Luis Eduardo Robles Jimenez

TAREA IX

Ejercicio 1. Demuestre que cualquier árbol con dos vértices o más tiene un vértice de grado 1.

Todo grafo con 2 o más nodos tiene siempre al menos 2 nodos hoja, y definiendo a cada nodo hoja como vértice de grado 1. Se aprecia que dicho árbol siempre tiene mas de un vértice de grado 1

Ejercicio 2. Demuestre que un árbol es una gráfica plana.

Dada la definición de árbol como grafo sin ciclos, se puede observar que cada nodo puede apuntar a sus hijos en linea recta sin cruzarse. y de esa forma expandirse al infinito

Ejercicio 3. Demuestre que un árbol es gráfica bipartita

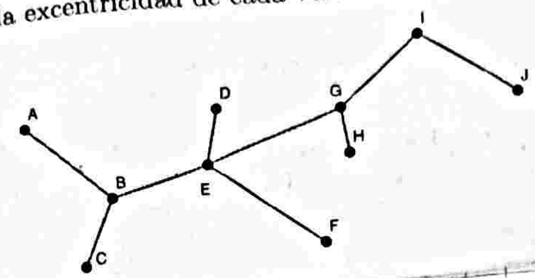
Jugando con las definiciones, sabemos que toda gráfica sin ciclos impares es bipartito, sabiendo eso, un árbol es bipartito porque no tiene ciclos.

Ejercicio 4. Demuestre que los vértices de un árbol se pueden colorear con dos colores de manera que cada arista incida en vértices de diferentes colores.

Construyendo el árbol $T = (V, E)$, podemos aprovechar la ausencia de ciclos en el mismo para poder agregar cada hoja con el color contrario al último nodo garantizando lo que se busca demostrar.

Esto lo sabemos gracias a que es bipartito.

Ejercicio 5. La excentricidad de un vértice v en un árbol T es la longitud máxima de una trayectoria simple que comienza en v. Encuentre la excentricidad de cada vértice en el árbol de la siguiente figura.



A: 5, B: 4, C: 5, D: 4, E: 3, F: 4, G: 3, H: 4, I: 4, J: 5

Ejercicio 6. Si un bosque F consiste de m árboles y tiene n vértices. ¿cuántas aristas tiene F?

Si vemos a un bosque de m árboles como un árbol con aristas faltantes, vemos que al conocer el número total de nodos y definiendolo como n, tendremos un total de $n-m$ aristas.

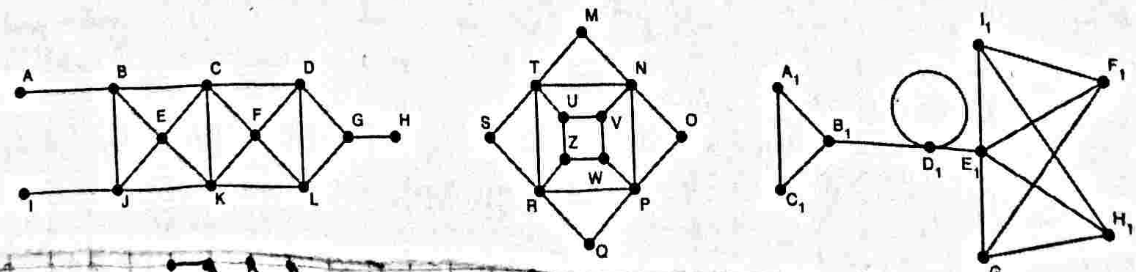
Ejercicio 7. Demuestre que una gráfica G con n vértices y menos de $n-1$ aristas no es conexa.

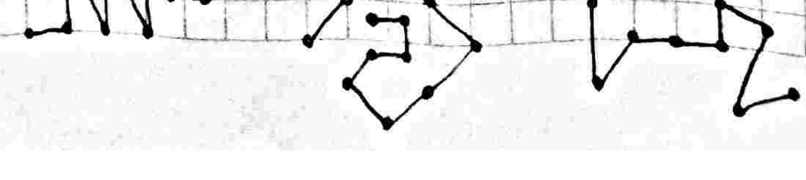
Un numero de aristas $< n-1$ se puede ver como $n-2$, $n-3$ o $n-m$, la cual es justo la formula para aristas de un bosque, indicando que dicha gráfica es un bosque es decir, m arboles no conexos entre sí.

Ejercicio 8. Pruebe que T es un árbol si y solo si T es conexa y cuando se agrega una arista entre cualesquiera dos vértices, se crea exactamente un ciclo.

Si T es un arbol, entonces tiene $n-1$ aristas dados n vértices, porque una conecta a 2 nodos. Entonces, al agregar una arista más, se está reconectando un par de nodos que ya estaban, generando un ciclo.

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes gráficas encuentre un árbol abarcador.





