

6.2 → Permutaciones y combinaciones

WWW

Hay cuatro candidatos, Samuel, Ignacio, Héctor y Vilma, postulados para el mismo puesto. Para que la posición de los nombres en las boletas de votación no influya en los votantes, es necesario imprimir boletas con los nombres en todos los órdenes posibles. ¿Cuántas boletas diferentes habrá?

Se puede usar el principio de la multiplicación. Una boleta se elabora en cuatro pasos sucesivos: se selecciona el primer nombre de la lista; se selecciona el segundo nombre; se selecciona el tercero; y se selecciona el cuarto nombre de la lista. El primer nombre se puede elegir de cuatro maneras. Una vez elegido el primer nombre, el segundo se puede seleccionar de tres maneras. Cuando se tiene el segundo nombre, el tercero se puede elegir de dos maneras y el cuarto sólo de una manera. Por el principio de la multiplicación, el número de boletas diferentes es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Un ordenamiento de los objetos, como los nombres en las boletas, se llama **permutación**.

Definición 6.2.1 ►

Una permutación de n elementos diferentes x_1, \dots, x_n es un ordenamiento de los n elementos x_1, \dots, x_n . ◀

Ejemplo 6.2.2 ►

Existen seis permutaciones de tres elementos. Si se denotan los elementos por A, B, C , las seis permutaciones son

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

Se encontró que existen 24 maneras de ordenar cuatro candidatos en una boleta; así, hay 24 permutaciones de cuatro objetos. El método que se usó para contar el número de boletas diferentes con cuatro nombres se puede usar para derivar una fórmula para el número de permutaciones de n elementos.

La demostración del siguiente teorema para $n = 4$ se ilustra en la figura 6.2.1.

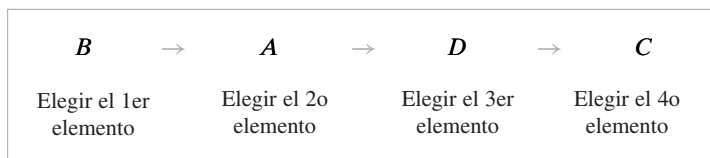


Figura 6.2.1 Prueba del teorema 6.2.3 para $n = 4$. Una permutación de $ABCD$ se construye con la elección sucesiva del primer elemento, después el segundo elemento, luego el tercero y por último el cuarto.

Teorema 6.2.3

Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Demostración Se usa el principio de la multiplicación. Una permutación de n elementos se construye en n pasos sucesivos: se elige el primer elemento; se elige el segundo elemento; . . . ; se elige el último elemento. El primer elemento se puede seleccionar de n maneras. Una vez elegido, el segundo elemento se puede seleccionar de $n - 1$ maneras. Una vez elegido, el tercer elemento se puede seleccionar de $n - 2$ maneras, y así sucesivamente. Por el principio de la multiplicación, existen

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

permutaciones de n elementos.

Ejemplo 6.2.4 ►

Existen

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3,628,800$$

permutaciones de 10 elementos.

Ejemplo 6.2.5 ►

Figura 6.2.2 Cuatro fichas para permutar.

¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen la subcadena DEF ?

Para garantizar la presencia del patrón DEF en la subcadena, estas tres letras deben estar juntas en este orden. Las letras restantes, A, B y C , se pueden colocar de forma arbitraria. Podemos pensar en construir permutaciones de las letras $ABCDEF$ que contengan el patrón DEF con la permutación de cuatro fichas: una con la etiqueta DEF y las otras con etiquetas A, B y C (figura 6.2.2). Por el Teorema 6.2.3, existen $4!$ permutaciones de cuatro objetos. Entonces, el número de permutaciones de las letras $ABCDEF$ que contienen la subcadena DEF es

$$4! = 24.$$

Ejemplo 6.2.6 ►

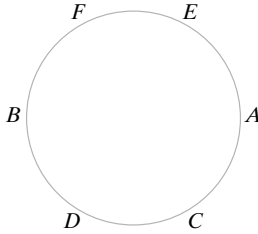
¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen a las letras DEF juntas en cualquier orden?

