Examen Unidad 4, 5 Prof. M. Arianna Gabriela Gonzalez Salazar

23/05/2022 Algebra Lineal

1. De los siguientes valores del componente del vector, determinar por el metodo de transformación el valor de alfa, beta y delta y concluir tu trabajo especificando si el sistema es linealmente dependiente o independiente.

$A(0,0,0) = (1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)$

$A = (0,0,0)\{(1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)\} \in \alpha + B + \delta$

①

$0, 0, 0 = \alpha(1,1,1) + B(1,2,3) + \delta(2,-1,1)$

$\rightarrow 0 = \alpha + B + 2\delta$

$\rightarrow 0 = \alpha + 2B - \delta$

$\rightarrow 0 = \alpha + 3B + \delta$

②

$$\begin{matrix} \alpha + B + 2\delta = 0 \\ \alpha + 2B - \delta = 0 \\ \alpha + 3B + \delta = 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 \div 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Transformación por el metodo de gauss

Matriz triangular superior

Matriz Unidad

$$F_2 - 1 = \begin{array}{r} 1\ 2\ {-1}\ 0 \\ -\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ {-2}\ {-1}_{NF2} \end{array} \qquad F_3 - 1 = \begin{array}{r} 1\ 3\ 1\ 0 \\ -\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 2\ 0\ {-1}_{NF_3} \end{array} \qquad F_3 \div 2 \ \begin{array}{r} 0\ 2\ 0\ {-1} \\ \div\ 2\ 2\ 2\ 2 \\ \hline 0\ 1\ 0\ {-\tfrac{1}{2}}_{NF_3} \end{array} \qquad F_3 - F_2 \ \begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ {-\tfrac{1}{2}} \\ -\ 0\ 1\ {-2}\ {-1} \\ \hline 0\ 0\ 2\ \tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\alpha + B + 2\delta = 0$
$B - 2\delta = -1$
$2\delta = 1/2$

$\neq \delta \neq$
$2\delta = \frac{1}{2}$
$\delta = \frac{\frac{1}{2}}{2}$
$\delta = \frac{1}{4}$

$\neq B \neq$
$B - 2\delta = -1$
$B - 2\left(\frac{1}{4}\right) = -1$
$B - \frac{1}{2} = -1$
$B = -1 + \frac{1}{2}$
$B = -\frac{1}{2}$

$\neq \alpha \neq$
$\alpha + B + 2\delta = 0$
$\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$
$\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
$\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 0$
$B = -\frac{1}{2}$
$\delta = \frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{(-)} = 2 - 1 + 6 - 4 + 3 - 1 = 5$$

Por lo tanto es linealmente independiente.
∴ Este sistema de ecuaciones presentado es linealmente independiente

Examen 4,5
23/05/2022

Prof. M. Arianna Gabriela Gonzalez Salazar
Algebra Lineal

2. Calcular la base y dimensión del siguiente sub espacio.

$B = \{ \bar{x} \in R^{2\times3} / a_{12} + a_{22} = 0, a_{11} - a_{13} = 0 \}$

① $x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Despejar vector

$a_{12} + a_{22} = 0$ $\quad$ $a_{11} - a_{13} = 0$

$a_{12} = -a_{22}$ $\quad$ $a_{11} = a_{13}$

② $\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{13} & -a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

③

$\bar{x} = a_{13} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

④ $\text{Base}[B] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\text{Dim}[B] = 4$

Examen 4,5
23/05/2022

Prof. M. Arianna Gabriela Gonzales Salazar
Algebra Lineal

3. Dados los siguientes vectores; resolver la propiedad
$\cdot f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2} / f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_1 & x_1+x_2 \\ 0 & -x_2 \end{bmatrix}$$

①

$$U = (U_1 U_2) = f(u) = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ -U_1 & U_1+U_2 \\ 0 & -U_2 \end{bmatrix}$$

$$V = (V_1, V_2) = f(v) = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ -V_1 & V_1+V_2 \\ 0 & -V_2 \end{bmatrix}$$

②

$$f(u+v) = f(U_1+V_1, U_2+V_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} U_1+V_1 & U_2+V_2 \\ -(U_1+V_1) & (U_1+V_1)+(U_2+V_2) \\ 0 & -(U_2+V_2) \end{bmatrix} \leftarrow X_1+X_2 \\ \begin{array}{cc} -X_1 & -X_2 \end{array} \end{array}$$

$$f(u+v) = f(U_1+V_1, U_2+V_2) = \begin{bmatrix} U_1+V_1 & U_2+V_2 \\ -U_1-V_1 & U_1+V_1+U_2+V_2 \\ 0 & -U_2-V_2 \end{bmatrix}$$

Separar valores semejantes

$$f(u+v) = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ -U_1 & U_1+U_2 \\ 0 & -U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ -V_1 & V_1+V_2 \\ 0 & -V_2 \end{bmatrix} \quad (u+v) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_1 & X_1+X_2 \\ 0 & -X_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ El transformado está cumpliendo con la propiedad.

Examen Unidad 4,5 Prof. M. Arianna Gabriela Gonzalez Salazar
23/05/2022 Algebra Lineal

4. Resolver el siguiente espacio vectorial por transformación lineal y obtener matriz asociada, concluir con la comprobación del ejercicio.

$T = v \to w \,/\, T(\bar{x}) = \bar{y}$

$f: R^3 \to R^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3)/ = x_1 - 5x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 - 3x_3$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

$x_3 = 0$

① Sustituir valores $\bar{x} \to \bar{y}$

$f(2,-1,0) = 2-5(-1),\ -1+0,\ 2-3(0)$

② Resolver componentes $\bar{y}$

$f(2,-1,0) = (7,-1,2)$ $\bar{x}\ f\ v\ \bar{y}$

$T: v \to w \,/\, T(\bar{x}) = A \cdot \bar{y}$

$f: R^3 \to R^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3)/ = x_1 - 5x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 - 3x_3$

M.A. Comprobación $= T(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x})$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ y_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} x_1 - 5x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\therefore$ La matriz asociada congenia con el vector de llegada, por ende, cumple con las características de una transformación lineal por el método de matriz asociada.

Examen Unidad 4,5 Prof. M. Arianna Gabriela Gonzalez Salazar

23/05/2022 Algebra Lineal

5. Calcular la expresión vectorial de:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1/2 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

① $\bar{X} = X_1, X_2, X_3$

②

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1/2 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -X_1 + 3X_2 \\ -X_2 \\ \frac{1}{2}X_1 + \frac{5}{4}X_3 \end{matrix}$$

③ Formular expresión vectorial

$$f: R^3 \longrightarrow R^3 / f(X_1, X_2, X_3) = -X_1 + 3X_2, -X_2, 1/2\, X_1 + 5/4\, X_3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

① $\bar{X} = X_1, X_2, X_3$

②

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{matrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -2X_2 + 3X_3 \\ 5X_1 + X_2 \end{matrix}$$

③

$$f: R^3 \longrightarrow R^2 / f(X_1, X_2, X_3) = -2X_2 + 3X_3, 5X_1 + X_2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

① $\bar{x} = x_1, x_2$

② $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 \\ -x_1 \end{matrix}$

③

$f: R^2 \longrightarrow R^3 / f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, 5x_1, -x_1$ //