

Unidad 3 Lógica Matemática

Competencias

- Entender el concepto de proposición y la forma en que se pueden elaborar proposiciones compuestas usando los conectores lógicos.
- Evaluar proposiciones lógicas por medio de tablas de verdad.
- Comprender los conceptos de tautología, contradicción, equivalencia lógica y regla de inferencia.
- Aprender a representar enunciados en forma de teorema usando para ello simbología lógica.
- Demostrar teoremas por medio del método deductivo directo y contradicción.
- Distinguir entre argumentos válidos y no válidos.
- Representar predicados con notación lógica, usando los cuantificadores existenciales y universal.
- Demostrar proposiciones por medio de inducción matemática.

Reyes Villar Luis Ricardo

4.2 proposiciones.

Ejemplo 4.1. Proposiciones válidas y no válidas.

p: Estados Unidos es el país territorialmente más extenso del continente americano.

q: $-19 + 50 = 31$

r: $x > (y - 13)z$

s: Carlos Salinas de Gortari fue presidente de España.

t: Morelia será campeón en la presente temporada de fútbol.

v: ¿Cómo estás?

w: Formatea el disco antes de usarlo.

4.2.1 Proposiciones compuestas

Operador and (\wedge)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es \wedge .

Ejemplo 4.2 "El automóvil arranca si y sólo si el tanque tiene gasolina y la batería tiene corriente".

Sean:

p: El automóvil arranca

q: El tanque tiene gasolina

r: La batería tiene corriente.

De esta manera la representación del enunciado anterior, usando simbología lógica, es

y su tabla de verdad es la siguiente:

| q | r | $p \equiv q \wedge r$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Multiplicación lógica:

$$0 \wedge 0 \equiv 0$$

$$0 \wedge 1 \equiv 0$$

$$1 \wedge 0 \equiv 0$$

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

C

Reyes Villar Luis Ricardo

Aquí se tiene que:

1 = verdadero

0 = falso

En la tabla anterior el valor de $q=1$ significa que el tanque tiene gasolina, $r=1$ significa que la batería tiene corriente y $p \equiv q \wedge r \equiv 1$ significa que el automóvil puede encender. Se puede notar que si q o r valen cero, esto implica que el automóvil no tiene gasolina o bien la batería no tiene carga, y que por lo tanto no puede encender.

Operador or (\vee)

Ejemplo 4.3 Se tiene el siguiente enunciado: "Una persona puede entrar al cine si y sólo si compra su boleto o le regalan un pase."

Sean

 p : Una persona entra al cine q : Compra su boleto r : Le regalan un pase

De esta manera la representación lógica del enunciado es la siguiente

$$p \equiv (q \vee r)$$

y su tabla de verdad es

| q | r | $p \equiv (q \vee r)$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Suma lógica

$$0 \vee 0 \equiv 0$$

$$0 \vee 1 \equiv 1$$

$$1 \vee 0 \equiv 1$$

$$1 \vee 1 \equiv 1$$

A partir de la tabla se ve que la única forma en la que no puede ingresar al cine ($p \equiv 0$), es que no compra su boleto ($q \equiv 0$) y que no le regalen un pase ($r \equiv 0$).

Reyes Villar Luis Ricardo

Operador not (no)

| p | p' | p'' | p''' | p^{iv} | p^v | p^{vi} |
|-----|------|-------|--------|----------|-------|----------|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$p \equiv p'' \equiv p^{iv} \equiv p^{vi}$
 $p' \equiv p''' \equiv p^v \equiv p^{viii}$
 $\equiv (\text{logicamente equivalente})$

Ejemplo 4.4. Sea p : "El automóvil es azul"; entonces su complemento es p' : "El automóvil no es azul".

Operador or exclusivo (xor)

| p | q | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$p \oplus q \equiv p' \wedge q \vee p \wedge q'$$

| p | q | p' | q' | $(p' \wedge q)$ | $(p \wedge q')$ | $(p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$ | $(p \oplus q) \equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$ |
|-----|-----|------|------|-----------------|-----------------|------------------------------------|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Proposición condicional (\rightarrow)

$$p \rightarrow q$$

Ejemplo 4.5 Considere que un candidato a la presidencia de México dice "Si salgo electo presidente de la República, entonces el crecimiento anual del país será del 7%".

Una declaración como ésta se conoce como condicional, y para analizarla se usan las proposiciones:

C

Roxas Villar Luis Ricardo

 p : Salíó electo Presidente de la República. q : El crecimiento anual fue del 7%

De esta forma el enunciado anterior se puede expresar como

$$p \rightarrow q$$

y su tabla de verdad es el siguiente:

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

En esta tabla hay que observar que el único caso en el que $(p \rightarrow q) \equiv 0$ es cuando $p \equiv 1$ y $q \equiv 0$

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

1) $p \equiv 1$ significa que "el candidato salió electo", mientras que $q \equiv 1$ significa que "el crecimiento anual del país fue de 7%", por lo tanto $(p \rightarrow q) \equiv 1$ indica que el candidato dijo la verdad en su campaña.

2) $p \equiv 1$ y $q \equiv 0$ significa que el candidato mintió, ya que salió electo y el crecimiento anual no fue del 7% como lo prometió, por lo tanto la afirmación del candidato es falsa, $(1 \rightarrow 0) \equiv 0$.

