TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXIC

Ingeniería en Sistemas Computacional

Simulacio

Unidad III: Generación de Variables Aleatori

Material de clase desarrollado para la asignatura de **Simulación** para Ingeniería en Sistemas Computacio

SIMULACIÓN

FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA DE SOFTWARE

Unidad	Temas	Subtemas
3	Generación de variables aleatorias	3.1 Conceptos básicos 3.2 Variables aleatorias discretas 3.3 Variables aleatorias continuas 3.4 Métodos para generar variables aleator 3.4.1 Método de la transformada inversa. 3.4.2 Método de convolución. 3.4.3 Método de composición. 3.5Procedimientos especiales 3.6 Pruebas estadística. (Pruebas de bonda de ajuste)

Generación de Variables Aleatorias

- Se llama números pseudoaleatorios a una sucesión determinística de núme
en el intervalo [0,1] que tiene las mismas propiedades estadísticas que u
sucesión de números aleatorios.
- Los números pseudoaleatorios son necesarios cuando se pone en práctica
modelo de simulación, para obtener observaciones aleatorias a partir
distribuciones de probabilidad.
- Los números aleatorios generados en un inicio por una computadora c
siempre son números aleatorios enteros

SIMULACIÓN

- La generación de variables aleatorias significa la obtención de variables c
siguen una distribución de probabilidad determinada.

La generación de variables aleatorias consta de dos etapas:

- Generar números aleatorios distribuidos uniformemente (R).
- Generar con (R) y con las distribuciones de probabilidad las variab
aleatorias.

SIMULACIÓN

¿Por qué se usa la generación de variables aleatorias?

- Se utiliza para establecer la probabilidad de que ocurra un evento, a través de simulación se generar distintos escenarios con lo cual se pueden obtener u distribución y un modelo de comportamiento.

Números aleatorios y sus propiedades:

- Una secuencia de números aleatorios R1, R2, debe tener dos importar propiedades estadísticas: uniformidad e independencia.
- Cada número aleatorio Ri es una muestra independiente tomada de u distribución continua, uniforme entre cero y uno. Esto es la función de densi de probabilidad.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a > 0, b > 0$$

SIMULACIÓN

- Para la probabilística se requiere generar modelos que emulen comportamiento de la variable correspondiente.

- Los números pseudoaleatorios son la base para realizar simulaciones dor hay variables aleatorias, porque estos números generan even probabilísticos; inicialmente se parte de la generación de núme pseudoaleatorios uniformes entre cero (0) y uno (1).

- Los métodos más empleados para la generación de variables aleatorias son:

Método de la transformada inversa

- Consiste en emplear la distribución acumulada *F(x)* de la distribución probabilidad a simular por medio de integración; como el rango de *F(x)* encuentra en el intervalo de cero (0) a uno (1), se debe generar un núme aleatorio *ri* para luego determinar el valor de la variable aleatoria cu distribución acumulada es igual a *ri*.
- El problema de este método radica en el hecho que algunas veces se dificu demasiado la consecución de la transformada inversa.

SIMULACIÓN

Generación de Variables Aleatorias

En el área de conocimiento de la estadística, los elementos cuantificables que en ella se pueden analizar vienen expresados de dos formas:

- Por variables
- Por atributos

Tanto las variables como los atributos poseen elementos distinguibles entre sí.

SIMULACIÓN

Los datos **variables** son aquellos que pueden tomar cualquier valor entero o fraccionario.

Por **ejemplo**: las dimensiones de un objeto, peso, y cualquier otro rasgo característico que tenga que ver co dimensión, peso y otras propiedades físicas medibles.

SIMULACIÓN

En el caso de los **atributos**, estos datos vienen en números enteros, y son aquellos casos en los que el elemento de interés es cuantificable (tiene que ver con conteos, cantidades o números).

Por **ejemplo**: toneladas de maíz cosechadas, arneses que cumplieron con el estándar de calidad, número de vehículos producidos en un turno, etc.

SIMULACIÓN

La **variable aleatoria** es una característica física de un objeto, la cual es cuantificable y puede tomar cualquier valor dentro de una distribución de probabilidad.

SIMULACIÓN

La variable aleatoria se puede diferenciar dependiendo del tipo de datos que representa; éstas pueden ser:

- **Continuas (datos variables)**.
- **Discretas (datos por atributos)**.

1. Variables aleatorias discretas

- Algunas distribuciones asociadas con las variables aleatorias discretas son:
  - Uniforme discreta
  - Hipergeométrica
  - Poisson
  - Binomial
- Podemos asociar a éstas u otras distribuciones de probabilidad el comportamiento de una variable aleatoria

SIMULACIÓN

Binomial

- La **distribución binomial** es una distribución discreta que se utiliza cuando se unen una serie de eventos independientes, comúnmente cuando se realizan una serie de pruebas una y otra vez.

- La función binomial viene dada por:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Donde: n = número de pruebas.

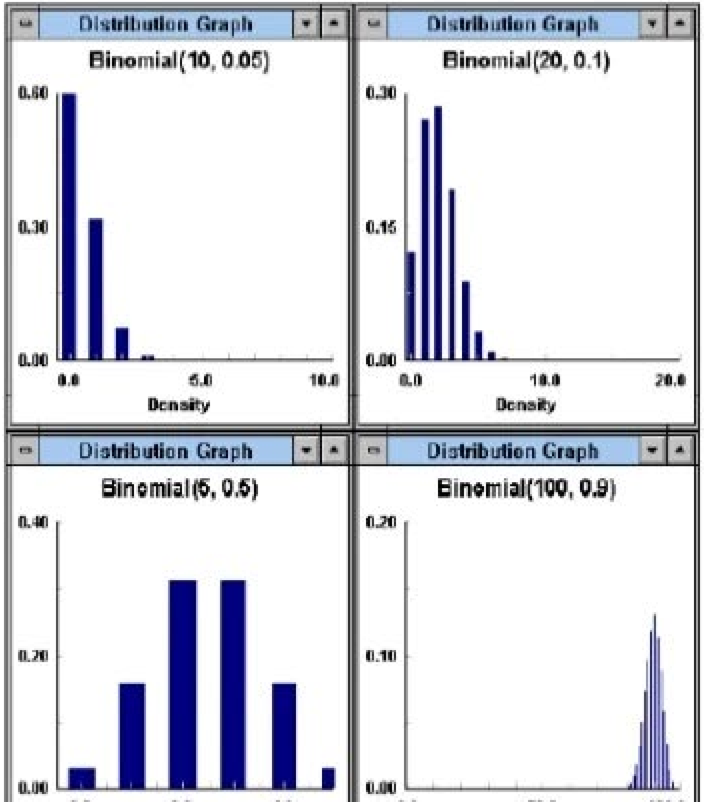
P = probabilidad de que ocurra un evento

SIMULACIÓN

Tipos de variables aleatorias

- En la práctica, la **distribución binomial** es comúnmente utilizada en muestreo de procesos para encontrar piezas no-conformes o cualquier otra metodología para muestreo de piezas donde la probabilidad de eventos se mantenga constante.

- Su forma es como se muestra en las siguientes gráficas:



SIMULACIÓN

Poisson

- La **distribución poisson** es una distribución discreta con límite (0) en su lado más bajo, y sin límite en su lado mayor.

- La función viene dada por:

$$P(x)= \frac{e^{x}\lambda^{x}}{x!}$$

Donde: λ = probabilidad de ocurrencia

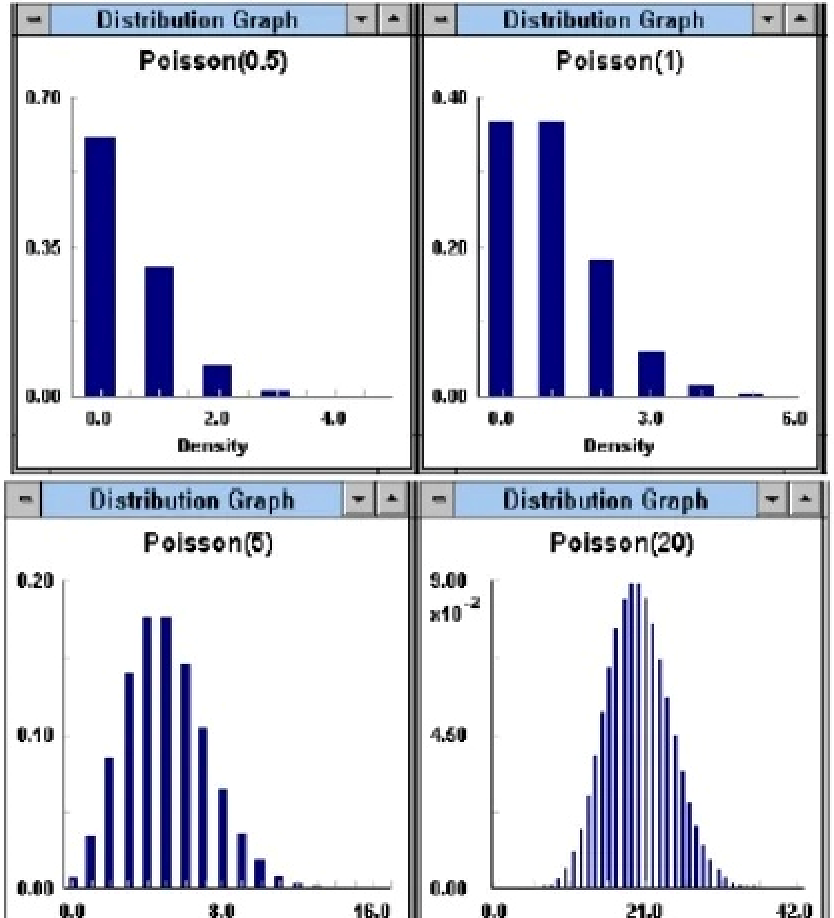
SIMULACIÓN

- En la vida real, la **distribución poisson** se utiliza para
  - Modelar el número de usuarios que llamarán a un teléfono de atención a clientes.
  - Defectos en piezas.
  - Aspectos generales del control de calidad.

- Esta distribución es base en la aplicación de teoría de colas.

SIMULACIÓN

- El valor más elevado de la distribución se alza casi en el valor de lambda para posteriormente caer hacia el otro lado.



SIMULACIÓN

Uniforme discreta

- La **uniforme discreta** es una distribución con límites en valores $[min, max]$ con una probabilidad constante en cada uno de sus valores.

