Matemáticas Discretas

Adrián Cerda

Universidad Panaméricana, *Campus Aguascalientes*

Departamento de Matemáticas

9 de noviembre de 2020

Agenda

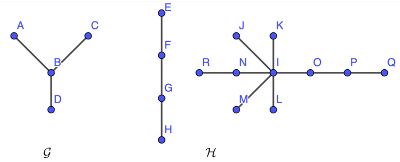
Árboles primeras definiciones

Como primera meta demostraremos que los grafos conexos son aquellos grafos que admiten árboles generadores.

Definición

Un árbol es un grafo conexo sin ciclos.

Ahora si eliminamos la condición de conectividad en la definición entonces obtenemos el concepto de bosque, es decir, un bosque es un grafo acíclico, el cual naturalmente corresponde a la unión finita de una colección de árboles.



Árboles primeras definiciones

Como primer resultado, probaremos que:

Proposición

Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si entre cada pareja de vértices de T existe un único camino simple que los conecta.

Demostración. Supongamos en primer lugar que T es un árbol, entonces puesto que T es conexo, entre cada pareja de vértices u y v de T hay un camino que los conecta. Y además T no contiene ciclos, dicho camino debe de ser único, ya que si no lo fuera, entonces hubiera dos caminos diferentes C_1 y C_2 entre u y v, y entonces el recorrido $C_1 \cup C_2$ sería cerrado y, por lo tanto contendría un ciclo. Lo cual es imposible.

Ahora, recíprocamente, si entre cada pareja de vértices de T existe un único camino simple, entonces T es conexo. Ahora, si T tuviera un ciclo entonces dos vértices estarían conectados por lo menos dos por dos caminos, lo cual no sucede por lo tanto T debe ser acíclico. Tampoco puede tener lazos ya que si hubiese un lazo en el vértice v, entonces al tratarse de un grafo conexo cualquier camino entre v y algún otro vértice, produciría dos caminos uno que pasa por el lazo y otro que no. $\square$

Árboles primeras definiciones

Definición

Una hoja de un árbol es un vértice de grado 1.

Es importante conocer el siguiente resultado:

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración. Sea $T = (V, E)$ un árbol con n vértices, y sea $H \subseteq V$ el subconjunto de las hojas de G. Entonces por la fórmula de los grados de los vértices de G, y puesto que $|E| = n - 1$, se sigue que

$$2(n-1) = 2|E| = \sum_{v \in V} gr(v) = \sum_{v \in H} gr(v) + \sum_{v \notin H} gr(v) = \sum_{v \in H} 1 + \sum_{v \notin H} gr(v) = |H| + \sum_{v \notin H} gr(v)$$

Pero $\sum_{v \notin H} gr(v) \geq \sum_{v \notin H} 2$ implica que

$$2(n-1) \geq |H| + 2(n - |H|)$$

De lo cual, se sigue que $|H| \geq 2$.

Árboles primeras definiciones

Relacionado con las hojas, se tiene también el siguiente resultado.

Proposición

Si eliminamos una hoja de un árbol de n-vértices, entonces se produce una árbol con $n-1$ vértices.

Demostración. Sea $v \in V$ una hoja de un árbol T, y sea

$$T' = T - v.$$

Ahora, puesto que un vértice de grado 1, no forma parte de ningún camino que conecte a cualesquiera otros dos vértices, se sigue que cualquier camino entre arbitrarios u y w con $u \neq v$ y $w \neq v$, sigue perteneciendo a $T - v$. Por lo tanto T' es conexo. Más aún, puesto que eliminar un vértice T no puede producir un ciclo, se sigue que T' también es acíclico y por lo tanto un árbol de orden $n-1$.

Ahora, notemos que las componentes conexas de un grafo son disjuntas dos a dos, esto es si H y L son dos componentes de un grafo G, entonces H y L no comparten ningún vértice.

Añadir una arista con vértices extremos en distintas componentes reúne ambas componentes en una sola. Por lo tanto, en general añadir una arista a un grafo disminuye el número de componentes conexas por 0 o 1. Y, eliminar una arista aumenta el número de componentes por 0 o 1.

Proposición

Todo grafo de orden n y k aristas tiene por lo menos $n-k$ componentes.

Demostración. Un grafo con n vértices sin aristas tiene n componentes conexas. Luego por la observación anterior cada arista que agreguemos al grafo disminuirá a lo mas en 1 el número de componentes, por lo tanto cuando el grafo tenga k aristas, el número de componentes habrá disminuido en a lo más k componentes de su totalidad, esto es, tendrá como mínimo $n-k$ componentes conexas. □

Árboles primeras definiciones

Eliminar un vértice o una arista de un grafo puede incrementar el número de componentes conexas. Cuando borramos una arista el número de componentes se incrementa en a lo más una componente, pero cuando eliminamos un vértice el incremento puede ser mayor. Lo cual se debe a que la operación de eliminar un vértice debe estar bien definida y el resultado debe ser un subgrafo, así que al eliminar un vértice se debe de eliminar también cada arista incidente en dicho vértice.

Definición

Una arista de corte es una arista tal que al ser eliminada el número de componentes conexas del grafo se incrementa. Del mismo modo, un vértice de corte es un vértice que al ser eliminado aumenta el número de componentes.

Escribimos $G - e$ o $G - M$ para denotar al subgrafo de G obtenido de eliminar una arista e o un conjunto de aristas M. Similarmente, escribimos $G - v$ o $G - S$ para denotar al subgrafo obtenido de G tras eliminar un vértice v o un subconjunto de vértices S.

Árboles primeras definiciones

Un subgrafo inducido es un subgrafo obtenido de eliminar un conjunto de vértices. Escribimos $G[T]$ para denotar al subgrafo $G - T^c$, donde $T^c = V - T$, a este subgrafo lo llamamos el subgrafo de G inducido por T. Al referirnos a los vértices del complemento, notamos que $G[T]$ consiste de T y todas las aristas cuyos vértices extremos pertenecen a T.

En seguida caracterizamos las aristas de corte en términos de ciclos.

Teorema

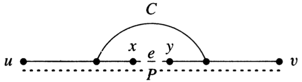
Una arista es una arista de corte si y solo si dicha arista no pertenece a ningún ciclo.

Demostración. Sea e una arista de G con vértices extremos x y y, y sea H la componente conexa que contiene a e. Puesto que eliminar e no afecta ninguna otra componente de G. Probaremos que $H - e$ es conexa si y solo si e pertenece a un ciclo.

Primero supondremos que $H - e$ es conexa, esto implica que $H - e$ contiene un camino simple de x a y, el cual forma un ciclo al agregar e. Así e pertenece a un ciclo.

Árboles primeras definiciones

Ahora supongamos que e pertenece a un ciclo C. Y sean u y v dos vértices arbitrarios en el conjunto de vértices de H. Como H es conexa, se sigue que H contiene un camino, digamos P de u a v. Consideramos dos casos: si P contiene a e y si P no contiene a e. En el último caso, se sigue que $H - e$ tiene un camino de u a v. Lo cual contribuye al hecho de que $H - e$ sea conexa. En el otro caso, si P contiene a e entonces sin perdida de generalidad podemos suponer que x esta entre u y y en P. Veáse la figura.



Luego, en $H - e$ se tiene un camino de u a x y un camino de y a v a lo largo de P. Pero además se tiene un camino de x a y a lo largo de C, por lo tanto, por la transitividad de la relación de conexidad se sigue que $H - e$ tiene un camino de u a v, y cómo estos fueron arbitrarios, concluimos que $H - e$ es conexa. $\square$

Proposición

Un grafo $T = (V, E)$ de orden n y tamaño m, es un árbol si y solo si T es conexo y $m = n - 1$.

En otras palabras T es un árbol si y solo si T es conexo y $|V| = |E| + 1$

Demostración. Veamos que si T es un árbol entonces T es conexo y su número de aristas es exactamente su número de vértices disminuido en 1. Es claro que T es conexo puesto que por definición todo árbol es conexo. Por lo tanto, esta parte de la prueba se reduce a demostrar que

$$m = n - 1.$$

Realizaremos esto por inducción sobre n. Si $n = 1$ entonces el resultado es trivialmente verdadero pues $1 - 1 = 0$. Ahora supongamos que el resultado es cierto para todo árbol de orden $k < n$, y probaremos para n.

Por tanto sea T un árbol de orden n y sea $e = \{u, v\}$ una arista de T.

Árboles primeras definiciones

Luego, por un resultado anterior sabemos que esta arista es el único camino simple que une los vértices u y v, y por lo tanto el grafo $T - e$ esta formado exactamente por dos componentes conexas T_u que contiene a u y T_v que contiene a v. Luego cada una de estas componentes conexas es un árbol, puesto que son subgrafos de T. Ahora puesto que su orden de ambas es menor que n, aplicamos la hipótesis de inducción a T_u y a T_v. Esto es

$$m_{T_u} = n_{T_u} - 1, \text{y } m_{T_v} = n_{T_v} - 1$$

Por lo tanto

$$m = m_{T_u} + m_{T_v} + 1 = n_{T_u} - 1 + n_{T_v} - 1 + 1 = n - 1$$

Notemos que al saber que $|V| = n$ y que $|E| = m$, la relación anterior también puede expresarse como $|V| = |E| + 1$.

Por último, veremos que recíprocamente, si T es un grafo conexo de orden n y tamaño $n - 1$, entonces T es acíclico. Esto es T es un árbol. Ya sabemos que todo grafo conexo de orden n debe tener un mínimo de $n - 1$ aristas. Entonces si tuviera un ciclo, pudiéramos eliminar una arista de dicho ciclo y el grafo seguiría siendo conexo. Pero esto nos llevaría a que el número de aristas sea igual a $n - 2$. Lo cual es imposible pues el mínimo es $n - 1$ y por lo tanto T no tiene ciclos.