Probabilidad Condicional

M. en C. Paul Ramírez De la Cruz

Probabilidad Condicional

- ¿De qué manera podemos incluir información adicional en el cálculo de una probabilidad?

Eventos dependientes e independientes

- En ocasiones la ocurrencia de un evento, B, influye en la probabilidad de ocurrencia de otro evento, A
- Es decir que la probabilidad de A se modifica, dependiendo de si B ha ocurrido o no
- En tal caso decimos que A y B son dependientes
- Por el contrario, si la probabilidad de A se mantiene, sin importar si B ha ocurrido o no, decimos que A y B son independientes

Eventos dependientes e independientes

- Ejemplo:
  - A = {El alumno aprueba el examen}
  - B = {El alumno utiliza un pantalón de color azul el día del examen}
  - C = {El alumno dedicó al menos 20 horas a la preparación del examen}
- Los eventos A y B son independientes
- Los eventos A y C son dependientes

Probabilidad Condicional

- Cuando queremos conocer la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que ya ha ocurrido el evento B, estamos interesados en la probabilidad (condicional) de que ocurra A dado que ocurrió B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \qquad P(B) \neq 0$$

Teorema de la Multiplicación e Independencia de Eventos

- Para cualesquiera eventos A y B se tiene que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Se dice que el evento A es independiente del evento B si se cumple que $P(A|B) = P(A)$

- Equivalentemente, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ entonces los eventos A y B son independientes (entre sí)

Ejercicio

	Nivel de estudios que cursa			
Sexo	Secundaria (S)	Carrera Técnica (T)	Bachillerato (B)	**Total**
Hombre (H)	220	1	521	742
Mujer (M)	211	24	612	847
Total	431	25	1133	1589

- Considere la tabla anterior y determine lo siguiente:

a) ¿Son independientes los eventos “es mujer” y “estudia bachillerato”? R = No

b) ¿Son independientes los eventos “es hombre” y “estudia carrera técnica”? R = No

c) ¿Son independientes los eventos “es hombre” y “estudia secundaria”? R = No

Ejemplo

a) ¿Son independientes los eventos “es mujer” y “estudia bachillerato”?

Veamos. Tenemos que

$P(M \cap B) = 612/1589 = 0.385$

Y por otro lado,

$P(M)P(B) = (847/1589)(1133/1589) = 0.533(0.713) = 0.380$

Observamos que $P(M \cap B) \neq P(M)P(B)$, así que los eventos M y B son dependientes

Ejemplo

b) ¿Son independientes los eventos "es hombre" y "estudia carrera técnica"?

Veamos. Tenemos que

$P(H \cap T) = 1/1589 = 0.001$

Y por otro lado,

$P(H)P(T) = (742/1589)(25/1589) = 0.467(0.016) = 0.007$

Observamos que $P(H \cap T) \neq P(H)P(T)$, así que los eventos H y T son dependientes

Ejemplo

c) ¿Son independientes los eventos “es hombre” y “estudia secundaria”?