3) $p \equiv 0$ y $q \equiv 1$ significa que aunque no salió electo hubo un crecimiento del 7% anual en el país, crecimiento que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto tampoco mintió de tal forma que $(0 \rightarrow 1) \equiv 1$.

4) $p \equiv 0$ y $q \equiv 0$ significa que el candidato no salió electo y que tampoco el crecimiento anual del país fue del 7%, por lo tanto el candidato no mintió respecto a la afirmación que hizo en su campaña por lo que $(0 \rightarrow 0) \equiv 1$.

Reyes Villar Luis Ricardo

Proposición bicondicional

$$p \leftrightarrow q$$

Ejemplo 4.6. Considere el enunciado "Es buen estudiante, si y solo si, tiene promedio de diez".

Para representar esto con notación lógica en forma de proposición bicondicional se definen las proposiciones

p : Es buen estudiante

q : Tiene buen promedio

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Como se ve en la tabla la proposición bicondicional solamente es verdadera si p como q son falsos o bien si ambas son verdaderas.

Ejemplo 4.7. Representar con notación lógica los siguientes enunciados:

a) "Si no estudio matemáticas para computación y no hago la tarea de fundamentos de programación, entonces reprobaré el semestre o no podré ir de vacaciones a Cancún."

El enunciado anterior es una proposición condicional integrado por varias proposiciones simples, y para representarlo con notación lógica lo primero que se hace es determinar cuáles son las proposiciones simples que la integran para asignarles un nombre. En este caso se tienen las siguientes:

p : Estudio matemáticas para computación.

q : Hago la tarea de fundamentos de programación.

r : Reprobaré el semestre.

s : Podré ir de vacaciones a Cancún.

Usando esto y los operadores correspondientes, el enunciado se expresa como

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

9

Reyes Villar Luis Ricardo

El enunciado anterior no marca explícitamente en dónde se deben de poner paréntesis, sin embargo se puede definir que si hay más de una proposición antes de la palabra "entonces" o después de ella, éstas se deben de encerrar entre paréntesis para no tener problemas con la jerarquía de operación de los conectores lógicos.

| p | a | r | s | p' | a' | s' | (p ∧ a') | (r ∨ s') | (p' ∧ a') → (r ∨ s') |
|---|---|---|---|----|----|----|----------|----------|----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

b) "Si no pago el teléfono, entonces me cortarán el servicio telefónico. Y si pago el teléfono, entonces me quedará sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la tarjeta de crédito, si sólo si soy una persona desorganizada."

En este caso se tienen las siguientes proposiciones simples:

p: Pago el teléfono.

Si Pediré prestado

q: Me cortarán el servicio telefónico.

t: Pagar la tarjeta de crédito.

r: Me quedará sin dinero

w: Soy una persona desorganizada.

Reyes Villar Luis Ricardo

Usando esto y los operadores, el enunciado dado se expresa como:

$$(p' \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t'] \leftrightarrow w$$

Es conveniente encerrar entre paréntesis cada uno de los textos separados por punto, ya que cada uno de estos textos representa una hipótesis (varias hipótesis juntamente con su conclusión son parte de un texto, como se verá posteriormente). Se puede observar en el enunciado dado que después de un punto y seguido aparece un conector lógico "Y". En general un punto y seguido significa un operador lógico " \wedge " sin necesidad de ponerlo explícitamente, por lo que en los siguientes ejercicios ya no se pondrá el operador lógico sino solamente el punto.

$$13 \equiv [(r \wedge s) \rightarrow t']$$

$$14 \equiv [(r \vee s) \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t']]$$

$$15 \equiv [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t']$$

$$16 \equiv (p' \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t']$$

$$17 \equiv (p' \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t'] \leftrightarrow w$$

| | p | q | r | s | t | w | p' | t' | (p' → q) | (r ∨ s) | [p → (r ∨ s)] | (r ∧ s) | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----------|---------|---------------|---------|----|----|----|----|----|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

9

Reyes Villar Luis Ricardo

| | p | q | r | s | t | w | p' | t' | $(p' \rightarrow q)$ | $(r \vee s)$ | $[p \rightarrow (r \vee s)]$ | (m_s) | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----------------------|--------------|------------------------------|---------|----|----|----|----|----|
| 14 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 16 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 18 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 19 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 22 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 23 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 24 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 25 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 26 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 27 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 28 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 29 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 30 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 31 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 32 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 33 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 34 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 35 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 36 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 37 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 38 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 39 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 40 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 41 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 42 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 43 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Reyes Villar Luis Ricardo

| | p | q | r | s | t | w | p' | $\neg(p \rightarrow q)$ | $(r \vee s)$ | $\neg(p \rightarrow (r \vee s))$ | $(r \wedge s)$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|----|---|---|---|---|---|---|----|-------------------------|--------------|----------------------------------|----------------|----|----|----|----|----|
| 44 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 45 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 46 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 47 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 48 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 49 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 50 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 51 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 52 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 53 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 54 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 55 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 56 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 57 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 58 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 59 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 60 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 61 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 62 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 63 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 64 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |