

ÓPTICA GEOMÉTRICA

1.- INTRODUCCION

La luz es una onda electromagnética descrita por los mismos principios teóricos que gobiernan todas las formas de radiación electromagnética. Esta radiación se propaga en forma de dos ondas vectoriales mutuamente acopladas, una onda para el campo eléctrico \mathbf{E} y otra onda para el campo magnético \mathbf{B} , y esta propagación de las ondas de luz viene descrita por las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

Sin embargo, cuando las dimensiones del sistema físico a través del cual se propaga la luz son mucho mayores que la longitud de onda, la naturaleza ondulatoria de la luz no juega ningún papel y el proceso puede describirse simplemente mediante rayos que obedecen un conjunto de reglas geométricas. Este modelo de la luz se denomina óptica de rayos u *óptica geométrica*. La experiencia cotidiana puede, en gran medida, describirse por la óptica geométrica: cuando se interpone un obstáculo opaco entre una fuente de luz puntual y un pantalla se obtiene una sombra que corresponde a la proyección geométrica del contorno del objeto desde la fuente puntual de luz hasta la pantalla, lo que viene a probar la propagación rectilínea de la luz en medios homogéneos. Las leyes de la reflexión y refracción de la luz son fácilmente accesibles a partir de la observación directa en un espejo plano (reflexión) o de la visión de objetos en el fondo de una piscina (refracción).

2.- POSTULADOS DE LA OPTICA GEOMETRICA

La óptica geométrica se ocupa sólo de cuestiones relacionadas con la propagación de la luz, siendo su objetivo determinar las trayectorias de la energía radiante a través de distintos medios o disponer éstos de modo que la propagación se ajuste a determinadas trayectorias preestablecidas.

La óptica geométrica se basa en los conceptos de *rayo luminoso*, utilizado para caracterizar la luz, y de *índice de refracción* que caracteriza los medios materiales por los que la luz se propaga, desarrollándose como una geometría sobre un único postulado físico: el *Principio de Fermat*.

2.1 Postulados de la Óptica Geométrica

1.- La luz se propaga en forma de rayos. Los rayos son emitidos por fuentes luminosas y pueden ser observados cuando alcanzan un detector óptico.

2.- Un medio óptico se caracteriza por una cantidad $n \geq 1$, denominada índice de refracción, que es el cociente de la velocidad de la luz en el vacío, c , entre la velocidad de la luz en el medio, v :

$$n = \frac{c}{v} \quad (1)$$

La definición del índice de refracción indica que, salvo para el vacío, el índice de refracción es siempre mayor que la unidad, al cumplirse que $c > v$ (para el vacío $c = v$). La Tabla 1 recoge los índices de algunos compuestos a temperatura ambiente y presión atmosférica para la luz de longitud de onda de 589 nm.

Teniendo en cuenta la ecuación (1) es posible obtener el tiempo t que tarda la luz en recorrer una distancia s y que es:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{n s}{c} \quad (2)$$

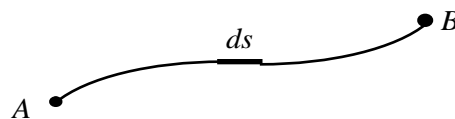
es decir, proporcional al producto ns . La cantidad $L = ns$ se conoce como *camino óptico*.

Tabla 1.- Índices de refracción para la luz amarilla de 589 nm

Sustancia	n	Sustancia	n
Sólidos		Líquidos a 20°C	
Hielo	1.309	Alcohol metílico	1.329
Fluorita	1.434	Agua	1.333
Sal de roca	1.544	Alcohol etílico	1.36
Cuarzo	1.544	Tetracloruro	
Circonio	1.923	de carbono	1.460
Diamante	2.417	Trementina	1.472
		Glicerina	1.473
Vidrios (valores típicos)		Benceno	1.501
Crown	1.52	Disulfuro	
Flint ligero	1.58	de carbono	1.628
Flint medio	1.62		
Flint denso	1.66		

3.- En un medio inhomogéneo el índice de refracción $n(\mathbf{r})$ es una función de la posición determinada por el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$. El camino óptico L a lo largo de una trayectoria luminosa entre dos puntos A y B (Figura 1) se obtiene mediante:

$$L = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \quad (3)$$

**Figura 1**

donde ds es el elemento diferencial de longitud a lo largo del camino. Como en cada punto \mathbf{r} se cumplirá la ecuación (1), entonces:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{c}{v(\mathbf{r})} \quad (4)$$

siendo posible escribir:

$$L = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = \int_A^B \frac{c}{v(\mathbf{r})} ds = c \int_A^B \frac{ds}{v(\mathbf{r})} = c \int_A^B \frac{1}{v(\mathbf{r})} dt = ct \quad (5)$$

Es decir, el tiempo t que tarda la luz en recorrer la trayectoria desde el punto A hasta el B es proporcional al camino óptico, L :

$$t = \frac{L}{c} \quad (6)$$

4.- *Principio de Fermat*: el camino óptico a lo largo de una trayectoria real de luz es estacionario, es decir, un extremal. Esto implica que:

$$L = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (7)$$

Un extremal puede ser un mínimo, un máximo o un punto de inflexión. Sin embargo, normalmente suele ser un mínimo, en cuyo caso los rayos de luz se propagan a lo largo de trayectorias de tiempo mínimo.

2.2 Propagación de la luz en un medio homogéneo

En un medio homogéneo el índice de refracción es el mismo en todas partes y, por tanto, también es constante la velocidad de la luz. El camino de tiempo mínimo que exige el Principio de Fermat es también el camino de mínima distancia pues ahora $L = ns$. Esto implica que *las trayectorias de la luz en los medios homogéneos son rectilíneas* (Figura 2). Asimismo es importante señalar que *las trayectorias de los rayos de luz son reversibles*.

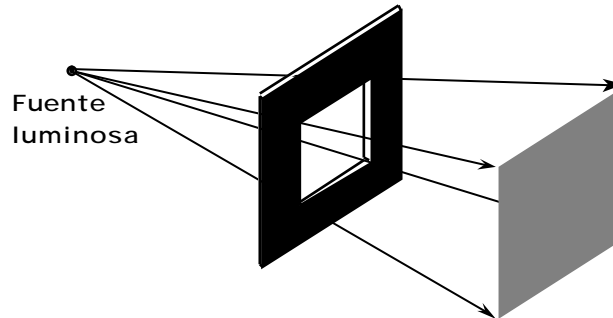


Figura 2

2.3 Reflexión de la luz en un espejo

La mayor parte de los objetos resultan visibles a causa de la luz que reflejan hacia nuestros ojos. En el tipo de reflexión más común, denominada **reflexión difusa**, la luz se refleja en todas direcciones. Ocurre este tipo de reflexión siempre que las dimensiones de las rugosidades del cuerpo reflectante sean grandes comparadas con la longitud de onda de la luz de la onda reflejada. En la otra clase de reflexión, denominada **reflexión especular** o *regular*, un estrecho haz de luz se refleja en una dirección única. Este fenómeno tiene lugar en superficies lisas cuyas irregularidades son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la luz. Éste es el caso de la reflexión en un espejo y se cumple que el rayo incidente y la normal al espejo determinan el **plano de incidencia**. Si el rayo incidente forma un ángulo con la normal, el rayo reflejado también está contenido en el plano de incidencia, al otro lado de la normal y formando con ésta un ángulo ' igual al de incidencia:

$$\theta_i = \theta_r \quad (8)$$

es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión (Figura 3).

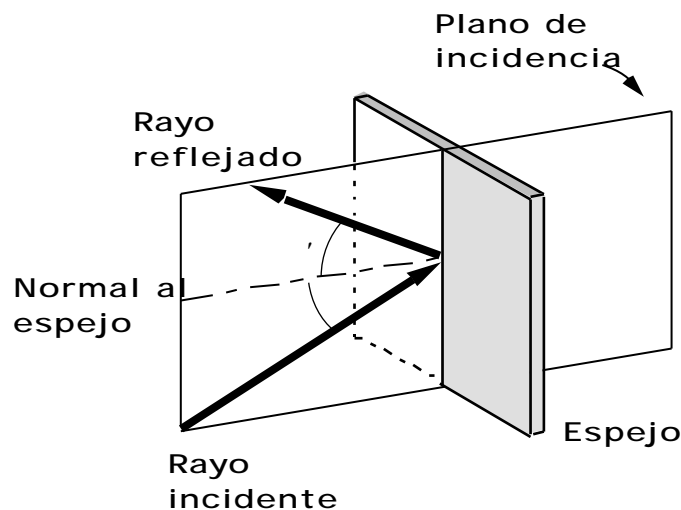


Figura 3

2.4 Refracción de la luz en una superficie

Consideremos una superficie que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 . El rayo refractado se transmite al segundo medio. Dicho rayo refractado está contenido en el plano de incidencia y forma un ángulo θ_2 con la normal a la superficie (Figura 4). El ángulo refractado θ_2 está relacionado con el ángulo incidente θ_1 mediante la **Ley de Snell**:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (9)$$

Asimismo el rayo reflejado cumple la ley de la reflexión.

