28/11/2022 1 Luis Ricardo Reyes Villar

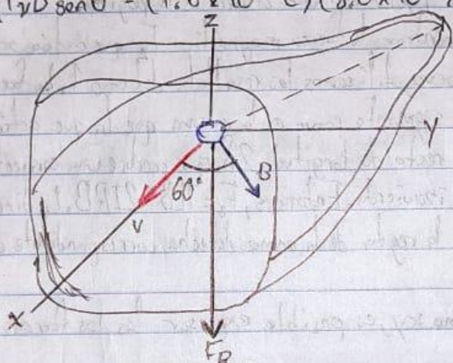
Un electrón, en el interior de un cinescopio de televisión, se mueve a lo largo del eje de las x hacia la parte frontal del tubo a una velocidad de 8.0×10^6 m/s (figura 7.5). Alrededor del cuello del cinescopio existen bobinas de alambre que generan un campo magnético en el plano xy de magnitud 0.025 T, dirigido de manera que forma un ángulo de 60° con el eje de las x.

(A) Utilizando la ecuación 7.2, calcule la fuerza magnética que actúa sobre el electrón.

Solución.

Utilizando la ecuación 7.2 se determina la magnitud de la fuerza magnética:

$$F_B = |q| v B \operatorname{sen}\theta = (1.6 \times 10^{-19} C)(8.0 \times 10^6 m/s)(0.025 T)(\operatorname{sen} 60°) = \underline{2.8 \times 10^{-14} N}$$



Dado que $v \times B$ está en la dirección positiva de z (según la regla de la mano derecha) y la carga es negativa, F_B aparece en la dirección de z negativa.

(B) Utilizando la ecuación 7.1, deduzca una expresión vectorial para la fuerza magnética que actúa sobre el electrón.

Solución

Empezamos escribiendo una expresión vectorial para la velocidad del electrón:

$$v = (8.0 \times 10^6 \hat{\imath})\ m/s$$

y una para el campo magnético:

$$B = (0.025 \cos 60° \hat{\imath} + 0.025 \operatorname{sen} 60° \hat{\jmath}) T = (0.013 \hat{\imath} + 0.022 \hat{\jmath}) T$$

La fuerza sobre el electrón, de la ecuación 7.1, es igual a

$$F_B = qv \times B = (-e)[(8.0 \times 10^6 \hat{\imath}) m/s] \times [(0.013 \hat{\imath} + 0.022 \hat{\jmath}) T] = (-e)[(8.0 \times 10^6 \hat{\imath}) m/s] \times [(0.013 \hat{\imath}) T] + (-e)[(8.0 \times 10^6 \hat{\imath}) m/s] \times [(0.022 \hat{\jmath}) T] = (-e)(8.0 \times 10^6 m/s)(0.013 T)(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + (-e)(8.0 \times 10^6 m/s)(0.022 T)(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) = (-1.6 \times 10^{-19} C)(8.0 \times 10^6 m/s)(0.022 T)\hat{k}$$

donde hemos usado las ecuaciones 11.7a y 11.7b del volumen I para evaluar $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$ y $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$. Efectuando la multiplicación, encontramos,

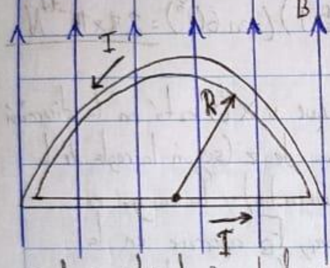
$$F_B = (-2.8 \times 10^{-14} N)\hat{k}$$

28/11/2022 2 Luis Ricardo Reyes Villar

Un alambre doblado en forma de semicírculo, de radio R, forma un circuito cerrado y conduce una corriente I. El alambre está en el plano xy y un campo magnético uniforme está dirigido a lo largo del eje positivo de las y, como se observa en la figura 7.12. Determine la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre las porciones recta y curva del alambre.

