DÍA 27 MES 09 AÑO 21

Limites

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-2x}{4x^2+2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(3)^3-2(3)}{4(3)^2+2} = \frac{54-6}{36+2} = \frac{48}{38} = \frac{24}{19} = \frac{Num}{Num}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2-4x}{5x^2+6} =$$

$$\frac{2(2)^2-4(2)}{5(2)^2+6} = \frac{8-8}{20+6} = \frac{0}{26} = \frac{Cero}{Num.}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2-3x}{2x^2-8x}$$

$$\frac{3(4)^2-3(4)}{2(4)^2-8(4)} = \frac{48-12}{32-32} = \frac{36}{0} = \frac{Num}{Cero}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{2x-4} = \frac{(2)^2+(3)(2)-10}{(2)(2)-4} = \frac{4+6-10}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Factorizar

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}} = \frac{(2)^2+(3)(2)-10}{(2)(2)-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^3-27x}{2x^4-3x} = \frac{3(2)^3-27(2)}{2(2)^4-3(2)} = \frac{24-54}{32-6} = \frac{-30}{26} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^4-4x}{x^3-6} = \frac{2(1)^4-4(1)}{(1)^3-6} = \frac{2-4}{1-6} = \frac{-2}{-5}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2-10x}{x^2-25} = \frac{2(5)^2-10(5)}{5^2-25} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \to 5} \frac{(2x)}{(x+5)} = 1$$

DÍA 28 MES 09 AÑO 2021

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-4} = \frac{(2)^2+4(2)-12}{(2)^2-4} = \frac{4+8-12}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Factorizar

$$\frac{(x+6)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{2+6}{2+2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+5x-24}{x^2+2x-15} = \frac{(3)^2+5(3)-24}{(3)^2+2(3)-15} = \frac{9+15-24}{9+6-15} = \frac{0}{0}$$

Factorizar

$$\frac{(x+8)\cancel{(x-3)}}{(x+5)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+8}{x+5} = \frac{3+8}{3+5} = \frac{11}{8}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2+8x}{16x} = \frac{3(0)^2+8(0)}{16(0)} = \frac{0}{0}$$

Factorizar

$$\frac{(3x+8)\cancel{(x)}}{(16)\cancel{(x)}} = \frac{3(0)+8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Racionalizar

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{3x-12} = \frac{4-4}{12-12} = \frac{0}{0}$$

Factorizar

$$\frac{\cancel{x-4}}{3\cancel{(x-4)}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^2-64}{x-8} = \frac{(8)^2-64}{8-8} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\cancel{(x-8)}(x+8)}{\cancel{x-8}} = \frac{16}{1}$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{3x^2-108}{x-5} = \frac{3(6)^2-108}{6-5} = \frac{108-108}{6-5} = \frac{0}{1} = \frac{\text{Cero}}{\text{número}} = \text{Cero}$$

Norma

DÍA 28 | MES 09 | AÑO 21

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2-64}{x-7} = \frac{7^2-64}{7-7} = \frac{49-64}{0} = \frac{-15}{0} = \frac{\text{no cero}}{\text{cero}} = \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{x^2+3x-10}{2x-8} = \frac{(6)^2+3(6)-10}{2(6)-8} = \frac{36+18-10}{12-8} = \frac{44}{4} = 11 = \frac{\text{num}}{\text{num}}$$

Examen Prototipo

DIA MES AÑO
30 09 21

1. $x^2-6x+8 \geq 0$ $(-\infty,+2)\cup(+4,\infty)$
$(x-2)(x-4)$
$x_1=+2$
$x_2=+4$

2. $x^2-3x-10<0$ $(-2,5)$
$(x-5)(x+2)$
$x_1=5$
$x_2=-2$

3. $\frac{4x+8}{2} \leq 6$ $(-\infty,1)$
$4x+8 \leq 12$
$4x \leq 4$
$x \leq 1$

4. $2x-6 > 6x-4$ $(-\frac{1}{2},\infty)$
$-4x>2$
$x > -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

5. $x^2-2x \geq 8$ $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$
$(x-4)(x+2)$
$x_1=4$
$x_2=-2$

