14/03/2022

Determinantes de una matriz

Determinante de una matriz cuadrada A es la suma de todos los productos de los elementos de dicha matriz, de forma que se elija un término de cada fila y uno de cada columna sin repetir dos de la misma fila o dos de la misma columna, afectados del signo según que las inversiones de los indicativos de columnas, una vez ordenados los de filas de forma natural, sean pares o no.

Los determinantes se denotan situando los términos de la matriz A de la que proceden entre dos líneas

$\det A = |A|$

Ejemplo:

DP

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |A| = \overbrace{(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{21})(a_{32})(a_{13})}^{D.P.} \underbrace{- \left[(a_{13})(a_{22})(a_{31}) + (a_{12})(a_{21})(a_{33}) + (a_{23})(a_{32})(a_{11})\right]}_{D.S.}$$

Se llama Término o elemento de un determinante a cada uno de sus valores. Al igual que en las matrices, se representan por a_{ij} donde el primer subíndice representa la fila y el segundo la columna donde se halla ubicado.

Orden de un determinante

Es el número de filas o de columnas que lo componen, lógicamente coinciden con el orden de la matriz correspondiente.

Menor y Menor Complemento de una matriz

Se llama menor de una matriz, al determinante obtenido con los términos que se hallen en las intersecciones de determinadas filas y columnas elegidas.

Se llama menor complementario al que resulta de eliminar las filas y columnas del menor elegido.

EJEMPLO: En la matriz A hallar el menor determinado por filas 2ª y 5ª y las columnas 2ª y 4ª, además de su menor complementario. Destacando con líneas de puntos las filas y columnas elegidas

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

El menor M será:

$$M=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{bmatrix}$$

Una vez eliminadas las anteriores filas y columnas, obtendremos el siguiente menor complementario M_c:

$$M_c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Así el menor complementario de un número cualquiera será el resultante de eliminar fila y columna correspondiente al siguiente valor.

Ejemplo:

Hallar el menor complementario del termino a_{32} de la matriz anterior

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el menor complementario del término a_{32} será:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Adjunto o cofactor

El adjunto o cofactor de un término cualquiera es su menor complementario del correspondiente signo según la paridad de la suma de subíndices de las filas y columnas. Positivo si es par y negativo si es impar

$$\underset{FC}{Adj_{ij}} = (-1)^{i+j} Mc$$

Calcularemos el adjunto de a_{32}

$$Adj\,a_{32} = (-1)^{\overset{5\ \text{impar}}{3+2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}$$

El determinante es negativo porque la suma de los indicativos de la tercera fila y la segunda columna es negativa, es decir, impar.

Signos de los adjuntos

Para tener que evitar calcular los signos de los adjuntos correspondientes a los términos de un determinante se observa la siguiente regla:

Como los elementos de la diagonal principal son positivos, se alternarán los signos a partir de ellos:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Calculo de los determinantes

Existen varias formas de calcular un determinante. Si el orden es pequeño, es decir, 2 o 3, la mejor forma es mediante la regla de Sarrus, pero si es mayor, será preciso desarrollar por los elementos de una fila o columna en la que previamente se ha conseguido hacer ceros en todos los términos excepto en uno.

Calculo de la determinante de orden 2

El cálculo de un determinante de orden 2 se realiza restando en producto de los elementos de la diagonal secundaria

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{(-)}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

EJEMPLO: Hallar el valor de la determinante de la siguiente matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(1) = 7$$

$$4 - (-3) = 7$$

Calculo de la determinante de orden 3

Para calcular el determinante de un orden de 3 se realizará la regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}]$$

El valor de la determinante es la suma de los productos de los términos positivos menos la suma de los productos de términos negativos.

1) Términos positivos. Diagonal principal y sus paralelas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

2) Términos negativos. Diagonal secundaria y sus palabras

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}]$$

EJEMPLO: Calcular el valor de la siguiente determinante $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (1)(2)(3) + (2)(-1)(3) + (2)(5)(4) - [(4)(2)(3) + (-1)(5)(1) + (2)(2)(3)]$$
$$= 9$$

Regla de Sarrus

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}^{(-)} = -14 - 12 - 60 - [4 - 20 + 126] = -14 - 12 - 60 \underbrace{-4 + 20 - 126}$$
$$\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -5 \end{matrix}$$

$$|A| = -196$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix}$$

15/03/2022

Calcular la matriz inversa por medio del método adjunto

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

① Calcular $|A|$

$|A| = 0$ No hay proc.

$|A| \neq 0$ Si hay proc.

② Exponer la M. traspuesta

③ Calcular M. Adjunta.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

①

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{(-)} = |A| = 0 - 18 + 4 - 0 - 24 - 4$$

$$|A| = -42$$

②

Las filas pasan a ser columnas

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

③

$$A^t = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$ 3x3 Orden 3 $$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = +\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{(-)} = +[0-2] \quad +[-2] = -2$$

$a_{11} = -2$

$$a_{21} = -\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{(-)} = -[-8-6] \quad -[-14] = 14$$

$a_{21} = 14$

$$a_{12} = -\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{(-)} = -[6-1] = -[5] = -5$$

$a_{12} = -5$

$$a_{22} = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{(-)} = +[-4-3] \quad +[-7] = -7$$

