Base Vectorial

Prof. Dr. David Macias Ferrer

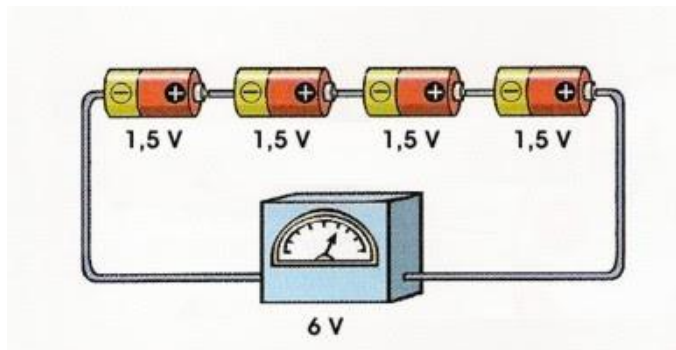
Instituto Tecnológico de Cd. Madero
Depto. de Ciencias Básicas
Centro de Investigación en Petroquímica

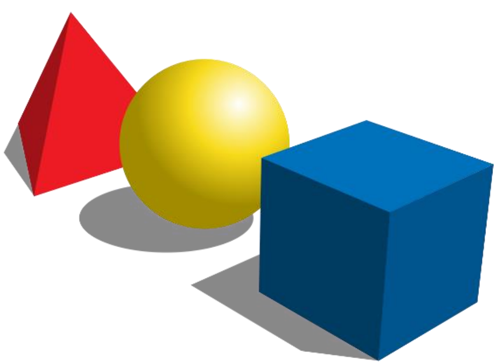
Magnitudes Vectoriales y Escalares

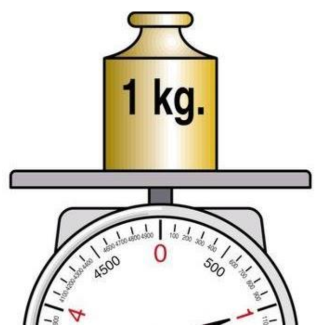
Magnitud Escalar.- Aquella que se caracteriza únicamente por su magnitud

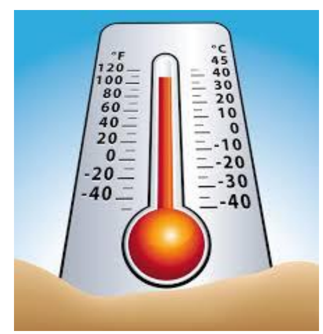
Ejemplos:

- **Densidad**
- **Masa**
- **Volumen**
- **Temperatura**
- **Tensión eléctrica (voltaje)**
- **Rapidez**







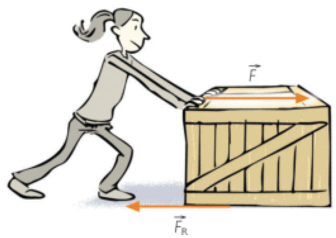


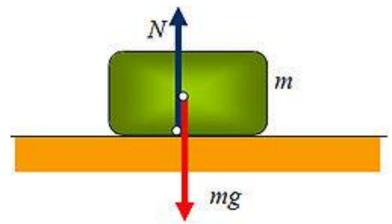
Magnitudes Vectoriales y Escalares

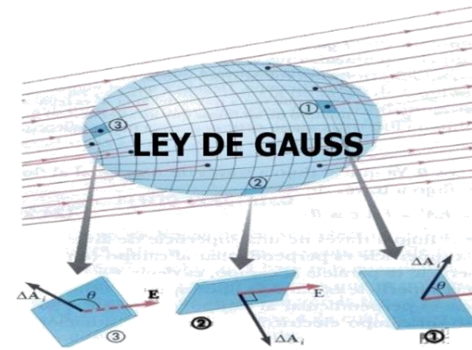
Magnitud Vectorial.- Aquellas que además de poseer magnitud tienen dirección

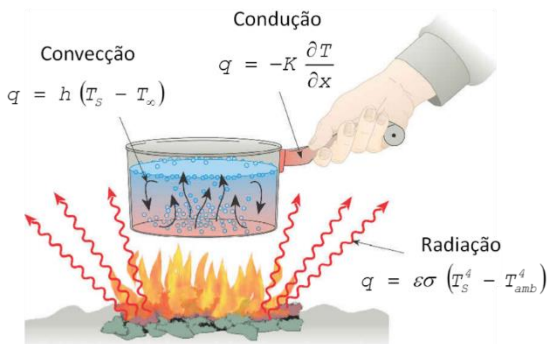
Ejemplos:

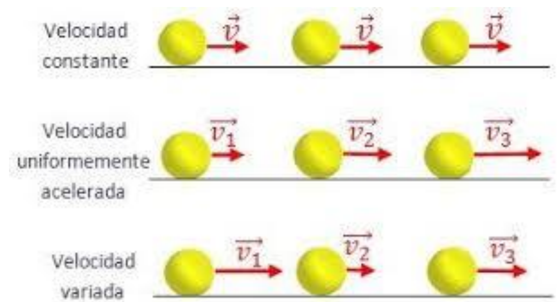
- **Fuerza**
- **Velocidad**
- **Peso**
- **Aceleración**
- **Flujo calórico**
- **Corriente eléctrica**
- **Flujo magnético**

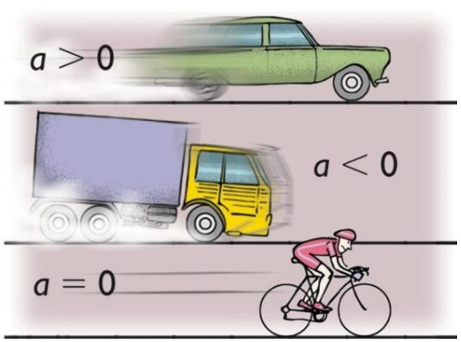


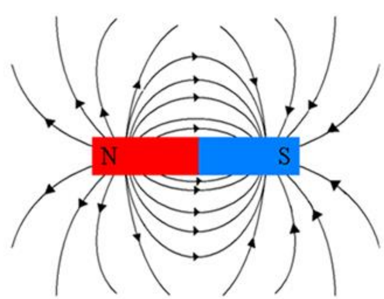












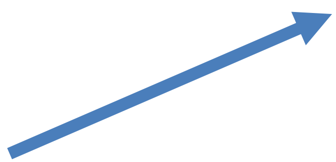
Vector

Es una entidad matemática que posee magnitud y dirección

Notación simbólica

A, **a** etc (letras negritas), $\vec{a}$ ó $\overrightarrow{AB}$

Notación geométrica



Los vectores geométricamente se representan con *flechas* o *segmentos dirigidos*.

La magnitud de un vector se denomina *módulo del vector*

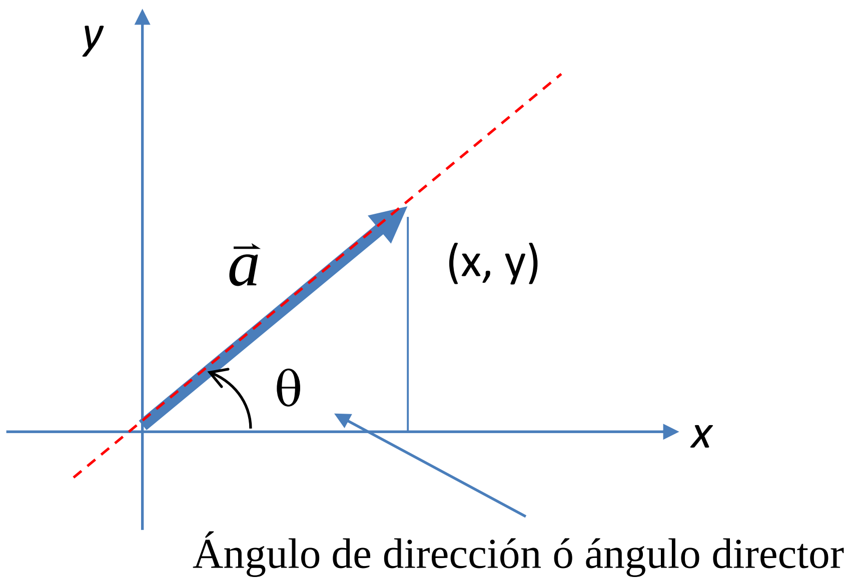
La dirección de un vector lo determina el *ángulo director* que se mide con respecto a un marco de referencia

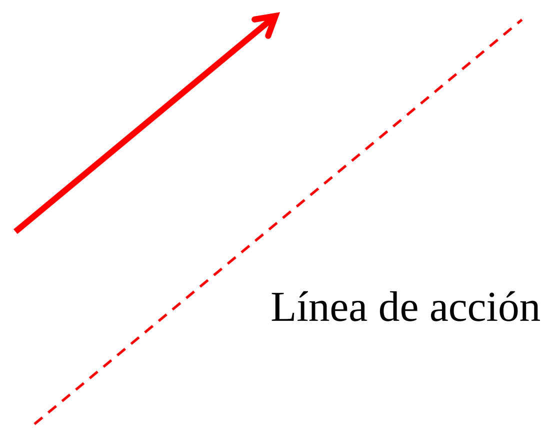
El sentido, lo determina hacia donde apunta la flecha del vector

