



UNIVERSIDAD  
PANAMERICANA

# Análisis y Optimización de Mecanismos para el Balanceo Dinámico Utilizando Coordenadas Naturales

**María Teresa Orvañanos Guerrero**

Universidad Panamericana  
Facultad de Ingeniería  
México, Ciudad de México  
2020



# **Análisis y Optimización de Mecanismos para el Balanceo Dinámico Utilizando Coordenadas Naturales**

**María Teresa Orvañanos Guerrero**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Doctorado en Ingeniería**

Directores:

Dr. Mario Acevedo Alvarado  
Dr. Ramiro Velazquez Guerrero

Línea de Investigación:  
Balanceo de mecanismos

Universidad Panamericana  
Facultad de Ingeniería  
México, Ciudad de México  
2020



A mis padres, por su paciencia y cariño  
A Mariel, por ser mi alegría más grande



# Agradecimientos

A Dios, quien me ha dado todo.

Al Dr. Ramiro Velazquez y al Dr. Mario Acevedo por haber confiado en mi aceptándome en el doctorado y por impulsarme en todo momento.

Al Dr. Mariano Rivera por haberme aceptado para realizar mi estancia de investigación, por sus siempre pacientes asesorías y apoyo incondicional.

A la Universidad Panamericana por haber confiado siempre en mi, por haberme formado profesionalmente y por brindarme el espacio en el que puedo desarrollarme en la labor docente que tanto disfruto.

A la Dra. Claudia Nayelly Sanchez, por las horas de investigación compartidas, sacando tiempo de donde no lo teníamos, por su apoyo, su asesoría, su paciencia y su presencia constante impulsándome y animándome para perseverar.

Al maestro Óscar Dávalos Orozco, por su ayuda incondicional cada vez que necesité entender algún concepto matemático o de programación, gracias por toda la paciencia.

A mis maestros, que me han formado a lo largo de todas las etapas, ayudándome a adquirir conocimientos pero también brindándome grandes enseñanzas para la vida.

Para mi hija, Jimena Mariel. Eres lo mejor que me ha pasado en la vida y tu presencia me impulsa a tratar de ser mejor. ¡Gracias por estar en mi vida!

Para mis padres Javier y María de los Ángeles, por su comprensión y paciencia en todo momento, por creer en mi y ayudarme con su cariño y su tiempo para poder alcanzar mis metas. Ustedes me han dado todo y me han formado como soy. Les agradezco de corazón todos sus esfuerzos, ¡los quiero mucho!.

A mis amigos de la Sierra Tarahumara, al padre Kiko, al padre Lupe, al Hermano Kike, a Jorge Ayala, a las comunidades maristas y redentoristas con las que compartí la vida en la sierra y a todas las personas de Bawinokachi y de las comunidades rarámuri, rarámuri-mestizas y mestizas de Carichí, que me permitieron y siguen permitiendo compartir la vida, marcándome de una forma especial. Las enseñanzas que me dejaron vivirán conmigo siempre. ¡Muchas gracias!

A mis familiares y amigos, sería difícil nombrarlos a todos, pero agradezco entrañablemente

su cercanía en mi vida, su apoyo y su confianza, no puedo decir más que de corazón: ¡Gracias!

A mis alumnos, esas mentes inquietas que con sus preguntas y su alegría me motivan a seguir preparándome.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Justificación y objetivos . . . . .	5
1.2. Principales Aportaciones . . . . .	7
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	8
<b>2. Fundamentos</b>	<b>10</b>
2.1. Tipos de coordenadas para el análisis de mecanismos . . . . .	10
2.1.1. Coordenadas completamente cartesianas (naturales) . . . . .	11
2.2. Optimización . . . . .	17
2.2.1. Tipos de soluciones . . . . .	18
2.2.2. Identificación de mínimos locales . . . . .	19
2.2.3. Algoritmos de optimización . . . . .	20
2.2.4. Análisis de resultados de una optimización multiobjetivo . . . . .	24
2.3. Conclusión . . . . .	26
<b>3. Estado del arte</b>	<b>28</b>
<b>4. Balanceo del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado mediante redistribución de masa por optimización</b>	<b>34</b>
4.1. Introducción . . . . .	34
4.2. Análisis Mecánico . . . . .	35
4.2.1. Matriz de masas de un mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado utilizando FCC . . . . .	37
4.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento . . . . .	40
4.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento . . . . .	43
4.3. Función objetivo y límites de optimización . . . . .	48
4.4. Algoritmo de optimización . . . . .	50
4.5. Ejemplo numérico . . . . .	50
4.5.1. Características mecánicas y límites de optimización . . . . .	50
4.5.2. Optimización . . . . .	52
4.5.3. Análisis de los resultados numéricos . . . . .	53
4.6. Conclusiones . . . . .	55

<b>5. Optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras utilizando decenso de gradiente simplificado</b>	<b>58</b>
5.1. Introducción . . . . .	58
5.2. Análisis mecánico . . . . .	60
5.2.1. Matriz de masas un mecanismo de cuatro barras utilizando FCC . . . . .	60
5.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento . . . . .	64
5.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento . . . . .	66
5.3. Función objetivo y límites de optimización . . . . .	68
5.4. Algoritmo de optimización . . . . .	69
5.5. Ejemplo numérico . . . . .	71
5.5.1. Características mecánicas y límites de optimización . . . . .	71
5.5.2. Optimización usando tres contrapesos . . . . .	72
5.5.3. Análisis de los resultados numéricos usando tres contrapesos . . . . .	72
5.5.4. Método de análisis de restricciones para la optimización del balanceo basado en diagramas de caja . . . . .	76
5.5.5. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos . . . . .	77
5.5.6. Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos . . . . .	80
5.5.7. Análisis de los resultados numéricos usando dos contrapesos . . . . .	81
5.5.8. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos . . . . .	82
5.5.9. Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso . . . . .	84
5.5.10. Análisis de resultados numéricos usando un contrapeso . . . . .	86
5.5.11. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando un contrapeso . . . . .	88
5.5.12. Expansión los límites de optimización para el espesor del tercer contrapeso. . . . .	88
5.6. Conclusiones . . . . .	89
<b>6. Análisis y optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras</b>	<b>92</b>
6.1. Introducción . . . . .	92
6.2. Matriz de masas en coordenadas naturales de un elemento definido por tres puntos básicos . . . . .	93
6.3. Mecanismo de seis barras . . . . .	99
6.3.1. Adición de contrapesos . . . . .	99
6.3.2. Matrices de masas de elementos individuales . . . . .	101
6.3.3. Matriz de masas del mecanismo completo . . . . .	105
6.3.4. Momento lineal y fuerza de sacudimiento . . . . .	106
6.3.5. Momento angular y momento de sacudimiento . . . . .	108
6.4. Función objetivo y límites de optimización . . . . .	108

6.5. Algoritmo de optimización . . . . .	109
6.6. Ejemplo numérico . . . . .	111
6.6.1. Características mecánicas y límites de optimización . . . . .	111
6.6.2. Cinco contrapesos . . . . .	114
6.6.3. Cuatro contrapesos . . . . .	118
6.6.4. Tres contrapesos . . . . .	121
6.6.5. Dos contrapesos . . . . .	125
6.6.6. Un contrapeso . . . . .	127
6.6.7. Comparación de los PF al reducir el número de contrapesos . . . . .	130
6.7. Conclusiones . . . . .	131
<b>7. Conclusiones</b>	<b>135</b>
7.0.1. Trabajo futuro . . . . .	137
7.0.2. Artículos de revista . . . . .	138
7.0.3. Capítulos de libro . . . . .	138
7.0.4. Congresos . . . . .	138
<b>A. Anexo: Ecuaciones correspondientes al ShF y ShM de un mecanismo de seis barras obtenidas mediante Python</b>	<b>140</b>
<b>B. Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates</b>	<b>151</b>
<b>C. Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates</b>	<b>160</b>
<b>D. Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms</b>	<b>187</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>194</b>

# **Lista de Figuras**

<b>1-1.</b> ABB IRB760 en el que se observa con claridad el contrapeso utilizado para llevar a cabo el balanceo estático del mecanismo [1]. . . . .	6
<b>1-2.</b> Cámara aérea que consiste en un sistema de cámara posicionado mediante un manipulador paralelo dirigido por cables [119]. . . . .	7
<b>2-1.</b> Puntos básicos de un elemento en el plano utilizando FCC . . . . .	13
<b>2-2.</b> Ejemplos de mínimos . . . . .	17
<b>2-3.</b> Ejemplo de una función compleja para minimizar . . . . .	18
<b>2-4.</b> Fases del Algoritmo de Evolución Diferencial. . . . .	20
<b>2-5.</b> Espacio de decisión y espacio objetivo [40]. . . . .	25
<b>2-6.</b> Ejemplo con tres soluciones . . . . .	25
<b>2-7.</b> Soluciones óptimas del Frente de Pareto . . . . .	26
<b>4-1.</b> Mecanismo manivela-biela en locomotora. [39] . . . . .	35
<b>4-2.</b> Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	36
<b>4-3.</b> Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado con contrapesos para balanceo. . . . .	37
<b>4-4.</b> Cinemática directa del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	51
<b>4-5.</b> Objetivos optimizados $\beta_{ShM}$ y $\beta_{ShF}$ para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	53
<b>4-6.</b> Análisis del PF de objetivos optimizados de $\beta_{ShM}$ y $\beta_{ShF}$ para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	54
<b>4-7.</b> Implementación de la segunda solución seleccionada en el PF para el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	56
<b>4-8.</b> Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado. . . . .	57
<b>5-1.</b> Mecanismo de cuatro barras . . . . .	60
<b>5-2.</b> Mecanismo de cuatro barras con contrapesos . . . . .	61
<b>5-3.</b> Análisis del PF de objetivos optimizados de $\beta_{ShM}$ y $\beta_{ShF}$ para el mecanismo de cuatro barras. . . . .	73
<b>5-4.</b> Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras. . . . .	74
<b>5-5.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando tres contrapesos. . . . .	76

<b>5-6.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	78
<b>5-7.</b> Análisis de dimensiones cuando se utilizan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	79
<b>5-8.</b> Comparación del PF al utilizar diferente número de contrapesos en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	80
<b>5-9.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando dos contrapesos. . . . .	82
<b>5-10.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	84
<b>5-11.</b> Análisis de dimensiones cuando se utilizan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	85
<b>5-12.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando un contrapeso. . . . .	87
<b>5-13.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras. . . . .	87
<b>5-14.</b> Relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 cuando se utiliza solamente un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras . . . . .	88
<b>5-15.</b> Comparación de los PF al cambiar los límites del espesor del contrapeso 3 del mecanismo de cuatro barras. . . . .	90
<b>6-1.</b> Elemento 2D con tres puntos básicos. . . . .	94
<b>6-2.</b> Mecanismo de seis barras . . . . .	98
<b>6-3.</b> Contrapesos para el balanceo del mecanismo de seis barras . . . . .	100
<b>6-4.</b> Ubicación de las dimensiones para elementos definidos por tres puntos básicos	102
<b>6-5.</b> Mecanismo de seis barras empleado para el ejemplo numérico. . . . .	111
<b>6-6.</b> Análisis del PF de objetivos optimizados de $\beta_{ShM}$ y $\beta_{ShF}$ para el mecanismo de seis barras. . . . .	113
<b>6-7.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cinco contrapesos. . . . .	116
<b>6-8.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	116
<b>6-9.</b> Análisis de dimensiones cuando se utilizan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	118
<b>6-10.</b> Comparación de los PF al utilizar cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	119

<b>6-11.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cuatro contrapesos. . . . .	121
<b>6-12.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	122
<b>6-13.</b> Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan cuatro de ellos en el mecanismo de seis barras. . . . .	123
<b>6-14.</b> Comparación de los PF al utilizar tres contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	124
<b>6-15.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando tres contrapesos. . . . .	125
<b>6-16.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	125
<b>6-17.</b> Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan tres de ellos en el mecanismo de seis barras. . . . .	126
<b>6-18.</b> Comparación de los PF al utilizar dos contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	126
<b>6-19.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando dos contrapesos. . . . .	128
<b>6-20.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	128
<b>6-21.</b> Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan dos de ellos en el mecanismo de seis barras. . . . .	129
<b>6-22.</b> Comparación de los PF al utilizar un contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	129
<b>6-23.</b> Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando un contrapeso. . . . .	130
<b>6-24.</b> Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	131
<b>6-25.</b> Relación entre área y espesor, cuando se implementan sólo el contrapeso 3 en el mecanismo de seis barras. . . . .	131
<b>6-26.</b> Comparación de los PF utilizando diferente cantidad de contrapesos en el mecanismo de seis barras. . . . .	133

# **Lista de Tablas**

<b>3-1.</b> Algunos métodos para el balanceo mecánico de mecanismos. . . . .	32
<b>3-2.</b> Propuestas para el análisis matemático del balanceo de mecanismos . . . . .	33
<b>4-1.</b> Parámetros de cada eslabón de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado . . . . .	52
<b>4-2.</b> Comparación de resultados de optimización del mecanismo manivela-biela-corredera . . . . .	57
<b>5-1.</b> Parámetros de cada eslabonamiento de un mecanismo de cuatro barras. . . . .	71
<b>5-2.</b> Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras. . . . .	83
<b>5-3.</b> Comparación entre los resultados de optimización al expandir el límite del espesor del contrapeso tres del mecanismo de cuatro barras. . . . .	90
<b>6-1.</b> Distribución de puntos para el mecanismo de seis barras . . . . .	99
<b>6-2.</b> Parámetros de cada eslabón de un mecanismo de seis barras . . . . .	112
<b>6-3.</b> Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras. . . . .	132

# Glosario

**CAD** Computer Aided Design - Diseño asistido por computadora. 72

**CoM** Center of Mass - Centro de Masa. 10, 37

**DE** Differential Evolution - Evolución Diferencial. 8, 9, 20, 22, 27, 34, 35, 52, 55, 92, 109, 110, 114, 133, 135

**FCC** Fully Cartesian Coordinates - Coordenadas completamente cartesianas. 7, 8, 10–12, 26, 43, 55, 58–60, 66, 89, 93, 108, 131, 135, 137

**GA** Genetic Algorithms - Algoritmos Genéticos. 34

**KKT** Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker - son los requerimientos necesarios y suficientes para que la solución de un problema de programación matemática sea óptima.. 77

**PF** Pareto Front - Frente de Pareto. 9, 24–27, 53, 54, 59, 72, 73, 75, 80, 81, 84, 86, 89, 91, 114, 115, 119–122, 125–128, 130, 133, 136, 137

**PGD** Projected Gradient Descent - Descenso de gradiente proyectado. 9, 27, 59, 69, 70, 72, 89, 135

**RMS** Root Mean Square - Raíz cuadrática media. 29, 31, 48, 68, 108

**RSSP** Es un eslabonamiento con un par cinemático revolutivo (R), dos esféricos (S) y uno prismático (P). 31

**RSSR** Es un eslabonamiento con dos pares cinemáticos revolutivos (R) y dos esféricos (S). 31

**ShF** Shaking Force - Fuerza de sacudimiento. 4, 5, 8, 9, 13, 16, 28–31, 34, 35, 37, 42, 47–49, 52–55, 59, 60, 65, 68, 73, 75, 81, 82, 86, 89, 91, 92, 99, 108, 114, 115, 119, 120, 122, 123, 127–131, 133, 135, 136

**ShM** Shaking Moment - Momento de sacudimiento. 4, 8, 9, 13, 16, 28–32, 34, 35, 37, 45–49, 52–55, 59, 60, 66–68, 73, 75, 81, 82, 86, 89, 91, 92, 99, 108, 109, 114, 115, 119, 120, 122, 123, 127–131, 133, 135, 136

**TLBO** Teaching-Learning-Based Optimization Algorithms - Algoritmos Basados en Enseñanza-Aprendizaje. 34

# Resumen

Esta tesis explora la optimización del balanceo dinámico en diferentes tipos de mecanismos en el plano para lograr la reducción máxima de las reacciones correspondientes a la Fuerza de Sacudimiento y al Momento de Sacudimiento a través de la redistribución de masas.

Las expresiones que definen las reacciones dinámicas en la base del mecanismo se obtienen de manera analítica, gracias al modelado realizado en coordenadas completamente cartesianas. Esto permite ensamblar una matriz de masas constante para todo el mecanismo, en donde además pueden identificarse fácilmente las condiciones de balanceo dinámico.

La optimización se lleva a cabo mediante contrapesos calculados utilizando los algoritmos de Descenso de Gradiente y Evolución Diferencial, y se analizan utilizando Frentes de Pareto. En la mayoría de los casos se realizan análisis de sensibilidad, empleando también Frentes de Pareto, que permiten conocer la importancia que cada contrapeso tiene para el balanceo general. Además se presenta una propuesta para el análisis de las restricciones de la optimización, empleando diagramas de caja.

Usando las técnicas propuestas es posible lograr mejoras de hasta el 99.70 % en la Fuerza de Sacudimiento y de hasta un 97.56 % en el Momento de Sacudimiento, o incluso mayores al 50 % en ambos casos cuando se utiliza únicamente un contrapeso.

**Palabras clave:** Mecanismos, Balanceo, Fuerza de Sacudimiento, Momento de Sacudimiento, Coordenadas Completamente Cartesianas, Coordenadas Naturales, Matriz de Masas, Optimización, Descenso de Gradiente Proyectado, Evolución Diferencial, Análisis de Sensibilidad, Frentes de Pareto.

# Abstract

This thesis explores the dynamic balancing optimization of different types of mechanisms on the plane to achieve the maximum reduction of the Shaking Force and the Shaking Moment reactions through the redistribution of masses.

The expressions that define the dynamic reactions at the base of the mechanism are obtained with an analytic method, using fully cartesian coordinates. This allows to assemble a constant mass matrix for all the mechanism where the conditions of the dynamic balance can be easily identified.

Optimization is carried out using counterweights calculated applying the Gradient Descent and Differential Evolution algorithms; results are then analyzed using Pareto Fronts. In most cases, sensitivity analyzes were carried out to highlight the importance that each counterweight has in the overall balance. In addition, a proposal for the analysis of the optimization constraints is presented, using box diagrams.

Using the proposed techniques it is possible to achieve improvements of up to 99.70 % in the Shaking Force and up to 97.56 % in the Shaking Moment, or even greater than 50 % in both cases when only one counterweight is used.

**Keywords:** Mechanisms, Balancing, Shaking Force, Shaking Moment, Fully Cartesian Coordinates, Natural Coordinates, Mass Matrix, Optimization, Projected Gradient Descent, Differential Evolution, Sensitivity Analysis, Pareto Front.

# 1. Introducción

El movimiento a altas velocidades de los eslabones de un mecanismo provoca reacciones que se transmiten a su base, causando con ello efectos indeseados como son el ruido, la fatiga y el desgaste. Además de los problemas técnicos que estas reacciones provocan, vale la pena considerar los efectos sociales puesto que, en las máquinas industriales, las vibraciones provocan a su vez contaminación de ambientes y pérdidas de energía que pueden derivar en problemas de salud para los trabajadores[9]. Resulta entonces de suma importancia el poder minimizar las reacciones derivadas del movimiento de los mecanismos para así prevenir los problemas técnicos [102] y sociales en los cuales tienen repercusión.

Entre las posibles reacciones que se transmiten a la base del mecanismo, se consideran principalmente las fuerzas que se aplican externamente y las fuerzas de inercia que se deben en su mayoría al movimiento con aceleraciones grandes [9]. Los métodos para resolver las reacciones dinámicas en un mecanismo pueden encontrarse en [148, 153] por ejemplo. Las fuerzas de inercia pueden ser representadas como una fuerza en torno al centro de masa [8]. En el ámbito de los mecanismos en movimiento, la fuerza que se produce sobre la base del mecanismo se conoce como Fuerza de Sacudimiento (ShF, por sus siglas en inglés provenientes de Shaking Force), mientras que el momento que se produce en la base es llamado Momento de Sacudimiento (ShM, por sus siglas en inglés provenientes de Shaking Moment).

En relación a las fuerzas externas, por ejemplo los pares motores de entrada producidos por motores, en la mayoría de los casos se transforman en fuerzas internas. Por lo tanto, si todas las fuerzas externas aplicadas a un eslabonamiento se convierten en fuerzas internas del mecanismo en conjunto, entonces el balanceo de un mecanismo puede lograrse mediante la cancelación de la fuerza de sacudimiento y del momento de sacudimiento [8]. Por estas razones, el balanceo de un mecanismo consiste precisamente en reducir, o en el mejor de los casos en eliminar, las reacciones que se tienen en la base del mismo, es decir la ShF y el ShM.

El balanceo ha sido un problema ampliamente estudiado en ingeniería mecánica. Antes de este siglo, el balanceo de mecanismos era llevado a cabo en forma intuitiva y en muy pocos casos se utilizaban cálculos aritméticos simples[10]. En aquel tiempo los mecanismos se movían en su mayoría mediante la fuerza física del ser humano, es decir que las velocidades que se alcanzaban eran relativamente pequeñas y por lo tanto el balanceo necesario podría

ser considerado como básico y se concentraba principalmente en eliminar las fuerzas en la base del mecanismo provocadas en su mayoría por el peso. Sin embargo esta situación comenzó a cambiar a principios de este siglo cuando el movimiento de los elementos de máquinas comenzó a realizarse a mayores velocidades principalmente gracias al uso de motores de combustión interna. Surgió entonces la necesidad de establecer principios teóricos para llevar a cabo el balanceo de mecanismos, el balanceo gravitacional dejó de ser la prioridad y el interés se centró en la reducción de la ShF.

En la actualidad, la mayoría de la literatura habla de dos tipos de balanceo de mecanismos. Se considera que un mecanismo se encuentra balanceado por fuerzas cuando la fuerza total aplicada por el mecanismo a la base fija es constante, sin importar cualquier movimiento del sistema, es decir que el centro de masas del mecanismo permanece estacionario. Este tipo de balanceo es conocido también con el nombre de balanceo estático [71], sin embargo vale la pena destacar que a pesar del uso del término ‘estático’, cualquier des-balance es en realidad el resultado de un movimiento acelerado de los eslabones del mecanismo, pero el balanceo se denomina así pues es sencillo detectarlo en condiciones estáticas[9].

Por otra parte se encuentra el balanceo dinámico, que es aquel en el que la base del mecanismo no experimenta variación en fuerzas ni momentos. Es decir que el balanceo dinámico de un mecanismo abarca también el balanceo estático. Un mecanismo se encuentra balanceado dinámicamente cuando el centro de masas global permanece estacionario (es decir cuando el momento lineal es cero) y al mismo tiempo el momento angular permanece constante (cero) con respecto a un punto fijo.

## 1.1. Justificación y objetivos

En la actualidad, los mecanismos paralelos son ampliamente utilizados en aplicaciones que van desde manipuladores industriales, hasta aplicaciones de cirugía laparoscópica [101]. La mayoría de los telescopios terrestres usan mecanismos paralelos, ya sea como sistema secundario para la alineación del espejo, o como sistema primario del dispositivo apuntador.

Un ejemplo en donde es posible apreciar la importancia del balanceo dinámico se encuentra en aquellos mecanismos con eslabonamientos pesados, por ejemplo en un simulador de vuelos en donde usualmente la masa total de la plataforma móvil es bastante grande, ello conlleva que los actuadores necesarios para moverla requieran de gran potencia. En este tipo de sistemas, el balanceo estático elimina la necesidad de utilizar actuadores tan potentes. Lo mismo ocurre con simuladores de conducción [109] .



**Figura 1-1.:** ABB IRB760 en el que se observa con claridad el contrapeso utilizado para llevar a cabo el balanceo estático del mecanismo [1].

Otro ejemplo se encuentra en los manipuladores seriales como es el caso del ABB IRB 760, que incorpora un contrapeso para contrarrestar los efectos de las fuerzas de inercia (figura 1-1).

Por su parte, la importancia del balanceo dinámico de un mecanismo se hace notar, por ejemplo, en una base móvil ubicada en un vehículo espacial o satélite, evitando con ello que el movimiento del mecanismo genere desviaciones en la trayectoria, las cuales tendrían que ser corregidas constantemente generando con ellos un aumento en gasto de combustible.

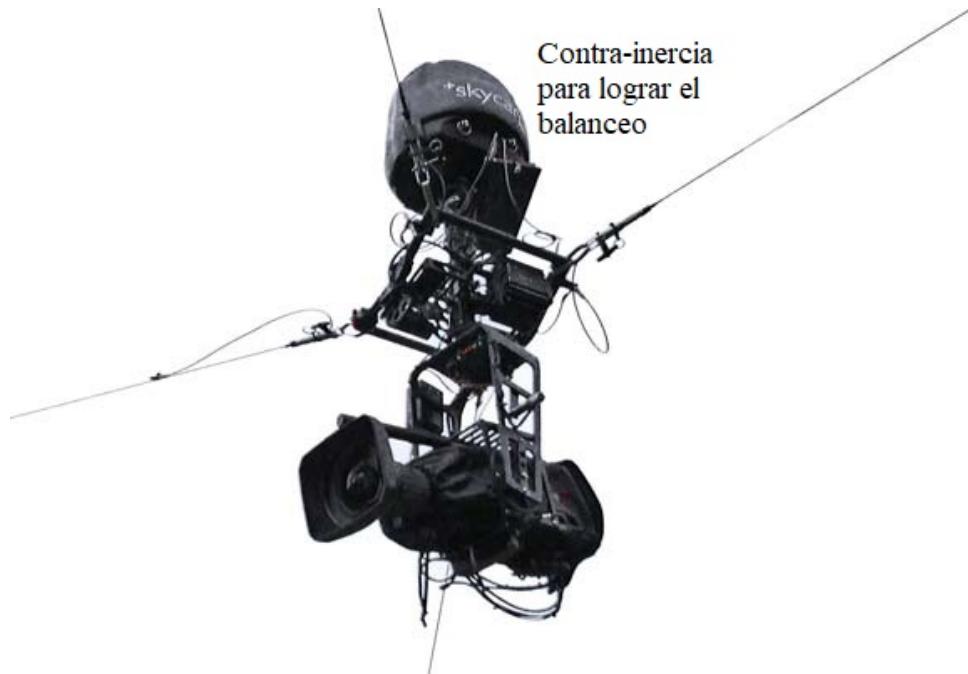
También se puede hacer mención de las cámaras áreas para la grabación de películas que son posicionadas mediante un mecanismo paralelo dirigido mediante cables. Este tipo de cámaras requieren estar balanceadas para dar estabilidad a la imagen.

Las cadenas cinemáticas de lazo cerrado [109] siguen siendo muy utilizadas para la creación de nuevos dispositivos, mismos que cada vez trabajan a mayores velocidades al tiempo que requieren ser cada vez más precisos. La teoría del balanceo sigue siendo entonces vigente y requiere seguir avanzando, pues en tanto se propongan nuevos métodos que faciliten el balanceo de los mecanismos, será posible su mejora en forma general.

En la actualidad, uno de los retos más importantes del balanceo de mecanismos es la obtención de soluciones que puedan ser aplicadas en forma eficiente en la práctica. En forma general, muchas de las soluciones de balanceo conducen a mecanismos que incrementan enormemente la masa total del mecanismo así como su complejidad reduciendo de esta forma el desempeño [161, 162].

Dado lo anterior, los principales objetivos de este trabajo son:

- Presentar una metodología simple, que a través del uso de coordenadas completamente



**Figura 1-2.:** Cámara aérea que consiste en un sistema de cámara posicionado mediante un manipulador paralelo dirigido por cables [119].

cartesianas (FCC, por sus siglas en inglés), permita la obtención de las condiciones de balanceo de un mecanismo.

- Resolver el balanceo dinámico de distintos mecanismos empleando contrapesos, calculando sus dimensiones y su posición mediante la optimización, logrando soluciones con mejores características.
- Proponer metodologías que faciliten el modelado y el cálculo de las reacciones dinámicas usadas en la optimización, logrando el balanceo de mecanismos completos de forma mas eficiente.

## 1.2. Principales Aportaciones

Las principales aportaciones que se realizan a lo largo de este trabajo son:

- Se presenta en forma detallada el uso de FCC, también conocidas como coordenadas naturales, para el modelado de diversos tipos de mecanismos, demostrando la simplicidad para la obtención de las ecuaciones que definen las condiciones de balanceo de cada mecanismo en forma particular.
- Se presenta el desarrollo para la obtención de la matriz de masas utilizando FCC en elementos formados por tres puntos básicos. El planteamiento de esta matriz es

original y, hasta donde se ha podido indagar, no ha sido previamente expuesto en forma detallada en ningún otro trabajo de la literatura. Se utiliza esta matriz para la obtención de las condiciones de balanceo de un mecanismo que emplee este tipo de elementos.

- Se utilizan algoritmos de Descenso de Gradiente y Evolución Diferencial para la optimización, que permiten obtener disminuciones considerables tanto en la ShF como en la ShM, teniendo control sobre los parámetros de optimización y garantizando de esta forma que la masa final del mecanismo se mantenga dentro de los límites razonables pudiendo ser llevados a la práctica.
- Se realiza una propuesta para el análisis de los límites mecánicos sugeridos para la optimización, de forma que resulte posible conocer si es recomendable modificarlos (en caso de ser mecánicamente posible) para obtener mejores resultados.
- Se propone una metodología que permite conocer la importancia que cada uno de los contrapesos propuestos tiene en relación al balanceo de un mecanismo, de tal forma que, con base en este análisis de sensibilidad, sea posible reducir el número de contrapesos cuando la aplicación lo requiera.

### 1.3. Estructura de la tesis

Este trabajo está organizada de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se encuentra un breve resumen de los principales fundamentos teóricos en los que se sustenta este trabajo, centrándose principalmente en las características de las FCC presentando además, en forma detallada, el método para la obtención de la matriz de masas de un elemento en dos dimensiones definido mediante dos puntos básicos. Por otra parte se abordan también algunos conceptos básicos de optimización, centrándose en los algoritmos que se emplean en este trabajo.

En el Capítulo 3 se presenta una breve revisión de la historia del balanceo de mecanismos, desde las primeras publicaciones relacionadas con el tema en 1902 hasta la actualidad.

En el Capítulo 4 se lleva a cabo la optimización del balanceo de un mecanismo manivela-bielacorredora simplificado, explicando con detalle el método para la obtención de las ecuaciones que definen tanto a la ShF como al ShM del eslabonamiento, e implementando posteriormente una optimización de los mismos utilizando el algoritmo de Evolución Diferencial (DE por sus siglas en inglés) para lograr el mejor balanceo posible a través de la adición de contrapesos.

En el Capítulo 5 puede encontrarse la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo

de cuatro barras a través de un versión simplificada del algoritmo de descenso de gradiente proyectado (PGD por sus siglas en inglés). Se propone también el análisis de las derivadas parciales de la función objetivo evaluadas en las soluciones óptimas con la finalidad de lograr definir los límites idóneos para la optimización, además se presenta una propuesta de análisis de sensibilidad para la reducción de la cantidad de contrapesos a utilizar basado en Frentes de Pareto (PF por sus siglas en inglés).

En el Capítulo 6 se lleva a cabo el análisis y la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras, debido a la complejidad de este mecanismo, se introduce por primera vez en forma detallada la obtención de una matriz de masas general de un elemento definido por tres puntos básicos. Posteriormente se desarrolla la obtención de las ecuaciones que definen tanto a la ShF como el ShM y se lleva a cabo su optimización a través del algoritmo de DE, así como el análisis numérico del mismo de acuerdo a la propuesta planteada con anterioridad en el capítulo 4. Se utiliza también el método propuesto para el ajuste de los límites de la optimización, así como el análisis de los PF para lograr la reducción de contrapesos.

Finalmente, en el capítulo 7 se concluye con un breve resumen de los resultados obtenidos, así como con las líneas de trabajo futuro.

## 2. Fundamentos

Este capítulo tiene como objetivo presentar los conceptos fundamentales en los que se basa este trabajo. En la sección 2.1 se presenta un breve resumen sobre los tipos de coordenadas que se emplean para el análisis de mecanismos, haciendo especial hincapié en las Coordenadas Completamente Cartesianas (FCC por sus siglas en inglés), ya que en ellas se basarán los métodos presentados en los siguientes capítulos y resulta importante entenderlas a detalle.

En la sección 2.2 es posible encontrar algunos conceptos de optimización que se utilizan en este trabajo, así como la descripción general de los algoritmos que se emplean para la optimización del balanceo de mecanismos. Además, debido a que se abordará la optimización de problemas multiobjetivo, se presenta un resumen del concepto de Frentes de Pareto, una herramienta de mucha utilidad para encontrar las soluciones no dominadas y poder elegir de entre ellas las que resultan más adecuadas para los fines concretos que se busquen en cada caso.

### 2.1. Tipos de coordenadas para el análisis de mecanismos

Con la finalidad de llevar a cabo el análisis de un mecanismo es necesario elegir una serie de parámetros que describan a la perfección su posición, velocidad, aceleración, ubicación del centro de masa (CoM por sus siglas en inglés provenientes de Center of Mass), etc.

En los sistemas multicuerpo, las coordenadas independientes únicamente determinan la ubicación (y por ende también la velocidad y la aceleración) de los eslabones de entrada. Los parámetros relacionados con el resto de los eslabones pueden ser determinados al resolver el problema de posiciones, velocidades y aceleraciones, sin embargo surgen dificultades cuando se trata de problemas no-lineales de forma que existen múltiples soluciones. Es por ello que resulta importante utilizar las coordenadas dependientes que determinan sin ninguna ambigüedad las posiciones y orientaciones de cada uno de los cuerpos que forman un mecanismo [67].

En tanto mayor es el número de coordenadas dependientes que se emplean para definir un mecanismo, mayor será la complejidad de las ecuaciones que lo definen. El análisis dinámico de un mecanismo conlleva normalmente la formulación e integración numérica de sistemas de

ecuaciones diferenciales no lineales bastante complejas [17], de ahí la necesidad de optimizar la formulación de estas ecuaciones para facilitar su análisis posterior. Es en este punto en donde las FCC juegan un papel determinante.

Para el análisis de mecanismos, en forma general se definen tres tipos de coordenadas: coordenadas relativas , coordenadas de punto de referencia (también conocidas como coordenadas cartesianas) y coordenadas completamente cartesianas (FCC también conocidas como coordenadas naturales).

En las coordenadas relativas, la posición de cada elemento se determina con respecto a la posición del elemento anterior de la cadena cinemática. Estas coordenadas fueron utilizadas por primera vez por Paul y Krajcinovic [116, 117], Sheth y Uicker [133] y Smith et.al. [136]. Entre sus ventajas puede mencionarse que reducen el número de coordenadas y son ideales para mecanismos de cadena abierta, sin embargo debe considerarse que la formulación matemática resulta compleja y las ecuaciones que se obtienen de su uso para el análisis cinemático también lo son, requiriendo por ello un mayor tiempo de procesamiento.

Por otra parte, las coordenadas de punto de referencia ubican la posición de un punto de cada elemento (llamado precisamente "punto de referencia", y que usualmente es el centro de gravedad) mediante el uso de dos coordenadas Cartesianas y determinando el ángulo de orientación del elemento en relación un sistema de ejes de inercia. Entre las ventajas de utilizar este tipo de coordenadas se encuentran que la posición de cada elemento está determinada directamente, de ahí que el procesamiento matemático requerido para llevar a cabo la mayoría de los análisis es menor); sin embargo el número de variables que se utiliza para definir un mecanismo es mayor que el empleado con coordenadas relativas.

En algunas ocasiones es posible utilizar en conjunto coordenadas relativas y coordenadas cartesianas, resultando un sistema que se conoce como coordenadas mixtas, esto es posible apreciarlo en el trabajo de autores como Kim et Vanderploeg [84] y Attia [15].

Por su parte, las FCC resultan ser una opción interesante al momento de describir un mecanismo para su posterior análisis, y dado que el presente trabajo se basa en este tipo de coordenadas, éstas serán explicadas con mayor detalle.

### **2.1.1. Coordenadas completamente cartesianas (naturales)**

Las coordenadas completamente cartesianas (FCC) fueron descritas por [80, 16] y se caracterizan por tener la capacidad de describir un sistema mecánico sin la necesidad de utilizar variables angulares.

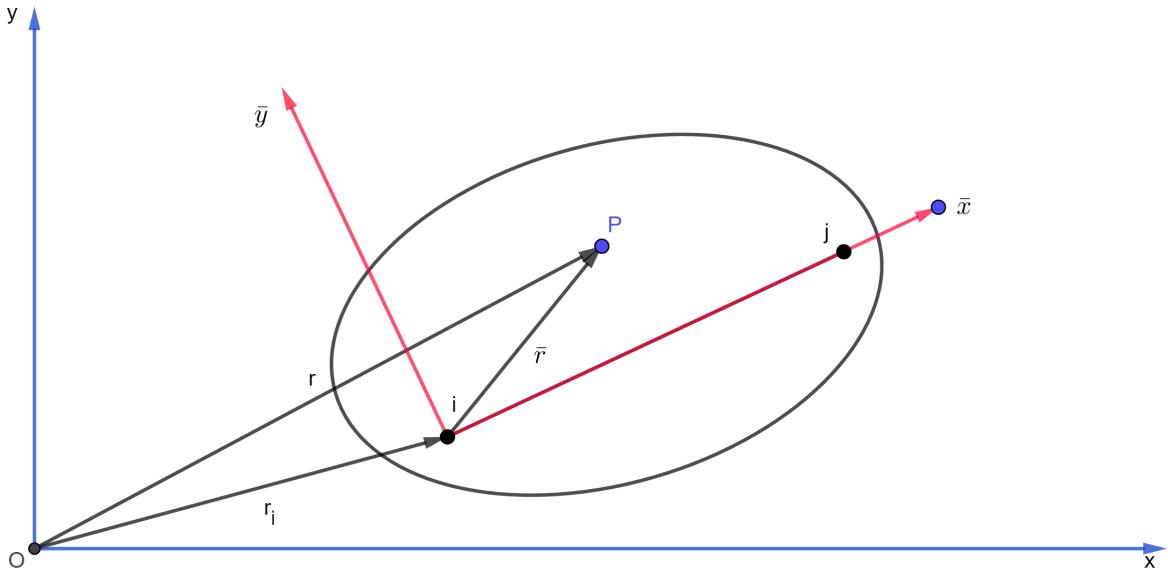
A principios de los años 80's García de Jalón et.al. presentaron los primeros artículos [77, 79, 129] en los que se hacían referencia a un nuevo método para la obtención de las ecuaciones de restricción de un mecanismo a partir de las cuales se llevaba a cabo el análisis cinemático. El primer artículo relacionado con simulación cinemática en 3D fue presentado por el mismo autor en 1982 [76].

Las coordenadas naturales no requieren el uso de variables angulares para definir la orientación del eslabonamiento, en cambio se utilizan las coordenadas cartesianas de algunos puntos y vectores unitarios. Estos puntos y vectores se localizan normalmente en las uniones del mecanismo (de forma que estos puntos están compartidos entre los diferentes eslabonamientos).

García de Jalón y Bayo en [80] presentaron una explicación extremadamente completa y detallada de las FCC, que son llamadas también coordenadas naturales.

En [78] García de Jalón resumió las principales características de las FCC de la siguiente forma:

1. Están constituidas únicamente por variables cartesianas, son sencillas de visualizar y de entender.
2. Los puntos principales y los vectores unitarios pueden ser ubicados en las uniones, de esta forma pueden compartirse entre cuerpos contiguos, contribuyendo a la definición de las uniones y manteniendo moderado el número de variables.
3. Al utilizar coordenadas naturales, un conjunto de variables simples define la posición y geometría de todos los cuerpos en relación a un sistema global de referencia.
4. Las ecuaciones de restricción se obtienen directamente de las características de cada cuerpo rígido y de las características de las uniones, estas ecuaciones se caracterizan por ser sencillas y fácilmente derivables para obtener la matriz Jacobiana.
5. En caso de que sea necesario es posible agregar con mucha facilidad coordenadas relativas siendo éstas, en algunas ocasiones, útiles para definir fuerzas en los actuadores.
6. Son muy versátiles para la síntesis y optimización de mecanismos, debido a que en las variables quedan explícitamente definidas las variables de diseño (por ejemplo las longitudes).
7. Cuando todos los cuerpos contienen al menos dos puntos y dos vectores unitarios, la matriz de inercia es una constante y en ella no existen fuerzas dependientes de la velocidad, esto se puede aprovechar para mejorar la eficiencia de las simulaciones mecánicas.



**Figura 2-1.:** Puntos básicos de un elemento en el plano utilizando FCC

8. El análisis de mecanismos utilizando coordenadas naturales puede ser automatizado en forma simple mediante software.

### Matriz de masas empleando FCC

Para poder llevar a cabo el análisis dinámico de un mecanismo, en este caso particular el análisis del balanceo estático y dinámico, resulta de suma importancia el poder formular ecuaciones que definan tanto la ShF como el ShM en términos de la posición, velocidad y aceleración de las coordenadas dependientes. A continuación se resume la teoría que García de Jalón presenta en [80] para la obtención de la matriz de masas de elementos en el plano (2D), resulta de suma importancia entender a detalle esta información pues en ella está la base de las formulaciones que se presentan más adelante en este trabajo.

Considere el elemento de la figura 2-1, su movimiento puede ser definido completamente mediante los puntos básicos  $i$  y  $j$ . El sistema de coordenadas  $(x,y)$  constituye un sistema global de referencia, en tanto que el sistema  $(\bar{x}, \bar{y})$  es móvil y tiene su origen ubicado en el punto  $i$  con su eje  $\bar{x}$  en dirección a  $j$ . Se considera un punto cualquiera  $P$  del elemento, que se encuentra definido mediante el vector  $r$  en relación al sistema de coordenadas global y por el vector  $\bar{r}$  en relación al sistema de coordenadas local. De forma que se cumple la ecuación 2-1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} \quad (2-1)$$

En donde  $\mathbf{A}$  representa a la matriz de rotación. En tanto se consideran elementos rígidos, la posición local del vector  $\bar{\mathbf{r}}$  permanece constante sin importar el movimiento al que esté sujeto el elemento. Por lo que la posición del punto P se define como se muestra en la ecuación 2-2.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i + c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{n}) \quad (2-2)$$

En donde  $c_1$  y  $c_2$  son las componentes del vector  $\bar{\mathbf{r}}$  en el sistema de coordenadas locales. Las componentes del vector  $\mathbf{r}$  quedan definidas entonces como se muestra en las ecuaciones 2-3.

$$\begin{aligned} x &= x_i + c_1(x_j - x_i) - c_2(y_j - y_i) \\ y &= y_i + c_1(y_j - y_i) + c_2(x_j - x_i) \end{aligned} \quad (2-3)$$

La ecuación 2-3 puede ser expresadas de forma matricial de acuerdo a la ecuación 2-4.

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & c_2 & c_1 & -c_2 \\ -c_2 & 1 - c_1 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (2-4)$$

En donde  $\mathbf{q}^T = \{x_i \ y_i \ x_j \ y_j\}$  es el vector que contiene las coordenadas del elemento. La matriz  $\mathbf{C}$  es constante para un punto dado  $P$  y no cambia con el movimiento del sistema, por lo tanto puede derivarse tal como se muestra en las ecuaciones 2-5 y 2-6.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} \quad (2-5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} \quad (2-6)$$

Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  que definen a la matriz  $\mathbf{C}$  pueden ser expresados en función de las coordenadas de los puntos  $i$ ,  $j$  y  $k$  en el marco de referencia local quedando tal como se muestra en la ecuación 2-7

$$\bar{\mathbf{r}} = c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\bar{\mathbf{n}}) \quad (2-7)$$

Pero, debido a que  $\bar{\mathbf{r}}_i = 0$  al encontrarse en el origen de referencia local, la ecuación 2-7 puede expresarse como se muestra en la ecuación 2-8

$$\bar{\mathbf{r}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \ | \ \bar{\mathbf{n}}] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c} \quad (2-8)$$

En donde el vector  $\mathbf{c}$  contiene los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$ , y la matriz  $\bar{\mathbf{X}}$  tiene como columnas los componentes de los vectores  $\bar{\mathbf{r}}_j$  y  $\bar{\mathbf{r}}_k$ .

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{r}}_j \ | \ \bar{\mathbf{n}}] = \begin{bmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ij} & 0 \\ 0 & L_{ij} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Donde  $L_{ij}$  corresponde a la distancia entre los puntos  $i$  y  $j$ . La matriz  $\bar{\mathbf{X}}$  será siempre invertible, por lo tanto la ecuación 2-8 puede utilizarse para conocer el valor de  $\mathbf{c}$  al resolver la ecuación 2-10

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}} \quad (2-10)$$

Los términos de  $\mathbf{c}$  quedan definidos básicamente mediante tres integrales (ecuaciones 2-11 - 2-13).

$$\int_A \rho dA = m \quad (2-11)$$

$$\int_A \rho \mathbf{c} dA = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \int_A \rho \bar{\mathbf{r}} dA = m \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}}_G \quad (2-12)$$

$$\int_A \rho \mathbf{c} \mathbf{c}^T dA = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left( \int_A \rho \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T dA \right) \bar{\mathbf{X}}^{-T} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

En donde  $m$  es la masa total del elemento,  $\bar{\mathbf{r}}$  representa las coordenadas locales del centro de gravedad e  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  son los momentos y productos de inercia con respecto a las coordenadas locales cuyo origen se encuentra en el punto básico  $i$ . Ahora bien, el trabajo virtual  $W^*$  generado por las fuerzas de inercia en el elemento puede definirse mediante la integral sobre todos los elementos del trabajo virtual de las fuerzas de inercia de una masa diferencial localizada en el punto P (ecuación 2-14).

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^{*T} \ddot{\mathbf{r}} d\Omega \quad (2-14)$$

Donde  $\rho$  corresponde a la densidad del material del elemento. Sustituyendo las ecuaciones 2-5 y 2-6, el trabajo virtual (ecuación 2-14) queda definido tal como se muestra en la ecuación 2-15.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} d\Omega \quad (2-15)$$

Y debido a que los vectores  $\dot{\mathbf{q}}^{*T}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  son independientes de  $\Omega$  pueden salir de la integral, quedando la ecuación 2-16.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (2-16)$$

Por otra parte, conforme a la definición de trabajo virtual que se plantea en [80], se sabe que el trabajo virtual también puede ser definido de acuerdo a la ecuación 2-17.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2-17)$$

Y relacionando la ecuación 2-16 con la ecuación 2-17 es posible definir la matriz de masas  $\mathbf{M}$  (ecuación 2-18) de un elemento formado por dos puntos básicos.

$$\mathbf{M}_{2P} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \quad (2-18)$$

La ecuación 2-19 se obtiene desarrollando el producto de  $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$  en la ecuación 2-18.

$$\mathbf{M}_{2P} = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} (1 - c_1)^2 & 0 & (1 - c_1)c_1 - c_2^2 & -c_2 \\ 0 & (1 - c_1)^2 + c_2^2 & c_2 & (1 - c_1)c_1 - c_2^2 \\ (1 - c_1)c_1 - c_2^2 & c_2 & c_1^2 - c_2^2 & 0 \\ -c_2 & (1 - c_1)c_1 - c_2^2 & 0 & c_1^2 + c_2^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (2-19)$$

Y sustituyendo en la ecuación 2-19 los valores que se obtuvieron a partir de la ecuación 2-23 con las integrales resueltas de acuerdo a las ecuaciones 2-11, 2-12 y 2-13 se obtiene la matriz de masas  $\mathbf{M}_{2P}$  para elementos en dos dimensiones definda a partir de dos puntos básicos y un vector unitario (ecuación 2-20).

$$\mathbf{M}_{2P} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & a & -c & b \\ b & c & d & 0 \\ -c & b & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

En donde:

$$a = \frac{Iz}{l_{ij}^2} + m - \frac{2m\bar{x}}{l_{ij}} \quad (2-21)$$

$$b = -\frac{Iz}{l^2} + \frac{m\bar{x}}{l_{ij}} \quad (2-22)$$

$$c = \frac{m\bar{y}}{l_{ij}} \quad (2-23)$$

$$d = \frac{Iz}{l_{ij}^2} \quad (2-24)$$

Esta matriz, al ser constante para eslabones rígidos, permitirá la definición de la ShF y el ShM de cada elemento, de una forma sencilla; haciendo a su vez posible obtener las condiciones de balanceo del sistema mecánico de manera directa.

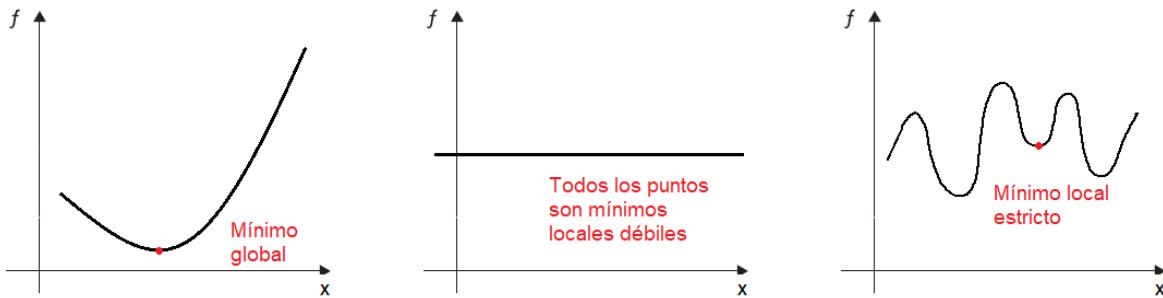


Figura 2-2.: Ejemplos de mínimos

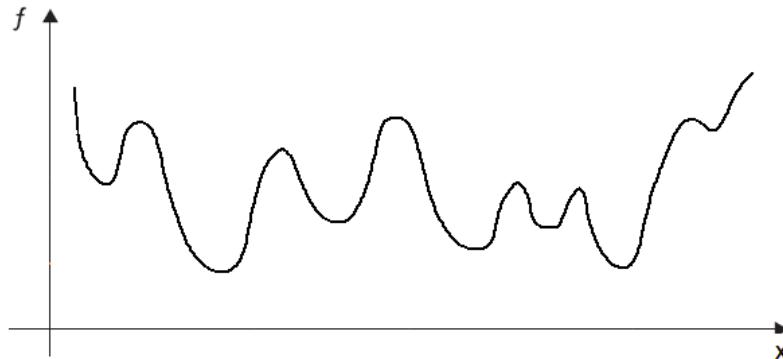
## 2.2. Optimización

La optimización es una herramienta importante en la toma de decisiones y en el análisis de sistemas físicos. Para hacer uso de esta herramienta, primero es necesario identificar un objetivo, es decir una medida cuantitativa del rendimiento del sistema en estudio; éste dependerá de ciertas características del sistema conocidas como variables y lo que se busca es encontrar los valores de las variables que optimizan el objetivo, resultando común que estas variables estén restringidas de alguna manera.

El proceso de identificar el objetivo, las variables y las restricciones de un problema se conoce como modelado. Una vez que se tiene definido el modelo, es posible utilizar un algoritmo de optimización para que encuentre su solución. No hay un algoritmo universal de optimización sino que existen muchas propuestas.

El tipo de modelos que se abordarán en este trabajo son de tipo continuo, con restricciones, no convexos y no lineales; a continuación explica en forma breve en qué consisten dichas características:

1. Continuo: significa que la función objetivo está definida en los números reales.
2. Con restricciones: debido a que se busca optimizar sistemas mecánicos, existen restricciones que no permiten a los elementos exceder determinadas dimensiones, éstas características son incluidas en el modelado del sistema.
3. No convexo: un problema convexo únicamente tiene un mínimo global, sin embargo los problemas que se abordan en este trabajo tienen siempre múltiples mínimos locales.
4. No lineal: esto se debe a que las funciones objetivo que buscan optimizarse no son ecuaciones lineales (es decir que su grado es mayor a uno).



**Figura 2-3.:** Ejemplo de una función compleja para minimizar

### 2.2.1. Tipos de soluciones

Generalmente, al buscar minimizar un problema, el mejor resultado sería poder encontrar un mínimo global, es decir un punto en el cuál la función encuentra su valor mínimo:

Un punto  $x^*$  es un mínimo global de una función  $f$  si  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Este valor mínimo global normalmente es muy difícil de obtener debido a que usualmente se realizan búsquedas locales y no existe entonces la seguridad de que la función  $f$  pudiera tener otro mínimo en otra región que no ha sido muestreada dentro del algoritmo [111]. Es por ello que la mayoría de los algoritmos son capaces de encontrar mínimos locales, que corresponden al valor más pequeño de una función  $f$  en una región dada:

Un punto  $x^*$  es un mínimo local de una función  $f$  si existe una región  $N_{x^*}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in N$

Sin embargo, de acuerdo a la definición anterior, si se tiene la función constante  $f(x) = 2$ , cada punto  $x$  corresponde a un mínimo, conociéndose entonces como mínimos locales débiles, que deben ser diferenciados de los mínimos locales estrictos:

Un punto  $x^*$  es un mínimo local estricto de una función  $f$  si existe una región  $N_{x^*}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) < f(x) \forall x \in N$  con  $x \neq x^*$

La figura 2-3 muestra un ejemplo de una función con muchos mínimos locales (no convexa) que puede resultar difícil de minimizar debido a los algoritmos tienden a quedar ‘atrapados’ en mínimos locales.

### 2.2.2. Identificación de mínimos locales

Cuando una función  $f$  es suave (como es el caso de las funciones analizadas en este trabajo), una forma eficiente y práctica de identificar mínimos locales es a través del vector gradiente ( $\nabla f$ ) y la matriz Hessiana ( $\nabla^2 f$ ).

A continuación se definen matemáticamente tanto el Gradiente como el Hessiano.

#### Definición de Vector Gradiente

El gradiente es un vector, denotado  $\nabla f$  de un campo escalar  $f$  que representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de una función, es decir que apunta hacia los lugares en donde la gráfica de  $f$  tiene un mayor incremento.

$$\nabla f(X) = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

#### Definición de Matriz Hessiana

La matriz Hessiana de una función  $f$  de  $n$  variables es una matriz cuadrada ( $n \times n$ ) formada por las segundas derivadas parciales de  $f$  con la forma:

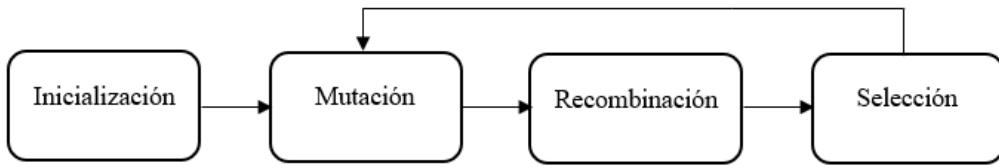
$$\nabla^2 f(X) = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

#### Mínimos locales

Siempre que  $f$  sea dos veces diferenciable, se sabe que  $x^*$  es un mínimo local si:

1.  $\|\nabla f(x^*)\| = 0$
2.  $\nabla^2 f(x^*)$  es positivo semidefinido, esto es si  $v^T \nabla^2 f(x^*)v \leq 0 \forall v$

Una función  $f$  es diferenciable si todas sus derivadas existen, es continuamente diferenciable si todas las segundas derivadas parciales son funciones continuas de  $x$  y es dos veces diferenciable si todas las segundas derivadas parciales existen y a su vez son continuamente diferenciables.



**Figura 2-4.:** Fases del Algoritmo de Evolución Diferencial.

### 2.2.3. Algoritmos de optimización

Para llevar a cabo la optimización de una función, se han propuesto gran cantidad de algoritmos, algunos de ellos con un número finito de pasos, otros siguiendo métodos iterativos que convergen a una solución y algunos otros metaheurísticos que permiten la obtención de soluciones aproximadas a algunos problemas.

Para la realización de este trabajo se implementaron el algoritmo de Evolución Diferencial, y una versión simplificada del algoritmo de Descenso de Gradiente Proyectado, siendo el primero un método metaheurístico y el segundo un método determinístico.

A continuación se explican ambos métodos:

#### Evolución Diferencial

El método de Evolución Diferencial (DE por sus siglas en inglés) consiste en un algoritmo de optimización estocástico (metaheurístico), basado en poblaciones. Fue desarrollado por Rainer Storn y Kenneth Price en 1997 [139]. Al ser un algoritmo evolutivo utiliza mecanismos inspirados en la teoría de la evolución, donde los individuos más aptos de una población (los que tienen las características que les permiten sobrevivir más tiempo) son los que tienen más descendencia, heredando así las buenas características de sus padres. Esto hace que la nueva generación tenga mayores oportunidades de sobrevivir mejorando generación tras generación. Para lograr esta evolución se utilizan mecanismos semejantes a los que existen en la naturaleza, como son la mutación, la recombinación y la selección.

En la figura 2-4 es posible observar las fases necesarias para llevar a cabo la DE, mismas se explican brevemente a continuación:

1. Inicialización

Se genera una población aleatoria inicial  $S$  conformada por  $N$  individuos, todos ellos ubicados dentro de la región factible.

$$S = \{X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}\} \quad (2-27)$$

Cada individuo es un vector de  $D$  dimensiones (elementos de la función objetivo) definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_{ik} &= [X_{ik1}, X_{ik2}, \dots, X_{ikD}] \quad \forall \quad k, i, \quad k = 1, 2, \dots, k_{max} \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ L \leq X_{ikj} &\leq U \quad \forall \quad j, \quad j = 1, 2, \dots, D \end{aligned} \quad (2-28)$$

Donde  $i$  es el número de individuo,  $k$  es el número de generación (iteración),  $k_{max}$  es el máximo número de generaciones,  $L$  es el límite inferior del parámetro,  $U$  es el límite superior y  $j$  es el número de elemento del individuo.

La función objetivo evalúa qué tan apto es cada individuo, en este caso el individuo más apto es aquel que provoca un valor más cercano a cero al ser evaluado en la función objetivo.

## 2. Mutación

Para cada individuo de la población inicial se obtiene un vector mutado  $\hat{X}_{ik}$  mediante

$$\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k}) \quad (2-29)$$

donde  $\gamma, \delta, \eta$  son individuos aleatorios mutuamente distintos y diferentes al individuo actual  $i$ . Por tanto el tamaño de la población  $N$  debe ser mayor o igual a cuatro. El parámetro de mutación  $F$  es una constante definida entre 0 y 2 para controlar la amplificación de la variación diferencial [139].

## 3. Recombinación

Se mezclan los elementos del individuo inicial y del individuo mutado para obtener un nuevo individuo  $y_{ik}$  utilizando la constante de cruce  $CR \in [0.1, 1]$ . Para cada elemento del individuo se genera un valor aleatorio  $R$  entre 0 y 1, si este valor es menor a  $CR$  se reemplaza el elemento inicial por el mutado; en caso contrario se mantiene el original.

$$y_{ikj} = \begin{cases} \hat{X}_{ikj} & \text{si } R < CR \\ X_{ikj} & \text{si } R \geq CR \end{cases} \quad (2-30)$$

Este proceso se realiza para cada individuo de la población inicial, obteniendo así  $N$  vectores de prueba  $y_{ik}$ .

## 4. Selección

Se aplica criterio (2-31) para reemplazar o conservar a los individuos en la nueva generación.

$$X_{ik+1} = \begin{cases} y_{ik} & \text{si } f(y_{ik}) < f(X_{ik}) \\ X_{ik} & \text{si } f(y_{ik}) \geq f(X_{ik}) \end{cases} \quad (2-31)$$

Una vez generada la nueva población, la mutación, recombinación y selección éstas se repiten hasta alcanzar el número máximo de generaciones  $G$  o algún otro criterio de paro.

El proceso iterativo llevado a cabo para encontrar un punto óptimo a través del algoritmo de DE requiere contar con un criterio que permita determinar en qué momento se ha alcanzado un mínimo local satisfactorio. Éste criterio de paro puede estar determinado por el número de generaciones, sin embargo con frecuencia se implementan además otro tipo de criterios. En este caso se abordarán los criterios utilizados por el algoritmo DE que se encuentra en la librería SciPy de Python.

---

**Algoritmo 1:** Criterios de paro para DE implementado en la librería SciPy de Python.

---

```

1 Inicialización;
2 repeat
3   Mutación;
4   Recombinación;
5   Selección;
6 until ( $\sigma \leq (T * (Prom))$ )||(maxiter = 1000);

```

---

El algoritmo 1 muestra los criterios de paro implementados en la librería SciPy de Python, en donde la mutación, recombinación y selección se repiten hasta el momento en que la desviación estándar ( $\sigma$ ) entre los resultados de evaluar la función es menor o igual a la tolerancia ( $T$ ) multiplicada por el promedio de las evaluaciones de la función, o bien hasta que el número de generaciones ( $maxiter$ ) llega a 1000.

Al comenzar la optimización empleando el algoritmo de DE con una población inicial generada aleatoriamente, los valores de la desviación estándar ( $\sigma$ ) al evaluar estos puntos en la función serán altos, lo mismo que el valor del promedio de los valores obtenidos al evaluar la función objetivo en esos puntos ( $Prom$ ), sin embargo conforme las iteraciones van avanzando los puntos que forman la población se van acercando hacia el mínimo, lo cual provoca que tanto la  $\sigma$  como el  $Prom$  vayan disminuyendo. De esta forma, aún cuando el número de generaciones no haya llegado a 1000, en el momento que la  $\sigma$  resulta igual o menor al porcentaje del  $Prom$  indicado a través de la  $T$  el algoritmo se detiene. El valor para  $T$  se encuentra definido por default como 0.10, es decir que el algoritmo de DE se detiene cuando la desviación estándar es menor al 10 % del valor correspondiente al promedio de los resultados de la evaluación de la función objetivo o, si esta condición no se alcanza, se detiene cuando el número de generaciones llega a 1000.

### Descenso de Gradiente Proyectado

El descenso de gradiente es un algoritmo iterativo que puede encontrar un mínimo local en una función [38, 111, 83]. Para ello se comienza en un punto aleatorio y se continua la optimización hasta que se alcanza el mínimo de la función. Esta técnica está basada en el uso del vector gradiente para calcular cada nuevo punto puesto que, como es sabido, el vector gradiente  $\nabla f(X)$  evaluado en un punto  $X$  apunta hacia la dirección máximo ascenso, de ahí que el método de Descenso de Gradiente mueve el punto en la dirección opuesta a dicho vector. El problema comienza con el vector de solución  $X_0$ , y en cada iteración  $X_k$  es modificada de acuerdo a la ecuación 2-32.

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k \quad (2-32)$$

Donde  $k$  es la iteración actual,  $\alpha_k$  es la longitud del paso y  $P_k$  es la dirección calculada como un vector unitario como se muestra en la ecuación 2-33.

$$P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{||\nabla f(X_k)||} \quad (2-33)$$

La longitud del paso  $\alpha_k$  se optimiza de acuerdo con la aproximación del Teorema de Taylor (ecuación 2-34), asegurando de esta manera el descenso máximo. Cada término en el Teorema de Taylor se divide entre el número de derivada factorial, es decir que entre mayor sea el número de la derivada, el término tendrá un menor aporte en la función. En optimización multivariable, resulta común el utilizar hasta la segunda derivada del Teorema de Taylor, la tercera derivada y siguientes provocarían un incremento en la complejidad del cálculo y por lo tanto en el tiempo del procesamiento, mismo que normalmente no es necesario debido que al truncarla en la segunda derivada se logra una buena aproximación.

$$f(X_k + \alpha_k P_k) \approx f(X_k) + \alpha_k P_k^T \nabla f(X_k) + \frac{\alpha_k^2}{2} P_k^T \nabla^2 f(X_k) P_k \quad (2-34)$$

El valor del tamaño de paso  $\alpha_k$  (ecuación 2-35) se obtiene derivando la ecuación 2-34 con respecto de  $\alpha$ .

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P_k}{P_k^T \nabla^2 f(X) P_k} \quad (2-35)$$

Hay ocasiones en que el cálculo de derivadas de manera simbólica puede resultar complejo, el método de Diferencias Finitas [111] se puede usar para obtener una aproximación del vector gradiente y de la matriz Hessiana.

Matemáticamente, el vector gradiente  $\nabla f(X)$  está formado por las primeras derivadas de la función con respecto de todas las variables (ecuación 2-25) y la matriz Hessiana  $\nabla^2 f(X)$  está compuesta por las segundas derivadas (ecuación 2-26).

Para aproximar las primeras derivadas parciales se usa la ecuación (2-36). En donde  $\epsilon$  es una constante escalar con un valor pequeño ( $\epsilon = 1e - 5$ ),  $e_k$  es un vector unitario con el tamaño de  $X$  que contiene ceros en todas sus posiciones excepto en la posición  $k$  a la cual se le asigna el valor de 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{f(X + \epsilon e_k) - f(X)}{\epsilon} \quad (2-36)$$

Dado que la matriz Hessiana se multiplicará por un vector, se usa una aproximación finita como se muestra en la ecuación 2-37, en donde  $V$  corresponde al vector que será multiplicado.

$$\nabla^2 f(X) * V = \frac{\nabla f(X + \epsilon V) - \nabla f(X)}{\epsilon} \quad (2-37)$$

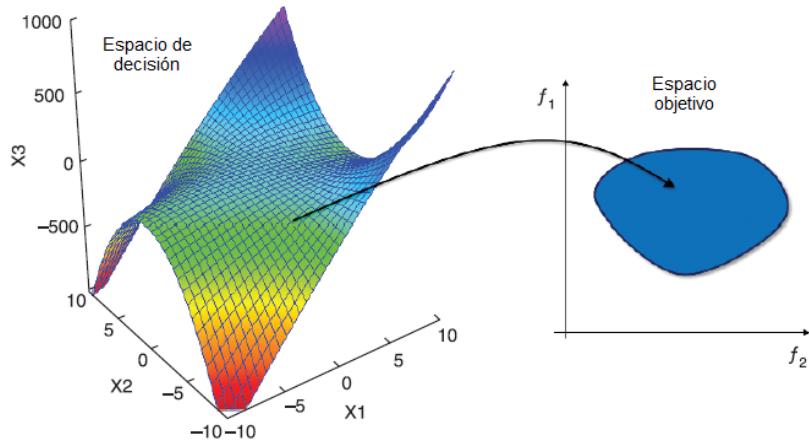
## 2.2.4. Análisis de resultados de una optimización multiobjetivo

Cuando los problemas de optimización buscan optimizar más de una sola función objetivo son conocidos como problemas multiobjetivo puesto que optimizan ambos objetivos en forma simultanea. Es común que estos objetivos estén en conflicto es decir que, al momento de mejorar uno de ellos, se empeore otro y viceversa. Por esta razón no se puede considerar que exista una única solución óptima con respecto a todas las funciones objetivo, en lugar de eso existe un conjunto de soluciones óptimas, conocidas como Frente de Pareto (PF por sus siglas en inglés) [6].