Veamos. Tenemos que

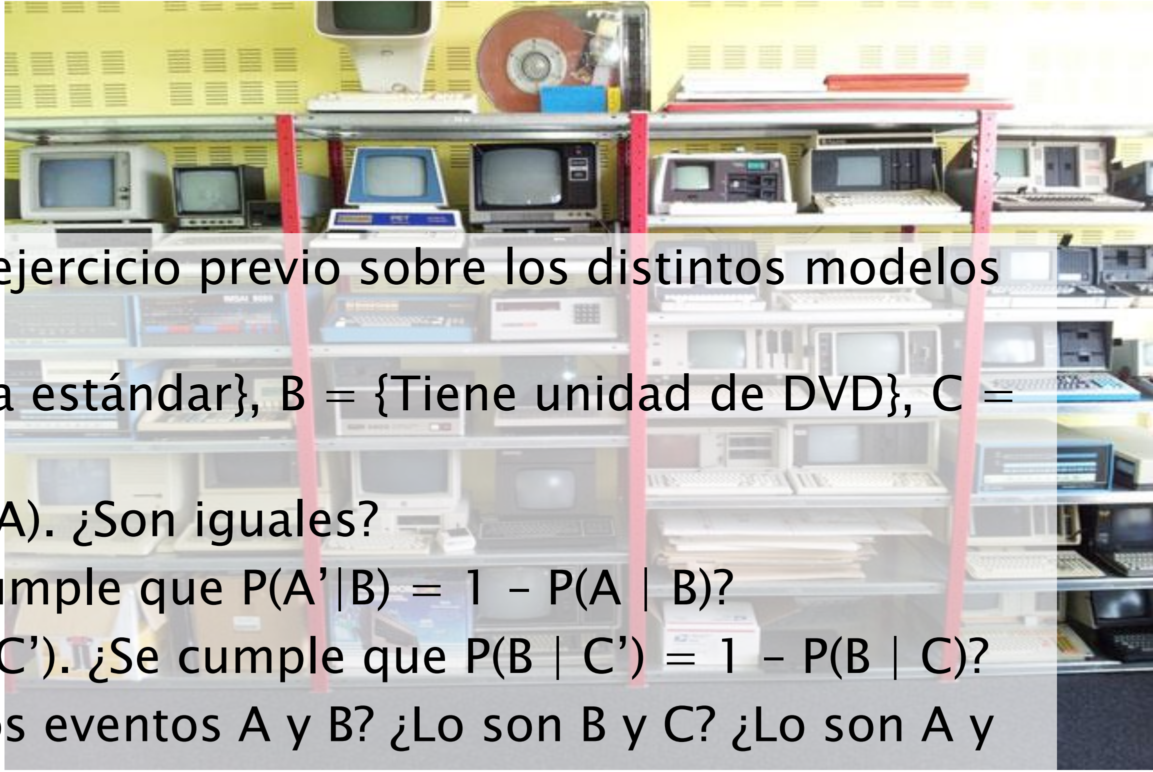
$P(H \cap S) = 220/1589 = 0.138$

Y por otro lado,

$P(H)P(S) = (742/1589)(431/1589) = 0.467(0.271) = 0.127$

Observamos que $P(H \cap S) \neq P(H)P(S)$, así que los eventos H y S son dependientes

Ejemplo



- Considere los datos del ejercicio previo sobre los distintos modelos de computadora
- Sean A = {Tiene memoria estándar}, B = {Tiene unidad de DVD}, C = {DD>160}

a) Calcule P(A | B) y P(B | A). ¿Son iguales?

b) Calcule P(A' | B). ¿Se cumple que P(A'|B) = 1 – P(A | B)?

c) Calcule P(B | C) y P(B | C'). ¿Se cumple que P(B | C') = 1 – P(B | C)?

d) ¿Son independientes los eventos A y B? ¿Lo son B y C? ¿Lo son A y C?

Modelo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Porcentaje de ventas	27	23	10	13	7	4	5	8	3

Ejemplo

Modelo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Porcentaje de ventas	27	23	10	13	7	4	5	8	3
Memoria estándar	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
Memoria expandida							✓	✓	✓
DVD	✓	✓	✓						
Blu-Ray				✓	✓	✓	✓	✓	✓
DD 160GB	✓			✓			✓		
DD 250GB		✓			✓			✓	
DD 320GB			✓			✓			✓

Ejemplo. Solución

- $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$
  $= P(\{1,2,3\})/P(\{1,2,3\})$
  $= (0.27 + 0.23 + 0.10)/(0.27 + 0.23 + 0.10) = 1$
- Es seguro que la computadora tenga memoria estándar dado que tiene unidad de DVD
  - Si tiene DVD, entonces necesariamente tiene memoria estándar

Ejemplo. Solución

- $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$
  $= P(\{1,2,3\})/P(\{1,2,3,4,5,6\})$
  $= 0.60/(0.27 + 0.23 + 0.10 + 0.13 + 0.07 + 0.04)$
  $= 0.7143$
- La probabilidad de que una computadora tenga unidad de DVD dado que tiene memoria estándar es de 0.7143
- Observamos que, en general, $P(A|B) \neq P(B|A)$

Ejemplo. Solución b)

- ¿$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$?
- $P(A'|B) = P(A' \cap B)/P(B) = P(\{7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3\})/P(\{1, 2, 3\}) = P(\varnothing) / P(\{1, 2, 3\}) = 0 / (0.27 + 0.23 + 0.10) = 0/0.60 = 0$
- Note que $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Ejemplo. Solución b)

