Hacer los impares y 14.4-42.
Sección 14.3

53-58 Determine las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

54. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

56. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

57. $z = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

58. $v = e^{xe^y}$

59-62 Compruebe que la conclusión del teorema de Clairaut se cumple, es decir, $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63-70 Encuentre la derivada parcial indicada.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y;\quad f_{xxx},\quad f_{xyx}$

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y);\quad f_{yxy}$

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2};\quad f_{xyz}$

66. $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st);\quad g_{rst}$

67. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen}\theta;\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\, \partial\theta}$

68. $z = u\sqrt{v - w}\,;\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

69. $w = \dfrac{x}{y + 2z};\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x},\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}$

81. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

91. La energía cinética de un cuerpo cuya masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

93. Le dicen que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debe creerlo?

14.4 Ejercicios

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x,\quad (2, -1, -3)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7,\quad (2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy},\quad (1, 1, 1)$

4. $z = xe^{xy},\quad (2, 0, 2)$

5. $z = x\operatorname{sen}(x + y),\quad (-1, 1, 0)$

42. Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tenemos una ecuación para S pero sabemos que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2\rangle$$
$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1\rangle$$

se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

14.5 Ejercicios

1-6 Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy$, $\quad x = \operatorname{sen} t$, $\quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y)$, $\quad x = 5t^4$, $\quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $\quad x = \ln t$, $\quad y = \cos t$

4. $z = \tan^{-1}(y/x)$, $\quad x = e^t$, $\quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}$, $\quad x = t^2$, $\quad y = 1 - t$, $\quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad x = \operatorname{sen} t$, $\quad y = \cos t$, $\quad z = \tan t$

7-12 Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3$, $\quad x = s\cos t$, $\quad y = s\operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $\quad x = s^2 + t^2$, $\quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $\quad \theta = st^2$, $\quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}$, $\quad x = s/t$, $\quad y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta$, $\quad r = st$, $\quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \tan(u/v)$, $\quad u = 2s + 3t$, $\quad v = 3s - 2t$

21-26 Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

21. $z = x^4 + x^2y$, $\quad x = s + 2t - u$, $\quad y = stu^2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ donde $s = 4, t = 2, u = 1$

13. Si $z = f(x, y)$, donde f es derivable,

$$\begin{array}{ll} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4 \\ f_x(2, 7) = 6 & f_y(2, 7) = -8 \end{array}$$

determine dz/dt cuando $t = 3$.

14. Sea $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde F, u y v son derivables,

$$\begin{array}{ll} u(1, 0) = 2 & v(1, 0) = 3 \\ u_s(1, 0) = -2 & v_s(1, 0) = 5 \\ u_t(1, 0) = 6 & v_t(1, 0) = 4 \\ F_u(2, 3) = -1 & F_v(2, 3) = 10 \end{array}$$

Determine $W_s(1, 0)$ y $W_t(1, 0)$.

15. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Mediante la tabla de valores del ejercicio 15 calcule $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

23. $w = xy + yz + zx$, $\quad x = r\cos\theta$, $\quad y = r\operatorname{sen}\theta$, $\quad z = r\theta$;

$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ donde $r = 2, \theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $\quad u = xe^y$, $\quad v = ye^x$, $\quad w = e^{xy}$;

$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ donde $x = 0, y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $\quad p = u + vw$, $\quad q = v + uw$, $\quad r = w + uv$;

$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ donde $u = 2, v = 3, w = 4$

14.6

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $\quad (1, 1)$, $\quad \theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $\quad (0, 4)$, $\quad \theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x\cos y$, $\quad (0, 0)$, $\quad \theta = \pi/4$

7-10

a) Determine el gradiente de f.

b) Evalúe el gradiente en el punto P.

c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $\quad P(-6, 4)$, $\quad \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $\quad P(1, 2)$, $\quad \mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $\quad P(2, -1, 1)$, $\quad \mathbf{u} = \langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\rangle$

11-17 Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x\operatorname{sen} y$, $\quad (0, \pi/3)$, $\quad \mathbf{v} = \langle -6, 8\rangle$

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad (1, 2)$, $\quad \mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $\quad (2, 1)$, $\quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

14. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $\quad (1, 2)$, $\quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $\quad (0, 0, 0)$, $\quad \mathbf{v} = \langle 5, 1, -2\rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $\quad (3, 2, 6)$, $\quad \mathbf{v} = \langle -1, -2, 2\rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $\quad (1, 1, 1)$, $\quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

Respuestas:

14.3

53. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y$, $f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}$, $f_{yy} = 20x^3y^3$
55. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$, $w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu}$,
$w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$
57. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2$, $z_{xy} = 0 = z_{yx}$, $z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$
63. $24xy^2 - 6y$, $24x^2y - 6x$ **65.** $(2x^2y^2z^5 + 6xyz^3 + 2z)e^{xyz^2}$
67. $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta + r\theta \operatorname{sen} \theta)$ **69.** $4/(y + 2z)^3$, 0

93. No.

Sección 14.4

1. $z = -7x - 6y + 5$ **3.** $x + y - 2z = 0$
5. $x + y + z = 0$

42. ***12x-7y+9z=44***

Sección 14.5

1. $(2x + y) \cos t + (2y + x)e^t$
3. $[(x/t) - y \operatorname{sen} t]/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$
7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \operatorname{sen} t$,
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \operatorname{sen} t + 3sx^2y^2 \cos t$
9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$
11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t \cos \theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right)$,
$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s \cos \theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right)$
13. 62 **15.** $7, 2$

21. $1582, 3164, -700$ **23.** $2\pi, -2\pi$
25. $\frac{5}{144}, -\frac{5}{96}, \frac{5}{144}$ **27.** $\dfrac{2x + y \operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

Sección 14.6

1. ≈ -0.08 mb/km **3.** ≈ 0.778 **5.** $2 + \sqrt{3}/2$
7. a) $\nabla f(x, y) = \langle 2 \cos(2x + 3y), 3 \cos(2x + 3y)\rangle$
b) $\langle 2, 3\rangle$ c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$
9. a) $\langle 2xyz - yz^3, x^2z - xz^3, x^2y - 3xyz^2\rangle$
b) $\langle -3, 2, 2\rangle$ c) $\frac{2}{5}$
11. $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ **13.** $-8/\sqrt{10}$ **15.** $4/\sqrt{30}$
17. $\frac{23}{42}$ **19.** $2/5$ **21.** $\sqrt{65}$, $\langle 1, 8\rangle$