21/02/2022

Función polar y exponencial

Calcular el valor de Z y transformarlo en todas sus formas posibles

Forma	Expresión	Argumento dado en
Binomica	$Z = a + bi$	-------
Vectorial	(a, b)	-------
Trigonometrica	$r = \lvert Z \rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ (si es necesario, se hace el ajuste de θ)	-------
CIS	$Z = r(\cos\theta + i \cdot \text{Sen}\,\theta)$	Grados
Polar	$z = r \angle \theta$	Grados
Exponencial o Euler	$Z = re^{\theta i}$	Radianes

Ej 1

$Z = 3(-2-2i)$

① $z = -6 - 6i$

② $Z = (-6, -6)$

③ $r = \lvert Z \rvert = \sqrt{a^2+b^2}$

$r = \lvert Z \rvert = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2}$

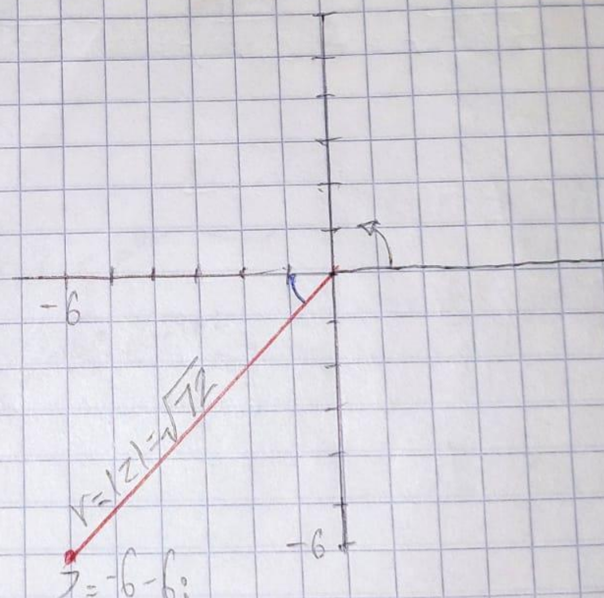
$r = \lvert Z \rvert = \sqrt{36+36}$

$r = \lvert Z \rvert = \sqrt{72}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{-6}{-6}$

$\theta = 45° =$ Ajuste $\theta = 180° + 45° = \underline{\underline{225°}}$



④ $Z = r(\cos\theta + i \cdot \text{Sen}\,\theta)$

$Z = \sqrt{72}(\cos 225° + i \cdot \text{Sen}\, 225°)$

$Z = \sqrt{72}$ CIS $225°$

⑤ $Z = r \angle \theta$

$Z = \sqrt{72} \angle 225°$

21/02/2022

A radianes

Hacer reducción

(6) $Z = re^{\theta i}$

$Z = \sqrt{72}\, e^{\theta i}$

$$\frac{\cancel{225}^{5}{}^{\circ}\,\pi\ \text{rad}}{\cancel{180}_{4}}$$

$$\theta_{rad} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z = \sqrt{72}\, e^{\frac{5\pi}{4} i}$$

22 de Febrero

Calcular el valor de Z y transformarlo en todas sus formas posibles

$Z_1 = 3 - i \qquad Z_2 = 2 + 6i$

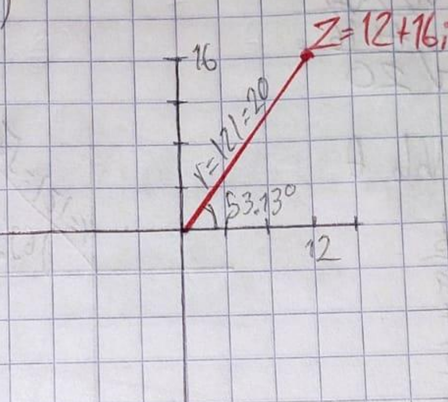
$Z = (Z_2)(Z_1)$

$Z = (2+6i)(3-i)$

$Z = 6 - 2i + 18i - 6i^2 \qquad i^2 = (-1)$

$Z = 6 - 2i + 18i + 6$

① $Z = 12 + 16i$



② $Z = (a, b)$

$Z = (12, 16)$

③ $Z = r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$r = |Z| = \sqrt{(12)^2+(16)^2}$

