Matemáticas Discretas

Sara Gómez Delgado
Adrián Cerda

Universidad Panaméricana, *Campus Aguascalientes*

Departamento de Matemáticas

12 de octubre de 2020

Agenda

1. Grafos

2. Ejercicios

Grafos Primeras Definiciones

Por su generalidad vamos a comenzar con el concepto de Digrafo.

Definición

Un grafo dirigido ó digrafo es un par de conjuntos $\mathcal{G} = (V, E)$ donde el conjunto $V \neq \emptyset$ es llamado su conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ es llamado su conjunto de aristas.

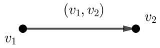
Como tal, los elementos de E llamados las aristas de $\mathcal{G}$ al ser pares ordenados (v_1, v_2) con $v_1, v_2 \in V$, tienen naturalmente un orden establecido, y con ese orden los pares (v_1, v_2) y (v_2, v_1) son distintos, es decir

$$(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1).$$

Así que, conviene representar a una arista (v_1, v_2) de un digrafo mediante una flechita que vaya del vértice v_1 al vértice v_2.

$$v_1 \longrightarrow v_2$$

Por otro lado, los elementos V que hemos dicho se llaman vértices, conviene representarlos mediante puntitos o nodos.



Grafos Primeras Definiciones

Ahora veamos el concepto de Grafo no dirigido.

Antes de establecer la definición formal, notemos que en un grafo dirigido el conjunto de aristas E es un subconjunto del producto cartesiano $V \times V$, y esto es suficiente para decir que E define una relación binaria entre los vértices del grafo.

Y, como tal, esta relación binaria E, puede en principio satisfacer algunas propiedades adicionales. Pero si no lo hace, podemos con libertad, premeditadamente, establecer tales propiedades.

Es de este modo, como surge el concepto de grafo no dirigido.

Definición

Un grafo no dirigido es un par de conjuntos $\mathcal{G} = (V, E)$ donde $V \neq \emptyset$ es llamado su conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ es una relación binaria simétrica.

Grafos Primeras Definiciones

La propiedad de ser simétrica impuesta a la relación binaria E implica que las aristas $(v_1, v_2) \in E$ y $(v_2, v_1) \in E$ se consideren iguales.

Así, en un grafo no dirigido la dirección o el sentido de las aristas no tiene ningún valor y podemos decir que

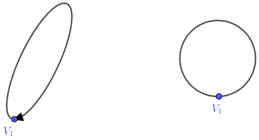
$$(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$$

Si bien es cierto que imponer una propiedad adcional al concepto amplio de digrafo, puede interpretarse como una restricción de dicho concepto general, la verdad es que también a partir de dicha noción podemos definir lo que es un multigrafo, en el que un par de vértices puede tener multiples aristas entre ellos.

Grafos Primeras Definiciones

Si $v_1 \in V$ es un vértice de una grafica $\mathcal{G}$, entonces una arista que inicia y termina en un mismo vértice de la forma (v_1, v_1) es llamada lazo en v_1.

Un lazo puede ocurrir tanto en digrafos como en grafos no dirigidos. Su representación gráfica es como sigue:

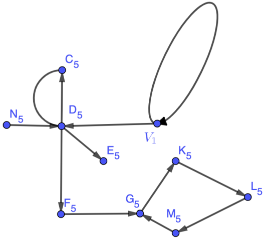


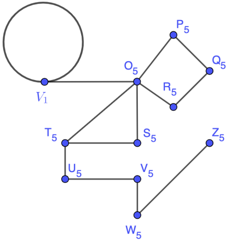
En el caso de un digrafo se trata de una flecha que sale y llega al mismo nodo y en el caso de grafo no dirigido es simplement un bucle que empieza y termina en el mismo punto.

En el caso de grafos no dirigidos la representación gráfica de una arista es simplemente una curva o segmento de recta que conecta un par de vértices.

Grafos Primeras Definiciones

Veamos algunos ejemplos tanto de digrafos como de grafos no dirigidos.