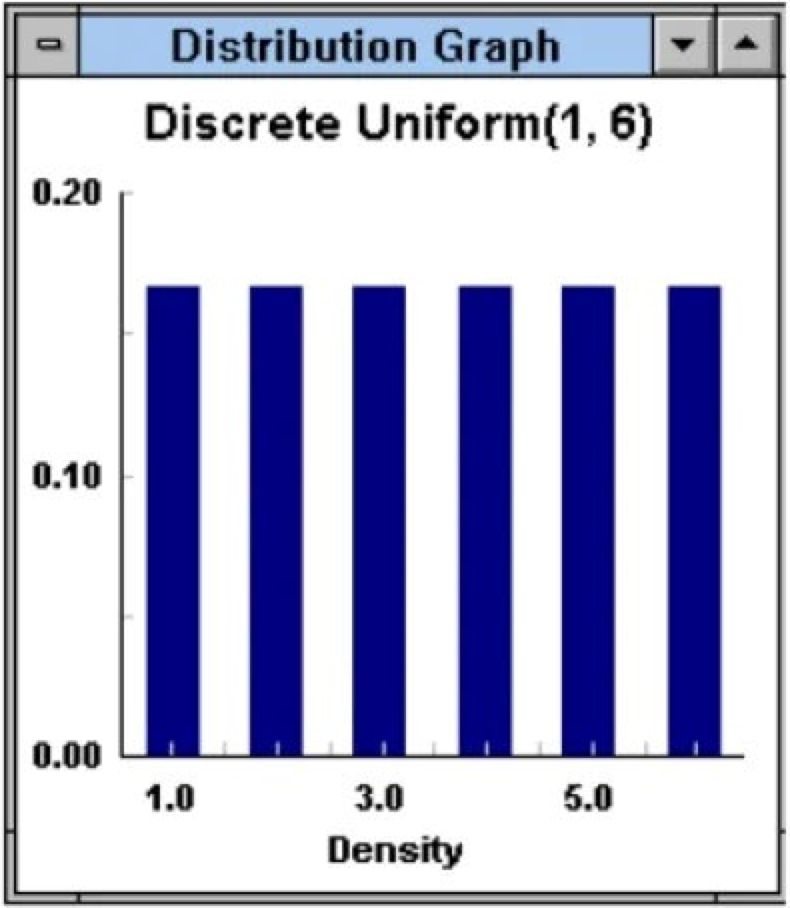
$$P(x)=\frac{1}{max-min+1}$$

Donde: max = valor máximo para x.

min = valor mínimo para x.

SIMULACIÓN

- Esta distribución se exhibe cuando un evento tiene un número igualmente probable de sucesos; como por ejemplo lanzar un solo dado o moneda.



SIMULACIÓN

Hipergeométrica

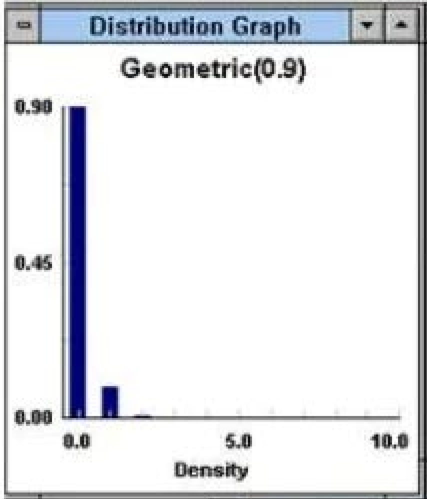
- La **distribución hipergeométrica** no tiene límite en s lado más elevado, y viene limitado por (0) en el lado más bajo.

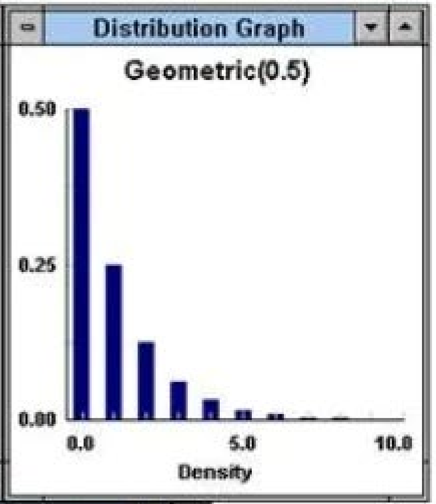
- Su función es: $P(x) = p(1-p)^n$

Donde: p= probabilidad de ocurrencia

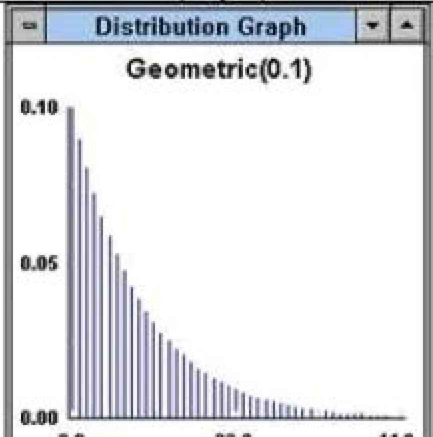
SIMULACIÓN

- Es un caso particular de la binomial negativa y es también la distribución discreta similar a la distribución exponencial continua.



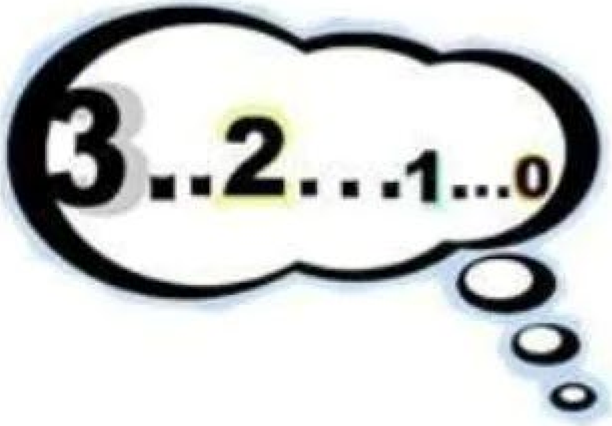


- Es utilizada ampliamente en control de inventarios, encuestas de mercado e incluso en modelos meteorológicos.