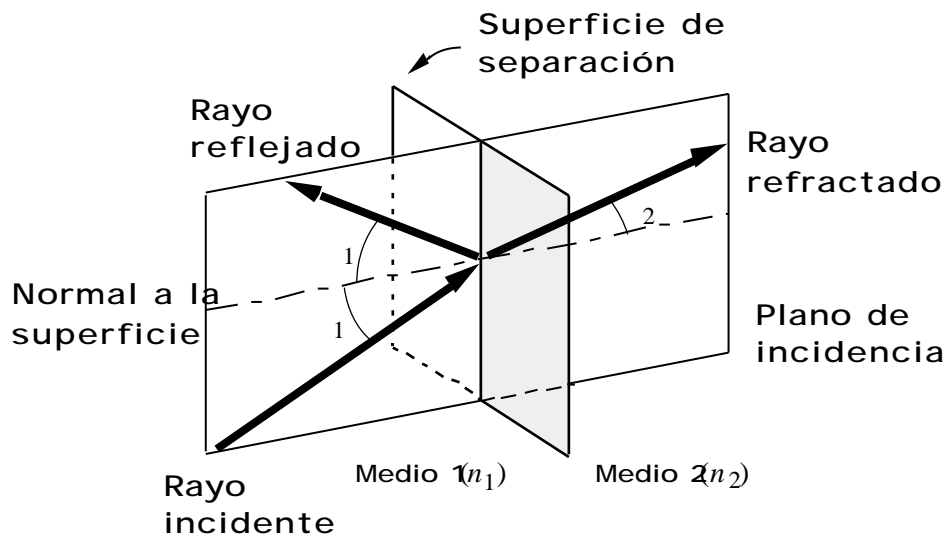


Figura 4

2.5 Convenio de signos

Para las distancias en el eje z a lo largo de cualquier rayo se toma como sentido positivo el de la luz incidente, que siempre será de izquierda a derecha mientras no se advierta lo contrario. De este modo, en la Figura 5 las distancias frontales z_1 y z_2 desde el vértice S al objeto y a la imagen serán positivas si están a la derecha de S y negativas si están a la izquierda, pues para ellas se toma como origen el vértice S .

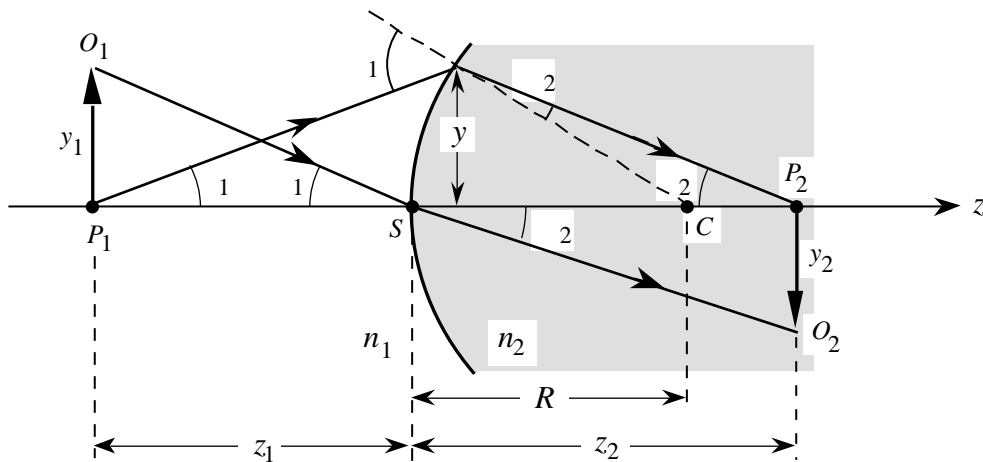
El radio de curvatura R es positivo si el centro de curvatura de la superficie está a la derecha de S , pues su origen se toma también en S .

Los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

Los ángulos de incidencia y refracción de un rayo, θ_1 y θ_2 , serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en el sentido de las agujas del reloj.

Los ángulos con el eje, ϕ_1 y ϕ_2 , son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir por giro con el eje se va en el sentido contrario a las agujas del reloj.

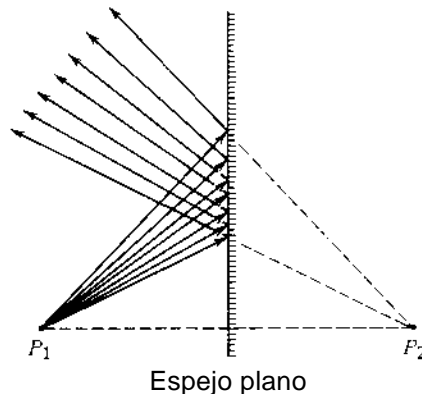
Según lo anterior, en la reflexión θ y θ' serán siempre de signo contrario, $\theta = -\theta'$, lo que equivale a una refracción con índices n y n' tales que $n' = -n$.

**Figura 5**

3.- ESPEJOS

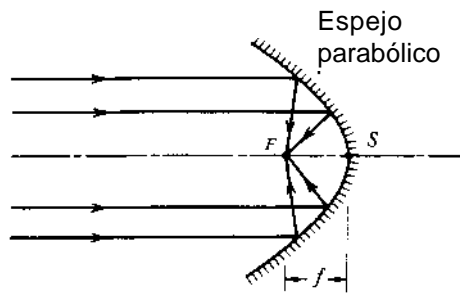
3.1 Espejos planos

Un espejo es una superficie lisa muy reflectante como es el caso de la superficie pulimentada de un metal o un vidrio con sus caras pulidas y de modo que sobre una de éstas se ha depositado una capa de metal. Un espejo plano refleja los rayos provenientes de un punto P_1 de manera que los rayos reflejados parecen provenir de un punto P_2 detrás del espejo denominado imagen. La línea P_1P_2 es perpendicular al plano del espejo y los puntos P_1 y P_2 están a la misma distancia de éste (Figura 6).

**Figura 6**

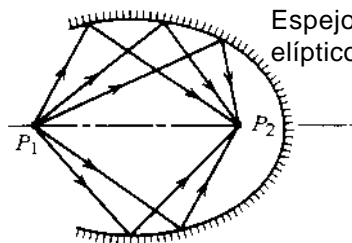
3.2 Espejos parabólicos

La superficie de un espejo parabólico es un paraboloide de revolución. Estos espejos tienen la propiedad de que todos los rayos que inciden paralelos al eje del espejo focalizan en un único punto F denominado *foco* (Figura 7). La distancia $SF = f$ se denomina distancia focal o simplemente *focal*. Los espejos parabólicos suelen usarse como elementos colectores de luz en los telescopios o para producir haces paralelos de luz a partir de fuentes puntuales. En este último caso la fuente de luz se sitúa en el foco del espejo y, por la reversibilidad de las trayectorias de luz, los rayos, tras reflejarse en el espejo, emergen paralelos al eje.

**Figura 7**

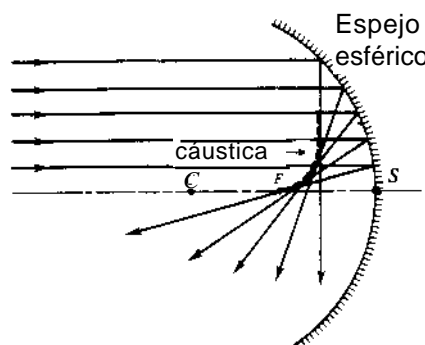
1.3.3 Espejos elípticos

Un espejo elíptico refleja todos los rayos emitidos por uno de sus focos, P_1 , y los focaliza en el otro foco, P_2 (Figura 8). Las distancias recorridas por la luz de P_1 a P_2 a lo largo de cualquier camino son iguales.

**Figura 8**

1.3.4 Espejos esféricos

Un espejo esférico es más fácil de fabricar que uno parabólico o uno elíptico. Sin embargo los espejos esféricos no tienen las propiedades de focalización de los espejos parabólicos o los elípticos, es decir, los rayos de luz paralelos incidentes sobre un espejo esférico no focalizan en un único punto, como se ve en la Figura 9, sino que los rayos paralelos que inciden y se reflejan en el espejo cortan al eje (denominado *eje óptico*) en puntos diferentes; su envolvente (línea punteada) se denomina *cáustica* y en ella se observa siempre una fuerte concentración de luz y por tanto de calor, de ahí su nombre. Sin embargo, para rayos paralelos muy próximos al eje si que se cumple que los rayos reflejados focalizan en un único punto F sobre el eje óptico del espejo a la distancia $R/2$ desde su centro C . Según el convenio de signos que se está considerando R se mide desde el vértice S del espejo, siendo positivo si el centro de curvatura C está a la derecha del vértice S . En la Figura 9 se tiene que $R < 0$.

**Figura 9**

3.5 Rayos paraxiales reflejados por un espejo esférico

Los rayos que inciden con pequeños ángulos reciben el nombre de **rayos paraxiales**. En la aproximación paraxial, donde sólo se consideran rayos paraxiales, los espejos esféricos tienen las mismas propiedades de focalización que los espejos parabólicos y las mismas propiedades de formación de imágenes que los espejos elípticos. Las distintas ecuaciones que resultan una vez aplicada la aproximación paraxial constituyen la **óptica paraxial**, también llamada óptica de primer orden u óptica gaussiana. Como los ángulos son pequeños es posible realizar las siguientes aproximaciones:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{y} \quad \tan \theta \approx \theta \quad (10)$$

Como se ve en la Figura 10, todos los rayos paraxiales provenientes de un punto P_1 sobre el eje de un espejo esférico son reflejados y focalizan en otro punto P_2 también en el eje. En esta figura, y según el convenio de signos que se está considerando, se tiene que $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $z_1 < 0$, $z_2 < 0$ y $R < 0$. Además $z_1 = SP_1 < 0$, $z_2 = SP_2 < 0$ y $R = SC < 0$. Finalmente $y > 0$.