La gráfica de la izquierda corresponde a un digrafo, mientras que la que se encuentra a la derecha es un grafo no dirigido. En cada ejemplo, respectivamente se tiene que

$$V = \{v_1, D_5, C_5, n_5, E_5, K_5, F_5, G_5, M_5, L_5\}$$

y

$$V = \{V_1, O_5, P_5, Q_5, R_5, S_5, T_5, U_5, V_5, w_5, Z_5\}$$

Grafos Primeras Definiciones

De los ejemplos anteriores podemos señalar lo siguiente:

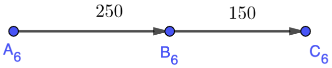
1. A todo digrafo le podemos asociar un grafo no dirigido, en el que las (v_1, v_2) y (v_2, v_1) se colapsan en una sola y las direcciones de cada arista dejan de tener valor y se reducen solo a la conectividad de vértices.
2. Si a cada arista $v_1 v_2$ ya sea de un grafo o de un digrafo, le asociamos un valor númerico llamado peso, entonces lo que resulta es un grafo o un digrafo ponderado.

En realidad se tiene la siguiente definición

Definición

Un grafo ponderado es una terna $\mathcal{G} = (V, E, \omega)$ donde $V \neq \emptyset$ es su conjunto de vértice, E es su conjunto de aristas y $\omega : E \to \mathbb{R}$ es una función llamada peso que a cada arista e de $\mathcal{G}$ le asigna un número real $\omega(e) \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo,



Grafos Primeras Definiciones

Si en un grafo no dirigido $\mathcal{G}$, ocurre que más de dos aristas inciden en un mismo par de vértices, entonces decimos que se trata de un multigrafo y a dichas aristas les llamamos arsitas paralelas.

Si $v_0 \in V$ es un vértice de una grafica $\mathcal{G}$ en el cual ninguna de las aristas de $\mathcal{G}$ incide en el, entonces decimos que el vértice es un vértice aislado.

Un grafo no dirigido en el que no se tienen lazos ni arsitas paralelas se llama grafo simple. En otras palabras,

Definición

Un grafo simple es un grafo no dirigido $\mathcal{G} = (V, E)$ en el que la relación binaria además de ser simétrica es antireflexiva.

Ejmplo. Un camino simple que definiremos enseguida es un ejemplo de un grafo simple.

Grafos Primeras Definiciones

Los siguientes conceptos pueden variar de texto a texto, sin embargo, por su nombre resultan muy intuitivos.

1. Si v_0 y v_n son vértices de un grafo no dirigido, entonces un camino de v_0 a v_n es una sucesión alternante de $n+1$ vértices y n aristas que comienza en el vértice v_0 y termina en el vértice v_n

   $$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_n v_n$$

   donde la arista e_i es incidente en los vértices v_{i-1} y v_i.

   Nota. en un camino se pueden repetir aristas y vértices.

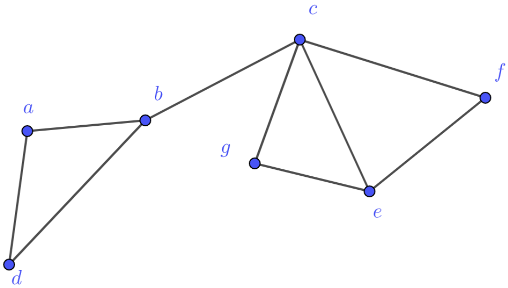
2. Un camino de un vértice v_0 a un vértice v_n en el cual no se repiten aristas se denomina recorrido.

   Nota. en un recorrido pudieran repetirse vértices.

3. Un recorrido en el cual no se repiten vértices se llama camino simple.

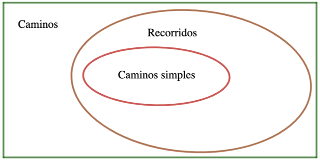
Grafos Primeras Definiciones

Veamos algunos ejemplos



Un camino de a a f esta dado por $adbadbcef$.
Un recorrido de a a f es por ejemplo $abcegcf$.
Un camino simple de a a f es $abcf$.