Espacio vectorial.- Un conjunto de vectores de posición y vectores libres

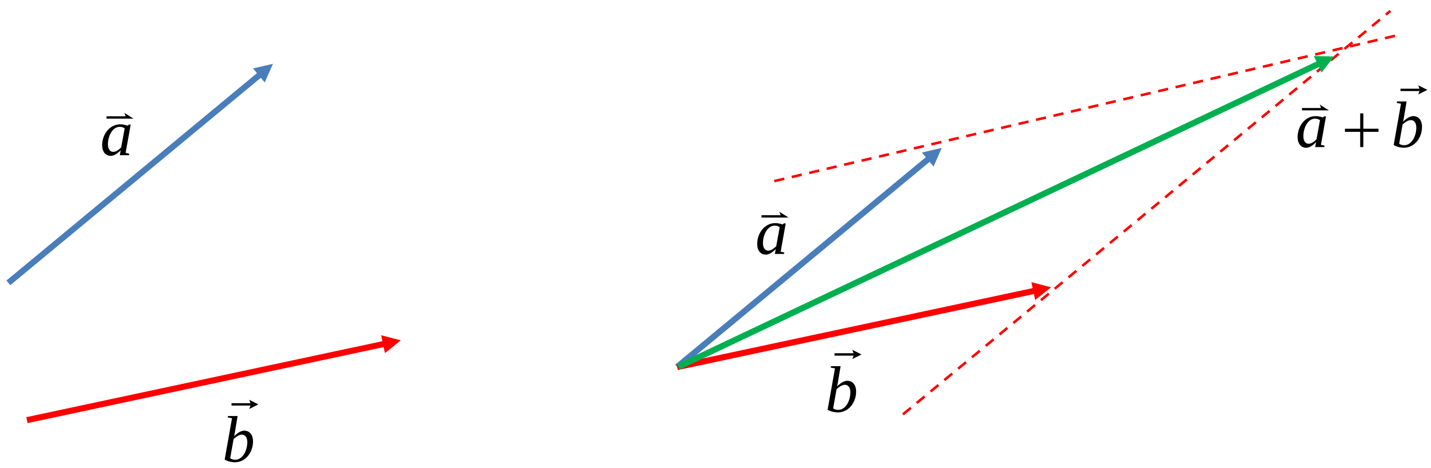
Vector de posición.- Un vector que parte del origen de un sistema de coordenadas *xy* y localiza un punto P(*x*,*y*)

Vector libre.- Es aquel que se puede mover libremente a lo largo de una línea o bien en forma paralela a ésta (Línea de acción del vector)





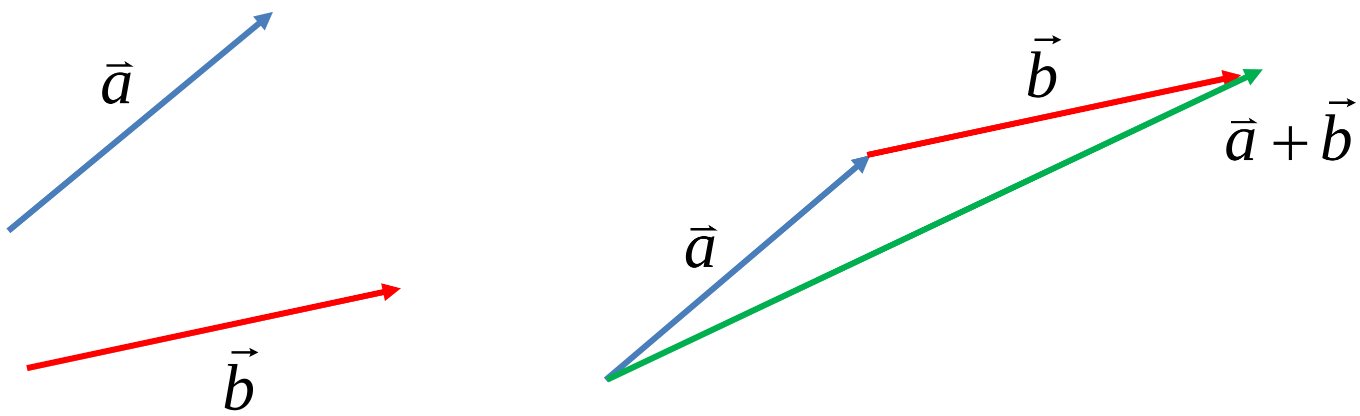
Suma de dos Vectores.-



La suma de dos vectores coincide en magnitud con la diagonal mayor del paralelogramo

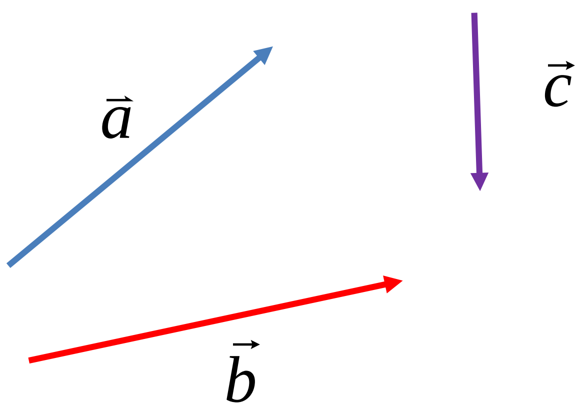
El método del paralelogramo solo se aplica para suma de **dos** vectores