Este problema se resuelve mediante un procedimiento de dos pasos: se selecciona un orden de las letras DEF ; se construye una permutación de $ABCDEF$ que contenga el orden dado de las letras DEF . Por el Teorema 6.2.3, el primer paso se puede realizar de $3! = 6$ maneras y, de acuerdo con el ejemplo 6.2.5, el segundo paso se puede realizar de 24 maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones de las letras $ABCDEF$

que contienen las letras DEF juntas en cualquier orden es

$$6 \cdot 24 = 144.$$

Ejemplo 6.2.7 ►



¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas alrededor de una mesa circular? Si un arreglo se obtiene de otro haciendo que todos se muevan n asientos en el sentido de las manecillas del reloj, los arreglos se consideran idénticos.

Denotemos a las personas como A, B, C, D, E y F . Como los arreglos obtenidos por rotación se consideran idénticos, es lo mismo si A se sienta en un lugar arbitrario. Para sentar a las otras cinco personas, se pueden ordenar y después sentarlas en ese orden en el sentido de las manecillas del reloj a partir de A . Por ejemplo la permutación $CDBFE$ definiría el arreglo de la figura al margen. Como hay $5! = 120$ permutaciones de cinco elementos, hay 120 maneras de sentar a seis personas en una mesa circular.

El mismo argumento se puede usar para demostrar que hay $(n - 1)!$ maneras de sentar a n personas alrededor de una mesa circular.

Algunas veces se desea considerar un orden de r elementos seleccionados entre n elementos disponibles, es decir, de los n elementos tomados de r en r . Este ordenamiento se llama **permutación r** .

Definición 6.2.8 ►

Una permutación r de n elementos (distintos) x_1, \dots, x_n es un ordenamiento de r elementos de $[x_1, \dots, x_n]$. El número de permutaciones r de un conjunto de n elementos diferentes se denota por $P(n, r)$.

Ejemplo 6.2.9 ►

Ejemplos de permutaciones 2 de a, b, c son

$$ab, ba, ca.$$

Si $r = n$ en la definición 6.2.8, se obtiene un ordenamiento de todos los n elementos. Entonces, una permutación n de n elementos es lo que antes se llamó simplemente permutación. El Teorema 6.2.3 dice que $P(n, n) = n!$. El número $P(n, r)$ de permutaciones r de un conjunto de n elementos cuando $r < n$ se obtiene de la demostración del Teorema 6.2.3. Esta demostración para $n = 6$ y $r = 3$ se ilustra en la figura 6.2.3.

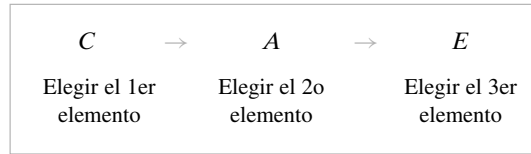


Figura 6.2.3 Prueba del Teorema 6.2.10 para $n = 6$ y $r = 3$. Una permutación r de $ABCDEF$ se construye mediante la selección sucesiva del primero, segundo y tercer elementos.

Teorema 6.2.10

El número de permutaciones r de un conjunto de n objetos diferentes es

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1), \quad r \leq n.$$

Demostración Debe contarse el número de maneras de ordenar r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos. El primer elemento se puede elegir de n maneras. Una vez que se elige el primer elemento, el segundo se puede seleccionar de $n - 1$ maneras. Continuamos eligiendo elementos hasta que, habiendo elegido el elemento $r - 1$, pasamos al elemento r que se puede seleccionar de $n - r + 1$ maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones r de un conjunto de n objetos distintos es

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1).$$

Ejemplo 6.2.11 ►

De acuerdo con el teorema 6.2.10, el número de permutaciones 2 de $X = \{a, b, c\}$ es

$$P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

Estas seis permutaciones son

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Ejemplo 6.2.12 ►

¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 10 personas?

