 * 331 + 0 * 993$ Para 490256 y 337, aplicamos el algoritmo de Euclides,

$$\begin{aligned} 490256 &= \quad 1454 * 337 + 258 \\ 337 &= \quad 1 * 258 + 79 \\ 258 &= \quad 3 * 79 + 21 \\ 79 &= \quad 3 * 21 + 16 \\ 21 &= \quad 1 * 16 + 5 \\ 16 &= \quad 3 * 5 + 1 \end{aligned}$$

De modo que regresándonos en la cadena de igualdades anterior,

$$mcd(490\,256, 337) = 1 = 16 + (-3)5 = 16 + (-3)[21 + (-1)16] = \cdots = (93105)337 + (-64)490\,256.$$