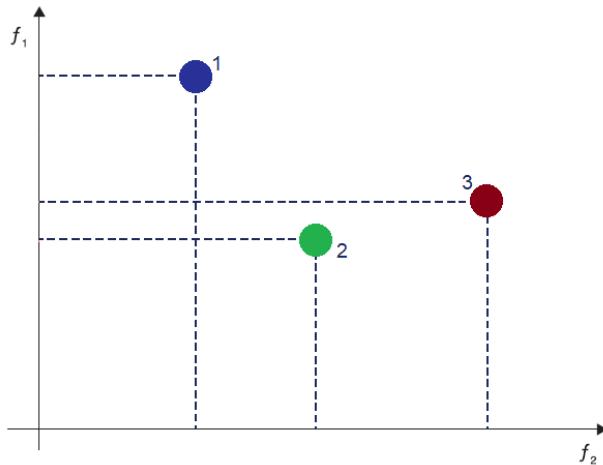
### Frentes de Pareto

En la optimización multiobjetivo se utiliza con frecuencia el concepto de soluciones dominadas, éste se basa en comparar dos soluciones para determinar si una domina a la otra o no. Se dice que un vector  $U[u_1, u_2, \dots, u_k] \in R^k$  domina a otro vector  $V[v_1, v_2, \dots, v_k] \in R^k$  (denotado por  $U \prec V$ ) si y sólo si  $U$  es parcialmente menor que  $V \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, u_i \leq v_i \wedge j \in \{1, 2, \dots, k\} : u_j < v_j$ . En otras palabras, existe al menos una  $u_j$  que es más pequeña que  $v_j$ , mientras que las restantes  $u_s$  son menores o iguales a las correspondientes  $v_s$  [40].

Considere por ejemplo un problema de optimización de dos objetivos con tres soluciones diferentes tal como se muestra en la figura 2-5, en el que se busca maximizar tanto a la función 1 ( $f_1$ ) como a la función 2 ( $f_2$ ). Resulta entonces complicado el poder encontrar las mejores soluciones, y es entonces cuando las soluciones dominantes cobran importancia para poder elegir cuál es la mejor de dos soluciones conocidas en términos de ambos objetivos.



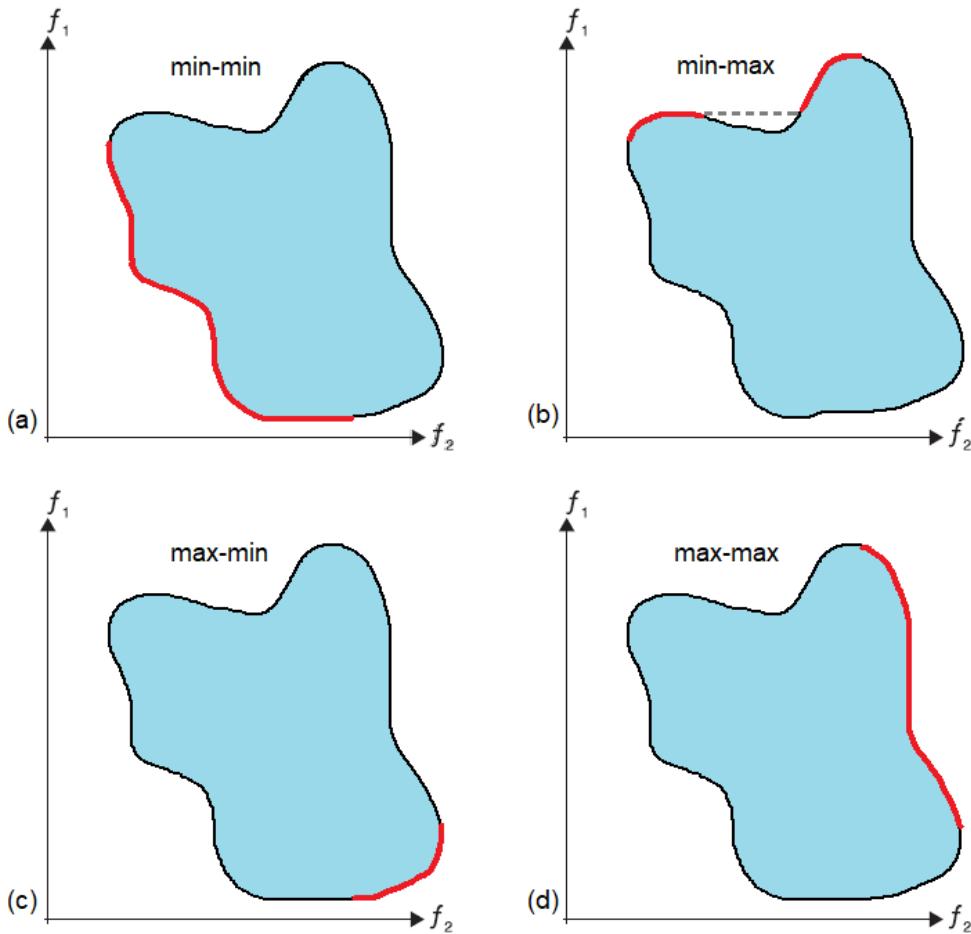
**Figura 2-5.:** Espacio de decisión y espacio objetivo [40].



**Figura 2-6.:** Ejemplo con tres soluciones

Observe la figura 2-6 en la que se muestran tres posibles soluciones. Si se desean minimizar ambas funciones objetivo, al comparar la solución 1 (azul) y la solución 2 (verde) es posible notar que la solución 1 es mejor que la solución 2 para  $f_2$  y la solución 2 es mejor que la solución 1 para  $f_1$  por lo tanto la solución 1 es una solución no-dominada por la solución 2. Por otra parte, si se comparan las soluciones 2 (verde) y 3 (roja), se percibe que la solución 2 es mejor que la solución 3 tanto para la función  $f_1$  como para la función  $f_2$ , cumpliendo de esta forma las dos condiciones necesarias para ser considerada como una solución dominante.

Cuando se tiene un número finito de soluciones es posible llevar a cabo las comparaciones entre cada una de ellas para determinar cuáles son las dominadas y cuales son las no-dominadas (conocidas también como dominantes). El conjunto de las soluciones no dominadas por alguna otra se conoce como el PF.



**Figura 2-7.:** Soluciones óptimas del Frente de Pareto

La figura 2-7 muestra, en color rojo los PF para los cuatro posibles escenarios que podrían presentarse al llevar a cabo la optimización multiobjetivo de dos funciones, en donde cada una de ellas puede ser maximizada o minimizada. En la figura 2-7(a) se aprecia el PF cuando se desea minimizar ambos objetivos, por su parte la figura 2-7(b) corresponde al PF cuando se busca minimizar la función 2 y maximizar la función 1; en la figura 2-7(c) se observa el PF cuando se busca maximizar la función 2 y minimizar la función 1, por último en la figura 2-7(d) se marca el PF cuando lo que se busca es maximizar ambas funciones.

## 2.3. Conclusión

En este capítulo se presentaron las bases para comprender el uso de las FCC, así como el procedimiento detallado para la definición de la matriz de masas de un eslabón.

También se recordaron las bases necesarias para optimización, haciendo especial hincapié en

los algoritmos DE y PGD, así como en el análisis de los resultados de optimización para problemas de optimización multiobjetivo a través del uso del PF.

### **3. Estado del arte**

En este capítulo se presenta, en forma breve, un recorrido a lo largo de la historia del balanceo del mecanismos, en donde es posible encontrar referencias en artículos de investigación desde el año de 1902 [64] pero manteniéndose como un tema vigente e importante aún hasta nuestros días.

Un análisis histórico muy completo concerniente al balanceo de mecanismos puede encontrarse en [102, 105] y más recientemente en [10, 9], sin embargo con la finalidad de conocer un panorama general y poder plantear los principales aportes de este trabajo, se presenta a continuación un breve resumen destacando las principales propuestas a lo largo de la historia para llevar a cabo el balanceo ya sea completo o parcial de las ShF y los ShM.

Entre las primeras publicaciones relacionadas con el tema se encuentra en 1902 el trabajo de O. Fischer [64] quien presenta un método denominado 'vectores principales'. Este método permite el balanceo de la ShF, para ello se analiza cada uno de los eslabones que componen un mecanismo y se determina aquellos puntos en donde se alcanza el balanceo estático. Estos puntos se conocen como 'puntos principales'. El trabajo de O. Fischer proporcionó las bases para la creación de dispositivos que permitieron el estudio del movimiento de los centros de masas de los eslabones en un mecanismo.

El método de los vectores principales fue utilizado posteriormente por V. P. Goryachkin [70], por V. A. Yudin [169] y por Kreutzinger [99]. También ha sido empleado por Shchepetilnikov [132] para determinar el centro de masa de un mecanismo y nuevamente por él [131] para balancear mecanismos con eslabones asimétricos. Más recientemente en 2013 por Van der Wijk [160] y Van der Wijk y Herder [152] lo emplearon para el balanceo del ShM de tres elementos en serie.

Otro de los primeros métodos utilizados para lograr el balanceo fue el método de la sustitución estática de masas que se basa en sustituir estáticamente la masa del acoplador por masas concentradas para lograr el equilibrio en los enlaces rotativos. Este método fue utilizado en los trabajos de F.R.Grossley [42], R.L. Maxwell [107], M.R. Smith [138] y G.J Talbourdet [140].

Los años en torno a 1920 se vieron marcados por un especial interés en el balanceo de motores [41, 43, 45, 48, 85, 100, 121] así como de máquinas relacionadas con la agricultura [13, 14].

De estas publicaciones destaca [100] en donde se utiliza el balanceador Lanchester, que sigue siendo un método vigente en la actualidad para el balanceo de motores de cuatro tiempos.

El método del mecanismo duplicado [12, 44, 48] se basa en la adición de un mecanismo duplicado con simetría axial, haciendo de esta forma estacionario el centro de masas del mecanismo en conjunto y logrando así un balanceo completo.

Kamenskii [82] fue el primero en utilizar un mecanismo de levas para llevar a cabo el balanceo, de esta forma a través de una leva con un contrapeso es posible eliminar tanto la ShF como el ShM.

También vale la pena destacar el trabajo de Hilpert [73] que utilizó un mecanismo de pantógrafo para llevar a cabo el desplazamiento de los contrapesos, logrando así el balanceo del mecanismo. Este método también se empleó posteriormente en [11, 7].

En los años 40s se desarrollaron métodos para lograr el equilibrio parcial basados en la aproximación de funciones. Destaca el trabajo de Geronimus [68, 69] en donde las condiciones de balanceo se formulan mediante la minimización de la raíz cuadrática media (RMS) o valores máximos (enfoque de Chebichev) de la ShM.

Con el uso del mecanismo manivela-corredera en los motores de combustión interna, los métodos de balanceo basados en el análisis de los armónicos cobró mayor importancia [55, 66, 70, 127, 149, 150], logrando la reducción del ShM mediante el equilibrio de ciertos armónicos de la ShF y del ShM. Para llevar a cabo este proceso las fuerzas y momentos que no se encuentran balanceados se dividen en Series de Fourier y luego se estudian por partes.

En 1968, Berkof y Lowen [24] propusieron una nueva solución para el balanceo de fuerzas mediante un método llamado vectores linealmente independientes. Este método consiste en formular una ecuación considerando una representación vectorial que describe la posición del centro de masa total del mecanismo en conjunto con la ecuación que representa la cadena cinemática cerrada. Se obtiene entonces un sistema de ecuaciones que contiene vectores linealmente independientes que permite obtener las condiciones de balanceo del mecanismo reduciendo a cero aquellos coeficientes que dependen del tiempo. Este método se aplicó posteriormente en [137, 142]. Especialmente en [137] se presenta el diseño de un software que permite el balanceo de un mecanismo de cuatro barras utilizando este método, además el incremento del ShM se controla de forma de que se mantiene lo más pequeño posible.

Shchepetilnikov [132] propuso un método para minimizar el ShM a través del uso de un contrapeso montado en la manivela de entrada sobre un eje diferente al eje de entrada pero que gira con la misma velocidad angular, de esta forma logra eliminar el primer armónico del ShM.

En los años 70s el balanceo dinámico de los mecanismos cobró más importancia. En 1973 Berkof [23] describió el primer método documentado para lograr el equilibrio dinámico completo. Este método está basado en sustituir la masa del acoplador por masas concentradas, de esta forma el problema se convierte en un problema de equilibrio de revolución que presentan masas concentradas. Este método fue aplicado también por Esat y Bahi [57] quienes propusieron ubicar contra-inercias giratorias para eliminar los momentos provocados por los eslabones móviles, al mismo tiempo que sus masas se utilizaban para realizar el balanceo de la ShF. Este método tiene como ventaja el poco incremento en la masa total del mecanismo resultante.

Resultó entonces claro el hecho de que llevar a cabo el balanceo completo de mecanismos es posible mediante complejas consideraciones de diseño y a través de un inevitable incremento en la masa total del mecanismo, de ahí que comenzaron a cobrar mayor auge los métodos que proponían un balanceo parcial del mecanismo. En busca de minimizar la ShF y el ShM han surgido diferentes propuestas [22, 30, 65, 103, 126, 147, 145, 106]. En [159], Wiederrick y Roth propusieron condiciones generales simples para determinar las propiedades de inercia de un mecanismo de cuatro barras permitiendo un balanceo parcial del mecanismo. Dresig [51, 52, 50, 53, 49] examinó las condiciones de balanceo para varias estructuras 2D con eslabonamientos de seis y ocho barras. Elliot y Tesar [54] presentaron la optimización mediante la teoría de "last-square" para el balanceo del ShM de un mecanismo de cuatro barras con una velocidad angular de entrada constante.

En [143, 151] se sugiere un método que permite la comparación de la eficiencia de los métodos de balanceo por un criterio de valor mínimo del ShM. Tepper y Lowen [143] muestran en los mecanismos con ShF balanceada que el valor 'cuadrático medio' del principal momento de inercia es constante en relación con algunas elipses localizadas en el plano del mecanismo, y al disminuir las dimensiones de estas elipses el valor 'cuadrático medio' disminuye alcanzando un mínimo global en el centro de esta familia de elipses. Esta misma teoría, aplicada a mecanismos tridimensionales fue desarrollada por Urba [151], mostrando que las elipses se transforman en elipsoides pero que sus propiedades se mantienen.

Berestov [20, 19] planteó por primera vez un método para el balanceo dinámico basado en sistemas planetarios. Su trabajo sirvió de sustento para los presentados por Feng [60, 61, 62], Yu y Smith [165], Arakelian y Smith [7]. En [62] se presentó el estudio del balanceo del ShM de 17 tipos de mecanismos de ocho barras. Por su parte en [7] se presentó un estudio de las condiciones para el balanceo completo de mecanismos con un pequeño incremento en la masa total de los eslabonamientos móviles implementando un contrapeso engranado ubicado en la base del mecanismo.

Los algoritmos de optimización basados en programación han sido también explorados en

---

los trabajos de Salder et.al. [108, 118, 123, 122] H. Dresig y Schönfeld [51, 52], Jacobi [74], O’Leary y Gatecliff [113], Qi y Pennestri [110], Walker y Haines [154].

Bagci [31] utilizó una estructura de paralelogramo para un mejor balanceo de mecanismos. Este paralelograma transfiere el movimiento a un engrane de contra-inercia ubicado en la base del mecanismo.

Zobairi, Rao y Sahay [120, 173, 81] estudiaron el problema de balanceo considerando la elasticidad de los elementos.

Bessonov [25, 26] formuló una solución del problema de balanceo mediante eslabones de masa variable aplicando los métodos de valor RMS y mini-max para la minimización.

Por su parte Bošković propuso un método para la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras basado en un nuevo algoritmo de *sub-population firefly* teniendo como objetivo la minimización de ocho funciones relacionadas con la ShF, el ShM, el torque de entrada y las reacciones en las uniones.

En cuando a estudios experimentales sobre balanceo de mecanismos, vale la pena destacar [75, 29, 155]. Jacobi y Rose [75] realizaron experimentación con el balanceo de la ShF de un mecanismo de cuatro barras. Los resultados demostraron coincidencia entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante modelos computacionales. Tricamo y Lowen [146, 144] lograron reducir en más de un 50 % el ShM mediante un dispositivo experimental en un mecanismo de cuatro barras.

Respecto a mecanismos espaciales, Semenov [128] obtuvo buenos resultados al demostrar que el  $n_{esimo}$  armónico del ShF de cualquier mecanismo espacial puede ser balanceado mediante tres contrapesos dispuestos en planos perpendiculares. Kaufman y Sandor [82] desarrollaron el método de los vectores linealmente independientes para mecanismos espaciales, mostrando el método al balancear mecanismos del tipo RSSR y RSSP. Gappoev desarrolló un método [66] generalizando las aproximaciones de Shchepetilnikov’s [132, 124] para la versión tridimensional; él eliminó el primer armónico del ShM agregando un contrapeso a través de un mecanismo que giraba a la misma velocidad que el eje de entrada. Algunos ejemplos para el balanceo de mecanismos espaciales tipo Bennett han sido estudiados en [36, 35, 34]. Yu [167, 166, 168] desarrolló un método para el balanceo de mecanismos basado en agregar diadas adicionales al mecanismo inicial.

Wawrzecki [158, 157] trabajó en relación a mecanismos espaciales en el movimiento de una aguja en máquinas de coser. El trabajo de Belonovskaya, Dimentberg, Maysuk [18] se presentan principios para la construcción de mecanismos espaciales auto-balanceados. Chiou y Tsai [37] trabajaron sobre el balanceo de mecanismos espaciales mediante la adición de tres

**Tabla 3-1.**: Algunos métodos para el balanceo mecánico de mecanismos.

Método	Referencias	Descripción
Sustitución de masas	[42, 107, 138, 140]	Se basa en sustituir estáticamente la masa del acoplador por las masas concentradas para lograr el equilibrio de los enlaces rotativos.
Balanceador Lanchester	[100]	Un método aún vigente utilizado en motores de cuatro tiempos.
Mecanismo duplicado	[12, 44, 48]	Adición de un mecanismo duplicado con simetría axial.
Mecanismo de levas	[82]	A través de levas y contrapesos es posible lograr el balanceo estático.
Mecanismo de pantógrafo	[73, 11, 7]	A través del desplazamiento de contrapesos y engranajes
Uso de contrapesos y contrainercias	[132, 23, 57, 23, 57]	Agregar masas concentradas que permitan lograr el equilibrio
Paralelogramo	[31]	Un paralelogramo transfiere el movimiento del mecanismo a un engrane de contra-inercia ubicado en la base

contrapesos rotatorios en planos perpendiculares. Zhang y Chen [172, 171] presentaron una teoría de vibraciones mecánicas para el balance del ShM, para lo cual consideraron el ‘frame’ como un sistema vibratorio de tres grados de libertad.

En años recientes, Kochev [86, 87, 91, 92, 88, 93, 94, 89, 97, 95, 98, 96, 90] desarrolló una teoría de balanceo, en su trabajo se generaliza la teoría de las elipses iso-moménticas, el método de los vectores independientes y los estudios relacionados con sistemas mecánicos de doble manivela de propiedades simétricas. Kochev desarrolló un método para el balanceo activo del ShM basado en fluctuaciones en la velocidad de entrada del mecanismo y desarrolló sistemas auto-balanceados basados en ensambles óptimos y posiciones angulares de sub-eslabonamientos.

En relación a las publicaciones que se han presentado, estas dividirse en dos grandes grupos, algunas de ellas se centran principalmente en el planteamiento de métodos mecánicos que permitan reducir o eliminar ya sea la ShF, el ShM o ambos; algunos otros proponen innovaciones en los métodos matemáticos para el análisis del balanceo de mecanismos. Las tablas **3-1** y **3-2** presentan un resumen de algunas de estas publicaciones de acuerdo a su tipo.

**Tabla 3-2.**: Propuestas para el análisis matemático del balanceo de mecanismos

Método	Referencias	Descripción
Vectores principales	[64, 70, 169, 99] [132, 131, 160, 152]	Permite el balanceo de las ShF al analizar cada eslabonamiento permitiendo conocer los puntos en donde se alcanza el balanceo estático.
Vectores linealmente independientes	[24, 137, 142, 137]	Se basa en la obtención de un sistema de ecuaciones linealmente independientes relacionadas con el centro de masa del mecanismo. Ahí se reducen a cero los coeficientes que tiene que ver con el tiempo.
Equilibrio de armónicos	[55, 66, 70, 127, 149] [150, 128]	Se basa en el análisis de ciertos armónicos de la ShF y el ShM.
Software para el balanceo de un mecanismo de cuatro barras	[137]	Balanceo estático que procura mantener al mínimo el incremento en el ShM.
Técnicas de minimización de reacciones	[108, 118, 123, 122, 51, 52] [74, 113, 110, 154]	Algoritmos de optimización basados en programación.
Método de Kochev	[86, 87, 91, 92, 88, 93, 94] [89, 97, 95, 98, 96, 90]	Se generaliza la teoría de las elipses iso-momenticas, el método de los vectores independientes y los estudios relacionados con sistemas mecánicos de doble manivela de propiedades simétricas.

# **4. Balanceo del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado mediante redistribución de masa por optimización**

## **4.1. Introducción**

Un mecanismo manivela-biela-corredera es aquel que se utiliza para transformar el movimiento circular en un movimiento rectilíneo, se trata de un sistema reversible, es decir que también puede convertir el movimiento lineal alternativo en un movimiento giratorio.

El ejemplo más común de este mecanismo se encuentra en las locomotoras de vapor (figura 4-1), o en los motores de combustión interna de un automóvil, en los cuales el movimiento lineal de un pistón (generado a través de la explosión de la gasolina) es transferido a una biela, convirtiéndose en movimiento rotatorio en el cigüeñal.

La optimización del balanceo dinámico de un mecanismo manivela-biela-corredera ha sido presentada con anterioridad en [58, 33, 32] utilizando algoritmos de DE, TLBO y GA respectivamente, empleando para el modelo del mecanismo coordenadas cartesianas.

En este capítulo se presenta en forma detallada el análisis llevado a cabo, utilizando coordenadas completamente cartesianas, para el de balanceo de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado a través de la redistribución de masa, añadiendo contrapesos cuyas dimensiones y localización se resuelven mediante optimización. La simplificación de mecanismo manivela-biela-corredera se llevó al cabo eliminando la corredera con el objetivo de contar con un mecanismo sencillo, formado únicamente por dos eslabones, permitiendo así introducir los detalles del método en forma más directa.

En forma general el método consiste en calcular la matriz de masas de los eslabones del mecanismo usando coordenadas naturales, considerando en cada eslabón un par de puntos. Entonces se ensambla la matriz de masas del mecanismo completo, la cual se emplea para poder calcular las reacciones dinámicas que el mecanismo transmite a la base (ShF y ShM).



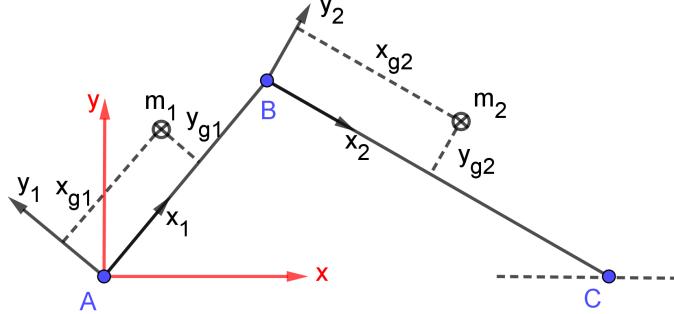
**Figura 4-1.:** Mecanismo manivela-bielas en locomotora. [39]

Las expresiones de la ShF y del ShM son obtenidas incluyendo en ellas los parámetros de los contrapesos que permitirán el balanceo. Entonces se plantea la función objetivo para la optimización, misma que se minimiza utilizando un algoritmo de DE. Los resultados de la optimización son analizados utilizando Frentes de Pareto permitiendo de esta forma identificar los más adecuados. El objetivo principal de este capítulo se centra en describir a detalle el procedimiento para la obtención de la matriz de masas  $M$  del mecanismo en su conjunto, así como en la obtención de las ecuaciones que definen tanto la ShF como el ShM de forma que estos puedan ser optimizados y llevados a su mínimo.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 4.2 presenta la obtención de la matriz de masas del mecanismo manivela-bielas-corredera simplificado y las ecuaciones correspondientes a la ShF y el ShM. La sección 4.3 define la función objetivo y los límites de la optimización. La sección 4.4 detalla el algoritmo empleado para llevar a cabo la optimización del balanceo. La sección 4.5 presenta la optimización numérica y los resultados obtenidos. En la sección 4.6 se encuentran las conclusiones.

## 4.2. Análisis Mecánico

La figura 4-2 muestra en forma general un mecanismo manivela (segmento  $\overline{AB}$ ), biela (segmento  $\overline{BC}$ ). El sistema de coordenadas  $(x,y)$  corresponde al sistema de referencia global del mecanismo, mientras que los sistemas  $(x_n, y_n)$  en donde  $1 \leq n \leq 2$  representan los sistemas de coordenadas locales para los  $n$  eslabones del mecanismo, cada uno de los cuales tiene una masa  $m_n$  y se considera que su centro de masa se encuentra ubicado en las coordenadas  $(x_{Gn}, y_{Gn})$  con respecto al sistema de referencia local.



**Figura 4-2.:** Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

El mecanismo manivela-biela-corredera simplificado corresponde a un sistema de un grado de libertad, que es controlado en este caso mediante un motor ubicado en el punto A.  $l_1$  y  $l_2$  representan la longitud de cada una de las barras.

Se busca llevar a cabo la redistribución de la masa, minimizando las reacciones dinámicas que el mecanismo transmite a la base, calculando las dimensiones y la localización del centro de masas de contrapesos (por la simplicidad de implementación que ello supone). El mecanismo con dos contrapesos añadidos ( $c_1$  y  $c_2$ ) puede observarse en la figura 4-3. Los contrapesos pueden tener la forma que se desee, sin embargo, por simplicidad en cuanto a las ecuaciones se considerarán como discos. Cada uno de estos contrapesos tiene su centro de masa  $m_{cn}$  ubicado en las coordenadas  $(x_{cn}, y_{cn})$  de su correspondiente sistema de coordenadas locales. Los contrapesos están dispuestos de forma tal que uno de sus extremos queda exactamente unido con el punto del origen del sistema de coordenadas locales, de ahí que su radio se encontrará definido por la ubicación del centro de masas (ecuación 4-1).

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (4-1)$$

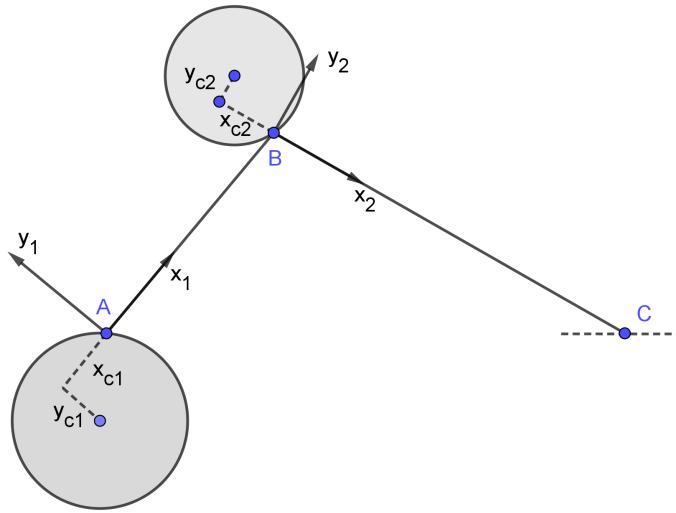
Conociendo la densidad de cada contrapeso  $\rho_n$  es posible calcular su masa (ecuación 4-2) en función de su espesor ( $t_{cn}$ ) y la ubicación de su centro de masas  $(x_{cn}, y_{cn})$  en relación al sistema de coordenadas locales.

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} = \pi\rho_{cn}t_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \quad (4-2)$$

Es así como la masa total de cada uno de los elementos del mecanismo (ecuación 4-3) quedará definida por la masa de la barra original ( $m_{bn}$  para  $n = 1, 2$ ) en conjunto con la masa del contrapeso que se encuentra unido a esa barra ( $m_{cn}$ ).

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \quad (4-3)$$

También es posible definir la inercia total de cada elemento  $I_n$  (ecuación 4-5) que se obtiene al sumar la inercia de la barra original  $I_{bn}$  con la inercia del contrapeso correspondiente  $I_{cn}$ ,



**Figura 4-3.:** Mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado con contrapesos para balanceo.

esta última puede ser calculada como se muestra en la ecuación 4-4.

$$I_{cn} = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} \quad (4-4)$$

$$I_n = I_{cn} + I_{bn} = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (4-5)$$

Se define también la nueva posición  $(x_{Gn}, y_{Gn})$  para el CoM de cada elemento  $n$  considerado como la unión de la barra con su contrapeso correspondiente (ecuaciones 4-6 y 4-7).

$$x_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4-6)$$

$$y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4-7)$$

Donde  $x_{cn}, y_{cn}$  son las posiciones de los CoM de cada contrapeso, y  $x_{bn}, y_{bn}$  son las posiciones de los CoM para cada barra original, ambos medidos desde sus orígenes locales. Para poder optimizar el balanceo dinámico del mecanismo en cuestión se requiere conocer las ecuaciones que definen la ShF y el ShM del mecanismo en general, de ahí la necesidad de conocer primero la matriz de masas del mecanismo completo.

#### 4.2.1. Matriz de masas de un mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado utilizando FCC

Para poder obtener la matriz de masas  $\mathbf{M}$  del mecanismo completo, es necesario primero conocer las matrices de masas correspondientes a cada uno de sus eslabones  $\mathbf{M}_n$ , éstas pueden

ser calculadas mediante los puntos básicos  $i$  y  $j$  de acuerdo a la teoría presentada en [80] que se resume también en la introducción general del presente trabajo.

Considere entonces el primer eslabón correspondiente a la manivela, como aquel comprendido entre los puntos A y B, siendo A el punto  $i$  y B el punto  $j$ , con un sistema de coordenadas locales ubicado en el punto A, cuyo eje x se dirige hacia el punto B. De esta forma la matriz de masas  $\mathbf{M}_1$  queda definida tal como se muestra en la ecuación 4-8

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & -c_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ -c_1 & b_1 & 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

Donde:

$$a_1 = m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) - \frac{1}{l_{b1} (m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} (2.0m_{b1} + 2.0\pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) (m_{b1}x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) + \frac{1}{l_{b1}^2} (I_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5\pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2) \quad (4-9)$$

$$b_1 = \frac{1}{l_{b1}} (m_{b1}x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) - \frac{1}{l_{b1}^2} (I_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5\pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2) \quad (4-10)$$

$$c_1 = \frac{1}{l_{b1} (m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} (-m_{b1} - \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) (m_{b1}y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)) \quad (4-11)$$

$$d_1 = \frac{1}{l_{b1}^2} (I_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + 0.5\pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2) \quad (4-12)$$

De forma similar es posible generar la matriz de masas  $\mathbf{M}_2$  (ecuación 4-13) de la biela, que corresponde en este caso al eslabón comprendido entre los puntos B y C, siendo B el punto

*i* y C el punto *j*, con un sistema de coordenadas locales ubicado en el punto B, cuyo eje x se dirige hacia el punto C.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_2 = & m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) - \frac{1}{l_{b2} (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \\ & (2.0m_{b2} + 2.0\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) (m_{b2}x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) + \frac{1}{l_{b2}^2} \\ & \left( I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} b_2 = & \frac{1}{l_{b2}} (m_{b2}x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) \\ & - \frac{1}{l_{b2}^2} \left( I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$\begin{aligned} c_2 = & \frac{1}{l_{b2} (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} (-m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) \\ & (m_{b2}y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)) \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$d_2 = \frac{1}{l_{b2}^2} \left( I_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + 0.5\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \quad (4-17)$$

Vale la pena destacar que en las matrices desarrolladas (ecuaciones 4-8 y 4-13), las dos primeras columnas pueden relacionarse con las coordenadas *x* y *y* del punto correspondiente a *i*, mientras que las dos últimas pueden relacionarse con las coordenadas *x* y *y* del punto correspondiente a *j*, la misma relación puede establecerse en los renglones, estando los dos primeros relacionados con las coordenadas *x* y *y* del punto *i* y los dos últimos relacionados con las coordenadas *x* y *y* del punto *j*.

Se sabe que los puntos básicos se comparten entre los eslabones, de modo que la matriz de masas **M** correspondiente al mecanismo completo tendrá una dimensión de  $6 \times 6$  (dado que el

mecanismo está definido por tres puntos básicos, cada uno de ellos con dos coordenadas una  $x$  y una  $y$ ). Las columnas 0 y 1 se relacionan con el punto A, las columnas 2 y 3 se relacionan con el punto B y, por último, las columnas 4 y 5 se relacionan con el punto C. De esta forma los renglones pueden relacionarse exactamente en el mismo orden de las columnas. Las matrices de masas de cada elemento se usan para ensamblar la matriz de masas del mecanismo, obteniendo la expresión que se muestra en la ecuación 4-18.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & a_2 + d_1 & 0 & b_2 & c_2 \\ -c_1 & b_1 & 0 & a_2 + d_1 & -c_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & a_3 + d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & b_2 & 0 & a_3 + d_2 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

#### 4.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Ahora bien, para definir las características cinemáticas del mecanismo se establecen los vectores de posiciones  $\mathbf{q}$  (ecuación 4-19), velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  (ecuación 4-20) y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  (ecuación 4-21) para cada uno de los puntos básicos utilizados en las matriz de masas (ecuación 4-18).

$$\mathbf{q} = [A_X \ A_Y \ B_X \ B_Y \ C_X \ C_Y]^T \quad (4-19)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y]^T \quad (4-20)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [AA_X \ AA_Y \ AB_X \ AB_Y \ AC_X \ AC_Y]^T \quad (4-21)$$

Ahora es posible calcular el momento lineal  $\mathbf{L}$  (ecuación 4-22) asociado a todo el sistema.

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4-22)$$

Donde  $\mathbf{B}$  (ecuación 4-23) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos del mecanismo, en este caso se tienen tres puntos básicos, por lo tanto la matriz  $\mathbf{B}$  tendrá una dimensión de 2x6.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4-23)$$

Es posible entonces resolver la ecuación 4-22, vale la pena destacar que las velocidades relacionadas con A serán siempre cero por ser éste un punto fijo ( $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ), por otra parte, la velocidad en  $y$  del punto C serán también cero puesto que no existe movimiento en esta dirección ( $VC_X = 0$ ), se obtienen así las expresiones correspondientes al momento lineal  $\mathbf{L}_i$  (ecuación 4-24) y  $\mathbf{L}_j$  (ecuación 4-25).

$$\begin{aligned}
L_i = & VB_X \left( \frac{1}{l_1} \left( m_{b1}x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) - \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) \\
& + VB_X \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2}x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \\
& + VB_X \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. \left( m_{b2}x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) \\
& + \frac{VB_Y}{l_2} \left( m_{b2}y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& + \frac{VB_Y}{l_1 (m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} \left( -m_{b1} - \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \\
& \left( m_{b1}y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \\
& + VC_X \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2}x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \\
& + \frac{VC_X}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4-24}$$

$$\begin{aligned}
 L_j = & \frac{VB_X}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( -m_{b2} - \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left( m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) + \frac{VB_X}{l_1} \left( m_{b1}y_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \\
 & + VB_Y \left( \frac{1}{l_1} \left( m_{b1}x_{b1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) + VB_Y \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \\
 & - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
 & + VB_Y \left( m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & - \frac{1}{l_2(m_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( 2.0m_{b2} + 2\pi\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left( m_{b2}x_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}^2(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c2}t_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
 & + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}^2(x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2}\rho_{c1}t_{c1}(x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \\
 & + \frac{VC_X}{l_2} \left( m_{b2}y_{b2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

Una vez que se conocen las expresiones del momento lineal, la ShF (ecuaciones 4-26 y 4-27)

del mecanismo puede calcularse derivando las ecuaciones 4-24 y 4-25 con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}
 ShF_i = & AB_X \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & - \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( 2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left. \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \\
 & + \frac{1}{l_1} \left( m_{b1} x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \Big) + AB_Y \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & + \frac{1}{l_1 (m_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2))} \left( -m_{b1} - \pi \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \\
 & \left. \left( m_{b1} y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \right) \\
 & + \frac{AC_X}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4-26}$$

$$\begin{aligned}
 ShF_j = & AB_X \left( \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( -m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) + \frac{1}{l_1} \left( m_{b1} y_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \Big) \\
 & + AB_Y \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & - \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( 2.0 m_{b2} + 2 \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & \left. \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) + \frac{1}{l_1} \left( m_{b1} x_{b1} + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right) \right) \\
 & + \frac{AC_X}{l_2} \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

### 4.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento

Cuando se emplean FCC, el momento angular  $H$  correspondiente al mecanismo completo, puede encontrarse utilizando la ecuación 4-28. Vale la pena destacar que el resultado de esta operación será siempre un valor escalar, puesto que al tratarse de un mecanismo en 2D el

resultado estará siempre dirigido a lo largo del eje z.

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (4-28)$$

Donde  $\mathbf{r}$  está dado en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema y puede ser expresada como se muestra en la ecuación 4-29.

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X]^T \quad (4-29)$$

Es posible entonces resolver la ecuación 4-28, considerando nuevamente  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$  y  $VC_Y = 0$ . De esta forma la expresión de  $H$  queda expresada como se muestra en la ecuación 4-30.

$$\begin{aligned}
H = & VB_X \left( -B_Y \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \right. \\
& \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
& + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) + \frac{C_X}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \\
& \left( -m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& + VB_Y \left( B_X \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \right. \\
& \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) + C_X \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \\
& + VC_X \left( \frac{B_X}{l_2} \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \left. - BY \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

(4-30)

El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de  $H$  con respecto al tiempo (ecuación 4-31).

$$\begin{aligned} ShM &= \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \\ ShM &= \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4-31)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \quad VA_X \quad -VB_Y \quad VB_X \quad -VC_Y \quad VC_X]^T \quad (4-32)$$

Al resolver la ecuación (4-31) y considerar  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$  y  $VC_Y = 0$ , se obtiene el

ShM del mecanismo completo.

$$\begin{aligned}
 ShM = & B_X \left( AB_Y \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \right. \\
 & \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \left) + \frac{AC_X}{l_2} \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \\
 & - B_Y \left( AB_X \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
 & \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
 & + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
 & \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \left) + AC_X \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \right. \\
 & \left. + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \left) \right) \\
 & + C_X \left( \frac{AB_X}{l_2 \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right)} \right. \\
 & \left( -m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
 & + AB_Y \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \\
& + VB_X \left( VB_Y \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) - \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \right. \\
& \quad \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \\
& \quad + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \left. + \frac{VC_X}{l_2} \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \\
& - VB_Y \left( VB_X \left( m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \left( 2.0m_{b2} + 2\pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{l_1^2} \left( Iz1b + \pi \rho_{c1} t_{c1} x_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \pi \rho_{c1} t_{c1} y_{c1}^2 (x_{c1}^2 + y_{c1}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c1} t_{c1} (x_{c1}^2 + y_{c1}^2)^2 \right) \right) \\
& + VC_X \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) + VC_X \left( \frac{VB_X}{l_2 (m_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2))} \right. \\
& \quad \left. \left( -m_{b2} - \pi \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \left( m_{b2} y_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + VB_Y \left( \frac{1}{l_2} \left( m_{b2} x_{b2} + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{l_2^2} \left( Iz2b + \pi \rho_{c2} t_{c2} x_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2}^2 (x_{c2}^2 + y_{c2}^2) + \frac{\pi}{2} \rho_{c2} t_{c2} (x_{c2}^2 + y_{c2}^2)^2 \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4-33}$$

Obsérvese que tanto las ecuaciones correspondientes a la ShF como la correspondiente al ShM definen al mecanismo para un instante de tiempo determinado, sin embargo, para llevar a

cabo el análisis del mecanismo es necesario conocer estos valores a lo largo de un ciclo completo de trabajo  $T$ . Estos valores pueden obtenerse a través del cálculo de la cinemática directa del mecanismo, en este ejemplo ello se logra empleando Solidworks, y sustituyendo los valores en las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33.

### 4.3. Función objetivo y límites de optimización

Para llevar a cabo el balanceo dinámico del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado es necesario considerar un problema de optimización multiobjetivo, ya que se desea minimizar tanto la ShF como el ShM, es por ello que se emplean dos índices a-dimensionales  $\beta$  que permiten la combinación lineal de los valores a optimizar, dichos índices se calculan mediante el valor RMS a lo largo de un periodo de tiempo  $T$  de la reacción del mecanismo optimizado ( $rms(^oReaccion)$ ) con respecto al valor RMS del mecanismo sin optimizar ( $rms(Reaccion)$ ), tal como se puede apreciar en la ecuación 4-34.

$$\beta_{Reaccion} = \frac{rms(^oReaccion)}{rms(Reaccion)} \quad (4-34)$$

Dado que en el intervalo de tiempo  $T$  se tienen  $N$  muestras de los vectores 4-19, 4-20 y 4-21, entonces los valores RMS de las reacciones pueden ser calculados tal como se muestra de la ecuación 4-35 a la 4-38, en donde  $rms(ShF)$  y  $rms(ShM)$  representan las reacciones de las ShF y los ShM respectivamente del mecanismo sin optimizar. Por otra parte  $rms(^oShF)$  y  $rms(^oShM)$  representan las reacciones de las ShF y los ShM respectivamente del mecanismo con el balanceo optimizado (es decir empleando contrapesos). Los valores correspondientes a  $ShF_{ik}$ ,  $ShF_{jk}$  y  $ShM_k$  son calculados mediante las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33 respectivamente, considerando todas las variables relacionadas con los contrapesos como cero, de forma que los resultados que se obtendrán en cada caso corresponderán simplemente a una escalar; mientras que  $^oShF_{ik}$ ,  $^oShF_{jk}$  y  $^oShM_k$  son calculados mediante las ecuaciones 4-26, 4-27 y 4-33 respectivamente obteniendo para cada solución una ecuación en la que permanecerán las variables relacionadas con los contrapesos que se introdujeron en el sistema original.

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (4-35)$$

$$rms(^oShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)} \quad (4-36)$$

$$rms(ShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ShM_k^2} \quad (4-37)$$

$$rms(^oShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ^oShM_k^2} \quad (4-38)$$

De esta forma, el índice de balanceo relacionado con la ShF queda tal como se expresa en la ecuación 4-39, mientras que el índice de balanceo relacionado con la ShM se expresa de acuerdo a la ecuación 4-40.

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (4-39)$$

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ^oShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}} \quad (4-40)$$

Ambos índices de balanceo quedan expresados como ecuaciones no lineales y el problema de optimización consiste en minimizarlos, de forma que para lograrlo se implementa una combinación lineal de objetivos tal como puede apreciarse en la ecuación 4-41. Ahí  $\mathbf{X} = [x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}]$  corresponde al vector que contiene las variables a ser optimizadas, y  $\gamma$  es un valor escalar que da importancia a cada uno de los objetivos de la optimización.

Se desea entonces realizar un proceso de optimización que permita llevar a sus valores mínimos tanto el al índice  $\beta_{ShF}$  como al índice  $\beta_{ShM}$ , es decir que se trata de un problema multiobjetivo. Para resolverlo, es posible realizar una combinación lineal de objetivos, de acuerdo a la ecuación 4-41.

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (4-41)$$

En donde los valores de  $\gamma$  se generan como valores aleatorios con distribución uniforme en el rango (0,1) según lo recomendado para la búsqueda aleatoria de hiper parámetros presentada en [21].

Para llevar a cabo la optimización es necesario fijar límites a las variables a optimizar, definiéndolos de acuerdo a las expresiones 4-42 para n=1,2.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leqslant x_{cn} \leqslant x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leqslant y_{cn} \leqslant y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leqslant t_{cn} \leqslant t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (4-42)$$

## 4.4. Algoritmo de optimización

Para la optimización de este problema se eligió el algoritmo de Evolución Diferencial, el cual se explicó a detalle en el capítulo de Fundamentos. La elección de este método se basó en el hecho de que este algoritmo es uno de los más empleados para la optimización de mecanismos [58, 135, 5, 114, 134] presentando buenos resultados, además se encuentra ya programado en la librería Scipy de Python [125], permitiendo así su implementación de una forma simple.

Los parámetros que se utilizaron en el algoritmo de Python para llevar a cabo la optimización son los propuestos por default dentro de la librería, es decir con una población inicial de  $N=15$  individuos, tolerancia de 0.01, mutación ( $F$ ) en el rango de  $[0.5,1]$ , recombinación ( $CR$ ) de 0.7 y número máximo de generaciones  $G=1000$ .

## 4.5. Ejemplo numérico

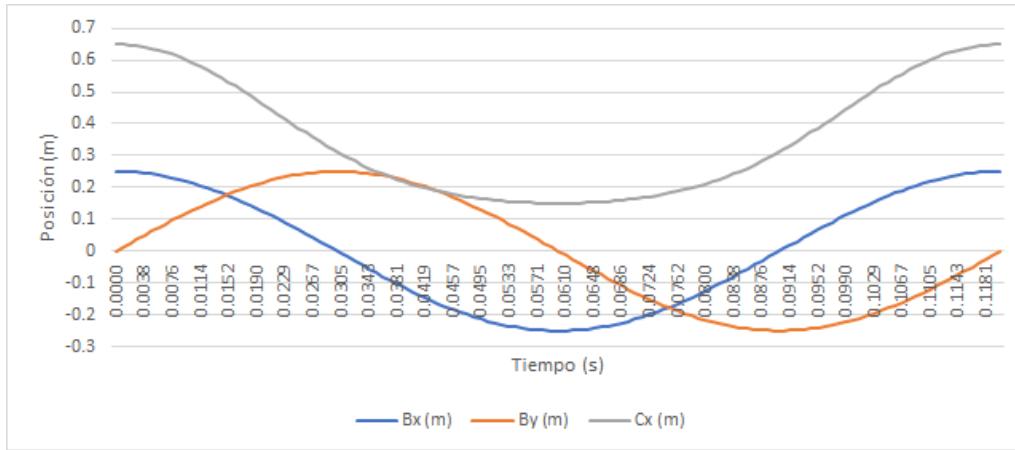
En esta sección se lleva a cabo el análisis numérico para la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado, analizando los resultados y comparándolos con los que se obtenían antes de llevar a cabo la optimización.

### 4.5.1. Características mecánicas y límites de optimización

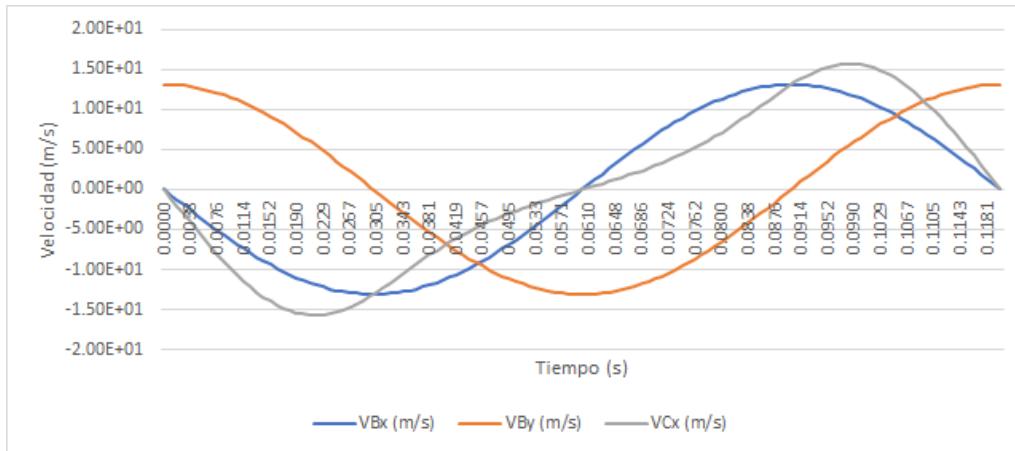
En la tabla 4-1 se presentan los parámetros correspondientes al mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado que se muestra en la figura 4-2. Todos los eslabones son de acero aleado fundido con una densidad de  $7300 \text{ kg/m}^3$ , por su parte los contrapesos son de latón con una densidad de  $8500 \text{ kg/m}^3$ .

El mecanismo se mueve mediante un motor ubicado en el punto A, girando a una velocidad angular constante  $\omega$  de  $500 \text{ rpm}$ . Utilizando cinemática directa es posible obtener  $N$  muestras correspondientes a las posiciones (ecuación 4-19), velocidades (ecuación 4-20) y aceleraciones (ecuación 4-21) que corresponden a cada uno de los puntos básicos del mecanismo. Estos valores pueden apreciarse en la figura 4-4.

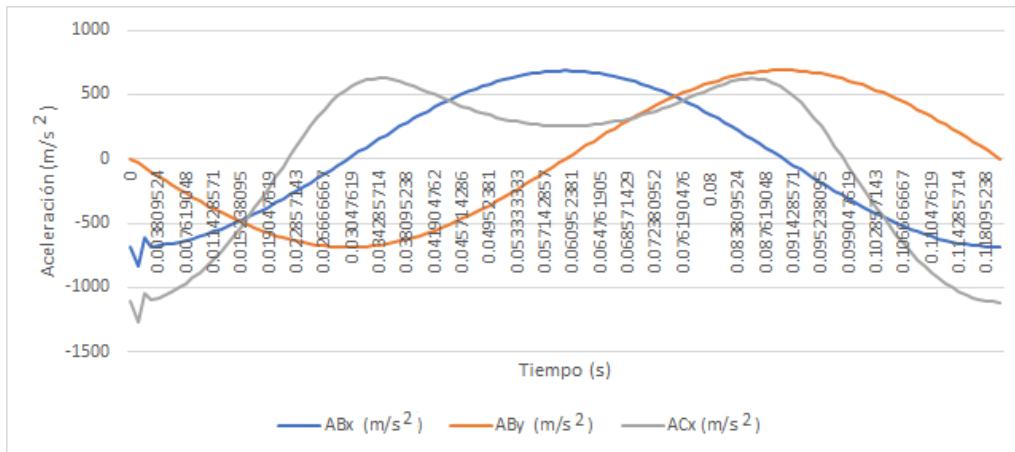
Debido a que el punto A permanece siempre estático ( $Ax = 0$ ,  $Ay = 0$ ) y el punto C solamente presentan movimiento en el eje  $x$  ( $Cy = 0$ ), únicamente se grafican las posiciones correspondientes a  $Bx$ ,  $By$  y  $Cx$  tal como puede apreciarse en la figura 4-4(a). Lo mismo ocurre con las figuras 4-4(b) y 4-4(c) donde sólo se muestran respectivamente las velocidades y las aceleraciones de los puntos B (en  $x$  y  $y$ ) y C (en el eje  $x$ ).



(a) Posiciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado.



(b) Velocidades de los puntos básicos del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado.



(c) Aceleraciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado.

**Figura 4-4.: Cinemática directa del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado.**

Cuerpo <i>n</i>	1	2
<b>Masa</b> $m_{b_n}$ [kg]	1.64346901	2.51946901
<b>Longitud</b> $l_n$ [m]	0.250	0.400
<b>Inercia</b> $I_{b_n}$ [kg · m <sup>2</sup> ]	0.03677077	0.14023528
<b>Centro de masa</b> $x_{b_n}$ [m]	0.125	0.200
<b>Centro de masa</b> $y_{b_n}$ [m]	0.000	0.000

**Tabla 4-1.:** Parámetros de cada eslabón de un mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado

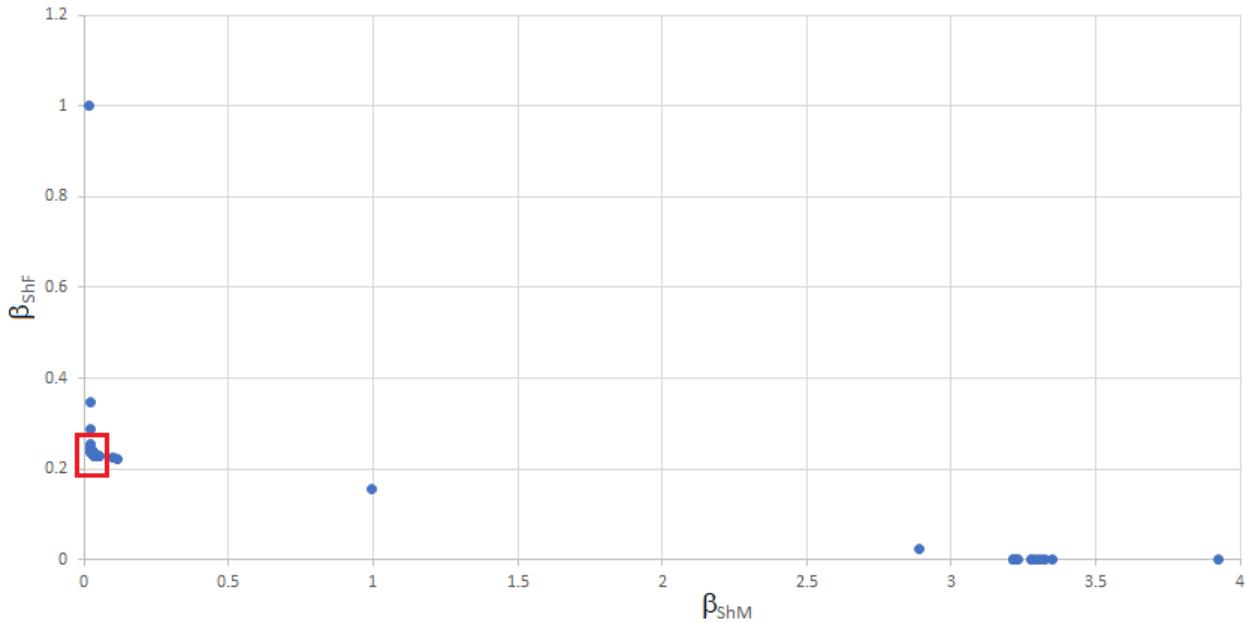
Para el ejemplo numérico propuesto y tomando en cuenta las características del mecanismo, los límites considerados para la optimización son:

$$\begin{aligned} -0.15m &\leq x_{cn} \leq 0.15m \\ -0.15m &\leq y_{cn} \leq 0.15m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m \end{aligned} \tag{4-43}$$

### 4.5.2. Optimización

Para la solución numérica se utilizó el algoritmo de optimización DE el cual se ejecutó hasta obtener 200 soluciones válidas (es decir aquellas cuyo resultado de la optimización de la función objetivo entregan valores en el rango de (0,1)).

La figura 4-5 muestra la relación entre los valores  $\beta_{ShF}$  y  $\beta_{ShM}$  de todas las soluciones encontradas a través de la optimización. De acuerdo a estos resultados, es posible eliminar prácticamente en su totalidad la reacción correspondiente a la ShF sin embargo esto provocaría un incremento importante en el ShM del mecanismo resultante; en forma similar existe



**Figura 4-5.**: Objetivos optimizados  $\beta_{ShM}$  y  $\beta_{ShF}$  para el mecanismo manivela-bielacorredera simplificado.

la posibilidad de eliminar en su totalidad el ShM del mecanismo, aunque ello implicaría que la ShF se mantuviera sin mejora alguna.

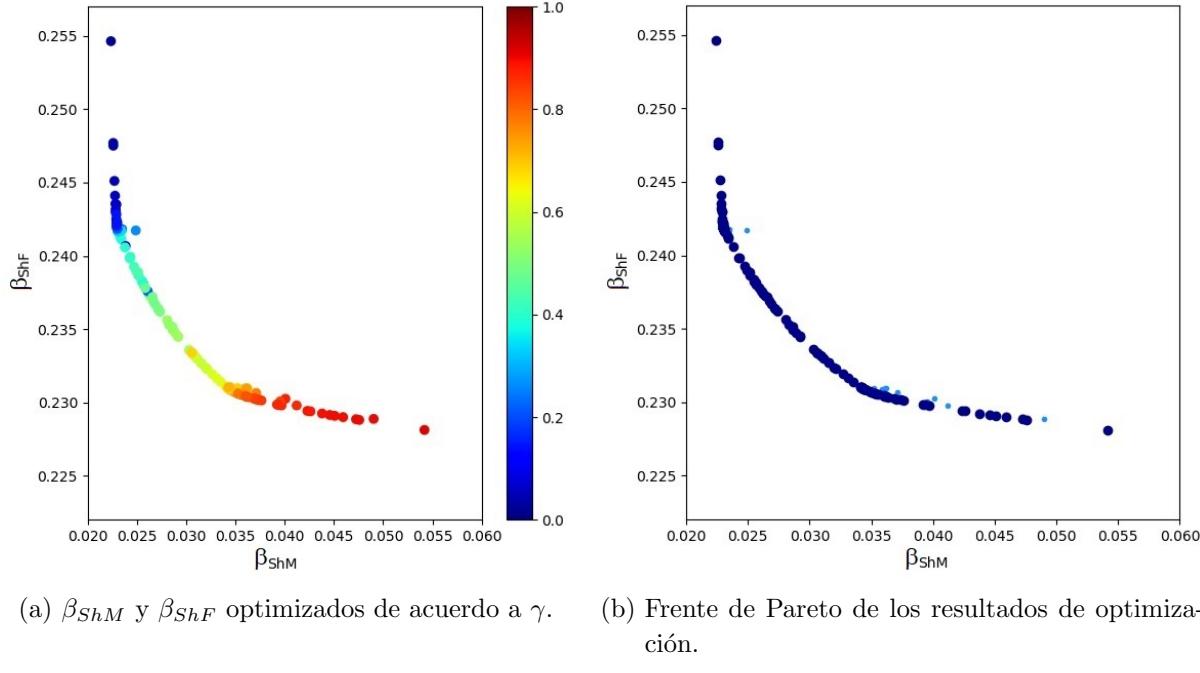
Para este trabajo se optó por enfocar aquellas soluciones en las que es posible obtener mejoras simultáneas tanto en la ShF como en el ShM, considerando la sección de la figura 4-5 que se muestra dentro del rectángulo rojo y que es posible apreciar a detalle en la figura 4-6.

La figura 4-6(a) los diferentes colores son utilizados para representar el valor utilizado para  $\gamma$  en la función objetivo  $F(X)$  (ecuación 4-41).

Por su parte, en la figura 4-6(b) los puntos azul oscuro representan el PF mientras que los azul claro representan las soluciones dominadas. Cuando se lleva a cabo una optimización multiobjetivo, si dos objetivos están en conflicto, el PF es una herramienta útil para analizar los resultados. Una solución  $X_a$  se considera dominada por otra  $X_b$  si sus dos valores son peores que los de la solución  $X_a$ . El PF está conformado por las soluciones dominantes.

### 4.5.3. Análisis de los resultados numéricos

Al analizar el PF, es posible seleccionar las soluciones que resulten más apropiadas de acuerdo con el objetivo al que se quiere dar mayor importancia dentro de la optimización. De esta forma, si el interés principal consiste en minimizar la ShF entonces lo ideal es seleccionar el



**Figura 4-6.:** Análisis del PF de objetivos optimizados de  $\beta_{ShM}$  y  $\beta_{ShF}$  para el mecanismo manivela-bielo-corredera simplificado.

punto del PF que se encuentre más cercano al ShF igual a cero, por el contrario si lo que se busca es lograr es minimizar el ShM entonces lo ideal es elegir el punto del PF que se encuentre más cercano al ShM igual a cero. Por otra parte, si se busca una solución en la que ambos objetivos (la ShF y el ShM) se reduzcan a sus mínimos posibles es posible elegir como solución un punto del PF que se encuentre cercano al cero tanto en el eje correspondiente a ShF como en el eje correspondiente al ShM (conociendo, al elegirlo, los valores de ShF y ShM que se lograrían).

Para ilustrar en forma numérica estas situaciones, se tomarán dos soluciones del PF:

1. La primera solución elegida corresponde al punto con el mejor resultado para la minimización de la ShF ( $\beta_{ShF} = 0.22813353$ ,  $\beta_{ShM} = 0.054189473$ ), éstos resultados se obtienen cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.109393564 & y_{c1} &= -0.0000263 & t_{c1} &= 0.04 \\ x_{c2} &= -0.050293307 & y_{c3} &= -0.00036442 & t_{c2} &= 0.04 \end{aligned}$$

En la figura 4-8(a) se muestra la comparación de la ShF (considerando tanto su componente en el eje x como su componente en el eje y) del mecanismo original con respecto al del mecanismo ya balanceado. Para esta solución la ShF presenta una mejora del 77.19 %. Por su parte en la figura 4-8(b) se muestra la comparación entre el ShM del

mecanismo original y la ShM del mecanismo optimizado, en este caso la mejora en el ShM es de un 94.58 %.

2. La segunda solución elegida es el punto con el mejor resultado para la minimización del ShM ( $\beta_{ShF} = 0.254639632$ ,  $\beta_{ShM} = 0.022358008$ ), éstos resultados se obtienen cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.09647414 & y_{c1} &= -0.0000242 & t_{c1} &= 0.04 \\x_{c2} &= -0.094846552 & y_{c3} &= -0.000570554 & t_{c2} &= 0.005\end{aligned}$$

La figura 4-7 muestra la implementación de esta solución en el mecanismo simulado a través de Solidworks.

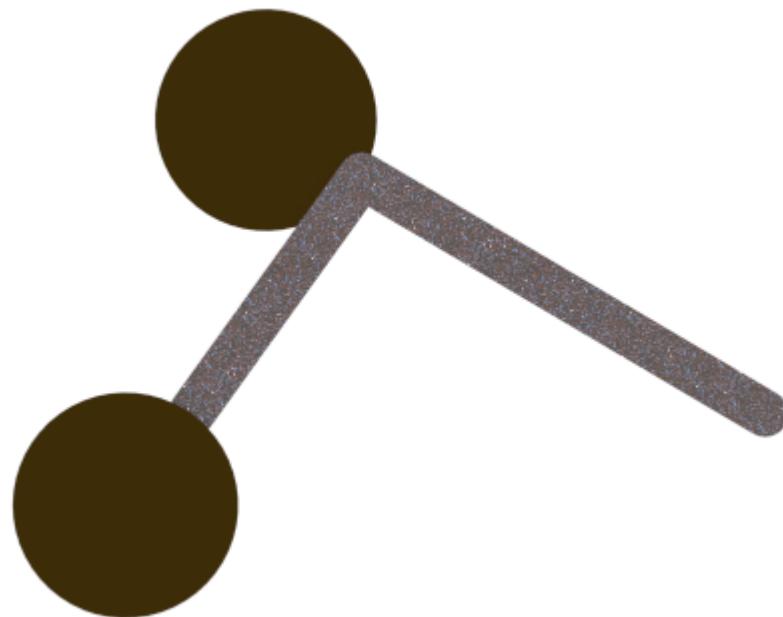
En la figura 4-8(c) se muestra la comparación del ShF tanto en su componente en x como en su componente en y del mecanismo original (ShF) con respecto a los valores correspondientes del mecanismo balanceado mediante los contrapesos (ShF opt). Al utilizar los contrapesos se obtiene una mejora en la ShF del 74.53 %. A su vez, la figura 4-8(d) muestra la comparación entre el ShM del mecanismo original (ShM) con respecto a los valores correspondientes del mecanismo balanceado mediante los contrapesos (ShM opt). De esta forma se obtiene una mejora del ShM del 97.76 %

## 4.6. Conclusiones

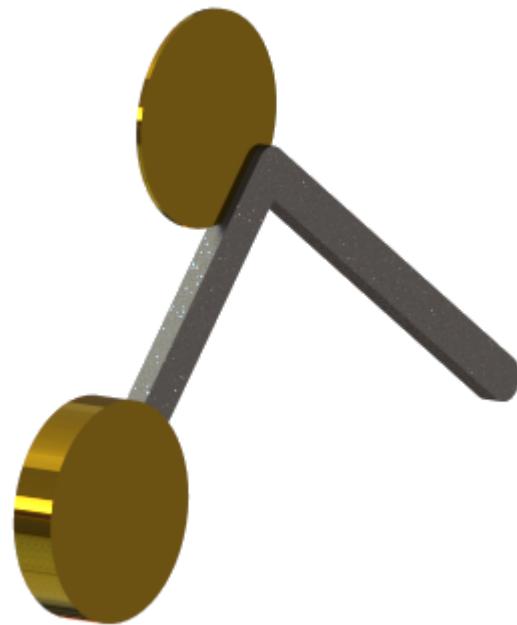
A lo largo de este capítulo se presentaron en forma detallada los pasos necesarios para obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado, y que ilustra a través de un ejemplo simple el procedimiento necesario para obtener esas ecuaciones en cualquier tipo de mecanismo.