Es necesario contar el número de ordenamientos de cuatro personas seleccionadas de un grupo de 10, ya que cada arreglo elige (de manera única) un presidente (primera elección), un vicepresidente (segunda elección), un secretario (tercera elección) y un tesorero (cuarta elección). Por el Teorema 6.2.10, la solución es

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Pudo haberse resuelto el ejemplo 6.2.12 usando directamente el principio de la multiplicación.

También, $P(n, r)$ se puede escribir en términos de factoriales:

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n-1) \cdots (n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r) \cdots 2 \cdot 1}{(n-r) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Ejemplo 6.2.13 ►

Usando (6.2.1), la solución del ejemplo 6.2.12 se rescribe como

$$P(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}.$$

Ejemplo 6.2.14 ►

¿De cuántas maneras pueden hacer cola siete marcianos y cinco venusinos si dos venusinos no se paran juntos?

Marcianos y venusinos se pueden formar siguiendo un proceso de dos pasos: formar marcianos; formar venusinos. Los marcianos se pueden formar de $7! = 5040$ maneras. Una vez formados los marcianos (por ejemplo en las posiciones M_1 a M_7), como los venusinos no pueden estar dos juntos, tendrán ocho posiciones posibles para formarse (espacios indicados por guión bajo);

$$- M_1 - M_2 - M_3 - M_4 - M_5 - M_6 - M_7 - .$$

Así, los venusinos pueden formarse de $P(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de maneras en que siete marcianos y cinco venusinos puede hacer cola si dos venusinos no pueden estar juntos es

$$5040 \cdot 6720 = 33,868,800$$

Ahora se estudiarán las combinaciones. Una selección de objetos que no toma en cuenta el orden se llama **combinación**.

Definición 6.2.15 ►

Dado un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ que contiene n elementos (diferentes),

- Una *combinación* r de X es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X de r elementos).
- El número de combinaciones r de un conjunto de n elementos distintos se denota por $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$.

Ejemplo 6.2.16 ►

Un grupo de cinco estudiantes, María, Braulio, Rosa, Amanda y Néstor, ha decidido hablar con la directora del departamento de matemáticas para que ofrezcan más cursos de matemáticas discretas. La directora del departamento ha dicho que hablará con tres de los

estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden estos cinco estudiantes elegir tres de ellos para hablar con la directora del departamento?

Al resolver este problema no debe tomarse en cuenta el orden. (Por ejemplo, no hay diferencia si la directora habla con María, Amanda y Néstor o con Néstor, María y Amanda). Con sólo listar las posibilidades, se ve que existen 10 maneras de elegir tres estudiantes de un grupo de cinco para hablar con la directora.

MBR, MBA, MRA, BRA, MBN, MRN, BRN, MAN, BAN, RAN.

En la terminología de la definición 6.2.15, el número de maneras en que los cinco estudiantes pueden elegir tres de ellos es $C(5, 3)$, el número de combinaciones de 3 de cinco elementos. Se ha encontrado que

$$C(5, 3) = 10.$$

Ahora se derivará la fórmula para $C(n, r)$ contando el número de permutaciones r de un conjunto de n elementos de dos maneras. La primera simplemente usa la fórmula $P(n, r)$. La segunda manera de contar el número de permutaciones de un conjunto de n elementos implica $C(n, r)$. Igualar los dos valores nos permitirá obtener una fórmula para $C(n, r)$.

Podemos construir permutaciones r de un conjunto X de n elementos en dos pasos sucesivos: primero, elegimos una combinación r de X (un subconjunto no ordenado de r elementos); segundo, se ordena. Por ejemplo, para construir una permutación de 2 de $\{a, b, c, d\}$, primero elegimos una combinación de 2 y después lo ordenamos. La figura 6.2.4 muestra cómo se obtienen todas las permutaciones 2 de $\{a, b, c, d\}$ de esta manera. El principio de multiplicación dice que el número de permutaciones r es el producto del número de combinaciones r por el número de ordenamientos de r elementos; es decir,

$$P(n, r) = C(n, r)r!.$$

Por lo tanto,

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}.$$

El siguiente teorema establece este resultado y da algunas maneras alternativas para escribir $C(n, r)$.