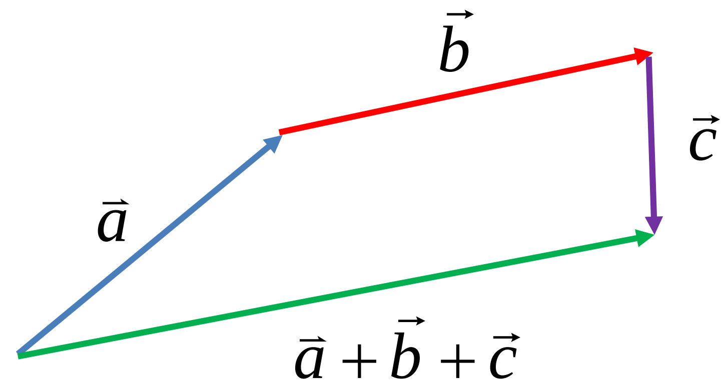
Suma de dos Vectores.-



El método del polígono
para suma de vectores

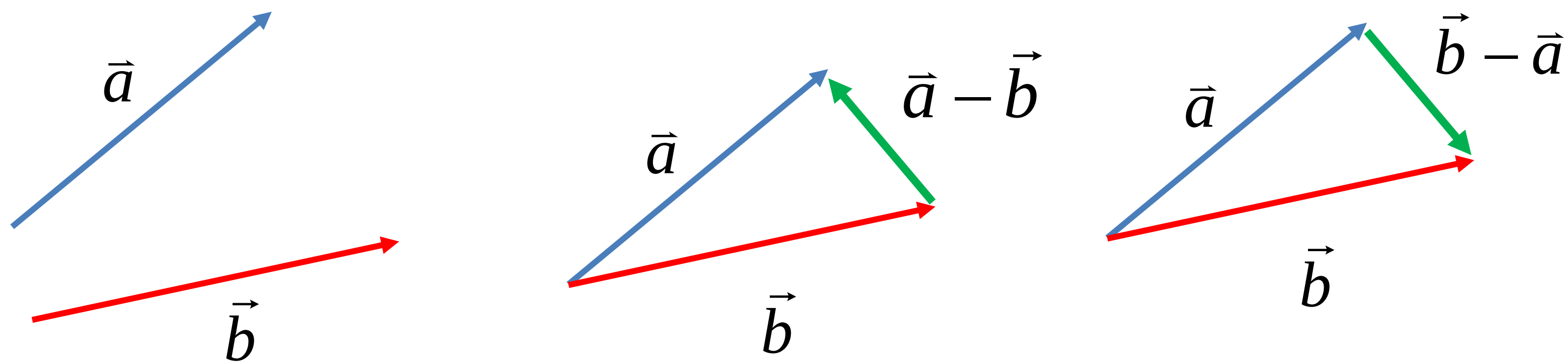
Suma de mas de dos Vectores.-





El método del polígono puede ser aplicado para más de dos vectores

Diferencia de Vectores.-



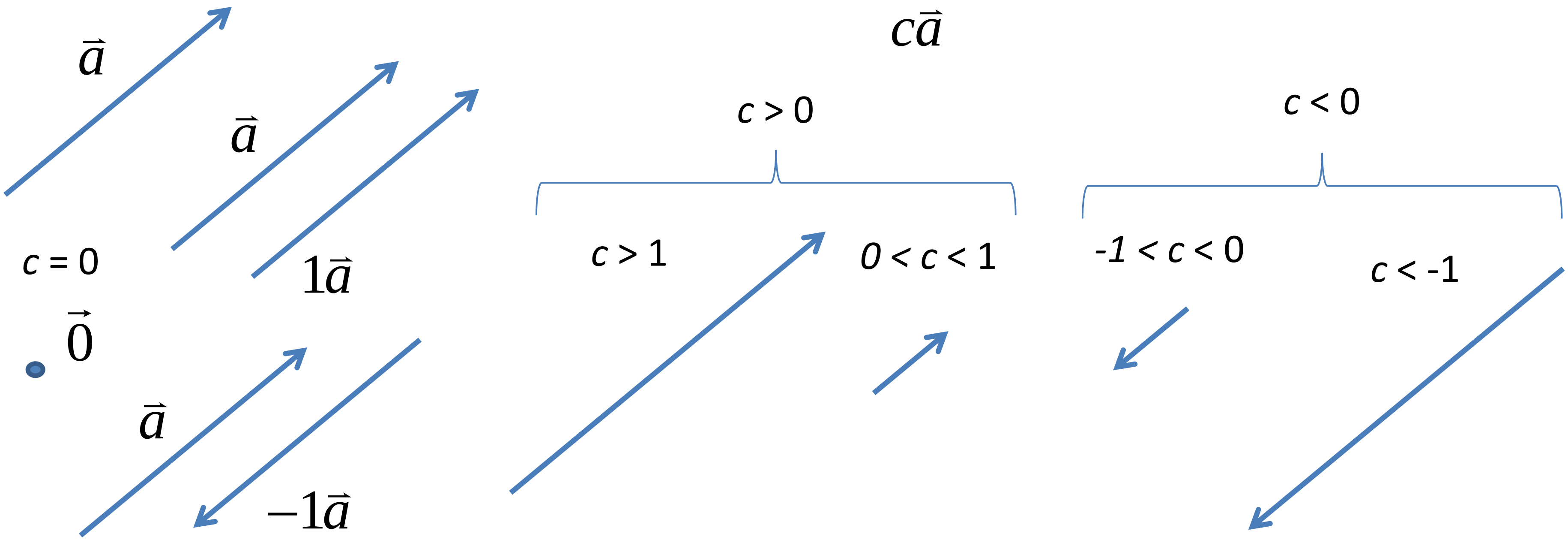
Es válido que:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right|$$

Para cualquiera dos vectores **a** y **b**

La diferencia de dos vectores coincide en magnitud con la diagonal menor del paralelogramo La punta de la flecha del vector diferencia siempre apuntará hacia el minuendo

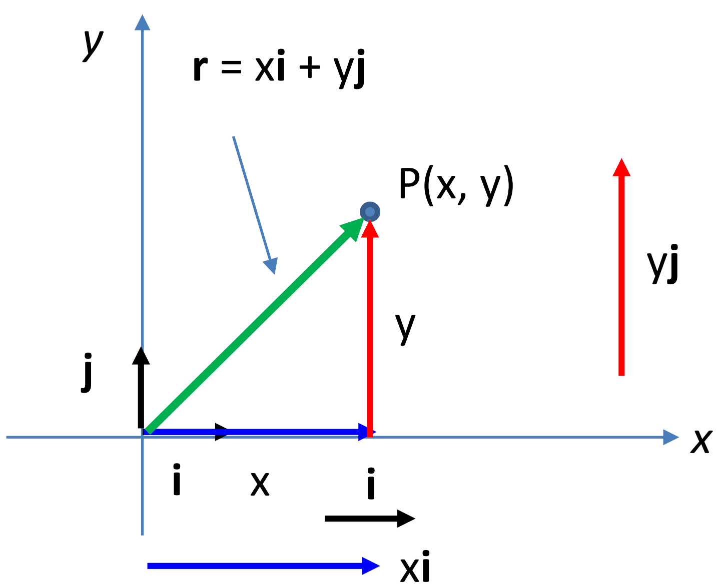
Multiplicación de un Vector por un Escalar.-



Un escalar puede cambiar la magnitud y/o dirección a un vector

Espacios V^2 y V^3.- La base del espacio V^2 es el conjunto de vectores unitarios **i** y **j**, por otro lado la base del espacio V^3 es el conjunto de vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

V^2



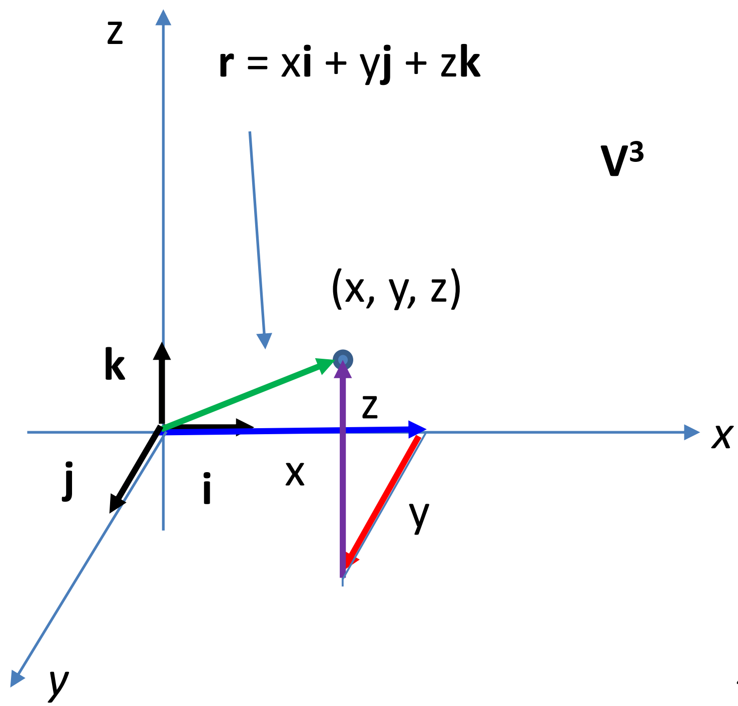
Forma analítica de un vector

$$\mathbf{r} = \mathrm{x}\mathbf{i} + \mathrm{y}\mathbf{j}$$

$x, y \in \Re$, son las componentes escalares de **r**

x**i** y y**j** son las componentes vectoriales de **r**

Espacios V^2 y V^3.- La base del espacio V^2 es el conjunto de vectores unitarios **i** y **j**, por otro lado la base del espacio V3 es el conjunto de vectores unitarios **i**, **j** y **k**.



Forma analítica de un vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$x, y, z \in \Re$ son las componentes escalares de $\mathbf{r}$

$x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ y $z\mathbf{k}$ son las componentes vectoriales de $\mathbf{r}$

Notación Simbólica
Espacio V^2 (2D)

Dado el vector: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Es llamado *vector de posición* o *radio vector* del punto P(*x*, *y*) en $\Re^2$

$$\mathbf{r} = \vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle$$

Notación Simbólica
Espacio V^3 (3D)

Dado el vector: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Es llamado *vector de posición* o *radio vector* del punto P(*x*, *y*, *z*) en $\Re^3$

$$\mathbf{r} = \vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \langle x, y, z \rangle$$

Notación Simbólica

Se pueden usar subíndices para diferenciar dos vectores distintos:

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j},\ \ \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}, \quad para\ \mathbf{V}^2, etc$$

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \quad para\ \mathbf{V}^3, etc$$

La magnitud o módulo de un vector **r** está dado por:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{ó} \qquad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplo 1.- Encontrar el módulo del vector

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$$

Sol.- La magnitud o módulo de un vector **r** está dado por:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Ejemplo 2.- Encontrar el módulo del vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{1 + 9 + 36} = \sqrt{46}$$

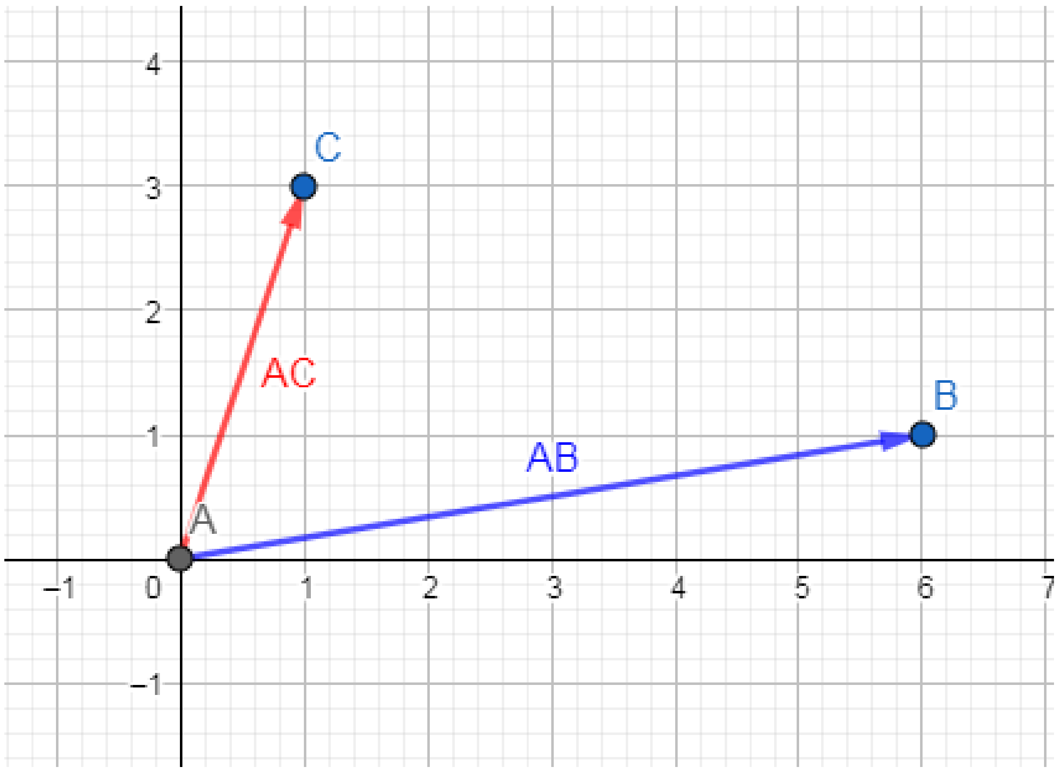
Ejemplo 2.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