Se demostró también que el uso de FCC en conjunto con el algoritmo DE resulta una metodología adecuada para la optimización del balanceo de este tipo de mecanismos, al lograr en este caso una reducción de hasta el 97.56 % del ShM o una reducción de hasta el 94.58 % del ShF (reduciendo en ambos casos también las otras reacciones).

En la tabla 4-2 se muestra una comparación del el porcentaje de mejora obtenido para el balanceo de la ShF y el ShM entre los resultados obtenidos en este capítulo y los resultados de la optimización de un mecanismo similar de otras publicaciones presentadas con anterioridad. Puede observarse que los resultados de la optimización obtenidos al utilizar FCC para definir la matriz de masas del mecanismo y obtener así las expresiones que representan las reacciones en la base, en conjunto con el algoritmo de DE resultan ser un método adecuado que permite la obtención de muy buenos resultados de optimización del balanceo.

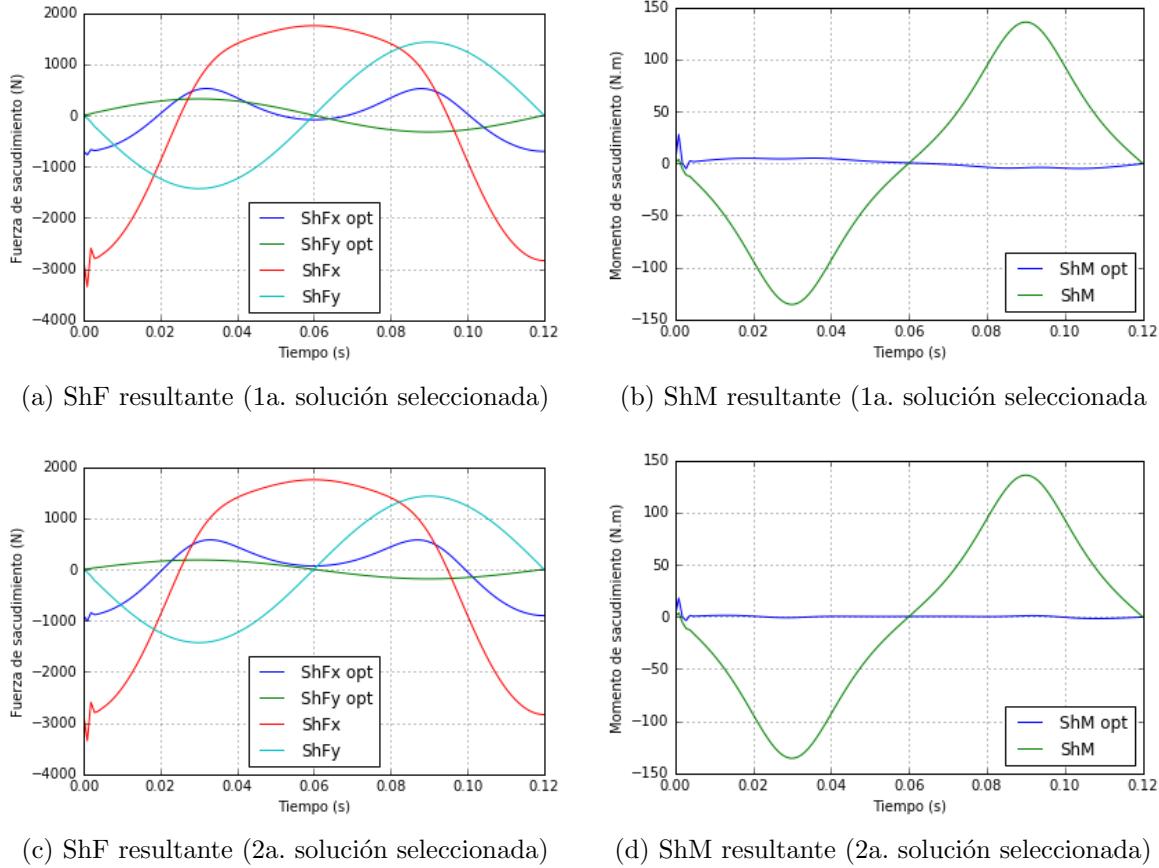


(a) Vista 2D.



(b) Vista 3D.

**Figura 4-7.:** Implementación de la segunda solución seleccionada en el PF para el mecanismo manivela-bielas-corredera simplificado.



**Figura 4-8.:** Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo manivela-biel-a-corredera simplificado.

	Algoritmo de Optimización	% de mejora en el balanceo de la ShF	% de mejora en el balanceo del ShM
[58]	Evolución Diferencial	61.42 %	65.96 %
[33]	Algoritmo basado en enseñanza-aprendizaje	48 %	44 %
[32]	Algoritmo Genético	46 %	99 %
En este capítulo	Evolución Diferencial	77.19 %	94.58 %
En este capítulo	Evolución Diferencial	74.53 %	97.76 %

**Tabla 4-2.:** Comparación de resultados de optimización del mecanismo manivela-biel-corredera

# **5. Optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras utilizando decenso de gradiente simplificado**

## **5.1. Introducción**

El balanceo dinámico puede llevarse a cabo en dos etapas. La primera tiene como objetivo encontrar las expresiones que definen las condiciones de balanceo, usualmente estas se obtienen mediante métodos que involucran el uso de coordenadas Cartesianas, implicando por lo tanto el uso de funciones trigonométricas que generan ecuaciones complejas. En contra parte, el uso de FCC permite expresar las condiciones de balanceo en una forma más simple al evitar el uso de variables angulares [78, 77, 80]. En la segunda etapa, el balanceo dinámico se logra mediante diferentes métodos mecánicos, todos ellos implican la adición de masa al mecanismo de una u otra forma, sin embargo debe considerarse también que este incremento de masa no puede realizarse en forma desmedida. El uso de técnicas de optimización hace posible minimizar las reacciones en la base del mecanismo al mismo tiempo que se mantiene bajo control el incremento de masa. En este capítulo se lleva a cabo una optimización para el balanceo dinámico de un mecanismo por redistribución de masas mediante la adición únicamente de contrapesos [112, 104, 114].

Anteriormente, cuando el acceso a recursos computacionales era limitado, la optimización del balanceo de mecanismos se llevaba a cabo mediante métodos analíticos o semi-analíticos [72, 54, 159, 141, 10, 103, 22]. En la actualidad los avances tecnológicos hacen posible la implementación de técnicas avanzadas de optimización numérica, que son consideradas más complejas de resolver debido a su naturaleza no lineal. Las técnicas más comunes se basan en métodos metaheurísticos tal como puede apreciarse en [59, 170, 27, 56] en donde se emplean algoritmos evolutivos, algoritmos Firefly, evolución diferencial y algoritmos genéticos, respectivamente. También se pueden encontrar referencias en donde se transforma la función objetivo para hacerla convexa , sin embargo esto implica un mayor procesamiento matemático [46].

Para llevar a cabo la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras de acuerdo a la propuesta presentada en este capítulo, en primer lugar se obtiene la matriz de masas de cada uno de los eslabones que componen al mecanismo utilizando FCC, una vez que estos se conocen se ensambla la matriz de masas del mecanismo de cuatro barras y a través de esta matriz se obtienen las expresiones para las reacciones ShF y ShM. El objetivo de la optimización es precisamente la minimización de estas reacciones.

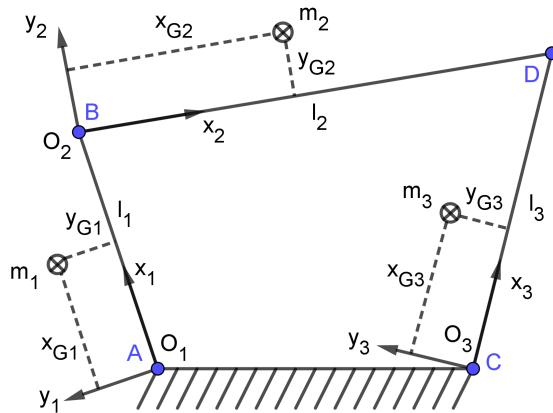
Al igual que en el capítulo anterior, el problema de optimización es multi-objetivo con restricciones de límites (también conocidas como restricciones de caja). La función objetivo se obtiene mediante la combinación lineal de índices adimensionales de balanceo  $\beta(ShF)$  y  $\beta(ShM)$ . Se continúa entonces con la optimización, el algoritmo propuesto en este capítulo consiste en una versión simplificada del Descenso de Gradiente Proyectado (PGD) [111], se trata de un método determinista, iterativo, basado en la dirección del vector gradiente.

Una vez que se conocen los resultados de la optimización éstos se analizan utilizando PF de forma que es posible conocer el más adecuado dependiendo de la reacción (ya sea ShF o ShM) a al que se desee dar mayor importancia. Se presenta también un método de análisis de las restricciones (límites) de la optimización basado en la evaluación de las derivadas del vector gradiente, graficadas mediante diagramas de cajas, este análisis permite conocer los límites que, en caso de ser modificados pudieran tener más impacto en la optimización.

Por último se realiza un análisis de sensibilidad simple a través de los PF que permite identificar cuáles contrapesos tienen mayor aporte para el balanceo del mecanismo permitiendo de esta forma la reducción de contrapesos.

El ejercicio de optimización, análisis de límites y reducción de contrapesos se lleva a cabo para tres, dos y un contrapesos. Por último se presenta un ejemplo de expansión de los límites de optimización, basado en los resultados obtenidos a través del análisis de límites propuesto a través del método de diagramas de caja.

La información que se presenta en este capítulo ha sido publicada en el artículo [115] en donde se presenta una extensión del trabajo previo presentado en [114]. Entre los principales aportes, este capítulo presenta un análisis del gradiente en los puntos óptimos obtenidos después de llevar a cabo la optimización por primera vez, de forma que es posible conocer si los límites de optimización propuestos pueden ser modificados (en caso de que sea mecánicamente posible) con la finalidad de obtener resultados incluso mejores. Se llevan a cabo también análisis de los volúmenes de los contrapesos propuestos y de la relación entre el área y el espesor de los mismos, a partir de los cuales es posible confirmar la información obtenida mediante el análisis del gradiente. El método propuesto puede resultar útil para el análisis de problemas similares de optimización de mecanismos. Además, se emplean PF



**Figura 5-1.:** Mecanismo de cuatro barras

para realizar un análisis de sensibilidad de la respuesta del mecanismo a cada uno de los contrapesos presentados como solución, de esta forma resulta posible conocer la importancia que cada uno de ellos tiene en la respuesta del mecanismo; además, es posible determinar de cuál o cuáles de ellos se puede prescindir obteniendo todavía buenos resultados de balanceo.

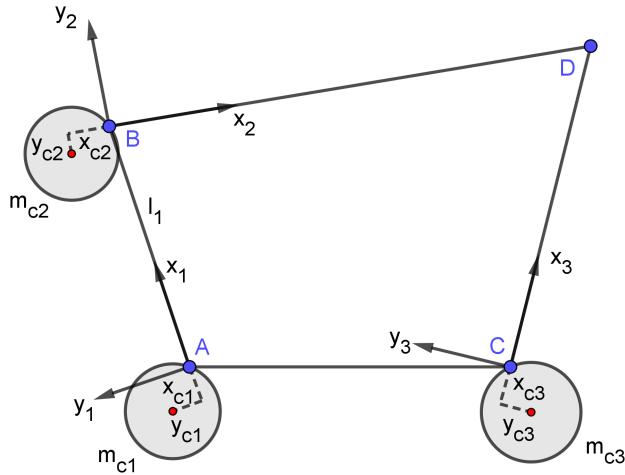
Este capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 5.2 presenta la obtención de la matriz de masas del mecanismo de cuatro barras y las ecuaciones correspondientes a la ShF y el ShM. La sección 5.3 define la función objetivo y los límites de la optimización. La sección 5.4 detalla el algoritmo empleado para llevar a cabo la optimización del balanceo. La sección 5.5 presenta la optimización numérica, el análisis de límites para la optimización y el análisis de sensibilidad del balanceo a los contrapesos cuando se emplean tres, dos o un contrapeso. La sección 5.6 presenta los resultados finales del método propuesto.

## 5.2. Análisis mecánico

### 5.2.1. Matriz de masas un mecanismo de cuatro barras utilizando FCC

La Figura 5-1 muestra un mecanismo de cuatro barras. Se trata de un mecanismo de un grado de libertad, que es controlado mediante un motor colocado en el punto básico A, de ahí que la barra AB gira con velocidad  $\omega[\text{rads/s}]$ .  $l_1, l_2$  y  $l_3$  representan la longitud de cada barra. Al usar FCC [80] para representar el sistema es fácil obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM [2, 4, 114].

Para obtener la matriz de masas  $M$  de todo el mecanismo es necesario definir la matriz de



**Figura 5-2.**: Mecanismo de cuatro barras con contrapesos

masa  $M_n$  para cada barra  $n$ , esas matrices pueden ser calculadas usando dos puntos básicos  $i$  y  $j$  de cada elemento.

Con el objetivo de lograr optimizar el balanceo del mecanismo se agregan a éste tres contrapesos en forma de disco (uno para cada una de las barras móviles) tal como puede apreciarse en la figura 5-2. Resulta entonces necesario que las características mecánicas de dichos contrapesos queden también incluidas en la matriz de masas  $M$  del sistema en conjunto. Es por ello que cada elemento será considerado entonces como la unión de una barra y su respectivo contrapeso. La masa  $m_n$  de cada barra-contrapeso  $n = 1, 2, 3$  está definida de acuerdo a la ecuación 5-1.

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \quad (5-1)$$

Donde  $m_{bn}$  es la masa de la barra original  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) y  $m_{cn}$  es la masa de cada contrapeso ( $n = 1, 2, 3$ ). Sin embargo, la masa de cada contrapeso se encuentra definida en términos de sus dimensiones y su densidad tal como se puede apreciar en la ecuación 5-2.

$$m_{cn} = \pi \rho_{cn} t_{cn} (y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \quad (5-2)$$

Donde  $\rho_{cn}$  corresponde a la densidad del material,  $t_{cn}$  es el espesor de cada contrapeso y  $x_{cn}, y_{cn}$  representan la posición del centro de masa del contrapeso medido en relación con el sistema de coordenadas local de cada elemento.

La inercia total de cada barra-contrapeso  $I_n$  (donde  $n = 1, 2, 3$ ) está definida como se muestra en la ecuación 5-3.

$$I_n = \frac{3m_{cn} (y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (5-3)$$

Donde  $x_{cn}$  es la posición  $x$  del centro de masa del contrapeso que corresponde al elemento  $n$  y  $y_{cn}$  es la posición  $y$  del centro de masa del contrapeso que corresponde al elemento  $n$ , ambos medidos desde el origen de coordenadas locales. Por otra parte,  $I_{bn}$  corresponde a la inercia de cada barra original.

La nueva posición  $X_{Gn}$  del centro de masa de cada elemento  $n$  está definida de acuerdo a la ecuación 5-4, en tanto que la nueva posición  $Y_{Gn}$  del centro de masa de cada elemento  $n$  queda definida por la ecuación 5-5.

$$X_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5-4)$$

$$Y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5-5)$$

Donde  $x_{cn}, y_{cn}$  son las posiciones de los centros de masa de cada contrapeso, y  $x_{bn}, y_{bn}$  son las posiciones de los centros de masa para cada barra original, todos ellos medidos desde el origen de coordenadas locales de cada elemento.

Para evitar el uso de variables adicionales, la masa de cada contrapeso  $m_{cn}$  puede ser definida de acuerdo a la ecuación 5-6.

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (5-6)$$

Donde  $\rho_{cn}$  representa la densidad de cada contrapeso,  $t_{cn}$  corresponde al espesor y  $r_{cn}$  representa el radio. Como restricción para los contrapesos, se considera además que un extremo del contrapeso deberá estar siempre en contacto con el punto definido como el origen de coordenadas locales, de ahí que el radio quede entonces definido por la ecuación 5-7.

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (5-7)$$

Sustituyendo la ecuación (5-7) en (5-6) se obtiene la ecuación 5-8.

$$m_{cn} = \pi(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (5-8)$$

Utilizando los parámetros antes descritos, es posible obtener la matriz de masas de cada elemento que forma al mecanismo de cuatro barras, y uniendo dichas matrices de masas se

obtiene la matriz de masas  $\mathbf{M}$  de todo el sistema (ecuación 5-9).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 & e & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & b & 0 & 0 & 0 & g & -h \\ -f & e & 0 & b & 0 & 0 & h & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & i & -j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & j & i \\ 0 & 0 & g & h & i & j & d & 0 \\ 0 & 0 & -h & g & -j & i & 0 & d \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

Donde:

$$a = \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} - \frac{2(\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1})}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \quad (5-10)$$

$$b = \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} - \frac{2(\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2})}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} + \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (5-11)$$

$$c = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} - \frac{2(\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3})}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \quad (5-12)$$

$$d = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (5-13)$$

$$e = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} - \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (5-14)$$

$$f = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \quad (5-15)$$

$$g = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (5-16)$$

$$h = \frac{\pi \rho_{c2} t_{c2} y_{c2} (y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} y_{b2}}{l_2} \quad (5-17)$$

$$i = \frac{\pi \rho_{c3} t_{c3} x_{c3} (y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi \rho_{c3} t_{c3} (y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \quad (5-18)$$

$$j = \frac{\pi \rho_{c3} t_{c3} y_{c3} (y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} y_{b3}}{l_3} \quad (5-19)$$

### 5.2.2. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Una vez que se conoce la matriz de masas  $\mathbf{M}$  de todo el sistema, es posible introducir un vector de posiciones para cada uno de los puntos básicos que intervienen en el mecanismo, quedando representado por  $\mathbf{q}$  (ecuación 5-20).

$$\mathbf{q} = [A_X \ A_Y \ B_X \ B_Y \ C_X \ C_Y \ D_X \ D_Y]^T \quad (5-20)$$

Derivando la ecuación 5-20 con respecto del tiempo, se obtiene el vector de velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  (ecuación 5-21), que al ser derivado nuevamente otorga el vector de aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  (ecuación 5-22).

$$\dot{\mathbf{q}} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y \ VD_X \ VD_Y]^T \quad (5-21)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [AA_X \ AA_Y \ AB_X \ AB_Y \ AC_X \ AC_Y \ AD_X \ AD_Y]^T \quad (5-22)$$

Es posible entonces calcular el momento lineal  $L$  (ecuación 5-23) asociado a todo el sistema (ecuación 5-23).

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5-23)$$

Donde  $\mathbf{B}$  (ecuación (5-24)) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos del mecanismo, en este caso cuatro.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5-24)$$

Resolviendo la ecuación 5-23 y considerando que la velocidad de los puntos fijos es siempre cero ( $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$ ,  $VC_Y = 0$ ), se obtienen las expresiones del momento lineal ( $\mathbf{L}_i$  y  $\mathbf{L}_j$ ).

La ShF (ecuaciones 5-25 y 5-26) del mecanismo puede calcularse derivando las ecuaciones  $\mathbf{L}_i$  y  $\mathbf{L}_j$  (eq. 5-23 con respecto al tiempo. Para garantizar el equilibrio del mecanismo, el resultado de estas derivadas debe ser constante en el periodo de tiempo analizado (con fines prácticos generalmente se considera que debe ser igual a cero).

$$\begin{aligned}
 ShF_i = \frac{dL_i}{dt} = & \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AC_Y}{l_3} \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_X \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} - \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) \right. \\
 & \left. + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}) AA_Y}{l_1} \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_X
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

$$\begin{aligned}
 ShF_j = \frac{dL_j}{dt} = & \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_Y \\
 & - \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AC_X}{l_3} \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) \right. \\
 & \left. + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AB_X \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_Y \\
 & - \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}) AA_X}{l_1}
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

### 5.2.3. Momento angular y momento de sacudimiento

Al utilizar FCC, es posible expresar el momento angular de todo el mecanismo  $H$  tal como se muestra en la ecuación 5-27.

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{5-27}$$

Donde  $\mathbf{r}$  está dada en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema y puede ser expresada de acuerdo a la ecuación 5-28.

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X \ -D_Y \ D_X]^T \tag{5-28}$$

Resolviendo la ecuación 5-27 y considerando  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$  y  $VC_Y = 0$ , es posible obtener la expresión del momento angular  $H$ . El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de  $H$  con respecto al tiempo (ecuación 5-29), quedando expresado tal como se observa en la ecuación 5-30.

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{5-29}$$

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{5-30}$$

Donde  $\dot{\mathbf{r}}$  está definido de acuerdo a la ecuación 5-31.

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \quad VA_X \quad -VB_Y \quad VB_X \quad -VC_Y \quad VC_X \quad -VD_Y \quad VD_X]^T \quad (5-31)$$

Para garantizar el equilibrio dinámico del mecanismo, el ShM debe ser constante, es decir que la derivada de  $H$  con respecto del tiempo (ecuación 5-30) debe dar por resultado cero. Al resolver la ecuación 5-30 y considerar  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$  y  $VC_Y = 0$ , se obtiene el ShM del mecanismo completo (ecuación 5-32).

$$\begin{aligned} ShM = & VD_X \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_Y \right. \\ & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_Y \\ & - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_X}{l_2} \Big) + VB_X - VB_Y \\ & - \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_X VD_Y \\ & - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_Y VD_Y}{l_2} \\ & - \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_X VD_Y \\ & - \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_X \right. \\ & + \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_Y}{l_2} \\ & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_X \Big) D_Y \\ & + \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_Y \right. \\ & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_Y \\ & - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_X}{l_2} \Big) D_X \\ & + \left( \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \right) AD_Y \right. \\ & + \left. \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AD_X}{l_3} \right) C_X - B_Y + B_X \end{aligned}$$

(5-32)

### 5.3. Función objetivo y límites de optimización

Para definir la función objetivo sobre la cual se llevará a cabo el proceso de optimización, se emplean dos índices adimensionales  $\beta_i$ .

El primero de estos índices  $\beta_{ShF}$  (ecuación 5-33) está definido por el valor cuadrático medio (RMS) de la reacción ShF del mecanismo optimizado ( $rms(^oReaction)$ ) con respecto al valor RMS de la reacción del mecanismo original ( $rms(Reaction)$ ), ambos considerados durante un periodo de tiempo T.

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^oShF)}{rms(ShF)} \quad (5-33)$$

Donde el RMS de la reacción de la ShF ( $rms(^oShF)$ ) del mecanismo optimizado está dado tal como se muestra en la ecuación 5-34.

$$rms(^oShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (5-34)$$

Y el RMS de la ShF del mecanismo original ( $rms(ShF)$ ) es una constante obtenida del cálculo del RMS de la ShF del mecanismo de cuatro barras sin ningún contrapeso añadido (ecuación 5-35).

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (5-35)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5-34 y 5-35 en 5-33 se obtiene el índice de balanceo ( $\beta_{ShF}$ ) (ecuación 5-36).

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (5-36)$$

El segundo de los índices de balanceo  $\beta_{ShM}$  (ecuación 5-37) puede ser calculado de una manera similar al primero pero considerando ahora la reacción provocada por el ShM.

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ^oShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}} \quad (5-37)$$

Donde  $^oShM$  es el ShM del mecanismo optimizado (es decir cuando se consideran los contrapesos agregados para lograr el balanceo) y  $ShM$  es una constante que representa el ShM del mecanismo sin balancear.

El objetivo concreto de la optimización que se lleva a cabo para el mecanismo de cuatro barras consiste en minimizar  $\beta_{ShF}$  y  $\beta_{ShM}$  (ecuaciones 5-36 y 5-37), por lo tanto se trata de un problema multiobjetivo.

La principal técnica empleada para llevar a cabo la optimización de problemas de objetivos múltiples es la combinación lineal de las funciones objetivo, que define la nueva función objetivo mediante una combinación lineal de los índices de balanceo (ecuación 5-38).

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (5-38)$$

donde  $\gamma$  es un valor escalar que depende de la importancia dada a cada uno de los objetivos de la optimización.

En este caso, las variables a optimizar son:  $x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}$ ; y los límites quedan comprendidos de acuerdo a las desigualdades 5-39.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (5-39)$$

## 5.4. Algoritmo de optimización

Con la finalidad de explorar otros algoritmos alternativos para la optimización del balanceo se decidió optar por el algoritmo de Descenso de Gradiente Proyectado (PGD por sus siglas en inglés), que es un método determinístico, basado en el concepto matemático del gradiente, sumamente sencillo de comprender y de implementar en programación. Este algoritmo puede utilizarse para resolver diferentes tipos de problemas tal como puede apreciarse en [83, 156, 47].

Para la implementación del algoritmo de optimización en este capítulo, al algoritmo original de PGD propuesto normalmente en la bibliografía de optimización se le realizó una modificación para simplificarlo en el control de los límites de la optimización, tal como se detallará más adelante.

El algoritmo 2 describe el PGD simplificado utilizado para encontrar el mínimo de la función objetivo (ecuación 5-38). Ahí, *RandomBoxConstraints()* calcula un vector de variables aleatorias con una distribución uniforme respetando los límites especificados. Por su parte

$\text{GradientFiniteDiff}(f, X_0)$  y  $\text{HessianFiniteDiff}(f, X_k, P_k)$  calculan la aproximación del vector gradiente y de la matriz Hessiana basados en las ecuaciones 2-25, 2-36 y 2-37.  $\|\cdot\|$  representa la norma del vector  $\epsilon$  que es un pequeño escalar ( $\epsilon = 1e - 5$ ).

---

**Algoritmo 2:** Descenso de gradiente proyectado con descenso máximo

---

```

1  $X_0 = \text{RandomBoxConstraints}();$ 
2  $\nabla f(X_0) = \text{GradientFiniteDiff}(f, X_0);$ 
3  $k = 0;$ 
4 while  $\|\nabla f(X_k)\| > \epsilon$  or  $k < NMaxIter$  do
5    $P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|};$ 
6    $AP_k = \text{HessianFiniteDiff}(f, X_k, P_k);$ 
7    $\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P_k}{P_k^T AP_k};$ 
8    $X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k;$ 
9   If  $\text{isValid}(X_{k+1})$  then  $\text{fix}(X_{k+1});$ 
10  If  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  then break;
11   $k = k + 1;$ 
12 end
13 return  $X_k;$ 
```

---

Para controlar los límites especificados de la optimización, se utiliza la versión simplificada del PGD, de modo que cuando una solución esta fuera de los límites, ésta es proyectada a una región valida. La función booleana  $\text{isValid}(X_{k+1})$  regresa ‘verdadero’ si el vector obtenido contiene valores dentro de los límites y regresa ‘falso’ en caso contrario. La función  $\text{fix}(X_{k+1})$  se usa para corregir los valores del vector en caso de que hayan resultado no válidos. Esta corrección de valores implica que si el resultado es menor que el valor inferior permitido, entonces éste se convierte al mínimo. De forma similar, si es mayor que el valor máximo permitido, entonces se convierte al máximo

El algoritmo implementa dos condiciones para detenerse:

1.  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  Si la diferencia entre  $X_{k+1}$  y  $X_k$  es demasiado pequeña significa que prácticamente no se está dando cambio alguno entre la solución actual y la anterior. Este caso se contempla también cuando la norma del vector gradiente tiene un valor cercano a 0.
2.  $k > NMaxIter$ . Se ha alcanzado el número máximo de iteraciones (Para la implementación se consideró  $NMaxIter = 1000$ ).

La versión simplificada del algoritmo de descenso de gradiente proyectado se ejecuta varias veces tomando  $\gamma$  como un número aleatorio que sigue una distribución uniforme entre 0 y

Cuerpo <i>n</i>	1	2	3
<b>Masa</b> $m_{b_n}$ [kg]	2.51946901	4.73866901	3.68746901
<b>Longitud</b> $l_n$ [m]	0.40	0.78	0.60
<b>Inercia</b> $I_{b_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	0.14023528	0.98146460	0.45494271
<b>Centro de masa</b> $x_{b_n}$ [m]	0.20	0.39	0.30
<b>Centro de masa</b> $y_{b_n}$ [m]	0.00	0.00	0.00

**Tabla 5-1.:** Parámetros de cada eslabonamiento de un mecanismo de cuatro barras.

1. Como se explica en [21] es mejor usar valores aleatorios de hiper parámetros para  $\gamma$  que utilizar una malla.

## 5.5. Ejemplo numérico

Esta sección presenta un análisis numérico para la optimización del balanceo completo de un mecanismo de cuatro barras, adicionalmente se presenta un método mediante el cuál es posible obtener información acerca de la importancia de cada contrapeso resultado de la optimización y de su influencia en el balanceo total del mecanismo, permitiendo de esta manera tomar decisiones en caso de que sea necesario disminuir la cantidad de contrapesos a utilizar, obteniendo óptimos resultados.

### 5.5.1. Características mecánicas y límites de optimización

La tabla 5-1 presenta los parámetros físicos de un mecanismo de cuatro barras (figura 5-2). El material usado para los eslabones es acero, con una densidad de  $7800\text{kg/m}^3$ . Los

contrapesos se consideran de latón con una densidad ( $\rho_c$ ) de  $8500\text{kg/m}^3$ .

El mecanismo es movido por un motor colocado en el punto A, girando a una velocidad constante de  $500\text{rpm}$ . A través de cinemática directa es posible obtener una muestra de las posiciones ( $x_{b_1}, x_{b_2}, x_{b_3}, y_{b_1}, y_{b_2}, y_{b_3}$ ), velocidades ( $VB_x, VB_y, VC_x, VC_y, VD_x, VD_y$ ) y aceleraciones ( $AB_x, AB_y, AC_x, AC_y, AD_x, AD_y$ ) correspondientes a cada uno de los puntos básicos considerados en este sistema, para ello se empleó el software de CAD Solidworks.

Remplazando todos los parámetros conocidos en las ecuaciones 5-36 y 5-37, se obtienen los índices de balanceo utilizados para definir la función objetivo 5-38. De acuerdo con las características mecánicas del mecanismo los límites considerados para la optimización se muestran en las desigualdades 5-40.

$$\begin{aligned} -0.40m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m \end{aligned} \tag{5-40}$$

### 5.5.2. Optimización usando tres contrapesos

Para el ejemplo numérico del problema de la optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras se utilizó el algoritmo de PGD simplificado. Siguiendo la búsqueda aleatoria de los hiper-parámetros presentados en [21], el algoritmo 2 es ejecutado 500 veces tomando  $\gamma$  como un valor aleatorio de una distribución uniforme en el rango de  $(0, 1)$  (ecuación 5-38). Los resultados de la optimización son almacenados cuando el resultado de la función objetivo es menor que 1.0.

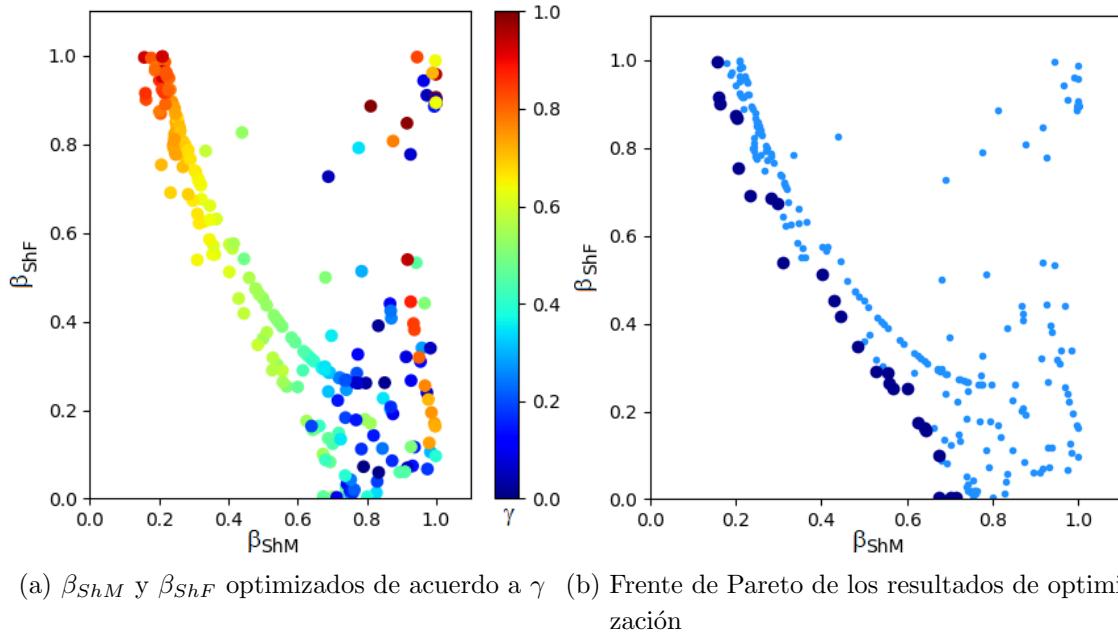
La figura 5-3(a) muestra la relación entre los valores de  $\beta_{ShF}$  y  $\beta_{ShM}$  de todas las soluciones encontradas a través de la optimización. Se emplean diferentes colores para representar el valor utilizado para  $\gamma$  en la función  $F(X)$  (ecuación 5-38)

En la figura 5-3(b) los puntos azul oscuro representan el PF mientras que los azul claro representan las soluciones dominadas.

### 5.5.3. Análisis de los resultados numéricos usando tres contrapesos

Dentro de las soluciones encontradas en el frente de Pareto, es posible seleccionar la más apropiada de acuerdo con el problema concreto que se está resolviendo al llevar a cabo la optimización del balanceo del mecanismo.

Como un ejemplo, para analizar los resultados, se toman tres soluciones del frente de Pareto, la primera es el mejor resultado considerando el índice de optimización correspondientes al



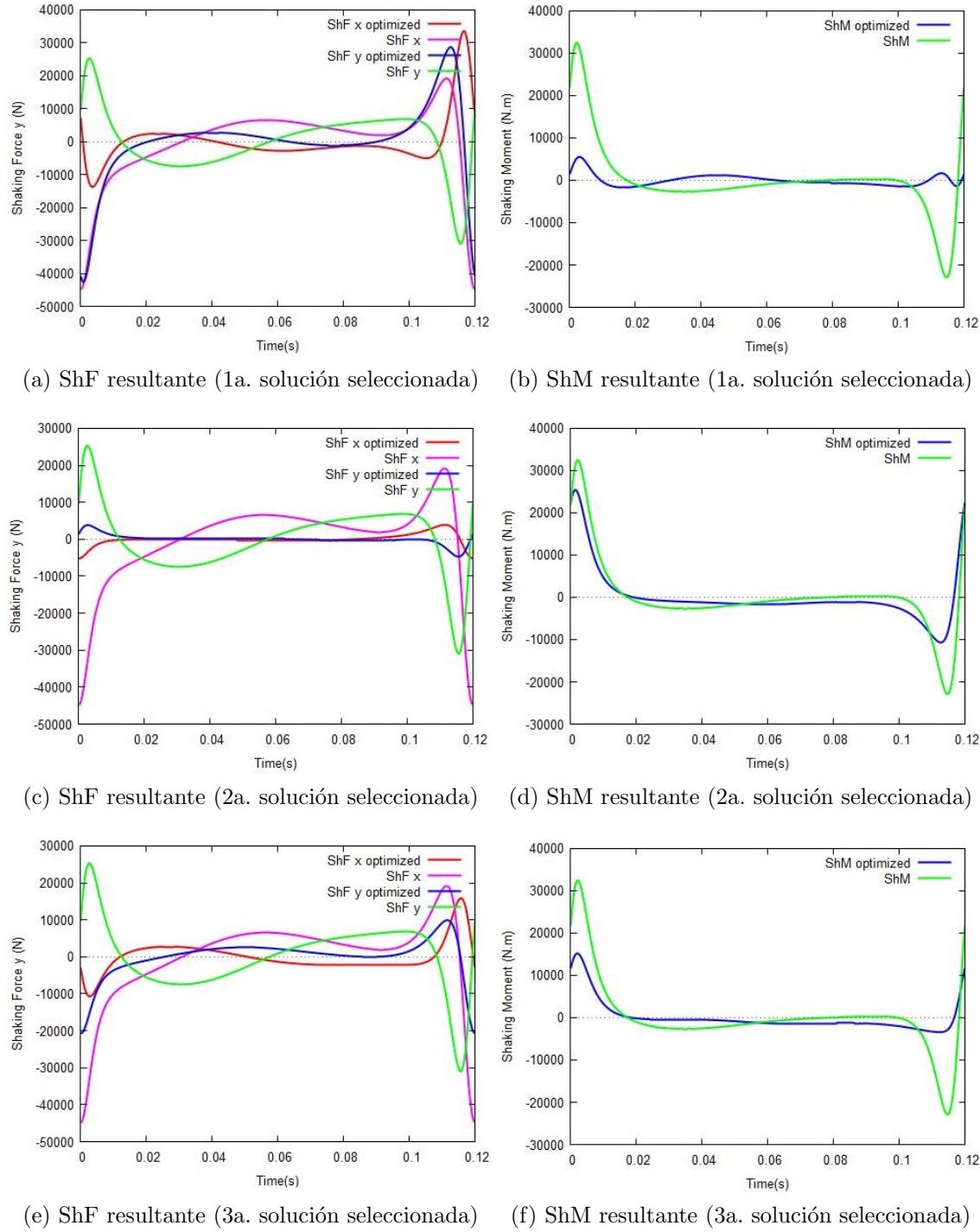
**Figura 5-3.:** Análisis del PF de objetivos optimizados de  $\beta_{ShM}$  y  $\beta_{ShF}$  para el mecanismo de cuatro barras.

ShM ( $\beta_{ShM} = 0.1600587$ ,  $\beta_{ShF} = 0.9152829$ ), la segunda es el mejor resultado considerando el índice de optimización correspondiente al ShF ( $\beta_{ShM} = 0.71311372$ ,  $\beta_{ShF} = 0.00295769$ ) y la última es tomando en consideración ambos índices de balanceo, logrando optimizar cada uno de ellos en casi un 60 % ( $\beta_{ShM} = 0.42969434$ ,  $\beta_{ShF} = 0.45176319$ ). A continuación se analizarán con más detalle dichas soluciones.

1. La primera solución se seleccionó buscando el mejor resultado en cuanto a la optimización del balanceo del índice correspondiente al ShM ( $\beta_{ShM}$ ), es decir que se trata de aquella en que la reducción del ShM es máxima, sin tomar en consideración los resultados del índice correspondiente al ShF ( $\beta_{ShF}$ ). Analizando el PF se eligió punto que corresponde a:  $\beta_{ShM} = 0.1600587$ ,  $\beta_{ShF} = 0.9152829$ , el cual se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.306033474 & y_{c1} &= -0.05120233 & t_{c1} &= 0.007840031 \\ x_{c2} &= -0.031811247 & y_{c3} &= 0.112686771 & t_{c2} &= 0.04 \\ x_{c3} &= -0.115671647 & y_{c2} &= -0.09348429 & t_{c3} &= 0.04 \end{aligned}$$

La figura 5-4(a) muestra la comparación entre el ShF del mecanismo original (considerando sus componentes  $x$  y  $y$ ) y el ShF después de la optimización del balanceo. En este caso, la ShF total mejoró sólo el 8.47 %. Sin embargo, con esta solución, en la figura 5-4(b), es posible apreciar que el momento de sacudimiento del mecanismo optimizado



**Figura 5-4.:** Comparación entre ShF y ShM antes y después de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.

de cuatro barras es 83.99 % mejor que el que se tenía originalmente. Puede observarse que al utilizar únicamente contrapesos no es posible eliminar completamente el ShM, sin embargo éste si puede reducirse significativamente, e incluso se reduce también un poco el ShF.

2. La segunda solución se eligió buscando el mejor resultado en cuanto a la optimización del balanceo del índice correspondiente al ShF ( $\beta_{ShF}$ ), es decir que se trata de aquella en que la reducción del ShF es la máxima, sin dar mucha importancia a los resultados del índice correspondientes al ShM ( $\beta_{ShM}$ ). En el PF se eligió el punto que corresponde a:  $\beta_{ShM} = 0.71311372$ ,  $\beta_{ShF} = 0.00295769$ ), el cual se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.15548064 & y_{c1} &= -0.007810097 & t_{c1} &= 0.035743454 \\x_{c2} &= -0.046683398 & y_{c2} &= -0.068805445 & t_{c2} &= 0.027404923 \\x_{c3} &= -0.132085338 & y_{c3} &= 0.015127099 & t_{c3} &= 0.037640418\end{aligned}$$

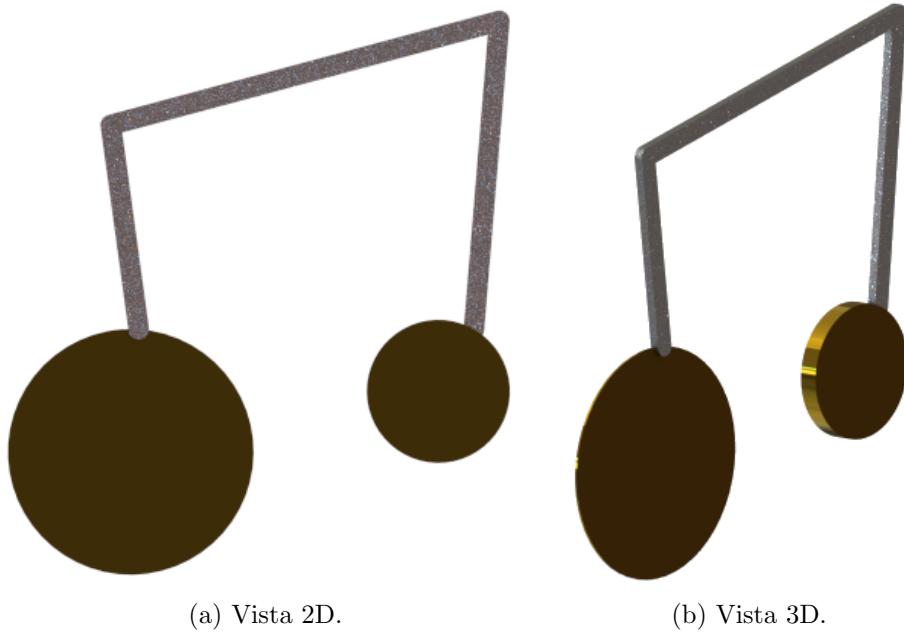
En la figura 5-4(c) es posible apreciar que la ShF del mecanismo donde se usaron los contrapesos, se redujo significativamente (99.70 %) comparado con el mecanismo original. Se puede considerar que la ShF se elimina casi por completo con el uso de contrapesos y también el ShM tiene una reducción del 28.69 % (Figura 5-4(d)).

3. Para la tercera solución, se eligió un punto del PF en donde se obtuviera una reducción considerable tanto de la ShF como del ShM. El punto elegido corresponde a ( $\beta_{ShM} = 0.42969434$ ,  $\beta_{ShF} = 0.45176319$ ). Esta optimización del balanceo se logra cuando los valores del vector a optimizar son:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.233449901 & y_{c1} &= 0.047539111 & t_{c1} &= 0.005 \\x_{c2} &= 0.0000527 & y_{c2} &= 0.000296052 & t_{c2} &= 0.005000159 \\x_{c3} &= -0.125584323 & y_{c3} &= 0.058770112 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

Al utilizar estos contrapesos el ShM se redujo un 57.03 % y la ShF se redujo un 54.82 %. Esto se puede apreciar en la figura 5-4(e) y en la figura 5-4(f).

Por otra parte, el resultado de implementar esta solución se observa en la figura 5-5, vale la pena destacar que el contrapeso 2 es muy pequeño como para apreciarse en la solución.



**Figura 5-5.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando tres contrapesos.

#### 5.5.4. Método de análisis de restricciones para la optimización del balanceo basado en diagramas de caja

Se presenta a continuación una alternativa novedosa para el análisis de las restricciones (o límites) de la optimización basada en los resultados, considerando los valores del vector gradiente.

El problema de optimización puede ser definido de acuerdo a (5-41).

$$\begin{aligned} \min_x f(x, \alpha) \\ \text{s.a.} \\ l \leq x \leq h \end{aligned} \tag{5-41}$$

Y las restricciones pueden ser definidas por (5-42).

$$\begin{aligned} \min_x f(x, \alpha) \\ \text{s.a.} \\ x - l \geq 0 \\ h - x \geq 0 \end{aligned} \tag{5-42}$$

En este caso, el Lagrangiano esta dado por la ecuación 5-43.

$$L(x, \delta, \pi) = f(x) - \delta^T(x - l) - \pi^T(h - x) \tag{5-43}$$

y las KKT están definidas por la ecuación 5-44.

$$\nabla f(x) - \delta + \pi = 0 \quad (5-44)$$

con  $\delta, \pi \geq 0$ , entonces definiendo  $\lambda = \delta - \pi$  se obtienen (5-45) y (5-46).

$$\nabla f(x) - \lambda = 0 \quad (5-45)$$

$$\nabla f(x) = \lambda \quad (5-46)$$

Llegando entonces a (5-47) y (5-48).

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ \lambda_i & \text{if } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (5-47)$$

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ -\lambda_i & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (5-48)$$

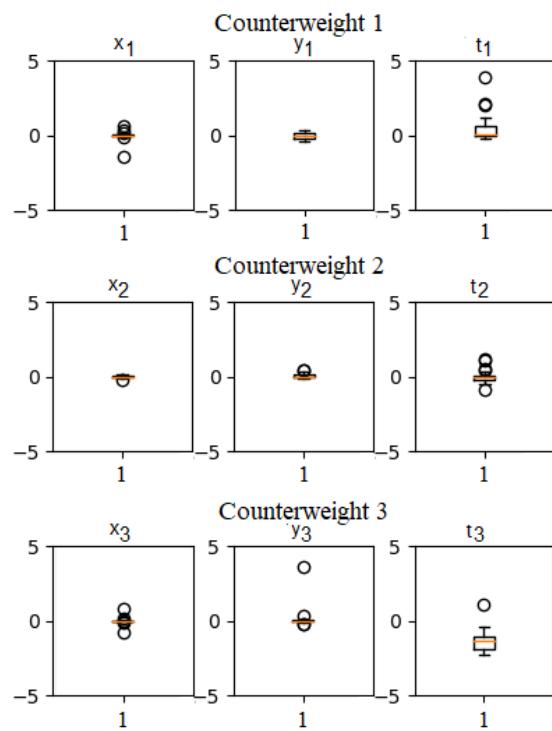
En otras palabras, al analizar el vector gradiente  $i_{esimo}$  si éste tiene un valor igual a 0 significa que la restricción que se le asignó no está limitando a la optimización para encontrar el mínimo. Sin embargo si el valor del vector gradiente  $i_{esimo}$  es mayor a 0 quiere decir que la optimización podría mejorarse si se ampliara la restricción del borde inferior. Y si el valor es menor a 0, significa que la optimización podría mejorarse si la restricción del borde mayor se amplía.

Utilizando este método es posible obtener información valiosa sobre las restricciones que se asignaron a la optimización, y en caso que las condiciones mecánicas lo permitieran podría corregirse alguno de los límites de forma que se obtengan mejores resultados de balanceo.

### 5.5.5. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos

A continuación se presenta un análisis que permite determinar si los límites propuestos para la optimización son los más adecuados o si deberían ser modificados (en caso de que exista esta posibilidad tomando en consideración las características físicas del mecanismo y del espacio en torno a él).

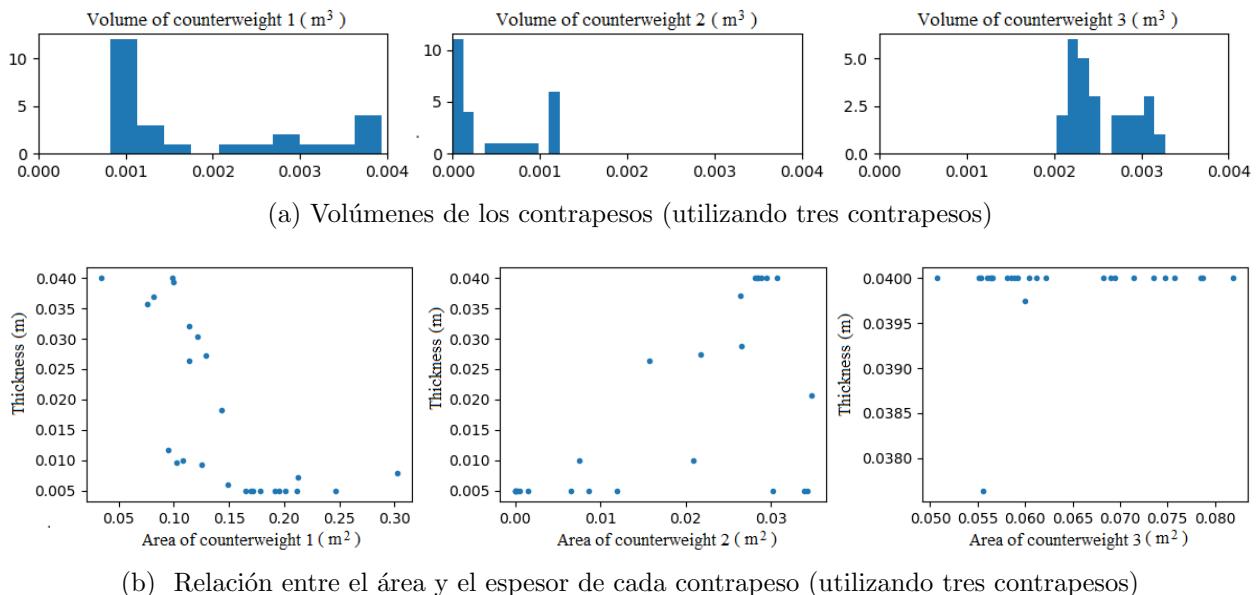
En la figura 5-6 se presentan los diagramas de caja de las derivadas parciales con respecto a cada variable  $x_n$ ,  $y_n$  y  $t_n$  para cada contrapeso n ( $1 \leq n \leq 3$ ).



**Figura 5-6.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

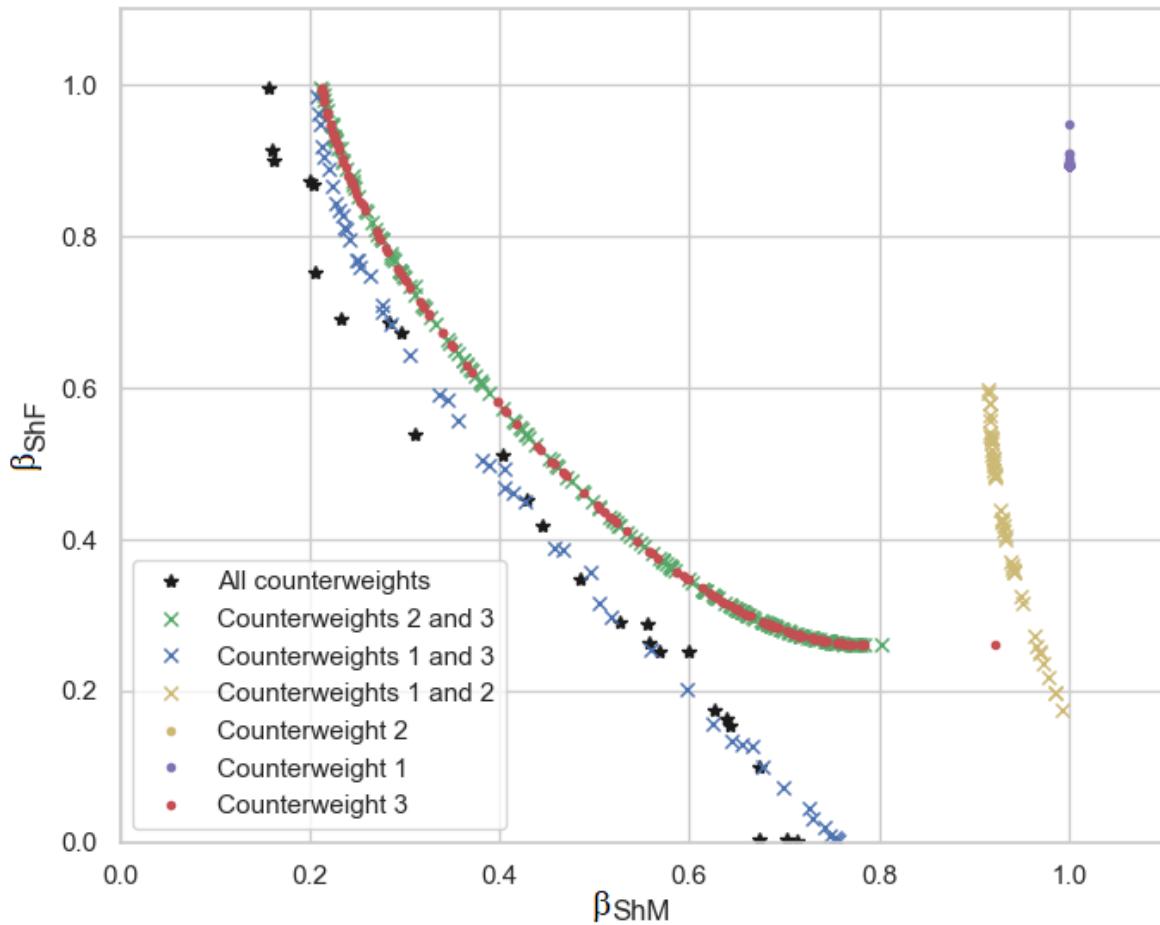
Tal como se explicó en la sección anterior, se sabe que cuando el valor de la derivada parcial de cada parámetro a optimizar es igual a cero, significa que es posible alcanzar valores óptimos de balanceo dentro de las restricciones propuestas. En los diagramas de caja de la figura 5-6 se puede ver que para las variables  $x_n$  y  $y_n$  de cada contrapeso n ( $1 \leq n \leq 3$ ), las derivadas parciales son cercanas a cero, esto significa que es posible alcanzar los valores óptimos dentro de los límites de optimización propuestos.

Sin embargo, para las variables  $t_1$  y  $t_3$  las derivadas parciales del gradiente no son cercanas a cero. En  $t_1$  es posible ver que el valor tiende a ser mayor que cero, por lo tanto, se puede deducir que el espesor del contrapeso 1 intenta ser menor que el límite de 0.005 metros; sin embargo, esto no es posible debido a las limitaciones mecánicas que impiden que el espesor sea cercano a cero o negativo dado que esto es físicamente imposible. Por otro lado, el valor de la derivada parcial del gradiente  $t_3$  tiende a ser menor que 0, lo que significa que si los límites de la optimización lo permitieran, el contrapeso 3 podría tener un espesor mayor a 0.04 metros y de esta forma balancearse aún más al mecanismo en conjunto.



**Figura 5-7.: Análisis de dimensiones cuando se utilizan tres contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.**

En la figura 5-7(a) se presenta el histograma de los volúmenes de los contrapesos obtenidos en las diferentes soluciones de optimización. Al analizar el volumen de los contrapesos y la relación entre su área y espesor (Figura 5-7(b)), se puede ver que el contrapeso 2 tiene un volumen muy pequeño (comparado con otros contrapesos) y cuando el área y el espesor son muy pequeños el contrapeso dos está casi desapareciendo de la solución. Por otro lado, la relación entre el área y el espesor del contrapeso tres muestra cómo, en casi todos los



**Figura 5-8.:** Comparación del PF al utilizar diferente número de contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

casos, el espesor está alcanzando el límite permitido más alto, esto demuestra la información proporcionada el diagrama de caja y por el histograma analizados anteriormente y confirma la conclusión de que si las características mecánicas del sistema lo permiten, podría ser recomendable realizar la optimización con un límite superior ligeramente mayor para la variable  $t_3$ .

### 5.5.6. Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos

Podría haber algunos casos en los que sea deseable eliminar uno o más contrapesos, las razones pueden ser el volumen resultante de todo el mecanismo, el costo de implementar la solución o el espacio físico disponible alrededor del mecanismo.

La figura 5-8 presenta en conjunto los PF de los diferentes resultados de optimización cuando se usan todas las combinaciones posibles de tres, dos o solo un contrapeso. Las estrellas negras

corresponden al PF original cuando se están usando los tres contrapesos. Las cruces azules corresponden al PF cuando el contrapeso 2 ha sido eliminado y solo el contrapeso 1 y 3 son considerados. Comparando estos resultados con los obtenidos al usar todos los contrapesos, es posible ver que los PF son muy similares.

Las cruces verdes corresponden al PF cuando se usan solo los contrapesos 2 y 3, lo que significa que el contrapeso 1 ha sido eliminado. Y las cruces amarillas corresponden al PF cuando se ha eliminado el contrapeso 3 y se obtiene utilizando solo los contrapesos 1 y 2.

Utilizando la información proporcionada por los PF (figura 5-8), es posible concluir que si se decide eliminar un contrapeso para simplificar el balanceo del mecanismo, debería eliminarse el contrapeso 2, ya que utilizando solo los contrapesos 1 y 3 es posible obtener resultados muy similares a los obtenidos cuando se usan los tres contrapesos.

### 5.5.7. Análisis de los resultados numéricos usando dos contrapesos

Después de probar que el contrapeso con menos influencia en la optimización del balanceo es el contrapeso 2, se seleccionan tres soluciones del PF cuando se usan solo los contrapesos 1 y 3 (figura 5-8). Estas soluciones se escogen de la siguiente manera:

- Si el interés es optimizar el balanceo de la ShF, se considera entonces el resultado del índice ( $\beta_{ShF}$ ) sin dar importancia al índice relacionado con la ShM ( $\beta_{ShM}$ ), la solución seleccionada es:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.210649187 & y_{c1} &= 0.002597417 & t_{c1} &= 0.005812833 \\x_{c3} &= -0.133324421 & y_{c3} &= 7.62E - 05 & t_{c3} &= 0.039931556\end{aligned}$$

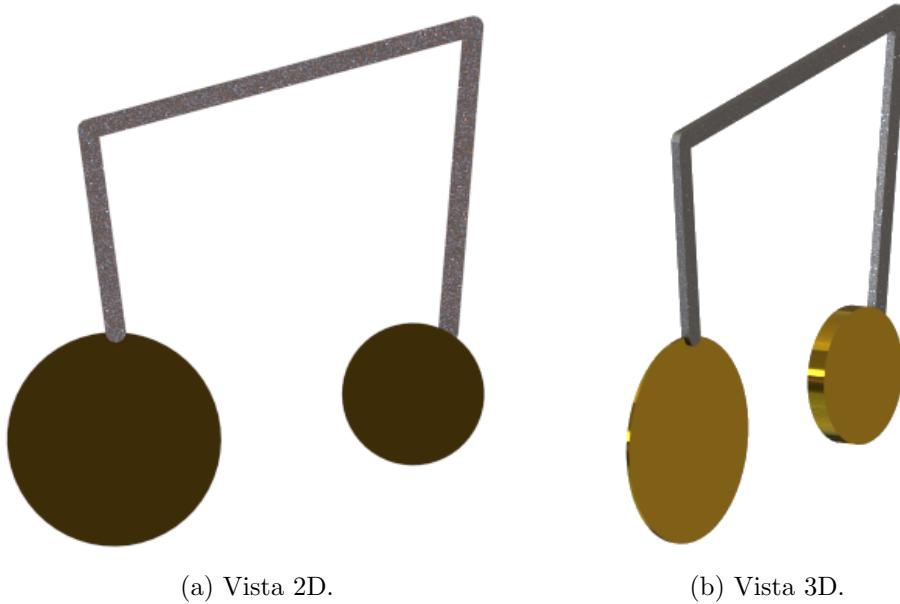
Al usar esta solución, la ShF del mecanismo se reduce a 99.67 %, mientras que el ShM también se reduce un 24.34 %.

- Por otra parte, si el interés es optimizar el balanceo del ShM, se considera entonces el índice ( $\beta_{ShM}$ ) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ), la solución seleccionada es:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.273728043 & y_{c1} &= -0.029116001 & t_{c1} &= 0.005 \\x_{c3} &= -0.11860947 & y_{c3} &= 0.10186805 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

Al usar esta solución, el ShM del mecanismo se reduce un 79.22 % mientras que la ShF se reduce un 1.55 %.

- Por último, si el interés es optimizar ambos índices, el relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) y el relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ), la solución seleccionada es:



**Figura 5-9.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando dos contrapesos.

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.207213869 & y_{c1} &= 0.031661306 & t_{c1} &= 0.006993731 \\x_{c3} &= -0.126559077 & y_{c3} &= 0.058396603 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

Esta solución reduce la ShF un 55.05 % y reduce el ShM un 57.27 %.

En la figura 5-9 se observa el resultado de implementar esta solución.

La tabla 5-2 muestra una comparación entre los resultados de optimización del balanceo cuando se usan todos los contrapesos, con los resultados de la optimización cuando solo se usan los contrapesos 1 y 3. Se puede apreciar que la optimización lograda sin usar el segundo contrapeso es casi la misma que la lograda al usar todos los contrapesos, por lo que puede considerarse eliminarlo.

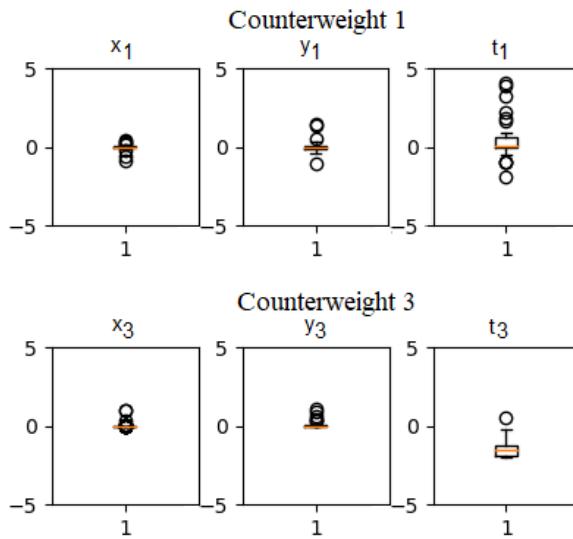
### 5.5.8. Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos

En la figura 5-10 se pueden ver los diagramas de caja de las derivadas parciales con respecto a cada variable  $x_n$ ,  $y_n$  y  $t_n$  (para los contrapesos  $n = 1$  y  $n = 3$ ) (es decir, cuando el contrapeso 2 ha sido eliminado).

Al igual que se hizo con anterioridad, es posible realizar un análisis de las derivadas parciales de cada variable optimizada para saber si es aconsejable modificar los límites de optimización propuestos. Al observar los diagramas de caja para los valores de  $x_n$ ,  $y_n$  se puede notar que

**Tabla 5-2.**: Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras.

		Optimización de ShF	Optimización de ShM
Usando tres contrapesos	Optimización de ShF	99.70 %	28.69 %
	Optimización de ShM	8.47 %	83.99 %
	Optimización de ShF y ShM	54.82 %	57.03 %
Usando los contrapesos 1 y 3	Optimización de ShF	99.67 %	24.34 %
	Optimización de ShM	1.55 %	79.22 %
	Optimización de ShF y ShM	55.05 %	57.27 %
Usando el contrapeso 3	Optimización de ShF	78.74 %	0.42 %
	Optimización de ShM	3.22 %	73.61 %
	Optimización de ShF y ShM	51.19 %	53.31 %



**Figura 5-10.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

están muy cerca de cero, esto significa que los límites definidos en la optimización de estas variables son adecuados. La variable  $t_1$  intenta ligeramente ser mayor que cero, esto significa que en algunos casos el espesor del contrapeso 1 intenta ser menor que el límite de 0.005 metros, pero tal como ya se explicó, esto no es mecánicamente posible.

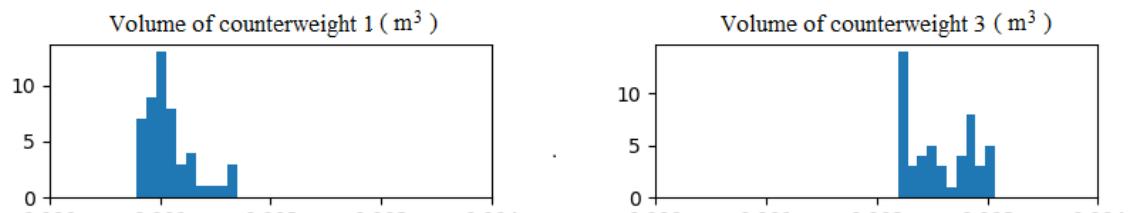
Por otro lado, el diagrama de caja de la derivada parcial de  $t_3$  muestra que este valor intenta ser mayor que el límite propuesto, esto significa que en la optimización, la variable está alcanzando el límite máximo permitido y, si las limitaciones mecánicas lo permiten, podrían obtenerse mejores resultados si este límite se amplía.

Para confirmar el método de análisis propuesto puede observarse la figura 5-11(a) en donde el histograma del volumen total de cada contrapeso muestra cómo el contrapeso 1 es más pequeño que el contrapeso 3; por su parte la figura 5-11(b)) muestra que el espesor del contrapeso 3 queda en casi la totalidad de los casos en la restricción superior de la optimización.