Solución

La fuerza magnética F_1 que actúa sobre la porción recta tiene una magnitud $F_1 = ILB = 2IRB$, puesto que $L = 2R$ y el alambre está orientado perpendicularmente a B. La dirección de F_1 con base en la regla de la mano derecha para el producto vectorial $L \times B$ es hacia afuera de la página.



Para encontrar la fuerza magnética F_2 que actúa sobre la parte curva, utilizamos los resultados del caso 1. La fuerza magnética sobre el segmento curvo es la misma que la que actúa sobre un alambre recto de longitud $2R$ que conduce una corriente I hacia la izquierda. Entonces, $F_2 = ILB = 2IRB$. La dirección de F_2 es hacia el interior de la página según la regla de la mano derecha correspondiente al producto vectorial $L \times B$.

Dado que el alambre yace en el plano xy, es posible expresar las dos fuerzas que actúan sobre el lazo de la siguiente forma:

$$F_1 = 2IRB\hat{k} \quad | \quad F_2 = -2IRB\hat{k}$$

La fuerza magnética neta que actúa sobre el lazo es igual a

$$\sum F = F_1 + F_2 = 2IRB\hat{k} - 2IRB\hat{k} = 0$$

Observe que lo anterior es consistente con el caso 2, porque el alambre es un lazo cerrado y está en un campo magnético uniforme.

Muchos satélites utilizan bobinas conocidas como torsores para ajustar su orientación. Estos dispositivos interactúan con el campo magnético de la Tierra para crear una torca sobre una nave espacial en las direcciones de x, y o z. La principal ventaja de este sistema de control de orientación es que utiliza electricidad generada por el Sol y por lo tanto no consume ningún combustible propulsor.

Si un dispositivo típico de este tipo tiene un momento dipolar magnético de 250 $A \cdot m^2$, ¿cuál es la torca máxima que se aplica a un satélite cuando su torsor está activo a una altitud donde la magnitud del campo magnético de la Tierra es $3.0 \times 10^{-5} T$?

Solución.

Una vez más aplicamos la ecuación 7.11, reconociendo que la torca máxima se obtiene cuando el momento dipolar magnético del torsor es perpendicular al campo magnético de la Tierra:

$$T_{máx} = \mu B = (250 A \cdot m^2)(3.0 \times 10^{-5} T) = \underline{7.5 \times 10^{-5} N \cdot m}$$

En la figura 7.17 se muestra el extremo de un galvanómetro D'Ansonval. Cuando las vueltas del alambre que forman la bobina conducen corriente, el campo magnético creado por el imán permanente ejerce una fuerza sobre la bobina que la hace girar (junto con su aguja indicadora sujeta) en contra del resorte. Demuestre que el ángulo de deflexión de la aguja indicadora es directamente proporcional a la corriente en la bobina.

Solución

Podemos utilizar la ecuación 7.11 para determinar la torca T_m que el campo magnético ejerce sobre la bobina. Si suponemos que el campo magnético que pasa a través de la bobina es perpendicular a la normal al plano de la bobina, la ecuación 7.11 se convierte en

$$T_m = \mu B$$

(Esta suposición es razonable ya que la sección transversal circular del imán asegura la presencia de líneas de campo magnético radiales). A esta torca magnética se le opone la torca generada por el resorte, el cual está dado por la versión polar de la ley de Hooke, $T_s = -K\phi$, siendo K la constante de torsión del resorte y ϕ el ángulo de giro que efectúa el resorte. Dado que el indicador está en reposo cuando la bobina no experimenta ninguna aceleración angular, la suma de estas torcas debe ser igual a cero:

$$(1) \quad T_m + T_s = \mu B - K\phi = 0$$

La ecuación 7.10 nos permite relacionar el momento magnético de N vueltas de alambre con la corriente que conduce:

