Unidad 2 Probabilidad

- Competencia específica a desarrollar:
  Conocer y aplicar los axiomas y teoremas de probabilidad para dar solución a problemas relacionados con fenómenos aleatorios.

2.1 TEORIA DE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos. Se designa con letras mayúsculas A, B, etc. Para describir que objetos están contenidos en el conjunto A, se dispone de tres métodos:

1. Anotar los elementos de A, por ejemplo A = {1, 2, 3,4} indica que el conjunto contiene los enteros positivos 1, 2, 3,4.
2. Describir al conjunto A con palabras, podemos decir que A está formado por todos los números reales entre 0 y 1.
3. Podemos escribir A = $\{x|0 \leq x \leq 1\}$, es decir A es el conjunto de todas las x, donde x es un número real comprendido entre 0 y 1.

Los objetos que forman la colección del conjunto A se llaman miembros o elementos de A. Cuando $< a >$ es un elemento de A escribimos $a \in A$ y cuando $< a >$ no es un elemento de A escribimos $a \notin A$.

Existen dos conjuntos especiales que son de interés. El conjunto universal se define como el conjunto de todos los objetos que se consideran; normalmente se designa U.

El conjunto nulo o vacío se define como el conjunto que no contiene elementos se designa ∅.

Puede suceder que dados dos conjuntos A y B un elemento de A es también un elemento de B. Se dice que A es un subconjunto de B y se escribe A c B.

Se da una interpretación semejante a B c A.

Decimos que dos conjuntos son el mismo A=B, si y solo si A c B y B c A; esto es, dos conjuntos son iguales si y solo si contienen los mismos elementos.

Las dos propiedades del conjunto nulo son:

A. Para cualquier conjunto A se tiene $\emptyset\ c\ A$.
B. Una vez que el conjunto universal se ha acordado, entonces, para cualquier conjunto A considerando que está en U, tenemos A c U.

Ahora considerando la idea de combinar conjuntos dados con el fin de formar un nuevo conjunto. Definamos C como la unión de A y B de la manera siguiente:

$$C = \{x | x \in A \; o \; x \in B(o \; ambos)\}$$

Escribimos C=A U B, C está formado por elementos que están en A, o en B, o en ambos.

Definimos D como la intersección de A y B como sigue:

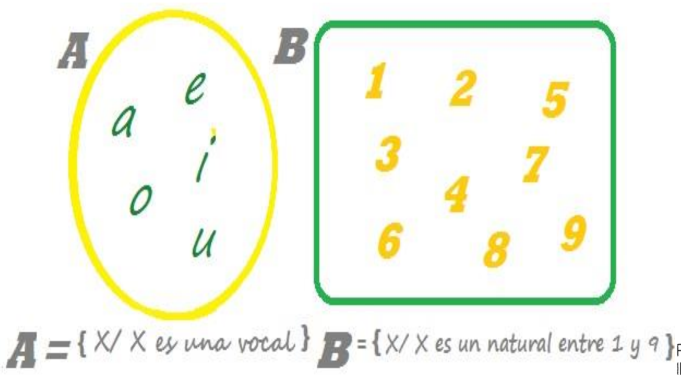
$$D = \{x | x \in A \; y \; x \in B\}$$

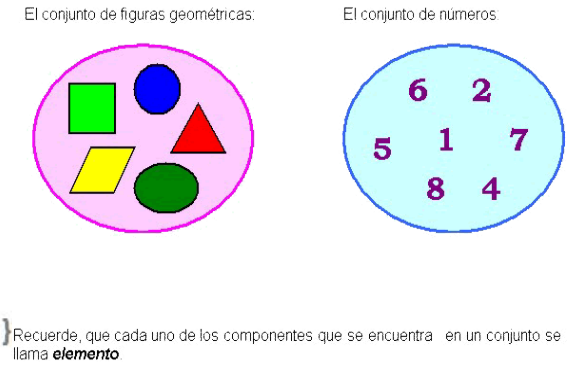
Escribimos $D = A \cap B$, D posee todos los elementos que están en A y B.