b) El vector $\overrightarrow{CB}$

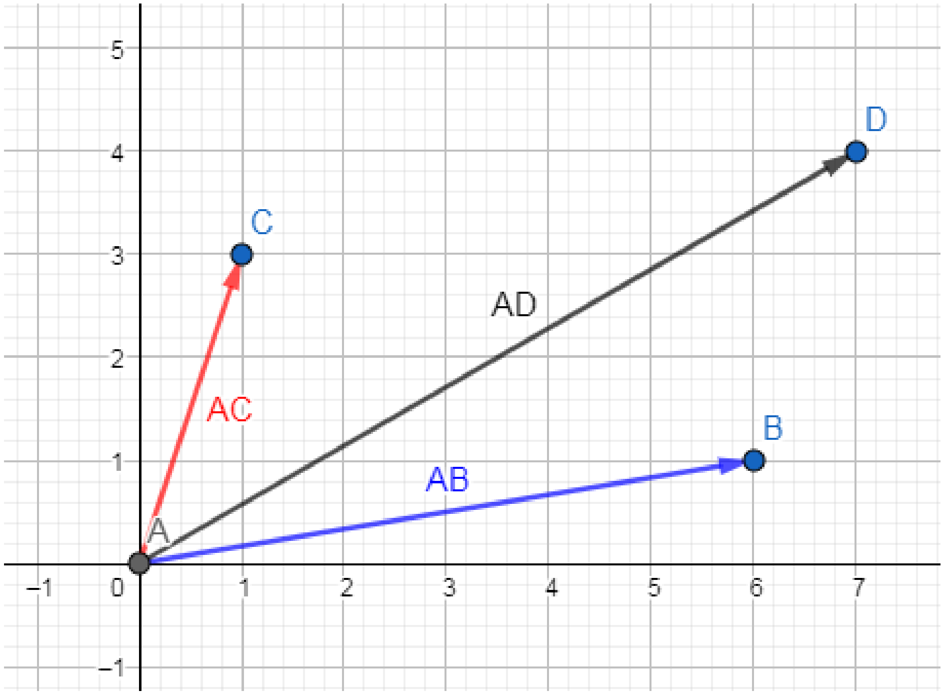
c) El vector $2\mathbf{r}_1$



Ejemplo 2.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
b) El vector $\overrightarrow{CB}$
c) El vector $2\mathbf{r}_1$



Sol. a)

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \langle 6,1 \rangle + \langle 1,3 \rangle = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{i} + 3\mathbf{j} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \langle 7,4 \rangle = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

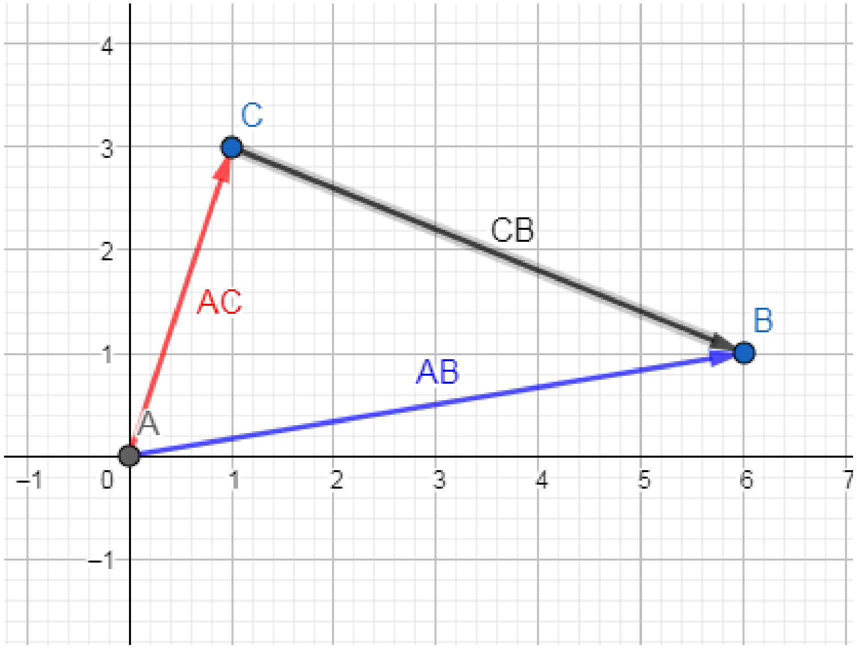
Ejemplo 2.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

b) El vector $\overrightarrow{CB}$

c) El vector $2\mathbf{r}_1$



Sol. b)

$$\overrightarrow{CB} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \langle 6,1 \rangle - \langle 1,3 \rangle = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} \; - (\; \mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

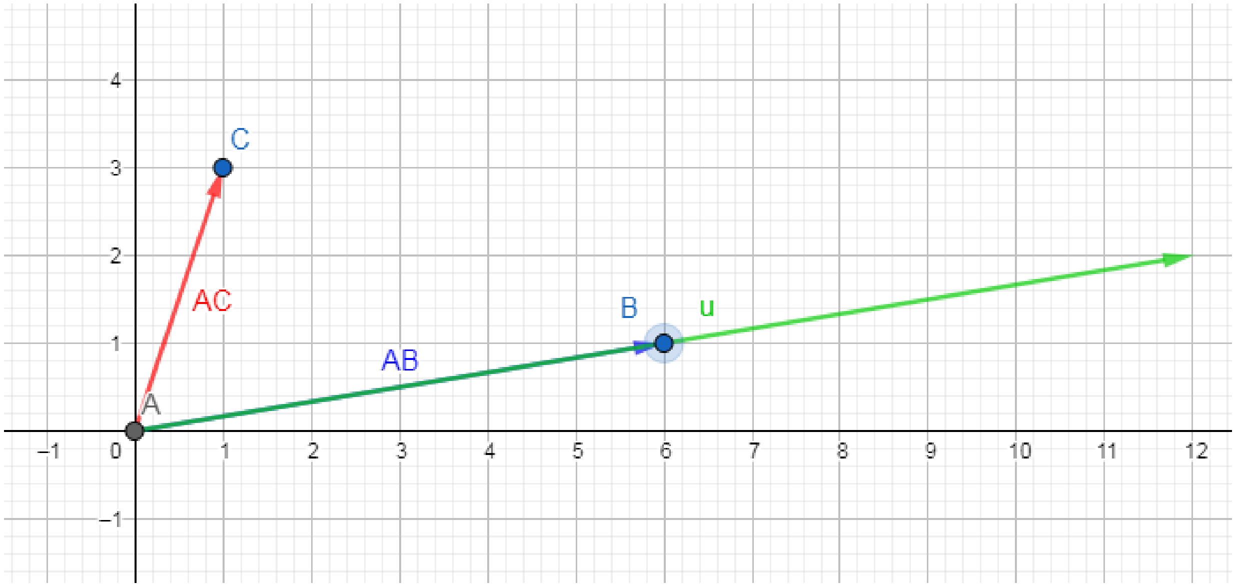
$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \langle 5,-2 \rangle = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

Ejemplo 2.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
b) El vector $\overrightarrow{CB}$
c) El vector $2\mathbf{r}_1$

Sol. 3)



$$2\mathbf{r}_1 = 2\overrightarrow{AB} = 2\langle 6,1\rangle = 2(6\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \langle 12,2\rangle = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Vector unitario en la dirección de cualquier vector

Dado un vector cualquiera

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad donde \ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Un vector unitario en la dirección de **r** está dado por la expresión:

$$\mathbf{u_r} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r}$$

$$|\mathbf{u_r}| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\right| = \left|\left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}$$

$$|\mathbf{u_r}| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Ejemplo 3.- Dado el vector: $\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} = \langle -3,5 \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow (0,0),(-3,5)$

Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que **r**.

Sol.- Encontremos primeramente el modulo de r:

$$|\mathbf{r}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{34}$$

Aplicando la fórmula para el vector unitario

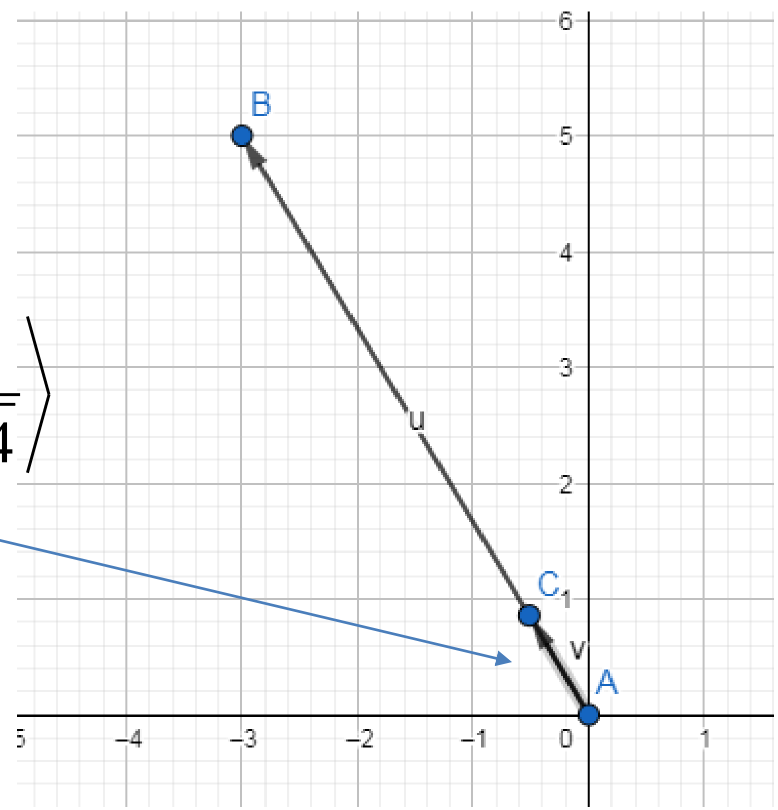
$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{34}}\langle -3,5 \rangle = \left\langle -\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right\rangle \rightarrow (0,0),\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right)$$

Ejemplo 3.- Dado el vector: $\mathbf{r}=\overrightarrow{AB}=-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}=\langle -3,5\rangle=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\rightarrow(0,0),(-3,5)$

Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que **r**.