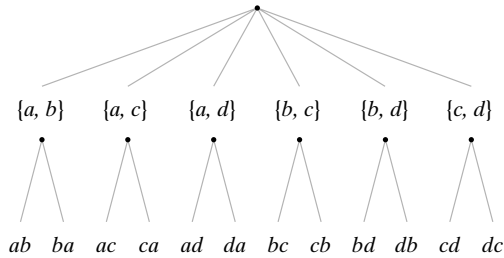


Figura 6.2.4 Permutaciones de 2 elementos de $\{a, b, c, d\}$.

Teorema 6.2.17

El número de combinaciones r de un conjunto de n objetos distintos es

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad r \leq n.$$

Demostración La demostración de la primera ecuación está dada antes de enunciar el Teorema. Las otras formas de la ecuación se derivan del Teorema 6.2.10 y la ecuación (6.2.1).

Ejemplo 6.2.18 ►

¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de tres a partir de un grupo de 10 personas diferentes?

Como un comité es un grupo no ordenado de personas, la respuesta es

$$C(10, 3) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120.$$

Ejemplo 6.2.19 ▶

¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres y seis hombres?

Igual que en el ejemplo 6.2.18, se encuentra que las dos mujeres se pueden elegir de

$$C(5, 2) = 10$$

maneras y que los tres hombres se pueden elegir de

$$C(6, 3) = 20$$

maneras. El comité se construye en dos pasos sucesivos: se elige a las mujeres; se elige a los hombres. Por el principio de la multiplicación, el número total de comités es

$$10 \cdot 20 = 200.$$

Ejemplo 6.2.20 ▶

¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

Una cadena de ocho bits que contiene cuatro unos se determina de manera única una vez que se establece qué bits son 1. Esto se puede hacer de

$$C(8, 4) = 70$$

maneras.

Ejemplo 6.2.21 ▶

Una baraja común de 52 cartas consiste en cuatro palos

tréboles, diamantes, corazones y espadas

con 13 denominaciones cada uno

as, de 2 a 10, jack, reina y rey.

- ¿Cuántas manos de póquer (sin ordenar) de cinco cartas, seleccionadas de una baraja común de 52 cartas, existen?
- ¿Cuántas manos de póquer contienen cartas todas del mismo palo?
- ¿Cuántas manos de póquer contienen tres cartas de una denominación y dos de una segunda denominación?

a) La respuesta está dada por la fórmula de las combinaciones

$$C(52, 5) = 2,598,960.$$

b) Una mano en la que todas las cartas son del mismo palo se puede construir en dos pasos sucesivos: seleccionamos un palo; seleccionamos cinco cartas del palo elegido. El primer paso se puede realizar de cuatro maneras y el segundo de $C(13, 5)$ maneras. Por el principio de la multiplicación, la respuesta es

$$4 \cdot C(13, 5) = 5148.$$

c) Una mano que contiene tres cartas de una denominación y dos de otra se puede construir en cuatro pasos sucesivos: seleccionamos la primera denominación; seleccionamos la segunda denominación; seleccionamos tres cartas de la primera denominación; seleccionamos dos cartas de la segunda denominación. La primera denominación se puede elegir de 13 maneras. Una vez elegida, se puede seleccionar la segunda denominación de 12 maneras. Se pueden elegir tres cartas de la primera denominación de $C(4, 3)$ maneras, y se pueden seleccionar dos cartas de la segunda denominación de $C(4, 2)$ maneras. Por el principio de la multiplicación,

la respuesta es

$$13 \cdot 12 \cdot C(4, 3) \cdot C(4, 2) = 3744.$$

Ejemplo 6.2.22 ►

¿Cuántas rutas existen desde la esquina inferior izquierda de una cuadrícula $n \times n$ a la esquina superior derecha si los viajes están restringidos sólo a la derecha o hacia arriba? Una ruta se muestra en una cuadrícula de 4×4 en la figura 6.2.5 a).

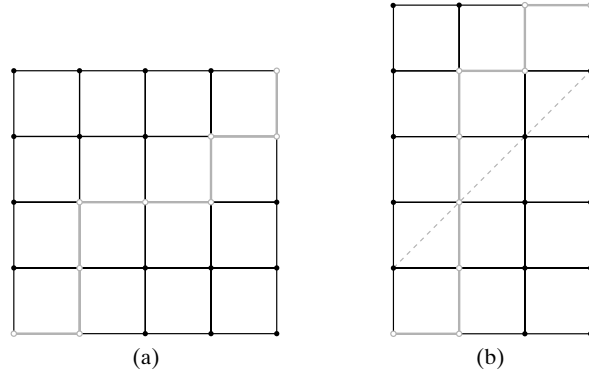


Figura 6.2.5 a) Rejilla de 4×4 con una ruta de la esquina inferior izquierda a la superior derecha. b) Ruta en a) transformada a una ruta en una rejilla de 5×3 .

Cada ruta se puede describir por una cadena de n letras D (derecha) y A (arriba). Por ejemplo, la ruta mostrada en la figura 6.2.5 a), se describe como la cadena $DAADDADA$. Cualquier cadena se puede obtener seleccionando n posiciones de las D , sin importar el orden de selección, entre las $2n$ posiciones disponibles en la cadena y después llenando el resto de las posiciones con A . Así, existen $C(2n, n)$ rutas posibles.

Ejemplo 6.2.23 ►

¿Cuántas rutas hay de la esquina inferior izquierda de una rejilla cuadrada de $n \times n$ a la esquina superior derecha, si el viaje se restringe sólo hacia la derecha y arriba, y si se permite tocar pero no pasar hacia arriba de la diagonal que va de la esquina inferior izquierda a la superior derecha?

Un ruta que toca pero que no cruza la diagonal se llama una *ruta buena*, y la que cruza la diagonal se llama una *ruta mala*. El problema es contar el número de rutas buenas. Sea B_n el número de rutas buenas y M_n el número de rutas malas. En el ejemplo 6.2.22 se demostró que

$$B_n + M_n = C(2n, n);$$

entonces, basta con calcular el número de rutas malas.

Una ruta de la esquina inferior izquierda de una rejilla de $(n+1) \times (n-1)$ a la esquina superior derecha (sin restricciones) recibe el nombre de ruta de $(n+1) \times (n-1)$. La figura 6.2.5 b), muestra una ruta 5×3 . Se demostrará que el número de rutas malas es igual al número de rutas de $(n+1) \times (n-1)$ describiendo una función uno a uno y sobre del conjunto de rutas malas al conjunto de rutas de $(n+1) \times (n-1)$.

Dada una ruta mala, se encuentra el primer movimiento (comenzando en la esquina inferior izquierda) que la lleva arriba de la diagonal. De ahí en adelante se sustituye cada movimiento a la derecha por uno hacia arriba y cada movimiento hacia arriba por uno a la derecha. Por ejemplo, la ruta de la figura 6.2.5 a), se transforma en la ruta que se muestra en la figura 6.2.5 b). Esta transformación también se puede lograr rotando la porción de la ruta que sigue al primer movimiento que cruza la diagonal, respecto a la línea punteada de la figura 6.2.5 b). Se ve que esta transformación sin duda asigna a cada ruta mala una ruta de $(n+1) \times (n-1)$.