TAREA IX

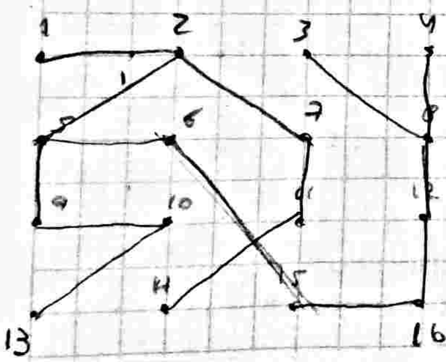
Ejercicio 11. Considere una gráfica ponderada conexa (G, V, E, w) y defina el concepto de árbol abarcador mínim

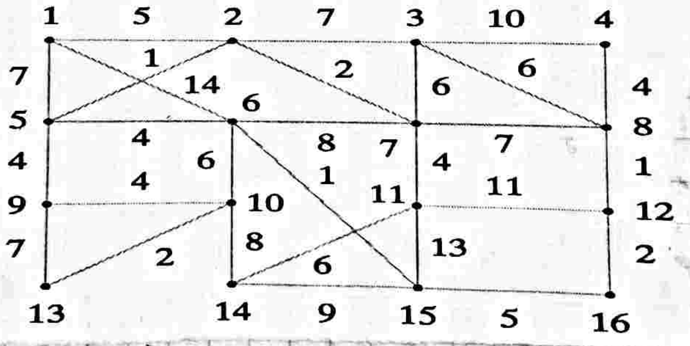
Asumiendo que la notación buscada era $G=(V,E,w)$.
Se definiría el árbol abarcador mínimo como un subgrafo de G que es árbol, recorre todos los vértices G y la sumatoria de las funciones w de cada arista es mínima.

Ejercicio 10. Demuestre que una gráfica G tiene un árbol abarcador si y sólo si G es conexa.

Identificando al árbol generador de G como un árbol T conexo que cubre todos los vértices de G, podemos basarnos en la propiedad de que dicho árbol conecta a cada vértice u y v por un camino simple, si eso no se cumpliese es porque G no es conexa, entonces, G tiene a T si y solo si G es conexa

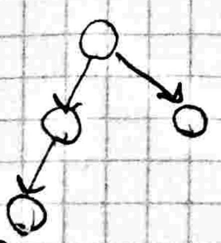
Ejercicio 12. Con su definición de árbol abarcador mínimo encuentre el árbol abarcador mínimo para la siguiente gráfica.



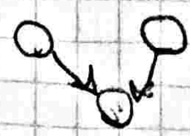


$W = 51$

Ejercicio 13. Considere una gráfica dirigida $G = (V, E)$ y para dicha gráfica considere su gráfica no-dirigida asociada, diremos que G es un árbol dirigido si ocurre que la gráfica no-dirigida asociada es un árbol. ¡Asegúrese de entender esta definición! Enseguida, defina la raíz de un árbol dirigido como un vértice r de G tal que su grado de entrada $gr_e(r) = 0$ y para todo $v \in V - r$ se cumple $gr_e(v) = 1$. Luego, defina árbol con raíz, cómo un árbol dirigido con una única raíz. En base a lo anterior, realice un dibujo de un árbol dirigido pero sin raíz, y de un árbol con raíz.



Con raiz



Sin raiz

Ejercicio 14. Del ejercicio anterior, ¿podría el órden de arriba a abajo o de izquierda a derecha reemplazar la dirección de las flechas de un árbol con raíz? justifique su respuesta.

De trabajar con un árbol con raíz, sí es posible, dibujando desde la raíz y representando la relación padre-hijo como una arista que va hacia abajo. Pasa igual de izq. a der., pero no con árbol sin raíz

Bonus Considere el ajuste mas conveniente del ejercicio 14, y para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ y árbol con raíz $T = (V, E)$, defina el concepto de árbol m-ario si el grado de salida $gr_s(v) \leq m$ para todo $v \in V$. Ahora, note que las posibilidades para $gr_s(v)$ son $0, 1, 2, ..., m$. Luego, defina árbol m-ario completo si $gr_s(v) \in \{0, m\}$ para todo $v \in V$. En base a estos conceptos, si $|V| = n$, h es el número de hojas e i es el número de vértices internos. muestre que si T es un árbol m-ario completo, entoces

$$n = mi + 1$$
$$h = (m-1)i + 1$$
$$i = \frac{h-1}{m-1}$$

La suma total de los vertices se puede definir como m veces cada nodo interno, + el padre

$n = mi + 1$, si a este resultado se le quitan nuestros nodos internos nos resultarán las hojas:

$h = (m-1)i + 1$

y si conocemos el número de hojas: fácilmente se obtienen los nodos internos

$i = \frac{h-1}{m-1}$