TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO TECNOLOGICO DE CIUDAD MADERO

Carrera: Sistemas Computacionales.

Materia: Matemáticas Discretas

Alumno: Luis Ricardo Reyes Villar

Numero de control: 21070343

Escuela de procedencia: Dirección General De Bachillerato |Centro De Estudios De Bachillerato 6/15

Grupo: 1504D

Hora: 3:00-4:00

Semestre: Agosto 2021 - Enero 2022

Foto

Reyes Villar Luis Ricardo

UNIDAD 2 (Parte 2)

Competencias

- Comprender el concepto de relación y su diferencia con una función
- Aprender a representar las funciones y relaciones de diferente manera.
- Aprender a realizar operaciones con relaciones
- Saber cuáles son las características de las relaciones de equivalencia y la manera en que una relación puede adquirirlas.
- Aplicar los conceptos de relación y función en la computación.

Reyes Villar Luis Ricardo

Ejemplo 6.1 Sean los conjuntos

$A = \{a | a \in Z; 10 < a < 30\}$

$B = \{b | b \in Z^{+}; b \leq 20\}$

y sea R una relación de A en B, en donde el elemento $a \in A$ es divisible entre 13 y B es prima.

Como resultando se obtiene la siguiente relación:

$R = \{(13,2), (13,3), (13,5), (13,7), (13,11), (13,13), (13,17), (13,19), (26,2),$
$(26,3), (26,5), (26,7), (26,11), (26,13), (26,17), (26,19)\}$

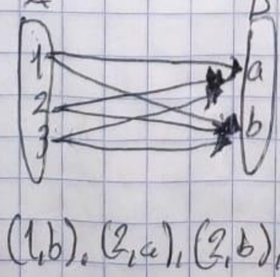
Hay que observar que las relaciones también se pueden representar como un conjunto de pares ordenados, en donde el elemento $a \in A$ está relacionado con el segundo elemento $b \in B$, por medio de cierta condición establecida. En este caso la condición es que el primer elemento de los pares ordenados sea un entero entre 10 y 30, divisible entre 13, y el segundo elemento es un entero positivo primo, menor o igual a 20. Otra forma de representar de este conjunto es

$R = \{(a,b) | a \in Z, b \in Z^{+}; a$ es divisible entre 13; $10 < a < 30$; b es primo, $b \leq 20\}$

Ejemplo 6.2. Sean los conjuntos

$A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$

El producto cartesiano $A \times B$ contiene todos los pares ordenados que resultan de relacionar todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B, como se muestra en la siguiente figura:



$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

Reyes Villar Luis Ricardo

Ejemplo 6.3. Sean los conjuntos

$A = \{2, 4, 5, 6, 7, 11\}$ y $B = \{b \mid b \in \mathbb{Z};\ 1 \leq b \leq 10\}$

Considérese que $a \mathcal{R} b$ si y sólo si b es divisible entre a. Por lo tanto, los elementos de la relación son:

$\mathcal{R} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7)\}$

$Dom(\mathcal{R}) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

$Cod(\mathcal{R}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

Ejemplo 6.4. Sean los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

y sea la relación $\mathcal{R}: A \to B$ tal que

$\mathcal{R} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,5), (3,2), (3,7), (4,2), (4,5), (5,6)\}$

Esta relación se puede representar en forma de matriz como sigue:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Los elementos del conjunto A se representan como filas y los del conjunto B como columnas. Se coloca un 1 si el par ordenado se encuentra en la relación y un 0 en caso contrario.