$a_{22} = -7$

$$a_{13} = +\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(-)} = +[-6-0] \quad +[-6] = -6$$

$$a_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -[4-4] \quad -[0] = 0$$

$a_{23} = 0$

$a_{13} = -6$

$$a_{31} = + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{(-)} = +[4-0]$$
$$a_{31} = 4 \qquad +[4] = 4$$

$$a_{32} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -[2+9]$$
$$a_{32} = -11 \qquad = -[11]$$

$$a_{33} = + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = +[0+12]$$
$$a_{33} = \underline{\underline{12}} \qquad = +[12]$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 \\ 14 & -7 & 0 \\ 4 & -11 & 12 \end{bmatrix}}{-42} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/21 & 5/42 & 1/7 \\ -1/3 & 1/6 & 0 \\ -2/21 & 4/42 & -2/7 \end{bmatrix}$$

22/Mar/2022

Rango de una matriz

El rango de una matriz escalonadas es igual al número de filas no nulas, o bien, al número de filas que no dependen una de otra

$$M=\begin{bmatrix}5&2&-3&0\\0&3&1&7\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad Rango(m)=\underline{\underline{3}}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-(-1)} = Rango\ (A) = (\underline{\underline{2}})$$

$$Z=\begin{bmatrix}2&4&6\\6&8&1\\1&8&2\end{bmatrix} \ Rango\ (z)=\underline{\underline{3}} \qquad R=\begin{bmatrix}5&10&15\\1&7&9\\15&30&45\end{bmatrix} \ Rango\ (R)=2$$

Nucleo de una matriz → Matriz Escalonada
→ Diagonal unidad

Es todo conjunto de vectores que al transformarlos nos daran un valor determinado

$$A=\begin{bmatrix}5&10&3&4\\7&3&2&1\\5&2&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1-4} \begin{bmatrix}1&6&-4&0\\7&3&2&1\\5&2&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{F_2=-7(F_1)+F_2} \begin{bmatrix}1&6&-1&0\\0&-39&9&1\\5&2&3&4\end{bmatrix} \ F_2=F_2(-1/39)$$

$$\begin{bmatrix}1&6&-1&0\\0&1&-3/13&-1/39\\5&2&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{F_3=(F_3)(F_2)} \begin{bmatrix}1&6&-1&0\\0&1&-3/13&-1/39\\0&2&-1/13&-4/39\end{bmatrix} \xrightarrow{F_3=-2(F_2)+F_3} \begin{bmatrix}1&6&-1&0\\0&1&-3/13&-1/39\\0&0&-3/13&-2/39\end{bmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3(-13/3)}$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & VI \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1&6&-1&0\\0&1&-3/13&-1/39\\0&0&1&2/9\end{bmatrix}$$

$5 \quad 10 \quad 3 \quad 4$

$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$

$1 \quad 6 \quad -4 \quad 0$ NF1

$\times -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7$

$1 \quad 6 \quad -1 \quad 0$

$+ \; -7 \quad -42 \quad 7 \quad 0$

$7 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

$0 \quad -39 \quad 9 \quad 1$ NF2.

$\times \; 0 \quad -39 \quad 9 \quad 1$

$-\tfrac{1}{39} \quad -\tfrac{1}{39} \quad -\tfrac{1}{39} \quad -\tfrac{1}{39}$

$0 \quad 1 \quad -\tfrac{3}{13} \quad -\tfrac{1}{39}$ NF2

$\times \; 5 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$0 \quad 1 \quad -\tfrac{3}{13} \quad -\tfrac{1}{39}$

$0 \quad 2 \quad -\tfrac{8}{13} \quad -\tfrac{4}{13}$ NF3

$\times \; 0 \quad 1 \quad -\tfrac{3}{13} \quad -\tfrac{1}{39}$

$-2 \quad -2 \quad -2 \quad -2$

$0 \quad -2 \quad \tfrac{6}{13} \quad \tfrac{2}{39}$

$0 \quad 2 \quad -\tfrac{9}{13} \quad -\tfrac{4}{39}$

$0 \quad 0 \quad -\tfrac{3}{13} \quad -\tfrac{2}{39}$ NF3

$\times \; 0 \quad 0 \quad -\tfrac{3}{13} \quad -\tfrac{2}{39}$

$-\tfrac{13}{3} \quad -\tfrac{13}{3} \quad -\tfrac{13}{3} \quad -\tfrac{13}{3}$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad \tfrac{2}{9}$ NF3

$$
\begin{array}{cccc}
x & y & z & \\
a & b & c & VI
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{3}{13} & -\tfrac{1}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{2}{9} \end{array}\right]
\quad
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{matrix} 8/117 \\ 1/39 \\ 2/9 \end{matrix}
$$

=C=

$1c = 2/9$

$c = 2/9 \div 1$

$\underline{c = 2/9}$

=b=

$b - \tfrac{3}{13}c = -\tfrac{1}{39}$

$b - \tfrac{3}{13}(\tfrac{2}{9}) = -\tfrac{1}{39}$

$b - \tfrac{2}{39} = -\tfrac{1}{39}$

$b = -\frac{1}{39} + \frac{2}{39}$

$\underline{b = 1/39}$

$a + 6b - 1c = 0$

$b - \tfrac{3}{13} = -\tfrac{1}{39}$

$1c = 2/9$

=a=

$a + 6b - 1c = 0$

$a + 6(\tfrac{1}{39}) - 1(\tfrac{2}{9}) = 0$

$a + \tfrac{2}{18} - \tfrac{2}{9} = 0$

$a - 8/117 = 0$

$\underline{a = +8/117}$

Norma