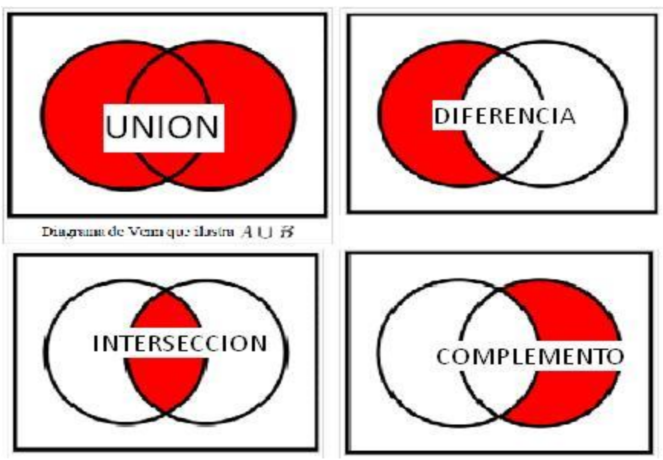
El complemento de un conjunto A, designado por $\bar{A}$, formado por todos los elementos que no están en A (sino en el conjunto universal U) se llama el complemento de A.

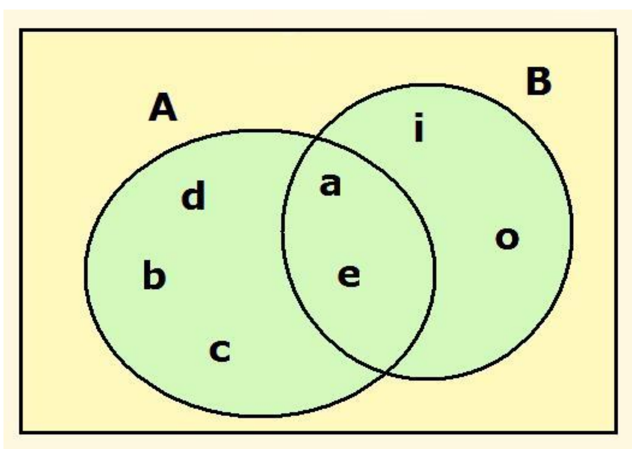
Esto es $\bar{A} = \{x | x \notin A\}$.

Se puede usar un recurso grafico como grafica de Venn cuando se combinan conjuntos.

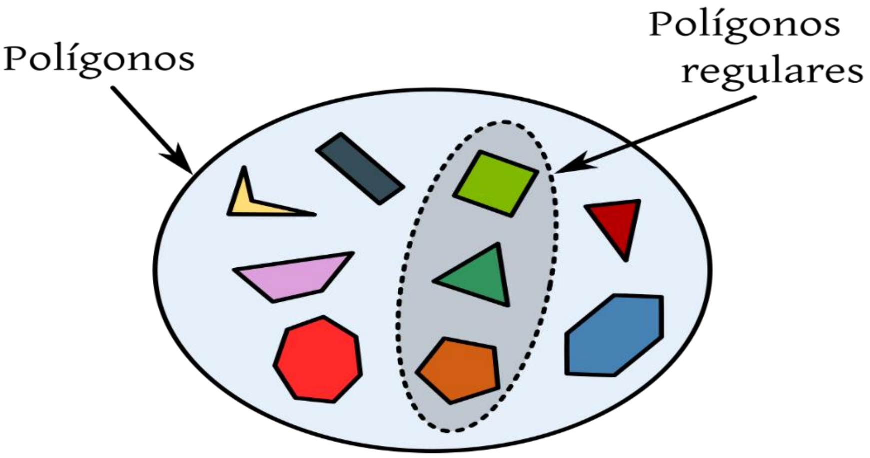








SUBCONCONJUNTOS



Las operaciones anteriores de unión e intersección definidas justamente para dos conjuntos pueden extenderse de una manera obvia para cualquier número finito de conjuntos.