$f(x)=2x^2+4x-10$
$g(x)=\frac{2x-3}{3x}$

Calcular: $\frac{f(2)-f(3)}{g(-1)\cdot g(4)}$

Calcular: $\frac{f(-1)+f(2)}{g(2)}$

$f(2)=2(2)^2+4(2)-10=6$
$f(3)=2(3)^2+4(3)-10=20$
$f(-1)=2(-1)^2+4(-1)-10=-12$
$f(2)=2(2)^2+4(2)-10=6$

$g(-1)=\frac{2(-1)-3}{3(-1)}=\frac{-5}{-3}=1.666$
$g(4)=\frac{2(4)-3}{3(4)}=\frac{5}{12}=$
$g(2)=\frac{1}{6}$

Norma

DÍA 30 MES 09 AÑO 21

$$\frac{f(2)-f(3)}{g(-1)\cdot g(4)} = \frac{6-20}{1.666\cdot 0.4166} = \frac{-14}{0.69444} = -20.16$$

$$\frac{f(-1)+f(2)}{g(2)} = \frac{-12+20}{0.166} = \frac{8}{0.166} = 48$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-x-20}{x^2-25} \quad \frac{5^2-5-20}{5^2-25} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+5)} = \frac{x+4}{x+5} = \frac{9}{10}$$

$$\lim_{x\to 12} \frac{5x^2+20x}{30x} = \frac{5(12)^2+20(12)}{30(12)} = \frac{5(144)+240}{360} = \frac{960}{360} = \frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{2(x)-16} = \frac{8^2-64}{2(8)-16} = \frac{0}{0} \quad \frac{(x+8)(x-8)}{(2)(x-8)} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+2x-24}{x^2-16} = \frac{0}{0} \quad \frac{(x+6)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{x+6}{x+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Luis Ricardo Reyes Villar

DÍA 07 MES 10 AÑO 21

Examen 2

I.

1. $x^2-4x-32>0$ $(-4,8)$

$(x-8)(x+4)$

$x_1=8$

$x_2=-4$

2. $\dfrac{4x-8}{6}>4$ $(-\infty,8)$

$4x-8>24$

$4x>32$

$x>8$

3. $x^2-x-6\geq 0$

$(x-3)(x+2)$ $(-2,3)$

$x_1=3$

$x_2=-2$

4. $2x-6\leq x+4$ $(10,+\infty)$

$x\leq 10$

5. $x^2-7x+10\leq 0$

$(x-2)(x-5)$ $(2,5)$

$x_1=2$

$x_2=5$

II

$f(x)=2x^2+x-5$

$g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

Calcular $=\dfrac{f(2)-f(3)}{g(-1)\cdot g(4)}$ $\dfrac{(5)-(16)}{(-0.5)\cdot(2.25)}=\dfrac{-11}{-1.125}=9.\overline{7}$

Calcular $=\dfrac{f(-1)+f(2)}{g(2)}=$ $\dfrac{-4+5}{2.5}=\dfrac{1}{2.5}==\dfrac{2}{5}=0.4$

Norma

DIA 04 MES 10 AÑO 21

III

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{3x-6} = \frac{4+6-10}{6-6} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{(3)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2-12x}{6x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\cancel{(x)}(4x-12)}{\cancel{(x)}(6)} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$\lim_{x\to 36} \frac{(x-36)}{\sqrt{x}-6} = \frac{0}{0} = \frac{x-36}{\sqrt{x}-6} = \sqrt{x}+6 = 12$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{0}{0} \quad \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = x+4 = 4+4 = 8$$

$$\lim_{x\to 75} \frac{x^2-x-20}{2\cancel{x}-10} = \frac{5{,}530}{140} = \frac{553}{14} = 39.5$$

Norma

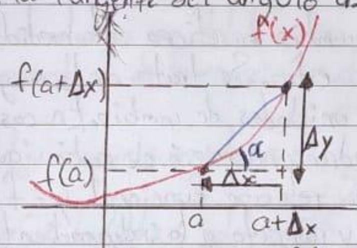
DÍA 08 MES 10 AÑO 21

Interpretación Geométrica de la Derivada.