Para demostrar que nuestra función es sobre, considere cualquier ruta de $(n+1) \times (n-1)$. Como esta ruta termina arriba de la diagonal, existe un primer movimiento en el que la cruza. Entonces se puede rotar el resto de la ruta respecto a la línea punteada de la

figura 6.2.5 b), para obtener una ruta mala. La imagen de esta ruta mala bajo nuestra función es la ruta de $(n+1) \times (n-1)$ con la que se comenzó. Por lo tanto, nuestra función es sobre. Nuestra función también es uno a uno, ya que podemos verificar que la función transforma rutas malas diferentes en rutas de $(n+1) \times (n-1)$ diferentes. Así, el número de rutas malas es igual al número de rutas de $(n+1) \times (n-1)$.

Un argumento como el del ejemplo 6.2.22 demuestra que el número de rutas de $(n+1) \times (n-1)$ es igual a $C(2n, n-1)$. Entonces, el número de rutas buenas es igual a

$$\begin{aligned} C(2n, n) - B_n &= C(2n, n) - C(2n, n-1) = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{C(2n, n)}{n+1}. \end{aligned}$$

◀

WWW

Los números $C(2n, n)/(n+1)$ se llaman **números de Catalan** en honor al matemático belga Eugène-Charles Catalan (1814-1894), quien descubrió una derivación elemental de la fórmula de $C(2n, n)/(n+1)$. Catalan publicó numerosos artículos de análisis, combinatoria, álgebra, geometría, probabilidad y teoría de números. En 1844, llegó a la conjetura de que los únicos enteros positivos consecutivos que son potencias (esto es, i^j , donde $j \geq 2$) son 8 y 9. Más de 150 años después (en 2002) Preda Mihailescu demostró el resultado.

En este libro, los números de Catalan $C(2n, n)/(n+1)$ se denotan por C_n , $n \geq 1$, y C_0 se define como 1. Los primeros números de Catalan son

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42.$$

Igual que los números de Fibonacci, los números de Catalan tienen forma de aparecer en lugares inesperados (vea los ejercicios 71, 76 y 77 de esta sección, y 28 y 29 de la sección 7.1).

Esta sección concluye con otra demostración del teorema 6.2.17 que da una fórmula para el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La demostración se ilustra en la figura 6.2.6. Sea X un conjunto de n elementos. Se supone que funciona la fórmula $P(n, r) = n(n-1) \cdots (n-r+1)$ que cuenta el número de ordenamientos de subconjuntos de r elementos sacados de X . Para contar el número de subconjuntos de r elementos de X , no se desea tomar en cuenta el orden, se quiere considerar las permutaciones del mismo subconjunto *equivalente*. De manera formal, se define una relación R sobre un conjunto S de permutaciones r de X mediante la siguiente regla: $p_1 R p_2$ si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto de r elementos de X . De manera directa se verifica que R es una relación equivalente en S .

Si p es una permutación r de X , entonces p es una permutación de algún subconjunto X_r de r elementos de X ; entonces, la clase de equivalencia que contiene a p consiste en todas las permutaciones de X_r . Se ve que cada clase de equivalencia tiene $r!$ elementos. Una clase de equivalencia se determina por el subconjunto de r elementos de X que se permuta para obtener a sus miembros. Por lo tanto, existen $C(n, r)$ clases de equivalencia. Como el subconjunto S tiene $P(n, r)$ elementos, por el teorema 3.2.15, $C(n, r) = P(n, r)/r!$.

ab	ac	ad	bc	bd	cd
ba	ca	da	cb	db	dc

Figura 6.2.6 Demostración alternativa del teorema 6.2.17 para $n = 4$ y $r = 2$. Cada cuadro contiene una clase de equivalencia para la relación R sobre el conjunto de permutaciones de 2 de $X = \{a, b, c, d\}$ definida por $p_1 R p_2$ si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto de 2 elementos de X . Existen $P(4, 2) = 12$ permutaciones de 2 elementos y 2 maneras de permutar cada permutación de 2. Como cada clase equivalente corresponde a un subconjunto de X , $12/2 = C(4, 2)$.