Ejemplo 6.5. Sean los conjuntos

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y\}$

y sea la relación $\mathcal{R}: A \to B$ tal que

$\mathcal{R} = \{(a,x), (a,y), (b,y), (c,x)\}$

Grafo dirigido

Reyes Villar Luis Ricardo

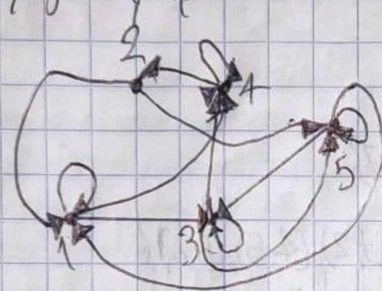
Ejemplo 6.6. Sean los conjuntos

$$A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y la relación

$R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

cuyo grafo y representación matricial son los siguientes:



Grafo de R

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Matriz de R

Ejemplo 6.7. Sean los conjuntos $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,4), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Determinar si la relación es reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

Solución. Las respuestas se pueden dar a partir de la matriz de la relación, ya que esto permite mayor cantidad

$$M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

1) La relación no es reflexiva ya que debería tener solamente unos en la diagonal principal, esto es, todos los elementos del conjunto A deberían estar relacionados consigo mismos. Por ejemplo $(2,2) \notin R$. Cuando no se cumplen con la propiedad, para demostrar esto es suficiente con exhibir un caso.

Reyes Villar Luis Ricardo

2) La relación no es irreflexiva ya que ningún elemento debería estar relacionado consigo mismo, lo cual significa que la diagonal principal deberá tener solamente ceros. A diferencia de esto, se tiene que por ejemplo $(1,1) \in R$.

3) La relación sí es simétrica ya que los pares de elementos colocados simétricamente alrededor de la diagonal principal son o bien ceros o unos [el simétrico de (2,3) es (3,2) y ambos deben ser ceros o bien unos, pero esto deberá cumplirse para todos los pares colocados simétricamente]. Una forma de saber si una relación es simétrica es por medio de su inversa (R^{-1}). Si $R = R^{-1}$ se dice que la relación es simétrica:

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,2),(4,2),(4,3),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

Es más fácil manejar la información por medio de una matriz. En este caso la matriz de la relación deberá ser igual a su inversa.

$$M_{R^{-1}} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Como se observa que $M_R = M_{R^{-1}}$, se puede concluir que R es una relación simétrica.

4) La relación no es asimétrica, ya que los pares de elementos colocados simétricamente alrededor de la diagonal deberían ser contrarios, esto es, si uno es cero su contrario debe ser uno. Además la diagonal principal deberá contener solamente ceros. En este caso se tiene por ejemplo que $(1,2) \in R$ y $(2,1) \in R$, pero si uno de ellos está contenido en la relación entonces su simétrico no debería estar en ella, sin embargo lo está y esto es suficiente para concluir que la relación R no es asimétrica. Además ningún elemento debería estar relacionado con él mismo, sin embargo no sucede eso ya que por ejemplo $(1,1) \in R$.

5) La relación no es antisimétrica ya que al menos uno de los pares ordenados colocados simétricamente debería ser cero y en la matriz se tiene que $(1,2) \in R$ y también que $(2,1) \in R$, lo mismo ocurre con los pares (2,4) y (4,2) así como con

Norma

(3,4) y (4,3). Conviene aclarar que no es necesario citar todos los casos para afirmar que la relación dada no es necesario citar todos los casos para afirmar que la relación dada no es asimétrica, ya que con un par de pares ordenados en donde no se cumpla la condición es suficiente para concluir que la relación no tiene cierta propiedad. Sin embargo, si se afirma que una relación tiene una propiedad entonces es necesario que se cumpla para todos los pares y no solamente para algunos.

6) La relación no es transitiva porque al menos existe un caso donde no se cumple que si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$. Un ejemplo de esto son los pares ordenados $(2,4)$ y $(4,2)$, ya que el par $(2,2)$ no pertenece a la relación. Esto mismo se pudo haber concluido si se observa que $M_R \neq M_R + (M_R)^2$

$$M_{R^2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} \odot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

$$M_R + M_{R^2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

Como $M_R \neq M_R + M_{R^2}$ entonces la relación R no es transitiva.