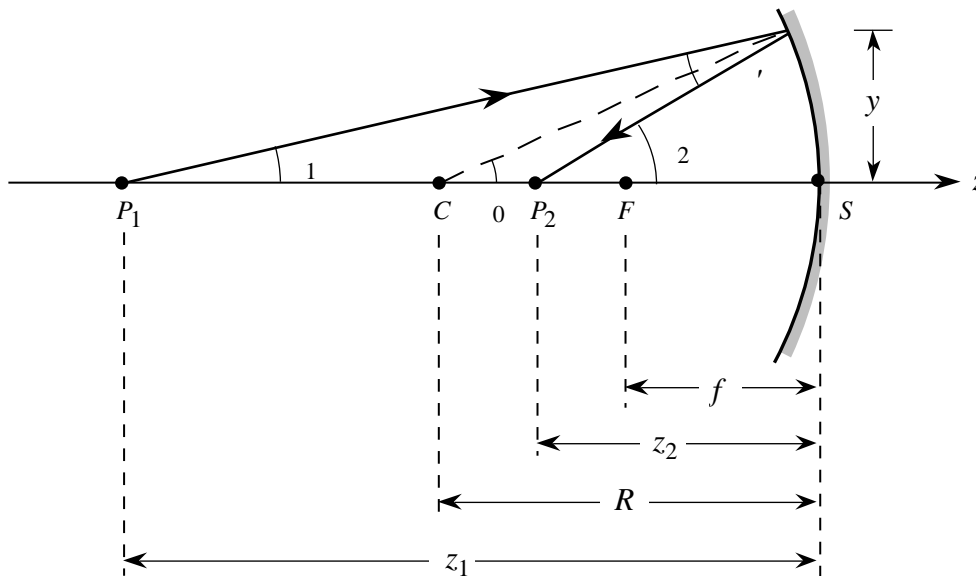


Figura 10

De la Figura 10, y teniendo en cuenta el convenio de signos, se tiene que:

$$\theta_1 = \theta_0 - \theta_2 \quad (11)$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \theta_1 \quad (12)$$

de donde, sumando estas dos ecuaciones queda:

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\theta_0 \quad (13)$$

En la aproximación paraxial $\tan \theta_0 \approx \theta_0$, $\tan \theta_1 \approx \theta_1$ y $\tan \theta_2 \approx \theta_2$, y de la Figura 10 se tiene que:

$$\theta_0 = \frac{y}{R} \quad (14)$$

Sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (13) y reordenando queda:

$$\boxed{z_2 = \frac{2}{R} y - z_1} \quad (15)$$

Como θ_1 y θ_2 son ángulos pequeños pueden aproximarse a su tangente, es decir:

$$\theta_1 \approx \frac{y}{z_1} \quad \theta_2 \approx \frac{y}{z_2} \quad (16)$$

con lo que la ecuación (15) se escribe:

$$\frac{y}{z_2} + \frac{y}{z_1} = \frac{2y}{R} \quad (17)$$

de donde:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2}{R} \quad (18)$$

Por otra parte, si los rayos que provienen del infinito ($z_1 = \infty$) focalizarán en un punto F a la distancia $z_2 = R/2$. Esto significa que en la aproximación paraxial todos los rayos que provienen del infinito (paralelos al eje del espejo) focalizan en un punto a una distancia f que es la **focal del espejo**:

$$f = \frac{R}{2} \quad (19)$$

Teniendo esto en cuenta es posible escribir finalmente la ecuación (18) en la forma:

$$\boxed{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}} \quad (20)$$

que es la **relación objeto-imagen para un espejo esférico en la aproximación paraxial**.

Cuando $z_1 = R/2 = f$, la distancia imagen es $z_2 = \infty$, siendo ésta la situación inversa al caso anterior. Ahora los rayos que parten del punto F , después de reflejarse en el espejo, se propagan hacia la izquierda paralelamente al eje óptico. Este es un caso particular del *principio de reversibilidad óptica* que establece que si el sentido del rayo se invierte, éste seguirá la trayectoria de incidencia. El plano perpendicular al eje óptico y que contiene al foco F recibe el nombre de *plano focal*.

Si el punto objeto P_1 de coordenadas (y_1, z_1) no está sobre el eje óptico del espejo (Figura 11) y después de reflejarse los rayos de luz en el espejo, éstos van a parar a un punto P_2 de coordenadas (y_2, z_2) , entonces z_1 y z_2 satisfacen la ecuación (20), mientras que es fácil comprobar que y_1 e y_2 verifican la relación:

$$y_2 = -y_1 \frac{z_2}{z_1} \quad (21)$$

pues de la Figura 11 se tiene que $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $z_1 < 0$ y $z_2 < 0$. Esto significa que los rayos que parten de un punto del plano $z = z_1$ van a parar, tras la reflexión en el espejo, a un punto

del plano $z = z_2$, de manera que el espejo actúa como un sistema formador de imágenes con un **aumento lateral**:

$$m = -\frac{z_2}{z_1} \quad (22)$$

donde el aumento lateral m se define como el cociente entre el tamaño de la imagen y_2 entre el tamaño del objeto y_1 , $m = y_2/y_1$. La imagen formada por un espejo plano es una imagen *derecha* y su aumento es positivo. Sin embargo, un aumento negativo indica que la imagen es *invertida* respecto al objeto.

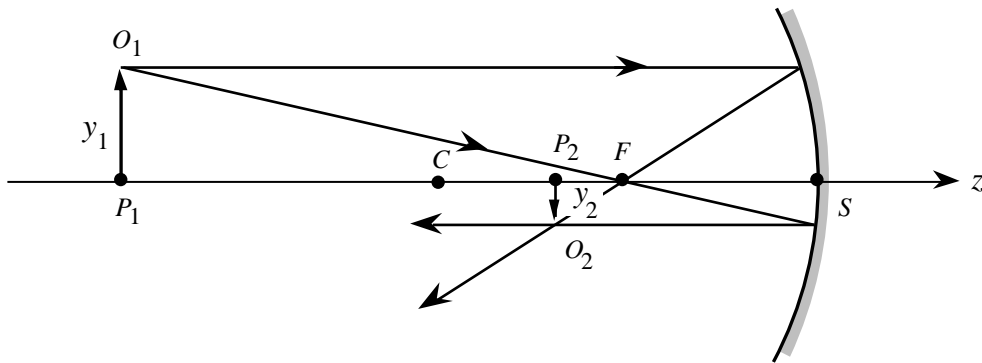


Figura 11

La imagen de un objeto extenso también puede obtenerse mediante una construcción gráfica como se ha hecho en la Figura 12, en la que se han considerado tres rayos: (1) El rayo que incide paralelo al eje pasará, después de la reflexión, por el foco F del espejo; (2) un rayo que parta del foco F emergerá, después de reflejarse en el espejo, paralelo al eje; y, por último, (3) un rayo que pase por el centro del espejo C regresará, después de la reflexión, por el mismo camino, pues en ese caso el ángulo de incidencia, y por tanto el de reflexión, es nulo. En la Figura 12 puede verse que la imagen se forma mediante rayos que pasan realmente por la posición donde ésta se encuentra, este tipo de imagen se denomina *imagen real*, siendo posible proyectarla en una pantalla. Por el contrario, una *imagen virtual* se forma trazando la prolongación hacia atrás de las trayectorias de los rayos, como ocurría en el espejo plano de la Figura 6, y no se puede observar en una pantalla, pues los rayos no pasan por la posición de la imagen.

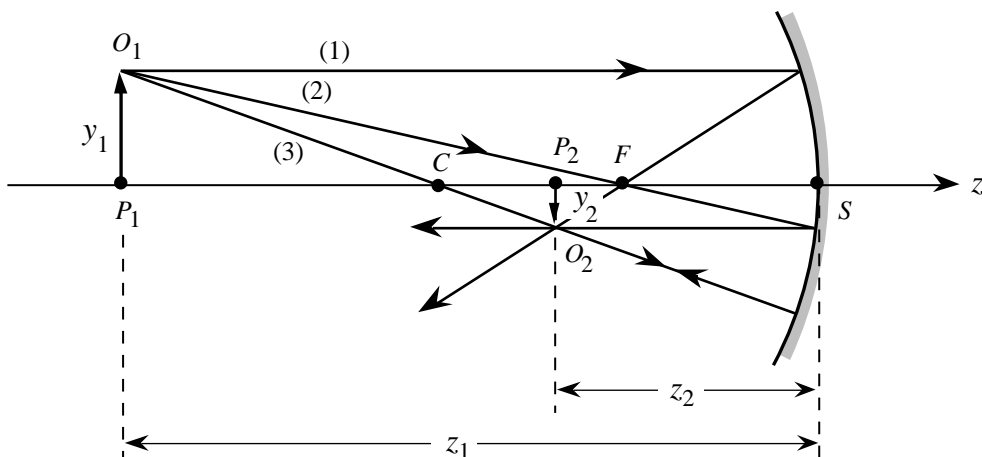


Figura 12

La Figura 13 muestra que si el objeto P_1O_1 está a una distancia z_1 menor que f , los rayos que provienen del objeto divergen después de incidir en el espejo, y la imagen P_2O_2 es virtual.