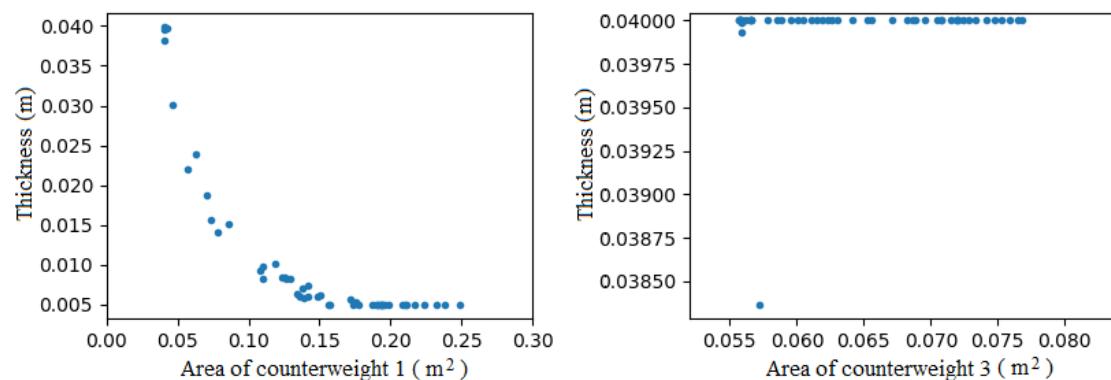
### 5.5.9. Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso

A continuación se presenta el análisis en caso de que fuera deseable agregar únicamente un contrapeso para optimizar el balanceo del mecanismo de cuatro barras.

En la figura 5-8, los puntos morados corresponden al PF cuando se optimiza usando sólo el contrapeso 1, los puntos amarillos representan el PF cuando se usa el contrapeso 2 y los puntos rojos corresponden al PF cuando se usa el contrapeso 3.



(a) Volúmenes de los contrapesos al utilizar dos de ellos.



(b) Relación entre el área y el espesor de cada contrapeso cuando se usan dos de ellos

**Figura 5-11.:** Análisis de dimensiones cuando se utilizan dos contrapesos en el mecanismo de cuatro barras.

Al analizar esta figura, es posible observar que los mejores resultados, en caso de que se utilice solamente un contrapeso, se obtienen eligiendo el contrapeso 3.

### 5.5.10. Análisis de resultados numéricos usando un contrapeso

Al igual que en los casos anteriores, pero ahora utilizando el PF correspondiente al contrapeso 3, se seleccionan tres soluciones de la siguiente forma:

- Si el interés es optimizar el índice de balanceo relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ), sin dar importancia al índice relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ), la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.11950597007297 \quad y_{c3} = 0.0984494486824036 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma la ShF del mecanismo se reduce un 78.74 %, mientras que el ShM se mantiene prácticamente igual, pues solo se reduce un 0.42 %.

- Si el interés es optimizar el índice de balanceo relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ), la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.2409862661 \quad y_{c3} = 0.00129085476 \quad t_{c3} = 0.007151151098$$

Al usar esta solución, el ShM del mecanismo se reduce un 73.61 %, mientras que la ShM solo se reduce 3.22 %.

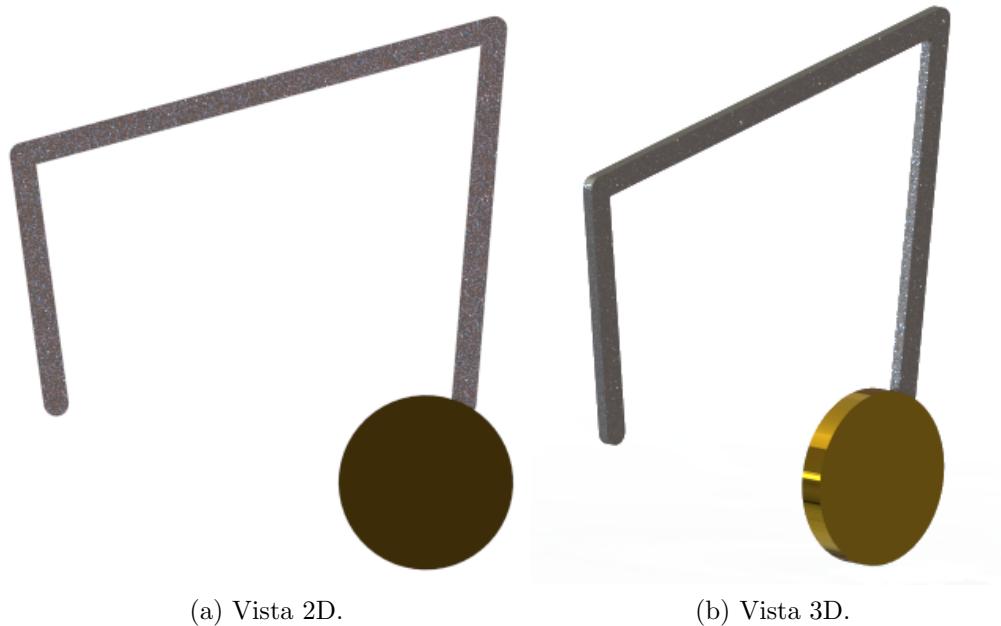
- Ahora bien, si el interés es optimizar ambos índices de balanceo (( $\beta_{ShF}$ ) y ( $\beta_{ShM}$ )) la solución seleccionada corresponde a los parámetros:

$$x_{c3} = -0.130165416712609 \quad y_{c3} = 0.0500126887169449 \quad t_{c3} = 0.04$$

Esta solución reduce la ShF en un 51.19 % y el ShM en un 53.31 %.

En la figura **5-12** se observa el resultado de implementar esta solución.

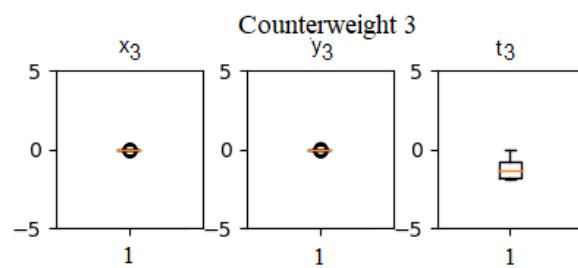
En la tabla **5-2** se puede observar la comparación entre los resultados de optimización del balanceo del mecanismo de cuatro barras utilizando tres, dos o un contrapeso, resulta claro que los mejores resultados se obtienen al utilizar tres contrapesos, sin embargo es interesante notar que al reducir el número de contrapesos y utilizar únicamente el contrapeso 3 todavía es posible mejorar el equilibrio de todo el mecanismo y reducir el costo total de la implementación.



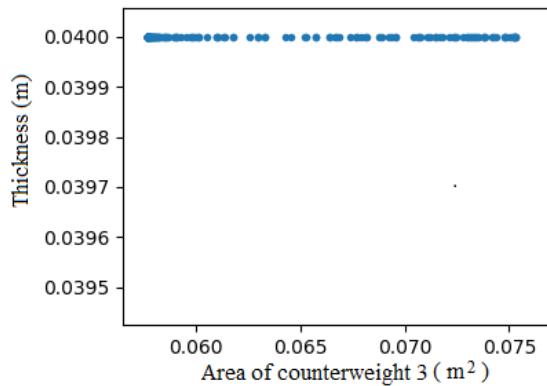
(a) Vista 2D.

(b) Vista 3D.

**Figura 5-12.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de cuatro barras utilizando un contrapeso.



**Figura 5-13.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras.



**Figura 5-14.**: Relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 cuando se utiliza solamente un contrapeso en el mecanismo de cuatro barras

### 5.5.11. Análisis de límites para la optimización del balance utilizando un contrapeso

La figura 5-13 muestra los diagramas de caja de las derivadas parciales del gradiente con respecto a cada variable  $x_3$ ,  $y_3$  y  $t_3$  cuando se usa solo el tercer contrapeso. Analizando estos diagramas es posible observar que los límites de optimización para  $x_3$  y  $y_3$  son adecuados, pero el diagrama correspondiente a  $t_3$  muestra que la derivada parcial del gradiente tiende a ser negativa, significando que este valor está tratando de ser aún mayor. Esto puede confirmarse observando la relación entre el área y el espesor del contrapeso 3 en la figura 5-14, donde el espesor en todos los casos está intentando tomar valores más altos. Entonces, si la solución se implementara usando solo un contrapeso, y si las limitaciones mecánicas lo permiten, podría ser interesante asignar un límite más alto en la restricción para la optimización de esta variable, de modo que se puedan lograr resultados aún mejores.

### 5.5.12. Expansión los límites de optimización para el espesor del tercer contrapeso.

Como se demostró anteriormente, utilizando los diagramas de caja de las derivadas parciales del gradiente con respecto a cada variable, el histograma de los valores de volumen de los contrapesos y los gráficos de la relación entre área y espesor, es posible obtener información valiosa sobre los límites elegidos para la optimización del balanceo, permitiendo de esta forma saber si sería recomendable aumentar o disminuir estas restricciones para obtener mejores resultados de optimización. La decisión de modificar los límites depende de las características mecánicas de todo el mecanismo.

Tomando el ejemplo previamente analizado de la figura 5-13 y la figura 5-14 , donde la recomendación fue elegir un límite superior para la variable correspondiente al espesor  $t_3$ , se

lleva a cabo un nuevo proceso de optimización con las restricciones (5-49).

$$\begin{aligned} -0.40m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.05m \end{aligned} \quad (5-49)$$

Es decir que el límite superior en la restricción correspondiente a  $t_3$  se amplió de  $0.04m$  a  $0.05m$ .

De esta forma, si de los resultados de la optimización se elige una solución dando mayor importancia al índice de balanceo relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ), el contrapeso 3 resultaría de las siguientes dimensiones:

$$x_{c3} = -0.141021300369708 \quad y_{c3} = -0.00665773774579448 \quad t_{c3} = 0.0207544372440781$$

Usando estos parámetros la ShF se reduce en un 73.92 %, mientras que el ShM se reduce en un 14.32 %.

Por otro lado, cuando se da la importancia de optimizar el índice de balanceo relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ), las características físicas del contrapeso 3 deberían ser:

$$x_{c3} = -0.1112378507983744 \quad y_{c3} = 0.091294702876245 \quad t_{c3} = 0.05$$

Usando estas dimensiones el ShM se redujo en un 80.17 % y la ShF se redujo en un 5.30 %.

La tabla 5-3 muestra una comparación entre los resultados de optimización con los límites expandidos y los límites originales. Se puede ver que al expandir el límite superior del espesor del contrapeso 3 la optimización del ShM mejora con respecto a la que se había obtenido con las restricciones originalmente propuestas. La figura 5-15 muestra la comparación de los PF antes y después de cambiar los límites de optimización. Se confirma entonces que el espesor del contrapeso 3 tiene una mayor influencia en la optimización del ShM del mecanismo, y al aumentar este límite, los resultados de optimización pueden ser mejores.

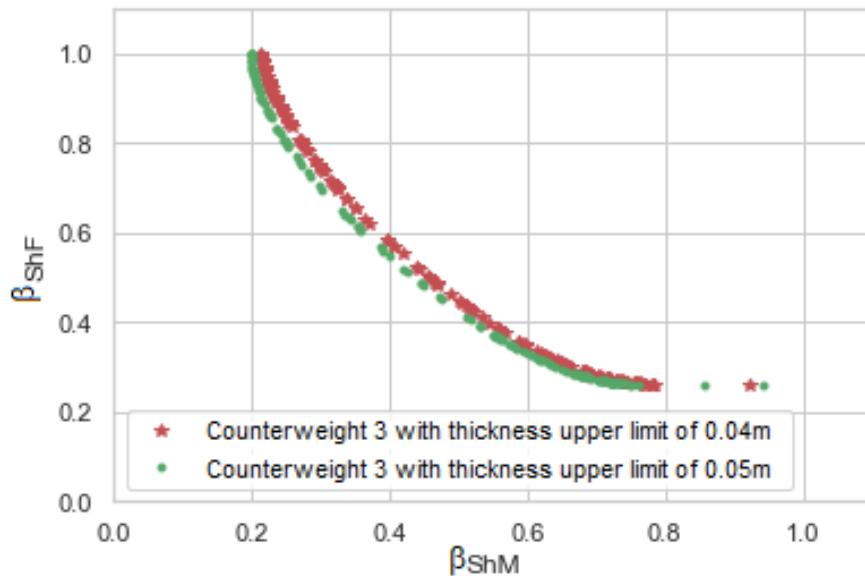
## 5.6. Conclusiones

Al emplear FCC para representar el balanceo de un mecanismo, las ecuaciones que definen las reacciones resultan menos complejas que aquellas que podrían ser obtenidas utilizando otros tipo de coordenadas, por lo tanto, el uso de este tipo de coordenadas es adecuado para llevar a cabo análisis que involucren el balanceo completo de un mecanismo, el cálculo de la ShF o del ShM, o la optimización para minimizar estas reacciones.

El uso de FCC para representar un mecanismo de cuatro barras, en conjunto con el algoritmo de PGD simplificado para optimizar el balanceo del mecanismo, demostró ser una

**Tabla 5-3.: Comparación entre los resultados de optimización al expandir el límite del espesor del contrapeso tres del mecanismo de cuatro barras.**

		Optimización de la ShF	Optimización del ShM
Usando 0.05m como límite superior $t_3$	Optimización de la ShF	73.92 %	14.32 %
	Optimización del ShM	5.30 %	80.17 %
Usando 0.04m como límite superior $t_3$	Optimización de la ShF	78.74 %	0.42 %
	Optimización del ShM	3.22 %	73.61 %



**Figura 5-15.: Comparación de los PF al cambiar los límites del espesor del contrapeso 3 del mecanismo de cuatro barras.**

metodología adecuada pues permite reducir la ShF y el ShM en un 99.70 % y un 28.69 % respectivamente cuando se da mayor importancia al índice de balance correspondiente al ShF; y dando mayor importancia al índice de balance correspondiente al ShM permite reducir el ShM y la ShF en un 83.99 % y un 8.47 % respectivamente.

El algoritmo de optimización se aplicó con éxito para resolver el problema. El uso de la combinación lineal de funciones es una forma simple pero robusta de manejar múltiples objetivos. La aproximación de las derivadas basadas en la Diferencia Finita permite guiar en forma correcta al algoritmo.

La comparación entre los PF demostró ser una metodología adecuada para analizar la sensibilidad del balanceo del mecanismo a cada contrapeso. El uso de este método ha demostrado que incluso utilizando solo un contrapeso, la ShF se puede reducir un 78.74 % o bien, el ShM se puede reducir hasta un 73.61 %.

Los diagramas de caja de las derivadas parciales con respecto a cada variable, los histogramas de volúmenes y las relaciones entre área y espesor permiten analizar los límites de optimización propuestos, de esta forma se puede conocer cuáles límites se podrían modificar para la obtención de mejores resultados.

En la bibliografía consultada, [56], mediante la implementación de algoritmos genéticos logra una optimización del ShFx del 90.96 %, una optimización del ShFy del 77.54 % y una optimización del ShM del 76.21 %, sin embargo estos resultados se obtienen considerando una redistribución de masas, sin especificar los medios físicos que se emplearán para lograrlo. Lo mismo ocurre en [27], en donde utilizando un algoritmo Firefly se logra una optimización del ShFx del 96.77 %, una optimización del ShFy del 75.84 % y una optimización del ShM del 83.39 %. Para el mecanismo que se presenta en este artículo el balanceo queda definido claramente mediante la adición de contrapesos que se encuentran directamente unidos al mecanismo original, pudiendo de esta forma a la solución el ser implementada directamente.

Por su parte [59, 170] en donde se emplea el algoritmo de Evolución Diferencial, presentan sus resultados únicamente mediante gráficas, sin especificar porcentajes de mejora ni resultados de ShF ni de ShM, haciendo imposible establecer una comparación.

# **6. Análisis y optimización del balanceo dinámico de un mecanismo de seis barras**

## **6.1. Introducción**

El balanceo dinámico de mecanismos de seis barras ha sido ampliamente estudiado por diferentes autores [28, 56, 163, 3, 2] y existen numerosas técnicas que permiten llevar a cabo el balanceo completo una vez que las condiciones de balance han sido determinadas. Sin embargo, la mayoría de los métodos propuestos para el balanceo dinámico son llevados a cabo utilizando coordenadas cartesianas. Este es el caso de [62, 63, 60] en donde se presenta un método para obtener las condiciones de balanceo de mecanismos complejos utilizando una combinación entre la redistribución de masas y la adición de contra-inercias.

A lo largo de este trabajo se ha detallado un nuevo método para obtener las condiciones de balanceo dinámico que ya ha sido presentado en [2, 114] en donde se emplea una matriz de masas constante definida previamente por [80].

Entre las principales contribuciones de este capítulo se encuentran la definición de una matriz de masas en coordenadas naturales para elementos formados por tres puntos básicos y su aplicación posterior para el análisis de un mecanismo complejo en dos dimensiones, como es el caso de un mecanismo de seis barras. A nuestro conocimiento, la definición explícita de esta matriz no ha sido propuesta hasta el momento en la bibliografía consultada.

Adicionalmente se presenta la optimización del balanceo de un mecanismo de seis barras mediante el uso de contrapesos, para ello se comienza obteniendo la matriz de masas de cada uno de los eslabones que componen al mecanismo, por medio de las cuales se ensambla la matriz del eslabonamiento completo y se obtienen las expresiones que definen las reacciones de ShF y ShM en la base del mecanismo. Utilizando estas expresiones se define la función objetivo que se busca minimizar y se emplea un algoritmo de DE para llevar a cabo la optimización. Ésta se realiza considerando cinco, cuatro, tres, dos y un contrapeso; en cada caso se analizan los resultados numéricos, los límites de optimización y se realiza un análisis de sensibilidad que permite conocer la influencia en el balanceo de cada uno de los contrapesos

utilizados de forma tal que puede decidirse cuáles utilizar en caso de que la cantidad de contrapesos tenga que verse reducida.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: La sección 6.2 presenta el proceso para la obtención de la matriz de masas constante para elementos definidos mediante tres puntos básicos a través del uso de FCC, en la sección 6.3 se detalla el procedimiento para la obtención de las matrices de masas de cada uno de los elementos que conforman el mecanismo, así como el ensamble de la matriz de masas del mecanismo completo y la obtención de las expresiones de las reacciones en la base del mecanismo. La sección 6.4 define la función objetivo y los límites de optimización. En la sección 6.5 se describe el algoritmo de optimización propuesto. Posteriormente en la sección 6.6 se lleva a cabo el análisis numérico de un ejemplo concreto para la optimización del balanceo de un mecanismo de seis barras, y se aplican los métodos propuestos en el capítulo anterior para la reducción de los contrapesos y el análisis de los resultados. Por último en la sección 6.7 se presentan las conclusiones.

## 6.2. Matriz de masas en coordenadas naturales de un elemento definido por tres puntos básicos

En esta sección se presenta en forma detallada el método para obtener una matriz de masas  $M_{3P}$  para elementos definidos por tres puntos básicos utilizando coordenadas naturales y basándose en el concepto de trabajo virtual.

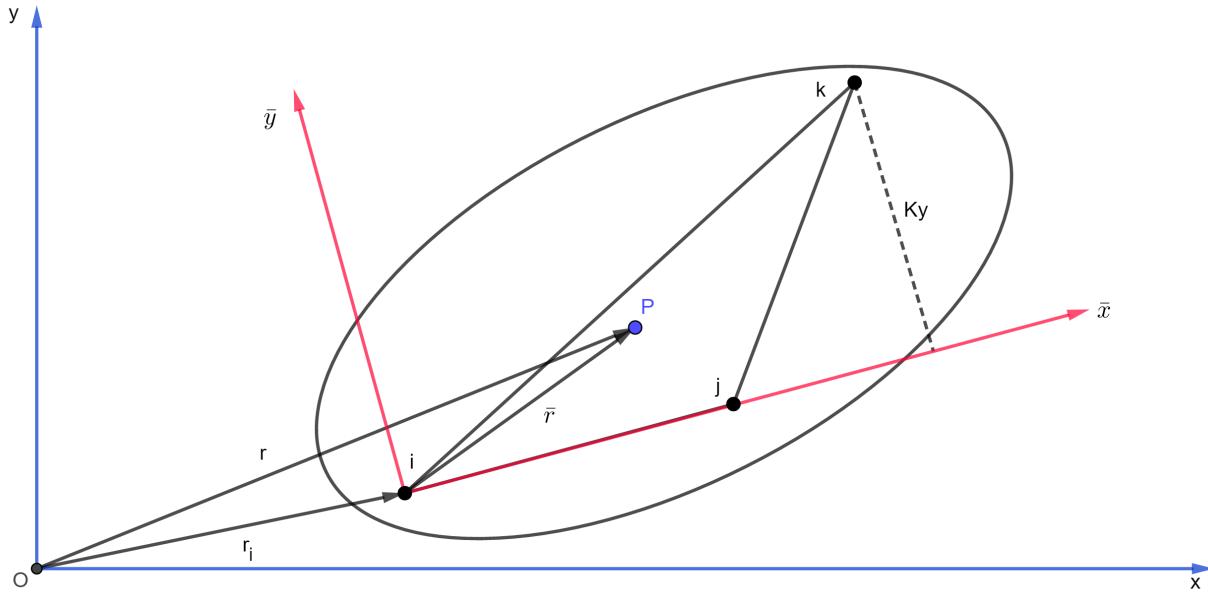
Considere el elemento mostrado en la figura 6-1 que se encuentra definido completamente por tres puntos básicos  $i$ ,  $j$  y  $k$ ; dicho elemento se encuentra ubicado en un sistema de coordenadas globales  $(x, y)$  y en un sistema de coordenadas local  $(\bar{x}, \bar{y})$  con su origen en el punto  $i$  y el eje  $\bar{x}$  dirigido hacia el punto  $j$ .

La ubicación de un punto cualquiera  $P$  del elemento se encuentra definido por un vector  $r$  en el sistema de referencia global, y un vector  $\bar{r}$  en el sistema de coordenadas local. De esta forma  $r$  puede expresarse de acuerdo a la ecuación 6-1, en donde  $A$  corresponde a la matriz de rotación.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + A\bar{\mathbf{r}} \quad (6-1)$$

Debido a que el elemento es rígido, la posición local del vector  $\bar{r}$  permanece constante sin importar el movimiento del elemento. De esta forma, la posición del punto  $P$  queda definida de acuerdo a la ecuación 6-2.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + A\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i + c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (6-2)$$



**Figura 6-1.:** Elemento 2D con tres puntos básicos.

En donde  $c_1$  y  $c_2$  son las componentes del vector  $\bar{r}$  en el sistema de coordenadas locales. Entonces, las componentes del vector  $r$  quedan definidas de acuerdo a la ecuación 6-3, que puede ser expresada en forma matricial, tal como se muestra en la ecuación 6-4. .

$$x = x_i + c_1(x_j - x_i) \quad \dots \quad y = y_i + c_1(y_j - y_i) \quad (6-3)$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 - c_2 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 1 - c_1 - c_2 & 0 & c_1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix} = \mathbf{Cq} \quad (6-4)$$

En donde  $\mathbf{q}^T = \{x_i \ y_i \ x_j \ y_j \ x_k \ y_k\}$  es el vector que contiene las coordenadas naturales del elemento. Es importante notar también que la matriz  $\mathbf{C}$  es constante para un punto dado  $P$  y no cambia con el movimiento del sistema, cumpliéndose entonces las ecuaciones 6-5 y 6-6.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} \quad (6-6)$$

Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  que definen a la matriz  $\mathbf{C}$  se pueden expresar en función de las coordenadas de los puntos  $i$ ,  $j$  y  $k$  en el marco de referencia local de acuerdo con la ecuación 6-7.

$$\bar{\mathbf{r}} = c_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + c_2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (6-7)$$

Al encontrarse  $\bar{\mathbf{r}}_i = 0$  en el origen de referencia local, la ecuación 6-7 puede expresarse como se observa en la ecuación 6-8.

$$\bar{\mathbf{r}} = [ \bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{r}}_k ] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c} \quad (6-8)$$

En donde el vector  $\mathbf{c}$  contiene los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$ , y la matriz  $\bar{\mathbf{X}}$  tiene como columnas los componentes de los vectores  $\bar{\mathbf{r}}_j$  y  $\bar{\mathbf{r}}_k$  (ecuación 6-9).

$$\bar{\mathbf{X}} = [ \bar{\mathbf{r}}_j \mid \bar{\mathbf{r}}_k ] = \begin{bmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ij} & K_x \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

Ahora es posible definir el trabajo virtual  $W^*$  (ecuación 6-10) generado por las fuerzas de inercia.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^{*T} \ddot{\mathbf{r}} d\Omega \quad (6-10)$$

Donde  $\rho$  corresponde a la densidad del material del elemento.

Sustituyendo las ecuaciones 6-5 y 6-6 en la ecuación 6-10 el trabajo virtual queda definido de acuerdo a la ecuación 6-11.

$$W^* = -\rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} d\Omega \quad (6-11)$$

Y debido a que los vectores  $\dot{\mathbf{q}}^{*T}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  son independientes de  $\Omega$ , éstos pueden salir de la integral, obteniéndose la ecuación 6-12.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (6-12)$$

Por otra parte, tomando en cuenta la definición de trabajo virtual que se plantea en [80] (ecuación 6-13) y comparándolo con la ecuación 6-12, la matriz de masas  $\mathbf{M}$  queda definida tal como se muestra en la ecuación 6-14.

$$W^* = -\dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (6-13)$$

$$\mathbf{M}_{3P} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\Omega \quad (6-14)$$

Y desarrollando el producto de  $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$  en la ecuación 6-14 se obtiene la ecuación 6-15.

$$\mathbf{M}_{3P} = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} c_e & 0 & c_f & 0 & c_g & 0 \\ 0 & c_e & 0 & c_f & 0 & c_g \\ c_f & 0 & c_h & 0 & c_i & 0 \\ 0 & c_f & 0 & c_h & 0 & c_i \\ c_g & 0 & c_i & 0 & c_j & 0 \\ 0 & c_g & 0 & c_i & 0 & c_j \end{bmatrix} d\Omega \quad (6-15)$$

En donde:

$$c_e = c_1^2 + 2c_1c_2 - 2c_1 + c_2^2 - 2c_2 + 1 \quad (6-16)$$

$$c_f = -c_1^2 - c_1c_2 + c_1 \quad (6-17)$$

$$c_g = -c_1c_2 - c_2^2 + c_2 \quad (6-18)$$

$$c_h = c_1^2 \quad (6-19)$$

$$c_i = c_1c_2 \quad (6-20)$$

$$c_j = c_2^2 \quad (6-21)$$

Note que la ecuación 6-15 involucra resolver las integrales 6-22, 6-23 y 6-24.

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = m \quad (6-22)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \mathbf{c} d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{X}}^{-1} \bar{\mathbf{r}} d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{ij}} & -\frac{K_x}{K_y l_{ij}} \\ 0 & \frac{1}{K_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} d\Omega = \\ &\rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}}{l_{ij}} - \frac{\bar{y} K_x}{K_y l_{ij}} \\ \frac{\bar{y}}{K_y} \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \frac{m \bar{x}_g}{l_{ij}} - \frac{m \bar{y}_g K_x}{K_y l_{ij}} \\ \frac{m \bar{y}_g}{K_y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-23)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{c} \mathbf{c}^T d\Omega = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left( \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T d\Omega \right) \bar{\mathbf{X}}^{-\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left( \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} \bar{x}^2 & \bar{x}\bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} & \bar{y}^2 \end{bmatrix} d\Omega \right) \bar{\mathbf{X}}^{-\mathbf{T}} =$$

$$\bar{\mathbf{X}}^{-1} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^{-\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} & -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} \\ -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} & \frac{I_x}{K_y^2} \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

En donde  $m$  es la masa total del elemento,  $\bar{\mathbf{r}}$  representa las coordenadas locales del centro de gravedad e  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  son los momentos y productos de inercia con respecto a las coordenadas locales cuyo origen se encuentra en el punto básico  $i$ .

Sustituyendo las integrales 6-22, 6-23 y 6-24 en la ecuación 6-15 se obtiene la matriz de masas  $\mathbf{M}_{3P}$  (ecuación 6-25).

$$\mathbf{M}_{3P} = \begin{bmatrix} e & 0 & f & 0 & g & 0 \\ 0 & e & 0 & f & 0 & g \\ f & 0 & h & 0 & i & 0 \\ 0 & f & 0 & h & 0 & i \\ g & 0 & i & 0 & j & 0 \\ 0 & g & 0 & i & 0 & j \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

En donde:

$$e = \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l^2} - \frac{2I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_x}{K_y^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{2I_{xy}}{K_y l_{ij}} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} + \frac{2K_x m \bar{y}_g}{K_y l_{ij}} + m - \frac{2m \bar{x}_g}{l_{ij}} - \frac{2m \bar{y}_g}{K_y} \quad (6-26)$$

$$f = -\frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} + \frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} - \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} - \frac{I_y}{l_{ij}^2} - \frac{K_x m \bar{y}_g}{K_y l_{ij}} + \frac{m \bar{x}_g}{l_{ij}} \quad (6-27)$$

$$g = \frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} - \frac{I_x}{K_y^2} - \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} + \frac{m \bar{y}_g}{K_y} \quad (6-28)$$

$$h = \frac{I_x K_x^2}{K_y^2 l_{ij}^2} - \frac{2I_{xy} K_x}{K_y l_{ij}^2} + \frac{I_y}{l_{ij}^2} \quad (6-29)$$

$$i = -\frac{I_x K_x}{K_y^2 l_{ij}} + \frac{I_{xy}}{K_y l_{ij}} \quad (6-30)$$

$$j = \frac{I_x}{K_y^2} \quad (6-31)$$

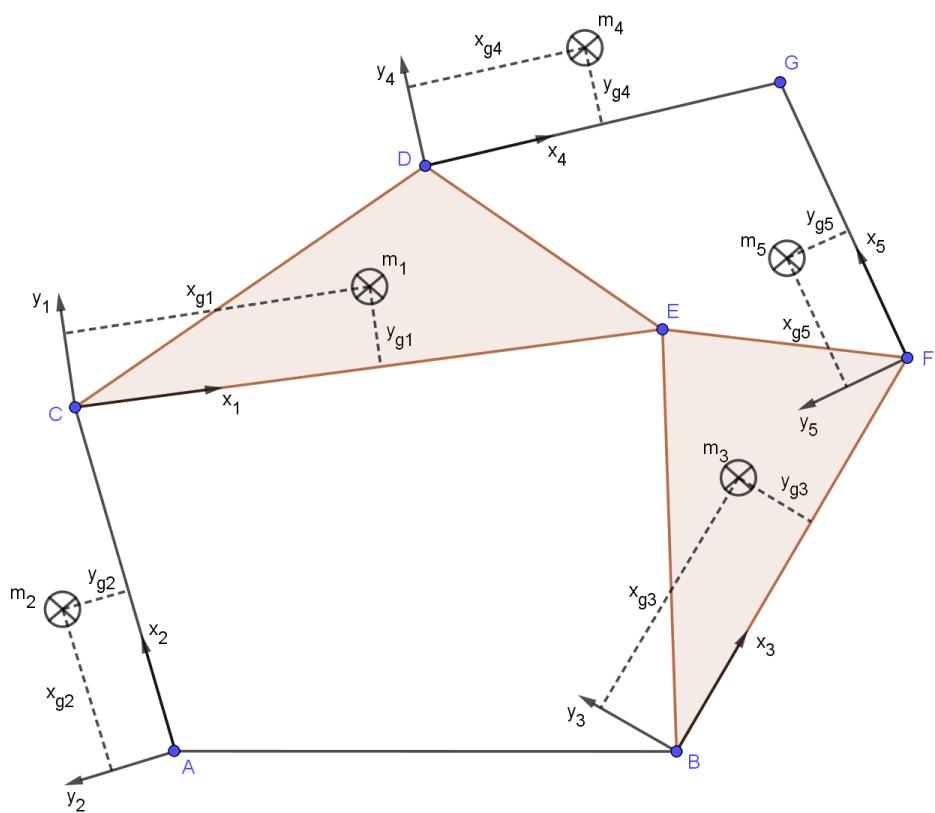


Figura 6-2.: Mecanismo de seis barras

**Tabla 6-1.:** Distribución de puntos para el mecanismo de seis barras

Elemento	Punto i	Punto j	Punto k
1	C	E	D
2	A	C	
3	B	F	E
4	D	G	
5	F	G	

## 6.3. Mecanismo de seis barras

En la figura 6-2 se muestra un mecanismo de seis barras, este tipo de mecanismos con un grado de libertad se componen de cinco eslabones móviles. Cada uno de los eslabones tiene un sistema de coordenadas local con su origen ubicado en el punto i y el eje x en dirección al punto j, cada uno de ellos con una masa  $m_{bn}$  y un centro de gravedad ubicado en las coordenadas locales  $(x_{bn}, y_{bn})$  para  $1 \leq n \leq 5$ . La disposición de los puntos se muestra en la tabla 6-1 y puede apreciarse también con claridad en la figura 6-3.

Para el mecanismo descrito, es posible definir un vector  $\mathbf{q}$  (ecuación 6-32) que represente las posiciones de los puntos básicos de todo el mecanismo.

$$\mathbf{q} = [A_x \ A_y \ B_x \ B_y \ C_x \ C_y \ D_x \ D_y \ E_x \ E_y \ F_x \ F_y \ G_x \ G_y]^T \quad (6-32)$$

Derivando el vector  $\mathbf{q}$  es posible obtener un nuevo vector  $\dot{\mathbf{q}}$  que represente las velocidades de cada uno de los puntos básicos del mecanismo completo (ecuación 6-33).

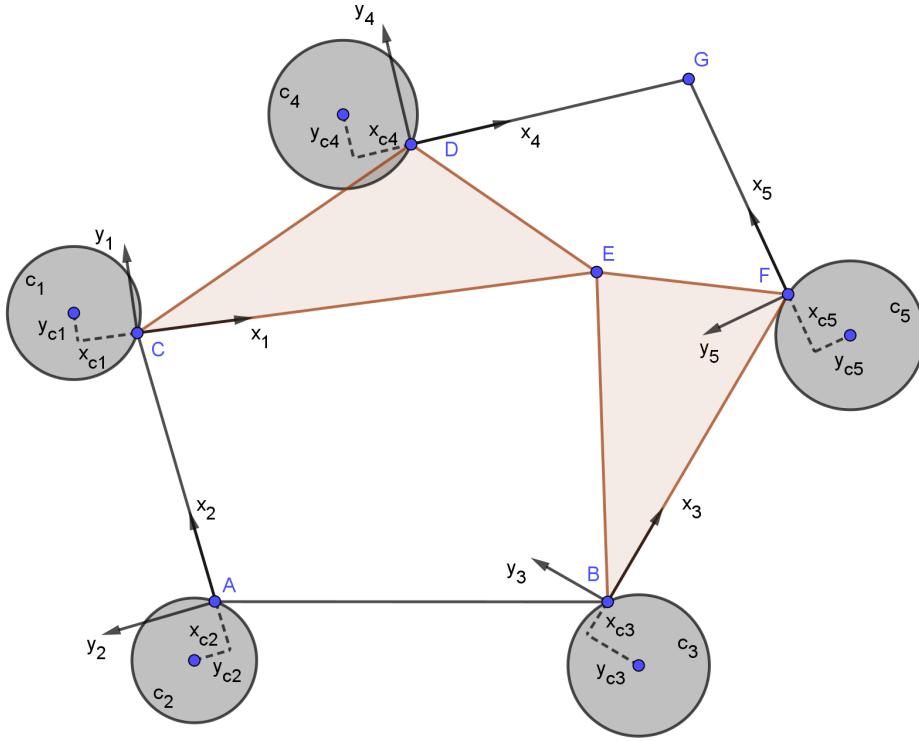
$$\dot{\mathbf{q}} = [V_{Ax} \ V_{Ay} \ V_{Bx} \ V_{By} \ V_{Cx} \ V_{Cy} \ V_{Dx} \ V_{Dy} \ V_{Ex} \ V_{Ey} \ V_{Fx} \ V_{Fy} \ V_{Gx} \ V_{Gy}]^T \quad (6-33)$$

Y al derivar nuevamente el vector de velocidades se obtiene el vector de aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  (ecuación 6-34) de cada uno de los puntos básicos del mecanismo.

$$\ddot{\mathbf{q}} = [A_{Ax} \ A_{Ay} \ A_{Bx} \ A_{By} \ A_{Cx} \ A_{Cy} \ A_{Dx} \ A_{Dy} \ A_{Ex} \ A_{Ey} \ A_{Fx} \ A_{Fy} \ A_{Gx} \ A_{Gy}]^T \quad (6-34)$$

### 6.3.1. Adición de contrapesos

Debido a que se desea optimizar el balanceo dinámico del mecanismo de seis barras (es decir que se desea minimizar tanto la ShF como el ShM) utilizando únicamente contrapesos en forma de disco, se considera la adición de cinco contrapesos que se encontrarán ubicados tal como se muestra en la figura 6-3. Con la finalidad de simplificar la exemplificación del método que se propone, se ha supuesto que todos los contrapesos serán coincidentes con el



**Figura 6-3.: Contrapesos para el balanceo del mecanismo de seis barras**

punto básico i de cada uno de los elementos del mecanismo. El centro de gravedad de cada contrapeso se encontrará ubicado en las coordenadas locales  $(x_{cn}, y_{cn})$  para  $1 \leq n \leq 5$ . Por otra parte, el espesor de cada uno de los contrapesos estará definido por  $t_{cn}$  para  $1 \leq n \leq 5$ .

Es posible entonces definir la masa  $m_{cn}$  de cada contrapeso en función de su densidad  $\rho_{cn} = \rho$ , su espesor  $t_{cn}$ , y la ubicación de su centro de masas  $(x_{cn}, y_{cn})$ , tal como se muestra en la ecuación 6-35.

$$m_{cn} = \rho \text{ Volumen} = \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-35)$$

También es posible calcular los momentos de masa para cada uno de los contrapesos con respecto al origen del sistema de coordenadas locales mediante las ecuaciones 6-36 y 6-37.

$$I_{xcn} = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + m y_{cn}^2 = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) = \frac{1}{4} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) (x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) \quad (6-36)$$

$$I_{ycn} = \frac{1}{4} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + m x_{cn}^2 = \frac{1}{4} m_{cn} (5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) = \frac{1}{4} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) (5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-37)$$

El momento polar de inercia de cada contrapeso  $I_{zcn}$  con respecto al origen del sistema de coordenadas locales puede definirse como se muestra en la ecuación 6-38.

$$I_{zcn} = I_{xcn} + I_{ycn} = \frac{3}{2} m_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) = \frac{3}{2} \rho \pi t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \quad (6-38)$$

De forma similar el producto de inercias para cada contrapeso con respecto al origen del sistema de coordenadas locales puede ser calculado mediante la ecuación 6-39.

$$I_{xycn} = m_{cn}x_{cn}y_{cn} = \rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)x_{cn}y_{cn} \quad (6-39)$$

### 6.3.2. Matrices de masas de elementos individuales

Es necesario entonces definir la matriz de masas para cada uno de los elementos que conforman el mecanismo. Dado que cada contrapeso se encuentra unido fijamente a su correspondiente eslabón del mecanismo original, y que la posición de éstos respecto al sistema de referencia local no cambia con el movimiento del mecanismo, es posible considerar en total cinco elementos en el mecanismo a optimizar, cada uno de ellos formado por un eslabón y un contrapeso. Observe que los elementos 1 y 3 contarán con matrices de masas formadas por 3 puntos básicos, mientras que los elementos 2, 4 y 5 tendrán sus matrices de masas formadas por 2 puntos básicos (tabla 6-1).

Para poder definir las matrices de masas de los elementos es necesario sustituir, según corresponda, los términos  $m$ ,  $\bar{x}_g$ ,  $\bar{y}_g$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  e  $I_z$ , en las ecuaciones que definen las matrices de masas tanto de dos puntos (ecuación 2-20) como de tres puntos (ecuación 6-25), considerando en cada uno de ellos el aporte tanto del eslabón como del contrapeso. De ahí que para cada elemento  $n$  se tiene:

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} = m_{bn} + \rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-40)$$

$$x_{gn} = \frac{x_{bn}m_{bn} + x_{cn}m_{cn}}{m_{bn} + m_{cn}} \quad (6-41)$$

$$y_{gn} = \frac{y_{bn}m_{bn} + y_{cn}m_{cn}}{m_{bn} + m_{cn}} \quad (6-42)$$

$$I_{xn} = I_{xbn} + I_{xcn} = I_{xbn} + \frac{1}{4}\rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(x_{cn}^2 + 5y_{cn}^2) \quad (6-43)$$

$$I_{yn} = I_{ybn} + I_{ycn} = I_{ybn} + \frac{1}{4}\rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(5x_{cn}^2 + y_{cn}^2) \quad (6-44)$$

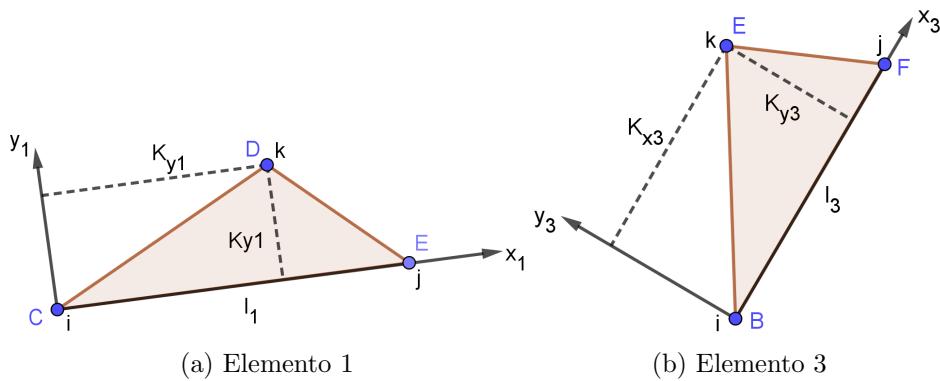
$$I_{xyn} = I_{xybn} + I_{xycn} = I_{xybn} + \rho\pi t_{cn}(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)x_{cn}y_{cn} \quad (6-45)$$

$$I_{zn} = I_{zbn} + I_{zcn} = I_{xbn} + I_{ybn} + I_{xcn} + I_{ycn} \quad (6-46)$$

### Matriz de masas del elemento 1 y 3

En el elemento 1 se considera el punto C como  $i$ , el punto E como  $j$  y el punto D como  $k$  para la definición de la matriz de masas de un elemento formado por tres puntos básicos. De forma similar para el elemento 3 se considera el punto B como  $i$ , el punto F como  $j$  y el punto E como  $k$ .

En la figura 6-4 se muestran las medidas para  $K_{x1}$ ,  $K_{y1}$ ,  $K_{x3}$  y  $K_{y3}$ , también se observa que para el elemento 1  $l_{ij} = l_1$  corresponde a la distancia  $\bar{CE}$  mientras que para el elemento 2  $l_{ij} = l_2$  corresponde a la distancia  $\bar{BF}$ .



**Figura 6-4.**: Ubicación de las dimensiones para elementos definidos por tres puntos básicos

Utilizando la matriz de masas  $M_{3P}$  (ecuación 6-25) los términos de la matriz de masa de los elementos  $n = 1$  y  $n = 3$  quedan definidos de acuerdo a las ecuaciones que van de la 6-47 a

la 6-52.

$$\begin{aligned}
e_n = & \frac{I_{xbn}K_{xn}^2}{K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{2I_{xbn}K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} + \frac{I_{xbn}}{K_{yn}^2} - \frac{2I_{xybn}K_{xn}}{K_{yn} l_n^2} + \frac{2I_{xybn}}{K_{yn} l_n} + \frac{I_{ybn}}{l_n^2} + \frac{\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} \\
& + \frac{3\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{5\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{2K_{xn} m_{bn} y_{bn}}{K_{yn} l_n} + \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn} \\
& + \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n} t_{cn} y_{cn}^3 - \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn}^3 y_{cn} - \frac{2\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3 - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{2K_{yn}^2 l_n} \\
& - \frac{3\pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2 - \frac{5\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{2K_{yn}^2 l_n} - \frac{2m_{bn}^2 x_{bn}}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2m_{bn}^2 y_{bn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{bn} x_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{bn} y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^3}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{bn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} y_{bn} y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi m_{bn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^3}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^5}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^4 y_{cn}}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{4\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^3 y_{cn}^2}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{4\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn}^2 y_{cn}^3}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 x_{cn} y_{cn}^4}{l_n m_{bn} + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi l_n \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} \\
& - \frac{2\pi^2 \rho_{cn}^2 t_{cn}^2 y_{cn}^5}{K_{yn} m_{bn} + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 + \pi K_{yn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2} + 1 + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn}}{4l_n^2} x_{cn}^4 + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn}}{2l_n^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 \\
& + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4l_n^2} + \frac{2\pi \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 y_{cn} + \frac{2\pi \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4K_{yn}^2} + \frac{3\pi \rho_{cn} t_{cn}}{2K_{yn}^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 \\
& + \frac{5\pi \rho_{cn} t_{cn}}{4K_{yn}^2} y_{cn}^4
\end{aligned} \tag{6-47}$$

$$\begin{aligned}
f_n = & -\frac{I_{x_{bn}} K_{xn}^2}{K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{I_{x_{bn}} K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} + \frac{2 I_{xy_{bn}} K_{xn}}{K_{yn} l_n^2} - \frac{I_{xy_{bn}}}{K_{yn} l_n} - \frac{I_{y_{bn}}}{l_n^2} - \frac{\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n^2} \\
& - \frac{3 \pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2 K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{5 \pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{K_{xn} m_{bn} y_{bn}}{K_{yn} l_n} - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^2 y_{cn} \\
& - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3 + \frac{2 \pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn}^3 y_{cn} + \frac{2 \pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} \\
& + \frac{3 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn}^2}{2 K_{yn}^2 l_n} + \frac{5 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} + \frac{m_{bn} x_{bn}}{l_n} + \frac{\pi \rho_{cn}}{l_n} t_{cn} x_{cn}^3 + \frac{\pi \rho_{cn}}{l_n} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^2 \\
& - \frac{5 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{4 l_n^2} x_{cn}^4 - \frac{3 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{2 l_n^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 l_n^2} - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3
\end{aligned} \tag{6-48}$$

$$\begin{aligned}
g_n = & \frac{I_{x_{bn}} K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} - \frac{I_{x_{bn}}}{K_{yn}^2} - \frac{I_{xy_{bn}}}{K_{yn} l_n} + \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} + \frac{3 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2 K_{yn}^2 l_n} y_{cn}^2 \\
& + \frac{5 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} + \frac{m_{bn} y_{bn}}{K_{yn}} + \frac{\pi \rho_{cn}}{K_{yn}} t_{cn} x_{cn}^2 y_{cn} + \frac{\pi \rho_{cn}}{K_{yn}} t_{cn} y_{cn}^3 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 \\
& - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3 - \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2} - \frac{3 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{2 K_{yn}^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 - \frac{5 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{4 K_{yn}^2} y_{cn}^4
\end{aligned} \tag{6-49}$$

$$\begin{aligned}
h_n = & \frac{I_{x_{bn}} K_{xn}^2}{K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{2 I_{xy_{bn}} K_{xn}}{K_{yn} l_n^2} + \frac{I_{y_{bn}}}{l_n^2} + \frac{\pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n^2} + \frac{3 \pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2 K_{yn}^2 l_n^2} y_{cn}^2 \\
& + \frac{5 \pi K_{xn}^2 \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n^2} - \frac{2 \pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn}^3 y_{cn} - \frac{2 \pi K_{xn} \rho_{cn}}{K_{yn} l_n^2} t_{cn} x_{cn} y_{cn}^3 + \frac{5 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{4 l_n^2} x_{cn}^4 \\
& + \frac{3 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{2 l_n^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 l_n^2}
\end{aligned} \tag{6-50}$$

$$\begin{aligned}
i_n = & -\frac{I_{x_{bn}} K_{xn}}{K_{yn}^2 l_n} + \frac{I_{xy_{bn}}}{K_{yn} l_n} - \frac{\pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} - \frac{3 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2}{2 K_{yn}^2 l_n} y_{cn}^2 - \frac{5 \pi K_{xn} \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^4}{4 K_{yn}^2 l_n} \\
& + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}}{K_{yn} l_n} x_{cn}^3 + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}}{K_{yn} l_n} y_{cn}^3
\end{aligned} \tag{6-51}$$

$$j_n = \frac{I_{x_{bn}}}{K_{yn}^2} + \frac{\pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^4}{4 K_{yn}^2} + \frac{3 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{2 K_{yn}^2} x_{cn}^2 y_{cn}^2 + \frac{5 \pi \rho_{cn} t_{cn}}{4 K_{yn}^2} y_{cn}^4 \tag{6-52}$$

### **Matriz de masas del elemento 2, 4 y 5**

Por otra parte, los elementos 2, 4 y 5 se encuentran definidos mediante dos puntos básicos. Para el elemento 2 se considera el punto A como  $i$  y el punto C como  $j$ ; para el elemento 4 se considera el punto D como  $i$  y el punto G como  $j$ ; mientras que para el elemento 5 se considera el punto F como  $i$  y el punto G como  $j$ . Cada uno de ellos con el origen en el punto correspondiente a  $i$ , y el eje x dirigido en dirección del punto correspondiente a  $j$ .  $l_n$  es la distancia entre los puntos  $i$  y  $j$  de cada eslabón.

Al sustituir los términos correspondientes en la matriz de masas de elementos definidos por dos puntos básicos  $M_{2P}$  (ecuación 2-20) se obtienen los términos de la matriz de masas de cada uno de estos elementos (para  $n=2,4,5$ ) conformados por un contrapeso y un eslabón (ecuaciones 6-53 - 6-56).

$$\begin{aligned} a_n = & m_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) - \frac{1}{l_n (m_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))} \\ & (2.0m_{bn} + 2.0\pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) (m_{bn}x_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \\ & + \frac{1}{l_n^2} \left( I_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (6-53)$$

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{1}{l_n} (m_{bn}x_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \\ & - \frac{1}{l_n^2} \left( I_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (6-54)$$

$$c_n = \frac{1}{l_n (m_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))} (-m_{bn} - \pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)) \quad (6-55)$$

$$(m_{bn}y_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2))$$

$$d_n = \frac{1}{l_n^2} \left( I_{bn} + \pi \rho_{cn} t_{cn} x_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + \pi \rho_{cn} t_{cn} y_{cn}^2 (x_{cn}^2 + y_{cn}^2) + 0.5\pi \rho_{cn} t_{cn} (x_{cn}^2 + y_{cn}^2)^2 \right) \quad (6-56)$$

### **6.3.3. Matriz de masas del mecanismo completo**

Una vez que se han definido las matrices de masas para cada uno de los elementos que conforman el mecanismo, es necesario unir toda la información en una matriz de masas

general. Debido a que el mecanismo de seis barras está formado por siete puntos básicos, cada uno de ellos representado por una coordenada en x y otra en y, se tendrá una matriz de masas  $M$  formada por 14 columnas y 14 renglones.

La matriz de masas resultante que representa al mecanismo completo puede apreciarse en la ecuación 6-59.

### 6.3.4. Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Conociendo el vector de posiciones definido en la ecuación 6-32 para cada punto básico, así como sus correspondientes velocidades (ecuación 6-33) y aceleraciones (ecuación 6-34). Es posible calcular el momento lineal  $L$  asociado a todo el sistema (ecuación 6-57).

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (6-57)$$

Donde  $\mathbf{B}$  (ecuación 6-58) es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos tiene el mecanismo, que en este caso particular son siete.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (6-58)$$

Al resolver la ecuación 6-57 y considerando que la velocidad de los puntos fijos es siempre cero ( $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VB_X = 0$ ,  $VB_Y = 0$ ), se obtienen las expresiones del momento lineal ( $\mathbf{L}_i$  y  $\mathbf{L}_j$ ).

La  $ShF_i$  y  $ShF_j$  del mecanismo puede calcularse derivando las ecuaciones  $\mathbf{L}_i$  y  $\mathbf{L}_j$  (ecuación 6-57) con respecto al tiempo (las ecuaciones resultantes no se incluyen en este apartado debido a su longitud, sin embargo es posible apreciarlas en el Anexo A en la forma en que son obtenidas al utilizar el lenguaje de programación Python).

Para garantizar el equilibrio del mecanismo, el resultado de estas derivadas debe ser constante (generalmente se considera cero) en el periodo de tiempo analizado.



### 6.3.5. Momento angular y momento de sacudimiento

Al utilizar FCC, es posible expresar el momento angular de todo el mecanismo  $H$  de la forma:

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-60)$$

Donde  $\mathbf{r}$  está dada en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema y puede ser expresada como:

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X \ -D_Y \ D_X \ -E_Y \ E_X \ -F_Y \ F_X \ -G_Y \ G_X]^T \quad (6-61)$$

El ShM puede entonces calcularse a través de la derivada de  $H$  con respecto al tiempo (ecuaciones 6-62 y 6-63).

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-62)$$

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (6-63)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \ VA_X \ -VB_Y \ VB_X \ -VC_Y \ VC_X \ -VD_Y \ VD_X \ -VE_Y \ VE_X \ -VF_Y \ VF_X \ -VG_Y \ VG_X]^T \quad (6-64)$$

Para garantizar el equilibrio dinámico del mecanismo, el ShM debe ser constante, es decir que la derivada de  $H$  con respecto del tiempo (ecuación 6-63) debe dar por resultado cero.

Al resolver la ecuación 6-63 y considerar  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VB_X = 0$  y  $VB_Y = 0$ , se obtiene el ShM del mecanismo completo. (Esta ecuación no ha sido incluida aquí debido a su longitud, sin embargo puede apreciarse en el Anexo A tal como se obtiene al utilizar el lenguaje de programación Python).

## 6.4. Función objetivo y límites de optimización

Para definir la función objetivo sobre la cual se llevará a cabo el proceso de optimización, se emplean dos índices adimensionales  $\beta_i$ , al igual que se hizo en los capítulos anteriores.

El primero de estos índices  $\beta_{ShF}$  (ecuación 6-65) está definido por el valor RMS de la reacción ShF del mecanismo optimizado ( $rms(^oReaction)$ ) con respecto al valor RMS de la reacción

del mecanismo original ( $rms(Reaction)$ ), ambos considerados durante un periodo de tiempo T.

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^oShF)}{rms(ShF)} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}} \quad (6-65)$$

El segundo de los índices de balanceo  $\beta_{ShM}$  (ecuación 6-66) puede ser calculado de una manera similar al primero pero considerando ahora la reacción provocada por el ShM.

$$\beta_{ShM} = \frac{\sum_{k=1}^N ^oShM_k^2}{\sum_{k=1}^N ShM_k^2} \quad (6-66)$$

Donde  $^oShM$  es el momento de sacudimiento del mecanismo optimizado (es decir cuando se consideran los contrapesos agregados para lograr el balanceo) y  $ShM$  es una constante y representa el momento de sacudimiento del mecanismo sin balancear.

Nuevamente se presenta un problema de optimización multiobjetivo, debido a que el objetivo de optimización es minimizar tanto  $\beta_{ShF}$  como  $\beta_{ShM}$  considerando los límites de las variables (es decir los límites físicos para las ubicaciones de los centros de masas ( $x_{cn}$  y  $y_{cn}$ ) y el espesor ( $t_{cn}$ ) de cada contrapeso). Para resolverlo se realiza una combinación lineal de objetivos, de acuerdo a la ecuación 6-67.

$$f(X) = \gamma * \beta_{ShM} + (1 - \gamma) * \beta_{ShF} \quad (6-67)$$

Donde  $\gamma$  es un valor escalar que da importancia a cada objetivo de la optimización.

Las 15 variables a optimizar son:  $x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}, x_{c4}, y_{c4}, t_{c4}, x_{c5}, y_{c5}$  y  $t_{c5}$ . Los límites de la optimización quedan definidos de acuerdo las desigualdades 6-68.

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leqslant x_{cn} \leqslant x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leqslant y_{cn} \leqslant y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leqslant t_{cn} \leqslant t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (6-68)$$

## 6.5. Algoritmo de optimización

Se implementa entonces el algoritmo de DE que se explicó a detalle en a sección de Fundamentos, sin embargo en esta ocasión el algoritmo definido en la librería Scipy de Python no resultó eficiente para llegar a los mínimos locales debido a que era demasiado lenta, es por ello que el algoritmo fue programado en su totalidad tal como se presenta en el algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3:** Evolución diferencial

---

**Input :**  $N = 255$ ,  $F = 0.8$ ,  $CR = 0.7$ ,  $k_{max} = 100$

```

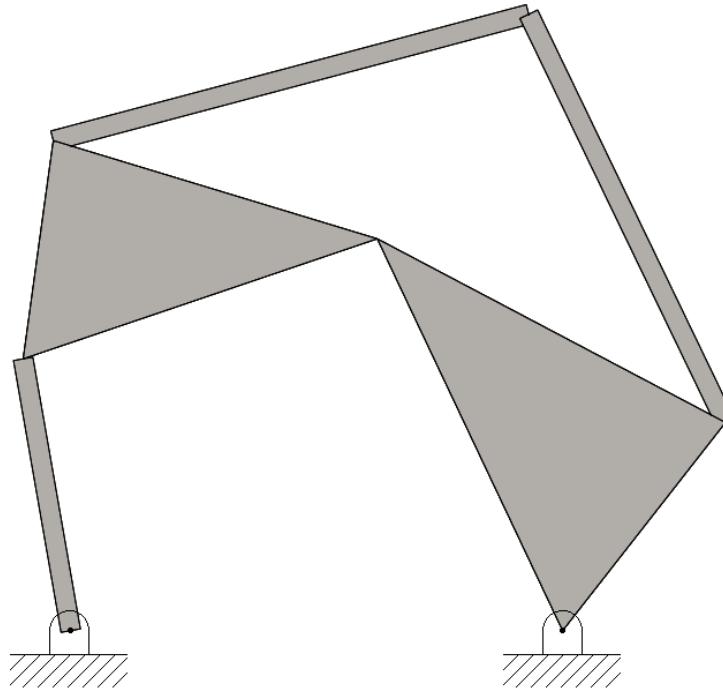
1 Se genera una población inicial aleatoria  $S = \{X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}\}$ 
2  $X_{best}$  = individuo con el menor valor en la función objetivo
3 for  $k = 0$  until  $k_{max}$  do
4    $Q = \{\}$ 
5   for  $i = 1$  until  $N$  do
6     Se seleccionan 3 individuos aleatorios en S  $\gamma, \delta, \eta \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\gamma \neq \delta \neq \eta \neq i$ 
7      $\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k})$ 
8      $\hat{X}_{ik} = Clip(\hat{X}_{ik})$ 
9     for  $j = 1$  until  $D$  do
10    R = Valor aleatorio de una distribución uniforme entre 0 y 1
11    if  $R \leq CR$  then
12      |  $Y_{ikj} = \hat{X}_{ikj}$ 
13    else
14      |  $Y_{ikj} = X_{ikj}$ 
15    end
16  end
17  if  $f(Y_{ik}) < f(X_{ik})$  then
18    |  $Q = Q \cup Y_{ik}$ 
19  else
20    |  $Q = Q \cup X_{ik}$ 
21  end
22  If  $f(Y_{ik}) < f(X_{best})$  then  $X_{best} = Y_{ik}$ 
23  end
24   $S = Q$ 
25   $k = k + 1$ 
26 end
27 return  $X_{best}$ 

```

---

Con la finalidad de aplicar el algoritmo de DE, y dado que el número de variables a optimizar es igual a 15, se crea una población de  $N = 15(15) = 225$  individuos, identificando al  $n_{esimo}$  individuo de la generación  $k$  con el vector  $X_{Nk}$ . Los individuos se inicializan siguiendo una distribución uniforme acotada por límites entre los rangos permitidos para cada una de las variables. Se seleccionan entonces tres individuos para llevar a cabo la mutación aleatoria:  $X_{\gamma k}$ ,  $X_{\delta k}$  y  $X_{\eta k}$  para generar un nuevo individuo:  $\hat{X}_{ik} = X_{\gamma k} + F(X_{\delta k} - X_{\eta k})$  siendo  $F$  un valor aleatorio entre 0 y 2.

La cruce se realiza tomando en cuenta la probabilidad  $CR$  que en este caso fue del 70%



**Figura 6-5.:** Mecanismo de seis barras empleado para el ejemplo numérico.

( $CR=0.7$ ). Entonces  $Y_{ik}$  y  $X_{ik}$  son evaluados en la función a optimizar y, para formar parte de la nueva generación, se elige a aquel con el que se obtienen mejores resultados. Las generaciones se repiten 100 veces, entregándose al final al individuo que presentó el menor valor al ser evaluado en la función objetivo.

## 6.6. Ejemplo numérico

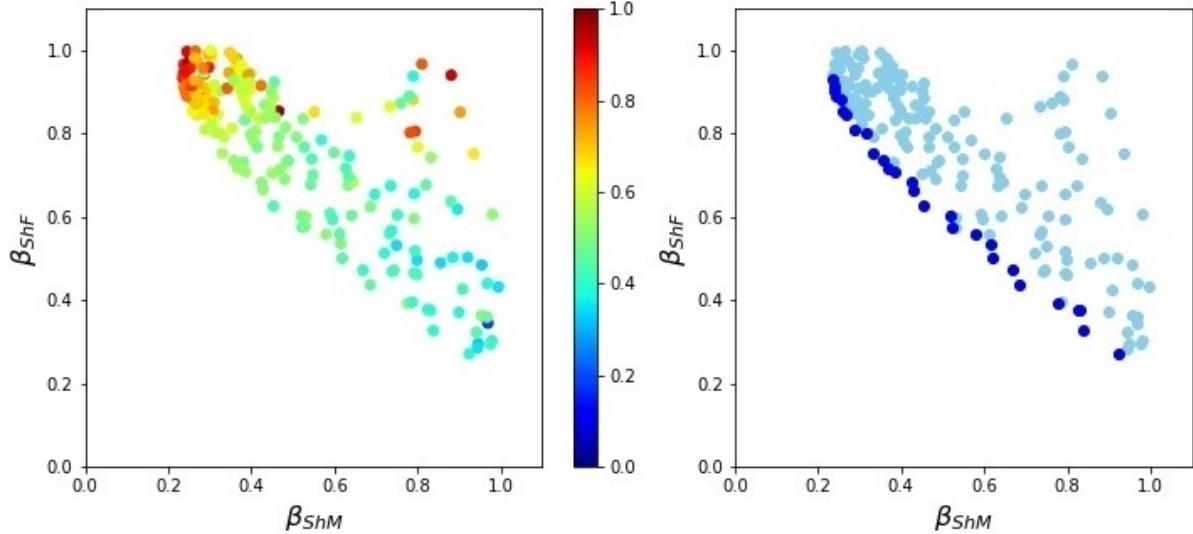
Esta sección presenta un análisis numérico para la optimización del balanceo completo de un mecanismo de seis barras (Figura 6-5, también se lleva a cabo el análisis de presentado tanto en el capítulo anterior, como en [115] para la obtención de información sobre la influencia de cada uno de los contrapesos en relación al balanceo dinámico del mecanismo, lo cual permite tomar decisiones en caso de que resulte necesario disminuir la cantidad de contrapesos a utilizar y lograr aún así resultados óptimos.

### 6.6.1. Características mecánicas y límites de optimización

La tabla 6-2 presenta los parámetros físicos de cada uno de los elementos de un mecanismo de seis barras (figura 6-2) (Los parámetros que se indican con un ‘–’ no son necesarios para

**Tabla 6-2.**: Parámetros de cada eslabón de un mecanismo de seis barras

Cuerpo <i>n</i>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Masa</b> $m_{b_n}$ [kg]	0.6935	0.1022	0.9636	0.1825	0.1679
<b>Longitud</b> $l_n$ [m]	0.19	0.14	0.13416408	0.25	0.23
<b>Inercia</b> $I_{xb_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	0.00116161	-	0.00622646	-	-
<b>Inercia</b> $I_{yb_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	0.00556534	-	0.00657336	-	-
<b>Inercia</b> $I_{zb_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	-	0.00066856	-	0.00380360	0.00296204
<b>Inercia</b> $I_{xyb_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	0.00167596	-	0.00522914	-	-
<b>Centro de masa</b> $x_{b_n}$ [m]	0.08	0.07	0.07751702	0.125	0.115
<b>Centro de masa</b> $y_{b_n}$ [m]	0.03333333	0.0	0.06559133	0.0	0.0
$K_x$ [m]	0.05	-	0.09838699	-	-
$K_y$ [m]	0.1	-	0.196677398	-	-



**Figura 6-6.:** Análisis del PF de objetivos optimizados de  $\beta_{ShM}$  y  $\beta_{ShF}$  para el mecanismo de seis barras.

el estudio que se está llevando a cabo). El material empleado para los eslabones es acero, con una densidad de  $7800\text{kg}/\text{m}^3$ . Los contrapesos son considerados de latón con una densidad ( $\rho_{cn}$ ) de  $8500\text{kg}/\text{m}^3$ .

El mecanismo se mueve mediante un motor colocado en el punto A, girando a una velocidad constante de  $500\text{rpm}$ . Empleando cinemática directa es posible obtener una muestra de las posiciones, velocidades y aceleraciones correspondientes a cada uno de los puntos básicos considerados en el mecanismo de seis barras.

Al reemplazar todos los parámetros conocidos en las ecuaciones de los índices de balanceo (ecuaciones 6-65 y 6-66) es posible formular la función objetivo (ecuación 6-67). Para este ejemplo numérico, de acuerdo con las características mecánicas del mecanismo, los límites considerados para la optimización se muestran en las desigualdades 6-69.

$$\begin{aligned} -0.16m &\leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.16m \\ 0.005m &\leq t_{cn} \leq 0.04m \end{aligned} \tag{6-69}$$

## 6.6.2. Cinco contrapesos

### Optimización utilizando cinco contrapesos

Para la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras se utilizó el algoritmo de DE. El algoritmo de optimización se ejecuta hasta obtener 200 soluciones válidas (las soluciones válidas son aquellas en que el resultado de la optimización de la función objetivo se encuentran entre 0 y 1), tomando  $\gamma$  como un valor aleatorio de una distribución uniforme en el rango de (0,1), siguiendo la búsqueda aleatoria de los hiper-parámetros presentados en [21].