$r = |Z| = \sqrt{144+256}$

$r = |Z| = \sqrt{400}$

$r = |Z| = 20$

⑥ $Z = r\,e^{\theta i} \longrightarrow 53.13\left(\frac{\pi\,rad}{180}\right)$

$\frac{53.13\pi}{180} = \underline{0.29\pi}$

$Z = 20\,e^{0.29\pi i}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{16}{12}$

$\theta = 53.13^\circ$

④ $Z = r(\cos\theta + i \cdot \operatorname{Sen}\theta)$

$Z = 20(\cos 53.13^\circ + i \cdot \operatorname{Sen} 53.13^\circ)$

$Z = 20\,\text{Cis}\,53.13^\circ$

⑤ $Z = r\angle\theta$

$Z = 20\angle 53.13^\circ$

24/02/2022

1.5. Teorema de Demoivre, Potencias y extracción de raíces de un número complejo

Dicho teorema fue establecido por Abraham Demoivre en 1730 y reconocido en 1710. Su teorema es muy importante por la siguiente razón: los procesos fundamentales del algebra son las 4 operaciones de suma, resta, multiplicación y división junto con la potenciación y extracción de raíces. Este teorema permite que estas últimas expresiones algebraicas fundamentales sean aplicables a los números complejos.

El teorema de Demoivre en su forma más básica es una fórmula para elevar un número complejo Z a la potencia n, en donde $n \geq 1$ es un entero positivo

Sea $Z = r \cdot \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$ ∴ con base a las ecuaciones que tenemos:

28/02/2022

Teorema de Demoivre

Calcular de acuerdo al valor de Z el desarrollo del teorema de demoivre.

$$Z = (\overset{a}{2} + \overset{b}{4i})^3$$

① Sacar el r ó |z|

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$r = |z| = \sqrt{(2)^2+(4)^2}$

$r = |z| = \sqrt{4+16}$

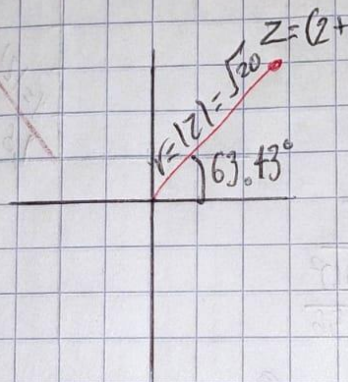
$r = |z| = \sqrt{20}$

② Calcular Valo θ

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{2}$

$\theta = 63.43^\circ$



③ Calcular teorema

$$|z|^{\frac{1}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n} K\right) + \left[z^{\frac{1}{n}} \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n} K\right)\right] i$$

$\rightarrow r = |z| = \sqrt{20}$ $\quad \theta = 63.43^\circ$ $\quad n = 3$ $\quad K = n-1$

$K = (3) - 1$

$K = 2 \therefore K = 0, 1, 2$

Sostituir valores

Cuando $K = 0$ $\quad Z_1 = 1.52 + 0.59i$

$$\underbrace{\sqrt{20}^{\frac{1}{3}}} \cdot \cos\left(\frac{63.43^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \underset{(0)}{K}\right) + \left[\sqrt{20}^{\frac{1}{3}} \operatorname{Sen}\left(\frac{63.43^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} K\right)\right] i$$

$$1.64 \cdot \cos(21.14^\circ + 0) + [1.64 \cdot \operatorname{Sen}(21.43)] i = 1.52 + 0.59i$$