Definimos $A \cup B \cup C$ como $A \cup (B \cup C)$ o $(A \cup B) \cup C$. De igual manera, definimos

$A \cap B \cap C$ como $A \cap (B \cap C)$ o $(A \cap B) \cap C$.

A. $A \cup B = B \cup A$
B. $A \cap B = B \cap A$
C. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
D. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Hay otros conjuntos identidades que contienen unión, intersección y complementación. Los más importantes de estos son los siguientes:

E. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
F. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
G. $A \cap \emptyset = \emptyset$
H. $A \cup \emptyset = A$
I. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A \cap}\, \bar{B}$
J. $\overline{= (A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
K. $\bar{\bar{A}} = A$

Sean A y B dos conjuntos, indicaremos como el producto cartesiano A y B escrito como A x B al conjunto {(a,b), a ∈ A, b ∈ B}, esto es, el conjunto de todos los pares ordenados en donde el primer elemento se toma de a y el segundo de B.

2.3 EXPERIMENTOS ALEATORIOS (NO DETERMINISTICOS).

DEFINICION.

Un experimento aleatorio es aquel que proporción diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera, no se puede predecir lo que va a suceder. Su notación es: ε.

EJEMPLOS

$\varepsilon_1 \rightarrow$ Lanzamiento de un dado.

$\varepsilon_2 \rightarrow$ Lanzamiento de dos monedas.

$\varepsilon_3 \rightarrow$ Se transmite 3 bits y cada uno se clasifica como erróneo o no erróneo.

$\varepsilon_4 \rightarrow$ Se utiliza un amperímetro con tres dígitos para medir corriente en miliampers.

$\varepsilon_5 \rightarrow$ Se conecta una lámpara cuyo ahorro de energía en un receptáculo y se cuenta el tiempo en horas hasta que se funda.

2.4 CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE PROBABILIDAD.

2.4.1 EL ESPACIO DE MUESTRAS.

DEFINICIÓN.

El espacio de muestras se define como todos los posibles resultados de un experimento aleatorio "ε".

EJEMPLO.

En base a los experimentos anteriores describa el espacio muestral.

$\varepsilon_1 \longrightarrow$ S1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Espacio de muestras discreto.

Elementos finitos o infinitos numerables

Espacio de muestras continúo.

Elementos infinitos no numerables

2.4.2 EVENTOS O SUCESOS.

DEFINICION.

Sea ε un experimento aleatorio, un evento es un subconjunto de espacios de muestras. Usualmente los eventos se simbolizan con letras mayúsculas A, B, C, D, etc.

A los posibles subconjuntos de S lo voy a simbolizar $\mathscr{S}$ conocida como la Familia de eventos (subconjuntos).

PROPIEDADES

A) S y **Φ** ∈ $\mathscr{S}$

B) Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ son una sucesión de eventos.

$$\cup_{i=1}^{n} \Delta\, i \qquad \cap_{i=1}^{n} \Delta\, i \qquad \in \qquad \mathscr{S}$$

C) Sea A un evento, también A ∈ $\mathscr{S}$

Para conocer todos los posibles subconjuntos de S tenemos la siguiente expresión:

$$Tamaño \rightarrow \#\mathscr{S} = 2^{S}$$

Ejemplo:

Sea S= {1, 2, 3}

$$\#\mathscr{S} = 2^3 = 8 \quad \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{\Phi\}$$

2.4.3 Medición de los eventos (PROBABILIDAD)

DEFINICION

Sea $\mathcal{E}$ un experimento aleatorio y **S** su espacio de muestra para cada evento $\mathscr{S}$ digamos A, le voy a asignar un número real designado P(A) que significa la probabilidad de que ocurra el evento A y que debe satisfacer los siguientes Axiomas o propiedades.