En la figura 6-6(a) se muestra la relación entre los valores de  $\beta_{ShF}$  y  $\beta_{ShM}$  de las soluciones obtenidas de la optimización. La diferencia en los colores se utiliza para identificar los valores utilizados para  $\gamma$  en la función objetivo  $F(X)$  (ecuación 6-67).

En la figura 6-6(b) los puntos de color azul claro representan a las soluciones dominadas, mientras que los puntos azul oscuro muestran el PF, es decir las soluciones dominantes.

### Análisis de resultados numéricos utilizando cinco contrapesos

Dentro de las soluciones encontradas en el PF, es posible seleccionar la más apropiada de acuerdo con el tipo de balanceo que se desea llevar a cabo. Para exemplificar esta afirmación, se toman tres soluciones diferentes del PF, la primera es aquella en que se le da más importancia al balanceo del ShM ( $\beta_{ShM} = 0.235917108$ ,  $\beta_{ShF} = 0.932850297$ ), la segunda es cuando se le da más importancia al balanceo de la ShF ( $\beta_{ShM} = 0.924195224$ ,  $\beta_{ShF} = 0.270900009$ ) y la tercera es cuando se da la misma importancia al balanceo de la ShF y del ShM de forma que ambos quedan optimizados cerca del 40 % ( $\beta_{ShM} = 0.580111266$ ,  $\beta_{ShF} = 0.558041831$ ). A continuación se analizarán con más detalle dichas soluciones.

- La primera solución seleccionada, es aquella en la que se le da mayor importancia al balanceo del ShM al elegir el valor mínimo en el índice  $\beta_{ShM}$  ( $\beta_{ShM} = 0.235917108$ ) obteniendo una mejora de poco más del 76.4 %, sin darle mayor importancia a la mejora del balanceo del ShF, siendo  $\beta_{ShF} = 0.932850297$ , es decir con una mejora de apenas el 6.72 %. Estos valores se obtienen al considerar los siguientes resultados en las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll}
 x_{c1} = -0.02611622 & y_{c1} = -0.033186164 & t_{c1} = 0.021370695 \\
 x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.012314794 & t_{c2} = 0.039459546 \\
 x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.016752092 & t_{c3} = 0.039814955 \\
 x_{c4} = -0.002045161 & y_{c4} = -0.000151565 & t_{c4} = 0.005 \\
 x_{c5} = 0.001614171 & y_{c5} = 0.00639164 & t_{c5} = 0.005106848
 \end{array}$$

2. La segunda solución seleccionada en el PF, es aquella con el mínimo valor en el índice de balanceo  $\beta_{ShF}$  ( $\beta_{ShF} = 0.270900009$ ), es decir que se logra mejorar un 72.91 % el balanceo de la ShF del mecanismo. Para esta elección no se da importancia al valor del índice de balanceo  $\beta_{ShM}$  ( $\beta_{ShM} = 0.924195224$ ) que únicamente mejora un 7.58 %. Esto corresponde a los siguientes valores de las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.049437705 & y_{c1} = -0.04279353 & t_{c1} = 0.0074319 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.001485936 & t_{c2} = 0.038953174 \\ x_{c3} = -0.050813691 & y_{c3} = -0.017724236 & t_{c3} = 0.039660979 \\ x_{c4} = 0.001669535 & y_{c4} = 0.005996916 & t_{c4} = 0.005 \\ x_{c5} = 0.000387207 & y_{c5} = 0.013090811 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

3. La tercera solución seleccionada dentro del PF, es aquella donde se busca optimizar al máximo tanto la ShF como el ShM, de ahí que los índices de balanceo seleccionados son aquellos en que se logran optimizar ambos un poco más del 40 % ( $\beta_{ShM} = 0.580111266$ ,  $\beta_{ShF} = 0.558041831$ ). Esto corresponde a los siguientes valores en las variables a optimizar:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.06 & y_{c1} = -0.030069707 & t_{c1} = 0.006021448 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.00383543 & t_{c2} = 0.04 \\ x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.004650961 & t_{c3} = 0.028206906 \\ x_{c4} = 0.000606455 & y_{c4} = -0.001322538 & t_{c4} = 0.005416754 \\ x_{c5} = 0.000545683 & y_{c5} = -0.0000185 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

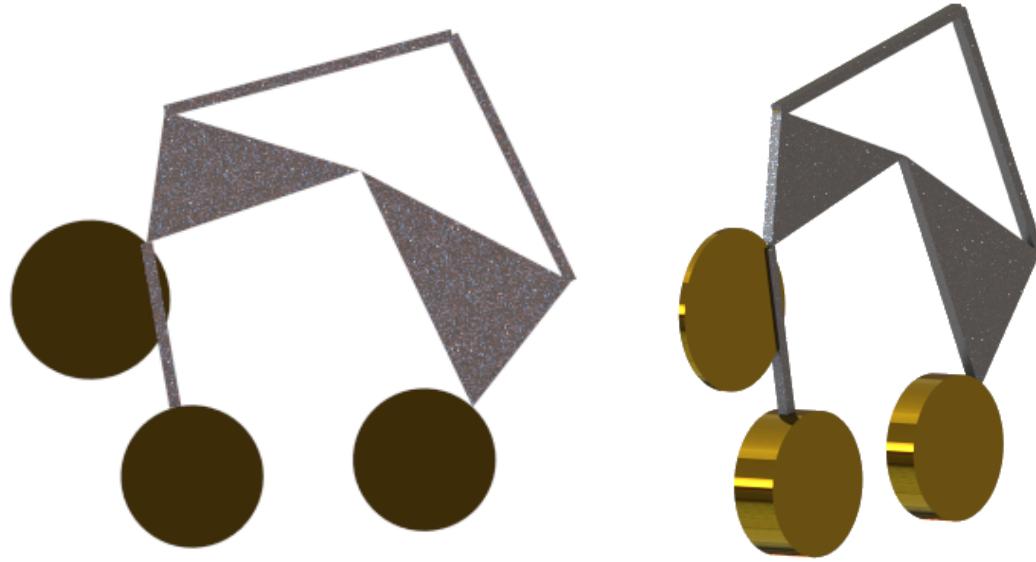
De esta forma el ShM se reduce en un 41.99 % mientras que la ShF se reduce en un 44.2 %.

El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-7. Es posible apreciar que los contrapesos cuatro y cinco no se alcanzan a apreciar debido a que son muy pequeños en relación al mecanismo.

### Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando cinco contrapesos

Se presenta ahora un análisis que permite determinar la conveniencia de los límites propuestos para la optimización, o bien si éstos deberían ser modificados (siempre y cuando exista esa posibilidad tomando en cuenta las limitaciones físicas del mecanismo y el espacio en torno a él).

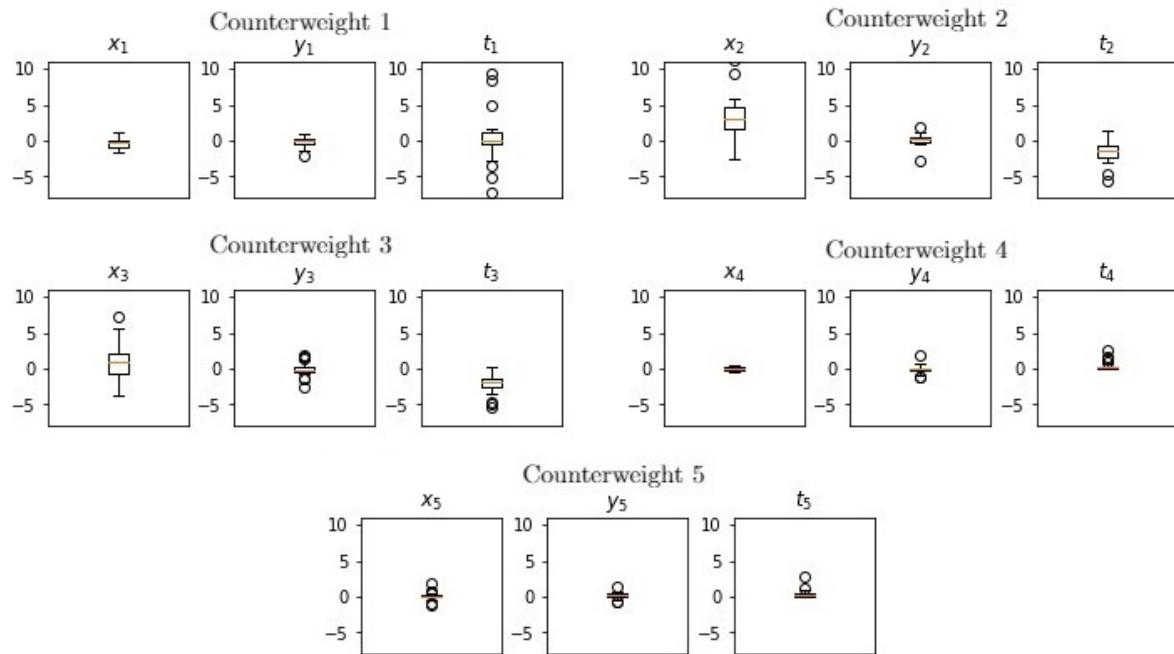
En la figura 6-8 se muestran los diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada una de las variables a optimizar  $x_n$ ,  $y_n$  y  $t_n$  para cada uno de los  $n$  contrapesos ( $1 \leq n \leq 5$ ), al ser evaluadas en las soluciones óptimas.



(a) Vista 2D.

(b) Vista 3D.

**Figura 6-7.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cinco contrapesos.



**Figura 6-8.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.

Se sabe que la selección de límites fue óptima cuando los valores de las derivadas parciales de la función objetivo (al ser evaluados con los valores resultantes de la optimización) son cercanos a cero. En los diagramas de caja de la figura 6-8 se puede observar que las derivadas parciales de las variables  $x_1, y_1, y_2, y_3, x_4, y_4, t_4, x_5, y_5$  y  $t_5$  se encuentran muy cercanos a cero, esto quiere decir que los límites propuestos para la optimización permiten a estas variables alcanzar sus valores óptimos.

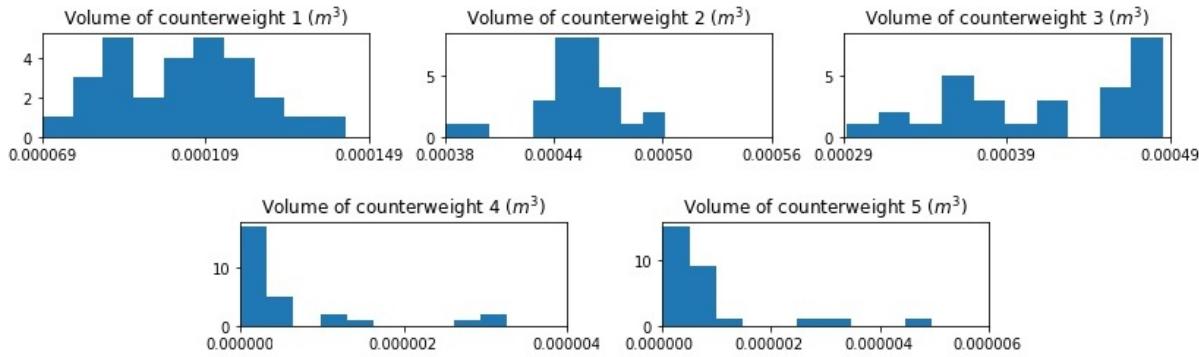
Sin embargo, las variables  $t_1, x_2, t_2, x_3$ , y  $t_3$  tienen valores de derivadas parciales que se alejan del cero. En  $t_1$  y aún más significativamente en  $x_2$  y  $x_3$  los valores tienden a ser mayores que cero, de ahí que se puede deducir que si el espesor del contrapeso 1 fuese menor que el límite permitido de  $0.005m$  (lo cual evidentemente haría que este contrapeso tendiese a desaparecer) o si la posición en el eje local x de los contrapesos 1 y 3 fuesen menores al límite de  $-0.16m$  (en otras palabras, si estos centros de masa tuviesen la posibilidad de alejarse más en la dirección de  $-x$  de cada sistema de coordenadas local correspondiente), podrían obtenerse mejores resultados de optimización.

Por otra parte, los valores de las derivadas parciales de las variables  $t_2$  y  $t_3$  tienden a ser menores que cero, esto significa que, en caso de que fuese posible, sería conveniente ampliar los límites de la optimización de estas variables, permitiéndoles alcanzar valores mayores a  $0.04m$ .

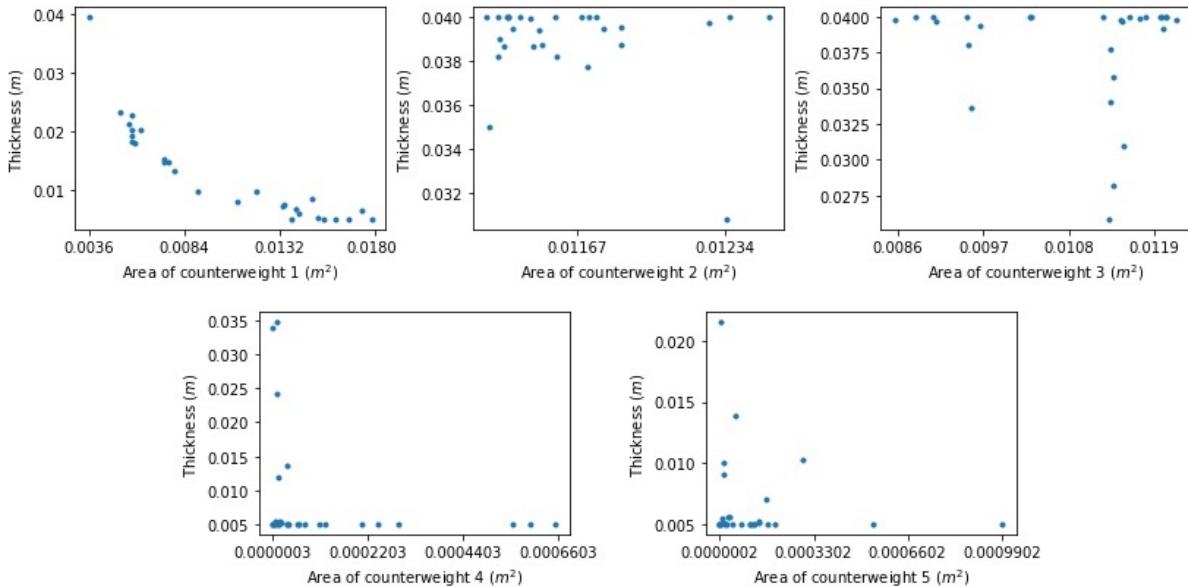
Obsérvese que la información que se obtiene a partir del análisis de las derivadas parciales de la función objetivo resulta de suma utilidad para tomar decisiones referentes a los límites de la optimización realizando los cambios pertinentes en la medida en que las condiciones mecánicas del eslabonamiento lo permitan.

En la figura 6-9(a), se muestran los histogramas correspondientes al volumen de los contrapesos obtenidos en los diferentes resultados de la optimización. A través del análisis de estos histogramas, en conjunto con la relación que existe entre el área y el espesor de los contrapesos y que se presenta en la figura 6-9(b), es posible apreciar que el contrapeso 4 presenta un volumen muy pequeño en comparación con los otros contrapesos, al tiempo que tanto su espesor y su área tienden a hacerlo desaparecer de la solución.

Por otra parte, tanto para el contrapeso 2 como para el contrapeso 3, es posible apreciar que, en la mayoría de los casos, el espesor tiende a mantenerse en el límite superior propuesto para la optimización, de esta forma se confirma la información que anteriormente se había presentado mediante el análisis de las derivadas parciales, de la cuál se concluye que, en caso de que las características mecánicas del mecanismo lo permitan, sería recomendable ampliar el límite superior de estos espesores.



(a) Volúmenes de los contrapesos al utilizar cinco de ellos.



(b) Relación área-espesor de cada contrapeso al utilizar cinco de ellos.

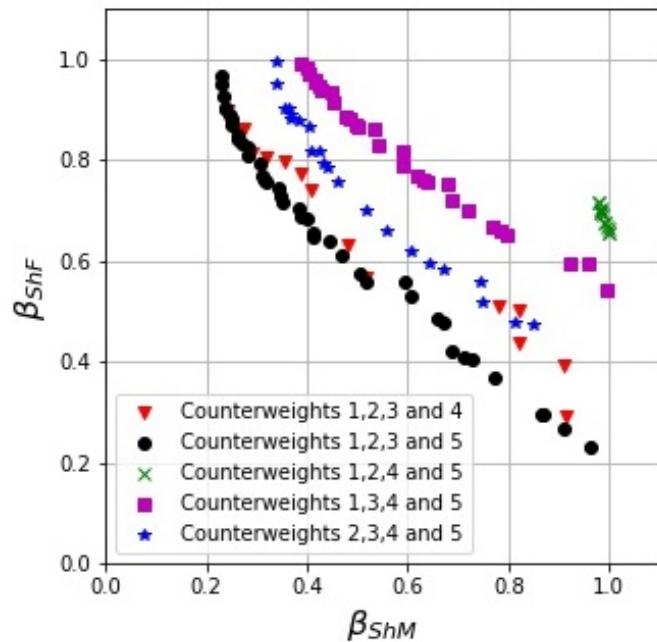
**Figura 6-9.:** Análisis de dimensiones cuando se utilizan cinco contrapesos en el mecanismo de seis barras.

### 6.6.3. Cuatro contrapesos

#### Análisis de sensibilidad y reducción a cuatro contrapesos

Cuando lo que se busca es una solución simple, que no implique agregar mucho volumen al mecanismo, puede resultar útil el disminuir el número de contrapesos a utilizar, siempre que aún así se obtengan resultados aceptables. Esta es la razón por la cual se presenta un análisis que permite reducir la cantidad de contrapesos. También se comparan los resultados obtenidos en cuanto a balanceo se refiere.

La figura 6-10 muestra el PF de los resultados de la optimización al momento de utilizar únicamente cuatro contrapesos. En esta gráfica es posible apreciar que los mejores resultados son aquellos que se muestran como círculos de color negro y que corresponden al uso de los contrapesos 1, 2, 3 y 5, de ahí que es sencillo concluir que en caso de que resulte necesario quitar alguno de ellos, el contrapeso 4 es el que menos valor aporta en términos de la optimización del balanceo y sería el que podría descartarse obteniendo aún así buenos resultados.



**Figura 6-10.:** Comparación de los PF al utilizar cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.

### Análisis de resultados numéricos usando cuatro contrapesos

De esta forma, se seleccionan tres soluciones del PF en el que se emplean los contrapesos 1, 2, 3 y 5 para analizar los resultados numéricos de esta optimización del balanceo del mecanismo. Las soluciones seleccionadas son:

1. Cuando el interés de la optimización se centra en obtener el mejor índice de balanceo de la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) sin dar mayor importancia al índice de balanceo relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ) se seleccionó la solución correspondiente a  $\beta_{ShM} = 0.964063418$ ,  $\beta_{ShF} = 0.231779476$  que corresponde a los valores:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.05373192 & y_{c1} = -0.055179568 & t_{c1} = 0.005 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.002749591 & t_{c2} = 0.04 \\ x_{c3} = -0.049643529 & y_{c3} = -0.018178134 & t_{c3} = 0.04 \\ x_{c5} = -0.002193667 & y_{c5} = 0.0000473 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

De esta forma, la ShF se reduce en un 76.82 %, en tanto que el ShM se mantiene casi igual al mejorar únicamente un 3.59 %.

2. Ahora bien, si el principal interés consiste en la optimización del índice de balanceo relacionado con el ShM ( $\beta_{ShM}$ ), sin que resulte importante el índice de balanceo correspondiente a la ShF ( $\beta_{ShF}$ ), la solución seleccionada corresponde a:  $\beta_{ShM} = 0.230308853$ ,  $\beta_{ShF} = 0.967923363$ , que se obtiene con los valores:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.024197395 & y_{c1} = -0.024018626 & t_{c1} = 0.03996544 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.026305951 & t_{c2} = 0.03932483 \\ x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.016411778 & t_{c3} = 0.04 \\ x_{c5} = 0.0000757 & y_{c5} = 0.000391453 & t_{c5} = 0.005 \end{array}$$

De esta forma, el ShM se reduce en un 76.97 %, en tanto que el ShF se reduce únicamente un 3.21 %.

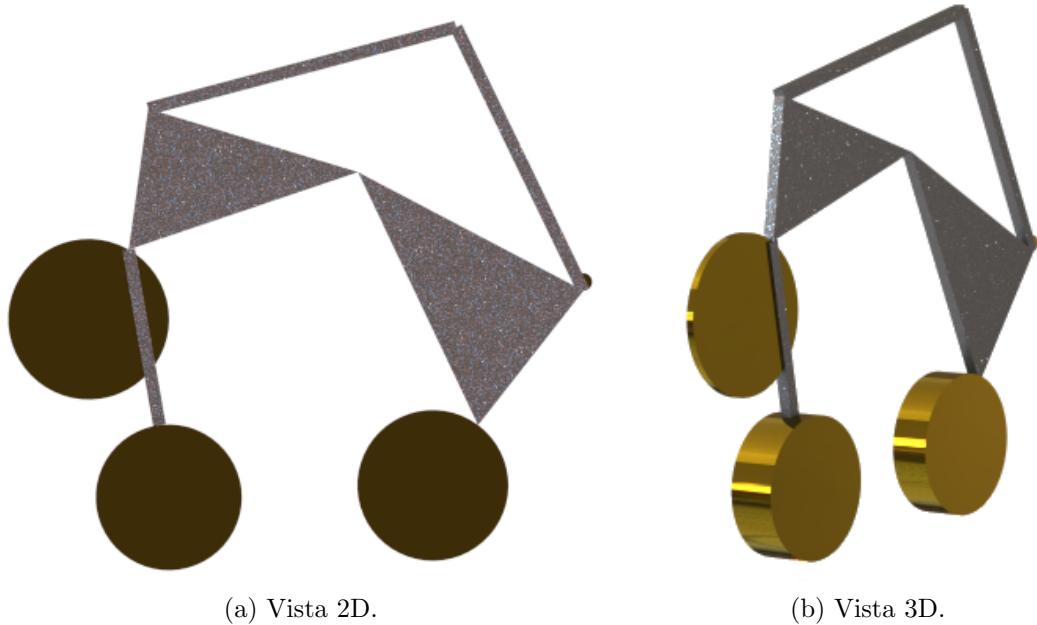
3. Por último se considera una solución en la que el interés se centra en mejorar al máximo tanto el índice correspondiente a la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) como el índice correspondiente al ShM ( $\beta_{ShM}$ ). Se elige entonces la solución  $\beta_{ShM} = 0.592785455$ ,  $\beta_{ShF} = 0.556914597$  que corresponde a:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.047312953 & y_{c1} = -0.041770683 & t_{c1} = 0.006285924 \\ x_{c2} = -0.057233104 & y_{c2} = 0.002639652 & t_{c2} = 0.038826165 \\ x_{c3} = -0.059227088 & y_{c3} = -0.001313544 & t_{c3} = 0.032663063 \\ x_{c5} = 0.006301103 & y_{c5} = -0.002793075 & t_{c5} = 0.009377553 \end{array}$$

Con ello se reduce la ShF en un 44.31 % mientras que el ShM se reduce un 40.73 %. El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura **6-11**.

### Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando cuatro contrapesos

La figura **6-12** muestra el diagrama de caja de los valores obtenidos al evaluar las derivadas parciales de la función objetivo en las soluciones que se encuentran en el PF al utilizar cuatro contrapesos. Se aprecia claramente que los valores de las variables  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, x_5, y_5, t_1$  y  $t_5$  se encuentran muy cercanos a cero, es decir los límites que se seleccionaron para ellos fueron adecuados. Por otra parte  $t_2$ , y  $t_3$  toman valores negativos, es decir que estas variables están tratando de sobrepasar el límite superior asignado para la optimización, de forma que



**Figura 6-11.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando cuatro contrapesos.

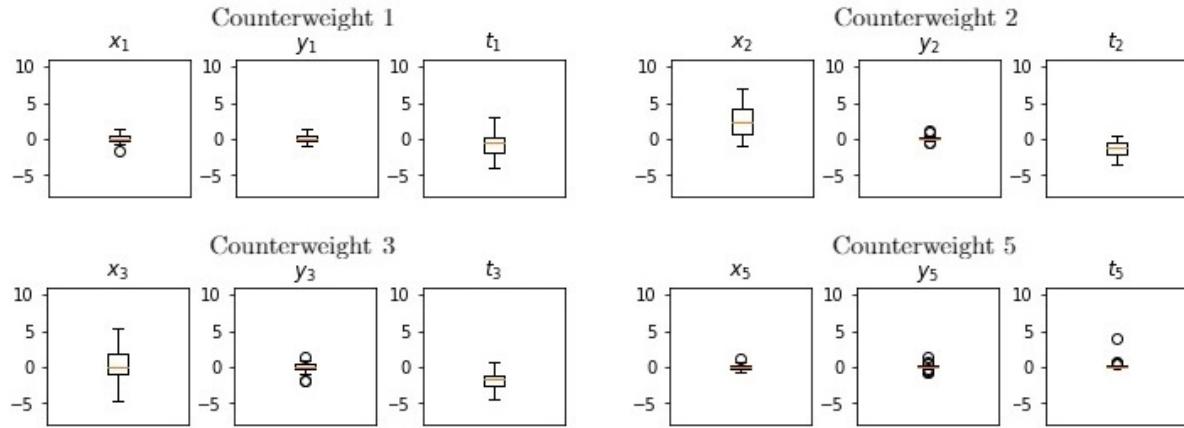
si las características físicas del mecanismo lo permiten se podrían obtener mejores resultados al ampliar esos límites. En forma contraria  $x_2$  tiene valores por encima de cero, indicando así que dicho contrapeso está tratando de mover su centro de masas al extremo negativo del eje x, de forma que ese límite pudiera ampliarse para obtener mejores resultados de la optimización.

Para confirmar este análisis se muestra la figura 6-13 en donde se aprecia con claridad tanto el contrapeso 2, como el contrapeso 3 están llegando al límite máximo en el espesor permitido.

#### 6.6.4. Tres contrapesos

##### Análisis de sensibilidad y reducción a tres contrapesos

La figura 6-14 muestra los PF de los diferentes resultados al ejecutar la optimización con las posibles combinaciones de tres contrapesos (partiendo de los cuatro contrapesos empleados en la sección anterior). Se puede apreciar con claridad que la mejor combinación de contrapesos es aquella que emplea el 1, 2 y 3, de forma que si se desea eliminar algún contrapeso para simplificar la implementación de la solución, el contrapeso 5 sería el indicado.



**Figura 6-12:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan cuatro contrapesos en el mecanismo de seis barras.

### Análisis de resultados numéricos utilizando tres contrapesos

Considerando entonces los contrapesos 1, 2 y 3, se seleccionan tres soluciones del PF:

- Si el principal interés al llevar a cabo la optimización es disminuir la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) sin dar importancia al índice correspondiente al ShM ( $\beta_{ShM}$ ) se elige el punto correspondiente a  $\beta_{ShM} = 0.995073461$  y  $\beta_{ShF} = 0.240535298$ . Esto corresponde a:

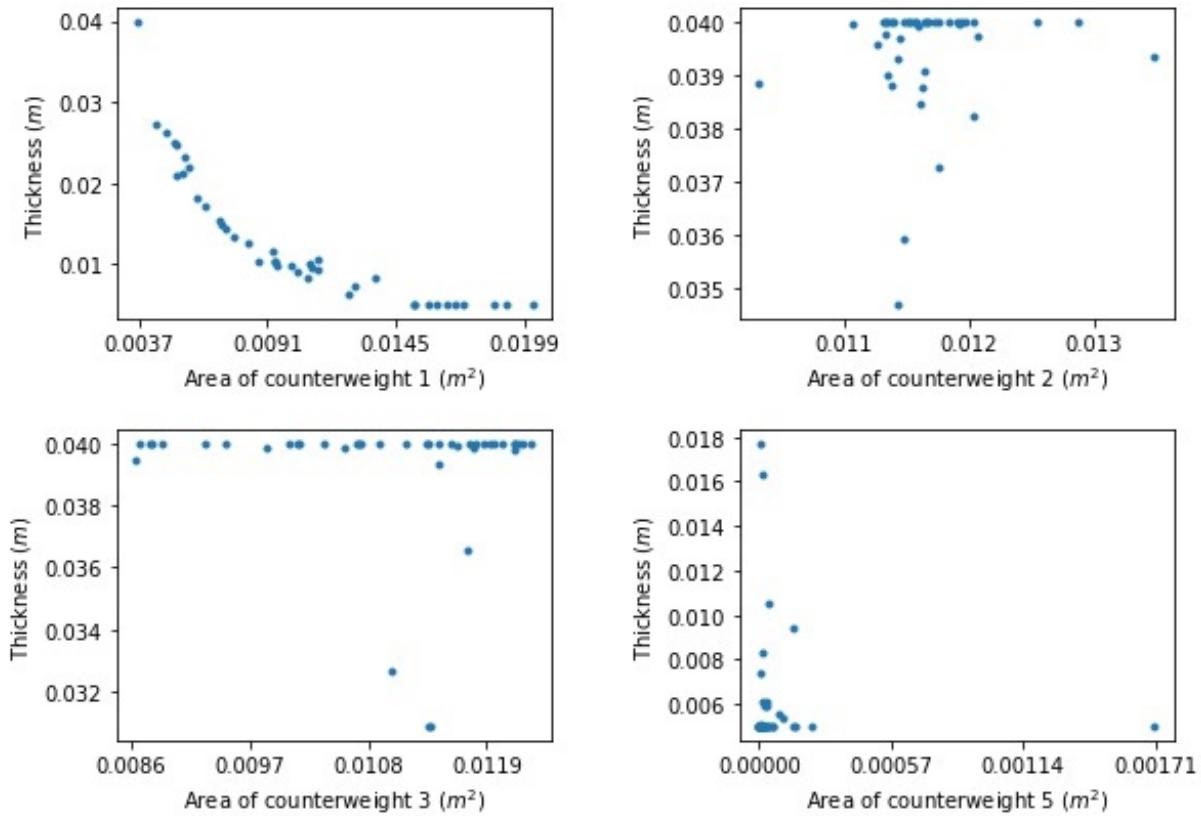
$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.06 & y_{c1} = -0.03654815 & t_{c1} = 0.005 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = 0.003971668 & t_{c2} = 0.035715217 \\ x_{c3} = -0.045701296 & y_{c3} = -0.02341583 & t_{c3} = 0.039505677 \end{array}$$

Al elegir esta solución, la ShF se reduce en un 75.95 % en tanto que el ShM permanece prácticamente igual pues únicamente tiene una reducción del 0.5 %.

- Ahora bien, si el interés de la optimización se centra en disminuir el ShM (correspondiente al índice de balanceo  $\beta_{ShM}$ ) sin dar importancia al índice relacionado con la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) el punto seleccionado del PF corresponde a  $\beta_{ShM} = 0.227925011$  y  $\beta_{ShF} = 0.964776117$ , que corresponde a la solución:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.022515602 & y_{c1} = -0.027032217 & t_{c1} = 0.039999753 \\ x_{c2} = -0.06 & y_{c2} = -0.019318019 & t_{c2} = 0.04 \\ x_{c3} = -0.06 & y_{c3} = 0.017717884 & t_{c3} = 0.04 \end{array}$$

De esta forma el ShM puede reducirse en un 77.21 %, mientras que la ShF presenta una reducción del 3.53 %.



**Figura 6-13.:** Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan cuatro de ellos en el mecanismo de seis barras.

3. Por último, si el interés de la optimización se centra en mejorar tanto la ShM como la ShF, se selecciona el punto correspondiente a  $\beta_{ShM} = 0.53194653$  y  $\beta_{ShF} = 0.54317393$ , esto es:

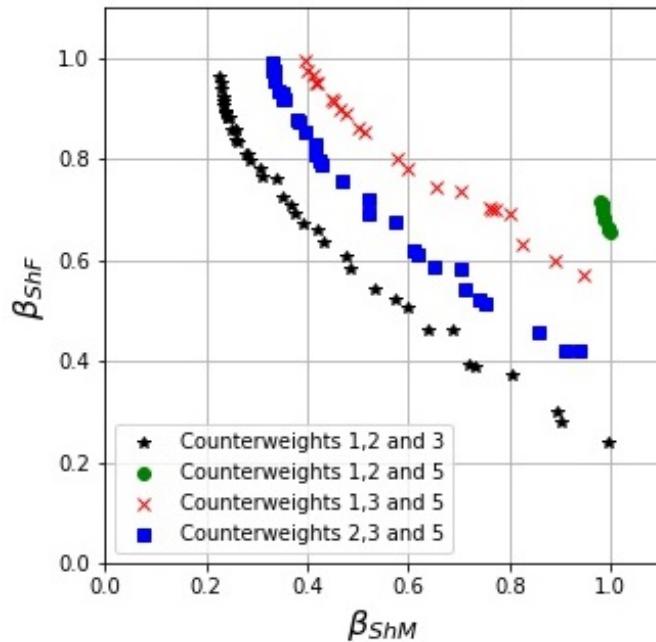
$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.032408454 & y_{c1} &= -0.038103249 & t_{c1} &= 0.013443643 \\x_{c2} &= -0.06 & y_{c2} &= -0.005068874 & t_{c2} &= 0.039961272 \\x_{c3} &= -0.054795122 & y_{c3} &= 0.000427596 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

Con esta solución la ShF presenta una reducción del 45.69 % en tanto que el ShM se reduce en un 46.14 %.

El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-15.

#### Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando tres contrapesos

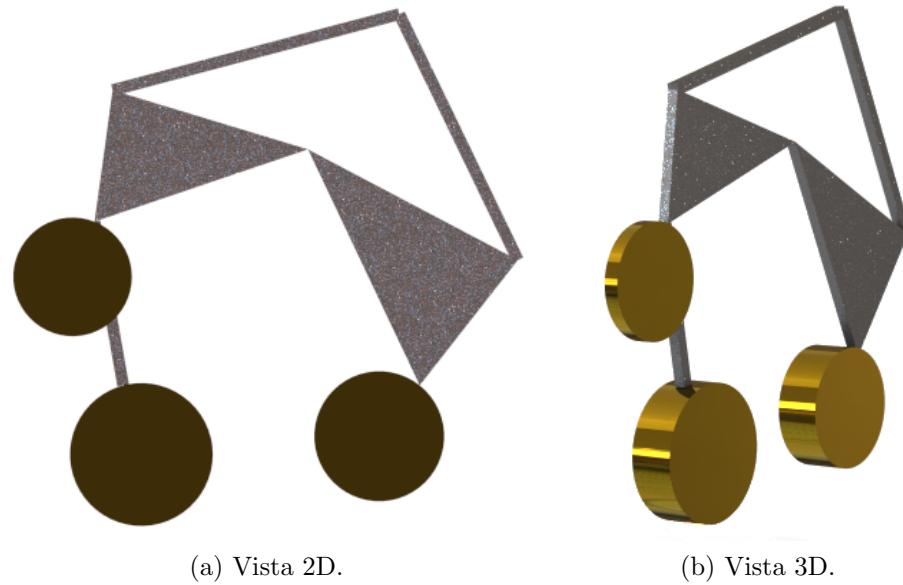
La figura 6-16 muestra los diagramas de caja correspondientes a los valores resultantes de evaluar las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada una de las variables



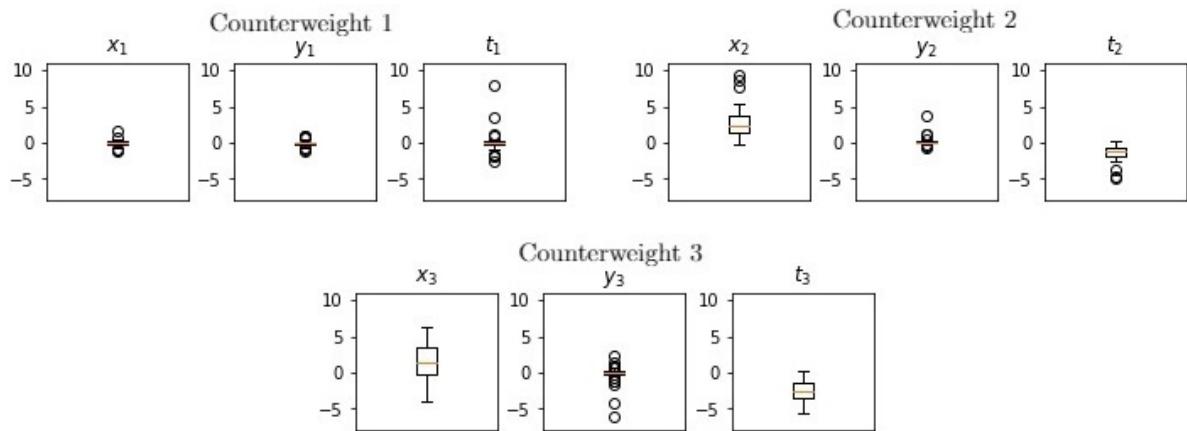
**Figura 6-14:** Comparación de los PF al utilizar tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.

a optimizar  $x_n, y_n$  y  $t_n$ , para los contrapesos  $n = 1, n = 2$  y  $n = 3$  (cuando los contrapesos 4 y 5 han sido eliminados).

Al analizar los diagramas de caja correspondientes a los contrapesos 1, 2 y 3, se puede apreciar que aquellos correspondientes a  $x_1, y_1, t_1, y_2, y_3$  se encuentran más o menos cercanos al cero, sin embargo los valores correspondientes a  $x_2$  y  $x_3$  se encuentran por encima de cero, por lo tanto se llega a la conclusión de que en caso de que se pueda ampliar el límite inferior de la optimización para esta variable podrían obtenerse mejores resultados. De forma similar, los valores correspondientes a  $t_2$  y  $t_3$  se encuentran por debajo de cero, es decir que estos contrapesos, en la optimización, están tratando de tener un espesor mayor que el que les ha sido permitido. Para confirmar este análisis, la figura 6-17 muestra la relación área-espesor de las soluciones obtenidas para cada contrapeso; tanto el contrapeso 2 como el 3 están, en la mayoría de los casos llegando al máximo espesor permitido en la optimización, de ahí que, en caso de que las condiciones físicas del mecanismo lo permitan, podría ampliarse este límite para obtener mejores resultados.



**Figura 6-15.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando tres contrapesos.

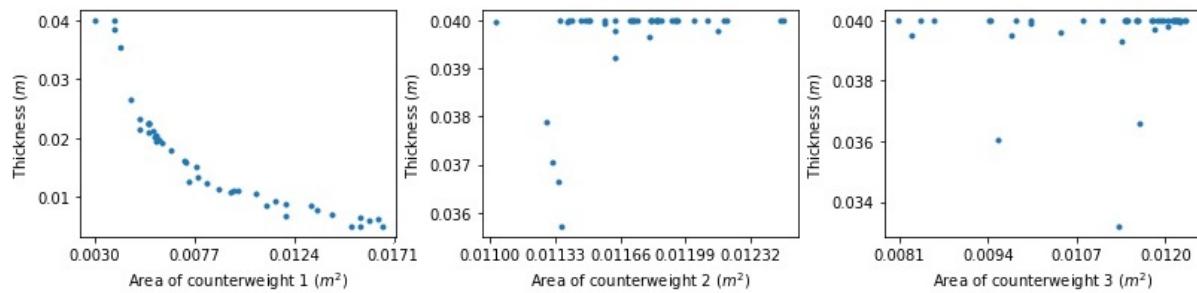


**Figura 6-16.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan tres contrapesos en el mecanismo de seis barras.

### 6.6.5. Dos contrapesos

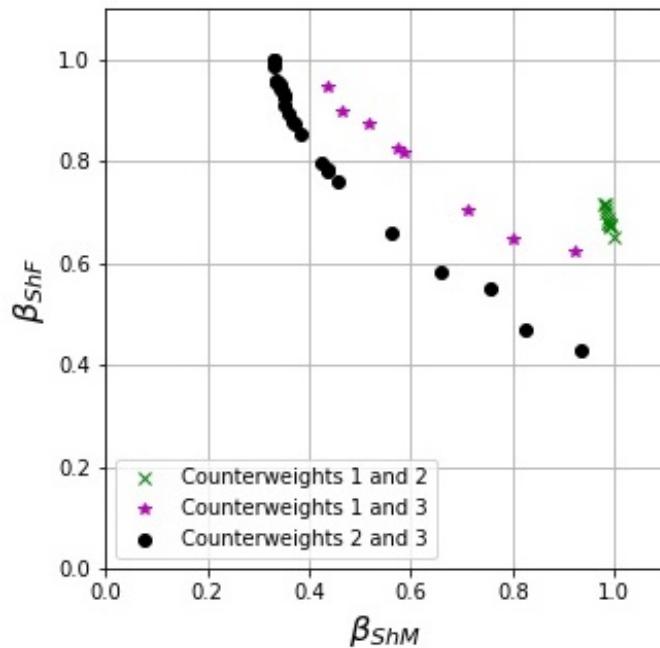
#### Análisis de sensibilidad y reducción a dos contrapesos

La figura 6-18 muestra el PF de los diferentes resultados de la optimización cuando se realiza con combinaciones de dos contrapesos (a partir de los tres contrapesos anteriores). En este caso es posible notar que los mejores resultados son obtenidos al emplear los contrapesos 2



**Figura 6-17.:** Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan tres de ellos en el mecanismo de seis barras.

y 3, retirando el contrapeso 1.



**Figura 6-18.:** Comparación de los PF al utilizar dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.

#### Análisis de resultados numéricos utilizando dos contrapesos

A partir del PF que se obtiene al utilizar los contrapesos 2 y 3, se eligen tres soluciones tal como se explica a continuación:

1. Cuando el principal interés se centra en la optimización de la ShF ( $\beta_{ShF}$ ) se elige la solución  $\beta_{ShM} = 0.934821787$ ,  $\beta_{ShF} = 0.430267409$  que corresponde a:

$$\begin{aligned}x_{c2} &= -0.06 & y_{c2} &= 0.010068826 & t_{c2} &= 0.017767537 \\x_{c3} &= -0.053617459 & y_{c3} &= -0.027518511 & t_{c3} &= 0.025912424\end{aligned}$$

De esta forma la ShF se reduce en un 56.98 %, en tanto que el ShM se reduce un 6.52 %.

2. Cuando el principal interés de la optimización se centra en reducir el ShM ( $\beta_{ShM}$ ) se elige la solución  $\beta_{ShM} = 0.33007967$  y  $\beta_{ShF} = 0.998368082$  que corresponde a:

$$\begin{aligned}x_{c2} &= -0.050244885 & y_{c2} &= -0.006835883 & t_{c2} &= 0.0382909 \\x_{c3} &= -0.059107334 & y_{c3} &= 0.01334215 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

Aquí el ShM se reduce en un 67.00 %, en tanto que la ShF permanece prácticamente igual pues sólo sufre un decremento del 0.17 %.

3. Ahora bien, si el interés de la optimización se centra en minimizar tanto la ShF como el ShM, se elige el punto  $\beta_{ShM} = 0.658200023$ ,  $\beta_{ShF} = 0.5834812$  que corresponde a:

$$\begin{aligned}x_{c2} &= -0.047208842 & y_{c2} &= 0.002831306 & t_{c2} &= 0.04 \\x_{c3} &= -0.05125707 & y_{c3} &= -0.010732312 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

De esta forma la ShF se reduce en un 41.66 % mientras que el ShM se reduce un 34.18 %. El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-19.

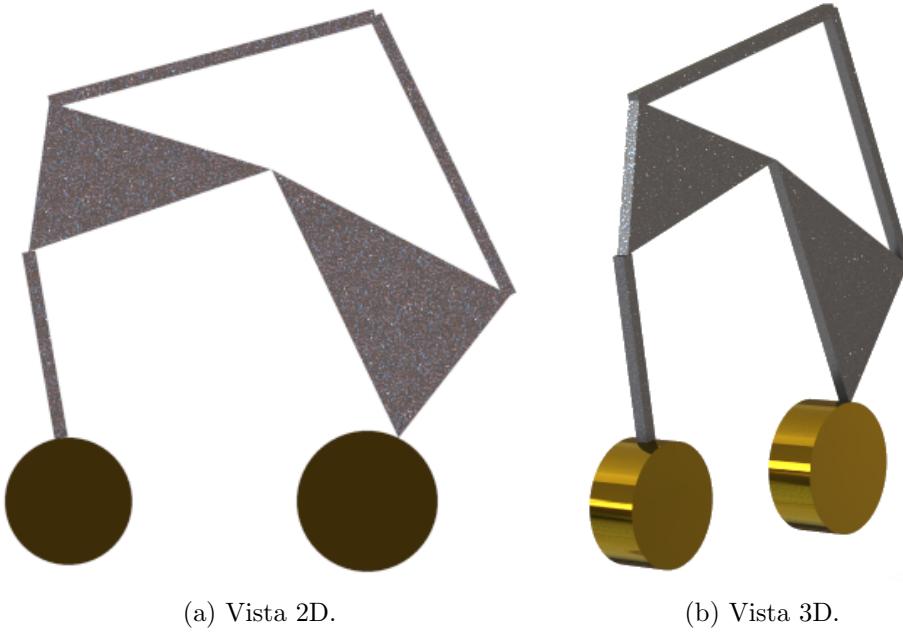
### **Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando dos contrapesos**

La figura 6-20 muestra los diagramas de caja de los valores resultantes al evaluar las soluciones de la optimización en las derivadas parciales de la función objetivo cuando se utilizan los contrapesos 2 y 3, puede observarse que casi todos los valores se encuentran cercanos al cero, por lo cual se asume que sus límites son adecuados, sin embargo las variables  $x_3$  y  $t_3$  tienen valores negativos, lo cual indica que su límite superior podría ampliarse para obtener mejores resultados en la optimización. Esto se confirma al observar la figura 6-21 en la cual el contrapeso 3 tiene en la mayoría de los casos el máximo espesor posible asignado en el límite de la optimización.

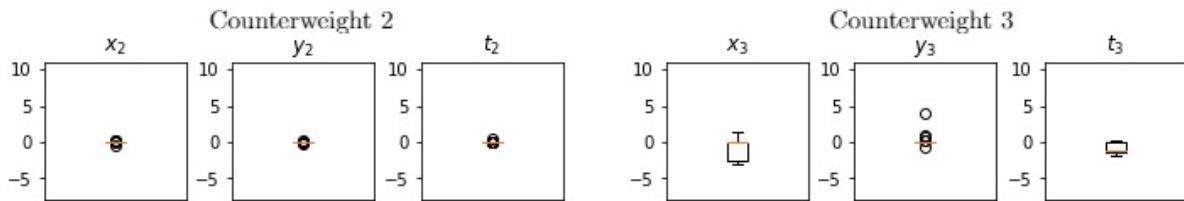
#### **6.6.6. Un contrapeso**

##### **Análisis de sensibilidad y reducción a un contrapeso**

La figura 6-22 muestra el PF de los resultados de la optimización al emplear únicamente un contrapeso (a partir de los dos que quedaban en la solución anterior). Es claro que, en caso de que se desee emplear únicamente un contrapeso, la mejor elección sería el contrapeso 3, puesto que es el que permite mejores resultados en la optimización.



**Figura 6-19.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando dos contrapesos.



**Figura 6-20.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usan dos contrapesos en el mecanismo de seis barras.

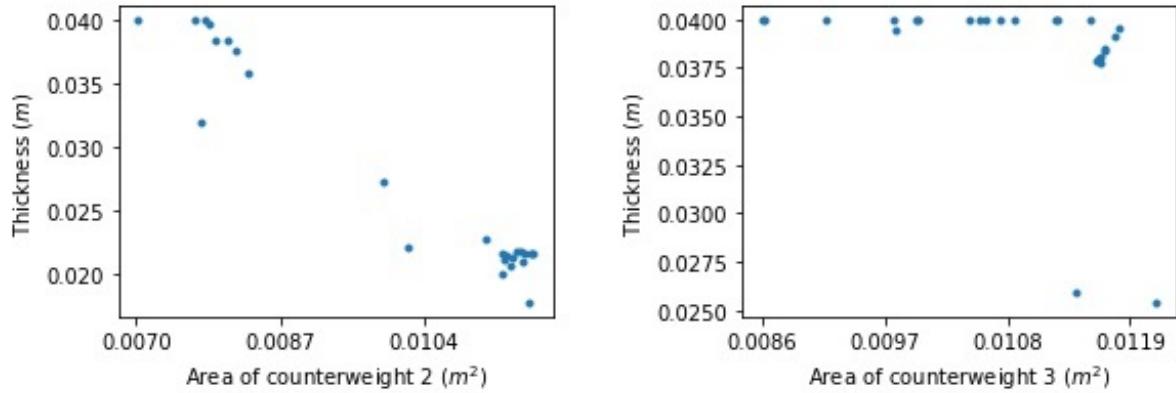
### Análisis de resultados numéricos utilizando un contrapeso

Se seleccionan entonces tres soluciones del PF que se obtiene al utilizar únicamente el contrapeso 3, estas son:

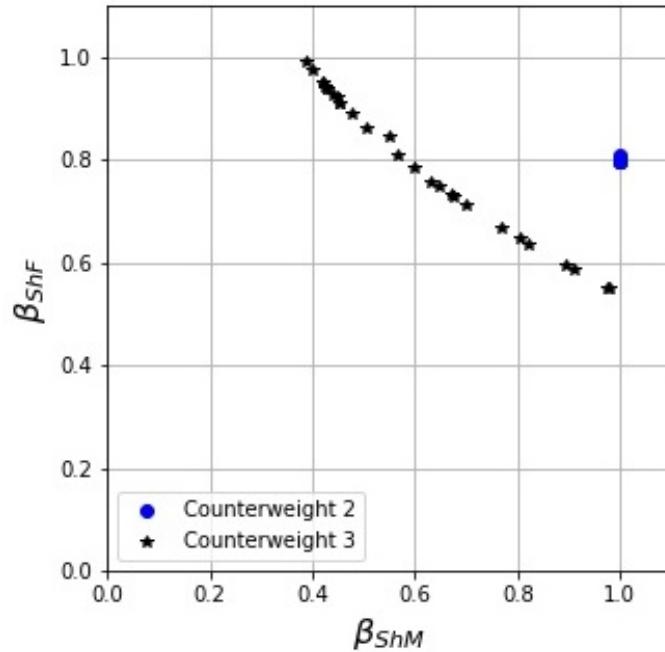
- Si el principal interés de la optimización consiste en minimizar la ShF se elige el punto  $\beta_{ShM} = 0.977472344$ ,  $\beta_{ShF} = 0.550353509$  que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.047483153 \quad y_{c3} = -0.027557823 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma la ShF se reduce en un 44.97 %, en tanto que el ShM se reduce únicamente un 2.26 %.



**Figura 6-21.:** Relación entre área y espesor de cada contrapeso, cuando se implementan dos de ellos en el mecanismo de seis barras.



**Figura 6-22.:** Comparación de los PF al utilizar un contrapesos en el mecanismo de seis barras.

2. En cambio, si el interés principal se centra en minimizar el ShM, se elige el punto  $\beta_{ShM} = 0.390023915$ ,  $\beta_{ShF} = 0.989743371$ , que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.057456052 \quad y_{c3} = 0.005807245 \quad t_{c3} = 0.04$$

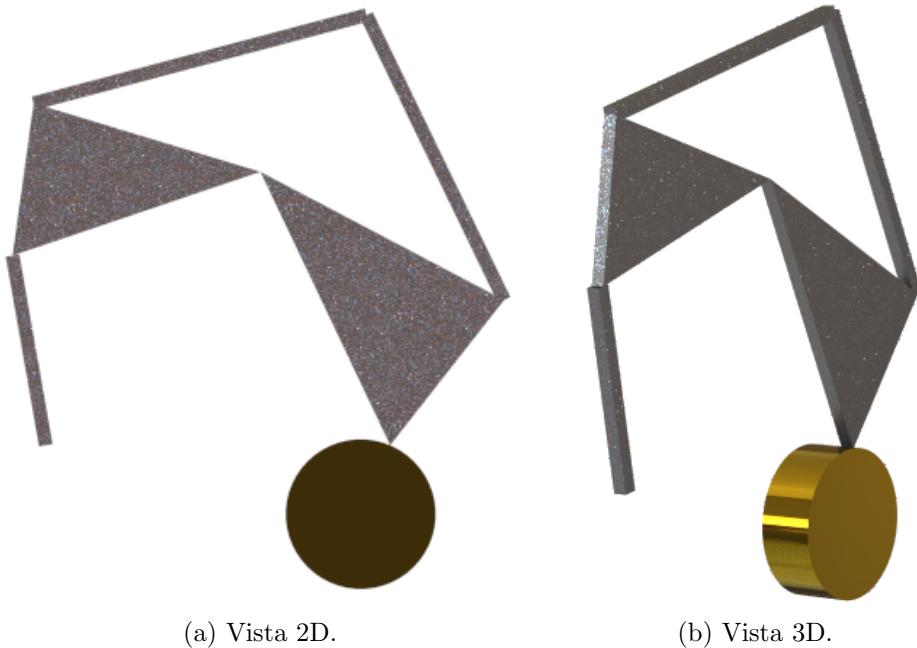
En este caso el ShM se reduce un 61.00 %, mientras que el ShF se reduce un 1.03 %.

3. Por último, si lo que se busca es minimizar tanto el ShF como el ShM, el punto seleccionado es  $\beta_{ShM} = 0.697736308$ ,  $\beta_{ShF} = 0.713112655$ , que corresponde a:

$$x_{c3} = -0.052595252 \quad y_{c3} = -0.014033018 \quad t_{c3} = 0.04$$

De esta forma se reduce el ShF en un 28.69 % y el ShM en un 30.23 %.

El resultado de implementar esta solución puede apreciarse en la figura 6-23.



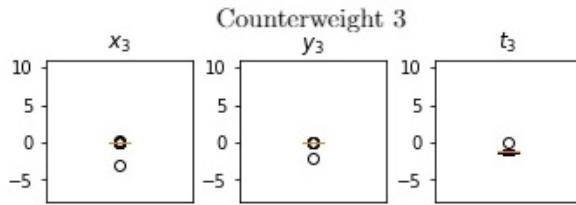
**Figura 6-23.:** Implementación de la tercera solución seleccionada del PF para el mecanismo de seis barras utilizando un contrapeso.

#### Análisis de límites para la optimización del balanceo utilizando un contrapeso

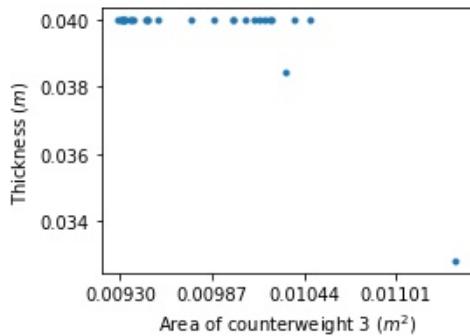
La figura 6-24 muestra los diagramas de caja correspondientes a los resultados de evaluar las soluciones del PF en las derivadas parciales de la función objetivo. Se aprecia que tanto  $x_3$  como  $y_3$  se encuentran cercanos a cero, de ahí que sus límites son adecuados, sin embargo  $t_3$  tiene valores negativos, lo cual indica que esta variable está tratando de exceder el límite superior asignado para la optimización. Esto se confirma al observar la figura 6-25 que muestra la relación entre el espesor y el área del contrapeso 3.

#### 6.6.7. Comparación de los PF al reducir el número de contrapesos

La figura 6-26 muestra una comparación entre los PF de los diferentes resultados de la optimización en tanto se redujo el número de contrapesos para lograr el balanceo. Es posible



**Figura 6-24.:** Diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a cada variable de optimización cuando se usa un contrapeso en el mecanismo de seis barras.



**Figura 6-25.:** Relación entre área y espesor, cuando se implementan sólo el contrapeso 3 en el mecanismo de seis barras.

apreciar que se obtienen resultados muy similares al emplear cinco, cuatro y tres contrapesos, por lo tanto en la mayoría de los casos se siguiere únicamente emplear tres.

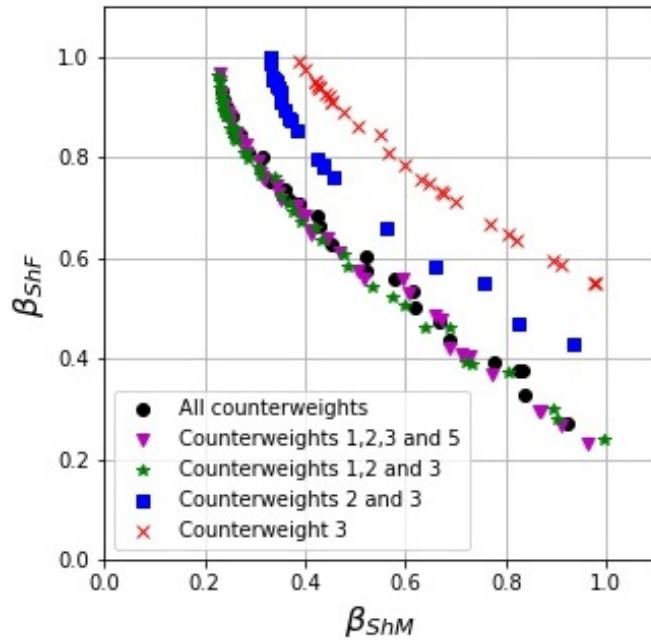
Por otra parte, en la tabla 6-3 se muestra la comparación entre los resultados de la optimización al utilizar diferentes combinaciones de contrapesos, la elección de la mejor solución dependerá en cada caso de los objetivos concretos que se busquen al llevar a cabo la optimización del balanceo.

## 6.7. Conclusiones

Entre los principales aportes de este capítulo se encuentra el desarrollo de la matriz de masas en dos dimensiones para elementos formados por tres puntos básicos, a nuestro conocimiento esa matriz no ha sido propuesta hasta el momento en la bibliografía consultada y puede ser aplicada a infinidad de mecanismos más complejos que utilicen eslabones de este tipo. Al utilizar FCC se demostró que incluso los mecanismos más complejos es posible obtener ecuaciones relativamente simples para definir el ShM y la ShF, y optimizarlas a través de

**Tabla 6-3.: Comparación entre los resultados de la optimización del balanceo del mecanismo de seis barras.**

		Optimización de ShF	Optimización de ShM
Usando 5 contrapesos	Optimizando ShF	72.91 %	7.59 %
	Optimizando ShM	6.72 %	76.41 %
	Optimizando ShF y ShM	44.2 %	41.99 %
Usando los contrapesos 1,2,3 y 5	Optimizando ShF	76.82 %	3.59 %
	Optimizando ShM	3.21 %	76.97 %
	Optimizando ShF y ShM	44.31 %	40.73 %
Usando los contrapesos 1,2 y 3	Optimizando ShF	75.95 %	0.5 %
	Optimizando ShM	3.53 %	77.21 %
	Optimizando ShF y ShM	45.69 %	46.81 %
Usando los contrapesos 2 y 3	Optimizando ShF	56.98 %	6.52 %
	Optimizando ShM	0.17 %	67.00 %
	Optimizando ShF y ShM	41.66 %	34.18 %
Usando solo el contrapeso 3	Optimizando ShF	44.97 %	2.26 %
	Optimizando ShM	1.03 %	61.00 %
	Optimizando ShF y ShM	28.69 %	30.23 %



**Figura 6-26.:** Comparación de los PF utilizando diferente cantidad de contrapesos en el mecanismo de seis barras.

algoritmos como el DE obteniendo excelentes resultados.

Para el mecanismo de seis barras estudiado en este capítulo, se logró la reducción de hasta un 76.82 % de la ShF y hasta de un 77.21 % del ShM utilizando únicamente contrapesos.

Se demostró también la eficacia del método que se propone a lo largo de esta tesis para realizar el análisis de los límites de las variables a utilizar por medio de los diagramas de caja de las derivadas parciales de las variables a optimizar, pudiendo de esta forma plantear mejoras en la optimización siempre cuando las características mecánicas del eslabonamiento lo permitan.

Por otra parte, empleando el método propuesto del análisis de los PF, se demostró que es posible lograr hasta un 44.97 % de mejora en el balanceo del ShF del mecanismo, o hasta un 61 % de mejora en el balanceo del ShM al utilizar únicamente el tercero de los contrapesos propuestos, simplificando de esta forma la implementación de la solución.

La importancia del balanceo de mecanismos de seis barras puede apreciarse en áreas como la robótica móvil puesto que este tipo de eslabonamientos se utilizan para la simulación del movimiento, por ejemplo, en una pierna biónica [164]; además de su presencia en las máquinas de rehabilitación [130] en donde el balanceo evita las reacciones que se provocan

con el movimiento y que repercuten en las personas que las utilizan.

## 7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha explicado en forma detallada el uso de FCC para definir la matriz de masas de diferentes tipos de mecanismos, y de esta forma poder obtener las ecuaciones que definen la ShF y el ShM de los mismos. Se ha podido observar la simplicidad de su uso, contándose así con una herramienta que se puede incluso automatizar a través de software para llevar a cabo el balanceo de diferentes tipos de mecanismos en una manera sencilla.

Adicionalmente se presentó el desarrollo para la obtención de una matriz de masas bidimensional, utilizando FCC, que puede ser empleada para definir elementos formados por tres puntos básicos, ampliando así la capacidad de análisis de mecanismos más complejos.

El desarrollo para la obtención de las matrices de masas de cada elemento, así como de la matriz de masas de cada mecanismo propuesto, fue realizado en forma detallada, permitiendo de esta forma la comprensión puntual del método propuesto, y permitiendo con ello que este método sea replicado en futuras investigaciones.

La optimización del balanceo de los mecanismos presentados a lo largo de este trabajo presenta siempre el reto de tratar con multi-objetivos. El uso de la combinación lineal de funciones demostró ser una forma simple pero robusta de manejarlos.

Tanto en el capítulo 2 como en el capítulo 5 se empleó el algoritmo de DE, mientras que en el capítulo 5 se utilizó el algoritmo de PGD simplificado para la optimización del balanceo de los mecanismos analizados; ambos algoritmos demostraron su eficiencia para la solución de este tipo de problemas, logrando muy buenos resultados sin la necesidad de recurrir a algoritmos más complejos.

Con la finalidad de conocer la idoneidad de los límites propuestos para las variables a optimizar, se propuso un método a través del análisis de diagramas de caja de las derivadas parciales de la función objetivo al ser evaluadas en las soluciones resultantes de la optimización. Este método permite que, en caso de que hubiera la posibilidad, se conociera qué límite podría ampliarse con la finalidad de lograr mejores resultados en la optimización del balanceo. Ello reduce el tiempo de análisis de la optimización y permite realizar ajustes en los límites seleccionados.

Por último, se demostró la eficiencia de los PF para llevar a cabo el análisis de los resultados de la optimización, permitiendo discriminar entre aquellos más importantes y aquellos que otorgan resultados no tan buenos. Además, al utilizar el PF para analizar los resultados de la optimización, realizando la comparación de los PF de las diferentes soluciones al disminuir el número de contrapesos, es posible tener claridad sobre las implicaciones que se tienen en el balanceo al eliminar uno o varios contrapesos.

En el caso del mecanismo manivela-bielo se logró una reducción de hasta el 97.56 % del ShM o una reducción de hasta el 94.58 % del ShF (reduciendo en ambos casos también las otras reacciones).

Para el mecanismo de cuatro barras se logró reducir la ShF y el ShM en un 99.70 % y un 28.69 % respectivamente cuando se da mayor importancia al índice de balance correspondiente al ShF; mientras que el ShM y la ShF se redujeron en un 83.99 % y un 8.47 % respectivamente cuando se dio mayor importancia a la optimización del índice de balanceo relacionado con el ShM. El uso del método propuesto para la comparación de PF demostró que incluso utilizando solo un contrapeso, la ShF se puede reducir un 78.74 % o bien, se puede reducir un 73.61 % cuando se le da especial importancia al balanceo de la ShM.

Por último, para el mecanismo de seis barras, se logró la reducción de hasta un 76.82 % de la ShF y hasta de un 77.21 % del ShM utilizando únicamente contrapesos. También se presentó el análisis para la sensibilidad a los contrapesos utilizados, demostrando que el contrapeso 3 es el que realiza mayor aporte para el balanceo final del mecanismo, de forma que éste puede optimizarse hasta lograr una mejora en el ShF de cerca del 50 % o bien una mejora en el ShM del 61 % al agregar únicamente un contrapeso, garantizando de esta forma una solución sumamente sencilla de implementar.

Puede observarse que en todos los ejemplos propuestos se lograron buenos resultados de optimización del balanceo de los mecanismos, todos ellos a través de la adición únicamente de contrapesos. Recuérdese que al implementar únicamente contrapesos es imposible lograr el balanceo dinámico completo de los mecanismos, sin embargo la implementación de este tipo de solución resulta sumamente sencilla en la práctica y ofrece una buena alternativa para la mejora del balanceo reduciendo de esta forma la fatiga, el desgaste y todas las implicaciones mecánicas que la falta de balance puede provocar en los mecanismos.

