# Análise Matemática II (2013/2014)

# Ficha 5

## Funções implícitas. Aplicações diferenciáveis

1. Considere a equação $(x+1)^2 y - xy^2 = 4$. Verifique se $y$ se define implicitamente como função de $x$ numa vizinhança de cada um dos pontos seguintes:

   (a) $(-1, 2)$;

   (b) $(2, 1)$;

   (c) $(1, 2)$.

2. Suponha que a equação $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) = 0$ define $y$ implicitamente como uma função de $x$ numa vizinhança de algum ponto. Determine a derivada $y'(x)$.

3. Mostre que $F(x,y) = x^3 y + y^3 x - 2$ define $y$ como função de $x$ numa vizinhança de $(1,1)$. Calcule a sua derivada em $x = 1$.

4. Considere a equação da *lemniscata* $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$. Mostre que as condições do *Teorema da função implícita* falham na origem.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-2y)^2$ e a equação que resulta de igualar $f(x,y) = 0$. Verifique que, embora a derivada em ordem a $y$ seja igual a zero em $(0,0)$, a equação define $y$ implicitamente como função de $x$.

6. Mostre que a equação $x+y+z = \sin(xyz)$ define $z$ implicitamente como uma função de duas variáveis $x$ e $y$ numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$. Calcule as derivadas parciais de $z$ no ponto $(1,0)$.

7. Utilize o *Teorema da função implícita* para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ nos pontos $(x,y)$ onde tal teorema é aplicável

   (a) $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$;

   (b) $xyz = \cos(x+y+z)$;

   (c) $xe^y + yz + ze^x = 0$;

   (d) $\ln(x+yz) = 1 + xy^2z^3$.

8. Verifique se numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ a equação $x^2z^2+xy^2-z^3+4yz-5=0$ define implicitamente $z$ como função de $x$ e $y$. Em caso afirmativo, calcule as derivadas parciais de $z$ no ponto $(1,1)$.

9. Suponha que a função $w=f(u,v)$ é diferenciável e que a equação
$$f\left(\frac{z}{y},\frac{x}{y}\right)=0,\quad y\neq 0,$$
define $x$ implicitamente como função de $y$ e $z$, seja $x=g(y,z)$. Demonstre a igualdade
$$y\frac{\partial g}{\partial y}+z\frac{\partial g}{\partial z}=g$$
nos pontos onde $\partial f/\partial v\neq 0$.

10. Mostre que a equação $x^2+2y^2+3z^2=1$ define implicitamente $z$ como função $f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

    Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ nesse ponto.

11. Verifique se as aplicações dadas são diferenciáveis, e determine as *matrizes de Jacobi* das aplicações $\varphi$, $f$ e $g$ e calcule os *Jacobianos* das aplicações $\varphi$ e $f$.

    (a) $\varphi(x,y)=(xe^y,\sqrt[3]{x}+y^2),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;

    (b) $f(x,y)=(e^{x+2y},\sin(y+2x)),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;

    (c) $g(u,v,w)=(u+2v^2+3w^3,2v-u^2),\ (u,v,w)\in\mathbb{R}^3$;

    (d) $h(u,v,w)=(f\circ g)(u,v,w)$.

12. Considere as aplicações $f$ e $g$ definidas por
$$g(u,v)=(u+v,u-v,uv)\,,\qquad f(x,y,z)=\left(xy+z,\frac{x^2-4z}{y}\right).$$

    (a) Determine a função composta $f\circ g$ e o seu domínio.

    (b) Determine as *matrizes Jacobianas* das funções $f,g$ e $f\circ g$ em todos os pontos onde estão definidas.

13. Considere o sistema
$$\begin{cases} x+2x^2y+z=0 \\ y-e^x=0. \end{cases}$$

    (a) Mostre que o sistema dado define implicitamente $x$ e $y$ como funções de $z$ numa vizinhança do ponto $(0,1,0)$.

(b) Calcule as derivadas destas funções na origem.

(c) Indique os pontos $(x, y, z)$ que verificam o sistema dado, e em torno dos quais não podemos garantir, pelo teorema da função implícita, a existência de funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$ univocamente definidas.

14. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0 \\ x^2 - y + u - v^2 = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema dado pode ser univocamente resolvido relativamente às variáveis $u$ e $v$ numa bola centrada em $(0,0)$ e que as funções $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são diferenciáveis nessa bola.

(b) Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$.

(c) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u, v) = (v \cos u, u \sin v)$. Calcule

$$\operatorname{Jac}(g \circ f)(0,0)$$

onde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.