En todos estos casos ocurre que el vértice inicial es distinto al vértice final, por lo tanto se llaman abiertos.



Si además, para los conceptos anteriores se requiere que el vértice inicial sea el mismo que el vértice final, entonces los conceptos que obtenemos respectivamente son:

1. Camino cerrado, es una sucesión alternante de vértices y aristas tal que el vértice inicial es igual al vértice final.
2. Circuito, es un recorrido en el cual el vértice inicial es igual al vértice final.
3. Ciclo, es un caminos simple en el que el vértice inicial es el mismo que el vértice final.

Por ejemplo en la grafica no dirigida anterior, un ciclo es $cfegc$

Primer lista de números asosciados a una gráfica

Los siguientes son algunos de los números que se le asocian a una grafo.

1. El número de vértices de un grafo se llama orden y se denota por

$$ord(\mathcal{G}) = |V|$$

2. El número de aristas de un grafo se llama tamaño del grafo y se denota por

$$t(\mathcal{G}) = |E|$$

3. Si el grafo $\mathcal{G}$ es un camino, entonces su longitud es igual al número de aristas que lo forman, y se denota por

$$long(v_0 - v_n) = n$$

4. Si $\mathcal{G}$ es un grafo no dirigido, el grado de un vértice se define como el número de aristas incidentes en el, y se denota por

$$gr(v_i)$$

Primer lista de números asociados a una gráfica

Cuando se trata de un grafo dirigido, el concepto de grado de un vértice se parte en dos:

4.1 El grado de entrada de un vértice v en un digrafo se define como el número de arista que llegan a dicho vértice y se denota por

$$gr_e(v)$$

4.2 El grado de salida de un vértice v en un digrafo se define como el número de arista que salen de dicho vértice y se denota por

$$gr_s(v)$$

Al respecto de tales números se tiene el siguiente

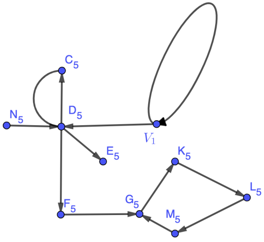
Teorema

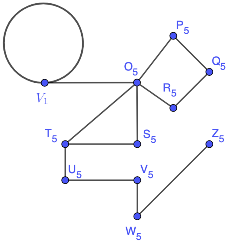
Si $\mathcal{G} = (V, E)$ es un grafo dirigido (no dirigido) entonces

$$\sum_{v \in V} gr_e(v) = \sum_{v \in V} gr_s(v) = |E|, \quad \left(\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E| \right) \textit{ respectivamente.}$$

Primer lista de números asosciados a una gráfica

Consideremos los siguientes ejemplos,





y llamemos $\mathcal{G}_1$ al grafo dirigido de la izquierda y $\mathcal{G}_2$ al grafo no dirigido de la derecha, entonces:
$ord(\mathcal{G}_1) = 10$ y $ord(\mathcal{G}_2) = 11$. Asimismo, $t(\mathcal{G}_1) = 12$ y $t(\mathcal{G}_2) = 13$. Por otro lado, $long(u_5 - z_5) = 3$, y $gr(v_1) = 3$ en el grafo no dirigido y $gr_e(v_1) = 1$ y $gr_s(v_1) = 2$ en el digrafo.

Matrices de Incidencias y Adyacencias

A cada grafo no dirigido

$$\mathcal{G} = (V, E)$$

podemos asociarle una matriz cuadrada simétrica de tamaño $|V| \times |V|$, llamada matriz de adyacencias y definida de la siguiente manera

$$M(\mathcal{G}) = (m_{ij})$$

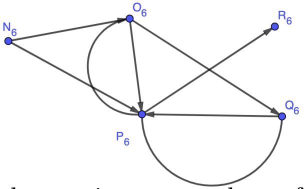
donde

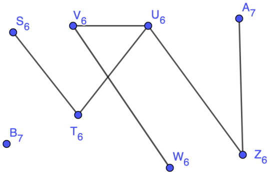
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Por otro lado, cuando se trata de un digrafo, es necesario determinar anticipadamente si el digrafo se representará entrando o saliendo. En este caso la matriz es cuadrada de tamaño $|V| \times |V|$ pero ya no es simétrica respecto a su diagonal.