### 7.0.1. Trabajo futuro

Como trabajo futuro resultaría interesante:

- Definir las matrices de masa para eslabones en dos dimensiones que estén formados por cuatro o más puntos básicos, y probarlas a través del balanceo de mecanismos que requieran este tipo de eslabones.
- Probar los algoritmos de optimización propuestos a lo largo de este trabajo para llevar a cabo el balanceo de mecanismos en los que además de contrapesos se incluyan contra inercias, pues de esta forma sería posible lograr mejores resultados de la optimización.
- Llevar a cabo la optimización del balanceo de mecanismos tridimensionales con métodos similares a los propuestos, utilizando FCC, y analizando los resultados mediante los diagramas de caja y los PF, tal como se realizó en este trabajo con los mecanismos bidimensionales.
- Implementar otros algoritmos de optimización, sobre todo para mecanismos complejos, como el tratado en el Capítulo 5, para comprobar así su rendimiento, realizando un comparativo de los resultados.
- Implementar un software que permita el balanceo de mecanismos bidimensionales en forma automática bastando con la introducción de los parámetros físicos y las restricciones mecánicas.
- Llevar a cabo una optimización mixta que permita el balanceo de mecanismos de cuatro o seis barras que hagan el seguimiento de una trayectoria previamente especificada, lo cual tendría gran aplicación en robótica móvil y máquinas de rehabilitación.

# Publicaciones

Durante el tiempo que duró este programa de doctorado se realizaron las siguientes publicaciones:

## 7.0.2. Artículos de revista

- M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velázquez and E. Haro *Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates*. En: IEEE Latin America Transactions, vol. 17, no. 06, pp. 983-990, June 2019, doi: 10.1109/TLA.2019.8896821.
- Orvañanos-Guerrero, María T.; Sánchez, Claudia N.; Rivera, Mariano; Acevedo, Mario; Velázquez, Ramiro *Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates*. En: Applied Sciences 9 (2019), 10, Nr. 19, p. 4115.
- Acevedo, M.; Orvañanos-Guerrero, M.T.; Velázquez, R.; Arakelian, V. *An Alternative Method for Shaking Force Balancing of the 3RRR PPM through Acceleration Control of the Center of Mass*. Appl. Sci. 2020, 10, 1351.

## 7.0.3. Capítulos de libro

- Acevedo M., Orvañanos-Guerrero M.T. (2020) *Force Balancing of the 2RRR Planar Parallel Manipulator via Center of Mass Acceleration Control Using Fully Cartesian Coordinates*. En: Hernandez E., Keshtkar S., Valdez S. (eds) Industrial and Robotic Systems. LASIRS 2019. Mechanisms and Machine Science, vol 86. Springer, Cham
- Acevedo M., Orvañanos T., Velázquez R. (2019) *Shaking Moment Balancing of a Four-Bar Mechanism Using Actuation Redundancy*. En: Uhl T. (eds) Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science, vol 73. Springer, Cham

## 7.0.4. Congresos

- Orvañanos-Guerrero, María T. ;Sánchez, Claudia N.; Dávalos-Orozco, Óscar ;Rivera, Mariano ;Velázquez, Ramiro; Acevedo, Mario: *Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms*. En: Proceedings - 2018

Nanotechnology for Instrumentation and Measurement, NANOfIM 2018, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 4 2019. – ISBN9781538691618.

- Orvañanos-Guerrero, María T. ;Acevedo, Mario; Sánchez, Claudia N.; Giannoccaro, Nicola Ivan ;Visconti, Paolo; Velazquez, Ramiro: *Balancing Optimization of a Crank-Connecting Rod Mechanism Using Natural Coordinates*. En: IEEE ANDESCON, 2020, Aceptado.

De estas publicaciones, las que se encuentran relacionadas directamente con el trabajo documentado en esta tesis pueden consultarse directamente en los Anexos.

# **A. Anexo: Ecuaciones correspondientes al ShF y ShM de un mecanismo de seis barras obtenidas mediante Python**

$$\begin{aligned} ShF_i = & V_{AX}*((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2)+ \\ & V_{AX}*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)-(2*m_{b2}+2*\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))*(m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/(l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))+(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2/l_2**2)+V_{AY}*(m_{b2}*y_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2+V_{BX}*(K_{x3}*(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/K_{y3}-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4/K_{y3}**2)+V_{BX}*(K_{x3}**2*(-I_{xb3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)-K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3))+V_{BX}*(K_{x3}**2*(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3*2)+2*K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3)-K_{x3}*(2*I_{xb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/2)/(K_{y3}**2*l_3)+1-(2*m_{b3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))*(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(l_3*(m_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(2*m_{b3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*(m_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+(I_{xb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4/K_{y3}**2)+V_{CX}*((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(I_{zb2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2/l_2**2)+V_{CX}*(K_{x1}*(I_{xb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *2*l_1) + (m_{b1}*y_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1) - (I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{CX}*(K_{x1}**2*(-I_{xb1} - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (m_{b1}*x_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/l_1 - (I_{yb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2 - (I_{xyb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)) + V_{CX}*(K_{x1}**2*(I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (2*I_{xyb1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1) - K_{x1}*(2*I_{xb1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/2)/(K_{y1}**2*l_1) + (I_{zb2} + \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}**2*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2 - (2*m_{b1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))*(m_{b1}*x_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/l_1*(m_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) + (I_{yb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2 - (2*m_{b1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)*(m_{b1}*y_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}*(m_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))) + (2*I_{xyb1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1) + (I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{CY}*(-m_{b2} - \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2))*(m_{b2}*y_{b2} + \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2))/(l_2*(m_{b2} + \pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2 + y_{c2}**2))) + V_{DX}*((m_{b4}*x_{b4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2))/l_4 - (I_{zb4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2) + V_{DX}*(K_{x1}*(-I_{xb1} - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (I_{xyb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1)) + V_{DX}*(K_{x1}*(I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (m_{b1}*y_{b1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1) - (I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{DX}*(m_{b4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2) - (2*m_{b4} + 2*\pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2))* (m_{b4}*x_{b4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2))/(l_4*(m_{b4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2))) + (I_{zb4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*x_{c4}**2*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}**2*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2)**2/2)/l_4**2 + (I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{DY}*(m_{b4}*y_{b4} + \pi*\rho_{c4}*t_{c4}*y_{c4}*(x_{c4}**2 + y_{c4}**2))/l_4 + V_{EX}*(K_{x1}*(-I_{xb1} - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1) + (I_{xyb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1)) + V_{EX}*(K_{x3}*(-I_{xb3} - \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2) - \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3) + (I_{xyb3} + \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3)) + V_{EX}*(K_{x1}**2*(I_{xb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2) - K_{x1}*(2*I_{xyb1} + 2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2) + (I_{yb1} + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2 + (I_{xb3} + \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3) + V_{EX}*(K_{x3}*(I_{xb3} + \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi*\rho_{c3}*(x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / K_{y3} - \\
 & (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) - (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / K_{y3}**2 + V_{EX} * (K_{x1}**2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1}**2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2 / 4) / (K_{y1}**2 * l_1**2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1**2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1}**2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2 / 4) / (K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / l_1**2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{FX} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5}**2 * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5}**2 * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)**2 / 2) / l_5**2) + V_{FX} * (K_{x3} * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{FX} * (K_{x3}**2 * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3}**2 * l_3**2) + K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3**2 - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / l_3 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{FX} * (K_{x3}**2 * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3**2) - K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3**2) + K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3**2 + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / l_3 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{FX} * (K_{x3}**2 * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3}**2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / (K_{y3}**2 * l_3**2) - K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3**2) + m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) - (2 * m_{b5} + 2 * \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) * (m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2))) + (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5}**2 * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5}**2 * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)**2 / 2) / l_5**2 + (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3**2 + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2 / 4) / l_3 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / l_3**2 + V_{FY} * ((m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / l_5 + V_{GX} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)**2 / 2) / l_4**2) + V_{GX} * ((I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / l_5**2 + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)**2 / 2) / l_5**2 + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)**2 / 2) / l_4**2) + V_{GX} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)**2 / 2) / l_5**2) + V_{GY} * (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2)) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}**2 + y_{c5}**2))) + V_{GY} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)) * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ShF_j = & V_{AX} * (-m_{b2} - \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2))) + V_{AY} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / l_2 - (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2 / 2) / l_2**2) + V_{AY} * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) * (m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2))) + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2 / 2) / l_2**2) + V_{AY} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / (l_2 * (m_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2/2) / l_2**2) + V_{BY} * (K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
& *2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
& y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) - (I_{xb3} + \\
& \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / K_{y3}**2) + V_{BY} * (K_{x3} * \\
& *2 * (-I_{xb3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / (K_{y3} * \\
& *2 * l_3**2) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \\
& \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3} * \\
& *2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / (K_{y3}**2 * l_3) + (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3} * \\
& *2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / l_3 * \\
& *2 - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3)) + V_{BY} * (K_{x3}**2 * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * \\
& y_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / (K_{y3}**2 * l_3**2) + 2 * K_{x3} * (m_{b3} * \\
& y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) - K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + \\
& y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3**2) - K_{x3} * (2 * I_{xb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * 2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} * \\
& *2 + y_{c3}**2)**2/2) / (K_{y3}**2 * l_3) + 1 - (2 * m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) * (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \\
& \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (l_3 * (m_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2))) + (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * \\
& *2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / l_3**2 - (2 * m_{b3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} * \\
& *2 + y_{c3}**2)) * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * (m_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + \\
& y_{c3}**2))) + (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)) / (K_{y3} * l_3) + (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
& *2 * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3}**2 + y_{c3}**2)**2/4) / (K_{y3}**2) + V_{CX} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * \\
& t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / l_2 + V_{CY} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)) / l_2 - (I_{zb2} + \\
& \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2} * \\
& *2 + y_{c2}**2)**2/2) / l_2**2) + V_{CY} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / (K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / K_{y1} - \\
& (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / (K_{y1}**2) + V_{CY} * (K_{x1}**2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
& *2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / (K_{y1}**2 * l_1**2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1**2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2)**2/4) / (K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * x_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / l_1**2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
& x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) + V_{CY} * (K_{x1}**2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1} * \\
& *2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / (K_{y1}**2 * l_1**2) + 2 * K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
& (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * \\
& l_1**2) - K_{x1} * (2 * I_{xb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) * \\
& *2/2) / (K_{y1}**2 * l_1) + 1 + (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * 2 * (x_{c2} * \\
& *2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2/2) / l_2**2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1} * \\
& *2)) * (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (l_1 * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))) + \\
& (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4) / l_1**2 - (2 * \\
& m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * (m_{b1} + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))) + (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) / (K_{y1} * l_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + \\
 & V_{DX} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * \\
 & (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + V_{DY} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - \\
 & (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * \\
 & (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + V_{DY} * (K_{x1} * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{DY} * (K_{x1} * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \\
 & \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{DY} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) - (2 * \\
 & m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \\
 & \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * \\
 & (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2 + (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} * \\
 & * 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2 + V_{EY} * (K_{x1} * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
 & y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{EY} * (K_{x3} * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + \\
 & y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3)) + V_{EY} * (K_{x1} * 2 * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * \\
 & t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 + (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) * \\
 & * 2 / 4) / K_{y3} ** 2 + V_{EY} * (K_{x3} * (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + \\
 & y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * \\
 & t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * \\
 & t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2 + V_{EY} * (K_{x1} * 2 * (-Ix_{b1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} * \\
 & * 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + \\
 & K_{x1} * (Ix_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
 & * 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{FX} * (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2)) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5} ** 2)) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2))) + V_{FY} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5} ** 2)) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} ** 2 * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5} ** 2 + y_{c5} ** 2) ** 2 / 2) / l_5 ** 2) + V_{FY} * (K_{x3} * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) + V_{FY} * (K_{x3} * 2 * (-Ix_{b3} - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * \\
 & t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3 ** 2) - K_{x3} * (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} * \\
 & * 2)) / (K_{y3} * l_3) + K_{x3} * (2 * I_{xyb3} + 2 * \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} ** 2 * l_3 ** 2) + K_{x3} * \\
 & (Ix_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + \\
 & (m_{b3} * x_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / l_3 - (I_{yb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & *2)**2/4)/K_{y3}**2) + V_{FY}*(K_{x3}**2*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}* \\
 & t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)) \\
 & /(K_{y3}*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3**2)+K_{x3}*( \\
 & (Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+ \\
 & (m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(Iy_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+ \\
 & \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}** \\
 & l_3))-B_Y*(V_{BX}*(K_{x3}**2*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)+ \\
 & 2*K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)) \\
 & /(K_{y3}*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/2)/(K_{y3}**2*l_3)+1-(2* \\
 & m_{b3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))*(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(l_3*(m_{b3}+ \\
 & \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(Iy_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2- \\
 & (2*m_{b3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*(m_{b3}+ \\
 & \pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)))+(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2) \\
 & +V_{EX}*(K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+ \\
 & (m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*- \\
 & (I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)-(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2)+ \\
 & V_{FX}*(K_{x3}**2*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(m_{b3}* \\
 & y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2) \\
 & +(K_{y3}*l_3**2)+K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+ \\
 & (m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(Iy_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3**2- \\
 & (I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}*l_3))+C_X*(V_{AX}*(-m_{b2}-\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))* \\
 & (m_{b2}*y_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/(l_2*(m_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)))+V_{AY}*( \\
 & ((m_{b2}*x_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2))/l_2-(Iz_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2) \\
 & +\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*y_{c2}**2*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2)/l_2**2)+V_{CY}*(K_{x1}** \\
 & 2*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}** \\
 & 2*l_1**2)+2*K_{x1}*(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)-K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2* \\
 & \pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*y_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1**2)-K_{x1}*(2*Ix_{b1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}** \\
 & 2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/2)/(K_{y1}**2*l_1)+1+(Iz_{b2}+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*x_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)+\pi*\rho_{c2}*t_{c2}*(x_{c2}**2+y_{c2}**2)**2/2)/l_2** \\
 & 2-(2*m_{b1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))*(m_{b1}*x_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(l_1*( \\
 & (m_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)))+(Iy_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*( \\
 & x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2-(2*m_{b1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))*(m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*( \\
 & x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*(m_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)))+(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*( \\
 & x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}*l_1)+(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*( \\
 & x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2)+V_{DY}*(K_{x1}*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*( \\
 & x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2)+ \\
 & (m_{b1}*y_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_{c1}**2)))/(K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
& * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{EY} * (K_{x1}**2 * (-I_{xb1} - \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1 * 2) - \\
& K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * \\
& y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1 * 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/l_1 - \\
& (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1 * 2 - (I_{xyb1} + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1))) - C_Y * (V_{AX} * ((m_{b2} * x_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * \\
& (x_{c2}**2 + y_{c2}**2))/l_2 - (I_{zb2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2} * \\
& 2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2)**2/2)/l_2 * 2) + V_{AY} * (m_{b2} * y_{b2} + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * (x_{c2}**2 + y_{c2} * \\
& 2))/l_2 + V_{CX} * (K_{x1}**2 * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1} * \\
& 2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1 * 2) + 2 * K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) - \\
& K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1 * 2) - K_{x1} * (2 * I_{xb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/2)/(K_{y1}**2 * l_1) + 1 + (I_{zb2} + \pi * \\
& \rho_{c2} * t_{c2} * x_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * y_{c2} * 2 * (x_{c2}**2 + y_{c2}**2) + \pi * \rho_{c2} * t_{c2} * (x_{c2}**2 + \\
& y_{c2}**2)**2/2)/l_2 * 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) * (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} * \\
& 2 + y_{c1}**2))/(l_1 * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))) + (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1 * 2 - (2 * m_{b1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)) * \\
& (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * (m_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))) + (2 * \\
& I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{DX} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * \\
& (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
& (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \\
& \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2) + V_{EX} * (K_{x1} * \\
& 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1} * \\
& * 2 * l_1 * 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \\
& \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1 * 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1} * \\
& 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1} * \\
& 2))/l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/l_1 * \\
& 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1))) + D_X * (V_{CY} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * \\
& t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \\
& \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * \\
& l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1} * \\
& * 2) + V_{DY} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) - (2 * m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2)) * \\
& (m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2))/(l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2))) + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * \\
& t_{c4} * x_{c4} * 2 * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * 2 * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4} * \\
& 2)**2/2)/l_4 * 2 + (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) * \\
& * 2/4)/(K_{y1}**2) + V_{EY} * (K_{x1} * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * 2 * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1}**2 + \\
& y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1}**2 + y_{c1}**2))/(K_{y1} * l_1)) + V_{GX} * \\
& (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4}**2))/l_4 + V_{GY} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}**2 + y_{c4} * \\
& 2))/l_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & *2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \\
 & \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / l_4 ** 2)) - D_Y * (V_{CX} * (K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2)) / K_{y1} - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) - (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * \\
 & * 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{DX} * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * \\
 & (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) - (2 * m_{b4} + 2 * \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) * (m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * \\
 & (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y1} ** 2) + V_{EX} * (K_{x1} * \\
 & (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * \\
 & l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{GX} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * \\
 & (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} ** 2 * (x_{c4} ** 2 + \\
 & y_{c4} ** 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2) ** 2 / 2) / l_4 ** 2) + V_{GY} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} * \\
 & * 2)) * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2)) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4} ** 2 + y_{c4} ** 2))) + \\
 & E_X * (V_{BY} * (K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) * \\
 & * 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * \\
 & y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} * \\
 & * 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + V_{CY} * (K_{x1} ** 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + \\
 & y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * \\
 & (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + \\
 & (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \\
 & \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * \\
 & l_1) + V_{DY} * (K_{x1} * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) * \\
 & * 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{EY} * (K_{x1} ** 2 * \\
 & (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1 * \\
 & * 2) - K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
 & x_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 ** 2 + (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
 & * 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + V_{FY} * (K_{x3} * (-I_{xb3} - \pi * \\
 & \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) - \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (I_{xyb3} + \\
 & \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3)) - E_Y * (V_{BX} * (K_{x3} * (I_{xb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * \\
 & (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y3} ** 2 * l_3) + (m_{b3} * y_{b3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} * \\
 & (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / K_{y3} - (I_{xyb3} + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * x_{c3} * y_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2)) / (K_{y3} * l_3) - (I_{xb3} + \pi * \\
 & \rho_{c3} * t_{c3} * y_{c3} ** 2 * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) + \pi * \rho_{c3} * t_{c3} * (x_{c3} ** 2 + y_{c3} ** 2) ** 2 / 4) / K_{y3} ** 2) + V_{CX} * (K_{x1} * \\
 & * 2 * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} * \\
 & * 2 * l_1 ** 2) - K_{x1} * (m_{b1} * y_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1) + K_{x1} * (2 * I_{xyb1} + 2 * \pi * \\
 & \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1 ** 2) + K_{x1} * (I_{xb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * y_{c1} ** 2 * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / (K_{y1} ** 2 * l_1) + (m_{b1} * x_{b1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} * \\
 & * 2)) / l_1 - (I_{yb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2) ** 2 / 4) / l_1 * \\
 & * 2 - (I_{xyb1} + \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * x_{c1} * y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1)) + V_{DX} * (K_{x1} * (-I_{xb1} - \pi * \rho_{c1} * t_{c1} * \\
 & y_{c1} * (x_{c1} ** 2 + y_{c1} ** 2)) / (K_{y1} * l_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)-\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1)+(I_{xyb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/((K_{y1}**2*l_1)+V_{EX}*(K_{x1}**2*(Ix_{b1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*y_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/(K_{y1}**2*l_1**2)-K_{x1}*(2*I_{xyb1}+2*\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2))/(K_{y1}**2*l_1**2)+(I_{yb1}+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*x_{c1}**2*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)+\pi*\rho_{c1}*t_{c1}*(x_{c1}**2+y_{c1}**2)**2/4)/l_1**2+(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/K_{y3}**2)+V_{FX}*(K_{x3}*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3))+F_X*(V_{BY}*(K_{x3}**2*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3**2)+K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3*(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3))+V_{EY}*(K_{x3}*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3))+V_{FY}*(K_{x3}**2*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3**2)+m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)-(2*m_{b5}+2*\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))*(m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2+(I_{yb3}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/4)/l_5**2)+V_{GX}*(m_{b5}*y_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5+V_{GY}*((m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5-(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2-(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/4)/l_5**2)+F_Y*(V_{BX}*(K_{x3}**2*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(m_{b3}*y_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3)+K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3**2)+K_{x3}*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+(m_{b3}*x_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/l_3-(I_{yb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/l_3*(I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3))+V_{EX}*(K_{x3}*(-Ix_{b3}-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)-\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3)+I_{xyb3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3))+V_{FX}*(K_{x3}**2*(Ix_{b3}+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*y_{c3}**2*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)+\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2)**2/4)/(K_{y3}**2*l_3**2)-K_{x3}*(2*I_{xyb3}+2*\pi*\rho_{c3}*t_{c3}*x_{c3}*y_{c3}*(x_{c3}**2+y_{c3}**2))/(K_{y3}**2*l_3**2)+m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)-(2*m_{b5}+2*\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))*(m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}**2*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2+(I_{yb3}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/4)/l_5**2)+V_{GX}*((m_{b5}*x_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5-(I_{zb5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*x_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/2)/l_5**2)+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/l_5+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)**2/4)/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))+(m_{b5}*y_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*y_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2))/(l_5*(m_{b5}+\pi*\rho_{c5}*t_{c5}*(x_{c5}**2+y_{c5}**2)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}))))) + G_X * (V_{DX} * (-m_{b4} - \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2})) * (m_{b4} * y_{b4} + \\
 & \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2})) / (l_4 * (m_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}))) + V_{DY} * ((m_{b4} * x_{b4} + \\
 & \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2})) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * \\
 & y_{c4}^{**2} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) * * 2 / 2) / l_4 * * 2) + V_{FX} * (-m_{b5} - \pi * \rho_{c5} * \\
 & t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2})) * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2})) / (l_5 * (m_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * \\
 & (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}))) + V_{FY} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2})) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * \\
 & x_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) * \\
 & * 2 / l_5 * * 2) + V_{GY} * ((I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + \\
 & y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) * * 2 / 2) / l_5 * * 2 + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + y_{c4} * \\
 & * 2) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) * * 2 / 2) / l_4 * * 2) - G_Y * \\
 & (V_{DX} * ((m_{b4} * x_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2})) / l_4 - (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + \\
 & y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) * * 2 / 2) / l_4 * * 2) + \\
 & V_{DY} * (m_{b4} * y_{b4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2})) / l_4 + V_{FX} * ((m_{b5} * x_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5}^{**2})) / l_5 - (I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * * 2 * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) * * 2 / 2) / l_5 * * 2) + V_{FY} * (m_{b5} * y_{b5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5}^{**2})) / l_5 + V_{GX} * ((I_{zb5} + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * x_{c5} * * 2 * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * y_{c5} * * 2 * (x_{c5} * \\
 & * 2 + y_{c5}^{**2}) + \pi * \rho_{c5} * t_{c5} * (x_{c5}^{**2} + y_{c5}^{**2}) * * 2 / 2) / l_5 * * 2 + (I_{zb4} + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * x_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + \\
 & y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * y_{c4} * * 2 * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) + \pi * \rho_{c4} * t_{c4} * (x_{c4}^{**2} + y_{c4}^{**2}) * * 2 / 2) / l_4 * * 2))])
 \end{aligned}$$

## **B. Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates**

&gt; REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) &lt;

# Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates

Mario Acevedo, Teresa Orvañanos, Ramiro Velázquez and Eduardo Haro

**Abstract**— This article presents the design optimization of the four-bar linkage for the reduction of the Shaking Force and the Shaking Moment. It is followed a novel procedure based on fully Cartesian Coordinates (Natural Coordinates) and the use of counterweights. These counterweights with as little restrictive constraints on their geometric parameters as possible. No particular counterweight shape in advance is assumed. The analytical equations for the linear momentum and for the angular momentum are obtained, resulting in equations expressed in terms on the mass and the coordinates of the center of mass of the counterweights. These expressions are then used to obtain the Shaking Force and the Shaking Moment of the system in a very direct way. To solve the inverse dynamics problem the inversion of the transpose of the Jacobian matrix, associated to the kinematic constraints, is not required. The links' masses are restricted only by imposing positive mass values. As a novelty, the most influencing optimization variables are identified using a global sensitivity analysis method, leading to a reduction on the number of optimization variables. The minimization is done using Evolutionary Computation. The results obtained are validated by simulations, and compared to those presented in previous representative works.

**Index Terms**—Design Optimization, Dynamics, Evolutionary Computation, Minimization Methods, Natural Coordinates, Shaking Force, Shaking Moment.

## I. INTRODUCCIÓN

EL balanceo dinámico de mecanismos es un tema de investigación tradicional en la ingeniería mecánica aún muy activo, vea por ejemplo [1]. Este consiste en reducir (en el mejor de los casos eliminar) la variación en las reacciones dinámicas transmitidas a la base fija, producidas por el movimiento. Estas reacciones son la fuerza de sacudimiento  $f_{sh}$ , vea la Fig. 1, cuya magnitud es igual a:

$$f_{sh} = \sqrt{(f_{Ax} + f_{Dx})^2 + (f_{Ay} + f_{Dy})^2} \quad (1)$$

y el momento de sacudimiento  $\tau_{sh}$ :

$$\tau_{sh} = \tau + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_D \quad (2)$$

en donde  $\tau$  es el par motor,  $\mathbf{r} = (x_D, y_D)$  es el vector de posición

Mario Acevedo (macevedo@up.edu.mx) y Eduardo Haro are with Universidad Panamericana, Facultad de Ingeniería, Álvaro del Portillo 49, Zapopan, Jalisco, 45010, México.

del punto D y  $\mathbf{f}_D = (f_{Dx}, f_{Dy})$  es la reacción en el punto D. De este modo el objetivo es lograr que  $f_{sh} = cte$  y que  $\tau_{sh} = cte$  mientras el mecanismo se mueve, comúnmente a velocidad constante.

Hasta ahora se han desarrollado muchos métodos con el objetivo de lograr el balanceo de mecanismos. Pueden destacarse algunos trabajos representativos. En [2] se introduce uno de los métodos más conocidos para el balanceo por fuerzas, denominado balanceo por vectores lineales independientes. En [3] se propone el balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras en línea. En [4] se presenta cómo reducir las fluctuaciones del momento angular a través de una distribución de masas, basado en expresiones numéricas del momento angular. Para mayor referencia los métodos consultar [5], [6] y [7], más recientemente [8], donde se realizan excelentes revisiones.

En este trabajo se propone la adición de contrapesos para llevar a cabo el balanceo dinámico óptimo de un mecanismo cuadrilátero articulado plano. El tamaño y localización de estos contrapesos se diseña con base en la optimización de distintas reacciones dinámicas: la fuerza de sacudimiento, el momento de sacudimiento, el par motor, o una combinación de todas ellas.

Distintos autores han resuelto este mismo problema a través de diferentes enfoques. En [9] y [10] se usa la teoría de mínimos cuadrados para la optimización del momento de sacudimiento de un eslabonamiento de cuatro barras balanceado por fuerzas. En [11] se presenta el balanceo parcial de fuerzas haciendo una adaptación del método de Multiplicadores de Lagrange. En [12] se presentan una mejora para la optimización del momento de sacudimiento mediante un método que utiliza la raíz cuadrada media, mientras que en [13] se utilizan técnicas de optimización heurística en conjunto con métodos de mecánica analítica. Esto último ha sido usado en [14] como base para un método que combina el uso de ecuaciones de Newton con el principio del trabajo virtual, planteando así ecuaciones de equilibrio desacopladas y posteriormente emplear el programa H.O.T. propuesto en [15]. Más recientemente, en [16], se resuelve el balanceo óptimo de un eslabonamiento de cuatro barras basado en la recursividad de las ecuaciones dinámicas. En [17] se logra el balanceo dinámico de un cuadrilátero articulado “in-line” con velocidad de entrada constante, empleando un péndulo físico como acoplador y agregando un grupo Assur de Clase II con

Teresa Orvañanos y Ramiro Velázquez are with Universidad Panamericana, Facultad de Ingeniería, Josemaría Escrivá de Balaguer 101, Aguascalientes, Aguascalientes, 20290, México.

&gt; REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) &lt;

parámetros geométricos y de masa previamente determinados. En [18] se formula el balanceo óptimo de un mecanismo de cuatro barras y se utiliza un algoritmo genético para resolver el problema de optimización.

En este trabajo se emplean únicamente coordenadas Cartesianas (coordenadas naturales, [19]) para obtener, de forma sencilla y explícita, las expresiones correspondientes al momento lineal, momento angular y al par motor de un eslabonamiento manivela-balancín plano. Una aportación importante de este trabajo ya que estas reacciones comúnmente se obtienen al resolver el problema de la dinámica inversa, lo cual implica la inversión de una matriz que con el método aquí propuesto se evita.

Posteriormente las expresiones del momento lineal y del momento angular se derivan con respecto al tiempo para obtener expresiones explícitas de la fuerza de sacudimiento y del momento de sacudimiento del mecanismo, haciendo el método muy didáctico y general. Este modelo permite expresar todas las reacciones dinámicas mencionadas, únicamente en función de la masa de los contrapesos y de las coordenadas que localizan sus centros de masa con respecto al sistema de referencia local en cada eslabón. Se evita el uso de variables angulares y de los momentos de inercia empleados en la mayoría de las referencias, lo que constituye una ventaja. Estas variables son usadas en la optimización sin asumir una forma específica para los contrapesos. Únicamente se restringe a que las masas no sean negativas, su relación con los momentos de inercia queda implícita.

El proceso de optimización se lleva a cabo usando un algoritmo de naturaleza estocástica, Evolución Diferencial o “Differential Evolution” [24]. Este algoritmo es muy usado en distintos ámbitos de la ingeniería [26-28], y ha sido de especial ayuda para la síntesis de mecanismos [29]. Los resultados obtenidos son validados por medio de simulaciones y algunos son comparados con los presentados en [20], un trabajo representativo en este tipo de problemas.

El procedimiento presentado e ilustrado en este trabajo es general y puede aplicarse a eslabonamientos en el plano y en el espacio en general. De amplia aplicación en el diseño de robots.

## II. MODELADO EN COORDENADAS NATURALES

La Fig. 1 muestra el diagrama cinemático de un eslabonamiento de cuatro barras genérico en el plano. Todos los eslabones del mecanismo han sido asumidos como rígidos. El eslabón 1, la manivela AC del mecanismo, gira con una velocidad  $\omega$  [rad/s]. El eslabón 2, correspondiente con el acoplador BC, conecta la manivela con el tercer eslabón CD, el balancín, que realiza un movimiento oscilatorio. El eslabón, AD, está fijo. Las longitudes de los eslabones han sido indicadas con  $l_i$ , donde  $i = \{1,2,3\}$ .

Este eslabonamiento ha sido modelado utilizando únicamente las coordenadas Cartesianas de los puntos básicos A, B, C y D:

$$\mathbf{q} = [x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ x_D \ y_D]^T \quad (3)$$

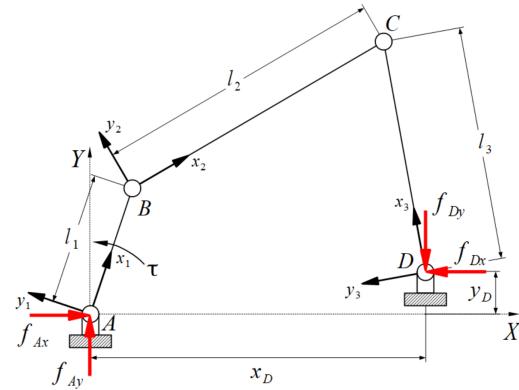


Fig. 1. Modelo cinemático de un mecanismo de cuatro barras: eslabón 1, manivela AC; eslabón 2, acoplador CD; eslabón 3, balancín BC.

Estas coordenadas, dependientes y absolutas, pueden utilizarse para calcular las reacciones dinámicas expresadas directamente en el sistema de referencia fijo (sistema inercial). El punto clave para el cálculo está en el ensamblaje de la matriz de masas del sistema completo. Se inicia definiendo la matriz de masas de cada eslabón como:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{M}_{11} & {}^i\mathbf{M}_{12} \\ {}^i\mathbf{M}_{21} & {}^i\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{M}_{11} &= \begin{bmatrix} m_i - \frac{2m_i x_i}{l_i} + \frac{J_i}{l_i^2} & 0 \\ 0 & m_i - \frac{2m_i y_i}{l_i} + \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix} \\ {}^i\mathbf{M}_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} & -\frac{m_i y_i}{l_i} \\ \frac{m_i y_i}{l_i} & \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix} \\ {}^i\mathbf{M}_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} & \frac{m_i y_i}{l_i} \\ -\frac{m_i y_i}{l_i} & \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix} \\ {}^i\mathbf{M}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{J_i}{l_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siendo:  $m_i$  la masa del eslabón  $i$ ,  $J_i$  el momento de inercia del eslabón  $i$  con respecto al origen del sistema de coordenadas local, y  $(x_i, y_i)$  las coordenadas que ubican la posición del centro de masas  $g_i$  con respecto al origen del sistema de coordenadas local al elemento. La matriz (4) es simétrica, positivo definida y constante. En [19] se da una explicación detallada sobre la obtención de (4) para un cuerpo en el plano

&gt; REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) &lt;

con dos puntos básicos.

Es muy importante mencionar que en este caso  $m_i$  y  $J_i$  corresponden en un inicio a los parámetros de masa e inercia de los cuerpos en el eslabonamiento a balancear. Una vez llevado a cabo el proceso de optimización éstos incluirán además los parámetros de masa e inercia de los contrapesos para lograr el balanceo. Las características geométricas de los contrapesos y la localización de sus centros de masa se determinan mediante el proceso de optimización.

#### A. Cálculo de la Fuerza de Sacudimiento ("Shaking Force")

El momento lineal  $\mathbf{l}$  del sistema, puede calcularse de forma directa empleando la siguiente expresión:

$$\mathbf{l} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades dependientes:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_A^T \quad \dot{\mathbf{q}}_B^T \quad \dot{\mathbf{q}}_C^T \quad \dot{\mathbf{q}}_D^T]^T \quad (6)$$

siendo  $\dot{\mathbf{q}}_k = [\dot{x}_k \quad \dot{y}_k]^T$ . Se introduce la matriz  $\mathbf{B}$  con el objetivo de poder sumar los vectores momento lineal correspondientes a cada uno de los puntos del eslabonamiento, calculados a través del producto  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ .  $\mathbf{B}$  tiene dimensión  $[2 \times 2n]$ , siendo  $n$  el número de puntos básicos en el eslabonamiento, y está formada por una serie de matrices identidad. En este caso:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2]; \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por otra parte, la matriz de masas de todo el sistema,  $\mathbf{M}$ , se ensambla teniendo en cuenta los puntos compartidos entre los cuerpos, en este caso queda como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{11} & {}^1\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^1\mathbf{M}_{21} & {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} & {}^3\mathbf{M}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} & {}^3\mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Precisamente esta es la ventaja de usar únicamente coordenadas cartesianas. El punto  $B$  es compartido por los eslabones 1 y 2, el punto  $C$  es compartido 2 y 3.

Por otra parte la derivada temporal del momento lineal corresponde directamente con la fuerza de sacudimiento  $\mathbf{f}_{sh}$ , en este caso puede obtenerse de forma sencilla derivando (3):

$$\mathbf{f}_{sh} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{\mathbf{q}}_A^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_B^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_C^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_D^T]^T \quad (10)$$

Notando que sólo los puntos  $B$  y  $C$  tienen movimiento,  $A$  y  $D$  están fijos, la fuerza de sacudimiento para el cuadrilátero

articulado puede calcularse como:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{B} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \\ {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \\ \ddot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} \quad (11)$$

#### B. Cálculo del Momento de Sacudimiento ("Shaking Moment")

Debido a que el modelo está expresado únicamente en coordenadas Cartesianas, el momento angular puede calcularse directamente mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (12)$$

donde  $\mathbf{r}$  es un vector renglón de dimensión  $2n$ , siendo  $n$  el número de puntos básicos en el eslabonamiento, y está formado por una serie de vectores  $\tilde{\mathbf{r}}$  que equivalen al producto vectorial:  $\tilde{\mathbf{r}} \equiv [-y \quad x]$ , en este caso:

$$\mathbf{r} = [\tilde{\mathbf{r}}_A \quad \tilde{\mathbf{r}}_B \quad \tilde{\mathbf{r}}_C \quad \tilde{\mathbf{r}}_D] \quad (13)$$

Así el momento angular puede emplearse para calcular el momento de sacudimiento del sistema,  $\tau_s$ , derivando (12) con respecto al tiempo:

$$\tau_s = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (14)$$

en donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_A \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_B \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_D] \quad (15)$$

Considerando que  $\tilde{\mathbf{r}}_A = 0$ , que  $\tilde{\mathbf{r}}_D = (x_D, y_D)$  y que sólo los puntos  $B$  y  $C$  se mueven, el momento angular total puede calcularse como:

$$\tau_{sh} = [\tilde{\mathbf{r}}_B \quad \tilde{\mathbf{r}}_C \quad \tilde{\mathbf{r}}_D] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \\ \ddot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} + [\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_B \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \\ \ddot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### C. Cálculo del Par Motor

Otro parámetro a controlar es el par motor requerido para mover el sistema,  $\tau_m$ . Debe calcularse para incluirlo en los criterios de optimización.

Se ha empleado el principio de las potencias virtuales para su cálculo. El par motor puede obtenerse de forma directa como:

$$\omega\tau_m = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

Considerando que los puntos A y D son fijos, el par motor del eslabonamiento puede calcularse como:

> REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) <

$$\omega \tau_m = [\ddot{\mathbf{q}}_B^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_C^T] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} [\ddot{\mathbf{q}}_B \quad \ddot{\mathbf{q}}_C] \quad (18)$$

### III. PROCESO DE OPTIMIZACIÓN

Para de minimizar la variación las reacciones dinámicas: fuerza de sacudimiento, momento de sacudimiento y par motor, se agregan contrapesos a cada uno de los eslabones móviles del sistema. Los parámetros de masa de los contrapesos y la localización de sus centros de masa constituyen las variables de optimización y pueden agruparse en un vector:

$$\mathbf{p} = [{}^1\mathbf{c} \quad {}^2\mathbf{c} \quad {}^3\mathbf{c}] \quad (19)$$

donde  ${}^i\mathbf{c} = [{}^i m_c \quad {}^i x_c \quad {}^i y_c]$ ,  ${}^i m_c$  corresponde a la masa de cada uno de los contrapesos,  $i = \{1, 2, 3\}$ , mientras  ${}^i x_c$  y  ${}^i y_c$  son las coordenadas del centro de masa de cada contrapeso definidas con respecto al sistema de coordenadas local a cada uno de los eslabones, Fig. 1. Es conveniente notar que el vector de variables a optimizar,  $\mathbf{p}$ , tiene únicamente nueve elementos, esto se debe a que el momento de inercia se excluye gracias a que se excluyen coordenadas angulares. Las restricciones impuestas a los contrapesos son las mínimas posibles, siendo menores que las que se proponen en la mayoría de las referencias.

#### A. Función Objetivo

Para definir la función objetivo se emplean los índices efectivos de balanceo:  $\beta_i$ , que son expresiones adimensionales. Este tipo de expresiones ya han sido usadas previamente en [21], [11] y más recientemente en [20]. Este índice se define como el valor cuadrático medio, “root mean square” o rms, de la correspondiente reacción del eslabonamiento modificado con contrapesos, indicado por el superíndice izquierdo  ${}^0(\cdot)$ , en relación al valor cuadrático medio de la reacción del eslabonamiento original. Por ejemplo, en el caso del momento de sacudimiento este índice es:

$$\beta_{ms} = \frac{\text{rms}({}^0\tau_s)}{\text{rms}(\tau_s)} \quad (20)$$

El objetivo es minimizar  $\beta_{fs}$ , el índice asociado a la fuerza de sacudimiento, así como  $\beta_{ms}$ .

#### B. Optimización

La optimización se lleva a cabo utilizando un algoritmo Evolución Diferencial [24]. Se creó una población de N individuos, identificando el i-ésimo individuo de la generación con el vector  $x_{i,g}$ , que se evolucionó varias generaciones. Los individuos se inicializaron siguiendo una distribución uniforme con los límites restringidos por los rangos permitidos para las variables. En cada generación se modificó un individuo a la vez. Para la mutación se seleccionaron tres individuos aleatoriamente:  $x_{r_0,g}$ ,  $x_{r_1,g}$ , y  $x_{r_2,g}$ , para generar un individuo:

$$v_{i,g} = x_{r_0,g} + F * (x_{r_1,g} - x_{r_2,g}) \quad (21)$$

siendo  $F$  un número aleatorio entre  $F_a$  y  $F_b$ . La cruza se realizó entre el individuo  $x_{i,g}$  y  $v_{i,g}$  para generar a su vez un tercero denominado  $u_{i,g}$ , formado por elementos de los vectores  $v_{i,g}$  o  $x_{i,g}$ , teniendo en cuenta la probabilidad  $P_{Cr}$ . Dada la función de optimización, se seleccionó el mejor individuo entre  $x_{i,g}$  y  $u_{i,g}$  para ser parte de la siguiente generación. Las generaciones se repitieron hasta que la desviación estándar de las aptitudes de los individuos dividida entre el promedio de las aptitudes de los mismos superó el umbral  $T$ . Los valores usados en los parámetros en este trabajo han sido:  $F_a = 0.5$ ,  $F_b = 1$ ,  $P_{Cr} = 0.7$ ,  $T = 0.000001$  y  $N = 15 \times V$ , donde  $V$  es el número de variables a optimizar, nueve en este caso. Estos valores, recomendados como adecuados en general para iniciar el proceso de optimización [24], resultaron convenientes para esta aplicación, dado que el número de variables a optimizar no es grande.

La optimización se lleva a cabo considerando la restricción:

$$\beta_{pm} \leq \beta_{pm}^{\max} \quad (22)$$

donde  $\beta_{pm}$  corresponde al índice de balanceo adimensional del par motor,  $\beta_{pm}^{\max}$  representa el valor máximo permitido para estos dos índices. Tal como se indica en [20], la ventaja de esta aproximación consiste en que el valor cuadrático medio de la fuerza y momento de sacudimiento pueden minimizarse, controlando de forma directa al mismo tiempo el incremento máximo permitido o la mínima reducción deseada para el valor cuadrático medio del par motor.

Además de la restricción en (19) es necesario agregar algunas otras, correspondientes a los parámetros de cada contrapeso. Se requiere que las masas sean positivas, adicionalmente es necesario poner límites a las coordenadas de los centros de masas, logrando así dimensiones prácticas para los contrapesos:

$$\begin{aligned} {}^i m_c &\geq 0 \\ {}^i x_c^{\min} &\leq {}^i x_c \leq {}^i x_c^{\max} \\ {}^i y_c^{\min} &\leq {}^i y_c \leq {}^i y_c^{\max} \end{aligned} \quad (23)$$

siendo  ${}^i m_c$  la masa del iésimo contrapeso, que depende su radio  ${}^i R_c = [{}^i x_c^2 + {}^i y_c^2]^{1/2}$  y de su espesor  ${}^i t_c$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ . Una práctica común en este tipo de problemas es limitar  ${}^i R_c$  para que no sea mayor a la longitud del eslabón correspondiente.

La cantidad máxima de masa que puede ser agregada al sistema a través de los contrapesos debe restringirse también. La masa añadida por contrapesos puede expresarse como:

$$m_c = \sum_{i=1}^3 {}^i m_c \leq km_o \quad (24)$$

donde  $m_c$  es la masa total agregada por los contrapesos,  $m_o$  la

&gt; REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) &lt;

masa total del eslabonamiento original y  $k$  es una constante que controla la suma de la masa de los contrapesos. De acuerdo con los resultados obtenidos en trabajos anteriores [2-18, 20-21], así como en este, se ha visto que es posible obtener buenos resultados al permitir que la masa añadida por contrapesos esté entre 1 y 2 veces la masa original.

#### C. Análisis de Sensibilidad de los Parámetros de Optimización

Para entender el proceso de optimización y establecer los criterios del mismo, se ha realizado un análisis de sensibilidad basado polinomios del caos, ver [22]. Hasta donde se ha podido indagar no se tiene referencia del uso de esta herramienta en este tipo de problemas.

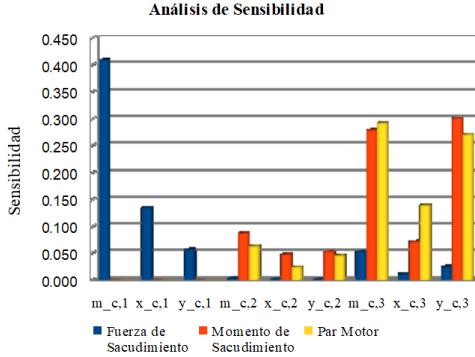


Fig. 2. Resultados del análisis de sensibilidad.

El resultado de aplicar este análisis se presenta en la Fig. 2, donde “ $m_{c,i}$ ” es la masa del contrapeso  $i$ , “ $x_{c,i}$ ” es la posición en la dirección “ $x$ ” del contrapeso  $i$ ” en el sistema de coordenadas local, “ $y_{c,i}$ ” es la posición en la dirección  $y$  del contrapeso “ $i$ ” en el sistema de coordenadas local. La barra azul en “ $m_{c,1}$ ” en la Fig. 2, indica que un incremento en la masa del contrapeso agregado al eslabón de entrada (la manivela) tiene gran influencia en la fuerza de sacudimiento. Por otra parte, un incremento en la masa del contrapeso del balancín, “ $m_{c,3}$ ”, y de la posición de su centro de masas en la dirección  $y$ , tienen gran influencia en el momento de sacudimiento y del par motor. De esta forma es posible controlar el crecimiento de las reacciones dinámicas principalmente con dos contrapesos. Concuerda con los resultados en [2].

Identificado el número y localización de los contrapesos, se plantean las modificaciones necesarias al mecanismo. Para ejemplificar es común considerar contrapesos con forma de disco, como es el caso en este artículo. En aplicaciones prácticas es necesario verificar la forma del contrapeso más adecuada para poder integrarlo (fijarlo) al diseño ya existente.

Lo ideal es que el mecanismo se diseñe balanceado desde un inicio, esto es, que desde la etapa del diseño se defina la forma idónea de los eslabones para que el mecanismo esté balanceado desde la fabricación, evitando problemas de ensamble y fijación de contrapesos externos. Las tecnologías de fabricación aditiva pueden ser de especial ayuda.

#### IV. EJEMPLOS NUMÉRICOS

##### A. Reducción de la Fuerza de Sacudimiento

El método propuesto ha sido aplicado a un cuadrilátero articulado manivela-balancín, estudiado previamente en [18], [20] y [23], sus parámetros se encuentran definidos en la Tabla I.

Se resuelven el radio  ${}^iR_c$  y el espesor  ${}^i t_{c,i} = \{1,3\}$ , de los discos unidos a la manivela y al balancín. No se considera contrapeso en el acoplador ya que no es tan determinante (Fig. 2). En este caso:

$${}^iR_c = \sqrt{{}^i x_c^2 + {}^i y_c^2} \quad (25)$$

$${}^i m_c = \pi ({}^i R_c^2) ({}^i t_{c,i}) \rho \quad (26)$$

siendo  $\rho$  la densidad del material (en este ejemplo es acero con  $\rho = 7,833 [\text{kg/m}^3]$ ), de modo que el problema de optimización queda expresado en función de en un total de 6 parámetros:

$$\mathbf{p} = [{}^1 x_c \quad {}^1 y_c \quad {}^1 t_c \quad {}^3 x_c \quad {}^3 y_c \quad {}^3 t_c] \quad (27)$$

TABLA I  
PARÁMETROS DEL CUADRILÁTERO  
ARTICULADO USADO EN EL EJEMPLO A.

Eslabón	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$l_i [\text{m}]$	0.0508	0.1524	0.0762
$m_i [\text{kg}]$	0.0894	0.2394	0.1215
$x_i [\text{m}]$	0.0254	0.0762	0.0381
$y_i [\text{m}]$	0.0	0.0102	0.0
$J_i [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	0.0000198	0.0006792	0.0002198
$x_D [\text{m}]$	0.1397	$\omega_1 = 500 [\text{rpm}],$	
$y_D [\text{m}]$	0.0	constante.	

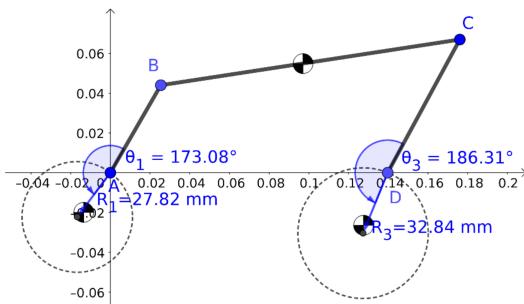


Fig. 3. Mecanismo resultante al optimizar la fuerza de sacudimiento. Los círculos blanco y negro muestran los centros de masa.

En la optimización pueden variar los parámetros en (25), aunque de forma práctica los espesores deben tener una dimensión estándar. De modo que se optimizó la fuerza de sacudimiento manteniendo los espesores con el mismo valor usado en uno de los ejemplos resuelto en [23]:  ${}^1 t_c = {}^3 t_c =$

> REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) <

1.5875 [cm], en donde se presenta solución analítica al problema. Se obtuvieron los mismos resultados. El eslabonamiento resultante se representa en la Fig. 3. Los eslabones originales se muestran en líneas continuas, los contrapesos unidos al mecanismo en el punto A y en el punto D, respectivamente, se muestran en líneas discontinuas, también se muestra su ubicación con respecto a la manivela y al balancín respectivamente. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en la Tabla III, columna A. Se obtuvo una reducción en la fuerza de sacudimiento (ShF) del 100%, con un aumento de 4.79% en el momento de sacudimiento (ShM) y un aumento del 94.18% en el par motor (DrT). Mientras que la masa aumentó en un 160%.

#### B. Reducción de la fuerza y del momento sacudimiento, así como del par motor

En [20], el balanceo dinámico óptimo del eslabonamiento especificado en el inciso A, ha sido aproximado expresando las reacciones dinámicas: fuerza de sacudimiento, momento de sacudimiento y par motor, como un problema de optimización convexo, facilitando el cálculo numérico haciéndolo más eficiente. Como contrapesos se usan masas puntuales y sus características se usan como base para el diseño de discos equivalentes con espesor constante como contrapesos.

A diferencia, en este trabajo, se han incluido las características de los contrapesos mediante un método directo y libre de simplificaciones, haciendo el cálculo más exacto, aunque a costa de un ligero aumento en el tiempo de cálculo que, para efectos prácticos y de diseño, no es importante.

Las expresiones dinámicas descritas en la sección II se han usado para formular distintas variaciones de la función objetivo para su optimización que puede conducir al mínimo global. Esto ha facilitado los resultados exactos manteniendo completa flexibilidad en la forma de los contrapesos.

En este caso se resolvió una variante del eslabonamiento descrito en el inciso previo, IV.A. De esta forma se usan longitudes exactas de los eslabones, teniendo conocimiento preciso de las masas y de los momentos de inercia extraídos del modelo en CAD. Las características exactas se listan en la Tabla II. Todos los elementos del mecanismo son de acero con densidad  $\rho = 7,801 \text{ [kg/m}^3\text{]}$  y espesor de 5 mm. Se consideraron contrapesos de latón en forma de disco, con densidad  $\rho = 8,545 \text{ [kg/m}^3\text{]}$  con el objetivo de obtener valores más pequeños en los parámetros optimizados.

TABLA II  
PARÁMETROS DEL CUADRILÁTERO ARTICULADO USADO EN EL EJEMPLO B.

Eslabón	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$l_i$ [m]	0.05	0.16	0.08
$m_i$ [kg]	0.02251580	0.22708468	0.03421730
$x_i$ [m]	0.025	0.07	0.04
$y_i$ [m]	0.0	0.015622	0.0
$J_i$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]	0.00000646	0.00037876	0.00002226
	3	6	8
$x_D$ [m]	0.14	$\omega_1 = 500 \text{ [rpm]}$	
$y_D$ [m]	0.0	constante.	

Se observó que es posible reducir la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento a costa de un aumento en la masa y del par motor. Los mejores resultados se pueden obtener permitiendo que los contrapesos tengan espesores muy grandes en relación a sus longitudes. Se puede lograr una reducción del 70% en la fuerza y el momento de sacudimiento con contrapesos de radio pequeño y espesores cercanos a los 90 cm, nada útil desde el punto de vista práctico.

De modo que, con el fin de dar soluciones prácticas desde el punto de vista del diseño, se limitaron los parámetros a optimizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -5 \text{ cm} &\leq {}^1x_c \leq 5 \text{ cm} \\ -5 \text{ cm} &\leq {}^1y_c \leq 5 \text{ cm} \\ -4 \text{ cm} &\leq {}^1t_c \leq 4 \text{ cm} \\ -8 \text{ cm} &\leq {}^3x_c \leq 8 \text{ cm} \\ -8 \text{ cm} &\leq {}^3y_c \leq 8 \text{ cm} \\ -4 \text{ cm} &\leq {}^3t_c \leq 4 \text{ cm} \end{aligned} \quad (28)$$

Como primer resultado práctico se ha obtenido una reducción del 66% en la fuerza de sacudimiento y una reducción de 60% en el momento de sacudimiento. Estas reducciones son posibles con una masa añadida 175% de la masa original y un aumento en el par motor de 45.37%. Ver la columna B de la Tabla III. En este caso los contrapesos de la manivela y del balancín tienen espesores de ~1.06 y 4.0 cm respectivamente.

TABLA III  
RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN PARA DISTINTOS ESCENARIOS

	A	B	C
${}^1x_c$ [mm]	-27.62	-29.494	-33.10
${}^1y_c$ [mm]	3.35	-2.335	-1.985
${}^1t_c$ [mm]	15.875	10.614	7.913
${}^3x_c$ [mm]	-32.64	-20.449	-23.657
${}^3y_c$ [mm]	-3.61	7.072	10.0
${}^3t_c$ [mm]	15.875	40.0	22.0
ShF (%)	-100	-66	-63
ShM (%)	4.79	-60	-57
DrT (%)	94.18	45.37	49.607
Masa Añadida (%)	160	175	145

Un mejor resultado, desde el punto de vista de la masa añadida, se obtiene si se reduce la fuerza de sacudimiento en 63% y el momento de sacudimiento en 57%. De este modo la masa se incrementa en un 145% y el par motor aumenta en 49.61%. En este caso los contrapesos de la manivela y del balancín tienen espesores de ~0.8 y 2.0 cm respectivamente. Los resultados completos de detallan en la columna C de la Tabla III.

Para validar los resultados obtenidos en la optimización, se elaboró un modelo del eslabonamiento en un software comercial para la simulación dinámica de sistemas mecánicos (MSC-ADAMS). Los resultados de la simulación dinámica para el caso C en la Tabla III se presentan en las Figs. 4, 5, 6 y 7. Se comparan la fuerza y el momento de sacudimiento, así como el par motor.

&gt; REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) &lt;

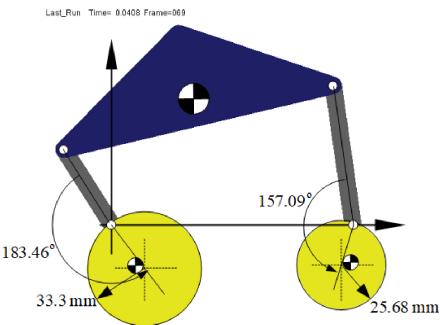


Fig. 4. Eslabonamiento descrito en el inciso IV.B optimizado, resultados de la columna C en la Tabla III, simulado dinámicamente con MSC-ADAMS.

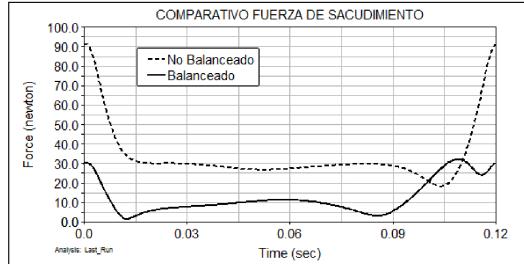


Fig. 5. Comparación de las fuerzas de sacudimiento.

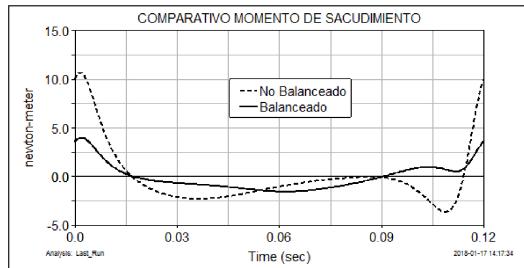


Fig. 6. Comparación de los momentos de sacudimiento.

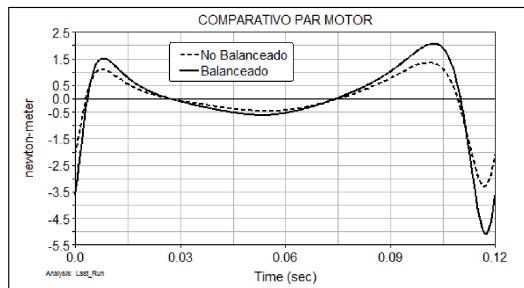


Fig. 7. Comparación de los pares motores.

## V. CONCLUSIONES

Se presenta un método alternativo para el balanceo dinámico óptimo de un mecanismo de cuatro barras manivela-balancín. Se usa “Differential Evolution” para la optimización. Las variables usadas en la optimización son menos restrictivas que lo usado previamente en otros trabajos, obteniendo mínimos globales sin la necesidad de reformular el problema como un programa convexo. Como novedad se presenta la forma de calcular la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento sin necesidad de usar las relaciones cinemáticas, que quedan implícitas en la definición de la matriz de masas del sistema. Adicionalmente la matriz de masas se aprovecha para calcular el par motor sin necesidad de realizar la tradicional inversión de la matriz Jacobiana asociada con un problema general de dinámica inversa. Queda abierta la posibilidad de llevar este método a eslabonamientos más complejos, incluyendo aquellos definidos en el espacio tridimensional.

## REFERENCIAS

- [1] D. Zahng and B. Wei, “Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots,” Springer International Publishing, 2016.
- [2] R. S. Berkof and G. G. Lowen, “A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages,” J. Eng. Ind., vol. 91, no. 1, p. 21, 1969.
- [3] R. S. Berkof, “Complete force and moment balancing of inline four-bar linkages,” Mech. Mach. Theory, vol. 8, no. 3, pp. 397–410, 1973.
- [4] J. L. Wiederrick and B. Roth, “Momentum Balancing of Four-Bar Linkages,” J. Eng. Ind. - Trans. ASME, vol. 98, no. 4, pp. 1289–1295, 1976.
- [5] G. G. Lowen, F. R. Tepper, and R. S. Berkof, “Balancing of linkages—an update,” Mech. Mach. Theory, vol. 18, no. 3, pp. 213–220, 1983.
- [6] V. H. Arakelian and M. R. Smith, “Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Mechanisms: A Historical Review With New Examples,” J. Mech. Des., vol. 127, no. 2, p. 334, 2005.
- [7] V. H. Arakelian and M. R. Smith, “Erratum: ‘Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Mechanisms: A Historical Review With New Examples’ [Journal of Mechanical Design, 2005, 127(2), pp. 334–339],” J. Mech. Des., vol. 127, no. 5, p. 1034, 2005.
- [8] V. Arakelian and S. Briot, Balancing of Linkages and Robot Manipulators, vol. 27. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [9] R. S. Berkof and G. G. Lowen, “Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages,” J. Eng. Ind., vol. 93, no. 1, p. 53, 1971.
- [10] G. G. Lowen and R. S. Berkof, “Determination of Force-Balanced Four-Bar Linkages With Optimum Shaking Moment Characteristics,” J. Eng. Ind., vol. 93, no. 1, p. 39, 1971.
- [11] F. R. Tepper and G. G. Lowen, “Shaking Force Optimization of Four-Bar Linkage With Adjustable Constraints on Ground Bearing Forces,” J. Eng. Ind. - Trans. ASME1, vol. 97, no. 2, pp. 643–651, 1975.
- [12] R.S. Haines. “Minimum rms shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights.”, Mechanism and Machine Theory, vol. 16, no. 3, pp. 185–195, 1981.
- [13] T. W. Lee and C. Cheng, “Optimum Balancing of Combined Shaking Force, Shaking Moment, and Torque Fluctuations in

> REPLACE THIS LINE WITH YOUR PAPER IDENTIFICATION NUMBER (DOUBLE-CLICK HERE TO EDIT) <

- High-Speed Linkages,” J. Mech. Transm. Autom. Des., vol. 106, no. 2, p. 242, 1984.
- [14] N.M. Qi and E. Pennestrì. “Optimum balancing of four-bar linkages,” Mech. Mach. Theory, vol. 26, no. 3, pp: 337–348, 1991.
- [15] T. W. Lee and F. Freudenstein. Heuristic combinatorial optimization in the kinematic design of mechanisms, part 1: Theory,” ASME J. Manuf. Sci. Eng., vol. 98, no. 4, pp. 1277–1280, 1976.
- [16] H. Chaudhary and S.K. Saha. “Balancing of four-bar linkages using maximum recursivedynamic algorithm,”. Mech. Mach. Theory , vol. 42, no. 2, pp. 216–232, 2007.
- [17] S. Briot and V. Arakelian. “Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group”. Mech. Mach. Theory, vol. 57, pp. 13–26, 2012.
- [18] S. Erkaya. “Investigation of balancing problem for a planar mechanism using genetic algorithm,”. Journal of Mechanical Science and Technology , vol. 27, no. 7, pp. 2153–2160, 2013.
- [19] J. García de Jalón and E. Bayo. “Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge.” Springer, 1994.
- [20] B. Demeulenaere, E. Aertbeliën, M. Verschueren, J. Swevers, and J. De Schutter. “Ultimate limits for counterweight balancing of crank-rocker four-bar linkages.”, ASME J. Mech. Des. , vol. 128, no. 6, pp. 1272–1284, 2006.
- [21] G. G. Lowen, F. R. Tepper, and R. S. Berkof. “The quantitative influence of complete force balancing on the forces and moments of certain families of four-bar linkages,” Mech. Mach. Theory, vol. 9, pp: 299–1323, 1974.
- [22] E. Haro, F. Anstett-Collin, and M. Basset. “Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos,”. Reliability Engineering and System Safety , vol. 104, pp:15–26, 2012.
- [23] S. J. Tricamo and G. G. Lowen. “A novel method for prescribing the maximum shaking force of a four-bar linkage with flexibility in counterweight design,”. ASME J. Mech. Des., vol. 105, no. 3, pp: 511–519, 1983.
- [24] R. Storn and K. Price, “Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces,” Journal of Global Optimization, vol. 11, pp. 341–359, 1997.
- [25] M. Acevedo. “An Efficient Method to Find the Dynamic Balancing Conditions of Mechanisms: Planar Systems,” ASME 2015 IDETC, vol. 5B: 39th Mechanisms and Robotics Conference. Boston, Massachusetts, USA, August 2–5, 2015.
- [26] J. Almanza Malagoli, J.R. Camacho, M. Valencia Ferreira da Luz, J. H. I. Ferreira, and A. M. Sobrinho. “Design of Three-Phase Induction Machine Using Differential Evolution Algorithm”. IEEE Latin America Transactions, vol. 13, no. 7, 2015.
- [27] G. H. Negri, M. Santos Matos Cavalca, and R. Stubs Parpinelli. “Model-Based Predictive Control Using Differential Evolution Applied to a Pressure System”, IEEE Latin America Transactions, vol. 14, no. 1, 2016.
- [28] J. J. Guedes, M. F. Castoldi, and A. Goedtel. “Temperature influence analysis on parameter estimation of induction motors using differential evolution”. IEEE Latin America Transactions, vol. 14, no. 9, 2016.
- [29] E. A. Portilla Flores, M. B. Calva Yanez, M. G. Villareal Cervantes, P. A. Nino Cervantes, and G. Sepulveda Cervantes. “An Optimum Synthesis of a Planar Mechanism Using a Dynamic-based Approach”. IEEE Latin America Transactions, vol. 13, no. 5, 2015.



**Mario Acevedo** received the PhD in Mechanical Engineering from Universidad de Navarra – San Sebastian (Spain) in 1996. Since 1996, he is an Associate Professor at Universidad Panamericana, Guadalajara, and currently serves as Secretary for Research of the Faculty of Engineering. He is member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI) and Chair of Member Organization (Mexico) for the International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science (IFTOMM). His current research interests are Multibody System Dynamics Applications, and Mechanism and Machine Theory.



**María Teresa Orváñanos** is an Electronics and Digital Systems Engineer with major in Robotics. She obtained her MSc in Engineering and is PhD Candidate from Universidad Panamericana, Aguascalientes. Currently she is Associate Professor and Head of the Electronics and Digital Systems program in the Faculty of Engineering of Universidad Panamericana. Her current research interests are mechatronic systems, dynamics and control.



**Ramiro Velázquez** received the PhD in Robotics from Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (France) in 2006. Since 2006, he is an Associate Professor at Universidad Panamericana Aguascalientes. He is past Dean of the Faculty of Engineering and currently serves as Vice-President for Research. He is considered an expert evaluator for the European Commission, CONACYT (Mexico), and COLCIENCIAS (Colombia). He is a member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI). His current research interests are assistive technologies and mechatronic systems.



**Eduardo Haro** received the Engineering degree in Electronics from ITESM (Mexico) in 1992, the MSc degree in Electrical Engineering from INPG (France) in 2001, and the PhD in Control Systems from Université de Haute-Alsace (France) in 2006. Since 2006, he is Associate Professor at the Faculty of Engineering, Universidad Panamericana, Guadalajara. He is a member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI). His current research interests are: parameter sensitivity and mechatronic systems.

