UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	**Escuela de Ingeniería**	Tarea 2. Combinaciones y Permutaciones
	área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIóN
	Carrera:	
	Alumno(a):	

INSTRUCCIONES: Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. Cuida por favor el orden, la limpieza y la ortografía en cada uno de tus argumentos, asimismo pon especial cuidado en la sintaxis matemática de tu procedimiento. Bonus. Solo si has finalizado los primeros 5 ejercicios sin dudas.

Ejercicio 1. En cierto momento del juego de lotería del estado de Illinois, se pidió a una persona que escogiera 6 números (en cualquier orden) entre 44 números. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? El estado estaba considerando cambiar el juego de manera que se pidiera a una persona elegir 6 números entre 48. ¿De cuántas maneras podría hacerlo?

Ejercicio 2. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 8 venusinos en una mesa circular, si dos marcianos no pueden sentarse juntos?

Ejercicio 3. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 republicanos, 3 demócratas y 2 independientes entre un grupo de 10 republicanos, 12 demócratas y 4 independientes?

Ejercicio 4. Demuestre que el producto de cualquier entero positivo y sus $k-1$ sucesores es divisible entre $k!$.

Ejercicio 5. Este ejercicio se refieren a un cargamento de 50 microprocesadores, de los cuales 4 son defectuosos.¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de cuatro microprocesadores que contenga exactamente dos defectuosos?

Bonus. Use el Teorema Binomial para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n.$$

SOLUCIONARIO

Ejercicio 1. En cierto momento del juego de lotería del estado de Illinois, se pidió a una persona que escogiera 6 números (en cualquier orden) entre 44 números. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? El estado estaba considerando cambiar el juego de manera que se pidiera a una persona elegir 6 números entre 48. ¿De cuántas maneras podría hacerlo?

SOLUCIÓN En primer lugar, estamos interesados en seleccionar 6 números de un grupo de 44,

$$n = 44, \quad r = 6$$

el orden en el cual vamos a seleccionar estos números no importa (puesto que un orden diferente implicaría la misma selección de los 6 números), así que necesitamos usar combinaciones.
Una r combinación de un conjunto de n elementos es un subconjunto que contiene r elementos de esos n elementos posibles y el número de r combinaciones de un conjunto de n objetos distintos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Así que

$$C(44, 6) = \frac{44!}{6!(44-6)!} = 7\,059\,052.$$

Similarmente

$$C(48, 6) = \frac{48!}{6!(48-6)! = 12\,271\,512.}$$

Ejercicio 2. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 8 venusinos en una mesa circular, si dos marcianos no pueden sentarse juntos?

SOLUCIÓN En este problema lo primero que debemos notar es que un venusino se distingue de otro por la misma razón que un ser humano se distingue de otro ser humano y lo mismo ocurre con los marcianos.

Ahora puesto que la mesa es circular, para sentar a los 8 venusinos, en primer lugar sentamos a uno cualquiera de ellos en la mesa circular y con ello rompemos el carácter circular de la mesa, quedándonos un inicio y un final marcado por el primer venusino, los 7 venusinos restantes se acomodan de 7! maneras distintas.

La razón es la siguiente, si los ocho venusinos corresponden a $v_1, v_2, ..., v_8$ entonces una ordenación determinada de ellos en la mesa redonda, digamos $v_1 v_2 \cdots v_8 v_1$ donde v_1 marca el inicio y el final, es la misma que cualquiera de las 8 ordenaciones

$$\begin{gathered} v_1 v_2 \cdots v_8 v_1 \\ v_2 v_3 \cdots v_1 v_2 \\ \vdots \\ v_8 v_1 \cdots v_7 v_8 \end{gathered}$$

De modo que a las 8! maneras distintas de ordenar linealmente 8 objetos se divide entre 8, para obtener 7! maneras distintas de ordenarlos de forma circular.