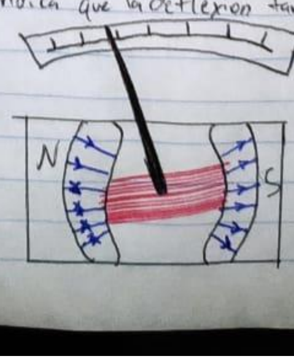
$$\mu = NIA$$

Podemos reemplazar esta expresión de μ en la ecuación (1) para obtener

$$(NIA)B - K\phi = 0$$

$$\phi = \frac{NAB}{K} I$$

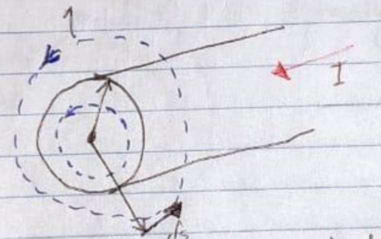
Entonces, el ángulo de deflexión de la aguja indicadora es directamente proporcional a la corriente que pasa por el lazo. El factor NAB/K nos indica que la deflexión también depende del diseño del instrumento



Un alambre largo y recto de radio R lleva una corriente estable I uniformemente distribuida a través de la sección transversal del alambre. Calcule el campo magnético a una distancia r del centro del alambre en las regiones $r \geq R$ y $r < R$

Solución.

La figura 8.12 nos ayuda a conceptuar el alambre y la corriente. Debido a que el alambre tiene un alto grado de simetría, podemos catalogar éste como un problema de la ley de Ampère. Para el caso de $r \geq R$, debemos llegar al mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 8.1, en el cual aplicamos la ley de Biot-Savart para el mismo caso. Para analizar este problema, seleccionemos nuestra trayectoria del circulo de integración 1 de la figura 8.12. Por simetría, B debe ser constante en magnitud y paralelo a ds en cualquier punto del circulo. Ya que la corriente total que pasa a través del plano del circulo es igual a I, la ley de Ampère nos indica que es idéntica en forma a la



$$\oint B \cdot ds = B\oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R)$$

ecuación 8.5. Observe que es mucho más fácil utilizar la ley de Ampère que la ley de Biot-Savart. Este es a menudo el caso en situaciones de alta simetría.

Ahora imagine el interior del alambre, donde $r < R$. Aquí la corriente I' que pasa a través del plano del circulo 2 es menor que la corriente total I. Ya que la corriente es uniforme sobre la sección transversal del alambre, la fracción de la corriente encerrada por el circulo 2 debe ser igual a la relación del área πr^2 encerrada por el circulo 2 con el área de la sección transversal πR^2 del alambre:

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \qquad I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

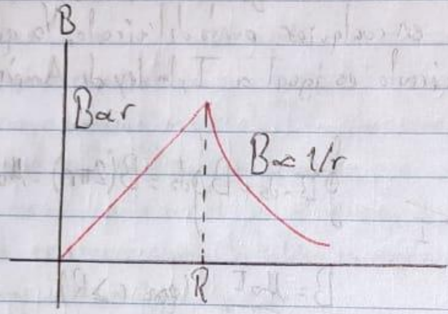
Siguiendo el mismo procedimiento que en el circulo 1, aplicamos la ley de Ampère al circulo 2:

$$\oint B \cdot ds = B(2\pi r) = \mu_0 I' = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I\right)$$

28/11/2022 Luis Ricardo Reyes Villar.

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r \quad (\text{para } r < R)$$

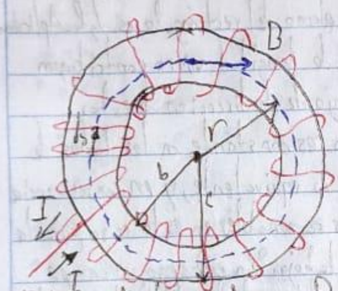
Para finalizar este problema, advierta que este resultado es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico en el interior de una esfera uniformemente cargada. En la figura 8.13 se traza la magnitud del campo eléctrico en función de r para esta configuración. Observe que en el interior del alambre, $B \to 0$ conforme $r \to 0$. Además, vemos que las ecuaciones 8.14 y 8.15 dan el mismo valor del campo magnético en $r = R$, lo que demuestra que el campo magnético es continuo sobre la superficie del alambre.