Ejemplo 6.8. Establecer si la siguiente relación es de equivalencia y plantear el argumento correspondiente.

Sean $A = B = \{1,2,3,4,5\}$ y

$R = \{(1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2),(2,5),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,5)\}$

1) Por inspección de R se ve que se cumple que aRa $\forall a \in A$, esto es, todo elemento del conjunto A está relacionado con él mismo. Otra forma de ver esto es observar que la diagonal principal de la matriz de la relación sólo contiene unos:

Reyes Villar Luis Ricardo

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2) Es una relación simétrica porque para todos los pares simétricos de la relación se cumple que si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$. Esto significa que $R = R^{-1}$:

$R = \{(1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2),(2,5),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,5)\}$

$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(5,1),(1,2),(2,2),(5,2),(3,3),(4,3),(3,4),(4,4),(1,5),(2,5),(5,5)\}$

O bien por medio de matrices se cumple que $M_R = M_{R^{-1}}$:

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad M_{R^{-1}} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3) También es una relación transitiva, ya que si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$, en todos los casos. Esto se puede observar fácilmente ya que $M_R = M_R + M$

$$M_{R^2} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_R + M_{R^2} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} + \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Norma

Reyes Villar Luis Ricardo

Como se trata de una relación de equivalencia, entonces sus clases de equivalencia son las siguientes:

$[1] = \{1,2,5\}$ Todos los elementos que estan relacionados con 1.

$[2] = \{1,2,5\}$ Todos los elementos que estan relacionados con 2.

$[3] = \{3,4\}$

$[4] = \{3,4\}$

$[5] = \{1,2,5$

Hay que observar que en ningún caso la clase de equivalencia es vacía, ya que la propiedad reflexiva hace que cuando menos contenga un elemento $(a \in [a])$.

La partición es un conjunto de conjuntos en donde están contenidos todos los elementos de A, pero en donde la intersección de esos conjuntos es vacía. En este caso se tienen dos particiones:

$$\lambda = \{[1],[3]\} = \{[1],[4]\} = \{[2],[3]\} = \{[2],[4]\} = \{[5],[3]\} = \{[5],[4]\}$$

$$\lambda = \{\{1,2,5\},\{3,4\}\}$$

Reyes Villar Luis Ricardo

(a,b) (b,c) (a,c)

a_{ij}

i = fila; j = columna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Multiplicación de matrices:

fila x columna

fila 1 x columna 1

$a_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$

fila 1 x columna 2

$a_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} + a_{14}a_{42} + a_{15}a_{52} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$

fila 1 x columna 3

$a_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 1 x columna 4

$a_{14} = a_{11}a_{14} + a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} + a_{14}a_{44} + a_{15}a_{54} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

Norma

Reyes Villar Luis Ricardo

fila 1 x columna 5

$a_{15} = a_{11}a_{15} + a_{12}a_{25} + a_{13}a_{35} + a_{14}a_{45} + a_{15}a_{55} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$

fila 2 de M_{R^2}

fila 2 x columna 1

$a_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} + a_{24}a_{41} + a_{25}a_{51} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

fila 2 x columna 2

$a_{22} = a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{25}a_{52} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

fila 2 x columna 3

$a_{23} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{43} + a_{25}a_{53} = (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 2 x columna 4

$a_{24} = a_{21}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{23}a_{34} + a_{24}a_{44} + a_{25}a_{45} = (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 2 x columna 5

$a_{25} = a_{21}a_{15} + a_{22}a_{25} + a_{23}a_{35} + a_{24}a_{45} + a_{25}a_{55} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

fila 3 de M_{R^2}

fila 3 x columna 1

$a_{31} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{34}a_{41} + a_{35}a_{51} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 3 x columna 2

$a_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{52} + a_{34}a_{42} + a_{35}a_{52} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 3 x columna 3