AXIOMA 1

Sea A un evento, entonces $0 \leq P(A) \leq 1$. No existen las probabilidades negativas ni mayores que uno.

AXIOMA 2

Sea S el evento seguro, entonces P(S)=1

AXIOMA 3

Sea A y B dos eventos mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B es:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

OBSERVACIÓN:

Si $A \cap B = \Phi$ estos eventos son mutuamente excluyentes.

GENERALIZACIÓN:

Sea $A_{1,}A_{2,}A_3,\ldots A_n$ una sucesión de cuentos que se excluyen mutuamente de par en par, la probabilidad de que ocurra al menos uno es:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{P} P(Ai) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n)}$$

<u>TEOREMA 1</u>

Sea Φ el evento imposible, entonces $P(\Phi) = 0$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que $A \cup \Phi = A$

Entonces:

$$P(A \cup \Phi) = P(A)$$

Como A y Φ son mutuamente excluyentes aplicamos el Axioma 3.

$$P(A) + P(\Phi) = \mathrm{P(A)}$$

<u>TEOREMA 2</u>

Sea A y B dos eventos, la probabilidad de que ocurra solamente A es:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

DEMOSTRACIÓN:

$$P(\bar{A} \cap B)$$

Del diagrama Venn se observa que:$(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A$

Entonces $P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] = P(A)$

Axioma 3.

$$P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = P(A) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

De igual forma por intuición matemática la probabilidad de que ocurra solo B es:

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

TEOREMA 3 COMPLEMENTO

Sea A un evento, la probabilidad de que ocurra A es P (Ā)=1 – P (A)

DEMOSTRACION

A U Ā = S Entonces P (A U Ā)= P (S)

Axiomas 2 y 3 P (A) + P (Ā) = 1 $\longrightarrow$ P (Ā) = 1 – P (A)

TEOREMA 4

Sea A y B dos eventos cualesquiera la probabilidad de que ocurra A o B es:

P (A U P) = P (A) + P (B) – P (A ∩ B)

DEMOSTRACION

Del diagrama de Venn se observa A U (Ā ∩ B) = A U B

Entonces P [A U (Ā ∩ B)] = P (A U B)

Teorema 2 P (Ā ∩ B) = P (B) – P (A U B)

Entonces P (A) + P (B) – P (A ∩ B) = P (A U B)

2.4.4 EL MODELO CLASICO

CONDICIONES

Espacio de muestra infinito

$$S = \{ W_1, W_2, W_3, \ldots W_n \}$$

Resultados igualmente probables

PROPIEDADES

A) Los eventos elementales $W_1\ W_2\ W_3 \ldots W_n$ Se excluyen mutuamente de par en par.

B) Dos eventos elementales tienen la misma probabilidad, esto es:

$$P(W_1) = P(W_2) = P(W_3) = \ldots = P(W_n)$$

C) Sabemos que

$$\{W_1\} \cup \{W_2\} \cup \{W_3\} \ldots \cup \{W_n\} = S$$

Entonces

$$P[\{W_1\} \cup \{W_2\} \cup \{W_3\} \ldots \cup \{W_n\}] = P(S)$$

De las Axiomas 2 y 3

$$P\{W_1\} + P\{W_2\} + P\{W_3\} + \ldots + P\{W_n\} = 1$$

De otra forma

$$nP(W_i) = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$P(W_i) = \frac{1}{n} \quad \text{Para } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Todos son mutuamente excluyentes

Sea A = $\{W_1, W_2, W_3, \ldots W_K\}$ una muestra del espacio de muestras

$$P(A) = \sum f\ (Wi) = P\ (W2) + \cdots + P\ (WK\ )$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

CONCLUSION

$$P\ (A\ ) = \frac{K}{N} = \frac{\#\ del\ evento\ A}{\#\ S} \rightarrow modelo\ clasico$$