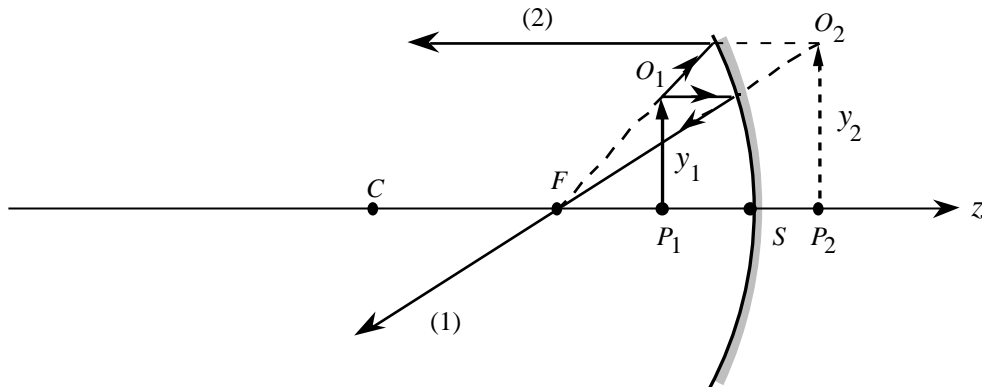


Figura 13

4.- REFRACCION EN SUPERFICIES PLANAS

La relación entre los ángulos de refracción θ_2 e incidencia θ_1 en una superficie plana que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 está gobernada por la Ley de Snell (ecuación (9)). Esta relación se muestra en la Figura 14 para dos casos:

- Refracción externa ($n_1 < n_2$): $\theta_2 < \theta_1$
- Refracción interna ($n_1 > n_2$): $\theta_2 > \theta_1$

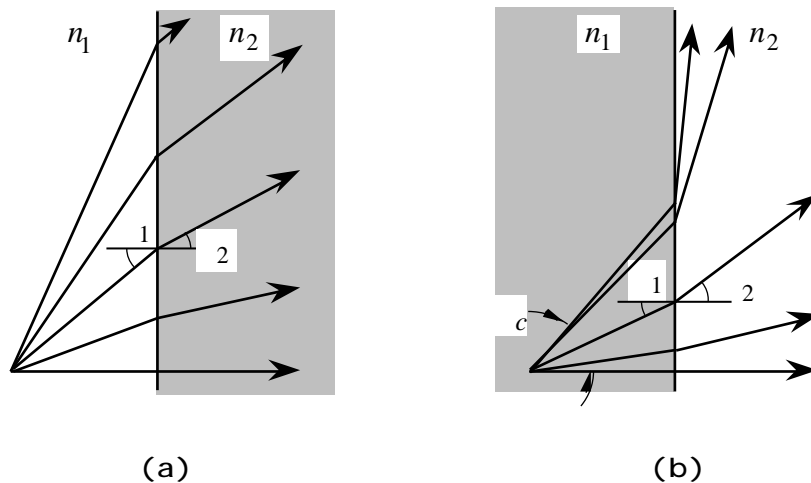


Figura 14

En ambos casos, cuando los ángulos son pequeños (rayos paraxiales), la relación entre θ_1 y θ_2 es aproximadamente lineal.

De la Ecuación (9), y teniendo en cuenta que para ángulos pequeños se cumple $\sin \theta \approx \theta$, queda la Ley de Snell en la aproximación paraxial:

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (23)$$

de donde:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (24)$$

4.1 Reflexión total

Para el caso de refracción interna ($n_1 > n_2$) el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia ($\theta_2 > \theta_1$), de modo que conforme el ángulo de incidencia θ_1 aumenta, el ángulo de refracción θ_2 se acerca al valor de 90° . Cuando esto sucede, es decir, cuando $\theta_2 = 90^\circ$, el ángulo de incidencia recibe el nombre de **ángulo crítico** $\theta_c = \theta_1$ y se cumple la condición $n_1 \sin \theta_c = n_2$, y por tanto:

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (25)$$

En el caso de refracción interna, cuando el ángulo de incidencia supera al ángulo crítico ($\theta_1 > \theta_c$) la Ley de Snell no puede satisfacerse (Figura 15), no hay refracción de la luz y el rayo incidente es totalmente reflejado como si la superficie de separación de los dos medios fuera un espejo perfecto. Este fenómeno, que recibe el nombre de *reflexión total*, es la base de muchos dispositivos ópticos tales como el prisma de reflexión total (Figura 16 (a)), el prisma de porro (Figura 16 (b)) y las fibras ópticas (Figura 16 (c)).

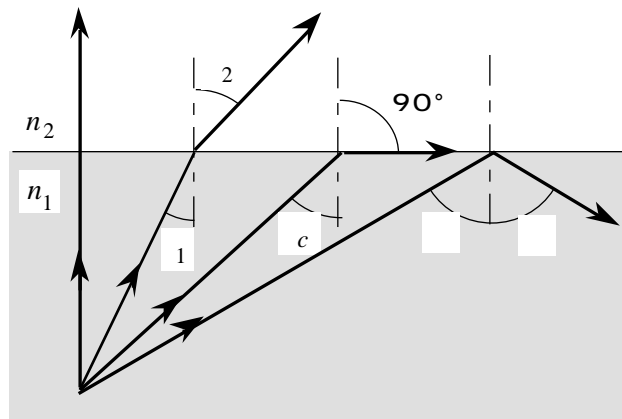


Figura 15

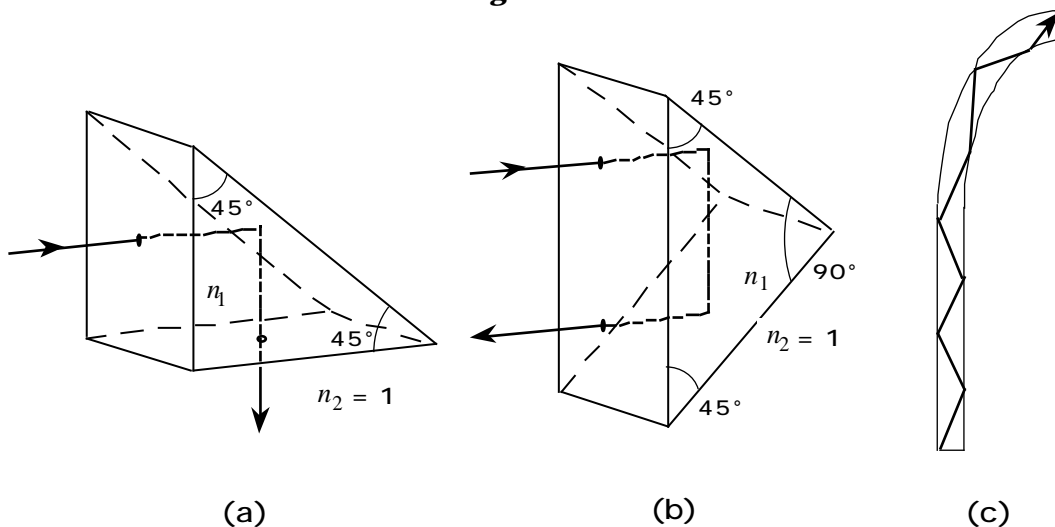


Figura 16

4.2 Prismas

Un prisma de ángulo de refringencia α e índice de refracción n (Figura 17) deflece o desvía un rayo que incide sobre él formando un ángulo i con la normal a una de las caras, un ángulo δ que recibe el nombre de **ángulo de desviación**.

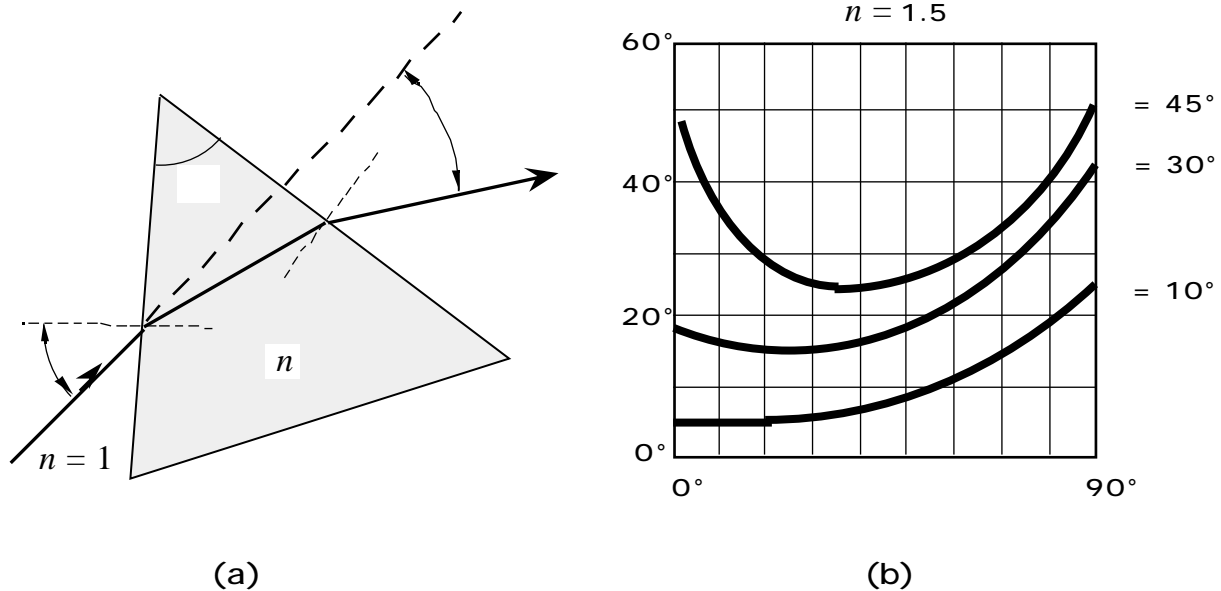


Figura 17

Por convenio el ángulo de refringencia α se toma positivo si al llevar por giro con eje la arista de la primera cara sobre la segunda se va en sentido antihorario. En cuanto al ángulo δ , éste se toma como positivo si al llevar el rayo emergente sobre el incidente se va en el sentido antihorario. En la Figura 17 (a) se tiene que $\alpha > 0$, $i > 0$ y $\delta > 0$. Aplicando la Ley de Snell a las dos caras del prisma es fácil comprobar que se cumple:

$$\delta = i - e + \alpha = \alpha + \arcsin(\sqrt{n^2 - \sin^2 e}) - \arcsin(\sin i) \quad (26)$$

Esta ecuación se ha representado en la Figura 17 (b) para tres valores del ángulo de refringencia.