El dispositivo llamado toroide es utilizado para crear un campo magnético casi uniforme en algún área cerrada. El dispositivo está constituido por un alambre conductor enrollado sobre un anillo (torus) hecho de algún material no conductor. Para un toroide con N vueltas de alambre muy apretadas, calcule el campo magnético en la región ocupada por el torus, a una distancia r del centro

Solución

Para calcular este campo, deberemos evaluar $\oint B \cdot ds$ a lo largo de la espira amperiana circular de radio r en el plano de la figura 8.14. Por simetría, vemos que la magnitud del campo es constante en este círculo y es tangente a él, por lo que $B \cdot ds = B\,ds$. Además, el alambre pasa por la espira N número de veces, de manera que la corriente total a través de la espira es NI. Por lo tanto, en este caso el lado derecho de la ecuación 8.13 es $\mu_0 NI$.



La ley de Ampère aplicada al círculo da como resultado:

$$\oint B \cdot ds = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Este resultado muestra que B varía en función de 1/r y, en consecuencia, es no uniforme en la región ocupada por el torus. Sin embargo, si r es muy grande en comparación con la sección transversal de radio a del torus, entonces en su interior el campo es aproximadamente uniforme.

Para un toroide ideal, con vueltas muy apretadas, el campo magnético externo es cercano a cero. No es, sin embargo, igual a cero. En la figura 8.14 imagine que el radio r de la espira amperiana es más pequeño que b o mayor que c. En cualquiera de estos casos, la espira encierra una corriente neta igual a cero, por lo que $\oint B \cdot ds = 0$. Existe la tentación de afirmar que esto prueba que $B = 0$, pero no es así. Considere en la figura 8.14 la espira amperiana en el lado derecho del toroide. El plano de este lazo es perpendicular a la página, y el toroide pasa a través de la espira. Conforme las cargas entran al toroide como se indica en las direcciones de la corriente de la figura 8.14 se mueven en el toroide en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por lo tanto, ¡una corriente del lazo amperiano perpendicular! Esta corriente es pequeña, pero no igual a 0.

Hasta ahora hemos imaginado corrientes a través de alambres de secciones transversales pequeñas. Consideremos ahora una corriente en un objeto extendido. Una hoja delgada, infinitamente grande, que yace en el plano yz lleva una corriente de densidad de corriente lineal J_s. La corriente está en la dirección y, y J_s representa la corriente por unidad de longitud medida a lo largo del eje de las z. Determine el campo magnético cerca de la hoja.

Solución

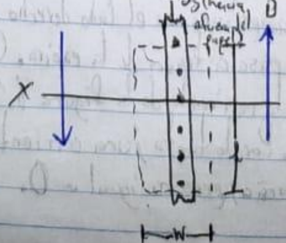
Esta situación es similar a la que involucraba la ley de Gauss. Recordará que el campo eléctrico debido a una hoja infinita de carga no depende de la distancia de la hoja. Por lo tanto, podemos esperar un resultado similar aquí para el campo magnético.

Para evaluar la integral lineal en la ley de Ampère construimos una trayectoria rectangular a través de la hoja como en la figura 8.15. El rectángulo es de dimensiones ℓ y w con los lados ℓ paralelos a la superficie de la hoja. La corriente neta en el plano del rectángulo es $J_s \ell$. Aplicamos la ley de Ampère sobre el rectángulo y notamos que los dos lados de longitud w no contribuyen a la integral lineal debido a que el componente de B a lo largo de la dirección de estas trayectorias es igual a cero. Por simetría, el campo magnético es constante en los lados de longitud ℓ ya que cada punto de la hoja infinitamente larga es equivalente, y en consecuencia el campo no debe de variar de un punto a otro. Las únicas opciones razonables en este caso para la elección de la dirección del campo son: perpendicular o paralelo a la hoja. Sin embargo, un campo perpendicular pasaría a través de la corriente, lo que es inconsistente con la ley de Biot-Savart. Suponiendo un campo constante en magnitud y paralelo al plano de la hoja obtenemos