Veamos algunos ejemplos en la siguiente lamina.

Matrices de Incidencias y Adyacencias





Las matrices de adyacencias para cada grafo son respectivamente

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & O_6 & N_6 & R_6 & P_6 & Q_6 \\
\hline
O_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
N_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
Q_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad gr_s(O_6) = 2
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Matrices de Incidencias y Adyacencias

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} O_6 & N_6 & R_6 & P_6 & Q_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} O_6 \\ N_6 \\ R_6 \\ P_6 \\ Q_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad gr_e(O_6) = 2$$

Matrices de Incidencias y Adyacencias

De los ejemplos anteriores notamos que la suma de las entradas en cada fila corresponde al grado de salida de cada vértice en el primer caso y al grado de cada vértice en el segundo caso.

Por otro lado,

Definición

La matriz de incidencias de un grafo no dirigido es una matriz rectangular

$$M(\mathcal{G}) = (m_{ij})$$

de tamaño $|V| \times |E|$, tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } e_j \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es un lazo en } v_i \end{cases}$$

Matrices de Incidencias y Adyacencias

De manera un tanto similar

Definición

La matriz de incidencias de un digrafo es una matriz rectangular

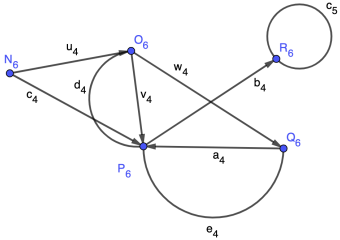
$$M(\mathcal{G}) = (m_{ij})$$

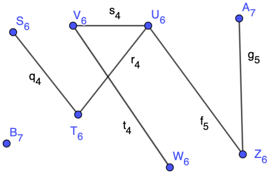
de tamaño $|V| \times |E|$, tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{ si } v_i \text{ es salida de } e_j \\ 0 \ \text{ si } v_i \text{ no es adyacente a } e_j \\ -1 \ \text{ si } v_i \text{ es entrada de } \ e_j \\ 2 \ \text{ si } e_j \text{ es un lazo en } \ v_i \end{cases}$$

Matrices de Incidencias y Adyacencias

Veamos unos ejemplos. Calcular las matrices de incidencia de los siguientes grafos:





Grafos Segundas Definiciones

1. Una gráfica $\mathcal{G} = (V, E)$ es conexa si dados cualesquiera dos vértices u y v en V, existe un camino de u a v.

   Nota. como se puede ver una grafica conexa es de una sola pieza, mientras que una grafica no conexa consta de varias componentes. Tales componentes reciben un nombre especial.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo, y sea (V', E') un par de subconjuntos $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, tales que para toda arista $e' \in E'$, si e' incide en v' y w', entonces $v', w' \in V'$, Entonces $\mathcal{G}' = (V', E')$ es una subgrafica de $\mathcal{G}$.

   Nota. Siempre ocurre que $\mathcal{G}$ es una subgrafica de si misma

3. La gráfica completa sobre n vértices denotada por K_n es un grafo con n vértices en el que hay una arista entre cada par de vértices.

4. Una grafica $\mathcal{G} = (V, E)$ es bipartita, si existen subconjuntos V_1, V_2 de V tales que $V_1 \cup V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y además cada arista $e \in E$ tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2.

y

5 Una grafica bipartita completa sobre m y n vértices, denotada por $K_{m,n}$ es el grafo simple donde el conjunto de vértices tiene una partición V_1, V_2 con m y n vértices respectivamente y donde el conjunto de aristas de $\mathcal{G}$ consiste en todas las aristas de la forma v_1, v_2 con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Ejercicios

1.- Realiza el dibujo de una grafica que conste de 7 vértices y 13 aristas, ¿Es tu grafo un multigrafo?

1

2