2. Variables aleatorias continuas

- Entre las distribuciones de probabilidad continuas tenemos las siguientes:
  - Uniforme continua
  - Exponencial
  - Normal
  - Weibull
  - Chi-cuadrada
  - Erlang



SIMULACIÓN

Uniforme continua

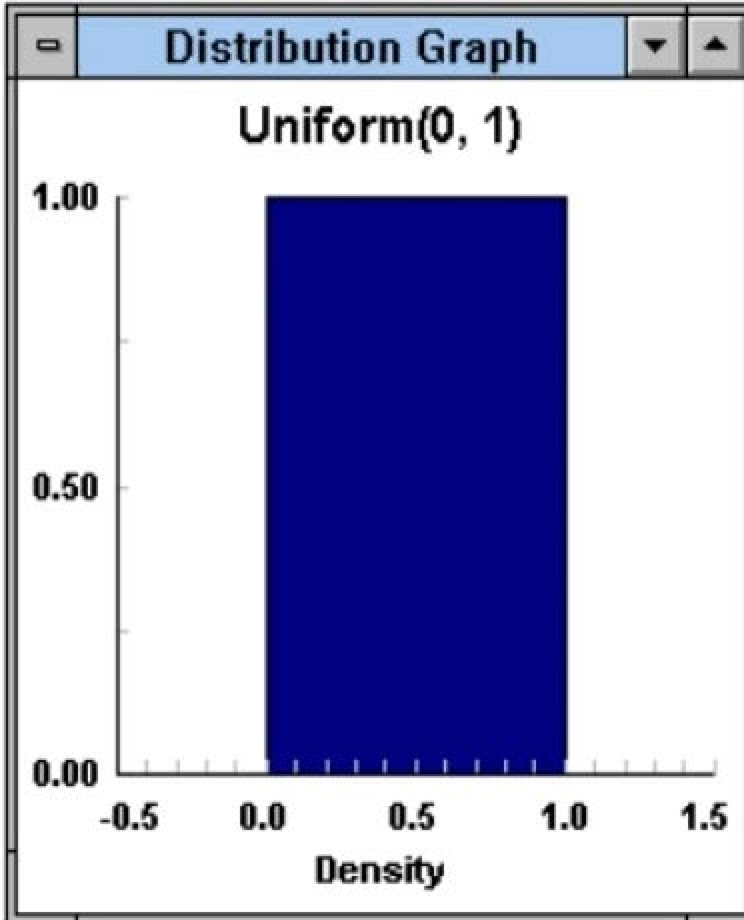
- La **uniforme continua** es una distribución con límites a ambos lados.
- Es un caso particular de la distribución beta.
- Su función es:

$$P(x) = \frac{1}{max - min + 1}$$

Donde: max = valor máximo para x.
min = valor mínimo para x.

SIMULACIÓN

- La **distribución uniforme continua** es utilizada para representar una variable aleatoria con una probabilidad constante de ocurrencia dentro de un valor mínimo y máximo.
- Básicamente el proceso de generar números aleatorios (0;1) es un ejemplo de ello.



SIMULACIÓN

Exponencial

- La **distribución exponencial** es una distribución continua limitada hacia su lado menor. Su forma es cas siempre la misma, comenzando con su valor más alto o finito (min) para después ir cayendo hacia un lado.
- Su función viene dada por:

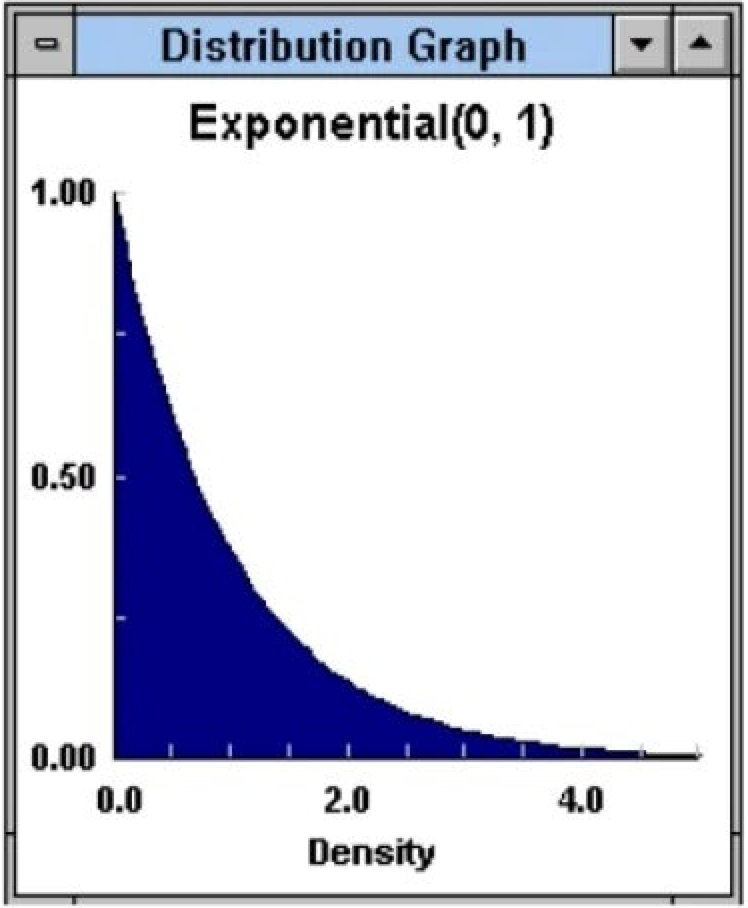
$$f(x)= \frac{1}{\beta}\, exp\left(-\frac{[x-min]}{\beta}\right)$$

Donde: min = mínimo valor de x.

β (beta)= parámetro de escala = media.

SIMULACIÓN

- La **distribución exponencial** es utilizada comúnmente para representar el tiempo entre eventos, tales como el tiempo entre llegadas a una locación específica o el tiempo medio entre fallos (*mean time between failure*), utilizado ampliamente en mantenimiento preventivo total (TPM - *Total Preventive Maintenance* por sus siglas en inglés).



SIMULACIÓN

Normal

- La **distribución normal** es una distribución continua si
límites.
- Es plenamente identificable por su forma de campana (campana de Gauss).
- Su función es:

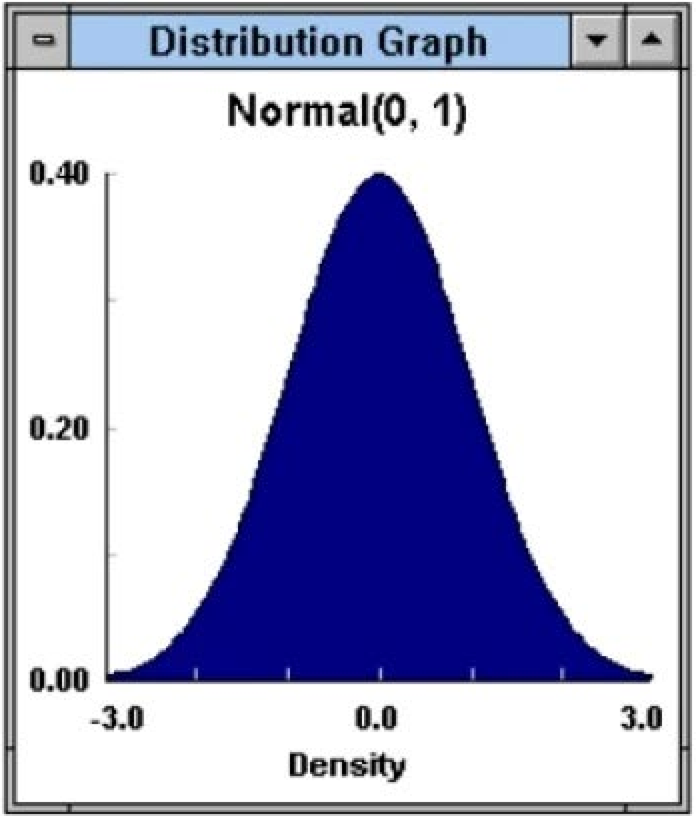
$$f(x)= \frac{1}{\sqrt{2x\,\sigma^2}}\; exp\left(-\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right)$$

Donde: μ = parámetro de cambio = media.