$a_{33} = a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53} = (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) =$
$0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 1$

fila 3 x columna 4

$a_{34} = a_{31}a_{14} + a_{32}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44} + a_{35}a_{54} = (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 1$

Reyes Villar Luis Ricardo

fila 3 x columna 5

$a_{35} = a_{31}a_{15} + a_{32}a_{25} + a_{33}a_{35} + a_{34}a_{45} + a_{35}a_{55} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 4 de M_R^2

fila 4 x columna 1

$a_{41} = a_{41}a_{11} + a_{42}a_{21} + a_{43}a_{31} + a_{44}a_{41} + a_{45}a_{51} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 4 x columna 2

$a_{42} = a_{41}a_{12} + a_{42}a_{22} + a_{43}a_{32} + a_{44}a_{42} + a_{45}a_{52} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 4 x columna 3

$a_{43} = a_{41}a_{13} + a_{42}a_{23} + a_{43}a_{33} + a_{44}a_{43} + a_{45}a_{53} = (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) =$
$0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 1$

fila 4 x columna 4

$a_{44} = a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{44}a_{44} + a_{45}a_{54} = (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) =$
$0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 1$

fila 4 x columna 5

$a_{45} = a_{41}a_{15} + a_{42}a_{25} + a_{43}a_{35} + a_{44}a_{45} + a_{45}a_{55} = (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 5 de M_R^2

fila 5 x columna 1

$a_{51} = a_{51}a_{11} + a_{52}a_{21} + a_{53}a_{31} + a_{54}a_{41} + a_{55}a_{51} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

fila 5 x columna 2

$a_{52} = a_{51}a_{12} + a_{52}a_{22} + a_{53}a_{32} + a_{54}a_{42} + a_{55}a_{52} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) =$
$1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

fila 5 x columna 3

$a_{53} = a_{51}a_{13} + a_{52}a_{23} + a_{53}a_{33} + a_{54}a_{43} + a_{55}a_{53} = (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) =$
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

fila 5 x columna 4

$a_{54} = a_{51}a_{14} + a_{52}a_{24} + a_{53}a_{34} + a_{54}a_{44} + a_{55}a_{54} = (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) + (0)(1) + (1)(0) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Norma

Reyes Villar Luis Ricardo

fila 5 x columna 5

$a_{55} = a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45} + a_{55}a_{55} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) = 1+1+0+0+1 = 1$

Reyes Villar Luis Ricardo

Verifica si la relación es transitiva

Primer método:

$(a,b)(b,c) \rightarrow (a,c)$

Segundo método: $M_R = M_R + M_{R^2}$

a_{ij}

i = fila; j = columna.

$$M_R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix}$$

$M_R = M_R + M_{R^2}$

$$\begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+1 & 0+0 & 0+0 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 0+0 & 0+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+0 & 1+1 & 1+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 1+1 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 1+1 & 0+0 & 0+0 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11001 \\ 11001 \\ 00110 \\ 00110 \\ 11001 \end{bmatrix}$$

∴ es una relación transitiva

Reyes Villar Luis Ricardo

Multiplicación de matrices:
Cálculo de M_R^2
fila x columna
fila 1 de M_R^2
fila 1 x columna 1
$a_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$
fila 1 x columna 2
$a_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} + a_{14}a_{42} + a_{15}a_{52} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$
fila 1 x columna 3
$a_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$
fila 1 x columna 4
$a_{14} = a_{11}a_{14} + a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} + a_{14}a_{44} + a_{15}a_{54} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$
fila 1 x columna 5
$a_{15} = a_{11}a_{15} + a_{12}a_{25} + a_{13}a_{35} + a_{14}a_{45} + a_{15}a_{55} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$
fila 2 de M_R^2
fila 2 x columna 1
$a_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} + a_{24}a_{41} + a_{25}a_{51} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$
fila 2 x columna 2
$a_{22} = a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{25}a_{52} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$
fila 2 x columna 3
$a_{23} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{43} + a_{25}a_{53} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$
fila 2 x columna 4
$a_{24} = a_{21}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{23}a_{34} + a_{24}a_{44} + a_{25}a_{54} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

