24/03/2022

Unidad 3

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición

Un sistema de ecuaciones, consiste en tener varias ecuaciones, con varias incógnitas, de modo que, a partir de dichas ecuaciones se pretende calcular el valor de cada incógnita.

- Tipos de sistema

  Sistema compatible determinado. Sistema que tiene una única solución.

  Sistemas compatible indeterminado. Sistema que tiene solución pero no es única.

  Sistema incompatible. Sistema que no tiene solución.

Ejemplo

Supongamos que tenemos un sistema:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

Sea A la matriz formada por los coeficientes que multiplican a las X's, y sea B la matriz A ampliada con la columna de los términos independientes:

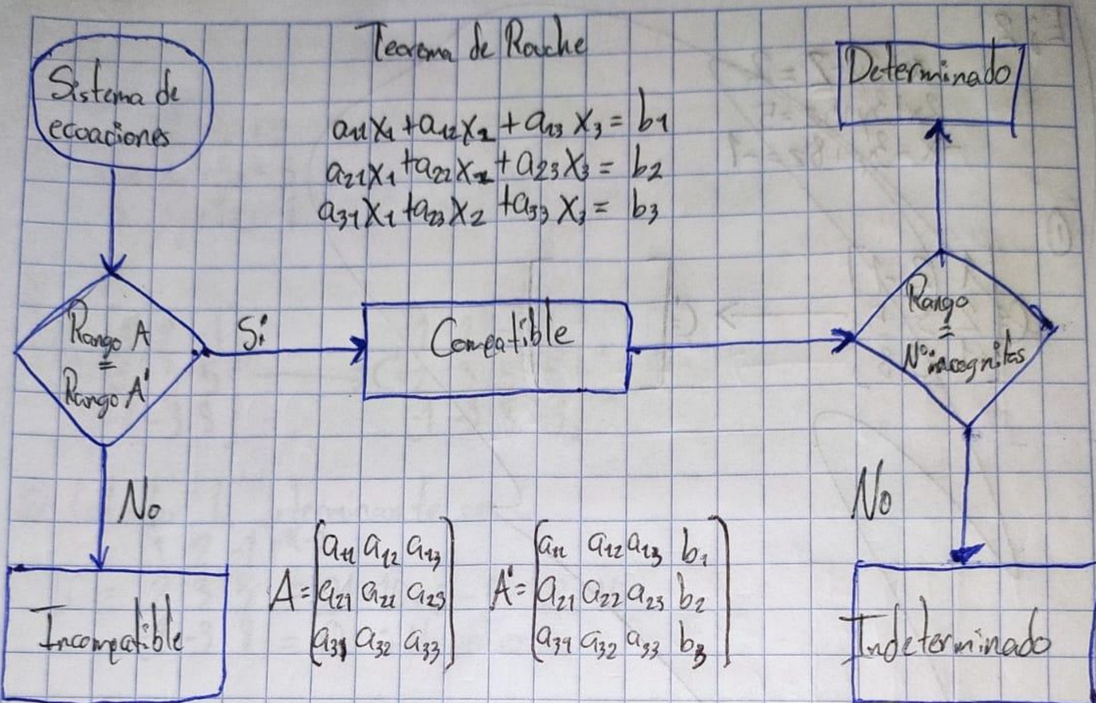
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

- Si rango de A = rango A' = n° de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si rango de A = rango de A' = n° de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
- Si rango de $A \neq$ rango de $A' \Rightarrow$ Sistema incompatible.

24/03/2022

Teorema de Rouche

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$2x + 4y + 6z = 18$$
$$4x + 5y + 6z = 24$$
$$3x + y - 2z = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

① Calcular $|A|$ (-)

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -20 + 72 + 24 - 90 - 12 + 32 = 6$$

Rango 3

② Calcular $|A'|$

(-)

$$|A'| = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 40 + 288 + 72 - 270 - 48 - 64 = 18$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones expuesto es un sistema de ecuaciones compatible Determinado ya que su número de rango es igual al numero de incognitas.

25/03/2022

Ej 2

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2 \\ 2x+3y+5z&=5 \\ -x-3y+8z&=-1 \end{aligned}$$

①

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow C'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

② Calcular la determinante en C

$$|C|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 24-10+6-3-32+15 = 0$$ ∴ No es rango

2.1. Buscar submatriz en la matriz C para que el determinante nos de $\neq 0$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3-4 = -1 \qquad C=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = 24+15 = 39 \qquad C=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 10+3 = 13$$

∴ Rango (C) = 2

③ Calcular Determinante C'

$$|C'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3-10-12+6+4+5 = 0$$

3.1. Buscar Submatriz en C' para que el determinante nos de $\neq 0$

$$C'=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -3+15 = 12 \qquad C'=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -6+3 = -3$$

∴ Rango (C') = 2 Por lo tanto el sistema de ecuaciones expuesto es un sistema de ecuaciones compatible indeterminado ya que su numero de rango no es igual al numero de incognitas.

25/03/2022

Ej 3

$x+y-z=7$
$4x-y+5z=4$
$6x+y+3z=20$

① Exponer Matrices

$$U=\begin{bmatrix}1&1&-1\\4&-1&5\\6&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow U'=\begin{bmatrix}1&1&-1&7\\4&-1&5&4\\6&1&3&20\end{bmatrix}$$

② Calculo Determinante

$$|U|=\begin{bmatrix}1&1&-1\\4&-1&5\\6&1&3\end{bmatrix}^{(-)}=-3+30-4-6-5-12=\underline{0}$$

2.1. Buscar Submatriz

$$U=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&5\end{bmatrix}^{(-)}=5-1=4 \quad \text{Rango}(U)=2$$

③ Calcular Determinante $|U'|$

$$|U'|=\begin{bmatrix}1&1&7\\4&-1&4\\6&1&20\end{bmatrix}^{(-)}=-20+24+28+42-4-80=-10$$

$\therefore \text{Rango}(U')=\underline{3}$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones expuesto no es compatible ya que el rango de U y U' no son iguales.