Geométricamente:

$$\mathbf{u_r}=\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r}=\left\langle -\frac{3}{\sqrt{34}},\frac{5}{\sqrt{34}}\right\rangle$$



Ejemplo 4.- Dado el vector: $\mathbf{r} = \overrightarrow{BC} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Encontrar un vector que tenga la misma dirección que **r** y que tenga una magnitud de 10 unidades.

Sol. Encontremos primeramente el modulo de **r**:

$$|\mathbf{r}| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

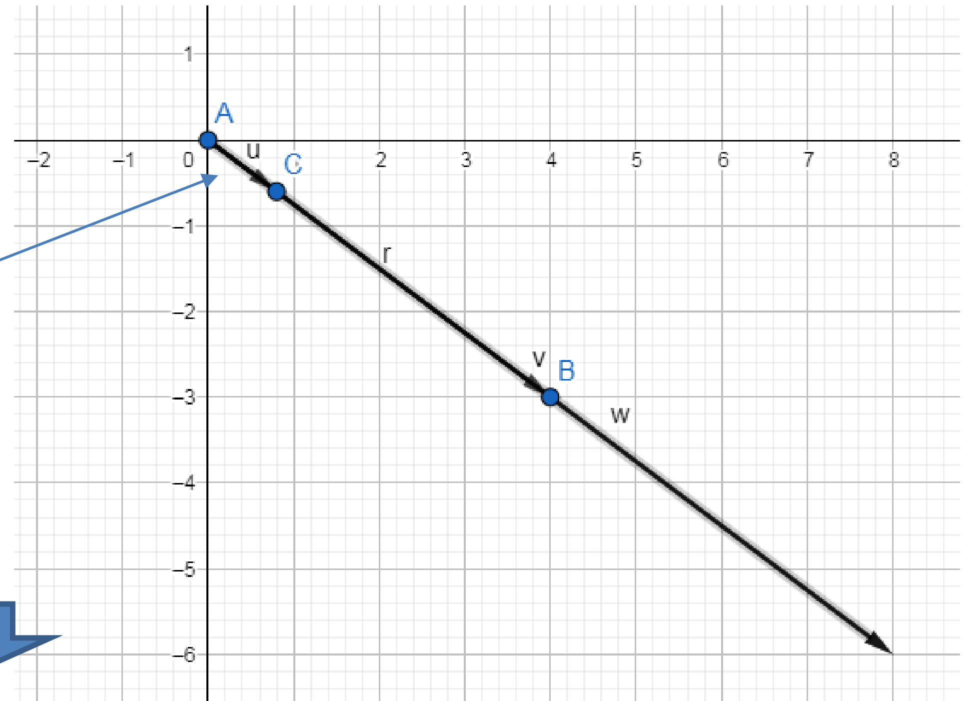
Aplicando la fórmula para el vector unitario

$$\mathbf{u}_\mathbf{r} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r} = \frac{1}{5}\langle 4, -3\rangle = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$$

$$10\mathbf{u}_\mathbf{r} = 10\left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle = \langle 8, -6\rangle \rightarrow \left|\langle 8, -6\rangle\right| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Ejemplo 4.- Dado el vector: $\mathbf{r} = \overrightarrow{BC} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Encontrar un vector que tenga la misma dirección que **r** y que tenga una magnitud de 10 unidades.

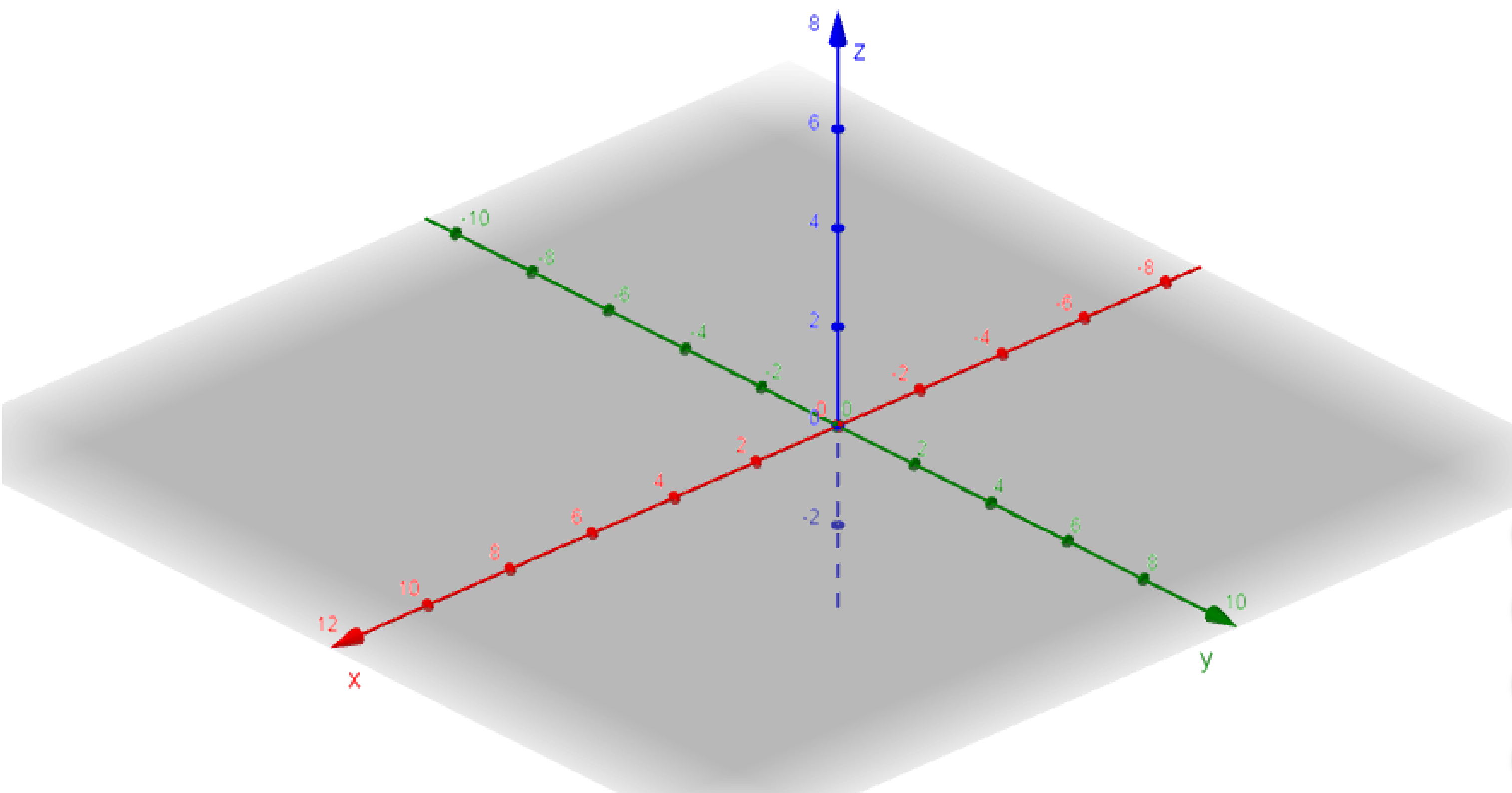


$$\mathbf{u_r} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r} = \frac{1}{5}\langle 4,-3\rangle = \left\langle \frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right\rangle$$

$$10\mathbf{u_r} = 10\left\langle \frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right\rangle = \langle 8,-6\rangle \rightarrow \left|\langle 8,-6\rangle\right| = \sqrt{64+36} = 10$$

$$10\mathbf{u_r} = \langle 8,-6\rangle = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

Espacio Tridimensional $\Re^3$



Ejemplo 5.- Dado el vector:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \langle -3,5,4 \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow (0,0,0),(-3,5,4)$$

