Matemáticas Discretas
26 de Octubre de 2020.

Ciclos Hamiltonianos.

Para esto vamos a recordar de manera breve lo que nos explico Ricardo G.

En lo que sigue vamos a trabajar en grafos conexos.

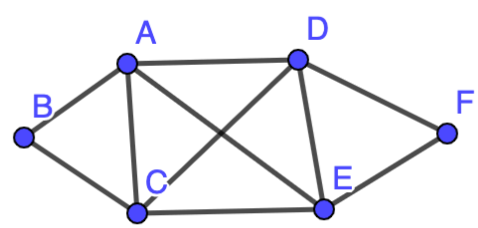
Un grafo (o multigrafo) $\mathcal{G} = (V, E)$ tiene un circuito de Euler, si en el hay un circuito que pasa por todas las aristas del grafo.

OBS. Como se trata de un circuito en un grafo,
este es un recorrido cerrado que pasa por cada
arista del grafo exactamente una vez, pudiendo repetir vértices.

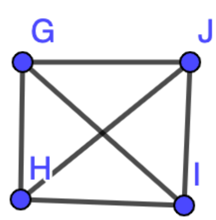
Se dice que un grafo es Euleriano si admite un circuito de Euler.

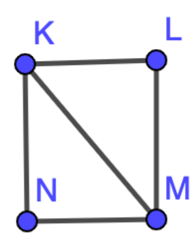
Esto demanera intuitiva lo que quiere decir es que
el grafo se puede realizar de un solo trazo, sin necesidad
de levantar el lapiz y sin repetir ninguna arista empezando y acabando en mismo vertice.

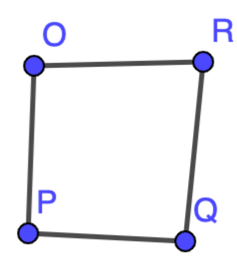
Por ejemplo.



ABCADCEFDEA







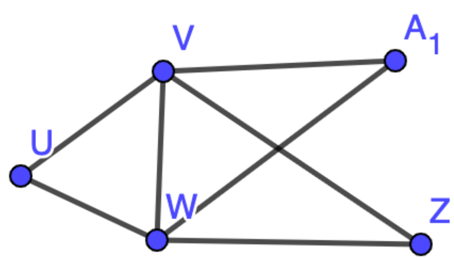
El resultado importante aqui, mediante el cual se resuelve el problema hallar un circuito de Euler, esta dado por el teorema 8.2.18 que demostro Ricardo, y que establece lo siguiente:

Teorema: Si $\mathcal{G} = (V, E)$ es un grafo conexo. Entonces $\mathcal{G}$ es Euleriano si y solo si todos los vertices de $\mathcal{G}$ son de grado par.

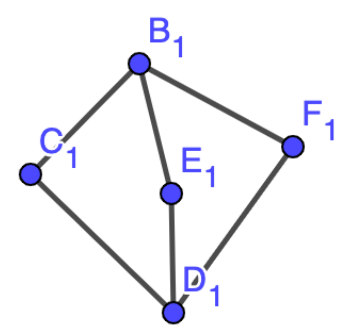
Ahora, sabemos que un circuito es un recorrido cerrado, por lo tanto, como corolario tenemos el siguiente rsultado.

Corolario. Un grafo conexo $\mathcal{G} = (V, E)$ tiene un recorrido de Euler si y solo si, $\mathcal{G}$ tiene exactamente dos vertices de grado impar.

Ejercicio. Estudiar si los siguientes grafos son Eulerianos.



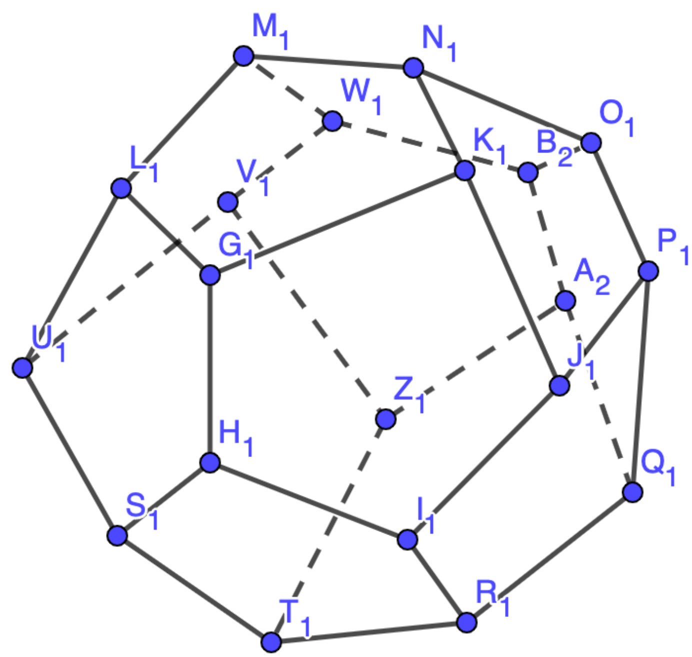
Este si es Euleriano.