Para la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto partiremos de la tasa de variación media en un intervalo de su variable independiente $[a, a+\Delta x]$. Es el siguiente cociente:

$$T.V.M.[a, a+\Delta x] = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La fórmula anterior de la tasa de variación media (T.V.M) se corresponde con la pendiente de la recta que une los puntos de la función de abscisas a y a, $a+\Delta x$, es decir, la tangente del ángulo a:



O, lo que es lo mismo: $T.V.M.[a, a+\Delta x] = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \tan a$

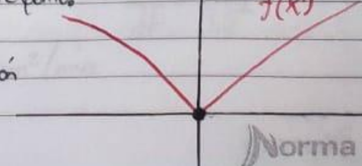
Si hacemos Δx cada vez menor, de manera que tienda a cero, los puntos de la función de abscisas a y a, $a+\Delta x$ tienden a confundirse en un punto. De esta manera, la recta secante anterior, en el límite pasa a ser la tangente a la gráfica de la función en $(a, f(a))$, es decir, la tangente del ángulo a:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$$

$$T.V.M.[0,2] = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$T.V.M.[2,4] = \frac{5-2}{4-2} = \frac{3}{2}$$

Sabiendo la derivada, o lo que es lo mismo, la tangente del ángulo que forma la recta tangente, se puede obtener la ecuación de dicha recta, como se verá en el ejercicio. Esta interpretación geométrica de la derivada ilustra la no derivalidad en un punto anguloso, como en el caso, el (0,0) de la imagen, donde no se puede trazar únicamente una tangente. No hay derivada en ese punto.



Como se ha dicho, la derivada $f'(a)$ es la tasa de variación instantanea en ese punto: $T.V.I.(a)$.

Norma

Incremento y razón de cambio:

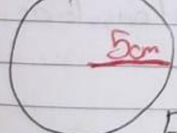
Incremento: Cuando una cantidad variable pasa de un valor inicial a otro valor, se dice que ha tenido un incremento. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para detonar esta diferencia se utiliza el símbolo Δx, que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro.

Razon de cambio:
El concepto de razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no esten relacionadas, tendrán una razón de cabio igual a cero.

En general, en una relación funcional $y = f(x)$, la razón de cambio de la variable dependiente y respecto a la independiente x se calcula mediante un proceso de límite de la razón $[f(x+t) - f(x)/t$, denominada cociente diferencial.

Ejercicio 1

En una circunferencia, sabemos que su radio aumenta a razón de 1cm/s ¿Cuál es la razón de cambio del área de la circunferencia cuando el radio sea igual a 5cm?



$\frac{dr}{dt} = 1 cm/s$ $\qquad$ $\frac{dA}{dt} = ?$ cuando $r = 5$ cm

Encontrar la formula que relacione el area con el radio de la circun-

$A = \pi \cdot r^2$

$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2 \cdot r \cdot \frac{dr}{dt}$ $\qquad$ $\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = \pi \cdot 2 \cdot 5(cm) \cdot 1(cm/s) =$

$31.41\ cm^2/s$

Ejercicio 2

El volumen de un cubo está cambiando a razón de $75\ cm^3/minuto$.

a) Hallar la razón de cambio de su lado cuando mide $5\ cm$

b) Hallar la razón de cambio del área superficial cuando ésta es de $24\ cm^2$

Sabemos que el volumen cambia a razón de 75 cm cúbicos por minuto:

$$\frac{dV}{dt} = 75\ cm^3/min$$

Y nos piden la razón de cambio de su lado cuando mide 5cm:

$$\frac{da}{dt} = ?\ \text{cuando } a = 5\ cm$$

La fórmula que relacione el volumen con el lado «a» del cubo es: $V = a^3$

derivamos en ambos miembros de la ecuación: $\frac{dV}{dt} = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{da}{dt}$

Y sustituimos dV/dt y a por sus valores: $75 = 3 \cdot 5^2 \cdot \frac{da}{dt}$

De donde podemos despejar da/dt: $\frac{da}{dt} = \frac{75}{3 \cdot 5^2}$

Y queda: $\frac{da}{dt} = 1\ cm/min$

Apartado b: Al igual que en el apartado anterior, el volumen cambia a razón de 75 cm cúbicos por minuto: $\frac{dV}{dt} = 75\ cm^3/minuto$