23/02/2022

Cuando $K=1$ $Z_2 = ? = -1.26 + 1.01i$

$Z_2 = 1.64 \cdot \text{Cos}\left(\frac{63.43}{3} + \frac{360}{3}(1)\right) + \left[1.64 \cdot \text{Sen}\left(\frac{63.43}{3} + \frac{360}{3}(1)\right)\right]i$

$Z_2 = 1.64 \cdot \text{Cos}(21.14 + 120)] + [1.64 \cdot \text{Sen}(21.14 + 120)]i$

$Z_2 = 1.64 \cdot \text{Cos}(141.14) + 1.64 \cdot \text{Sen}(141.14)i$

$Z_2 = 1.64 \cdot (-0.77) + 1.64(0.62)i$

$Z_2 = -1.26 + 1.01i$

24/02/2022

Cuando $K=2$ $Z_3 = ? = -0.24 - 1.60i$

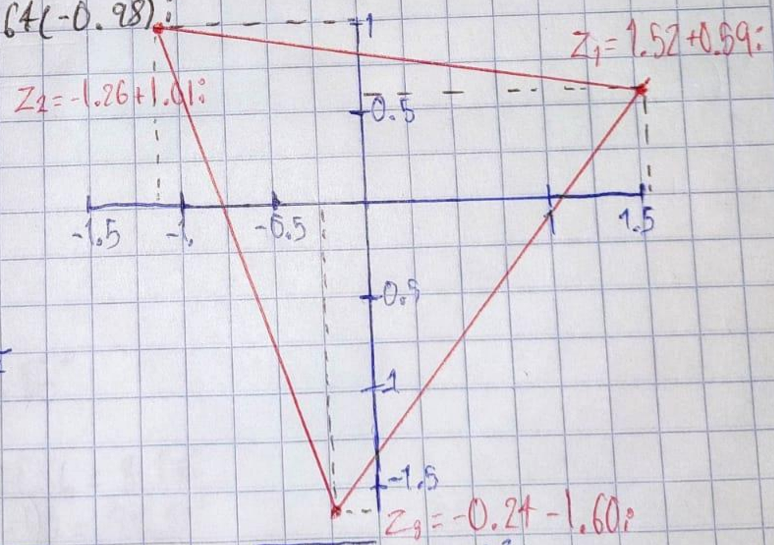
$Z_3 = 1.64 \cdot \text{Cos}\left(\frac{63.43}{3} + \frac{360}{3}(2)\right) + \left[1.64 \cdot \text{Sen}\left(\frac{63.43}{3} + \frac{360}{3}(2)\right)\right]i$

$Z_3 = 1.64 \cdot \text{Cos}(21.14 + 240) + [1.64 \cdot \text{Sen}(21.14 + 240)]i$

$Z_3 = 1.64 \cdot \text{Cos}(261.14) + [1.64 \cdot \text{Sen}(261.14)]i$

$Z_3 = 1.64(-0.15) + 1.64(-0.98)i$

$Z_3 = -0.24 - 1.60i$



$Z_1 = \overset{a}{1.52} + \overset{b}{0.59}i$

$Z_2 = -1.26 + 1.01i$

$Z_3 = -0.24 - 1.60i$

Comprobación

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = |z_1| = \sqrt{(1.52)^2 + (0.59)^2}$

$r = |z_1| = \sqrt{2.31 + 0.34}$

$r = |z_1| = \sqrt{2.65}$

$r = |z_1| = 1.62 \approx 1.64$

$r = |z_2| = \sqrt{(-1.26)^2 + (1.01)^2}$

$r = |z_2| = \sqrt{1.58 + 1.02}$

$r = |z_2| = \sqrt{2.60}$

$r = |z_2| = 1.61 \approx 1.64$

$r = |z_3| = \sqrt{(-0.24)^2 + (-1.60)^2}$

$r = |z_3| = \sqrt{0.05 + 2.56}$

$r = |z_3| = \sqrt{2.61}$

$r = |z_3| = 1.61 \approx 1.64$