σ = parámetro de escala = sigma.

SIMULACIÓN

- La **distribución normal** tiene muchos usos en estadística; estimación de proporción de piezas defectuosas o no conformes, prueba de hipótesis, intervalos de confianza y recientemente en seis sigma.
- Si los datos poseen un valor mínimo, es preferible utilizar otra distribución como la Weibull o la Erlang.



SIMULACIÓN

Weibull

- La **distribución Weibull** es una distribución que tiene un límite en su lado más bajo.
- Es una distribución que posee tres regiones (parámetros) distintas:

$$f(x)= \frac{\alpha}{\beta}\,((x-min)/\beta)^{\alpha-1}\,\exp(-\left(\frac{[x-min]}{\beta}\right)^{\alpha})$$

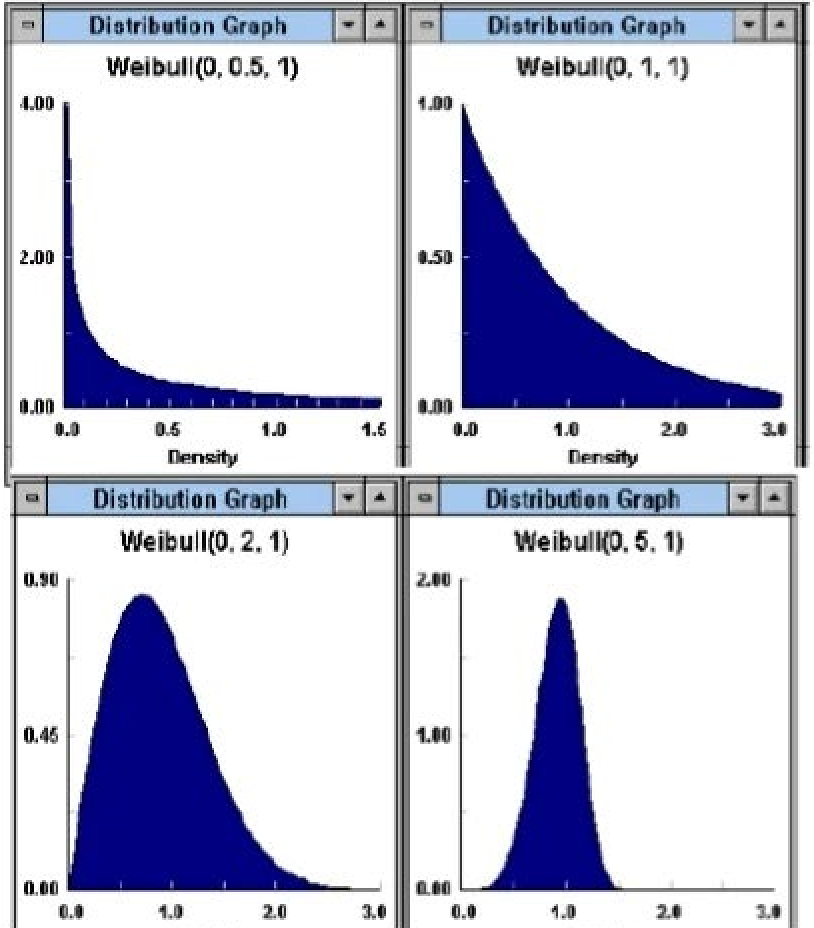
Donde: min = valor mínimo de x.

α (alpha) = parámetro de forma >0.

β (beta) = parámetro de escala >0.

SIMULACIÓN

- La **distribución Weibull** es ampliamente utilizada en resistencia de materiales.
- En el área industrial puede utilizarse también en tiempos de paro.
- De esta distribución se derivan el resto de las distribuciones continuas.