- Por otro lado, $1 - P(A|B) = 1 - 1 = 0$
- Por tanto, en este caso se cumple que $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
- Se puede demostrar que se cumple en general

Ejemplo. Solución c)

- Resulta que
  - $P(B|C) = 0.60$
  - $P(B|C') = 0.60$
- Entonces $P(B|C') = 0.60 \neq 0.40 = 1 - 0.60 = 1 - P(B|C)$
- Luego, en general, $P(B|C') \neq 1 - P(B|C)$

Ejemplo. Solución d)

- Para verificar si son independientes los eventos A y B, hay que comprobar si se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Por un lado, tenemos que
  - $P(A \cap B) = 0.60$

Ejemplo. Solución d)

- Mientras que, por otro lado
  - $P(A)P(B) = (0.27 + 0.23 + 0.10 + 0.13 + 0.07 + 0.04)(0.27 + 0.23 + 0.10) = 0.84(0.60) = 0.504$
- Por tanto, vemos que
  - $P(A \cap B) = 0.60 \neq 0.504 = P(A)P(B)$
- Esto implica que los eventos A y B son dependientes

Ejemplo. Solución d)

- Los eventos B y C son independientes
- Los eventos A y C son dependientes

Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

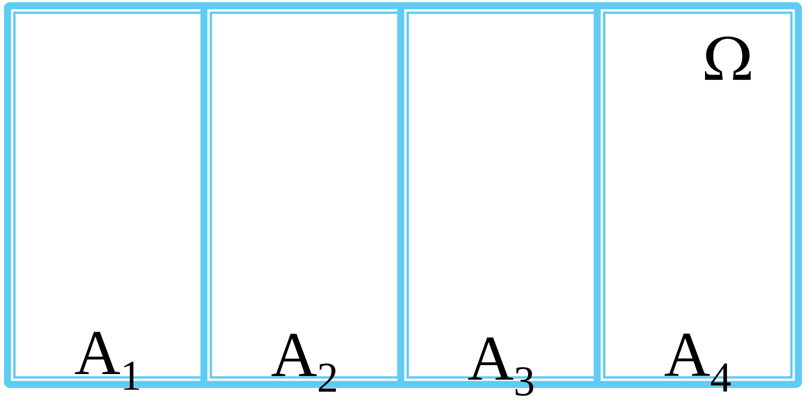
Partición de un espacio muestral

- Sea Ω un espacio muestral
- Consideremos la colección de conjuntos $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k\}$ con las siguientes características:

1. Para cada j = 1,2,…,k; $$A_j \subset \Omega \quad \text{y} \quad A_j \neq \phi$$
2. Para i,j = 1, 2, … , k; $$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$$
3. Se cumple que $$\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$$

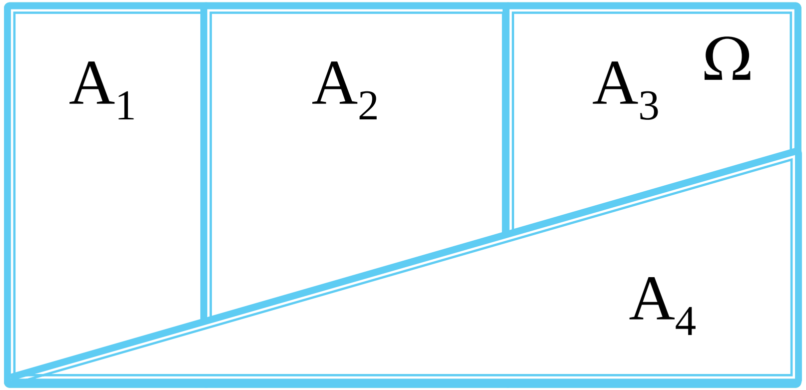
- Se dice entonces que la colección $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k\}$ es una partición para Ω

Partición de un espacio muestral



La colección $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ constituye una partición para el espacio muestral Ω

Partición de un espacio muestral



La colección $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ constituye una partición para el espacio muestral Ω

Teorema de la Probabilidad Total

- Sea Ω un espacio muestral
- Dada una partición de Ω, es decir, una sucesión de eventos mutuamente excluyentes A_1, A_2, ..., A_k tales que