## **C. Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates**



*Article*

# Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates

María T. Orvañanos-Guerrero <sup>1</sup> , Claudia N. Sánchez <sup>1,2</sup> , Mariano Rivera <sup>3</sup> , Mario Acevedo <sup>4,\*</sup> and Ramiro Velázquez <sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Panamericana, Josemaría Escrivá de Balaguer 101, Aguascalientes 20290, Mexico; torvananos@up.edu.mx (M.T.O.-G.); cnsanchez@up.edu.mx (C.N.S.)

<sup>2</sup> INFOTEC—Centro de Investigación e Innovación en Tecnologías de la Información y Comunicación, Aguascalientes 20313, Mexico

<sup>3</sup> Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato 36023, Mexico; mrivera@cimat.mx

<sup>4</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Panamericana, Álvaro del Portillo 49, Zapopan, JAL 45010, Mexico

\* Correspondence: macevedo@up.edu.mx (M.A.); rvelazquez@up.edu.mx (R.V.); Tel.: +52-1-449-106200 (R.V.)

Received: 17 August 2019; Accepted: 25 September 2019; Published: 1 October 2019



**Abstract:** Machine vibrations often occur due to dynamic unbalance inducing wear, fatigue, and noise that limit the potential of many machines. Dynamic balancing is a main concern in mechanism and machine theory as it allows designers to limit the transmission of vibrations to the frames and base of machines. This work introduces a novel method for representing a four-bar mechanism with the use of Fully Cartesian coordinates and a simple definition of the shaking force (ShF) and the shaking moment (ShM) equations. A simplified version of Projected Gradient Descent is used to minimize the ShF and ShM functions with the aim of balancing the system. The multi-objective optimization problem was solved using a linear combination of the objectives. A comprehensive analysis of the partial derivatives, volumes, and relations between area and thickness of the counterweights is used to define whether the allowed optimization boundaries should be changed in case the mechanical conditions of the mechanism permit it. A comparison between Pareto fronts is used to determine the impact that each counterweight has on the mechanism's balancing. In this way, it is possible to determine which counterweights can be eliminated according to the importance of the static balance (ShF), dynamic balance (ShM), or both. The results of this methodology when using three counterweights reduces the ShF and ShM by 99.70% and 28.69%, respectively when importance is given to the static balancing and by 83.99% and 8.47%, respectively, when importance is focused on dynamic balancing. Even when further reducing the number of counterweights, the ShF and ShM can be decreased satisfactorily.

**Keywords:** four-bar mechanism; multi-objective optimization; Pareto front analysis; optimization analysis; multi-scale mechanisms; Gradient Descent; shaking force balancing; shaking moment balancing

## 1. Introduction

A complete mechanical balance or dynamic balance of a mechanism consists of eliminating the dynamic reactions at the base of a mechanism produced by the movement of its structure. These dynamic reactions are the shaking force (ShF) and the shaking moment (ShM). Such balancing is desirable because the ShF and ShM cause vibrations of the supporting frame which latter turn into noise, fatigue, wear, etc. The four-bar mechanism is often taken as example in dynamic balancing because its number of applications [1,2]

Dynamic balancing can be performed in two stages. In the first one, the balancing conditions are commonly obtained using methods that involve Cartesian coordinates and the use of angles; this implies the use of trigonometric functions that derive into complex expressions [3–6]. In relation to this point, this work exploits the use of fully Cartesian coordinates (also called natural coordinates [7]) to obtain the expressions for optimizing the mechanism balance avoiding any use of angular variables [8,9] and therefore, simplifying the equations. In the second stage, dynamic balancing can be achieved by different methods. A complete review of methods can be found in [3–5] and more recently in [6]. All balancing methods imply the addition of masses in some or other form while trying to maintain the total mass as low as possible. Methods based on mass redistribution are very useful from a practical point of view and are very suitable to be implemented. Using optimization techniques, it is possible to minimize the dynamic reactions while maintaining the increment of mass under control. Mass redistribution can be done by optimizing the geometry of the links [10] or by optimizing the size and position of counterweights.

Traditionally, when computational resources were not available, dynamic balancing optimization was carried out using analytic or semi-analytic methods [11–16]. Nowadays, technological advances have made it easy to implement advanced numerical optimization techniques. It is usually considered that this kind of formulation is difficult to solve because of the nonlinear nature. The most common technique used to optimize mechanism balancing is meta heuristics. Some examples can be appreciated in [17–19]. Herein, techniques like the so-called evolutionary algorithms, Firefly Algorithm, or Differential Evolution, were used, respectively. Some references to methods that transform the objective function to make it convex [20] can also be found. However, they involve a major mathematical analysis.

The optimization algorithm proposed in this paper is a simplified version of Projected Gradient Descent [21], a deterministic and iterative algorithm based on the gradient vector direction. The optimization problem is multi-objective with bound constraints (also known as box constraints). The objective function is obtained by the linear combination of the improvement indexes of the ShF and ShM. This methodology is efficient due to the characteristics of the functions obtained by using fully Cartesian coordinates, allowing to reach a convergence at the minimum value with just few iterations.

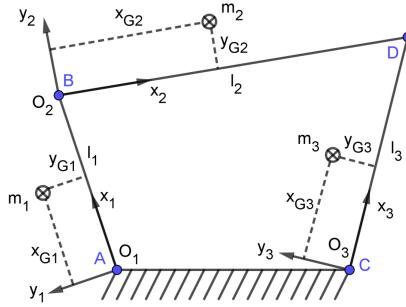
This article presents an extension of our previous work [22] in which, with the use of Fully Cartesian coordinates, dynamic balancing optimization of a four-bar mechanism was achieved through the sole addition of counterweights [23,24]. As a novelty, this work presents a comprehensive analysis of the gradient on the optimal points obtained after the first optimization, so it is possible to know whether the proposed limits of the optimized variables can be modified (whenever possible) to obtain even better results than those originally obtained. An analysis of the volume and the relation between the area and the thickness of the counterweights completes and confirms the gradient analysis. The proposed methodology can be used in similar problems to analyze the optimization of mechanisms. In addition, Pareto Fronts are used to present a sensitivity analysis of the response of the whole mechanism when using three, two, or one counterweights. This type of analysis allows to define the importance of each counterweight and determine which ones can be dispensed, obtaining optimum results when trying to optimize the ShF, the ShM, or both.

The rest of the paper is organized as follows: Section 2 presents the mass-matrix definition and calculus of the ShF and ShM equations of a four-bar linkage using fully Cartesian coordinates. Section 3 defines the objective function for the optimization. Section 4 details the algorithm used to optimize the balance and the sensitivity analysis. Section 5 presents the numerical optimization and analysis when using three, two, and one counterweights. Section 6 concludes the paper summarizing the main findings and giving future work perspectives.

## 2. Mechanical Analysis

### 2.1. Mass-Matrix of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates

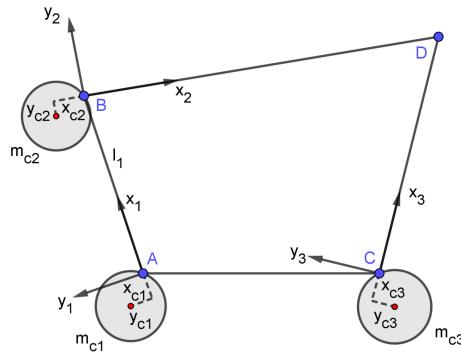
Figure 1 shows a four-bar linkage consisting of four rigid bodies located in the same plane. A motor is located at point A, so the crank AB rotates with velocity  $\omega$  [rads/s].  $l_{AB}$ ,  $l_{BD}$  and  $l_{CD}$  represent the length of each link. By using Fully Cartesian coordinates [9] to represent the system, it is easy to obtain the equations of the ShF and ShM. This method has been previously used in [22,25,26].



**Figure 1.** Original Four-bar linkage.

To obtain the mass-matrix  $M$  of the whole mechanism, it is necessary to define the mass-matrix  $M_n$  of each  $n$  link. Those matrices can be calculated as presented in [9].

As long as the balance is carried out by adding counterweights, it is necessary to include in  $M$  the related parameters. Therefore, each link will be considered as the conjunction of one-bar and one counterweight as shown in Figure 2.



**Figure 2.** Four-bar linkage with counterweights.

The mass  $m_n$  of each link-counterweight  $n = 1, 2, 3$  is defined as:

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \quad (1)$$

where  $m_{bn}$  is the mass of the original bar  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) and  $m_{cn}$  is the mass of each counterweight ( $n = 1, 2, 3$ ). In addition, the counterweight mass in terms of its density and size can be represented as:

$$m_{cn} = \pi \rho_{cn} t_{cn} \left( y_{cn}^2 + x_{cn}^2 \right) \quad (2)$$

where  $\rho_{cn}$  is the density of the material used in each counterweight,  $t_{cn}$  is the thickness of each counterweight, and  $x_{cn}, y_{cn}$  represents the position of the center of mass of the counterweight measured in relation with the local coordinate system  $O_n$ .

The total inertia of each link-counterweight  $I_n$ , where  $n = 1, 2, 3$ , is defined as:

$$I_n = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (3)$$

where  $x_{cn}$  is the  $x$  position of the mass center of the counterweight corresponding to the  $n$  element measured from the origin  $O_n$  and  $y_{cn}$  is the  $y$  position of the mass center of the counterweight corresponding to the  $n$  element measured from the origin  $O_n$ .  $I_{bn}$  corresponds to the inertia of each original bar.

The new  $x$  position of the mass center for each  $n$  element is defined as:

$$X_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4)$$

And the new  $y$  position of the mass center for each  $n$  element is defined as:

$$Y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5)$$

where  $(x_{cn}, y_{cn})$  is the position of the center of mass of each counterweight, and  $(x_{bn}, y_{bn})$  is the position of the center of mass of each original bar, both measured from the origin  $O_n$ .

To avoid the use of extra variables, the mass of each counterweight  $m_{cn}$  is defined as:

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (6)$$

where  $\rho_{cn}$  represents the density of the counterweight,  $t_{cn}$  is the thickness of the counterweight, and  $r_{cn}$  represents the ratio of the counterweight.

In addition, if the counterweight is considered to be a cylinder, the radius of the counterweight can be defined as:

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (7)$$

By substituting Equation (7) in (6):

$$m_{cn} = \pi(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (8)$$

and applying the concepts of [9], the mass-matrix representing the whole mechanism can be written as:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 & e & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & b & 0 & 0 & 0 & g & -h \\ -f & e & 0 & b & 0 & 0 & h & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & i & -j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & j & i \\ 0 & 0 & g & h & i & j & d & 0 \\ 0 & 0 & -h & g & -j & i & 0 & d \end{bmatrix} \quad (9)$$

With:

$$a = \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} - \frac{2(\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1})}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \quad (10)$$

$$b = \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} - \frac{2(\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2})}{l_2} \\ + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} + \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (11)$$

$$c = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} - \frac{2(\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3})}{l_3} \\ + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \quad (12)$$

$$d = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (13)$$

$$e = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} - \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \quad (14)$$

$$f = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \quad (15)$$

$$g = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \quad (16)$$

$$h = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \quad (17)$$

$$i = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \quad (18)$$

$$j = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} \quad (19)$$

## 2.2. Linear Momentum and Shaking Force

Once the mass-matrix of the whole system is known and based on the basic points of the whole linkage, it is possible to introduce a vector of positions represented by  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = [A_X \ A_Y \ B_X \ B_Y \ C_X \ C_Y \ D_X \ D_Y]^T \quad (20)$$

By time-deriving Equation (20), a vector of velocities can be obtained:

$$\dot{\mathbf{q}} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y \ VD_X \ VD_Y]^T \quad (21)$$

By introducing matrix B, it is possible to obtain the linear momentum vectors  $\mathbf{L}$  associated to the whole system:

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

Where B (Equation (23)) is a matrix formed by identity matrices for each of the basic points founded in the mechanism:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

By solving Equation (22) and considering the velocity of the fixed points always equal to zero ( $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$ ,  $VC_Y = 0$ ), the expressions of linear momentum ( $L_i$  and  $L_j$ ) for the linkage are obtained.

The shaking force **ShF** (Equations (24) and (25)) of the linkage can be calculated from the derivation of Equations  $L_i$  and  $L_j$  (Equation (22)). To ensure the linkage is force balanced, these equations must be constant (usually zero) over all the analyzed period of time, thus warranting a null shaking force.

$$\begin{aligned}
 ShF_i = \frac{dL_i}{dt} = & \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AC_Y}{l_3} \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_X \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} - \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \quad (24) \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) \right. \\
 & \quad \left. + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_X \\
 & + \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}) AA_Y}{l_1} \\
 & + \left( -\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_X
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ShF_j = \frac{dL_j}{dt} = & \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} \right) AD_Y \\
& + \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3} + \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AD_X \\
& + \left( -\frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} + \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3} \right) AC_Y \\
& - \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AC_X}{l_3} \\
& + \left( -\frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} + \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) \right. \\
& \quad \left. + m_{b2} + \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} \right) AB_Y \\
& + \left( \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1} - \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2} \right) AB_X \\
& + \left( -\frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} + \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \right) AA_Y \\
& - \frac{(\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}) AA_X}{l_1}
\end{aligned} \tag{25}$$

### 2.3. Angular Momentum and Shaking Moment

The use of Fully Cartesian coordinates allows to express the angular momentum  $H$  as Equation (26) with  $\mathbf{r}$  defined as shown in Equation (27).

$$H = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{26}$$

$$\mathbf{r} = [-A_Y \ A_X \ -B_Y \ B_X \ -C_Y \ C_X \ -D_Y \ D_X]^T \tag{27}$$

By solving Equation (26) and considering  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$  and  $VC_Y = 0$ , the expression of the angular momentum  $H$  can be obtained.

A scalar value corresponding to the shaking moment  $ShM$  of the linkage that is considered perpendicular to the plane of the 2D mechanism, can be calculated by time-deriving  $H$ :

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{28}$$

$$ShM = \frac{dH}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{29}$$

where:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \ VA_X \ -VB_Y \ VB_X \ -VC_Y \ VC_X \ -VD_Y \ VD_X]^T \tag{30}$$

and  $\ddot{\mathbf{q}}$ , the time-derivation of vector  $\dot{\mathbf{q}}$ , represents the acceleration vector.

To guarantee the dynamic balancing of the mechanism,  $ShM$  must be kept constant. The time-derivation of  $H$  (Equations (28) and (29)) should be zero.

By solving Equation (29) and considering  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$  and  $VC_Y = 0$ , the  $ShM$  of the four-bar linkage can be obtained:

$$\begin{aligned}
 ShM = & VD_X \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_Y \right. \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_Y \\
 & \left. - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_X}{l_2} \right) + VB_X - VB_Y \\
 & - \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VD_X VD_Y \\
 & \left. - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) VB_Y VD_Y}{l_2} \right. \\
 & - \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) VB_X VD_Y \\
 & \left. - \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_X \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_Y}{l_2} \right) D_Y \right. \\
 & + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_X \\
 & \left. + \left( \left( \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AD_Y \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} \right) AB_Y \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}) AB_X}{l_2} \right) D_X \right. \\
 & + \left( \left( \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} \right) AD_Y \right. \\
 & \left. + \frac{(\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}) AD_X}{l_3} \right) C_X - B_Y + B_X
 \end{aligned} \tag{31}$$

### 3. Objective Function

A dimensionless balancing index  $\beta_i$  can be used to define the optimization's objective function. This kind of expressions has been previously used in [14,24], and more recently in [20]. As shown in Equation (32), the first balancing index is defined by the relation of the root mean square (rms) of the reaction of the optimized linkage ( $rms(^oReaction)$ ) with respect to the rms value of the reaction of the original linkage ( $rms(Reaction)$ ), both considered over a period of time T.

Two objective indexes will be considered taking in account the reactions of the ShF and ShM. As long as they represent the ratio between the reactions of the original mechanism and the optimized one, the result will present the achieved optimization. The value is in the range (0, 1). The nearest this value is to 0, the best balance is achieved. Otherwise (a value close to 1), the result is almost the same that the one obtained without balancing.

The first balancing index  $\beta_{ShF}$  is shown in Equation (32).

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^oShF)}{rms(ShF)} \quad (32)$$

where the root mean square of the ShF ( $rms(ShF)$ ) is given by:

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (33)$$

and the root mean square of the original ShF ( $rms(^oShF)$ ) is a constant value obtained from calculating the root mean square of the ShF of the four-bar linkage without any added counterweight.

$$rms(^oShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)} \quad (34)$$

By substituting Equations (33) and (34) in Equation (32), the balancing index ( $\beta_{ShF}$ ) can be expressed as:

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N (^oShF_{ik}^2 + ^oShF_{jk}^2)}} \quad (35)$$

Similarly, the second objective index can be calculated when the ShM is considered as the reaction. So,  $\beta_{ShM}$  can be written as:

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}{\sum_{k=1}^N (^oShM_k^2)}} \quad (36)$$

where  $ShM$  is the shaking moment of the optimized linkage when using the added counterweights and  $^oShM$  is a constant value that represents the shaking moment of the unbalanced linkage.

The optimization objective is to minimize  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$  considering boundary limits while ensuring that the coordinates of the centers of mass ( $x_{cn}$  and  $y_{cn}$ ) and the thickness ( $t_{cn}$ ) of each counterweight are dimensions that can be used in the mechanical context. Therefore, the boundaries for optimization are limited according to:

$$x_{cn}^{min} \leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \quad (37)$$

$$y_{cn}^{min} \leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \quad (38)$$

$$t_{cn}^{min} \leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \quad (39)$$

#### 4. Optimization

The optimization theory deals with selecting the best alternative in the sense of the given objective function [27]. It can be applied to solve a wide variety of problems, for example: [28–30].

Mathematically, optimization is the process of finding the minimum or the maximum of a function  $f(\mathbf{X}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  is the vector of variables that can be modified in order to optimize  $f(\mathbf{X})$ . When minimizing the function  $f$ , an optimal solution can be defined as  $\mathbf{X}^*$  where  $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$  for all  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ . In other words, it is a global minimum.

##### 4.1. Simplified Version of the Projected Gradient Descent

Gradient Descent is an iterative algorithm that finds a local minimal in a function [21,27,28]. It starts in a random point and continues until the minimal is reached. This technique is based on the use of the gradient vector to update the solution. The gradient vector  $\nabla f(\mathbf{X})$  evaluated in a point  $X$

points the direction of a maximum ascent. Gradient Descent moves the point in the opposite direction to the gradient. The problem starts with the solution vector  $\mathbf{X}_0$  and in each iteration  $\mathbf{X}_k$  is modified according to Equation (40).

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{P}_k \quad (40)$$

where  $k$  is the current iteration,  $\alpha_k$  is the step length, and  $\mathbf{P}_k$  is the direction calculated as an unitary direction vector as shown in Equation (41).

$$\mathbf{P}_k = -\frac{\nabla f(\mathbf{X}_k)}{\|\nabla f(\mathbf{X}_k)\|} \quad (41)$$

The step length  $\alpha_k$  is optimized based on the approximation of the Taylor's Theorem (Equation (42)), ensuring this way the maximum descent.

$$f(\mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{P}_k) \approx f(\mathbf{X}_k) + \alpha_k \mathbf{P}_k^T \nabla f(\mathbf{X}_k) + \frac{\alpha_k^2}{2} \mathbf{P}_k^T \nabla^2 f(\mathbf{X}_k) \mathbf{P}_k \quad (42)$$

By deriving Equation (42) with respect to  $\alpha$  and clearing  $\alpha$ :

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(\mathbf{X})^T \mathbf{P}_k}{\mathbf{P}_k^T \nabla^2 f(\mathbf{X}) \mathbf{P}_k} \quad (43)$$

#### 4.2. Finite Difference

Calculating the derivatives in a symbolic way may be difficult on certain occasions. Finite Differences [21] can be used to obtain an approximation of the Gradient Vector and the Hessian matrix.

Mathematically, the Gradient vector  $\nabla f(\mathbf{X})$  is formed by the first derivatives of the function with respect to all the variables (Equation (44)) and the Hessian matrix  $\nabla^2 f(\mathbf{X})$  is composed of the second derivatives (Equation (45)).

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (44)$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

To approximate the first partial derivatives, Equation (46) is used. Here,  $\epsilon$  is a scalar constant with a small value ( $\epsilon = 1e - 5$ ),  $\mathbf{e}_i$  is a unitary vector with the size of  $\mathbf{X}$  that contains 0's in all its positions except in the position  $i$  where there is a 1.

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{f(\mathbf{X} + \epsilon \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{X})}{\epsilon} \quad (46)$$

Since the Hessian matrix will be multiplied by a vector, a finite approximation is used (Equation (47)), where  $V$  is the vector to be multiplied.

$$\nabla^2 f(\mathbf{X}) * V = \frac{\nabla f(\mathbf{X} + \epsilon V) - \nabla f(\mathbf{X})}{\epsilon} \quad (47)$$

#### 4.3. Implementation to Optimize the ShF and ShM

The optimization problem consists of minimizing  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$  (see Equations (35) and (36)).  $\mathbf{X}$  is the vector that contains all the variables values that need to be calculated, this is,  $\mathbf{X} =$

$[x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}]$ . As two functions need to be optimized,  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$ , it can be stated that this is a multi-objective problem. In this research, the objectives are in conflict, it means that, when optimizing the values of  $\mathbf{X}$  for minimizing  $\beta_{ShF}$ , a worse value of  $\beta_{ShM}$  can be obtained and vice-versa. All the solutions  $\mathbf{X}$  can be represented in a two dimensional plane with the pair  $(\beta_{ShF}(\mathbf{X}), \beta_{ShM}(\mathbf{X}))$ , as it can be seen in Figure 4. We say a solution is dominated  $\mathbf{X}^d$  when its two objectives are worse than at least other solution, this is,  $\exists x : \beta_{ShF}(\mathbf{X}^d) \geq \beta_{ShF}(\mathbf{X}) \wedge \beta_{ShF}(\mathbf{X}^d) \geq \beta_{ShF}(\mathbf{X})$ . And the non-dominated solutions  $\mathbf{X}^*$  are the ones that  $\beta_{ShF}(\mathbf{X}^*) \leq \beta_{ShF}(\mathbf{X}) \vee \beta_{ShM}(\mathbf{X}^*) \leq \beta_{ShM}(\mathbf{X}) \forall x$ . Figure 4b shows an example of non-dominated (dark blue) and dominated solutions (light blue). The Pareto Front [17] is conformed by the non-dominated solutions. According to the specific mechanical reaction that is more urgent to optimize, it is recommended to choose a specific solution from the Pareto Frontier.

The technique weighted sum [31], that is widely known for solving multi-objective problems, was used for defining the objective function of the optimization problem (Equation (48)).

$$f(\mathbf{X}) = \gamma * \beta_{ShM}(\mathbf{X}) + (1 - \gamma) * \beta_{ShF}(\mathbf{X}) \quad (48)$$

where  $\gamma$  is a scalar value that determines the importance given to each of the objectives of the optimization.

The simplified version of Projected Gradient Descent algorithm is used for solving the optimization problem (Equation (48)). It is described in Algorithm 1. *RandomBoxConstraints()* calculates a vector of random variables with uniform distribution respecting the specified bounds. *GradientFiniteDiff(f, X<sub>0</sub>)* and *HessianFiniteDiff(f, X<sub>k</sub>, P<sub>k</sub>)* calculate the approximation of the Gradient vector and the Hessian matrix based on the Equations (44), (46) and (47).  $\|\cdot\|$  represents the vector norm.  $\epsilon$  is a small scalar ( $\epsilon = 1e - 5$ ).

To handle bound constraints, a simplified version of Projected Gradient Descent is used, so when a solution is found outside of the boundaries, it is projected to the valid region. The Boolean function *isValid(X<sub>k+1</sub>)* returns true if the obtained vector contains values inside the boundaries otherwise, it returns false. The function *clip(X<sub>k+1</sub>)* is used to clip the values of the vector if they are not valid. Clipping the values implies that if the value is smaller than the lower value allowed, then the value is converted to the minimal. In the same way, if the value is bigger than the maximum value allowed, then the value is converted to the maximum.

The algorithm implements two stop conditions: (1)  $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| < \epsilon$ . It means that the difference between  $\mathbf{X}_{k+1}$  and  $\mathbf{X}_k$  is too small, so there is no change in the current solution, this also includes when the Gradient vector norm is close to 0. (2)  $k > NMaxIter$ . It means that the maximum number of iterations has been reached (In this work  $NMaxIter = 1000$ ).

---

**Algorithm 1:** Projected Gradient Descent with maximum descent.

---

```

1  $X_0 = RandomBoxConstraints();$ 
2  $\nabla f(X_0) = GradientFiniteDiff(f, X_0);$ 
3  $k = 0;$ 
4 while  $\|\nabla f(X_k)\| > \epsilon$  or  $k < NMaxIter$  do
5    $P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|};$ 
6    $AP_k = HessianFiniteDiff(f, X_k, P_k);$ 
7    $\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P_k}{P_k^T AP_k};$ 
8    $X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k;$ 
9   If isValid(Xk+1) then clip(Xk+1);
10  If  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  then break;
11   $k = k + 1;$ 
12 end
13 return  $X_k;$ 

```

---

The objective function defined in Equation (48) is non convex, therefore it has different local minimums. For this reason, the algorithm 1 is executed 500 times, each one with a different starting point with the goal of finding the different local minimums. Based on a random search for hyperparameters presented in [32],  $\gamma$  is taken as a random value from a uniform distribution in the range  $(0, 1)$  (see Equation (48)). When the optimization objective values are less than 1.0, the resultant parameters are stored.

#### 4.4. Sensibility Analysis

This subsection shows a way to analyze the Gradient vector values and the constraints.

The optimization problem can be defined as:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \alpha) \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{h} \end{aligned} \quad (49)$$

And the constraints can be redefined as:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \alpha) \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{X} - \mathbf{l} \geq 0 \\ \mathbf{h} - \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \quad (50)$$

In this case, the Lagrangian is given by:

$$L(\mathbf{X}, \delta, \pi) = f(\mathbf{X}) - \delta^T(\mathbf{l} - \mathbf{X}) - \pi^T(\mathbf{h} - \mathbf{X}) \quad (51)$$

and the KKT :

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \delta + \pi = 0 \quad (52)$$

with  $\delta, \pi \geq 0$ , defining  $\lambda = \delta - \pi$

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \lambda = 0 \quad (53)$$

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \lambda \quad (54)$$

Then

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ \lambda_i & \text{if } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (55)$$

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ -\lambda_i & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (56)$$

In other words, if the  $i$ -th entry of the Gradient has a value equal to 0, the constraint is not affected. If the value is greater than 0, the constraint of the lower border is affected. Finally, if the value is smaller than 0, the constraint of the higher border is affected.

## 5. Analysis

This section presents a deep analysis that provides information on the importance of each counterweight and its influence on the balance of the mechanism. It also presents a method to determinate if the optimization limits are the most appropriate or if it is convenient to change them in case the mechanical limitations of the system allows it.

### 5.1. Using Three Counterweights

#### 5.1.1. Mechanical Characteristics

Table 1 presents the parameters of a four-bar linkage (Figure 2). The material used for the links is steel with a density of  $7800 \text{ kg/m}^3$ . The counterweights are made from brass with a density ( $\rho_c$ ) of  $8500 \text{ kg/m}^3$ .

The mechanism is moved by a motor placed at point A, rotating at a constant speed of 500 rpm. Using direct kinematics, it is possible to obtain a sample of the positions ( $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y, D_x, D_y$ ), speeds ( $VB_x, VB_y, VC_x, VC_y, VD_x, VD_y$ ) and accelerations ( $AB_x, AB_y, AC_x, AC_y, AD_x, AD_y$ ) corresponding to each of the basic points considered in this system.

Figure 3 shows the results of the direct kinematics using the mechanism parameters presented in Table 1. It is important to notice that Figure 3a only presents the positions of points B and D (points A and C are fixed). The same occurs with Figures 3b,c where only the velocities and the accelerations of points B and D are presented (this parameters are always zero for points A and C.)

By replacing all known parameters in Equations (35) and (36), the balancing indexes used to define the objective function (Equation (48)) can be obtained.

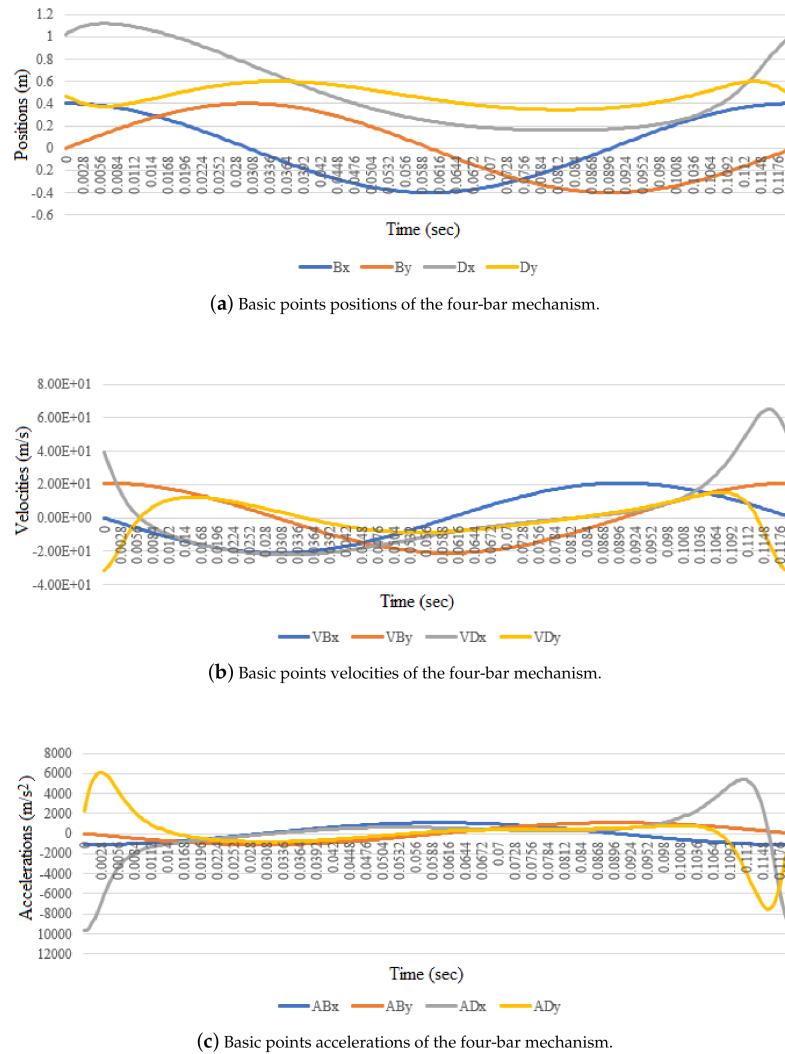
According to the mechanical characteristics of the mechanism the boundaries considered for the optimization are:

$$-0.40 \text{ m} \leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40 \text{ m} \quad (57)$$

$$0.005 \text{ m} \leq t_{cn} \leq 0.04 \text{ m} \quad (58)$$

**Table 1.** Parameters of the four-bar mechanism used in the example.

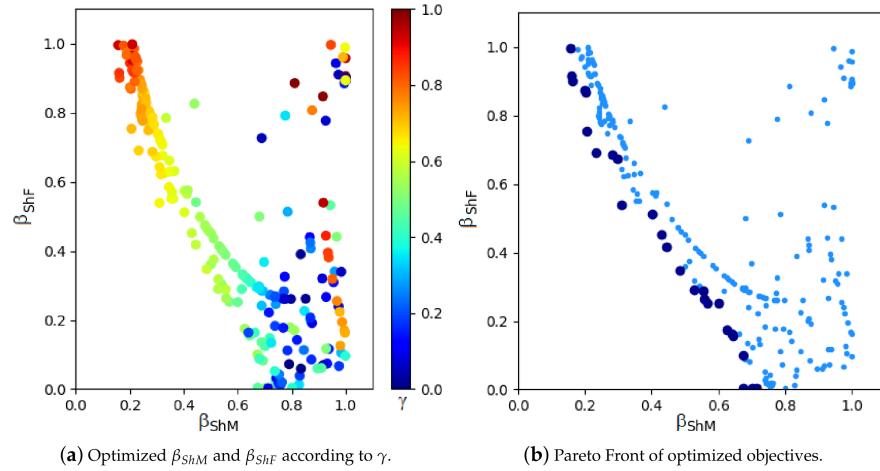
Body <i>n</i>	1	2	3
Mass $m_{b_n}$ [kg]	2.51946901	4.73866901	3.68746901
Length $l_n$ [m]	0.40	0.78	0.60
Inertia $I_{b_n}$ [kg m/s <sup>2</sup> ]	0.14023528	0.98146460	0.45494271
Center of mass $x_{b_n}$ [m]	0.20	0.39	0.30
Center of mass $y_{b_n}$ [m]	0.00	0.00	0.00



**Figure 3.** Direct kinematic results of the four-bar mechanism.

#### 5.1.2. Pareto Front Using Three Counterweights

Figure 4a shows the  $\beta_{SHF}$  and  $\beta_{SHM}$  values of all the solutions founded. Different colors are used to represent the value used for  $\gamma$  on function  $F(X)$  (Equation (48)). In Figure 4b, the dark points represent the Pareto front while the light ones represent the dominated solutions.



**Figure 4.** Pareto analysis of optimization objectives:  $\beta_{ShM}$  and  $\beta_{ShF}$ .

### 5.1.3. Numerical Results

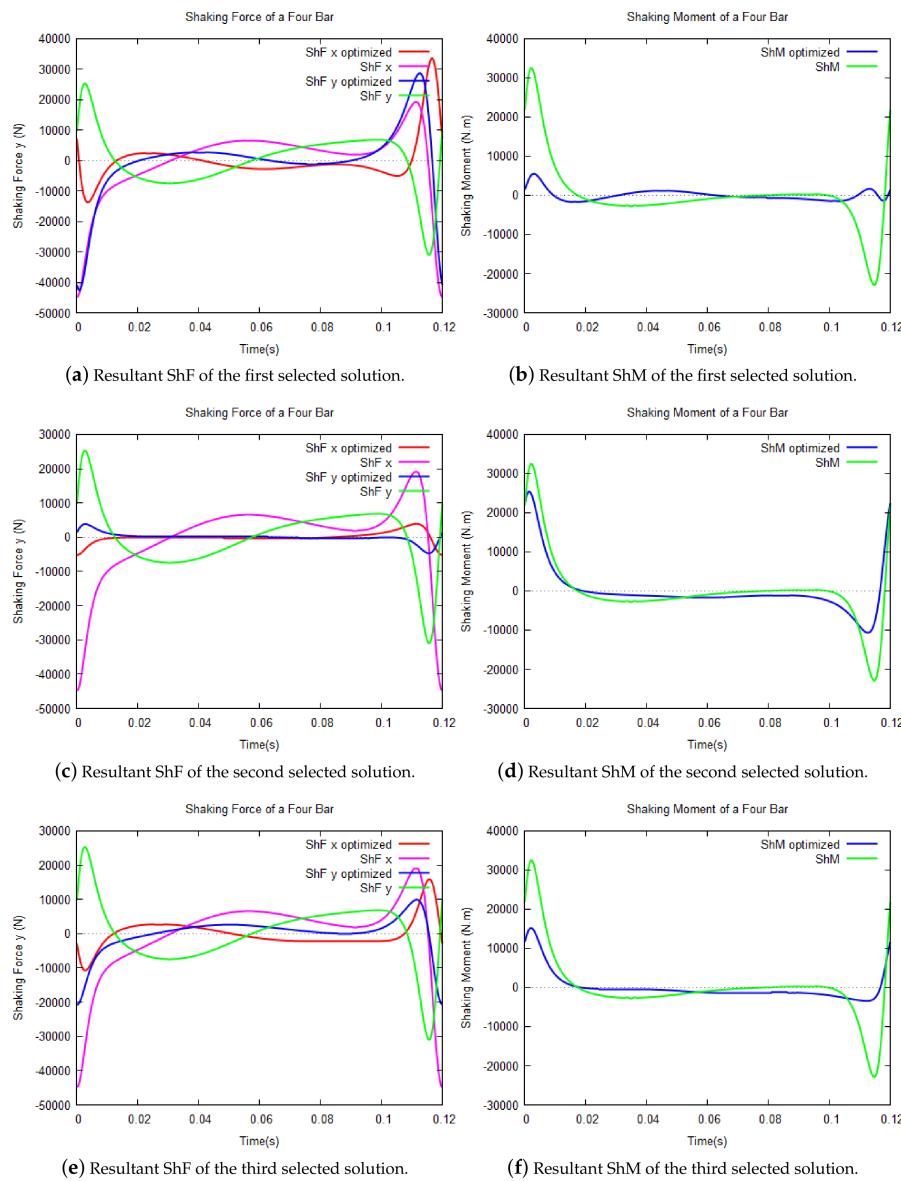
Among the solutions found in the Pareto front, it is possible to select the one that is the most appropriate according to the specific problem that is being solved.

As an example, three solutions of the Pareto front are taken; the first one is the best result when optimizing the index corresponding to the ShM ( $\beta_{ShM} = 0.1600587$ ,  $\beta_{ShF} = 0.9152829$ ), the second one is the best result when optimizing the index corresponding to the ShF ( $\beta_{ShM} = 0.71311372$ ,  $\beta_{ShF} = 0.00295769$ ) and the last one is selected when both ShM and ShF indexes are optimized by almost 60% ( $\beta_{ShM} = 0.42969434$ ,  $\beta_{ShF} = 0.45176319$ ).

The first chosen solution is the one in the Pareto front with the minimum value in  $\beta_{ShM}$  ( $\beta_{ShM} = 0.1600587$ ,  $\beta_{ShF} = 0.9152829$ ). It corresponds to the following variables values:

$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.306033474 & y_{c1} = -0.05120233 & t_{c1} = 0.007840031 \\ x_{c2} = -0.031811247 & y_{c2} = -0.09348429 & t_{c2} = 0.04 \\ x_{c3} = -0.115671647 & y_{c3} = 0.112686771 & t_{c3} = 0.04 \end{array}$$

Figure 5a shows the comparison between the ShF (on the x and y axes) of the original mechanism and the ShF after the optimization. In this case, the total ShF was improved only by 8.47%. But with this solution, it is possible to appreciate that the ShM of the four-bar optimized mechanism is 83.99% better than the original one (Figure 5b). It can be observed that upon the sole use of counterweights, it is not possible to eliminate the ShM, but it can be significantly reduced, reducing also the ShF a bit.



**Figure 5.** Shaking Force and Shaking Moment comparison.

The second chosen solution is the one in the Pareto front with the minimum value in  $\beta_{ShF}$  ( $\beta_{ShM} = 0.71311372$ ,  $\beta_{ShF} = 0.00295769$ ). It corresponds to the following variables values:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.15548064 & y_{c1} &= -0.007810097 & t_{c1} &= 0.035743454 \\ x_{c2} &= -0.046683398 & y_{c2} &= -0.068805445 & t_{c2} &= 0.027404923 \\ x_{c3} &= -0.132085338 & y_{c3} &= 0.015127099 & t_{c3} &= 0.037640418 \end{aligned}$$

In Figure 5c, it is possible to appreciate that the ShF is significantly reduced (99.70%) compared to the original mechanism. It can be considered that the ShF is almost completely eliminated by using counterweights and also that the ShM has a reduction of 28.69% (Figure 5d).

The third chosen solution is the one in the Pareto front where both indexes corresponding to ShF and ShM are optimized almost by 60% ( $\beta_{ShM} = 0.42969434$ ,  $\beta_{ShF} = 0.45176319$ ). It corresponds to the following variables values:

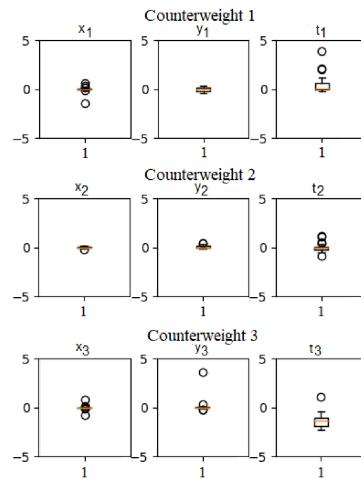
$$\begin{array}{lll} x_{c1} = -0.233449901 & y_{c1} = 0.047539111 & t_{c1} = 0.005 \\ x_{c2} = 0.0000527 & y_{c2} = 0.000296052 & t_{c2} = 0.005000159 \\ x_{c3} = -0.125584323 & y_{c3} = 0.058770112 & t_{c3} = 0.04 \end{array}$$

By using these counterweights, the ShM is reduced by 57.03% and the ShF by 54.82% (Figures 5e,f).

#### 5.1.4. Partial Derivatives, Volumes and Relation Area-Thickness of Three Counterweights

This subsection presents an analysis to determine if the proposed limits for optimization are the most suitable or if they should be changed (in case there is the possibility of modifying them due to mechanical constraints).

In Figure 6 the box-plots of the partial derivatives with respect to each variable  $x_n$ ,  $y_n$  and  $t_n$  for each counterweight  $n$  ( $1 \leq n \leq 3$ ) are shown.

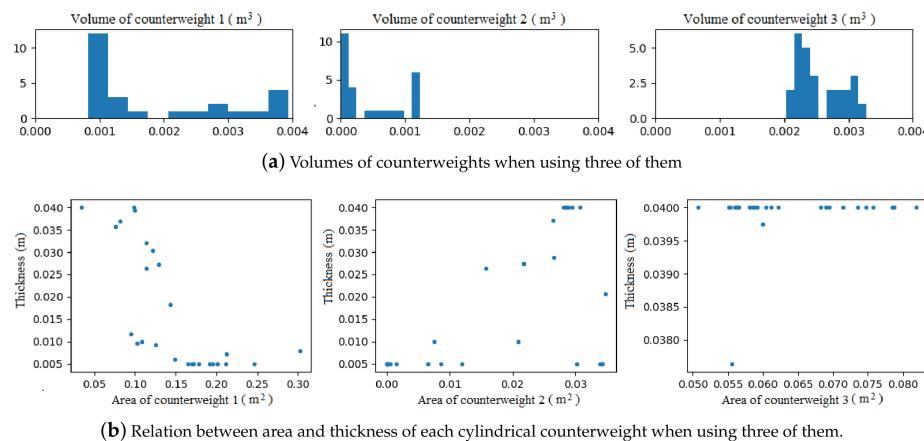


**Figure 6.** Box plots of partial derivatives with respect to each optimization variable when using three counterweights.

It is known that an optimal solution is found if all the partial derivatives values are equal to zero. In the box plots of Figure 6 it can be seen that, for the variables  $x_n$  and  $y_n$  of the counterweights  $n$  ( $1 \leq n \leq 3$ ), the partial derivatives are close to zero, this means that it was possible to reach the optimal values within the proposed optimization limits.

However, for the variables  $t_1$  and  $t_3$ , the partial derivatives are not close to zero. In  $t_1$ , it can be appreciated that the value tends to be greater than zero, hence, it can be deduced that the thickness of Counterweight-1 is trying to be less than the limit 0.005 m. Evidently, this is not possible due to the mechanical limitations that prevent a counterweight thickness from being too close to zero or negative because it is physically impossible. On the other hand, the value of  $t_3$  tends to be less than 0, which means that if the limits of the optimization allowed it, Counterweight-3 would have a thickness greater than 0.04 m. This information, obtained from the partial derivatives analysis, can be very useful to decide the limits of the counterweights when there is the possibility to modify them.

In Figure 7a, the volume value histogram of the counterweights obtained on the different optimization solutions is presented. By analyzing the volume of the counterweights and the relation between their area and thickness (Figure 7b), it can be seen that Counterweight-2 has a very small volume (compared with the other counterweights) and when both area and thickness are very small, Counterweight-2 is almost disappearing from the solution. On the other hand, the relation between the area and the thickness of Counterweight-3 shows how in almost all the cases the thickness is reaching the highest allowed limit; this confirms the information given by the histogram previously analyzed and confirms the conclusion that if mechanical characteristics of the system allows it, it might be advisable to perform the optimization with a slightly larger upper limit for the variable  $t_3$ .



**Figure 7.** Parameters used to analyze the dimension of each counterweight when using three of them.

### 5.2. Decreasing the Amount of Counterweights Used for Balancing

There could be cases when it is desirable to eliminate one or more counterweights. The reasons can be the resultant volume of the whole mechanism or the cost for implementing the solution.

#### 5.2.1. Pareto Front Comparison to Eliminate One Counterweight

Figure 8 shows the Pareto front of the different optimization results when using all possible combinations (three, two, or only one counterweight). The black stars correspond to the original Pareto front when the three counterweights are used. The blue crosses correspond to the Pareto front when Counterweight-2 has been eliminated and only Counterweights 1 and 3 are being considered. Comparing these results with those obtained when using all the counterweights, it is possible to see that the Pareto fronts are very similar.

The green crosses correspond to the Pareto front when using only Counterweights-2 and 3. The yellow crosses correspond to the Pareto front when Counterweight-3 has been eliminated and Counterweights-1 and 2 are in use.

Using the information provided by the Pareto fronts (Figure 8), it is possible to conclude that, if one decides to eliminate a counterweight to simplify the balancing of the mechanism, it should be Counterweight-2, since using only Counterweights-1 and 3 produces a similar result to that obtained when all three counterweights are used.

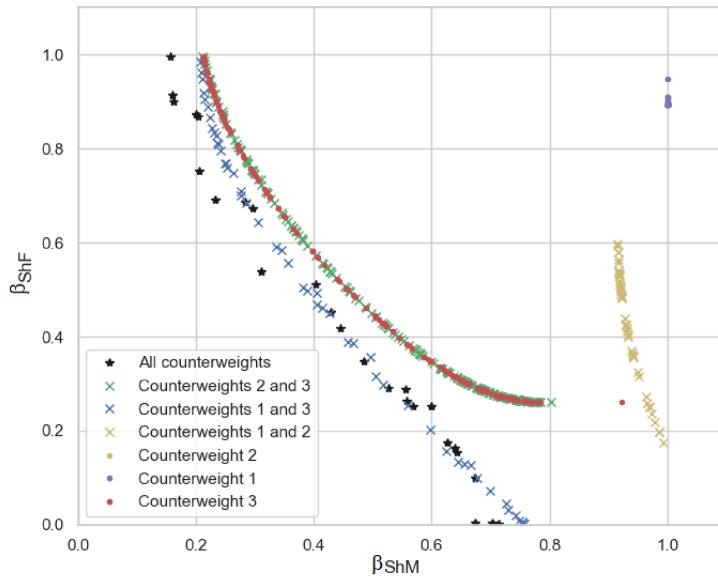


Figure 8. Pareto front comparison.

Appendix A shows the numerical results when using only two counterweights giving importance to the optimization of the ShF, ShM, and both. A sensitivity analysis is also presented to decide which counterweight should be used if one decides to use only one counterweight. The partial derivatives, volumes and relation area-thickness is also presented giving information about the selected optimization limits, allowing to further improve the results.

Appendix B shows the numerical results when using only one counterweight and presents the sensitivity analysis and the partial derivatives, volumes and relation area-thickness using the methods previously proposed.

Table 2 shows the optimization results when using three, two, and one counterweight.

### 5.3. Expanding Optimization Limits for $t_3$

As aforementioned, using the box-plots of the partial derivatives with respect to each variable, the volume values histogram of the counterweights, and the graphics of the relation between area and thickness, it is possible to obtain valuable information about the chosen limits of the optimization. The decision of modifying these limits depends on the mechanical characteristics of the whole mechanism.

Taking the example when using only one counterweight (Appendix B) the recommendation after the analysis was to choose a higher limit of thickness  $t_3$ , a new optimization process was executed with the limits:

$$-0.40 \text{ m} \leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40 \text{ m} \quad (59)$$

$$0.005 \text{ m} \leq t_{cn} \leq 0.05 \text{ m} \quad (60)$$

The upper limit of  $t_3$  could be changed from 0.04 m to 0.05 m. Using this value and giving more importance to  $\beta_{ShF}$ , the physical characteristics of Counterweight-3 should be:

$$x_{c3} = -0.141021300369708 \quad y_{c3} = -0.00665773774579448 \quad t_{c3} = 0.0207544372440781$$

Using this solution, allows the ShF and ShM to be reduced by 73.92% and 14.32%, respectively.

**Table 2.** Comparison between optimization results.

		ShF Optimization	ShM Optimization
Using three counterweights	Optimizing ShF	99.70%	28.69%
	Optimizing ShM	8.47%	83.99%
	Optimizing both ShF and ShM	54.82%	57.03%
Using counterweights 1 and 3	Optimizing ShF	99.67%	24.34%
	Optimizing ShM	1.55%	79.22%
	Optimizing both ShF and ShM	55.05%	57.27%
Using only counterweight 3	Optimizing ShF	78.74%	0.42%
	Optimizing ShM	3.22%	73.61%
	Optimizing both ShF and ShM	51.19%	53.31%

On the other hand, when the importance is given to  $\beta_{ShM}$ , the physical characteristics of Counterweight-3 should be:

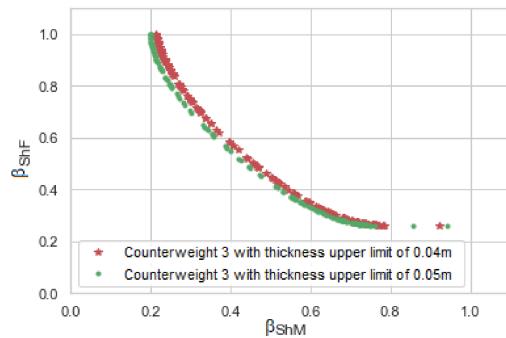
$$x_{c3} = -0.1112378507983744 \quad y_{c3} = 0.091294702876245 \quad t_{c3} = 0.05$$

Using this counterweight the ShM and ShF is reduced by 80.17% and 5.30%, respectively.

Table 3 compares the optimization results obtained with the expanded limits and the original limits. It can be seen that expanding Counterweight-3 thickness upper limit, improves the ShM. Figure 9 shows the comparison of Pareto fronts before and after changing the optimization limits. It can be noticed that the thickness of Counterweight-3 has a greater influence on the optimization of the ShM of the mechanism. By increasing this limit, optimization results can be better.

**Table 3.** Comparison between optimization results when expanding the thickness upper limit of Counterweight-3.

		ShF Optimization	ShM Optimization
Using 0.05m as $t_3$ upper limit	Optimizing ShF	73.92%	14.32%
	Optimizing ShM	5.30%	80.17%
Using 0.04m as $t_3$ upper limit	Optimizing ShF	78.74%	0.42%
	Optimizing ShM	3.22%	73.61%



**Figure 9.** Pareto comparison when changing Counterweight-3 thickness upper limits.

## 6. Conclusions

By using fully Cartesian coordinates to represent a mechanism, the equations that define the reactions are less complex than those obtained with other methods, hence, the use of this kind of coordinates is suitable for complete balancing, minimization of reactions, and calculation of the ShF and ShM in mechanisms.

The use of fully Cartesian coordinates to represent a four-bar linkage in conjunction with the Simplified Gradient Descent algorithm is a suitable methodology to optimize the balancing of mechanisms. It allows, when using three counterweights and giving more importance to static balancing, to reduce the ShF and ShM by 99.70% and 28.69%, respectively; and when importance is given to the dynamic balancing, to reduce the ShM and the ShF by 83.99% and 8.47%, respectively.

The optimization algorithm was successfully applied to solve the problem. The use of linear combination of functions is a simple yet robust way to handle multi-objectives. The approximation of the derivatives based on Finite Difference allows guiding the algorithm and reducing human hand calculation mistakes.

Comparison between Pareto fronts proves to be an adequate methodology for the sensitivity analysis of each counterweight. This method has proved that even when using only one counterweight, the ShF can be reduced by 78.74% when giving importance to the static balancing or the ShM can be reduced by 73.61% when giving importance to dynamic balancing.

The box-plots of the partial derivatives with respect to each variable, histograms of volumes, and relations between area and thickens allow to analyze the proposed optimization limits in order to decide if they can be changed to obtain even better results.

As future work, it is expected to use these algorithms and analysis to optimize more complex mechanisms in two and three dimensions.

**Author Contributions:** M.A. conceived and implemented the use of Fully Cartesian coordinates to define a mechanism. M.R. design the Optimization Algorithm. M.T.O.-G., C.N.S. designed the experimental methodology and analyze the results. M.R., R.V. validated the results. M.T.O.-G., C.N.S., R.V. wrote the paper. All authors reviewed the paper.

**Funding:** This research received no external funding.

**Conflicts of Interest:** The authors declare no conflict of interest.

## Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

ShF Shaking Force

ShM Shaking Moment

## Appendix A. Analysis Using Two Counterweights

This appendix presents the analysis when using only two counterweights.

### Appendix A.1. Numerical Results

After proving that the counterweight that has the less influence on the optimization is Counterweight-2, three solutions are selected from the Pareto front that use only Counterweights-1 and 3. Solutions are chosen as follows:

1. If the interest is to optimize the index related to the ShF ( $\beta_{ShF}$ ) without giving importance to the index related to the ShM ( $\beta_{ShM}$ ), the selected solution is:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.210649187 & y_{c1} &= 0.002597417 & t_{c1} &= 0.005812833 \\x_{c3} &= -0.133324421 & y_{c3} &= 7.62E - 05 & t_{c3} &= 0.039931556\end{aligned}$$

By using this solution, the ShF can be reduced by 99.67%, while the ShM by 24.34%.

2. If the interest is to optimize the index related to the ShM ( $\beta_{ShM}$ ), without giving importance to the index related to the ShF ( $\beta_{ShF}$ ), the selected solution is:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.273728043 & y_{c1} &= -0.029116001 & t_{c1} &= 0.005 \\x_{c3} &= -0.11860947 & y_{c3} &= 0.10186805 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

By using this solution, the ShM can be reduced by 79.22%, while the ShF by 1.55%.

3. If the interest is to optimize both indexes,  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$ , the selected solution is:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= -0.207213869 & y_{c1} &= 0.031661306 & t_{c1} &= 0.006993731 \\x_{c3} &= -0.126559077 & y_{c3} &= 0.058396603 & t_{c3} &= 0.04\end{aligned}$$

This solution reduces the ShF and the ShM by 55.05% and 57.27%, respectively.

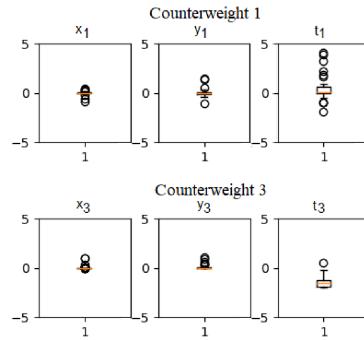
### Appendix A.2. Partial Derivatives, Volumes, and Relation Area-Thickness When Using Two Counterweights

Figure A1 shows the box-plots of the partial derivatives with respect to each variable  $x_n$ ,  $y_n$  and  $t_n$  (for counterweights  $n = 1$  and  $n = 3$ ), when Counterweight-2 is eliminated.

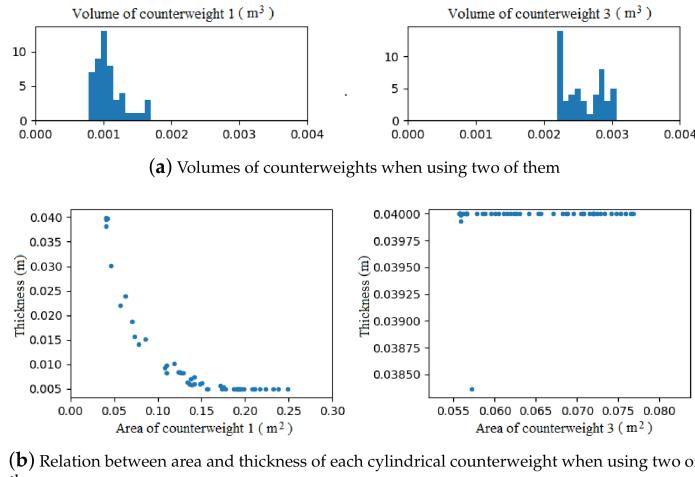
A partial derivative analysis of each optimized variable can be performed to know if it is advisable to modify the proposed optimization limits. When analyzing the box-plots for the values of  $x_n$ ,  $y_n$ , it can be noticed that they are very close to zero, this means that the limits defined on the optimization to these variables are adequate. The variable  $t_1$  slightly tries to be greater than zero, this means that in this some cases the thickness of Counterweight-1 it is trying to be less than the limit 0.005m, but as aforementioned this is not mechanically possible.

On the other hand, the partial derivative box-plot of  $t_3$  shows that this value is trying to be greater than the proposed limit, this means that the optimization is reaching the allowed upper limit and if the mechanical limitations allow, it could be interesting to increase it.

To confirm the proposed analysis, Figure A2a shows the histogram of the total volume of each counterweight. Note that Counterweight-1 is smaller than Counterweight-3, and that the relation between area and thickness of each counterweight (Figure A2b) proves that the thickness of Counterweight-3 is trying get out of the upper limit.



**Figure A1.** Box plots of partial derivatives with respect to each optimization variable when using two counterweights.



**Figure A2.** Parameters used to analyze the dimension of each counterweight when using two of them.

## Appendix B. Analysis Using Only One Counterweight

This appendix presents the analysis when using only one counterweight.

### Appendix B.1. Numerical Results

Three solutions are selected from the Pareto front using only Counterweight-3, they are chosen as follows:

1. If the interest is to optimize the index related to the ShF ( $\beta_{ShF}$ ), without giving importance to the index related to the ShM ( $\beta_{ShM}$ ), the selected solution is:

$$x_{c3} = -0.11950597007297 \quad y_{c3} = 0.0984494486824036 \quad t_{c3} = 0.04$$

By using this solution, the ShF can be reduced by 78.74%, while the ShM by 0.42%.

2. If the interest is to optimize the index related to the ShM ( $\beta_{ShM}$ ) without giving importance to the index related to the ShF ( $\beta_{ShF}$ ), the selected solution is:

$$x_{c3} = -0.240986266107467 \quad y_{c3} = 0.0012908547612233 \quad t_{c3} = 0.00715115109817927$$

By using this solution, the ShM can be reduced by 73.61% while the ShF by 3.22%.  
3. If the interest is to optimize both indexes ( $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$ ) the selected solution is:

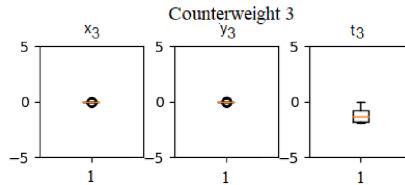
$$x_{c3} = -0.130165416712609 \quad y_{c3} = 0.0500126887169449 \quad t_{c3} = 0.04$$

This solution reduces the ShF by 51.19% and the ShM by 53.31%.

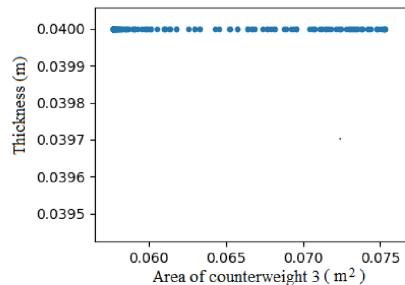
In Table 2 the comparison between the optimization results when using three, two and only one counterweight can be observed. It is evident that the best results are obtained when using three counterweights. Still, it is interesting to notice that when using only Counterweight-3, it is possible to improve the balance of the whole mechanism and reduce the total cost of the implementation.

#### Appendix B.2. Partial Derivatives, Volumes, and Relation Area-Thickness When Using Only One Counterweight

Figure A3 shows the box-plots of the partial derivatives with respect to each variable  $x_3$ ,  $y_3$  and  $t_3$  when using only the third counterweight. It can be observed that the optimization limits for  $x_3$  and  $y_3$  are adequate, but as  $t_3$  tends to be negative, it is actually trying to become even bigger. This can be confirmed by analyzing the relation between the area and the thickness of Counterweight-3 in Figure A4 where the thickness in all the cases is trying to take higher values. So, if the solution will be implemented using only one counterweight, it could be interesting to allow a higher limit on the optimization of this variable, so even better results can be achieved.



**Figure A3.** Box plots of partial derivatives with respect to each optimization variable when using one counterweight.



**Figure A4.** Relation between area and thickness of each cylindrical counterweight when using only Counterweight-3.

#### References

- Martini, A.; Troncossi, M.; Rivola, A. Elastodynamic effects of mass-balancing: Experimental investigation of a four-bar linkage. *Adv. Mech. Eng.* **2013**, *2013*. [[CrossRef](#)]
- Zhang, J.; McInnes, C.R. Reconfiguration of a four-bar mechanism using phase space connections. *Mech. Syst. Signal Process.* **2016**, *81*, 43–59. [[CrossRef](#)]
- Arakelian, V.; Dahan, M.; Smith, M. A Historical Review of the Evolution of the Theory on Balancing of Mechanisms. In *International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM 2000*; Springer: Dordrecht, The Netherlands, 2000; pp. 291–300. [[CrossRef](#)]

4. Arakelian, V.H.; Smith, M.R. Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Mechanisms: A Historical Review With New Examples. *J. Mech. Des.* **2005**, *127*, 334. [[CrossRef](#)]
5. Lowen, G.; Tepper, F.; Berkof, R. Balancing of linkages—An update. *Mech. Mach. Theory* **1983**, *18*, 213–220. [[CrossRef](#)]
6. Arakelian, V.; Briot, S. *Balancing of Linkages and Robot Manipulators*; Mechanisms and Machine Science; Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2015; Volume 27, pp. XVI, 291. [[CrossRef](#)]
7. De Jalón, J.G. Twenty-five years of natural coordinates. *Multibody Syst. Dyn.* **2007**, *18*, 15–33. [[CrossRef](#)]
8. García de Jalón, J.; Serna, M.A.; Avilés, R. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms—I velocities and accelerations. *Mech. Mach. Theory* **1981**, *16*, 543–556. [[CrossRef](#)]
9. De Jalón, J.G.; Bayo, E. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*; Springer: New York, NY, USA 1994; p. 440.
10. Chaudhary, K.; Chaudhary, H. Optimal dynamic balancing and shape synthesis of links in planar mechanisms. *Mech. Mach. Theory* **2015**, *93*, 127–146. [[CrossRef](#)]
11. Haines, R. Minimum RMS shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights. *Mech. Mach. Theory* **1981**, *16*, 185–195. [[CrossRef](#)]
12. Elliott, J.L.; Tesar, D. The Theory of Torque, Shaking Force, and Shaking Moment Balancing of Four Link Mechanisms. *J. Eng. Ind.* **1977**, *99*, 715. [[CrossRef](#)]
13. Wiederrick, J.L.; Roth, B. Momentum Balancing of Four-Bar Linkages. *J. Eng. Ind.* **1976**, *98*, 1289–1295. [[CrossRef](#)]
14. Tepper, F.R.; Lowen, G.G. Shaking Force Optimization of Four-Bar Linkage With Adjustable Constraints on Ground Bearing Forces. *J. Eng. Ind.* **1975**, *97*, 643–651. [[CrossRef](#)]
15. Lowen, G.G.; Berkof, R.S. Determination of Force-Balanced Four-Bar Linkages With Optimum Shaking Moment Characteristics. *J. Eng. Ind.* **1971**, *93*, 39–46. [[CrossRef](#)]
16. Berkof, R.S.; Lowen, G.G. Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages. *J. Eng. Ind.* **1971**, *93*, 53–60. [[CrossRef](#)]
17. Farmani, M.R.; Jaamiahmadi, A.; Babaie, M. Multiobjective optimization for force and moment balance of a four-bar linkage using evolutionary algorithms. *J. Mech. Sci. Technol.* **2011**, *25*, 2971–2977. [[CrossRef](#)]
18. Zamuda, A.; Brest, J.; Boskovic, B.; Zumer, V. Differential evolution for multiobjective optimization with self adaptation. In Proceedings of the 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Singapore, 25–28 September 2007; pp. 3617–3624. [[CrossRef](#)]
19. Bulatović, R.; Bošković, M.; Šalinić, S.; Miodragović, G. Multiobjective optimization for dynamic balancing of four-bar mechanism. In Proceedings of the 6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Mountain Tara, Serbia, 19–21 June 2017.
20. Demeulenaere, B.; Aertbeliën, E.; Verschueren, M.; Swevers, J.; De Schutter, J. Ultimate Limits for Counterweight Balancing of Crank-Rocker Four-Bar Linkages. *J. Mech. Des.* **2006**, *128*, 1272. [[CrossRef](#)]
21. Nocedal, J.; Wright, S.J. *Numerical Optimization*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2006; p. 664.
22. Orvananos-Guerrero, M.T.; Sanchez, C.N.; Dávalos-Orozco, O.; Rivera, M.; Velázquez, R.; Acevedo, M. Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms. In Proceedings of the 2018 Nanotechnology for Instrumentation and Measurement, NANOfIM 2018, Mexico City, Mexico, 7–8 November 2018; Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.: Piscataway, NJ, USA 2019. [[CrossRef](#)]
23. Norton, R.L. *Design of Machinery : An Introduction to the Synthesis And Analysis of Mechanisms and Machines*; McGraw-Hill Higher Education: New York, USA 2004; p. 858.
24. Lowen, G.; Tepper, F.; Berkof, R. The quantitative influence of complete force balancing on the forces and moments of certain families of four-bar linkages. *Mech. Mach. Theory* **1974**, *9*, 299–323. [[CrossRef](#)]
25. Acevedo, M. Conditions for Dynamic Balancing of Planar Parallel Manipulators Using Natural Coordinates and their Application. In Proceedings of the 14th IFToMM World Congress, Taipei, Taiwan, 25–30 October, 2015; pp. 419–427. [[CrossRef](#)]
26. Acevedo, M.; Orváñanos, T.; Velázquez, R. Shaking Moment Balancing of a Four-Bar Mechanism Using Actuation Redundancy. In *Mechanisms and Machine Science*; Springer: Dordrecht, The Netherlands, 2019; Volume 73, pp. 3319–3327. [[CrossRef](#)]
27. Chong, E.K.; Zak, S.H. *An Introduction to Optimization*, 2nd ed.; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2013; p. 640.