Sugerencias para resolver problemas

Los puntos importantes que deben recordarse en esta sección son que una permutación toma en cuenta el orden y una combinación *no* toma en cuenta el orden. Así, una clave para resolver problemas de conteo es determinar si se deben contar objetos ordenados o no ordenados. Por ejemplo, una fila de personas *distintas* se considera ordenada. Entonces, seis personas pueden hacer cola de 6! maneras; se usa la fórmula de la permutación. Un comité es un ejemplo típico de un grupo no ordenado. Por ejemplo, un comité de tres personas se puede seleccionar de un conjunto de 6 personas de $C(6, 3)$ maneras; aquí se usa la fórmula de la combinación.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una permutación de x_1, \dots, x_n ?
2. ¿Cuántas permutaciones hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se obtiene esta fórmula?
3. ¿Qué es una permutación r de x_1, \dots, x_n ?
4. ¿Cuántas permutaciones r hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se obtiene esta fórmula?
5. ¿Cómo se denota el número de permutaciones r de un conjunto de n elementos?
6. ¿Qué es una combinación r de $\{x_1, \dots, x_n\}$?
7. ¿Cuántas combinaciones r hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se deriva esta fórmula?
8. ¿Cómo se denota el número de combinaciones r de un conjunto de n elementos?

Ejercicios

1. ¿Cuántas permutaciones hay de a, b, c, d ?
 2. Liste las permutaciones de a, b, c, d .
 3. ¿Cuántas permutaciones de 3 hay de a, b, c, d ?
 4. Liste las permutaciones de 3 de a, b, c, d .
 5. ¿Cuántas permutaciones hay de 11 objetos diferentes?
 6. ¿Cuántas permutaciones de 5 hay de 11 objetos diferentes?
 7. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente y secretario de un grupo de 11 personas?
 8. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 12 personas?
 9. ¿De cuántas maneras pueden terminar 12 caballos en el orden ganador, segundo lugar, tercer lugar?
 10. Contiene la subcadena ACE
 11. Contiene las letras ACE juntas en cualquier orden
 12. Contiene las subcadenas DB y AE
 13. Contiene ya sea la subcadena AE o la subcadena EA
 14. A aparece antes que D. Ejemplos: BCAED, BCADE
 15. No contiene las subcadenas AB, CD
 16. No contiene las subcadenas AB, BE
 17. A aparece antes que C y C aparece antes que E
 18. Contiene ya sea la subcadena DB o la subcadena BE
 19. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos y 8 venusinos, si dos marcianos no pueden estar juntos?
 20. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos, 10 mercurianos y 8 venusinos, si dos marcianos no pueden estar juntos?
 21. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos y 5 venusinos?
 22. ¿De cuántas maneras puede sentarse 5 marcianos y 5 venusinos en una mesa circular?
 23. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 5 venusinos en una mesa circular si dos marcianos no se pueden sentar juntos?
 24. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 8 venusinos en una mesa circular, si dos marcianos no pueden sentarse juntos?
- En los ejercicios 25 al 27, sea $X = \{a, b, c, d\}$.
25. Calcule el número de combinaciones de 3 de X .
 26. Liste las combinaciones de 3 de X .
 27. Demuestre la relación entre las permutaciones de 3 y las combinaciones de 3 elementos de X con un dibujo como el de la figura 6.2.4.
 28. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de tres entre un grupo de 11 personas?
 29. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro entre un grupo de 12 personas?
 30. En cierto momento del juego de lotería del estado de Illinois, se pidió a una persona que escogiera 6 números (en cualquier orden) entre 44 números. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? El estado estaba considerando cambiar el juego de manera que se pidiera a una persona elegir 6 números entre 48. ¿De cuántas maneras podría hacerlo?
- Los ejercicios 31 al 36 se refieren a un club cuyos miembros son 6 hombres y 7 mujeres.
31. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 5 personas?
 32. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 hombres y 4 mujeres?