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$$

y si B es cualquier evento en el espacio muestral Ω, entonces se cumple que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)$$

Teorema de Probabilidad Total

- Por la definición de Probabilidad condicional, tenemos que
  - $P(B \mid A_i) = P(B \cap A_i)/P(A_i)$
- Entonces $P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)\, P(A_i)$
- Además, $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i)$
- Así que $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid Ai)\, P(Ai)$

Ejemplo Probabilidad Total

- En una planta manufacturera hay tres máquinas etiquetadoras de latas
- La máquina 1 aplica etiquetas con una fajilla de promoción un 2% de las veces, la máquina 2, un 0.5% y la máquina 3 un 1.5%
- Se toma una lata de la producción de las tres máquinas. Calcule la probabilidad de que tenga la fajilla de promoción si:

a) Cada máquina produce 1/3 del total R = 0.013
b) Si las máquinas 1, 2 y 3 producen 20%, 50% y 30% del total respectivamente R = 0.011

Ejemplo. Solución a)

- Definamos
  - $A_1 = \{$La lata fue etiquetada por la máquina 1$\}$
  - $A_2 = \{$La lata fue etiquetada por la máquina 2$\}$
  - $A_3 = \{$La lata fue etiquetada por la máquina 3$\}$
- Sea $B = \{$La lata tiene la fajilla de promoción$\}$
- Queremos obtener $P(B)$

Ejemplo. Solución a)

- Supongamos que $P(A_1) = 1/3$, $P(A_2) = 1/3$, $P(A_3) = 1/3$
- $P(B|A_1) = P(\{$La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 1$\}) = 2\% = 0.02$
- $P(B|A_2) = P(\{$La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 2$\}) = 0.5\% = 0.005$
- $P(B|A_3) = P(\{$La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 3$\}) = 1.5\% = 0.015$

Ejemplo. Solución a)

- P({Tenga la fajilla de promoción}) = P(B)
- Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

- Luego
  - $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A2) + P(B|A_3)P(A_3)$
    $= 0.02(1/3) + 0.005(1/3) + 0.015(1/3)$
    $= 0.0133$

Ejemplo. Solución b)

- Las definiciones de las A_j y B siguen siendo las mismas:
  - A_1 = {La lata fue etiquetada por la máquina 1}
  - A_2 = {La lata fue etiquetada por la máquina 2}
  - A_3 = {La lata fue etiquetada por la máquina 3}
- Sea B = {La lata tiene la fajilla de promoción}

Ejemplo. Solución b)

- Las probabilidades de etiquetado con la fajilla de promoción, se mantienen, es decir
  - $P(B|A_1)$ = P({La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 1}) = 2% = 0.02
  - $P(B|A_2)$ = P({La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 2}) = 0.5% = 0.005
  - $P(B|A_3)$ = P({La lata tiene a fajilla de promoción | Fue etiquetada por la máquina 3}) = 1.5% = 0.015
- Pero en cambio, ahora $P(A_1) = 0.20$, $P(A_2) = 0.50$, $P(A_3) = 0.30$

Ejemplo. Solución b)

- P({Tenga la fajilla de promoción}) = P(B)
- Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)$$

- Luego
  - $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A2) + P(B|A_3)P(A_3)$
    $= 0.02(0.20) + 0.005(0.50) + 0.015(0.30)$
    $=0.011$

Teorema de Bayes

- Sean Ω un espacio muestral, A_1, A_2, ..., A_k una partición de Ω y $B \subset \Omega$ un evento cualquiera
- La probabilidad *a posteriori* de que haya ocurrido el evento A_j, dado que ocurrió B está dada por

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Teorema de Bayes

- Por la definición de probabilidad condiconal, tenemos que $P(A_j|B) = P(A_j \cap B) \ / \ P(B)$ --- (1)
- Por otro lado, como $P(B|A_j) = P(B \cap A_j) \ / \ P(A_j)$, entonces
  $P(A_j \cap B) = P(B \cap A_j) = P(B|A_j) \ P(A_j)$ --- (2)
- Además, por el Teorema de la Probabilidad Total
  $P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$ --- (3)
- Así que sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos que $P\left(A_j|B\right) = P\left(B\middle|A_j\right)P(A_j)/\sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