Y esta vez nos preguntan la razón de cambio del área superficial cuando ésta es de $24\ cm^2$, $\frac{dA}{dt} = ?$ cuando $A = 24\ cm^2$

La fórmula que relaciona el área del cubo con el lado «a» del cubo es: $A = 6 \cdot a^2$

Derivando con respecto al tiempo a ambos lados de la ecuación, nos queda:

$$\frac{dA}{dt} = 6 \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{da}{dt}$$

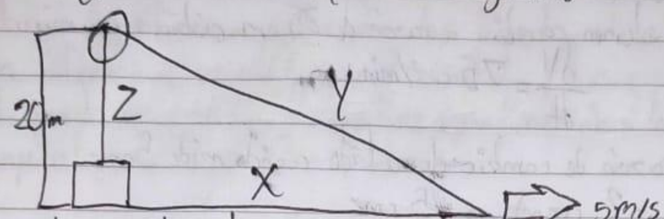
$24 = 6 \cdot a^2 \rightarrow a = 2$ $\quad \frac{dV}{dt} = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{da}{dt}$ $\quad 75 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{da}{dt} = \frac{75}{3 \cdot 2^2} = 6.25\ cm/min$

$V = a^3$

$\frac{dA}{dt} = 6 \cdot 2a \cdot \frac{da}{dt} = \frac{dA}{dt} = 6 \cdot 2 \cdot 6,25 = 150\ cm^2/min$

Ejercicio 3

Un obrero sostiene una cuerda de 36m de longitud y al otro extremo hay un peso. La cuerda pasa por una polea situada a 20 metros de altura. Si éste se aleja de la polea a razón de 5m/s, ¿a qué velocidad se eleva el peso cuando está a 10 metros por encima de la posición original?



El obrero se aleja de la polea a razón de 5m/s, cuando $z=10m$ por tanto:

$$\frac{dx}{dt}=5\ m/s \text{ cuando } z=10$$

Por un lado, el enunciado nos dice que la longitud de la cuerda es de 36m. La cuerda corresponde a los lados z e y del triángulo, por tanto: $z+y=36m$

Por otro lado, por Pitágoras, relacionamos los tres lados: $x^2+20^2=y^2$

Como queremos relacionar la magnitud z (que es la distancia que se desplaza el peso) con la magnitud x, que es la distancia que se desplaz el obrero, de la primera ecuación, podemos despejar la y en función z: $y=36-z$

y sustituir esta expresión de y en la expresión de Pitágoras: $x^2+20^2=(36-z)^2$

Ahora derivamos a ambos lados del igual con respecto al tiempo: $2x\frac{dx}{dt}=(-2)\cdot(36-z)\cdot\frac{dz}{dt}$

Tenemos todos los datos, menos el valor de x

De la expresión obtenida a partir de Pitágoras, sustimos la z por 10 y nos quedará una expresión que sólo depende de x, de donde podemos obtener su valor:

$x^2+20^2=(36-10)^2 \longrightarrow x=16,61\ m$

Y ahora sí ya tenemos todos los valores para poder despejar dz/dt:

$$2\cdot16,61\cdot5=(-2)\cdot(36-10)\cdot\frac{dz}{dt}$$

La despejamos:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2\cdot16,61\cdot5}{(-2)\cdot(36-10)}$$

Y finalmente lo calculamos:

$$\frac{dz}{dt}=-3,16\ m/s$$

Ejercicio 4

Supongamos que un automóvil recorre 100 Kilómetros en dos horas. La razón de cambio existente entre ambas variables es 50 Kilómetros por hora. Ese valor representa su velocidad, ya que $v = d/t$.

Ejercicio 5

En una relación funcional $y = f(x)$ $y = f(x)$, la razón de cambio de la variable dependiente y y respecto a la independencia x x se calcula mediante un proceso de límite de la razón $[f(x+t) - f(x)]/t$ $[f(x+t) - f(x)]/t$, denominada cociente diferencial

Ejemplo

En la función lineal $f(x) = mx + b$ $f(x) = mx + b$, no es necesario tomar el límite pues, $f(x+t) - f(x) = mx + mt + b - mx - b = mt$ $f(x+t) - f(x) = mx + mt + b - mx - b = mt$ y la t se cancela en la razón $[f(x+t) - f(x)]/t$ $[f(x+t) - f(x)]/t$ sin necesidad de pasar el límite.