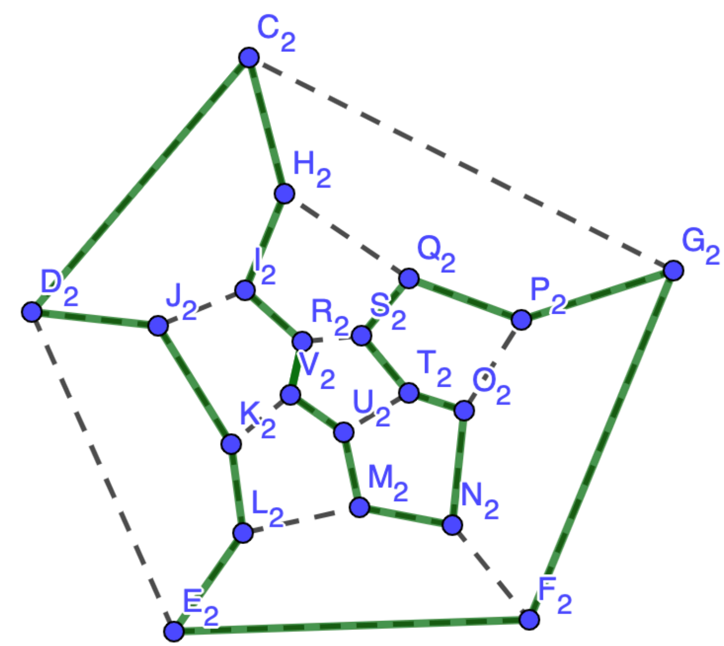


Este ultimo grafo no es Euleriano, pero si admite un recorrido de Euler.

Hablando de Hamilton podemos decir que fue un fisico y matematico Irlandes, quien entre otras cosas, introdujo el termino de “vector” y ademas cosntruyo un sistema de numeros que generaliza el sistema de los numeros complejos, llamado el de los cuaterniones.

Pero tambien invento un juego de mesa, que consiste en encontrar un recorrido cerrado sin repeticion de vertices a traves de las aristas de un dodecaedro regular, donde cada vertice de ese poliedro representaba una de las principlaes ciudades del mundo en el año 1856.





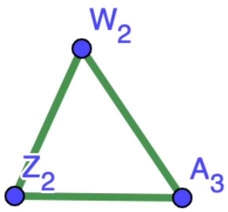
Definicion. En un grafo conexo $\mathcal{G} = (V, E)$ un recorrido es un camino de Hamilton si dicho camino pasa por todos los vertices sin repeticion.

Un ciclo de Hamilton es un ciclo que pasa por todos los vertices del grafo exactamente una vez.

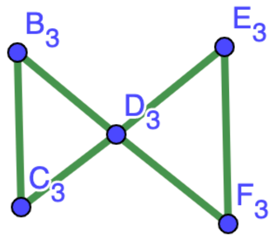
Si un grafo admite un ciclo de Hamilton, entonces se dice que el grafo es Hamiltoniano.

Ahora, apesar de las similitudes que este problema tiene con el problema de los grafos Eulerianos, vamos a ver que en realidad se trata de dos problemas independientes.

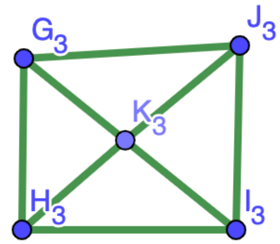
En el siguiente ejemplo trataremos de ilustrar que en efecto los dos problemas son independientes.