Luego, dado que 2 marcianos no pueden sentarse juntos, colocamos un venusino entre cada 2 marcianos, lo cual nos da un total de 8 lugares posibles, de los cuales debemos seleccionar solo 5, pero hemos dicho que los marcianos también son distinguibles, por lo tanto, la cantidad de maneras de realizar esto es

$$P(n,r) = \frac{8!}{(8-5)!}$$

El experimento completo se realiza tras la ejecución de las dos etapas que hemos descrito arriba una seguida de la otra, por lo tanto, por el principio de la multiplicación obtenemos

$$7!\frac{8!}{(8-5)!} = 33\,868\,800$$

maneras distintas de sentarse.

Ejercicio 3. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 republicanos, 3 demócratas y 2 independientes entre un grupo de 10 republicanos, 12 demócratas y 4 independientes?

SOLUCIÓN El orden para elegir las personas del comité no es importante, pues lo que se busca es solamente formar el comité con el numero de personas de cada orientación política establecido.

Así, el procedimiento completo se efectua al finalizar 3 sucesos consecutivos cada uno de un total de meneras dadas por

$$C(10,4), \quad C(12,3), \quad C(4,2)$$

Por lo tanto, por el principio de multiplicación obtenemos que dicho comité se puede elegir de

$$C(10,4) \times C(12,3) \times C(4,2) = \frac{10!}{4!6!}\frac{12!}{3!9!}\frac{4!}{2!2!} = 277\,200$$

maneras distintas.

Ejercicio 4. Demuestre que el producto de cualquier entero positivo y sus $k-1$ sucesores es divisible entre $k!$.

SOLUCIÓN Sea $a \in \mathbb{Z}_+$ cualquier entero positivo, entonces

$$1(2)(3)\cdots a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = (a+(k-1))!$$

Por lo tanto

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = \frac{(a-(k-1))!}{(a-1)!}$$

es igual al producto de a y sus $k-1$ primeros sucesores.

En seguida, dividimos entre $k!$, para obtener

$$\frac{(a+(k-1))!}{k!(a-1)!} = \frac{(a+(k-1))!}{k!(a+(k-1)-k)!} = C(a+k-1,k) = \binom{a+k-1}{k} \in \mathbb{N}$$

en otras palabras $a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)) = k!C(a+k-1,k)$, es decir

$$k! \mid a(a+1)(a+2)\cdots(a+(k-1)).$$

Nuestra demostración queda completa si probamos que el coeficiente binomial $\binom{a+k-1}{k} \in \mathbb{N}$. Pero esto es un hecho ya que todo coeficiente binomial es un entero positivo, basta por ejemplo utilizar la identidad de Pascal para notar que todo coeficiente binomial se obtiene de la suma de dos enteros positivos.

Ejercicio 5. Este ejercicio se refieren a un cargamento de 50 microprocesadores, de los cuales 4 son defectuosos.¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de cuatro microprocesadores que contenga exactamente dos defectuosos?

SOLUCIÓN El orden en el que seleccionamos lso procesadores no importa, ya que cualquier orden distinto de seleccionar los microprocesadores dará como resultado el mismo conjunto de microprocesadores y por lo tanto, vamos a utilizar combinaciones.

Ahora, dado que 4 de los 50 microprocesadores son defectuosos, se sigue que 46 son los óptimos y por lo tanto, habrá

$$C(46,2)$$

maneras distintas de elegir 2 microprocesadores óptimos, y

$$C(4,2)$$

maneras de elegir dos microprocesadores de los 4 microprocesadores defectuosos. Por lo tanto, usando el principio de la multiplicación hay un total de

$$C(46,2)\times C(4,2) = \frac{46!}{2!(46-2)!}\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6\,210$$

maneras distintas.

UNIVERSIDAD PANAMERICANA Campus Bonaterra	**Escuela de Ingeniería**	Tarea 2. Combinaciones y Permutaciones
	área: Matemáticas	Fecha:
	Materia: Matemáticas Discretas	Ciclo:1208
	Profesor: Dr. Adrián Cerda	CALIFICACIóN
	Carrera:	
	Alumno(a):	

Bonus. Use el Teorema Binomial para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n.$$

SOLUCIÓN Usamos el Teorema del Binomio con $a = 1$ y $b = 2$, entonces

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k).$$