Derivada de una función

La derivada de una función matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación.

Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x.

En términos matemáticos, la derivada de una función puede expresarse de la siguiente forma:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En la fórmula, x es el punto en el que la variable toma el valor de x. Asimismo, h es cualquier número. Este luego se igualará a cero pues, como vemos en la imagen superior, debemos calcular el límite de la función cuando h se acerca a cero.

Cabe recordar que, en general, la derivada es una función matemática que se define como la tasa de cambio de una variable respecto a otra. Es decir, en qué porcentaje aumenta o disminuye una variable cuando otra también se ha incrementado o disminuido.

Norma

Debemos precisar que el límite de una función se define como la tendencia de esta (a qué valor se aproxima) cuando uno de sus parámetros (en este caso h) se acerca a un valor determinado.

Ejemplo:

$$f(x) = 7x-1$$

$$f(x+h) = 7(x+h)-1$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7(x+h)-1-(7x-1)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7x+7h-1-7x+1}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7h}{h} = 7$$

DIA 12 MES 10 AÑO 21

Diferenciales

Las diferenciales son operaciones similares o basadas, en las derivadas parciales, pero la gran diferencia es que éstas no representan una tasa de cambio, sino un cambio total. En otras palabras, se podría decir que los diferenciales solo caracterizan cambios estacionarios o estáticos, como es que algo pasó de "a" a "b" o viceversa, pero sin tomar en cuenta el proceso que lo llevó a ese punto final.

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

Podemos definir entonces a las diferenciales de una función como los incrementos de las variables independientes y por tanto a la diferencial total de z como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy.$$

Aunque las diferenciales no son el cambio exacto de dichas variables, las podemos considerar como un cambio aproximadamente igual.

$$\Delta z \approx dz.$$

Generalmente las aplicaciones de las derivadas radican en el cálculo de errores de medición, ya sean de medidas espaciales, eléctricas, movimientos, etc. En pocas palabras, la mayor ayuda que nos dejan los diferenciales es conocer la variación de un resultado por motivos de un error. Es aquí donde también podemos involucrar a los métodos numéricos, ya que todos ellos contarán con cierto grado de error.

De ahí en adelante podemos utilizarlo en cálculos de variación de volumen, de áreas, de industrias, de impedancias, de aceleración, de resistencia, de temperatura, etc. por esto, dentro de la industria los diferenciales son bastantes utilizados, para poder conocer los errores estimados dentro de un proceso, para poder caracterizarlos, medir su impacto y sus consecuencias, y de algún modo tratar que estos errores sean mínimos para maximizar las ganancias.

Cuando $x=1$ y $y=1$, se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(0.01) \approx 0.0141.$$

Norma

DÍA 12 MES 10 AÑO 21

Cálculo de la derivada.

La derivada de una función, en principio, puede ser calculada de la definición, mediante el cociente de diferencias, y después calcular su límite. En la práctica, únicamente las derivadas de unas pocas funciones son conocidas, las derivadas de otras funciones son fáciles de calcular utilizando reglas para obtener derivadas de funciones más complicadas de otras más simples.

La mayor parte de los cálculos de derivadas requieren tomar eventualmente la derivada de algunas funciones comunes.

- Derivada de potencias: si

$f(x) = x^r,$

donde r es cualquier número real,

$f'(x) = rx^{r-1},$

donde quiera que esta función sea definida.

Por ejemplo si $f(x) = x^{1/4}$, entonces

$f'(x) = (1/4)x^{-3/4},$

- funciones exponenciales y logarítmicas:

$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln|a|.$

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, x > 0.$

$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln|a|}.$

- funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$

$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x).$

$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$

En muchos casos, el cálculo de límites complicados mediante la aplicación directa del cociente de diferencias de newton puede ser anulado mediante la aplicación de reglas de diferenciación.