Cuando el ángulo α es pequeño (**prisma delgado**) y i también es pequeño, se obtiene para la desviación la ecuación:

$$\delta \approx (n - 1)\alpha \quad (27)$$

de donde, para incidencias i próximas a la normal y si el prisma es delgado, la desviación angular δ es independiente del ángulo de incidencia i y proporcional al ángulo de refringencia α (Figura 17 (b)).

4.3 Dispersión cromática

Una característica importante de una sustancia es que su índice de refracción n depende del color de la luz, es decir, de la longitud de onda λ , de modo que $n = n(\lambda)$. Por esta razón, cuando se deducen las fórmulas del prisma siempre se supone que la luz incidente es monocromática. Para la luz visible puede determinarse $n(\lambda)$ experimentalmente con suficiente aproximación mediante la ecuación:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (28)$$

que es la **fórmula de Cauchy** y en la que A y B son constantes características de cada sustancia. Si la luz incidente sobre un prisma es blanca, entonces éste da lugar a un ángulo de desviación diferente para cada longitud de onda, es decir, $\theta = \theta(\lambda)$, como se ve en la Figura 18 (a). Este fenómeno recibe el nombre de **dispersión cromática**. Para luz blanca, una medida cómoda de la desviación la proporciona el ángulo de desviación de la luz amarilla, puesto que este color equidista aproximadamente del rojo y del violeta. El ángulo formado por los rayos rojo y violeta proporciona una medida sencilla de la dispersión. La Figura 18 (b) muestra la variación del índice de refracción con la longitud de onda para varias sustancias utilizadas frecuentemente en Óptica.

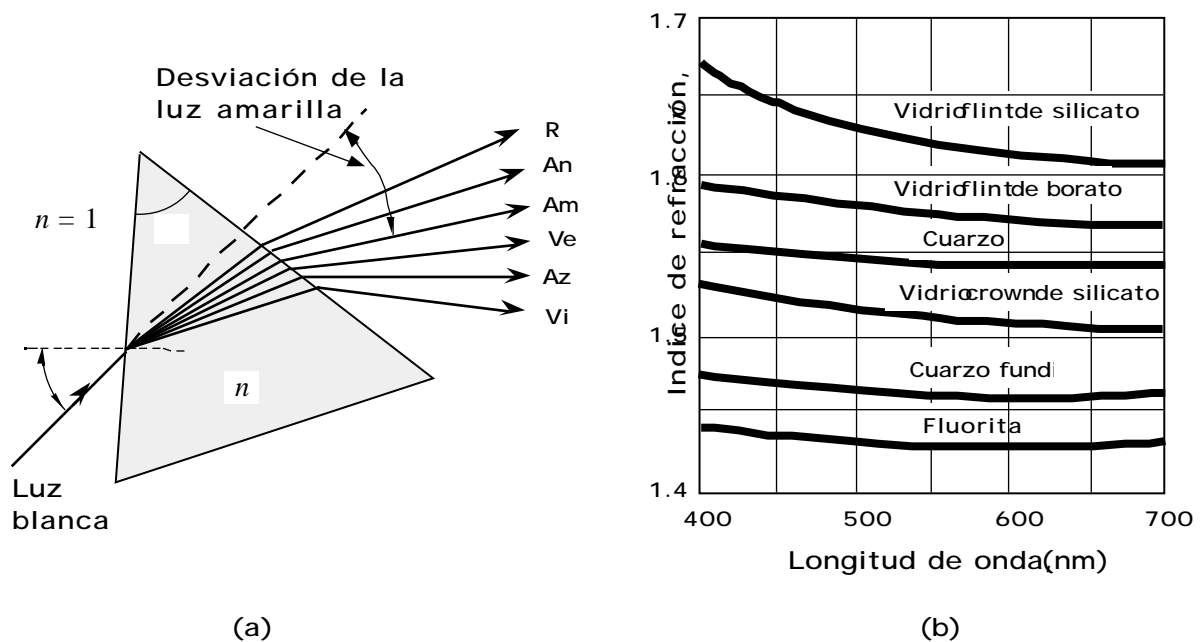


Figura 18

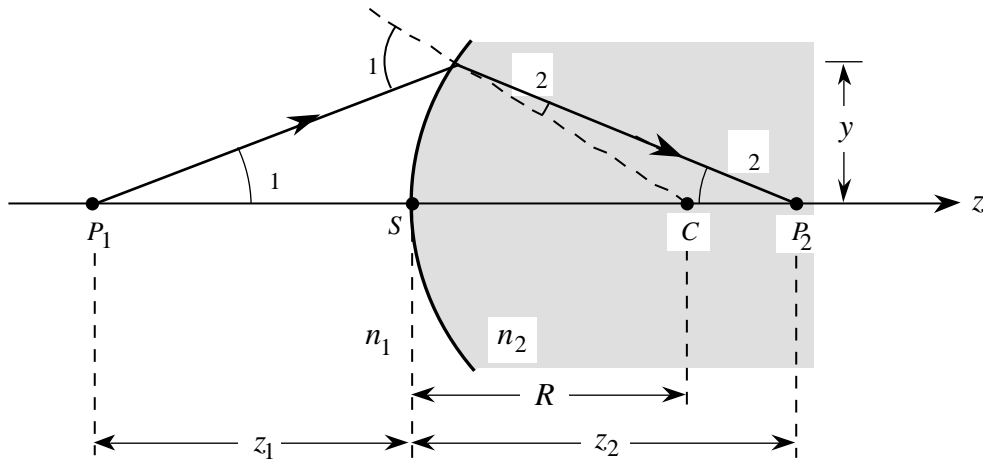
5.- REFRACCION EN SUPERFICIES ESFERICAS

5.1 Dioptrio esférico

A continuación se va a estudiar la refracción de rayos por una superficie esférica de radio R que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 y que se conoce como dioptrio esférico. Únicamente se van a considerar la refracción de rayos paraxiales, de modo que para los ángulos es posible realizar las aproximaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\tan \theta \approx \theta$.

Un rayo que forma un ángulo θ_1 con el eje óptico z incide en un punto de altura y , medida sobre dicho eje, se refracta y cambia de dirección formando ahora un ángulo θ_2 con el eje z . De la Figura 19 se tiene $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$, $y > 0$ y $R < 0$. Aplicando la Ley de Snell y teniendo en cuenta que se están considerando rayos paraxiales es fácil comprobar que se cumple:

$$\theta_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} y + \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (29)$$

**Figura 19**

Todos los rayos paraxiales que provienen de un punto objeto $P_1(y_1, z_1)$ del plano $z = z_1$ van a parar a un punto $P_2(y_2, z_2)$ en el plano $z = z_2$ (Figura 20) de modo que es fácil comprobar que se satisface la ecuación:

$$-\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (30)$$

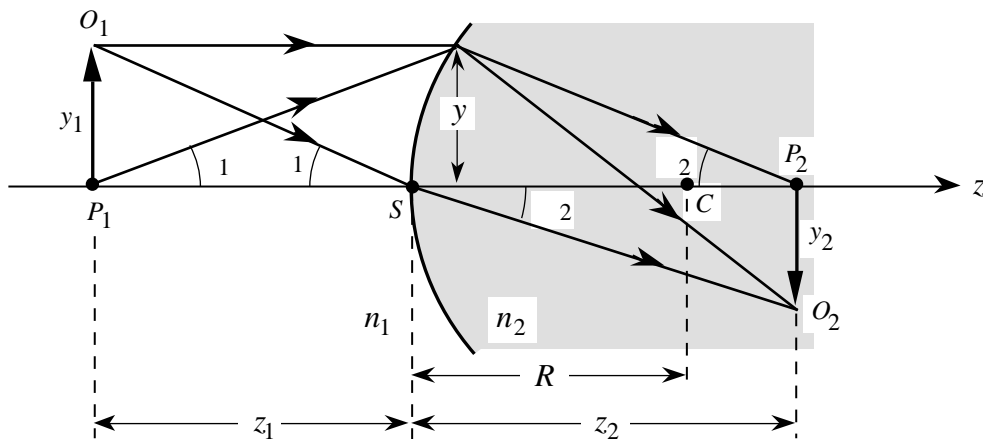
Además se cumple que:

$$y_2 = \frac{n_1}{n_2} \frac{z_2}{z_1} y_1 \quad (31)$$

Se dice que los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ son un par de **planos conjugados** y a cada punto objeto del plano $z = z_1$ le corresponde un punto imagen en el segundo plano $z = z_2$ con un aumento lateral m dado por la ecuación:

$$m = \frac{n_1}{n_2} \frac{z_2}{z_1} \quad (32)$$

De la Figura 20 se tiene que $z_1 < 0$ y $z_2 > 0$, luego $m < 0$. Un aumento negativo implica una imagen invertida.