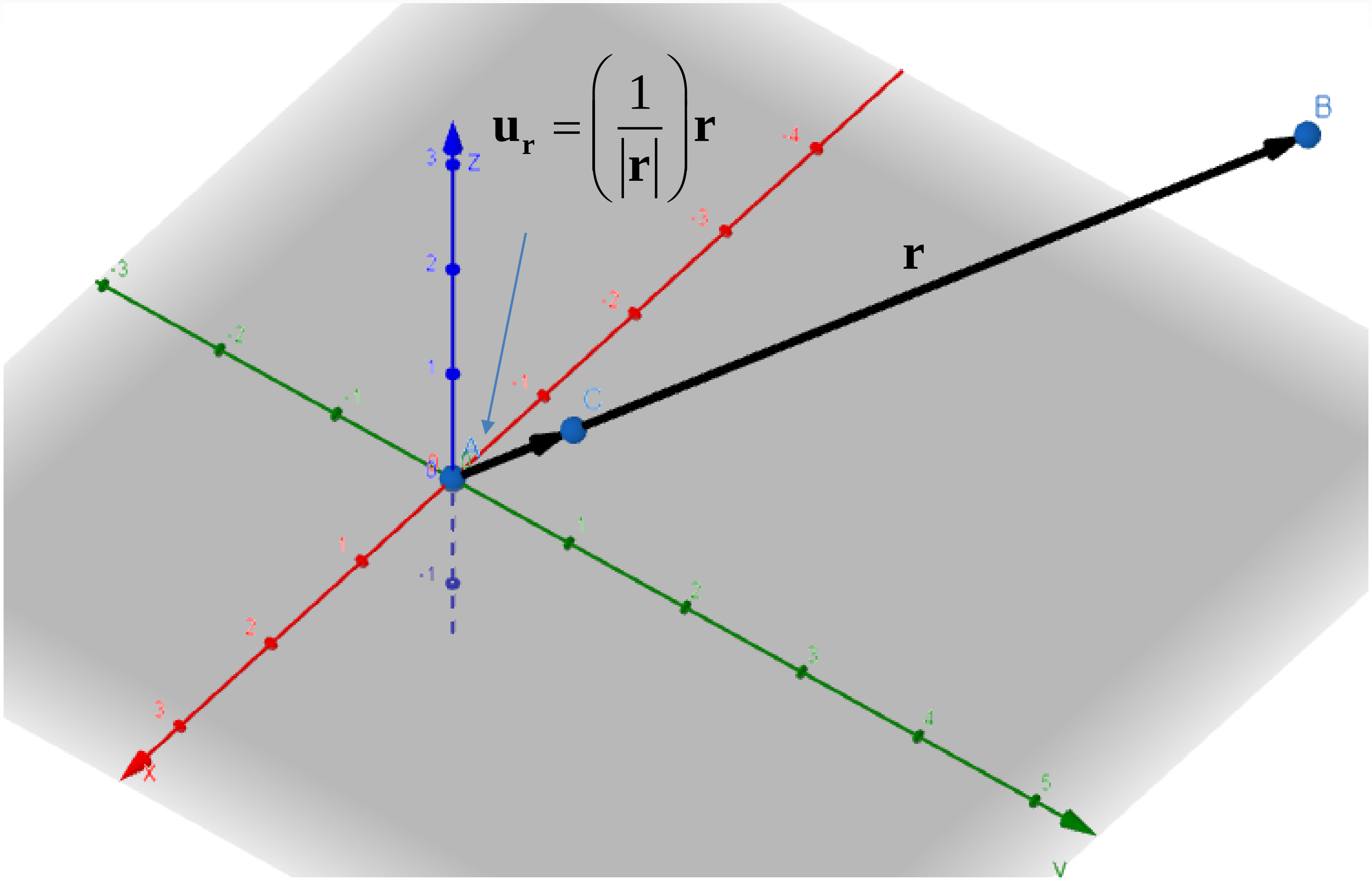
Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que **r**.

$$|\mathbf{r}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (4)^2} = \sqrt{50}$$

Sol. Encontremos primeramente el modulo de r:

$$\mathbf{u_r} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{50}}\langle -3,5,4 \rangle = \left\langle -\frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}} \right\rangle \rightarrow (0,0,0),\left(-\frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}\right)$$

Aplicando la fórmula para el vector unitario


$\mathbf{u}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\mathbf{r}$
r
B
C
A
z
x
y

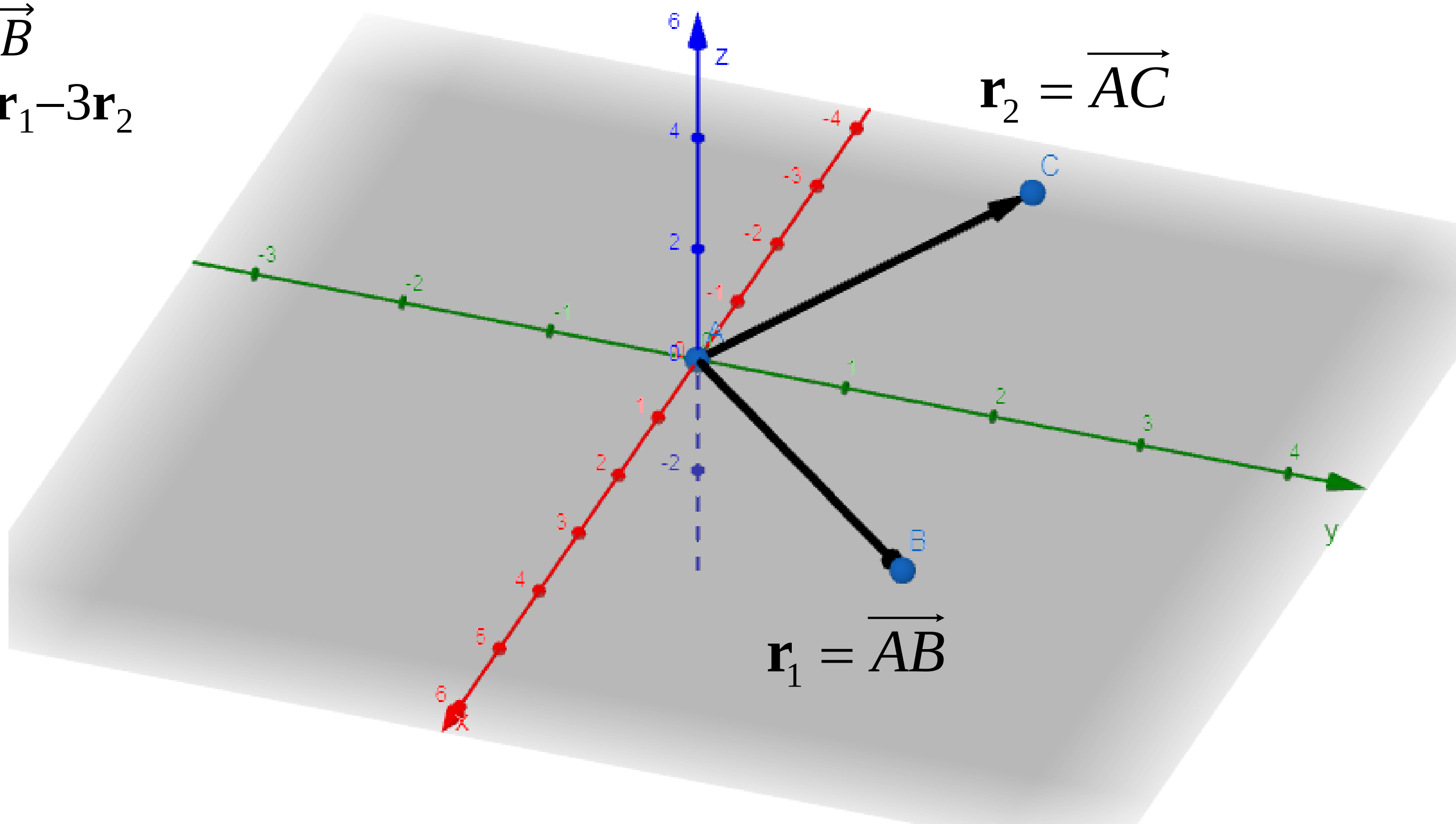
Ejemplo 6.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

b) El vector $\overrightarrow{CB}$

c) El vector $4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2$



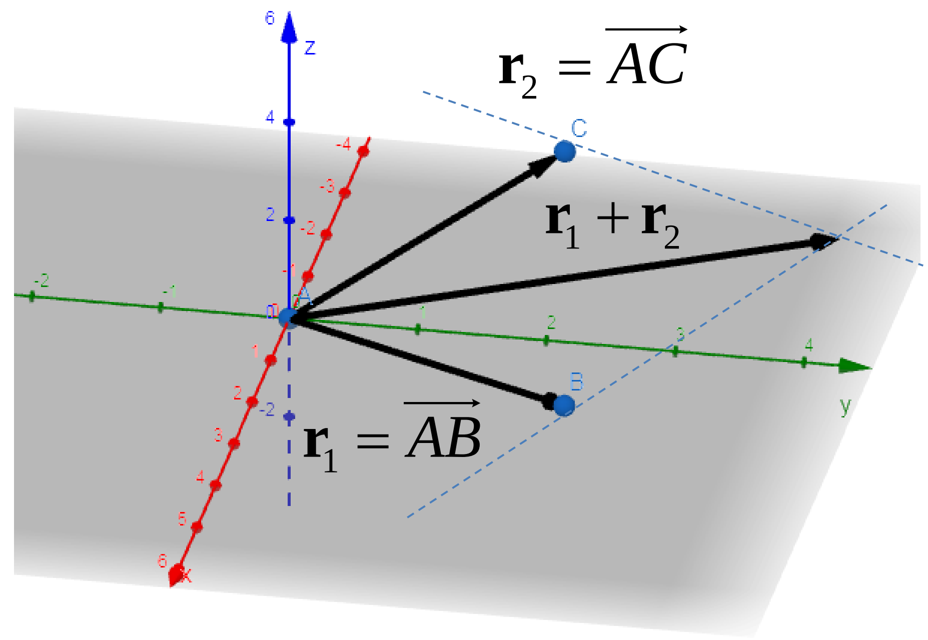
Ejemplo 6.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$