Norma

Reyes Villar Luis Ricardo

fila 2 x columna 5

$a_{25} = a_{21}a_{15} + a_{22}a_{25} + a_{23}a_{35} + a_{24}a_{45} + a_{25}a_{55} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$
$1+1+0+0+1 = 1$

fila 3 de M_{R^2}

fila 3 x columna 1

$a_{31} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{34}a_{41} + a_{35}a_{51} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 3 x columna 2

$a_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{34}a_{42} + a_{35}a_{52} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 3 x columna 3

$a_{33} = a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53} = (0)(0)+(0)(0)+(1)(1)+(1)(1)+(0)(0) =$
$0+0+1+1+0 = 1$

fila 3 x columna 4

$a_{34} = a_{31}a_{14} + a_{32}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44} + a_{35}a_{54} = (0)(0)+(0)(0)+(1)(1)+(1)(1)+(0)(0) =$
$0+0+1+1+0 = 1$

fila 3 x columna 5

$a_{35} = a_{31}a_{15} + a_{32}a_{25} + a_{33}a_{35} + a_{34}a_{45} + a_{35}a_{55} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 4 de M_{R^2}

fila 4 x columna 1

$a_{41} = a_{41}a_{11} + a_{42}a_{21} + a_{43}a_{31} + a_{44}a_{41} + a_{45}a_{51} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 4 x columna 2

$a_{42} = a_{41}a_{12} + a_{42}a_{22} + a_{43}a_{32} + a_{44}a_{42} + a_{45}a_{52} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) =$
$0+0+0+0+0 = 0$

fila 4 x columna 3

$a_{43} = a_{41}a_{13} + a_{42}a_{23} + a_{43}a_{33} + a_{44}a_{43} + a_{45}a_{53} = (0)(0)+(0)(0)+(1)(1)+(1)(1)+(0)(0) =$
$0+0+1+1+0 = 1$

fila 4 x columna 4

$a_{44} = a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{44}a_{44} + a_{45}a_{54} = (0)(0)+(0)(0)+(1)(1)+(1)(1)+(0)(0) =$
$0+0+1+1+0 = 1$

Norma

Reyes Villar Luis Ricardo

fila 4 x columna 5

$a_{45} = a_{41}a_{15} + a_{42}a_{25} + a_{43}a_{35} + a_{44}a_{45} + a_{45}a_{55} = (0)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(0)+(0)(1) = 0+0+0+0+0=0$

fila 5 de M_R^2

fila 5 x colonna 1

$a_{51} = a_{51}a_{11} + a_{52}a_{21} + a_{53}a_{31} + a_{54}a_{41} + a_{55}a_{51} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$

$1+1+0+0+1=1$

fila 5 x colomna 2

$a_{52} = a_{51}a_{12} + a_{52}a_{22} + a_{53}a_{32} + a_{54}a_{42} + a_{55}a_{52} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1) =$

$1+1+0+0+1=1$

fila 5 x colomna 3

$a_{53} = a_{51}a_{13} + a_{52}a_{23} + a_{53}a_{33} + a_{54}a_{43} + a_{55}a_{53} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$

$0+0+0+0+0=0$

fila 5 x columna 4

$a_{54} = a_{51}a_{14} + a_{52}a_{24} + a_{53}a_{34} + a_{54}a_{44} + a_{55}a_{54} = (1)(0)+(1)(0)+(0)(1)+(0)(1)+(1)(0) =$

$0+0+0+0+0=0$

fila 5 x colomna 5

$a_{55} = a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45} + a_{55}a_{55} = (1)(1)+(1)(1)+(0)(0)+(0)(0)+(1)(1)$

$1+1+0+0+1$