**Figura 20**

5.2 Lentes

Un trozo de vidrio puede pulirse o esmerilarse convenientemente hasta presentar una superficie suave, frotándolo con una serie de polvos arenosos de tamaño de grano cada vez menor. Así, la naturaleza del proceso de pulido hace más fácil el proceso de fabricación de superficies esféricas. Cuando una lámina de vidrio presenta una superficie esférica por uno o ambos lados, se tiene una *lente*. Una *lente esférica* está limitada por dos superficies esféricas de radios R_1 y R_2 cuyo espesor es d y el índice de refracción de la misma es n (Figura 21). Una lente en aire puede analizarse como una combinación de dos superficies esféricas, la primera que separa el aire y el vidrio y la segunda el vidrio y el aire.

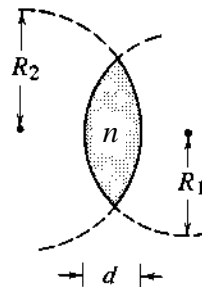


Figura 21

Se va a considerar únicamente el caso de lentes delgadas que son aquellas para las que el espesor d es despreciable frente a cada uno de sus radios de curvatura. En esta situación un rayo que incide a una altura y_1 sobre la lente (Figura 22), sale prácticamente a una altura $y_2 = y_1$. Teniendo esto en cuenta y aplicando dos veces la ecuación (29), una para cada superficie de la lente (primero al sistema aire-vidrio y después al sistema vidrio-aire), se obtiene:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (33)$$

donde f' es la *focal imagen de la lente* y viene dada por la ecuación:

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (34)$$

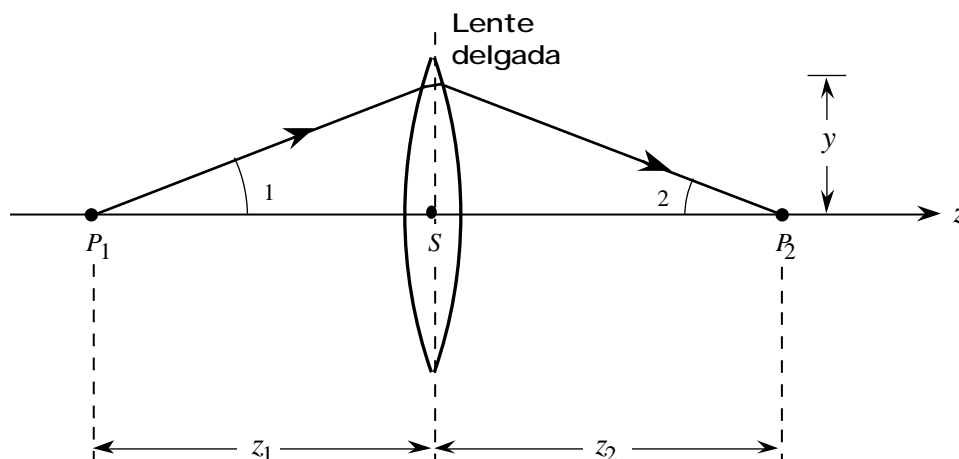
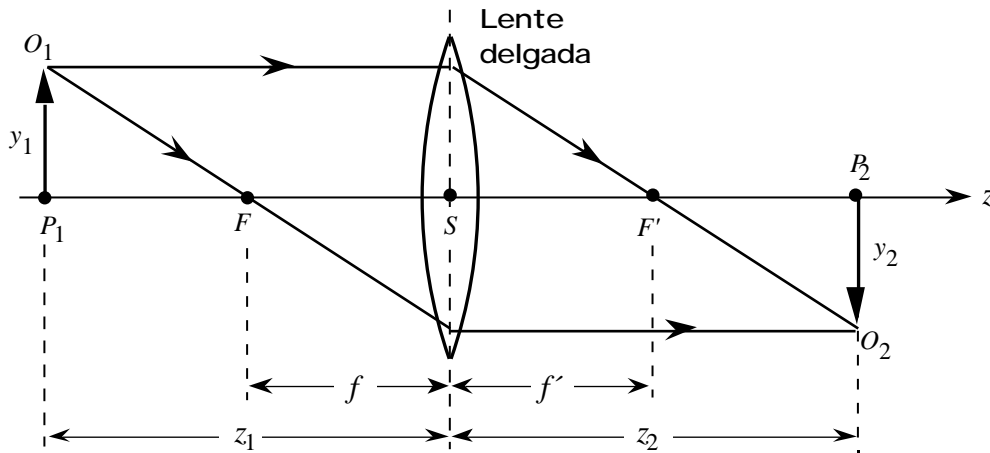


Figura 22

**Figura 23**

Además, los rayos que parten de un punto $P_1(y_1, z_1)$ del plano objeto van a parar a otro punto $P_2(y_2, z_2)$ del plano imagen (Figura 23), de modo que:

$$-\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f'} \quad (35)$$

siendo:

$$y_2 = \frac{z_2}{z_1} y_1 \quad (36)$$

Esto significa que cada punto del plano $z = z_1$ va a parar a un punto del plano $z = z_2$ con un aumento lateral para ese par de **planos conjugados** (uno imagen del otro):

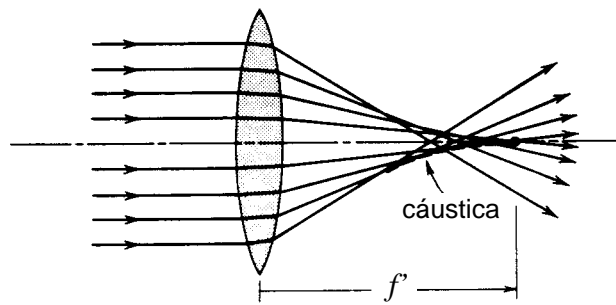
$$m = \frac{z_2}{z_1} \quad (37)$$

En la Figura 23 se tiene que $f' > 0$ y la lente se dice que es **convergente**, mientras que si $f' < 0$, la lente es **divergente**.

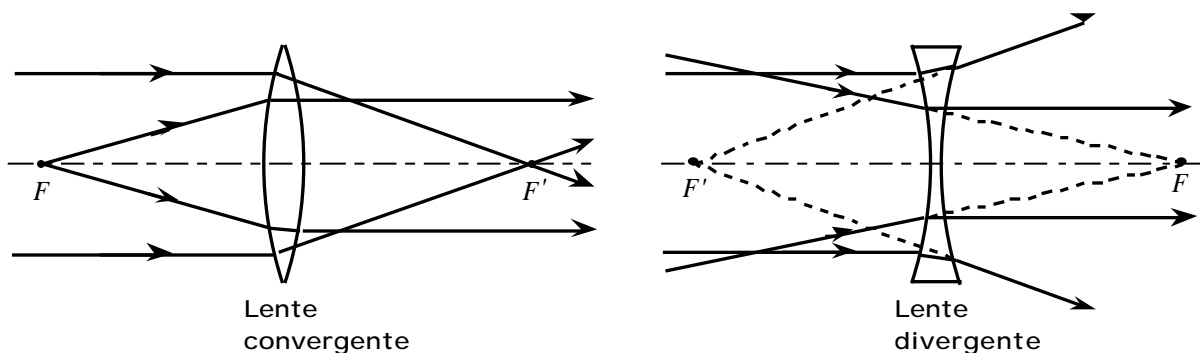
Es importante tener en cuenta que las ecuaciones de las lentes anteriores sólo son válidas para rayos paraxiales y que las distancias sobre el eje se toman $z_1 = OP_1$, $z_2 = OP_2$ y $f' = OF'$, siendo F' el **foco imagen** de la lente. Tanto el foco objeto como el foco imagen están sobre el **eje óptico** de la lente, que es la línea que pasa por los centros de curvatura de las dos superficies de la lente.

La utilización de rayos no paraxiales da lugar a la aparición de aberraciones, como se ve en la Figura 24, en la que se ha representado la **aberración esférica** en la que los rayos no paraxiales que provienen del infinito e inciden paralelos al eje de la lente no focalizan en el foco imagen (paraxial) F' .

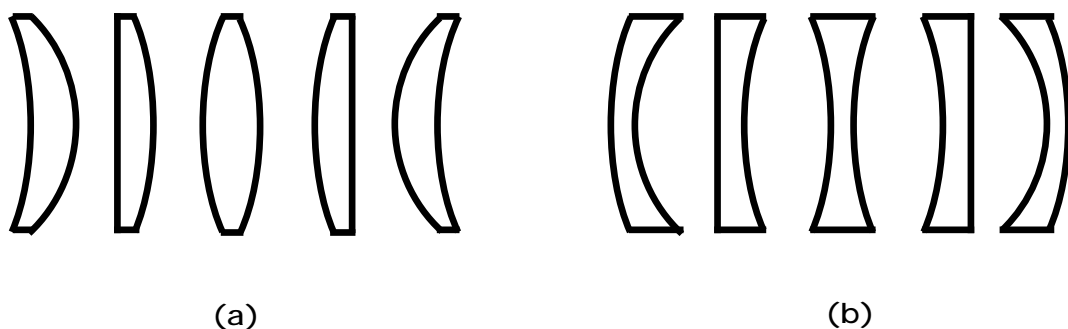
De la ecuación (35) se deduce que todos los rayos que parten de un punto F sobre el eje situado a una distancia $f = -f'$, tras atravesar la lente, emergen paralelos al eje. F recibe el nombre de **foco objeto**, mientras que $f = SF$ es la **focal objeto** de la lente. Todas las lentes tienen un foco objeto F y una **focal objeto** $f = OF$. Si la lente de índice de refracción n está rodeada por un único medio, entonces se cumple que $f = -f'$. Los planos perpendiculares al eje óptico y que contienen a los focos objeto e imagen de una lente se denominan **planos focales** objeto e imagen, respectivamente.