- Regla de la constante, si $f(x)$ es constante

$f'(x) = 0$

- Regla de la suma:

$(f+g)' = f' + g'$, para toda función f y g y todo número

- Regla del producto

$(fg)' = f'g + fg'$

Por ejemplo $\frac{d}{dr} \pi r^2 = 2\pi r$

- Regla del cociente

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

- Regla de la cadena: Si $f(x) = h(g(x))$

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$

DIA MES AÑO
12 10 21

Regla de la cadena

La regla de la cadena establece que la derivada de $f(g(x))$ es $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. En otras palabras, nos ayuda derivar funciones compuestas. Por ejemplo, $\sin(x^2)$ es una función compuesta porque puede construirse como $f(g(x))$ para $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=x^2$. Con la regla de la cadena y las derivadas de $\sin(x)$ y x^2, podemos entonces encontrar la derivada de $\sin(x^2)$.

$$y=f(u)$$
$$u=f(x)$$
$$y=f(f(x))$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

Para utilizar bien esta regla se debe identificar si la función es compuesta, así como determinar la función exterior e interior.

Esta regla es de utilidad en funciones trigonométricas que afectan polinomios o expresiones algebraicas.

Ejemplo

$$y=(3x-11)^2$$
$$u=3x-11$$
$$y=u^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{du}=2u=2(3x-11)$$
$$\frac{du}{dx}=\lim_{h=0}\frac{3(x+h)-11-(3x-11)}{h}$$
$$\frac{du}{dx}=\lim_{h=0}\frac{3x+3h-11-3x+11}{h}$$
$$\frac{du}{dx}=\lim_{h=0}\frac{3h}{h}=\lim_{h=0}3=3$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=2(3x-11)\times3=6(3x-11)$$
$$\frac{dy}{dx}=18x-66$$

DÍA 12 MES 10 AÑO 21

Ejemplo 2

$y = \cos(2x+3)$

$u = \cos(y)$

$y = 2x+3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dy}$

$\frac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(2x+3)$

$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h}$

$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2x+2h+3-2x-3}{h}$

$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2h}{h} = \lim_{h=0} 2 = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\sin(2x+3) \times 2 = -2\sin(2x+3)$

Derivada implícita

La derivada implícita de una función implícita se obtiene derivando la función, después de despejar la variable y, que es la que se considera variable dependiente (a esta derivada la llamaremos y') considerando que es función de x. Una función implícita es aquella que, la variable dependiente no esta despejada. Es decir, que y no está definida en función solo de la variable independiente x. No siempre es sencillo, o incluso no es posible, despejar la y para poner la función en forma explícita. Puede ser por la misma forma de la función o porque las dos variables estén dentro del argumento, tal como:

$$y^3x^2 - 2y + 3x = 5$$

$$y = \ln x - \operatorname{sen}(2y - x)$$

Muchas ecuaciones formuladas de forma implícita sí que se pueden transformar en forma explícita, aunque se pueden derivar sin necesidad de ser transformadas:

$$2y^5 - 5x^4 + 9 = 0 \Longrightarrow y = \frac{\sqrt[5]{5x^4 - 9}}{2}$$

Para derivar las ecuaciones que quedan definidas en forma implícita, se recurre a llamada derivación implícita. El proceso de derivación implícita consiste en obtener la derivada de esta función respecto de la variable x.

DÍA 12 MES 10 AÑO 21

Para ello hay que tomar la variable y como una función de x (se considera $y = f(x)$). La derivada de esta última función será y'.

En otras palabras, al derivar implícitamente se considera x como la variable independiente, mientras que a y se le considera una función.

Antes de derivar, si hubiere fracciones, conviene eliminar los denominadores con el mínimo común múltiplo. Mediante la aplicación del método de la cadena, se procederá a derivar, despejando finalmente y'.

Las derivadas parciales permiten obtener en muchas ocasiones con más sencillez la derivación implícita.