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 I = \mu_0 J_s \ell \qquad 2B\ell = \mu_0 J_s \ell \qquad B = \mu_0 \frac{J_s}{2}$$

Este resultado muestra que, como sospechábamos, el campo magnético es independiente de la distancia de la hoja de corriente. La expresión para la magnitud del campo magnético es similar en forma a la de la magnitud para el campo eléctrico causado por una hoja infinita de carga.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



El alambre 1 en la figura 8.16 está orientado a lo largo del eje de las y y lleva una corriente estable I_1. Un lazo rectangular localizado a la derecha del alambre y en el plano yz lleva una corriente I_2. Determine la fuerza magnética ejercida por el alambre 1 en el alambre superior de longitud b en la espira, llamado "Alambre 2" en la figura.

Solución

Es posible que se tenga la tentación de utilizar la ecuación 8.12 para obtener la fuerza ejercida en un pequeño segmento de longitud dx del alambre 2. Sin embargo, esta ecuación es aplicable sólo a dos alambres paralelos y no puede utilizarse aquí. El procedimiento correcto es utilizar la ecuación 7.9 y considerar la fuerza ejercida por el alambre 1 sobre un pequeño segmento ds del alambre 2. Esta fuerza está dada por $dF_B = I ds \times B$, donde $I = I_2$, y B es el campo magnético creado por la corriente en el Alambre 1 en la posición de ds.

Según la ley de Ampère, el campo a una distancia x del alambre 1 es

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\hat{k})$$

donde se utiliza el vector unitario $-\hat{k}$ para indicar que el campo debido a una corriente en el alambre 1 en la posición de ds apunta hacia el interior de la página. Debido a que el alambre 2 se encuentra a lo largo del eje de las x, $ds = dx\hat{i}$, y encontramos que

$$dF_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\left[\hat{i} \times (-\hat{k})\right]dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}\hat{j}$$

Integrado entre los límites, $x = a$ hasta $x = a+b$ da

$$F_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big]_a^{a+b} \hat{j}$$

$$(1)\quad F_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\hat{j}$$

Determine la inductancia de un solenoide enrollado uniformemente, con N vueltas y una longitud l. Suponga que l es mucho mayor que el radio de los embobinados y que el núcleo del solenoide es de aire.

Solución

Podemos suponer que el campo magnético interno causado por la corriente es uniforme y está dado por la ecuación 8.17:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

donde $n = N/l$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El flujo magnético a través de cada vuelta es

$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{l} I$$

donde A es el área de la sección transversal del solenoide. Utilizando esta expresión y la ecuación 10.2, encontramos que

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

Este resultado muestra que L depende de la geometría y es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Debido a que $N = nl$, también podemos expresar el resultado de la forma

$$L = \mu_0 \frac{(nl)^2}{l} A = \mu_0 n^2 A l = \mu_0 n^2 V$$

donde $V = Al$ es el volumen interno de un solenoide.

28/11/2022 10 Luis Ricardo Reyes Villar

(A) Calcule la inductancia de un solenoide con un núcleo de aire que contiene 300 vueltas si su longitud es de 25.0 cm y su sección transversal es de 4.00 cm^2

Solución

Utilizando la ecuación 10.4, obtenemos

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\, T \cdot m/A)(300)^2(4.00 \times 10^{-4}\, m^2)}{25.0 \times 10^{-2}\, m}$$

$$= 1.81 \times 10^{-4}\, T \cdot m^2/A = 0.181\, mH$$

(B) Calcule la fem autoinducida en el solenoide si la corriente que lleva disminuye a una rapidez de 50.0 A/s.