**Figura 24**

Como se ve en la Figura 25, para una lente convergente los rayos que parten del foco objeto F , salen paralelos al eje después de atravesar la lente, mientras que los rayos que inciden sobre la lente paralelos al eje focalizan en el foco imagen F' . Sin embargo, en una lente divergente los rayos que inciden dirigiéndose hacia F salen de la lente como rayos paralelos al eje.

**Figura 25**

En la Figura 26 se han representado varios tipos de lentes, tanto **convergentes** (menisco convergente, plano convexa y biconvexa) como **divergentes** (menisco divergente, plano cóncava y bicóncava).

**Figura 26**

5.3 Trazado gráfico de rayos en lentes delgadas

La posición y el tamaño de la imagen de un objeto formada por una lente delgada pueden encontrarse trazando una serie de rayos a través de la lente. Este método gráfico consiste en determinar el punto de intersección, después de atravesar la lente, de algunos rayos que parten de un punto determinado del objeto.

En la aproximación paraxial todos los rayos procedentes de este punto, que atraviesen la lente, se cortarán en el mismo punto. Al utilizar el método gráfico se supone que la desviación de cualquier rayo tiene lugar en un plano que pasa por el centro de la lente. Hay tres rayos cuyas trayectorias se dibujan fácilmente y que son un *rayo paralelo al eje*, un *rayo que pasa por el centro de la lente* y un *rayo que pasa por (o se dirige hacia) el foco objeto*. Las Figuras 27 y 28 representan la trayectoria de estos rayos para una lente convergente. Un rayo paralelo al eje se desvía, después de la refracción por la lente, de modo que pasa por el punto focal imagen F' de la lente. Un rayo central que pasa por el centro de la lente no sufre desviación (la lente es delgada). Por último, un rayo focal que pasa por el punto focal objeto F de la lente emerge paralelo al eje.

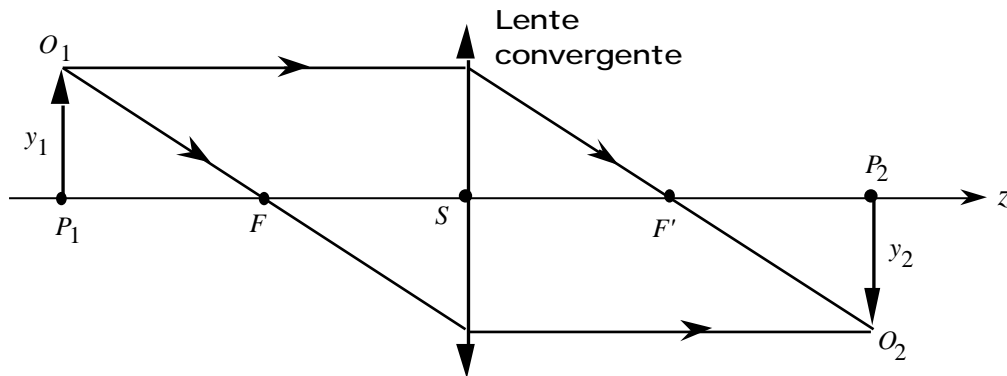


Figura 27

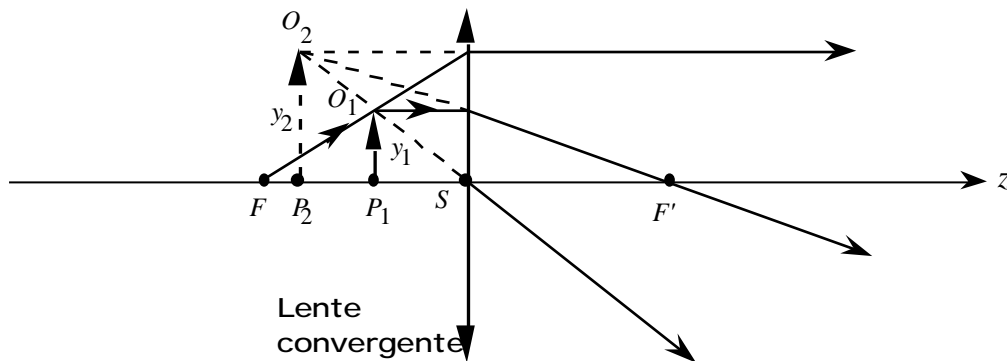


Figura 28

Para una lente divergente (Figuras 29 y 30), un rayo paralelo al eje que atraviesa la lente, emerge de ésta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen de la lente, es decir, el rayo emerge como si procediese del punto focal imagen F' de la lente. Un rayo central que pasa por el centro de la lente no sufre desviación (la lente es delgada). También se puede dibujar un rayo focal que se dirige hacia el punto focal objeto F de la lente, de modo que, tras atravesar la lente, emerge paralelo al eje.

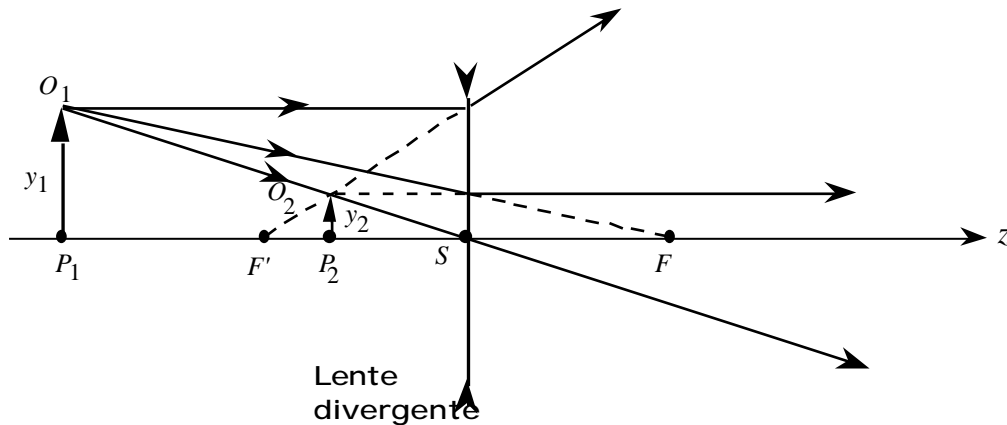


Figura 29

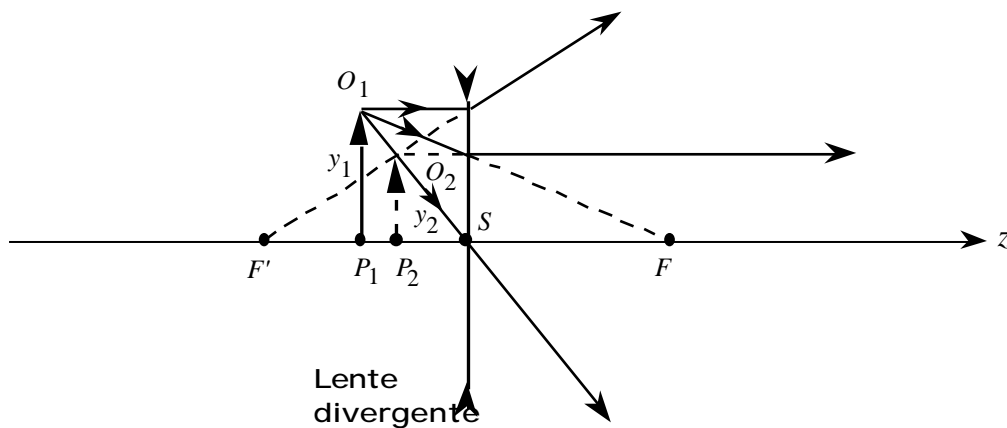


Figura 30

5.4 Puntos y planos principales

Un conjunto de superficies que separan medios de distintos índices constituye un **sistema óptico**. Si estas superficies son de revolución respecto a un mismo eje, se llama **sistema de revolución**. Tal es el caso de los espejos y dioptrios esféricos que se han analizado en los apartados anteriores. Los sistemas más usados en óptica son los **sistemas centrados**, formados por superficies esféricas con los centros alineados, como es el caso de las lentes. La recta de centros recibe el nombre de **eje óptico** del sistema.

Se considera como **espacio objeto** de un sistema todo el espacio geométrico donde puede haber objetos, tanto reales como virtuales, y **espacio imagen** el espacio geométrico donde pueden existir imágenes reales o virtuales; por tanto, todo espacio es a la vez espacio objeto y espacio imagen.

En los sistemas ópticos existen una serie de pares de puntos y de pares de planos que tienen especial importancia, unos de ellos son los **focos** y los **planos focales**, que se han obtenido para espejos esféricos, dioptrios y lentes delgadas (en zona paraxial). Otro par de puntos y planos conjugados de importancia son los **puntos principales** y los **planos principales**. Un par de planos conjugados cuyo aumento lateral m es igual a $+1$ se denominan planos principales, y a la intersección de estos planos con el eje del sistema se les llama puntos principales H y H' . Para un dioptrio esférico es fácil comprobar, utilizando las ecuaciones (31) y (32), que los planos principales coinciden y están situados en el vértice de la superficie. En el caso de una lente delgada también es fácil comprobar que los planos principales también coinciden y los puntos principales están situados en el punto S (Figura 22).