$u = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Ejemplo

$2y - xy + 2x = 5$

$2y - xy = 5 - 2x$

$y(2-x) = 5 - 2x$

$y = \frac{5-2x}{2-x}$

$$y' = \frac{-2\cdot(2-x) - (-1)\cdot(5-2x)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{-4+2x+5-2x}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{(2-x)^2}$$

Ejemplo

$y = \text{sen}(y)$

$y' = [\text{sen}(xy)]'$

$y' = [\cos(xy)] \cdot [1 \cdot y + xy']$

$y' = y \cdot \cos(xy) + xy' \cdot \cos(xy)$

$y' - xy' \cdot \cos(xy) = y \cdot \cos(xy)$

$y' \cdot [1 - x \cdot \cos(xy)] = y \cdot \cos(xy)$

$$y' = \frac{y \cdot \cos(xy)}{1 - \cos(xy)}$$

Norma

DÍA 12 MES 10 AÑO 21

Derivadas de orden superior

La derivada de orden superior se conoce como la segunda derivada de la función, es decir, si $f(x)$ es una función y existe su primera derivada $f'(x)$.

Es importante tener en cuenta:

$f(x)$ es la función

$f'(x) = \frac{d}{dx} f$ es la derivada de la función

$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)$ es la derivada de la derivada de la función

de manera similar se puede obtener las derivadas de mayor orden, sin embargo es necesario aclarar que las derivadas de una función dependen de las características de la función y es posible, y frecuentemente sucede, que algunas derivadas existen pero no para todos los órdenes pese a que se puedan calcular con formulas.

Las notaciones usuales utilizadas con mayor frecuencia para derivadas de segundo orden son:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \begin{cases} y'' \\ f^{(2)} \\ f^{(2)}(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} y(x) \\ f'' \end{cases}$$

$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ derivada de segundo orden

$\frac{d^3}{dx^3} f(x)$ derivada de tercer orden

$\frac{d^5}{dx^5} f(x)$ derivada de quinto orden

⋮

Ejemplo 1

$y = 3x^4 - 2x^2 + x$

encontrar $\frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$

$y' = 12x^3 - 4x + 1$

$y'' = 36x^2 - 4$

$y''' = 72x$

Ejemplo 2

Si $f(x) = \operatorname{Sen} u$ entonces $f'(x) = \operatorname{Cos} u \cdot u'$

Si $g(x) = \operatorname{Cos} u$ entonces $g'(x) = -\operatorname{Sen} u \cdot u'$

$f(x) = \operatorname{Sen}(3x)$ encontrar $f^{(4)}(x)$

$f'(x) = \operatorname{Cos}(3x) \cdot 3$

$f'(x) = 3\operatorname{Cos}(3x)$

$f''(x) = 3 \cdot [-\operatorname{Sen}(3x) \cdot 3]$

$f''(x) = -9 \operatorname{Sen}(3x)$

$f'''(x) = -9 \cdot \operatorname{Cos}(3x) \cdot 3 = -27 \cdot \operatorname{Cos}(3x)$

$f^{(4)}(x) = -27 \cdot [-\operatorname{Sen}(3x)] \cdot 3$

$f^{(4)}(x) = 81 \operatorname{Sen}(3x)$

DÍA	MES	AÑO
13	10	21

Formulas para derivación

$\frac{dC}{dx} = 0$ $\qquad$ $\frac{dCX^n}{dx} = nCX^{n-1}$

$\frac{dX}{dx} = 1$

$\frac{dCX}{dx} = C$

A → Q SON CONSTANTES
R → Z SON VARIABLES

$f(X) = 4X^2 + 5x - 8$ $\qquad$ $f(X) = (2)4X^{2-1} + 5$
$F'(X) = 8X^1 + 5x \longrightarrow 8X^1 + 5$

$f(X) = 6X^3 + 8x - 12$
$F'(X) = 18X^2 + 8$

$f(X) = 5X^4 - 2X^2 - 3x + 1$
$F'(x) 20^3 - 4X - 3$

$f_1(x) = \frac{3}{2}X^4 - 4X^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}x + 1\sqrt{\frac{39}{26}}$
$F'(X) = 6X^3 - 2X^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}$

$f(X) = \frac{5}{2}X^3 - 8X^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x + 216$
$7.5 - 12X^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}$
$\frac{15}{2}X^2 - 12X^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}$