Solución

Utilizando la ecuación 10.1 y dado que $dI/dt = -50\, A/s$, obtenemos

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4}\, H)(-50.0\, A/s) = 9.05\, mV$$

(A) Determine la constante de tiempo del circuito que se muestra en la figura 10.11a

Solución

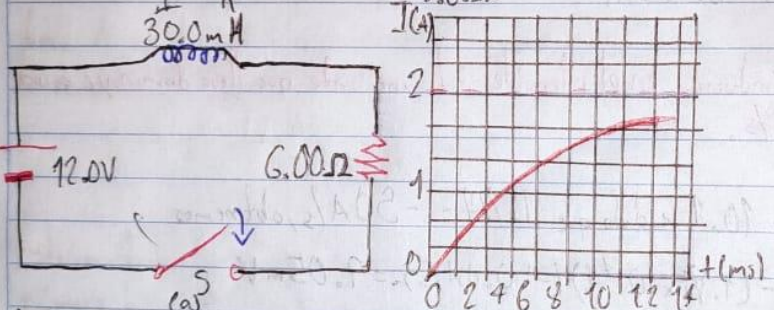
La constante de tiempo está dada por la ecuación 10.8:

$$T = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3} H}{6.00 \Omega} = 5.00 ms$$

(B) El interruptor de la figura 10.11a está cerrado en $t=0$. Calcule la corriente en el circuito en $t=2.00 ms$.

Solución Utilizando la ecuación 10.7 para la corriente en función del tiempo (con t y T en milisegundos), encontramos que, en $t=2.00 ms$,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-t/T}) = \frac{12.0V}{6.00\Omega}(1-e^{-0.400}) = 0.659 A$$



La figura 10.11b muestra la corriente en función del tiempo para este circuito

(C) Compare la diferencia de potencial en el resistor con la del inductor.

Solución

En el instante en el cual se cierra el interruptor, no existe corriente y, por lo tanto, no existe diferencia de potencial en el resistor. En ese instante, el voltaje de la batería aparece en su totalidad en las terminales del inductor como una contrafuerza electromotriz de 12.0V conforme el inductor intenta mantener el estado de corriente cero. (El extremo izquierdo del inductor está a un potencial eléctrico más alto que el del extremo derecho) Conforme pasa el tiempo, la fem a través del inductor disminuye y la corriente en el resistor (y, en consecuencia, la diferencia de potencial en sus terminales) aumenta. La suma de las dos diferencias de potencial en todo momento es igual a 12.0V.

Veamos a través el circuito RL de la figura 10.6. Recuerde que la corriente en la espira del lado derecho disminuye exponencialmente con el tiempo, según la expresión $I = I_0 e^{-t/\tau}$, donde $I_0 = \varepsilon/R$ es la corriente inicial en el circuito y $\tau = L/R$ la constante de tiempo. Demuestre que toda la energía almacenada inicialmente en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente tiende a cero.

Solución

La rapidez dU/dt a la cual la energía es entregada al resistor (la potencia) es igual a I^2R, donde I es la corriente instantánea:

$$\frac{dU}{dt} = I^2R = (I_0 e^{-Rt/L})^2 R = I_0^2 R e^{-2Rt/L}$$

Para determinar la energía total entregada al resistor, resolvemos en función de dU e integramos esta expresión entre los límites $t=0$ a $t \to \infty$. (El límite superior es infinito, dado que la toma como una cantidad infinita de tiempo para que la corriente llegue a cero.)

$$(1) \quad U = \int_0^\infty I_0^2 R e^{-2Rt/L}\, dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L}\, dt$$

Se puede demostrar que el valor de la integral definida es igual a $L/2R$, y así entonces U se convierte en

$$U = I_0^2 R \left(\frac{L}{2R}\right) = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Observe que lo anterior es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dada por la ecuación 10.12, como nos propusimos probar.