6.- FORMULACION MATRICIAL DE LA OPTICA GEOMETRICA

En la formulación matricial de la óptica geométrica, y en la aproximación paraxial, un rayo viene determinado por su altura y respecto al eje óptico (altura de incidencia), así como por el ángulo θ con el eje (Figura 31). En la aproximación paraxial la altura de incidencia y el ángulo con el eje, en los planos de entrada y salida de un sistema óptico, están relacionados mediante dos ecuaciones algebraicas lineales, y el sistema óptico puede describirse mediante una matriz 2×2 denominada **matriz de transferencia**.

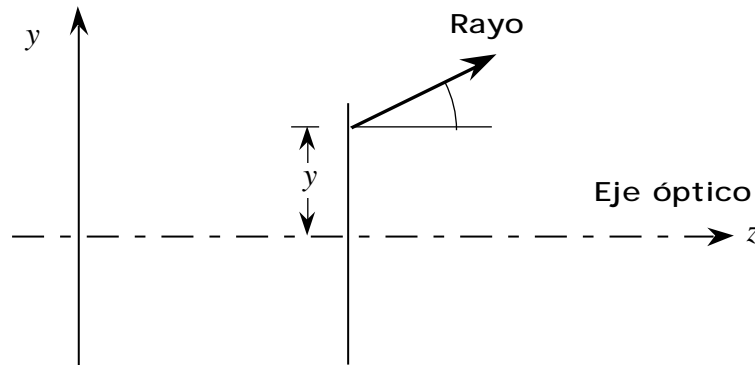


Figura 31

La ventaja de la utilización de la óptica matricial estriba en el hecho de que la matriz de transferencia de una sucesión de componentes ópticos (o sistemas) es el producto de las matrices de transferencia de los componentes ópticos (o sistema).

Consideremos un sistema óptico de revolución (todas las superficies son de revolución respecto a un mismo eje) formado por una sucesión de superficies refractantes y reflectantes, todas ellas centradas sobre el mismo eje (el eje óptico del sistema) que tomaremos como el eje z (Figura 32). Si el sistema está limitado por dos planos perpendiculares al eje óptico, determinados por las coordenadas z_1 y z_2 y denominados plano de entrada y plano de salida, respectivamente, entonces el sistema está completamente caracterizado por su efecto sobre un rayo incidente en una posición y dirección arbitrarias (y_1, θ_1). Este sistema modifica la altura sobre el eje y la dirección de este rayo que en el plano de salida son (y_2, θ_2).

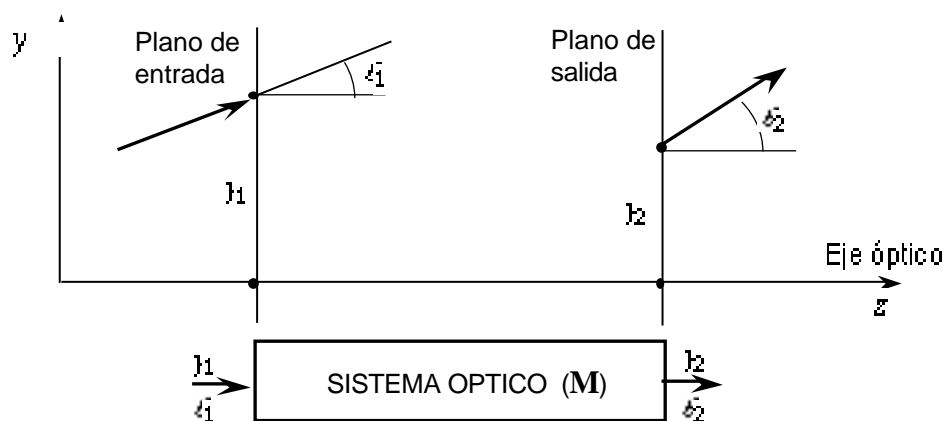


Figura 32

En la **aproximación paraxial**, cuando los ángulos son lo suficientemente pequeños para que $\sin \theta \approx \theta$ y $\tan \theta \approx \theta$, la relación entre (y_1, θ_1) y (y_2, θ_2) es lineal y puede escribirse:

$$\begin{aligned} y_2 &= Ay_1 + B \\ \theta_2 &= Cy_1 + D \end{aligned} \quad (38)$$

donde A, B, C y D son números reales. Las ecuaciones anteriores pueden agruparse en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

La matriz **M** cuyas componentes son A, B, C y D es la matriz de transferencia del sistema:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (40)$$

y permite determinar (y_2, θ_2) si se conocen (y_1, θ_1) .

6.1 Propagación en el espacio libre

En el espacio libre los rayos son líneas rectas de modo que un rayo que recorre una distancia d viene determinado por las ecuaciones $y_2 = y_1 + \theta_1 d$, $\theta_2 = \theta_1$, de manera que la matriz de transferencia, conocida como *matriz de traslación*, toma la forma (Figura 33):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

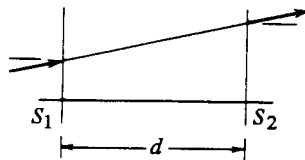


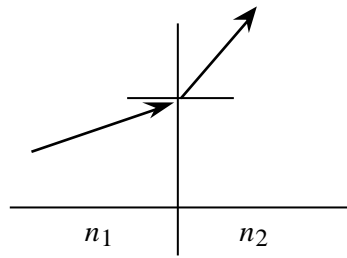
Figura 33

(en la Figura 33 $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$ y $d = S_1 S_2 > 0$).

6.2 Refracción en una superficie plana

En una superficie plana que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 , los ángulos de incidencia y de refracción están relacionados por la Ley de Snell (ecuación 9) $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, que en la aproximación paraxial se escribe (ecuación 23) $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$. Sin embargo, la altura del rayo no cambia ($y_2 = y_1$). La matriz de transferencia será entonces (Figura 34):

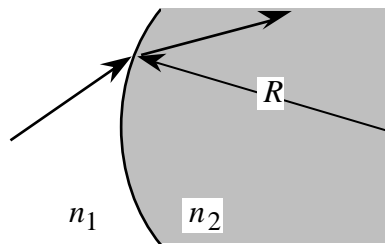
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (42)$$

**Figura 34**

6.3 Refracción en una superficie esférica

La relación entre los ángulos θ_1 y θ_2 para rayos paraxiales refractados en una superficie esférica de radio R que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 viene dada por la ecuación (29), mientras que la altura del rayo no cambia ($y_2 = y_1$). Entonces la matriz de transferencia, llamada *matriz refracción*, se escribe (Figura 35):

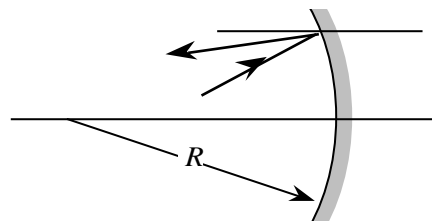
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

**Figura 35**

6.4 Reflexión en un espejo esférico

De la ecuación (15) que relaciona los ángulos θ_1 y θ_2 en la aproximación paraxial para un espejo esférico y teniendo en cuenta que la altura del rayo no cambia ($y_2 = y_1$), se obtiene (Figura 36):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

**Figura 36**

Esta ecuación puede obtenerse de la matriz refracción (ecuación (43)) suponiendo que una reflexión es equivalente a una refracción con índices n_1 y n_2 tales que $n_2 = -n_1$.

6.5 Reflexión en un espejo plano

En un espejo plano la altura del rayo no cambia y por tanto $y_2 = y_1$. Adoptando el convenio de signos que se viene utilizando se tendrá que $\theta_2 = -\theta_1$, de modo que la matriz de transferencia será (Figura 37):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

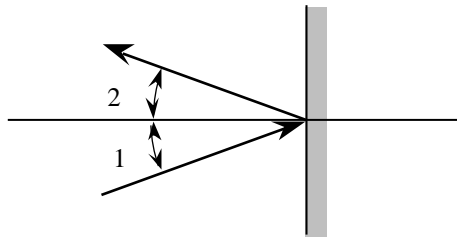


Figura 37

6.6 Transmisión a través de una lente delgada

La relación entre θ_1 y θ_2 en una lente delgada, y para el caso de rayos paraxiales, viene dada por la ecuación (33), mientras que la altura del rayo no cambia $y_2 = y_1$ (Figura 38). Por tanto la matriz de transferencia será:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

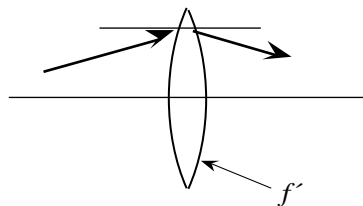


Figura 38

6.7 Matriz para una sucesión de componentes ópticos

Una sucesión de componentes ópticos cuyas matrices de transferencia son \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , ..., \mathbf{M}_N es equivalente a un único componente óptico cuya matriz de transferencia \mathbf{M} viene dada por la ecuación (Figura 39):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_N \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \quad (47)$$

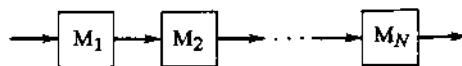


Figura 39