b) El vector $\overrightarrow{CB}$

c) El vector $4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2$



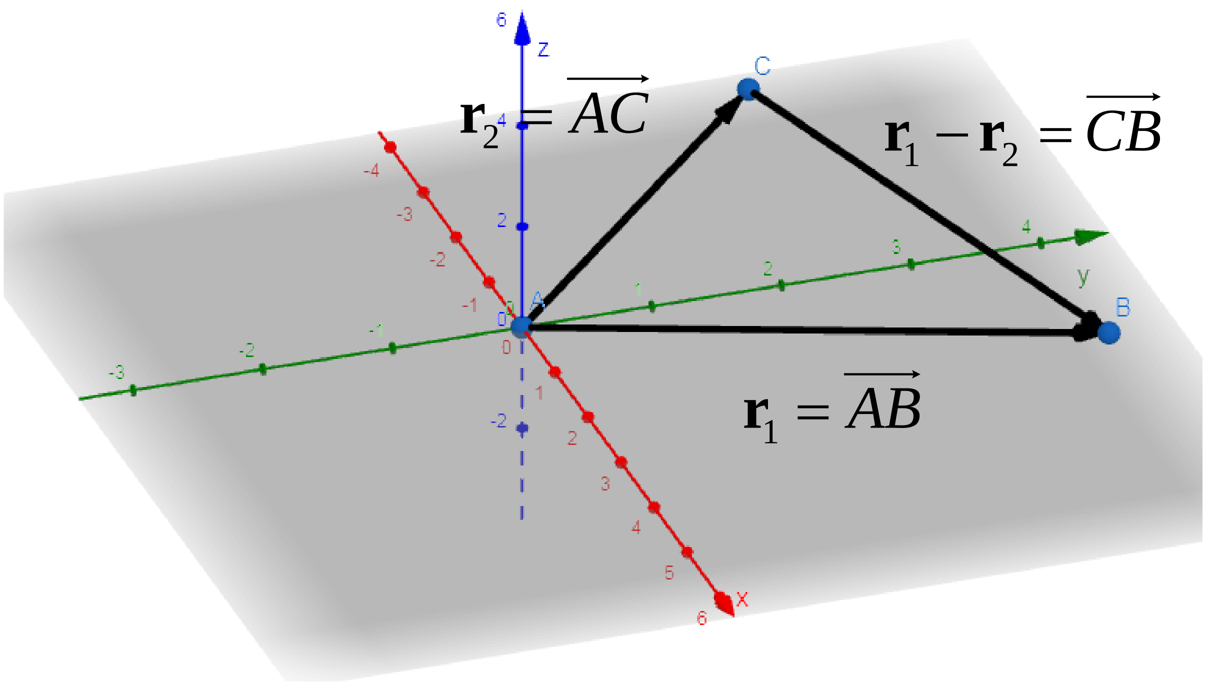
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \langle 6,3,4 \rangle + \langle -1,2,3 \rangle = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \langle 5,5,7 \rangle$$

Ejemplo 6.- Dados los vectores, encontrar:

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
b) El vector $\overrightarrow{CB}$
c) El vector $4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2$



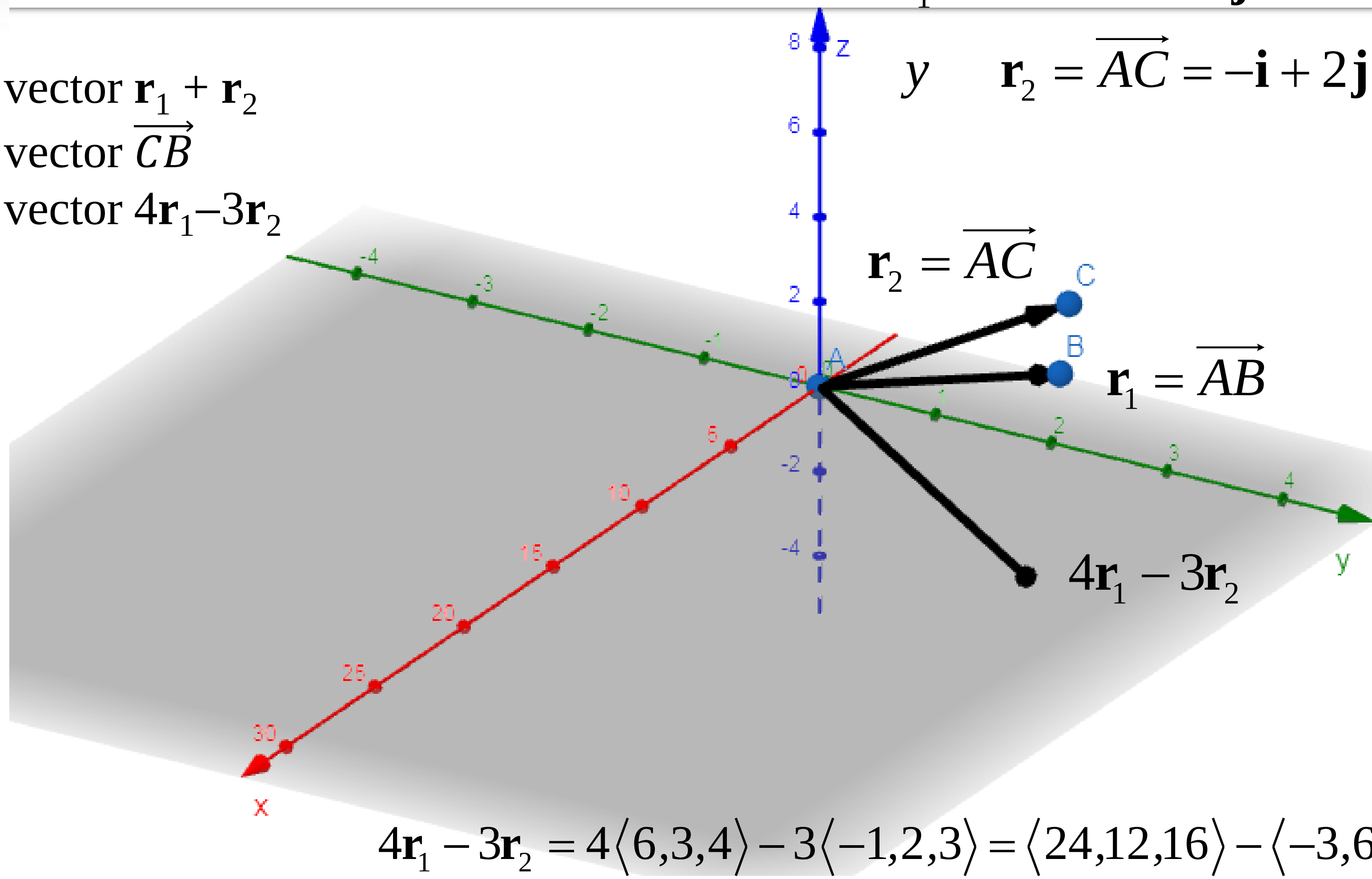
$$\overrightarrow{CB} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \langle 6,3,4 \rangle - \langle -1,2,3 \rangle = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} - (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \langle 7,1,1 \rangle$$

Ejemplo 6.- Dados los vectores, encontrar: $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$y \quad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

a) El vector $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
b) El vector $\overrightarrow{CB}$
c) El vector $4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2$



$$4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 = 4\langle 6,3,4\rangle - 3\langle -1,2,3\rangle = \langle 24,12,16\rangle - \langle -3,6,9\rangle$$

$$4\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 = \langle 27,6,7\rangle$$

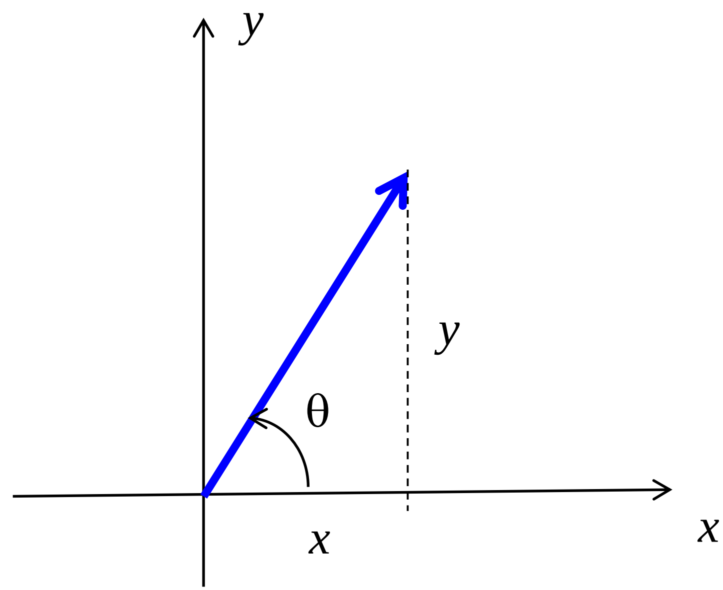
Dirección de un Vector en 2D

Dado un vector cualquiera: $\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