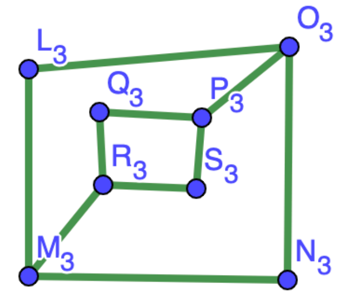
G1



G2



G3



G4

Es claro que $G1$ es Euleriana y tambien es Hamiltoniana.

G2 es Euleriana, pues es conexa y cada vertice tiene grado par.
Pero no es de Hamilton, si lo fuera, entonces tendria que tener un ciclo de Hamilton al cual cada vertice contribuiria con 2 aristas. Luego esa contribución de los vertices de grado 2, implicarian que el vertice D_3 se repitiera. Lo cual no es posible.

G3 no es Euleriana por que tiene varios vertices de grado impar.
Pero si es Hamiltoniana ya que un ciclo de Hamilton nos lo da Andres $GJKIHG$

G4 no es Euleriana pues tiene vertices de grado impar, y tampoco es Hamiltoniana.
Una vez que entras al subgrafo $QPRS$ para salir de el necesariamente se repite un vertice o se deja un vertice sin tocar.

No es Hamiltoniana, si hubiera un ciclo Hamiltoniano entonces contendria todas las aristas de los vertices de grado 2, y puesto que cada vertice puede contener exactamente dos aristas incidentes; se tienen que descartar las aristas que conectan los vertices de grado 3 del grafo, y en consecuencia, el supuesto ciclo de Hamilton seria la reunion de dos ciclos.

$LONML \cup PSRQ$ $\qquad$ $LOPQRML \cup NOPSRMN$

Estos 4 ejemplos nos muestra que los problemas de Hamilton y de Euler son independientes uno del otro.

Y de hecho en el caso del problema de Hamilton, no se tienen condiciones que garanticen la existencia de ciclos de Hamilton.

Un problema similar se denomina el problema del agente viajero. (Luis Fernando)

En el caso de circuitos de Euler un algoritmo conocido es el algoritmo de Hierholzer.
que ese encarga de construir un circuito Euleriano a partir de la concatenación de circuitos disjuntos. (Fabrizio)

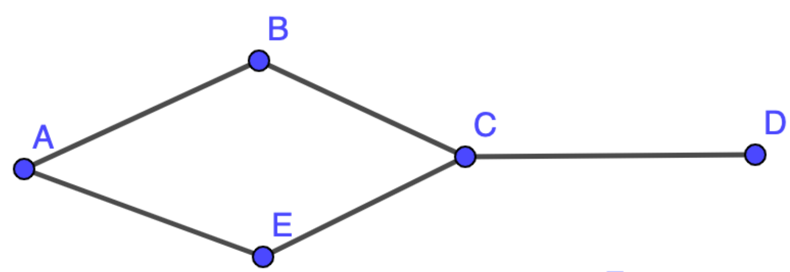
Tarea 8. Matemáticas Discretas.
Fecha 26 de Octubre de 2020.

Fecha de Entrega Miércoles 4 de Noviembre

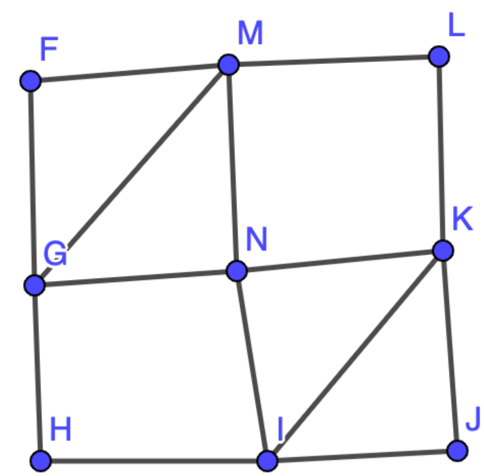
Ejercicio 1. ¿Es cierto que todo grafo Hamiltoniano contiene un camino Hamiltoniano? ¿El recíproco es cierto?

Ejercicio 2. ¿Todo ciclo Hamiltoniano es circuito Euleriano?

Ejercicio 3. Es Hamiltoniano el siguiente grafo.



Ejercicio 4. El siguiente grafo es Euleriano, es tambien Hamiltoniano.



Ejercicio 5. ¿La condición de 2-conectividad es necesaria para la Hamiltoneidad? Proponga un ejemplo que muestre que no es suficiente.