28. Khademi, G.; Mohammadi, H.; Simon, D. Gradient-Based Multi-Objective Feature Selection for Gait Mode Recognition of Transfemoral Amputees. *Sensors* **2019**, *19*, 253. [[CrossRef](#)]
29. Wang, Q.; Yin, J.; Noureldin, A.; Iqbal, U.; Wang, Q.; Yin, J.; Noureldin, A.; Iqbal, U. Research on an Improved Method for Foot-Mounted Inertial/Magnetometer Pedestrian-Positioning Based on the Adaptive Gradient Descent Algorithm. *Sensors* **2018**, *18*, 4105. [[CrossRef](#)]
30. Domingo-Perez, F.; Lazaro-Galilea, J.L.; Bravo, I.; Gardel, A.; Rodriguez, D. Optimization of the Coverage and Accuracy of an Indoor Positioning System with a Variable Number of Sensors. *Sensors* **2016**, *16*, 934. [[CrossRef](#)]
31. Emmerich, M.T.; Deutz, A.H. A tutorial on multiobjective optimization: Fundamentals and evolutionary methods. *Nat. Comput.* **2018**, *17*, 585–609. [[CrossRef](#)]
32. Bergstra, J.; Bengio, Y. Random Search for Hyper-Parameter Optimization. *J. Mach. Learn. Res.* **2012**, *13*, 281–305.



© 2019 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

## **D. Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms**

2018 Nanotechnology for Instrumentation and Measurement (NANOFIM)  
Mexico City, Mexico. November 7-8, 2018

## Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms

María T. Orvañanos-Guerrero \*, Claudia N. Sánchez \*†, Óscar Dávalos-Orozco \*,  
Mariano Rivera ‡, Ramiro Velázquez\* and Mario Acevedo §

\* Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería.

Josemaría Escrivá de Balaguer 101, Aguascalientes, Aguascalientes, 20290, México.

Email: {torvananos, cnsanchez, odavalos, rvelazquez}@up.edu.mx

† INFOTEC - Centro de Investigación e Innovación en Tecnologías de la Información y Comunicación.

Aguascalientes, Aguascalientes, México.

‡ Centro de Investigación en Matemáticas

Guanajuato, Gto., México. Email: mrivera@cimat.edu.mx

§ Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería.

Prolongación Calzada Circunvalación Poniente 49, Zapopan, Jalisco, 45010, México.

**Abstract**—It is well known that machine vibrations often occur due to dynamic unbalance. They induce noise, wear, and fatigue problems that prevent many machines from attaining their full potential. Dynamic balancing of mechanisms allows to limit the transmission of vibrations to the base, an advantage that could be exploited in hand tools, machinery, vehicles moving in free space and robots. This work presents a method for representing a four-bar mechanism with the use of Fully Cartesian coordinates and its equations for calculating the shaking force (ShF) and the shaking moment (ShM). Such method can be applied and it is useful for the analysis of multi-scale (meso/micro/nano) mechanisms. The projected Gradient Descent is used to minimize the ShF and ShM functions with the aim of balancing the system. The Taylor's theorem was used for calculating the step length. The multiobjective optimization problem was solved using a linear combination of the objectives. The result of this methodology reduces successfully the ShF and the ShM by 31% and 65%, respectively.

**Index Terms**—Four-bar mechanism, multiobjective optimization, multi-scale mechanisms, projected gradient descent, shaking force balancing, shaking moment balancing.

### I. INTRODUCTION

Conducting a dynamic balancing consists of reducing (or eliminating in the best of cases) the dynamic reactions at the base of a mechanism produced by the movement of the mechanism structure, considering both the shaking force (ShF) and the shaking moment (ShM). In [1]–[3] and more recently in [4], it is possible to find a comprehensive historical review about the theories of balancing mechanisms. A generalized drawback is that the conditions of balancing are obtained using methods that in most cases involve complex trigonometric functions. This work presents the dynamic balancing

of a four-bar mechanism by obtaining the expressions that define ShF and ShM using fully Cartesian coordinates and minimizing both moments through the use of counterweights. This method can very helpful to calculate efficiently these dynamic reactions in mechanisms, either at the meso, micro, or nano scale. In the case of micro and nano mechanisms, this can be performed as a complement to the PRBM method [5]. The most common techniques used to optimize the balance of this kind of mechanism are meta heuristics, some examples can be appreciated in [6], [7] and [8] which use evolutionary algorithms, Firefly Algorithm, or Differential Evolution, respectively. The algorithm proposed in this paper to achieve the optimization is projected gradient descent [9], a deterministic and iterative algorithm based on the gradient vector direction. The optimization problem is multiobjective with bound constraints (also known as box constraints). It was solved using as objective function the linear combination of the two objectives: ShF and ShM. The solution is corrected if it goes out of the defined boundaries. This methodology is efficient due to the characteristics of the functions obtained by using fully Cartesian coordinates, allowing to reach a convergence at the minimum value with few iterations.

### II. MECHANICAL ANALYSIS

#### A. Mass matrix of the four-bar linkage using natural coordinates

A four-bar linkage consist of four rigid bodies in the plane as shown in figure 1. The crank AB rotates with velocity  $\omega$  [rads/s]. The length of the linkages are indicated as  $l_{AB}, l_{BD}, l_{CD}$ . The equations that represent the linear moment and the angular moment can be easily obtained by using

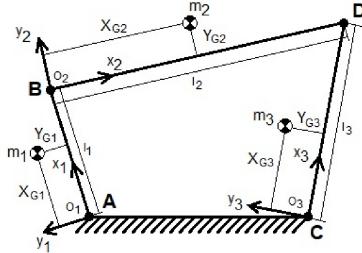


Fig. 1. Four-bar linkage

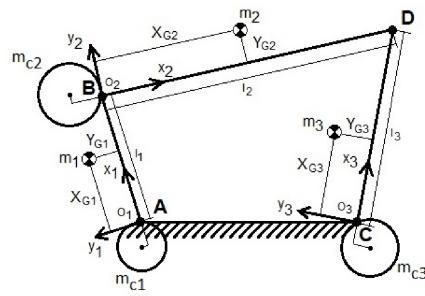


Fig. 2. Four-bar linkage with counterweights

Cartesian coordinates [10] to represent the whole system, by deriving these expressions the ShF and ShM equations can be obtained. This method has been previously used in [11], [12]

As explained in [11], a representative mass matrix of each  $n$  link  $M_n$  is necessary in order to conform the whole matrix  $M$  of the mechanism. The matrix  $M_n$  for each  $n$  link can be defined by two basic points  $i$  and  $j$  using fully Cartesian coordinates [10].

Considering that the linkage will be balanced through the addition of counterweights to help reduce the dynamic reactions, it is necessary to include in the mass matrix  $M$  the expressions that were taken in account. So, each link will be considered as the conjunction of one bar and one counterweight as shown in figure 2.

The mass  $m_n$  of each link-counterweight  $n = 1, 2, 3$  is defined as:

$$m_n = m_{bn} + m_{cn} \quad (1)$$

where  $m_{bn}$  is the mass of the original bar  $n$  ( $bn = 1, 2, 3$ ) and  $m_{cn}$  is the mass of each counterweight ( $cn = 1, 2, 3$ ). In addition, the counterweight mass in terms of its density and size can be represented as:

$$m_{cn} = \pi \rho_{cn} t_{cn} (y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \quad (2)$$

where  $\rho_{cn}$  corresponds to the density of the material used on each counterweight,  $t_{cn}$  is the thickness of each counterweight, and  $x_{cn}, y_{cn}$  represents the position of the center of mass of the

counterweight measured in relation with the local coordinate system  $O_n$ .

The total inertia of each link-counterweight  $I_n$  where  $n = 1, 2, 3$  is defined as:

$$I_n = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (3)$$

where  $x_{cn}$  is the x position of the mass center of the counterweight corresponding to the  $n$  element measured from the origin  $O_n$  and  $y_{cn}$  is the y position of the mass center of the counterweight corresponding to the  $n$  element measured from the origin  $O_n$ .  $I_{bn}$  corresponds to the inertia of each original bar.

The new position on the x axis of the mass center for each element will be defined as:

$$X_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4)$$

And the new position on the y axis of the mass center for each element will be defined as:

$$Y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5)$$

where  $(x_{cn}, y_{cn})$  is the mass center's position of each counterweight, and is the mass center's position for each original bar, both measured from the origin  $O_n$ .

To avoid the use of extra variables the mass of each counterweight  $m_{ci}$  can be defined as:

$$m_{cn} = \pi(r_{cn}^2)(t_{cn})\rho \quad (6)$$

Where  $\rho_{cn}$  represents the density of the counterweight,  $t_{ci}$  is the thickness of the counterweight and  $r_{ci}$  represents the ratio of the counterweight.

In addition, if the counterweight is considered to be a cylinder, the radius of the counterweight can be defined as:

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (7)$$

By substituting equation (7) in (6) gives:

$$m_{cn} = \pi(x_{cn}^2 + y_{cn}^2)(t_{cn})\rho_{cn} \quad (8)$$

Then, the mass matrix which represents the whole mechanism is given by:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 & e & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & b & 0 & 0 & 0 & g & -h \\ -f & e & 0 & b & 0 & 0 & h & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & i & -j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & j & i \\ 0 & 0 & g & h & i & j & d & 0 \\ 0 & 0 & -h & g & -j & i & 0 & d \end{bmatrix} \quad (9)$$

With:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2} \\ &- \frac{2(\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1})}{l_1} \\ &+ \pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$b = \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2} - \frac{2(\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2})}{l_2}$$

$$+ \pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2} + \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2}$$

$$c = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} - \frac{2(\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3})}{l_3}$$

$$+ \pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}$$

$$d = \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2} + \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2}$$

$$e = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}x_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}x_{b1}}{l_1} - \frac{3\pi\rho_{c1}t_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2)^2 + 2I_{b1}}{2l_1^2}$$

$$f = \frac{\pi\rho_{c1}t_{c1}y_{c1}(y_{c1}^2 + x_{c1}^2) + m_{b1}y_{b1}}{l_1}$$

$$g = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}x_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}x_{b2}}{l_2} - \frac{3\pi\rho_{c2}t_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2)^2 + 2I_{b2}}{2l_2^2}$$

$$h = \frac{\pi\rho_{c2}t_{c2}y_{c2}(y_{c2}^2 + x_{c2}^2) + m_{b2}y_{b2}}{l_2}$$

$$i = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}x_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}x_{b3}}{l_3} - \frac{3\pi\rho_{c3}t_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2)^2 + 2I_{b3}}{2l_3^2}$$

$$j = \frac{\pi\rho_{c3}t_{c3}y_{c3}(y_{c3}^2 + x_{c3}^2) + m_{b3}y_{b3}}{l_3}$$

### B. Linear momentum and shaking force

Once the mass matrix of the whole system is known, based on the basic points it is possible to introduce a vector of positions represented by  $\mathbf{q}$  and by derivation of  $\mathbf{q}$  with respect to time, a vector of velocities is obtained. By introducing a matrix  $\mathbf{B}$  it is possible to obtain the linear momentum vectors  $\mathbf{L}$  associated to the whole system:

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (20)$$

Where  $\mathbf{B}$  (eq. (21)) is a matrix formed by identity matrices for each of the basic points founded in the mechanism:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

(11) By solving (20) and considering the velocity of the fixed points is always zero ( $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$ ,  $VC_Y = 0$ ), the expressions of linear momentum ( $\mathbf{L}_i$  and  $\mathbf{L}_j$ ) for the linkage is obtained.

The shaking force  $\mathbf{ShF}$  of the linkage can be calculated from derivation of equations  $\mathbf{L}_i$  and  $\mathbf{L}_j$ . To ensure the linkage is force balanced, those equations must be constant (usually zero) over all the period, warranting a null shaking force.

### C. Angular momentum and shaking moment

By using only Cartesian coordinates it is possible to express the angular momentum  $\mathbf{H}$  as calculated in (22).

$$\mathbf{H} = \mathbf{q} \times (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

Where  $\mathbf{r}$  can be expressed as:

$$\mathbf{r} = [-AY \quad AX \quad -BY \quad BX \quad -CY \quad CX \quad -DY \quad DX]^T \quad (23)$$

(14) By solving (22) and considering  $VA_X = 0$ ,  $VA_Y = 0$ ,  $VC_X = 0$  and  $VC_Y = 0$ , the expression of angular momentum  $\mathbf{H}$  can be obtained.

The shaking moment of the linkage can be calculated as the derivation of  $\mathbf{H}$  with respect to the time. To guarantee the dynamic balancing of the mechanism, this shaking force  $\mathbf{ShM}$  must be constant, it is that the derivation of  $\mathbf{H}$  (eq. 24 and eq. 25) with respect to the time should be zero.

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\left(\frac{d(\dot{\mathbf{q}})}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

where:

$$\dot{\mathbf{r}} = [-VA_Y \quad VA_X \quad -VB_Y \quad VB_X \quad -VC_Y \quad VC_X \quad -VD_Y \quad VD_X]^T \quad (26)$$

(18) and  $\ddot{\mathbf{q}}$  represents the derivation of vector  $\dot{\mathbf{q}}$  with respect to time, this is the acceleration vector.

By solving equation (25) the Shaking Moment  $\mathbf{ShM}$  of the four bar linkage can be obtained.

### III. OBJECTIVE FUNCTION

To define the objective function, the dimensionless function  $\beta_i$  is used. It is defined by the relation of the root mean square (rms) of the reaction of the optimized linkage ( $rms(^oReaction)$ ) with respect to the rms value of the reaction of the original linkage ( $rms(Reaction)$ ), both considered over a period of time  $T$ .

Two objective indexes will be considered to this optimization taking in account  $\mathbf{ShF}$  and  $\mathbf{ShM}$ . So, the first balancing index considering  $\mathbf{ShF}$  is:

$$\beta_{ShF} = \frac{rms(^oShF)}{rms(ShF)} \quad (27)$$

Where:

$$rms(^oShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ^oShF_i^2} \quad (28)$$

and:

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ShF_i^2} \quad (29)$$

By replacing equations (28) and (29) in equation (27):

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N ^oShF_i^2}{\sum_{i=1}^N ShF_i^2}} \quad (30)$$

In the same way, the second balancing index, considering the shaking moment reaction ( $\beta_{ShM}$ ) can be defined as:

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N ^oShM_i^2}{\sum_{i=1}^N ShM_i^2}} \quad (31)$$

where  $^oShM$  is the shaking moment of the optimized linkage and  $ShM$  represents the shaking moment of the unbalanced linkage.

The objective is to minimize  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$  while maintaining the coordinates of the center of masses for the counterweights limited. This is because it is necessary to achieve counterweights with practical dimensions that can be used in reality.

$$x_{cn}^{min} \leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \quad (32)$$

$$y_{cn}^{min} \leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \quad (33)$$

$$t_{cn}^{min} \leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \quad (34)$$

#### IV. OPTIMIZATION

Optimization theory and methods deal with selecting the best alternative in the sense of the given objective function [13]. Mathematically, it is the process of finding the minimum or the maximum of function  $f(X) : R^n \rightarrow R$ .  $X \in R^n$  is the vector of variables that can be modified in order to optimize  $f(X)$ . If we are trying to minimize the function  $f$ , an optimal solution can be defined as  $X^*$  where  $f(X^*) \leq f(X)$  for all  $X \in R^n$ . In other words, it is a global minimum. Sometimes, if the function  $f$  is not convex, this means that it has multiple local minimum, it is difficult to find the global minimum.

##### A. Projected Gradient Descent with maximum descent

Gradient Descent [9], [13] is an iterative algorithm that finds a local minimal in a function. It starts in a point and improves it until the minimal is reached. The base of this technique is the use of the gradient vector to update the solution. Remembering, the gradient vector  $\nabla f(X)$  evaluated in a point  $X$  points the direction of maximum ascent. So, Gradient Descent moves the point in the opposite direction to the gradient. The problem starts with the solution vector  $X_0$ , and in each iteration  $X_k$  is modified with the equation (35).

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k \quad (35)$$

where  $k$  is the current iteration,  $\alpha_k$  is the step length and  $P_k$  is the direction. In this research we calculate eq. (36) as to have an unitary direction vector.

$$P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|} \quad (36)$$

Our algorithm is with maximum descent because the step length  $\alpha_k$  is optimized based on the approximation of the Taylor's Theorem (eq. (37)).

$$f(X_k + \alpha_k P_k) \approx f(X_k) + \alpha_k P_k^T \nabla f(X_k) + \frac{\alpha_k^2}{2} P_k^T \nabla^2 f(X_k) P_k \quad (37)$$

The value obtained after derivation with respect of  $\alpha_k$  equals to 0 as shown in the eq. (38).

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P_k}{P_k^T \nabla^2 f(X) P_k} \quad (38)$$

##### B. Finite Difference

Sometimes, it is hard to calculate the derivatives in a symbolic form. Finite Difference [9] can be used for obtaining an approximation of the Gradient vector and Hessian matrix.

The Gradient vector  $\nabla f(X)$  is formed by the first derivatives of the function with respect to all the variables (eq. (39)). The Hessian matrix  $\nabla^2 f(X)$  is composed for the second derivatives (eq. (40)).

$$\nabla f(X) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (39)$$

$$\nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

To approximate the first partial derivatives, we use eq. (41), where  $\epsilon$  is a scalar with a small value (in this work ( $\epsilon = 1e-5$ ),  $e_k$  is an unitary vector, of the size of  $X$ , full of 0's and only one 1 in the position  $k$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{f(X + \epsilon e_k) - f(X)}{\epsilon} \quad (41)$$

In this research, we need the Hessian matrix multiplied by a vector, so we use the finite approximation showed in the eq. (42), where  $V$  is the vector that is multiplied, and  $\epsilon$  is an small scalar ( $\epsilon = 1e-5$ ).

$$\nabla^2 f(X) * V = \frac{\nabla f(X + \epsilon V) - \nabla f(X)}{\epsilon} \quad (42)$$

##### C. Implementation to optimize ShF and ShM

The problem to solve is multiobjective because the goal is to minimize two functions:  $\beta_{ShF}$  and  $\beta_{ShM}$  (see eqs. (30) and (31)). There are nine variables to be calculated:  $x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}, x_{c3}, y_{c3}, t_{c3}$ . Bound constraints are defined as well (see eqs. (32), (33) and (34)).

The main approaches to handle with multi-objective optimization problems are Pareto front [6] and the linear combination of objectives. In this case, we use the second. In this case,

our Objective Function that was used for Gradient Descent is defined in eq. (43).

$$f(X) = \alpha * \beta_{ShM} + (1 - \alpha) * \beta_{ShF} \quad (43)$$

where  $\alpha$  is a scalar value that gives the importance to each term. It can have values between 0 and 1.

The process to find a minimum in the function  $f$  is described in Algorithm 1. *RandomBoxConstraints()* calculates a random vector of variables as an uniform distribution given the bound constraints. *GradientFiniteDiff(f, X<sub>0</sub>)* and *HessianFiniteDiff(f, X<sub>k</sub>, P<sub>k</sub>)* calculate the approximation of the Gradient vector and the Hessian matrix based on the equations (39), (41) and (42).  $\|.\|$  represents the vector norm.  $\epsilon$  is a small scalar ( $\epsilon = 1e - 5$ ).

To handle with bound constraints we use Projected Gradient Descent, this is, when a solution is outside of the boundaries, it is projected to the feasible space. Two functions are implemented: *isValid(X<sub>k+1</sub>)* and *fix(X<sub>k+1</sub>)*. The first one, returns true if the vector contains valid values based on the constraints and else otherwise. The second, fixes the values of the vector in case that it is not valid. The way we fix the values is very simple. If the value is smaller than the minimal value allowed, the value assigned is the minimal. Conversely, if the value is bigger than the maximum value allowed, the value assigned is the maximum.

Two stop conditions are implemented. (1)  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  the difference between  $X_{k+1}$  and  $X_k$  is too small, so there are no change in the current solution, this also includes when the Gradient vector norm is close to 0. (2)  $k < NMaxIter$  the maximum number of iterations has been reached (In this work  $NMaxIter = 1000$ ).

---

**Algorithm 1:** Projected Gradient Descent with maximum descent

---

```

1  $X_0 = RandomBoxConstraints();$ 
2  $\nabla f(X_0) = GradientFiniteDiff(f, X_0);$ 
3  $k = 0;$ 
4 while  $\|\nabla f(X_k)\| > \epsilon$  or  $k < NMaxIter$  do
5    $P_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\|\nabla f(X_k)\|};$ 
6    $AP_k = HessianFiniteDiff(f, X_k, P_k);$ 
7    $\alpha_k = -\frac{\nabla f(X)^T P}{P^T AP_k};$ 
8    $X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k;$ 
9   If isValid(Xk+1) then fix(Xk+1);
10  If  $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon$  then break;
11   $k = k + 1;$ 
12 end
13 return  $X_k;$ 
```

---

Finally, the algorithm 1 was executed several times. We proved with different values of  $\alpha$  (see eq. (43)) from 0.1 to 0.9 with increments of 0.1. For each  $\alpha$  value the algorithm was executed 20 times with a random start point and the values where both functions ShM and ShF (eqs. (31) and (30)) were less than 1.0 were stored.

TABLE I  
PARAMETERS OF THE FOUR BAR MECHANISM USED IN THE EXAMPLE.

Body <i>n</i>	1	2	3
<b>Mass</b> $m_{b_n}$ [kg]	2.51946901	4.73866901	3.68746901
<b>Lenght</b> $l_n$ [m]	0.40	0.78	0.60
<b>Inertia</b> $I_{b_n}$ [kgm/s <sup>2</sup> ]	0.14023528	0.98146460	0.45494271
<b>Center of mass</b> $x_{b_n}$ [m]	0.20	0.39	0.30
<b>Center of mass</b> $y_{b_n}$ [m]	0.00	0.00	0.00

## V. NUMERICAL EXAMPLE AND RESULTS

In table I, it is possible to see the parameters of the four bar mechanism represented in figure 2. All the links of the mechanism are made from steel with a density of 7800kg/m<sup>3</sup>.

Considering the mechanism is moved by a motor placed at point A, rotating at a constant speed of 500rpm, it is possible to obtain a sample of the positions ( $x_{b_1}, x_{b_2}, x_{b_3}, y_{b_1}, y_{b_2}, y_{b_3}$ ), speeds ( $V_{B_x}, V_{B_y}, V_{C_x}, V_{C_y}, V_{D_x}, V_{D_y}$ ) and accelerations ( $AB_x, AB_y, AC_x, AC_y, AD_x, AD_y$ ) corresponding to each of the basic points considered in this system.

All the counterweights are manufactured in brass, with a density ( $\rho_c$ ) of 8500kg/m<sup>3</sup>

By replacing all the known parameters in eqs. (30) and (31), it is possible to obtain the balancing indexes.

The coordinates of the center of masses of the counterweights and the thickness need to be limited:

$$-0.40m \leq x_{cn}, y_{cn} \leq 0.40m \quad (44)$$

$$0.005m \leq t_{cn} \leq 0.02m \quad (45)$$

Figure 3 shows the ShM and ShF values of all the founded solutions. The red points represent the Pareto front and the blue ones the dominated solutions. In multi-objective optimization, when two objectives are in conflict, the Pareto efficiency is used to analyze the solutions. In general, a solution is dominated by another one if its two values are worse than the other solution. The Pareto front is formed by the dominant solutions. It can be seen that the solutions are grouped in four clusters where the local minimums are located. The chosen solution is the one in the Pareto front with the minimum value in ShM. It was obtained using the next variables values:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0.25431215, x_{c2} = -0.06768788, \\ x_{c3} &= -0.14207529, y_{c1} = -0.05777197, \\ y_{c2} &= -0.07993709, y_{c3} = 0.12113611, \\ t_{c1} &= 0.00941870, t_{c2} = t_{c3} = 0.02 \end{aligned}$$

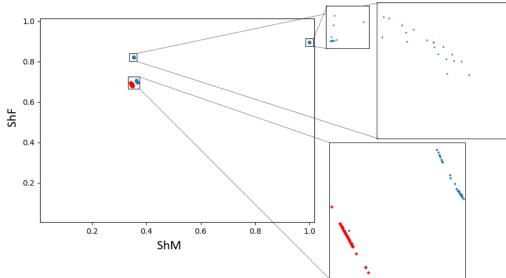


Fig. 3. Pareto analysis

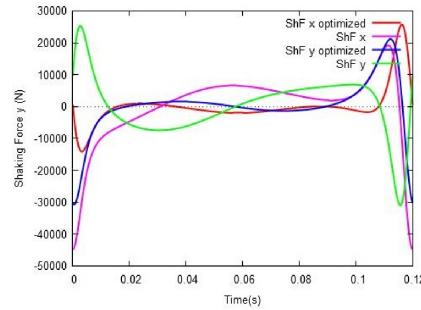


Fig. 4. Comparison of ShF before and after optimization

By using this values, the Shaking Force index ( $\beta_{ShF}$ ) was 0.6865384112490993, and the Shaking Moment index ( $\beta_{ShM}$ ) was 0.34553580132147244. This means that the Shaking Force ( $ShF$ ) was reduced more than 31%, an the Shaking Moment ( $ShM$ ) was reduced more than 65% .

In figure 4 it is possible to compare the Shaking force on x and y of the four bar linkage, before and after the optimization.

In figure 5 it is possible to compare the Shaking Moment of the four bar linkage after and before the optimization.

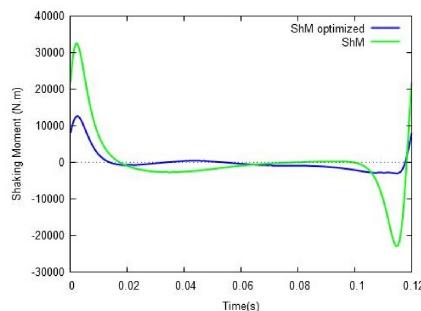


Fig. 5. Comparison of ShM before and after optimization

## VI. CONCLUSIONS

By using fully Cartesian coordinates to represent the mechanism, the equations that define the reactions in the mechanism are less complex than those obtained using other method, hence its useful for complete balancing, minimization of reactions, or to calculate the shaking force and the shaking moment in meso/micro/nano mechanisms.

Using fully Cartesian coordinates to represent a four bar linkage in conjunction with the Gradient Descent algorithm to optimize the mechanism is a suitable methodology that allows the reduction of the shaking moment ( $ShM$ ) in 65% and the shaking force ( $ShF$ ) in 31%.

The optimization algorithm was successfully applied to solve the problem. The use of linear combination of functions is a simple but robust way to handle with multi objectives. The approximation of the derivatives based on Finite Difference allows to guide the algorithm and also it helps to reduce human mistakes if the derivatives were found by hand.

As future work, we plan to use more efficient optimization algorithms and test them in actual robotic platforms such as [14]. We expect to compare our methodology with Evolutive techniques as Differential Evolution or swarm algorithms such as Particle Swarm Optimization, Fireflies, Bees, etc.

## REFERENCES

- [1] V. Arakelian, M. Dahan, and M. Smith, "A historical review of the evolution of the theory on balancing of mechanisms," in *International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM 2000*, pp. 291–300, Springer, 2000.
- [2] V. H. Arakelian and M. Smith, "Shaking force and shaking moment balancing of mechanisms: a historical review with new examples," *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, no. 2, pp. 334–339, 2005.
- [3] G. Lowen, F. Tepper, and R. Berkof, "Balancing of linkages an update," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 213–220, 1983.
- [4] V. Arakelian and S. Briot, *Balancing of linkages and robot manipulators: advanced methods with illustrative examples*, vol. 27. Springer, 2015.
- [5] S. Šalinić and A. Nikolić, "A new pseudo-rigid-body model approach for modeling the quasi-static response of planar flexure-hinge mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 124, pp. 150–161, 2018.
- [6] M. R. Farmani, A. Jaamiahmadi, and M. Babaie, "Multiobjective optimization for force and moment balance of a four-bar linkage using evolutionary algorithms," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25, no. 12, pp. 2971–2977, 2011.
- [7] A. Zamuda, J. Brest, B. Bosković, and V. Zumer, "Differential evolution for multiobjective optimization with self adaptation," in *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 3617–3624, 2007.
- [8] M. Bošković, S. Šalinić, R. Bulatović, and G. Miodragović, "Multiobjective optimization for dynamic balancing of four-bar mechanism,"
- [9] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization* 2nd. Springer, 2006.
- [10] J. G. De Jalón and E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] M. Acevedo, "Conditions for dynamic balancing of planar parallel manipulators using natural coordinates and their application," in *Proceedings of the 14th IFTOMM world congress*, pp. 419–427, , 2015.
- [12] M. Acevedo, "An efficient method to find the dynamic balancing conditions of mechanisms: Planar systems," in *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. V05BT08A068–V05BT08A068, American Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [13] E. K. Chong and S. H. Zak, *An introduction to optimization*, vol. 76. John Wiley & Sons, 2013.
- [14] E. Hernandez and et al., "Kinematic computations for small-size humanoid robot kubo," *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 12, no. 24, pp. 7311–7320, 2017.

# Bibliografía

- [1] ABB. *Información detallada para: IRB 760*
- [2] ACEVEDO, M: Conditions for Dynamic Balancing of Planar Parallel Manipulators Using Natural Coordinates and their Application. En: *roceedings of the 14th IFToMM world congress*. (2015), p. 419–427
- [3] ACEVEDO, Mario: Active Dynamic Balancing of the Redundantly Actuated 2RR Planar Parallel Manipulator. 2014. – Informe de Investigación
- [4] ACEVEDO, Mario: An Efficient Method to Find the Dynamic Balancing Conditions of Mechanisms: Planar Systems. En: *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Boston, Massachusetts, USA : ASME, 8 2015. – ISBN 978-0-7918-5713-7, p. V05BT08A068
- [5] ACEVEDO, Mario ; ORVAÑANOS, Teresa ; VELÁZQUEZ, Ramiro ; HARO, Eduardo: Optimum balancing of the four bar linkage using fully cartesian coordinates. En: *IEEE Latin America Transactions* 17 (2019), Nr. 06, p. 983–990
- [6] AKBARI, Mostafa ; ASADI, Parviz ; GIVI, Mohammad Kazem B. ; KHODABANDEHLOUIE, Ghazaleh: Artificial neural network and optimization. En: *Advances in Friction-Stir Welding and Processing*. Elsevier Ltd, 10 2014. – ISBN 9780857094551, p. 543–599
- [7] ARAKELIAN, V H. ; SMITH, M R.: Complete shaking force and shaking moment balancing of linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 34 (1999), Nr. 8, p. 1141–1153
- [8] ARAKELIAN, Vigen: Inertia forces and moments balancing in robot manipulators: a review. En: *Advanced Robotics* 31 (2017), 7, Nr. 14, p. 717–726
- [9] ARAKELIAN, Vigen ; BRIOT, Sébastien: *Mechanisms and Machine Science*. Vol. 27: *Balancing of Linkages and Robot Manipulators*. Cham : Springer International Publishing, 2015. – XVI, 291 p.. – ISBN 978-3-319-12489-6
- [10] ARAKELIAN, Vigen ; DAHAN, Marc ; SMITH, Mike: A Historical Review of the Evolution of the Theory on Balancing of Mechanisms. En: *International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM 2000*. Dordrecht : Springer Netherlands, 2000, p. 291–300

- [11] ARAKELIAN, Viguen: Equilibrage dynamique complet des mecanismes. En: *Mechanism and Machine Theory* 33 (1998), Nr. 4, p. 425–436
- [12] ARTOBOLEVCKII, I I.: Mechanism and machine theory, Ed. En: *Naouka, Moscow* (1988), p. 644
- [13] ARTOBOLEVSKY, I. *Methods of balancing of inertia forces in working machines with complex kinematic schemes. Acad. Naouk SSSR.* 1938
- [14] ARTOBOLEVSKY, I I. ; EDELSSTEIN, B V.: Methods of inertia calculation for mechanisms of agricultural machines. En: *Selkhozizdate, Moscow* (1935)
- [15] ATTIA, Hazem A.: Dynamic modelling of the double wishbone motor-vehicle suspension system. 2002. – Informe de Investigación. – 167–174 p.
- [16] AVELLO, Alejo ; GARCIA, Javier ; JALON, D E.: Dynamics of flexible multibody systems using cartesian co-ordinates and large displacement theory. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (1991), Nr. 8, p. 1543–1563
- [17] BAYO, Eduardo ; GARCIA DE JALON, Javier ; AVELLO, Alejo ; CUADRADO, Javier: An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates\*. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991), Nr. 3, p. 377–395
- [18] BELONOVSAYA, I.D. ; DIMENTBERG, F.M. ; MAYSUK, L.B.: Design of self-balanced spatial mechanisms. En: *Machinovedenie* 1 (1987), p. 3–9
- [19] BERESTOV, L V.: Full dynamic balancing of pinned four-bar linkage. En: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Series: Machinostroenie* 11 (1975), p. 62–65
- [20] BERESTOV, L V.: Comparative Analysis of the Reactions in the Kinematic Pairs of the Four-Bar Linkages for the Different Balancing Methods. En: *Mekhanika Mashin* (1977), p. 61–70
- [21] BERGSTRA, James ; BENGIO, Yoshua: Random Search for Hyper-Parameter Optimization. En: *Journal of Machine Learning Research* 13 (2012), Nr. Feb, p. 281–305
- [22] BERKOF, R. S. ; LOWEN, G. G.: Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 93B (1971), Nr. 1, p. 53–60
- [23] BERKOF, Richard S.: Complete Force and Moment Balancing of Inline Four-Bar Linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 8 (1973), Nr. 3, p. 397–410
- [24] BERKOF R.S. ; LOWEN G.G.: A New Method for Complete Force Balancing Simple Linkages. En: *Journal of Engineering for Industry* 91 B (1969), Nr. 1, p. 21–26

- [25] BESSONOV, A P. *Dynamics of the mechanisms with variable mass links*,. 1967
- [26] BESSONOV, Arkadij P.: Balancing a planar mechanism with variable mass links. En: *MECHANICAL ENGINEERING* Vol. 91, ASME-AMER SOC MECHANICAL ENG 345 E 47TH ST, NEW YORK, NY 10017, 1969. – ISBN 0025-6501, p. 45
- [27] Bošković, Marina ; Šalinić, Slaviša ; Bulatović, Radovan ; Miodragović, Goran: Multiobjective optimization for dynamic balancing of four-bar mechanism. En: *6th International Congress of Serbian Society of Mechanics*. Mountain Tara, Serbia : Serbian Society of Mechanics, 2017
- [28] Briot, Sébastien ; Arakelian, Vigen: Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group. En: *Mechanism and Machine Theory* 57 (2012), 11, p. 13–26. – ISSN 0094114X
- [29] C, Off: Experimentelle untersuchungen an Koppelgetrieben mit Leistungsausgleich. En: *Mechanism and Machine Theory* 9 (1974), Nr. 2, p. 239–246
- [30] Carsont, W L. ; Stephens, James M.: Feasible Parameter Design Spaces for Force and Root-Mean-Square Moment Balancing an In-Line 4R 4-Bar Synthesized for Kinematic Criteria. En: *Mechanism and Machine Theory* 13 (1978), Nr. 6, p. 649–658
- [31] Cemil Bagci: Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Link Mechanisms Using Balancing Idler Loops. En: *Journal of Mechanical Design* 104 (1982), Nr. 2, p. 482–493
- [32] Chaudhary, Kailash ; Chaudhary, Himanshu: Optimum Balancing of Slider-crank Mechanism Using Equimomental System of Point-masses. En: *Procedia Technology* 14 (2014), p. 35–42. – ISSN 22120173
- [33] Chaudhary, Kailash ; Chaudhary, Himanshu: Optimal design of planar slider-crank mechanism using teaching-learning-based optimization algorithm. En: *Journal of Mechanical Science and Technology* 29 (2015), 12, Nr. 12, p. 5189–5198. – ISSN 1738494X
- [34] Chen, Ning-xin: Partial balancing of the shaking force of a spatial 4-bar RCCC linkage by the optimization method. En: *Mechanism and Machine Theory* 19 (1984), Nr. 2, p. 257–265
- [35] Chen, Ning-xin: The complete shaking force balancing of a spatial linkage. En: *Mechanism and Machine Theory* 19 (1984), Nr. 2, p. 243–255
- [36] Chen, Ningxin ; Zhang, Qixian: A method for full shaking force balancing of spatial linkages and the relevant force balancing theory. En: *Proceedings of the Sixth World*

- Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi Vol. 1.* New Delhi, 1983, p. 329–332
- [37] CHIOU, S.-T ; TSAI, R.-J: The ideal shaft locations of three-rotating-mass balancers for spatial mechanisms. En: *Mechanism and Machine Theory* 30 (1995), Nr. 3, p. 405–416
- [38] CHONG, Edwin Kah P. ; ZAK, Stanislaw H.: *An introduction to optimization*. Second Edition. United States of America : John Wiley & Sons, 2013. – 640 p.. – ISBN 9781118279014
- [39] CHRISTOPH KRAMER. *LCTM Lista de Correo de Trenes Märklin*. 2017
- [40] COELLO COELLO, Carlos ; LAMONT, Gray B. ; VAN VELDHUIZEN, David A.: *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. 2. Springer US, 2007. – ISBN 978-1-4899-9460-8
- [41] CORMAC, Patrick P.: *A treatise on engine balance using exponentials*. Chapman & Hall, 1923
- [42] CROSSLEY, Francis Rendel E.: *Dynamics in machines*. Ronald Press Company, 1954
- [43] DALBY, William E.: *The balancing of engines*. E. Arnold, 1906
- [44] DAVIES, T H.: The kinematics and design of linkages, balancing mechanisms and machines. En: *Machine Design Eng* 40 (1968), p. 40–51
- [45] DELAGNE, G: Certaines propriétés générales d'équilibrage des machines à piston d'après la méthode des vecteurs tournants symétriques. En: *CR Acad. Sci* 206 (1938), Nr. 22, p. 1617–1618
- [46] DEMEULENAERE, Bram ; AERTBELIËN, Erwin ; VERSCHUURE, Myriam ; SWEVERS, Jan ; DE SCHUTTER, Joris: Ultimate limits for counterweight balancing of crank-rocker four-bar linkages. En: *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 128 (2006), 11, Nr. 6, p. 1272–1284. – ISSN 10500472
- [47] DOMINGO-PEREZ, Francisco ; LAZARO-GALILEA, Jose L. ; BRAVO, Ignacio ; GARDEL, Alfredo ; RODRIGUEZ, David: Optimization of the Coverage and Accuracy of an Indoor Positioning System with a Variable Number of Sensors. En: *Sensors (Basel, Switzerland)* 16 (2016), Nr. 6
- [48] DOUCET, E: Équilibrage dynamique des moteurs en ligne. En: *Tech. Automobile et Aérienne* 37 (1946), Nr. 230–232, p. 30–31

- [49] DRESIG, H ; JACOBI, P: Vollständiger trägheitskraftausgleich von ebenen koppelgetrieben durch anbringen eines zweischlages. En: *Maschinenbautechnik* 23 (1974), Nr. 1, p. 5–8
- [50] DRESIG, H ; SCHÖNFELD, S: Trägheitskraftausgleich für ebene Koppelgetriebe. En: *Wiss. Techn. Univ. Dresden* 20 (1971), Nr. 5, p. 1341–1349
- [51] DRESIG, H ; SCHÖNFELD, S.: Rechnergestützte Optimierung der Antriebs-und Gestellkraftgrößen ebener Koppelgetriebe-Teil I. En: *Mechanism and Machine Theory* 11 (1976), Nr. 6, p. 363–370
- [52] DRESIG, H. ; SCHÖNFELD, S.: Rechnergestützte Optimierung der Antriebs-und Gestellkraftgrößen ebener Koppelgetriebe-Teil II. En: *Mechanism and Machine Theory* 11 (1976), Nr. 6, p. 371–379
- [53] DRESIG, Hans ; NAAKE, Steffen ; ROCKHAUSEN, Ludwig: *Vollständiger und harmonischer Ausgleich ebener Mechanismen*. VDI-Verlag, 1994. – 73 p.. – ISBN 3183155184
- [54] ELLIOTT, J. L. ; TESAR, D.: The Theory of Torque, Shaking Force, and Shaking Moment Balancing of Four Link Mechanisms. En: *Journal of Engineering for Industry* 99 (1977), Nr. 3, p. 715
- [55] EMŐD, István ; JUREK, A: Massenausgleich am Kurbelgetriebe von Sechszylderviertakt-V-motoren mit 6 Kurbeln und 60 Zylinderwinkeln. En: *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 11 (1967), Nr. 3-4, p. 205–211
- [56] ERKAYA, Selçuk: Investigation of balancing problem for a planar mechanism using genetic algorithm. En: *Journal of Mechanical Science and Technology* 27 (2013), 7, Nr. 7, p. 2153–2160. – ISSN 1738494X
- [57] ESAT, I. ; BAHAI, H.: Theory of complete force and moment balancing of planer linkage mechanisms. En: *Mechanism and Machine Theory* 34 (1999), Nr. 6, p. 903–922
- [58] ETESAMI, Ghazal ; FELEZI, Mohammad E. ; NARIMAN-ZADEH, Nader: Pareto Optimal Multi-Objective Dynamical Balancing of a Slider-Crank Mechanism Using Differential Evolution Algorithm. En: *International Journal of Automotive Engineering* 9 (2019), Nr. 3, p. 3021–3032
- [59] FARANI, Mohammad R. ; JAAMIALAHMADI, Abdolrahman ; BABAIE, Meisam: Multiobjective optimization for force and moment balance of a four-bar linkage using evolutionary algorithms. En: *Journal of Mechanical Science and Technology* 25 (2011), 12, Nr. 12, p. 2971–2977
- [60] FENG, Gao: Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Four Types of Six-Bar Linkages. En: *Mechanical and Machine Theory* 24 (1989), Nr. 4, p. 275–287

- [61] FENG, Gao: Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four-, five- and six-bar linkages with prismatic pairs. En: *Mechanism and Machine Theory* 25 (1990), Nr. 2, p. 183–192
- [62] FENG, Gao: Complete shaking force and shaking moment balancing of 17 types of eight-bar linkages only with revolute pairs. En: *Mechanism and Machine Theory* 26 (1991), Nr. 2, p. 197–206
- [63] FENG, Gao: Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four, five and six-bar linkages with prismatic pairs. En: *Mechanism and Machine Theory* 25 (1991), Nr. 2, p. 183–192
- [64] FISHER, O: Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik. En: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 47 (1902), p. 429–466
- [65] FREUDENSTEIN, F: Quasi lumped-parameter analysis of dynamical systems. En: *Proc. 3rd Appl. Mech. Conf.*, Paper, Oklahoma State University,, 1973
- [66] GAPPOEV, T T.: Singularities of the balancing of the spatial mechanisms, Balancing of the machines and the apparatuses, Moscow, ed. En: *Mechanical engineering* (1979), p. 243–251
- [67] GARCIA DE JALON, J ; CUADRAOO, J ; VELLO, A A . ; JIMENEZ, J M.: Kinematic and Dynamic Simulation of Rigid and Flexible Systems with Fully Cartesian Coordinates. En: *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems* 268 (1994), p. 285–323
- [68] GHERONIMUS, Ya L.: An Approximate Method of Calculating a Counterweight for the Balancing of Vertical Inertia Forces\*. En: *Mechanisms* 3(4) (1968), p. 283–288
- [69] GHERONIMUS, Ya L.: On the Application of Chebyshev's Methods to the Problem of Balancing Mechanismst. En: *Mechanisms* 3(4) (1968), p. 235–281
- [70] GORYACHKIN, V P.: The forces of inertia and their balancing. En: *Collection of scientific works. Ed. "Kolos"*, Moscow (1914), p. 283–418
- [71] GOSELIN, Clément M. ; MOORE, Brian ; SCHICHO, Josef: Dynamic balancing of planar mechanisms using toric geometry. En: *Journal of Symbolic Computation* 44 (2009), 9, Nr. 9, p. 1346–1358
- [72] HAINES, R.S.: Minimum RMS shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights. En: *Mechanism and Machine Theory* 16 (1981), 1, Nr. 3, p. 185–195

- [73] HILPERT, H: Weight Balancing of Precision Mechanical Instruments. Pergamon Press, 1968. – Informe de Investigación. – 289–302 p.
- [74] JACOBI, P: Bestimmung optimaler Koppelgetriebe nach dem Hauptkriterium Krafe und Momente am Gestell. En: *Wissenschaftliche Zeitshrift der Technischen Hochscule, Karl-Marx-Stadt* 14 (1972), Nr. 1, p. 45–49
- [75] JACOBI, P ; ROSE, W: Experimentelle Untersuchung Dynamisch Ausgelgicher ebe-ner Koppelgetriebe. En: *Maschinenbautechnik* 21 (1972), Nr. 8, p. 354–358
- [76] GARCIA DE JALON, J. ; SERNA, M A. ; VIADERO, F ; FLAQUER, J: A Simple Nu-merical Method for the Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms. En: *Journal of Mechanical Design* 104 (1982), Nr. 1, p. 78–82
- [77] GARCIA DE JALÓN, Javier ; SERNA, Miguel A. ; AVILÉS, Rafael: Computer Method for Kinematic Analysis of Lower-Pair Mechanisms-I Velocities and Accelerations. En: *Mechanism and Machine Theory* 16 (1981), Nr. 5, p. 543–556
- [78] DE JALÓN, Javier G.: Twenty-five years of natural coordinates. En: *Multibody System Dynamics* 18 (2007), 8, Nr. 1, p. 15–33
- [79] GARCIA DE JALON, Javler ; SERNA, Miguel ; AVILÉS, Rafael: Computer Method for Kinematic Analysis of Lower-Pair Mechanisms-II Position Problems. En: *Mechanism and Machine Theory* 16 (1981), Nr. 5, p. 557–566
- [80] GARCIA DE JALON, Javier. ; BAYO, Eduardo.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems : the Real-Time Challenge*. Springer New York, 1994. – 440 p.. – ISBN 9781461226000
- [81] K ZOBAIRI, M A. ; RAO, S S. ; SAHAY, B: Kineto-elastodynamic balancing of 4R-four-bar mechanisms by internal mass redistribution. En: *Mechanism and Machine Theory* 21 (1986), Nr. 4, p. 317–323
- [82] KAMENSKII, V A.: On the Problem of the Number of Counterweights in the Balancing of Plane Linkages. Pergamon Press, 1968. – Informe de Investigación. – 323–333 p.
- [83] KHADEMI, Gholamreza ; MOHAMMADI, Hanieh ; SIMON, Dan: Gradient-Based Multi-Objective Feature Selection for Gait Mode Recognition of Transfemoral Amputees. En: *Sensors* 19 (2019), 1, Nr. 2, p. 253
- [84] KIM, S S. ; VANDERPLOEG, M J.: A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations 1. 1986. – Informe de Investigación

- [85] KOBAYASHI, A: Analytical study of crank effort in reciprocating engines. En: *Memoirs, Ryojun College of Engineering* 4 (1931), p. 127
- [86] KOCHBV, I S.: General method for full force balancing of spatial and planar linkages by internal mass redistribution. En: *Mechanism and Machine Theory* 22 (1987), Nr. 4, p. 333–341
- [87] KOACHEV, I S.: A new general method for full force balancing of planar linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 23 (1988), Nr. 6, p. 475–480
- [88] KOACHEV, I S.: Full shaking moment balancing of planar linkages by a prescribed input speed fluctuation. En: *Mechanism and Machine Theory* 25 (1990), Nr. 4, p. 459–466
- [89] KOACHEV, I S.: Optimum balancing of a class of multiloop linkages by function cognate transformations. En: *Mechanism and Machine Theory* 26 (1991), Nr. 3, p. 285–297
- [90] KOACHEV, I S.: Planar assemblies of sub-linkages with optimal dynamic characteristics. En: *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), Nr. 3, p. 275–282
- [91] KOACHEV, I S. ; GURDEV, G: General criteria for optimum balancing of combined shaking force and shaking moment in planar linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 23 (1988), Nr. 6, p. 481–489
- [92] KOACHEV, I S. ; GURDEV, G H.: Balancing of linkages under the combined action of inertia and external forces. En: *Mechanism and Machine Theory* 24 (1989), Nr. 2, p. 93–98
- [93] KOACHEV, I.S.: Theory of symmetrical mechanisms. En: *Mechanism and Machine Theory* 25 (1990), Nr. 4, p. 467–478
- [94] KOACHEV, I.S.: Contribution to the theory of torque, shaking force and shaking moment balancing of planar linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 26 (1991), Nr. 3, p. 275–284
- [95] KOACHEV, I.S.: Active balancing of the frame shaking moment in high speed planar machines. En: *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), Nr. 1, p. 53–58
- [96] KOACHEV, I.S.: Qualitative theory of the reactions and stresses in high speed planar linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), Nr. 1, p. 6
- [97] KOACHEV, I.S.: r.m.s. shaking force along a given direction loci. principal axes and other properties. En: *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), Nr. 1, p. 37–43
- [98] KOACHEV I.S.: Balancing of planar linkages for prescribed principal axes and minor/major ratio of the r.m.s. shaking force. En: *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), Nr. 1, p. 45–51

- [99] KREUTZINGER, R: Über die bewegung des Schwerpunktes beim Kurbelgetriebe. En: *Getriebetechnik* 10 (1942), Nr. 9, p. 397–398
- [100] LANCHESTER F.W.: Engine Balancing. En: *The institution of automobile engineers* (1914), p. 195–271
- [101] LI, Temei ; PAYANDEH, Shahram: Design of spherical parallel mechanisms for application to laparoscopic surgery. En: *Robotica* 20 (2002), 3, Nr. 2, p. 133–138
- [102] LOWEN, G G. ; BERKOFF, R S.: Survey of Investigations into the Balancing of Linkages. En: *Journal of Mechanisms* 3 (1968), Nr. 4, p. 221–231
- [103] LOWEN, G.G. ; BERKOF, R S.: Determination of Force-Balanced Four-Bar Linkages With Optimum Shaking Moment Characteristics. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 93 (1971), Nr. 1, p. 39–46
- [104] LOWEN, G.G. ; TEPPER, F.R. ; BERKOF, R.S.: The quantitative influence of complete force balancing on the forces and moments of certain families of four-bar linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 9 (1974), 9, Nr. 3-4, p. 299–323
- [105] LOWEN, G.G. ; TEPPER, F.R. ; BERKOF, R.S.: Balancing of linkages - An update. En: *Mechanism and Machine Theory* 18 (1983), Nr. 3, p. 213–220
- [106] MACEY, J P. ; MAKI, E R.: Optimum Balancing of Combined Pitching and Yawing Moments in High-Speed Machinery. En: *Journal of Mechanical Design* 103 (1981), Nr. 3, p. 571–577
- [107] MAXWELL, Robert L.: *Kinematics and dynamics of machinery*. Prentice Hall, 1960
- [108] MAYNE, R W. ; SADLER, J P.: Optimum Mechanism Design Combining Kinematic and Dynamic-Force Considerations. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 97 (1975), Nr. 2, p. 662–670
- [109] MERLET, Jean-Pierre ; GOSSELIN, Clément: Parallel Mechanisms and Robots. En: SICILIANO, Bruno (Ed.) ; (Ed.) ; KHATIB, Oussama (Ed.): *Springer Handbook of Robotics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. – ISBN 978-3-540-30301-5, p. 269–285
- [110] MING, Niu ; PENNESTRI, E: Optimum balancing of four-bar linkagesUne methode optimale pour l'équilibrage des quadrilateres articulés: A refined algorithm. En: *Mechanism and Machine Theory* 26 (1991), Nr. 3, p. 337–348
- [111] NOCEDAL, Jorge. ; WRIGHT, Stephen J.: *Numerical optimization*. Springer, 2006. – 664 p.. – ISBN 9780387303031

- [112] NORTON, Robert L.: *Design of machinery : an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines.* McGraw-Hill Higher Education, 2004. – 858 p.. – ISBN 0071214968
- [113] O'LEARY, Jack M. ; GATECLIFF, George W.: Computer Aided Balance of Single-Cylinder Slider-Crank IC Engines. En: *SAE Technical Paper 891767* (1989), p. 128–141
- [114] ORVANANOS-GUERRERO, Maria T. ; SANCHEZ, Claudia N. ; DAVALOS-OROZCO, Oscar ; RIVERA, Mariano ; VELAZQUEZ, Ramiro ; ACEVEDO, Mario: Using Fully Cartesian Coordinates to Calculate the Support Reactions of Multi-Scale Mechanisms. En: *Proceedings - 2018 Nanotechnology for Instrumentation and Measurement, NANOfIM 2018*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 4 2019. – ISBN 9781538691618
- [115] ORVAÑANOS-GUERRERO, María T. ; SÁNCHEZ, Claudia N. ; RIVERA, Mariano ; ACEVEDO, Mario ; VELÁZQUEZ, Ramiro: Gradient Descent-Based Optimization Method of a Four-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates. En: *Applied Sciences* 9 (2019), 10, Nr. 19, p. 4115
- [116] PAUL, B ; KRAJCINOVIC, D: Computer Analysis of Machines With Planar Motion Part 1-Kinematics. En: *Journal of Applied Mechanics* 37 (1970), Nr. 3, p. 697–702
- [117] PAUL, B ; KRAJCINOVIC, D: Computer Analysis of Machines With Planar Motion Part 2-Dynamics. En: *Journal of Applied Mechanics* 37 (1970), Nr. 3, p. 703–712
- [118] PORTER, B ; SANDLER, D.: Synthesis of dynamically optimal four-bar linkages. En: *Proc. Conf. Mechanisms*, 1972, p. 24–28
- [119] PROFILE MAGAZINE. *Cutout camera*
- [120] RAO, A C. *Elastodynamic balancing of machines.* 1977
- [121] ROOT, Ralph E.: *Dynamics of engine and shaft.* New York : Wiley, 1932
- [122] SADLER, J P.: Balancing of six-bar linkages by nonlinear programming. En: *Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, 1975, p. 139–144
- [123] SADLER, J P. ; MAYNE, R W.: Balancing of mechanisms by nonlinear programming. En: *Third Applied Mechanism Conference, Paper*, Oklahoma State Univ., 1973, p. 1–29
- [124] SCHCEPETILNIKOV, V A. *Balancing of mechanisms.* 1982
- [125] SCI PY.ORG. *scipy.optimize.differential\_evolution.* 2020

- [126] SCONFELD, S: Dynamische Synthese ebener Koppelgetriebe mide dun Programm-system KOGEOP. En: *Maschinenbautechnik* 23 (1974), Nr. 3, p. 119–124
- [127] SEMENOV, M V.: The Synthesis of Partly Balanced Plane Mechanisms. En: *Mechanisms* 3 (1968), Nr. 4, p. 339–353
- [128] SEMENOV, M.V.: Balancing of Spatial Mechanisms. En: *Journal of Mechanisms* 3 (1968), Nr. 4, p. 355–365
- [129] SERNA, Miguel A. ; AVILÉS, Rafael ; GARCÍA DE JALÓN, Javier: Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates. En: *Mechanism and Machine Theory* 17 (1982), Nr. 6, p. 397–403
- [130] SHAO, Yixin ; XIANG, Zhongxia ; LIU, Haitao ; LI, Lili: Conceptual design and dimensional synthesis of cam-linkage mechanisms for gait rehabilitation. En: *Mechanism and Machine Theory* 104 (2016), 10, p. 31–42. – ISSN 0094114X
- [131] SHCHEPETIL, V A.: The Balancing of Bar Mechanisms with Unsymmetrical Links. En: *Mechanism and Machine Theory* 10 (1975), Nr. 6, p. 461–466
- [132] SHCHEPETIL'NIKOV, V A.: The Determination of the Mass Centers of Mechanisms in connection with the Problem of Mechanism Balancing. En: *Journal of Mechanisms* 3 (1968), Nr. 4, p. 367–389
- [133] SHETH, P.N. ; UICKER, J.J.: IMP (Integrated Mechanisms Program), A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkage. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 94 (1972), Nr. 2, p. 454–464
- [134] SHIAKOLAS, P. S. ; KOLADIYA, D. ; KEBRLE, J.: On the optimum synthesis of six-bar linkages using differential evolution and the geometric centroid of precision positions technique. En: *Mechanism and Machine Theory* 40 (2005), 3, Nr. 3, p. 319–335. – ISSN 0094114X
- [135] SLEESONGSAM, Suwin ; BUREERAT, Sujin: Vibration suppression of a single-cylinder engine by means of multi-objective evolutionary optimisation. En: *Sustainability (Switzerland)* 10 (2018), 6, Nr. 6. – ISSN 20711050
- [136] SMITH, D.A. ; CHACE, M.A. ; RUBENS, A.C.: The Automatic Generation of a Mathematical Model for Machinery Systems. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 95 (1973), Nr. 2, p. 629–635
- [137] SMITH, M R.: Dynamic analysis and balancing of linkages with interactive computer graphics. En: *Computer Aided Design* 7 (1975), Nr. 1, p. 15–19

- [138] SMITH, M R. ; MAUNDERT, L: INERTIA FORCES IN A FOUR-BAR LINKAGE. En: *Journal of Mechanical Engineering Science* 9(3) (1967), p. 218–225
- [139] STORN, Rainer ; PRICE, Kenneth: Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. En: *Journal of Global Optimization* 11 (1997), p. 341–359
- [140] TALBOURDET, G L. ; SHEPLER, P R.: Mathematical solution of 4-bar linkages-IV. Balancing of linkages. En: *Machine Design* 13 (1941), p. 73–77
- [141] TEPPER, F. R. ; LOWEN, G. G.: Shaking Force Optimization of Four-Bar Linkage With Adjustable Constraints on Ground Bearing Forces. En: *Journal of Engineering for Industry* 97 (1975), 5, Nr. 2, p. 643–651
- [142] TEPPER, F.R. ; LOWEN, G.G.: General Theorems Concerning Full Force Balancing of Planar Linkages by Internal Mass Redistribution. En: *TransASME* 94B (1972), Nr. 3, p. 789–796
- [143] TEPPER, F.R. ; LOWEN, G.G.: On the Distribution of the RMS Shaking Moment of Unbalanced Planar Mechanisms: Theory of Isomomental Ellipses. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 95 (1973), Nr. 3, p. 665–671
- [144] TRICAMO, S J. ; LOWEN, G G.: A New Concept for Force Balancing Machines for Planar Linkages. Part 2: Application to Four-Bar Linkage and Experiment. En: *Journal of Mechanical Design* 103 (1981), Nr. 4, p. 784–792
- [145] TRICAMO, S J. ; LOWEN, G G.: Simultaneous Optimization of Dynamic Reactions of a Four-Bar Linkage With Prescribed Maximum Shaking Force. En: *Journal of Mechanical Design* 105 (1983), Nr. 3, p. 520–525
- [146] TRICAMO, S.J. ; LOWEN, G.G.: A New Concept for Force Balancing Machines for Planar Linkages 1. Parti: Theory. En: *Journal of Mechanical Design* 103 (1981), Nr. 3, p. 637–642
- [147] TRICARNO, S J. ; LOWEN, G G.: A Novel Method for Prescribing the Maximum Shaking Force of a Four-Bar Linkage with Flexibility in Counterweight Design 1. En: *Journal of Mechanical Design* 105 (1983), Nr. 3, p. 511–519
- [148] UICKER, John J. ; PENNOCK, Gordon R. ; SHIGLEY, Joseph E.: *Theory of machines and mechanisms*. Vol. 1. Oxford University Press New York, NY, 2011
- [149] URBA, A L.: Disposition of the correction mass for the best balancing of planar linkages, Collection: Balancing of machines and apparatuses, Moscow, Ed. En: *Mechanical engineering* (1978), p. 226–230

- [150] URBA, A L.: Study of the elliptic harmonics and the possibility of their balancing by a counterweight. En: *Collection of the scientific works of the Academy of agricultural science of Lithuania* 26 (1980), Nr. 3/28, p. 43–49
- [151] URBA, A L.: Geometric disposition of the points with rms value of shaking moment of spatial mechanisms. En: *Collection of the scientific works of the Academy of agricultural science of Lithuania* 27 (1981), Nr. 3/89, p. 40–49
- [152] V. VAN DER WIJK ; J. L. HERDER ; VIADERO, Fernando (Ed.) ; CECCARELLI, Marco (Ed.): *Mechanisms and Machine Science*. Vol. 7: *The Method of Principal Vectors for the Synthesis of Shaking Moment Balanced Linkages*. Dordrecht : Springer Netherlands, 2013. – ISBN 978–94–007–4902–3
- [153] WALDRON, K J. ; KINZEL, G L. ; WALDRON, K ; KINZEL, G: *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*. John Wiley & Sons, 2016
- [154] WALKER, M J. ; HAINES, R S.: A study of counterweight synthesis for a 6-bar chain. En: *Mechanism and Machine Theory* 17 (1982), Nr. 5, p. 327–334
- [155] WALKERS, M J. ; HAINES, R S.: An experimental study of the effects of counterweights on a six-bar chain. En: *Mechanism and Machine Theory* 17 (1982), Nr. 6, p. 355–360
- [156] WANG, Qiuying ; YIN, Juan ; NOURELDIN, Aboelmagd ; IQBAL, Umar ; WANG, Qiuying ; YIN, Juan ; NOURELDIN, Aboelmagd ; IQBAL, Umar: Research on an Improved Method for Foot-Mounted Inertial/Magnetometer Pedestrian-Positioning Based on the Adaptive Gradient Descent Algorithm. En: *Sensors* 18 (2018), 11, Nr. 12, p. 4105
- [157] WAWRZECKI, J: The conditions of optimal balancing spatial mechanisms. En: *Proceedings of the Tenth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland* Vol. 4, 1999, p. 1589–1594
- [158] WAWRZECKI, Janusz: A method of the balancing of spatial mechanisms. En: *Mechanism and Machine Theory* 33 (1998), Nr. 8, p. 1195–1209
- [159] WIEDERRICH, J.L. ; ROTH, B: Momentum Balancing of Four-Bar Linkages. En: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 98 (1976), Nr. 4, p. 1289–1295
- [160] VAN DER WIJK, V.: Shaking-moment balancing of mechanisms with principal vectors and momentum. En: *Frontiers of Mechanical Engineering* 8 (2013), Nr. 1, p. 10–16. – ISSN 20950233
- [161] VAN DER WIJK, Volkert: *Methodology for analysis and synthesis of inherently force and moment-balanced mechanisms: theory and applications*. Enschede, The Netherlands, University of Twente, Tesis de Grado, 4 2014

- [162] VAN DER WIJK, Volkert ; HERDER, Just L. ; DEMEULENAERE, Bram: Comparison of various dynamic balancing principles regarding additional mass and additional inertia. En: *Journal of Mechanisms and Robotics* 1 (2009), 11, Nr. 4, p. 1–9
- [163] VAN DER WIJK, Volkert ; KRUT, Sébastien ; PIERROT, François ; HERDER, Just L.: Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator. En: *The International Journal of Robotics Research* 32 (2013), 6, Nr. 6, p. 744–759. – ISSN 0278–3649
- [164] XU, Ke ; LIU, Haitao ; ZHU, Xingqiao ; SONG, Yongbin: Kinematic analysis of a novel planar six-bar bionic leg. En: *Mechanisms and Machine Science* Vol. 73. Springer Netherlands, 2019. – ISSN 22110992, p. 13–21
- [165] YU, Y Q. ; SMITH, M R.: The effect of link form on the dynamic response of flexible mechanisms. En: *Proc. of 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. Milan, Italy, 1995
- [166] YU, Yue-Qing: Optimum shaking force and shaking moment balancing of the RSS'R spatial linkage. En: *Mechanism and Machine Theory* 22 (1987), Nr. I, p. 39–45
- [167] YU, Yue-Qing: Research on complete shaking force and shaking moment balancing of spatial linkages. En: *Mechanism and Machine Theory* 22 (1987), Nr. I, p. 27–37
- [168] YU, Yue-Qing: Complete shaking force and shaking moment balancing of spatial irregular force transmission mechanisms using additional links. En: *Mechanism and Machine Theory* 23 (1988), Nr. 4, p. 279–285
- [169] YUDIN, V: The balancing of machines and their stability. En: *Edition of Academy of Red Army, Moscow* (1941)
- [170] ZAMUDA, Ales ; BREST, Janez ; BOSKOVIC, Borko ; ZUMER, Viljem: Differential evolution for multiobjective optimization with self adaptation. En: *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, IEEE, 9 2007. – ISBN 978–1–4244–1339–3, p. 3617–3624
- [171] ZHANG, Jiaying ; MCINNES, Colin R.: Reconfiguration of a four-bar mechanism using phase space connections. En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 81 (2016), 12, p. 43–59. – ISSN 10961216
- [172] ZHANG, Shemin: A constituting method of objective function for the dynamic optimum balance of shaking forces in linkage. En: *Mechanism and Machine Theory* 29 (1994), Nr. 6, p. 829–835
- [173] ZOBAIRI, K ; RAO, S S. ; SAHAY, B: Kineto-elastodynamic balancing of 4R-four bar mechanisms combining kinematic and dynamic stress considerations. En: *Mechanism and Machine Theory* 21 (1986), Nr. 4, p. 307–315