El ángulo director, la medida angular que le da la dirección al vector y que se mide siempre en contra de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje *x*, viene dado por:

$$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Este ángulo director puede ser agudo, recto, obtuso, llano, entrante o perigonal, dependiendo de la ubicación del vector en los cuadrantes



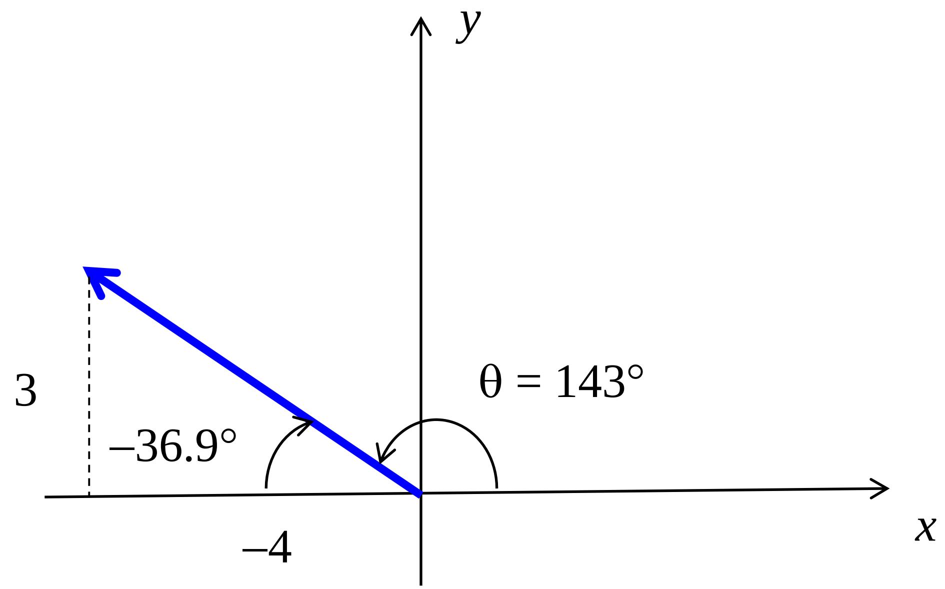
Dirección de un Vector en 2D

Ejemplo 7.- Dado el vector : $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = \langle -4, 3 \rangle = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Encontrar su ángulo director

$$\theta = arctan\left(\frac{-3}{4}\right) = -36.8698°$$

$$\theta = -36.8698° + 180° = 143.13°$$



Este ángulo director es obtuso ya que el vector se encuentra en el segundo cuadrante

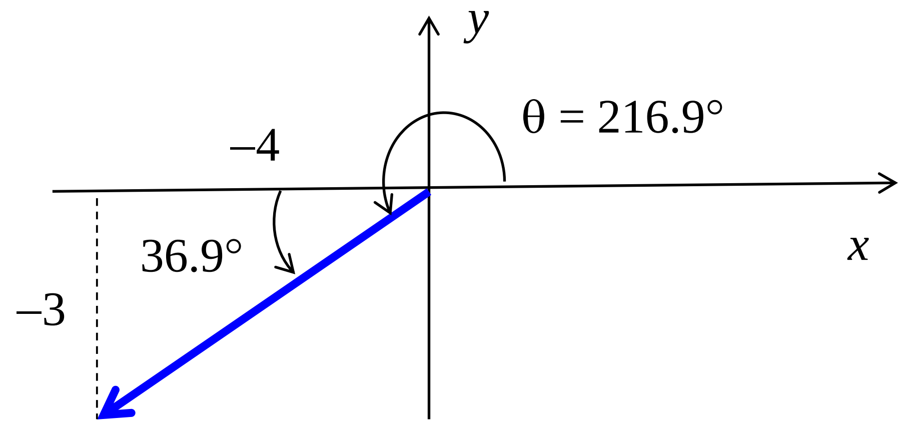
Dirección de un Vector en 2D

Ejemplo 8.- Dado el vector : $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = \langle -4, -3 \rangle = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Encontrar su ángulo director

$$\theta = arctan\left(\frac{-3}{-4}\right) = 36.8698°$$

$$\theta = 36.8698° + 180° = 216.8698°$$



Este ángulo director es entrante ya que el vector se encuentra en el tercer cuadrante

Los ángulos medidos en contra de las manecillas del reloj son *positivos*, caso contrario son *negativos*

Dirección de un Vector en 3D

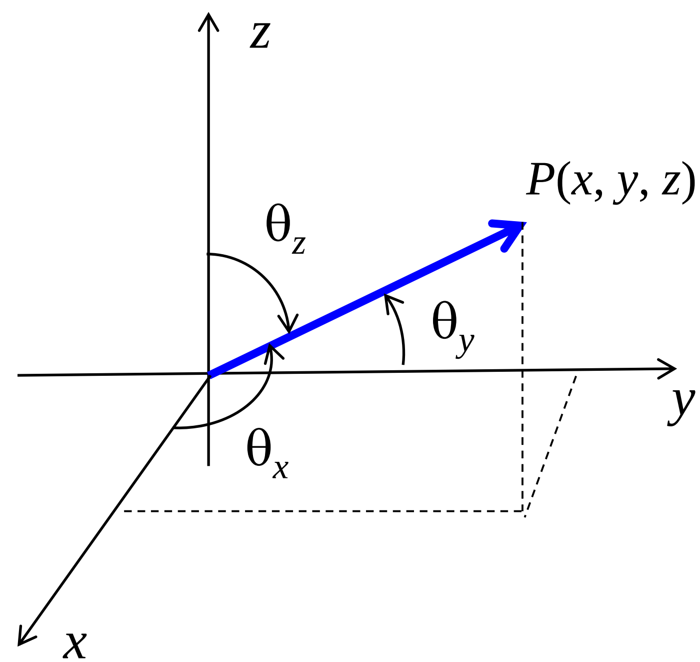
Dado un vector cualquiera: $\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \langle x, y, z \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Los ángulos directores θ_x, θ_y y θ_z medidos desde la parte positiva de los ejes *x*, *y* y *z* respectivamente se calculan mediante las relaciones

$$\cos(\theta_x) = \frac{x}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \theta_x = \arccos\left(\frac{x}{|\mathbf{r}|}\right)$$

$$\cos(\theta_y) = \frac{y}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \theta_y = \arccos\left(\frac{y}{|\mathbf{r}|}\right)$$

$$\cos(\theta_z) = \frac{z}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \theta_z = \arccos\left(\frac{z}{|\mathbf{r}|}\right)$$



Dirección de un Vector en 3D

Ejemplo 9.- Dado el vector:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \langle 4,5,3 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar su dirección en el espacio $\Re^3$

Sol.- El modulo del vector es:

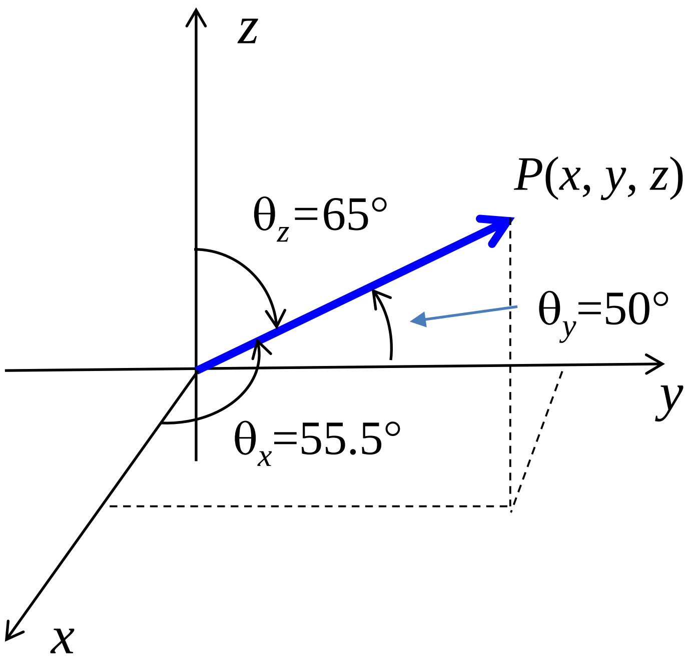
$$|\mathbf{r}| = |\langle 4,5,3 \rangle| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7.071$$

Por lo tanto, los ángulos directores son:

$$cos(\theta_x) = \frac{x}{|\mathbf{r}|} = \frac{4}{7.071} \rightarrow \theta_x = arccos(0.5656) = 55.5°$$

$$cos(\theta_y) = \frac{y}{|\mathbf{r}|} = \frac{5}{7.071} \rightarrow \theta_y = arccos(0.7071) = 50°$$

$$cos(\theta_z) = \frac{z}{|\mathbf{r}|} = \frac{3}{7.071} \rightarrow \theta_z = arccos(0.4242) = 64.9°$$



Dirección de un Vector (Resumen)

La dirección de un vector se determina:

- Mediante el ángulo director θ en V^2.
- Mediante los ángulos directores θ_x, θ_y y θ_z en V^3.