Teorema de Bayes

- Note que el Teorema se cumple porque:
- Lo que está en el numerador es $P(A_j \cap B)$, despejando de la definición de Probabilidad Condicional, y
- Lo que se tiene en el denominador es $P(B)$, de acuerdo con el Teorema de la Probabilidad Total
- Así que el Teorema de Bayes es solamente una forma extensa de escribir $P(A_j|B) = P(A_j \cap B)/P(B)$

Ejemplo Teorema de Bayes

- En el ejemplo de las máquinas etiquetadoras, suponga que se toma una lata y se observa que tiene la fajilla de promoción
- Suponga que cada máquina etiqueta 1/3 de todas las latas
- Calcule la probabilidad de que se haya tomado de la:

a) Máquina 1
b) Máquina 2
c) Máquina 3
d) ¿De cuál de las tres máquinas es más probable que venga la lata seleccionada?

Ejemplo. Teorema de Bayes. Solución

- Llamemos B al evento de que la lata tomada tenga la fajilla de promoción
- Nuevamente llamamos
  - A_1 al evento de que la lata haya sido etiquetada por la máquina 1
  - A_2 al evento de que la lata haya sido etiquetada por la máquina 2
  - A_3 al evento de que la lata haya sido etiquetada por la máquina 3

Ejemplo. Teorema de Bayes. Solución

- Lo que buscamos es:
- P(Haya sido etiquetado por la máquina 1 | Tiene etiqueta) = $P(A_1 \mid B)$
- P(Haya sido etiquetado por la máquina 2 | Tiene etiqueta) = $P(A_2 \mid B)$
- P(Haya sido etiquetado por la máquina 3 | Tiene etiqueta) = $P(A_3 \mid B)$

Ejemplo. Solución

- $P(A_1 \mid B) = P(B|A_1)P(A_1) \ / \ [P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)]$
  $= 0.02*(1/3) \ / \ [0.02*(1/3) + 0.005*(1/3) + 0.015*(1/3)]$
  $= 0.5$

Ejemplo. Solución (continúa)

- $P(A_2 \mid B) = P(B|A_2)P(A_2) \,/\, [P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)]$
  $= 0.005*(1/3) \,/\, [0.02*(1/3) + 0.005*(1/3) + 0.015*(1/3)]$
  $= 0.125$

Ejemplo. Solución (continúa)

- $P(A_3 \mid B) = P(B|A_3)P(A_3) / [P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)]$
  $= 0.015*(1/3) / [0.02*(1/3) + 0.005*(1/3) + 0.015*(1/3)]$
  $= 0.375$

Ejemplo. Solución (conclusión)

- ¿De cuál de las tres máquinas es más probable que venga la lata si se observa que tiene la fajilla de promoción?
- Dado que
  - $P(A_1 \mid B) = 0.500$
  - $P(A_2 \mid B) = 0.125$
  - $P(A_3 \mid B) = 0.375$
- Lo más probable es que venga de la máquina 1 (su probabilidad es 0.5)

Ejercicio

- Repita el ejercicio anterior suponiendo ahora que las máquinas 1, 2 y 3 etiquetan 20, 50 y 30% de las latas, respectivamente
- R =
  - $P(A_1 \mid B) = 0.364$
  - $P(A_2 \mid B) = 0.227$
  - $P(A_3 \mid B) = 0.409$
  - Por tanto, lo más probable es que la haya etiquetado la máquina 3

Referencias

- *Bain, Lee J. & Engelhardt, Max* **Introduction to probability and mathematical statistics.** PWS-Kent Publishing Company. EUA, 1991
- *Efimov, A; Karakulin, A.; Póspelov, P.; Teréschenko, A.; Vukólov, E.; Zemskov, V. & Zolotarev, Yu.* **Problemas de las matemáticas superiores III.** Editorial Mir. Moscú, URSS, 1986
- *Hoel, Paul G.* **Introduction to mathematical statistics.** John Wiley & Sons. EUA, 1984
- *Wolfram Research.* **Mathworld.** http://mathworld.wolfram.com. 2006
- *Mood, Alexander M.; Graybill, Franklin A. & Boes, Duane C.* **Introduction to the theory of statistics.** McGraw-Hill. EUA, 1974