Distribución Erlang

- Es una distribución continua con límite en su lado más bajo.
- Es un caso particular de la exponencial, cuando el parámetro (m) es igual a 1.
- Su función es:

$$f(x)= \left(\frac{x-min^{\,m-1}}{\beta^{m}\,\Gamma(m)}\right) exp\left(- \left(\frac{[x-min\,]}{\beta}\right)\right)$$

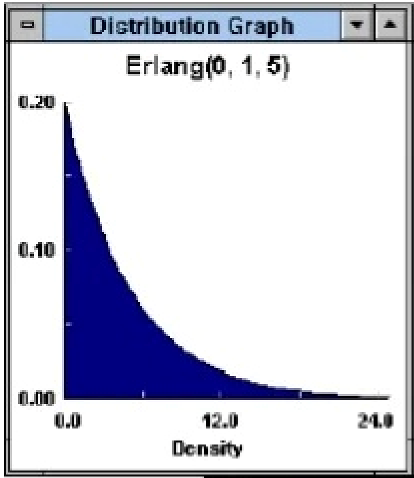
Donde: min = valor mínimo de x.

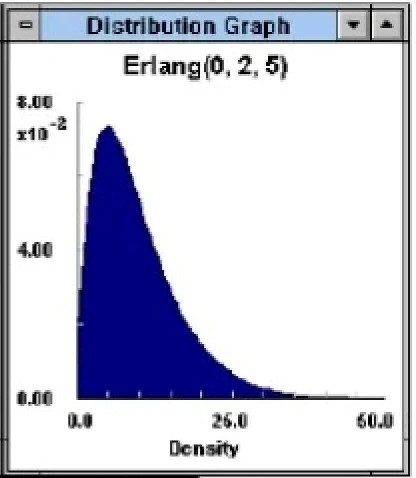
m = parámetro de forma.

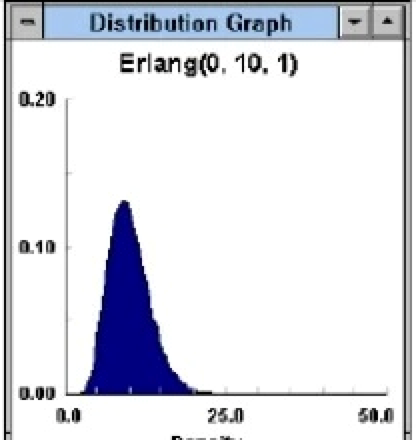
β (beta) = parámetro de escala >0.

SIMULACIÓN

- El uso que se le da a esta distribución es tanto en confiabilidad del equipo (TPM) como en teoría de colas, así como en simulación discreta, ya que es tomada en cuenta como la sumatoria de variables exponencialmente distribuidas.







Determinación del tipo de distribución de un conjunto de datos

- Para conocer la distribución de probabilidad de un conjunto de datos históricos pueden utilizarse las pruebas:
  - Chi-cuadrada
  - Kolmogorov-Smirnov
  - Anderson-Darling

- Estas pruebas caen en la categoría de lo que en estadística se denomina pruebas de "bondad de ajuste" y miden, como el nombre lo indica, el grado de ajuste que existe entre la distribución obtenida a partir de la muestra y la distribución teórica que se supone debe seguir esa muestra.

SIMULACIÓN

- Recordemos que la prueba más utilizada para probar no solo la aleatoriedad en números pseudo aleatorios, sino cualquier prueba de bondad de ajuste es la **chi cuadrada $\boldsymbol{X_0^2}$**, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i}$$

Donde:

FO_i = Frecuencia observada del intervalo.

FE_i = Frecuencia esperada del intervalo.

SIMULACIÓN

La idea fundamental del tema que acabas de ver es ayudarte a comprender que a través de modelos matemáticos es posible acercarnos a la realidad o *status quo* que vive una empresa o un proceso día con día.

El punto es saber identificar el patrón o comportamiento de dicho sistema a través del empleo de distribuciones de probabilidad, y poder recrear ese sistema mediante la generación de números aleatorios.

SIMULACIÓN

Pero una vez que ya sabes que para poder identificar un patrón de llegadas o tasa de servicio en un sistema, éste debe expresarse en relación a una distribución de probabilidad:

¿Cómo podrías determinar en la vida real el patrón o comportamiento que tiene un proceso en una determinada empresa?