CAPÍTULO 1

Sucessões

1.1 Definição de Sucessão

Definição 1.1 *Chama-se* ***sucessão*** *de números reais a qualquer aplicação u do conjunto dos números inteiros positivos, em $\mathbb{R}$ a qual pode ser representada por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ ou apenas por (u_n). A u_n chama-se o termo geral da sucessão*

$$\begin{array}{rl} u: & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow u(n) = u_n \end{array}$$

Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de números reais, os valores

$u(1) = u_1$	diz-se	primeiro termo da sucessão, ou termo de ordem 1
$u(2) = u_2$	diz-se	segundo termo da sucessão, ou termo de ordem 2
$u(3) = u_3$	diz-se	terceiro termo da sucessão, ou termo de ordem 3
...		...
$u(n) = u_n$	diz-se	enésimo termo da sucessão, ou termo de ordem n
...		...

Podemos designar a sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ..) .$$

Muitas vezes, por abuso de linguagem, é usado, para designar a sucessão o termo geral u_n. Ao conjunto dos valores da sucessão $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ao seu contradomínio) chamamos o conjunto dos termos da sucessão.

Exemplo 1.1 *Consideremos a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$u_n = \frac{1}{n^3}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \mathrm{u}(1) = 1,\\
&u_2 = \mathrm{u}(2) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\\
&u_3 = \mathrm{u}(3) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27},\\
&...\\
&u_n = u(n) = \frac{1}{n^3},\\
&...\\
&U = \left\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, ..., \frac{1}{n^3}, ...\right\} \ \textit{é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}
$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$\left(1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, ..\right).$$

Exemplo 1.2 *Consideremos a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$v_n = (-1)^n.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&v_1 = v(1) = -1,\\
&v_2 = v(2) = 1,\\
&v_3 = v(3) = -1,\\
&...\\
&v_n = v(n) = (-1)^n,\\
&...\\
&V = \{-1, 1\} \ \textit{é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}
$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, ..).$$

É importante distinguir entre a sucessão e o conjunto dos seus termos. Numa sucessão o seu domínio (o conjunto das ordens) é sempre infinito, é o conjunto $\mathbb{N}$, enquanto que o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) pode ser finito ou infinito.

Exemplo 1.3 *Consideremos a sucessão $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$w_n = \cos(n\frac{\pi}{3}).$$

Então:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= w(1) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\\
w_2 &= w(2) = \cos(2\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\\
w_3 &= w(3) = \cos(\pi) = -1,\\
w_4 &= w(4) = \cos(4\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\\
w_5 &= w(5) = \cos(5\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\\
&\qquad ...\\
w_n &= w(n) = \cos(n\frac{\pi}{3}),\\
&\qquad ...\\
W &= \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1\right\} \text{ é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}
$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, ...\right).$$

Exemplo 1.4 *Consideremos a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$s_n = n^{\frac{1}{n}}.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1,\\
s_2 &= 2^{\frac{1}{2}} \simeq 1,4142,\\
s_3 &= 3^{\frac{1}{3}} \simeq 1,4422,\\
s_4 &= 4^{\frac{1}{4}} \simeq 1,4142,\\
s_5 &= 5^{\frac{1}{5}} \simeq 1,3797,\\
&\qquad ...\\
s_{100} &= (100)^{\frac{1}{100}} \simeq 1,0471,\\
&\qquad ...\\
s_{1000} &= (1000)^{\frac{1}{1000}} \simeq 1,0069,\\
&\qquad ...
\end{aligned}
$$

Considerando os valores aproximados a quatro casas decimais, o conjunto dos termos será:

$$S = \{1; 1,4142; 1,4422; 1,4142; 1,3797; ...; 1,0471; ...; 1,0069; ...\}.$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(1; 1,4142; 1,4422; 1,4142; 1,3797; ...; 1,0471; ...; 1,0069; ...).$$

Exemplo 1.5 *Consideremos a sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 2;\\
p_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = 2,25;\\
p_3 &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 \simeq 2,3704;\\
p_4 &= \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \simeq 2,4414;\\
p_5 &= \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\tfrac{6}{5}\right)^5 \simeq 2,4883;\\
&\dots\\
p_{100} &= \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = \left(\tfrac{101}{100}\right)^{100} \simeq 2,7048;\\
&\dots\\
p_{1000} &= \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = \left(\tfrac{1001}{1000}\right)^{1000} \simeq 2,7169;\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Considerando os valores aproximados a quatro casas decimais, o conjunto dos termos será:

$$S = \{2; 2,25; 2,3704; 2,4414; 2,4883; ...; 2,7048; ...; 2,7169; ...\}.$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(2; 2,25; 2,3704; 2,4414; 2,4883; ...; 2,7048; ...; 2,7169; ...).$$

Exemplo 1.6 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \mathrm{u}(1) = 3,\\
&u_2 = \mathrm{u}(2) = 3+5 = 8,\\
&u_3 = \mathrm{u}(3) = 8+5 = (3+5)+5 = 13,\\
&\dots\\
&u_{n+1} = u_n + 5,\\
&\dots\\
&U = \{3, 8, 13, ...\}.
\end{aligned}
$$

Uma sucessão determinada através do processo anterior diz-se definida por recorrência. Através do método de indução finita pode mostrar-se que, de facto, este processo permite determinar para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, ou seja, permite definir uma sucessão.

Exemplo 1.7 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} u_1 = \mathrm{u}(1) = a, \\ u_2 = \mathrm{u}(2) = u_1 + r = a + r, \\ u_3 = \mathrm{u}(3) = u_2 + r = (u_1 + r) + r = a + 2r, \\ u_4 = \mathrm{u}(4) = u_3 + r = (u_2 + r) + r = ((a + r) + r) + r = a + 3r, \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + r = a + (n-1)r, \\ ... \end{array}$$

*Chamamos a esta sucessão uma **progressão aritmética de primeiro termo** a e **razão** r.*

Exemplo 1.8 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n.5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} v_1 = v(1) = 3, \\ v_2 = v(2) = 3.5 = 15, \\ v_3 = v(3) = 15.5 = (3.5).5 = 3.5^2 = 75, \\ ... \\ v_{n+1} = v_n.5, \\ ... \\ V = \{3, 15, 75, ...\}. \end{array}$$

Exemplo 1.9 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = v_n.r \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} v_1 = v(1) = a, \\ v_2 = v(2) = v_1.r = a.r, \\ v_3 = v(3) = v_2.r = (v_1.r).r = a.r^2, \\ v_4 = v(4) = v_3.r = (v_2.r).r = ((a.r).r).r = a.r^3, \\ ... \\ v_{n+1} = v_n.r = a.r^n, \\ ... \end{array}$$

*Chamamos a esta sucessão uma **progressão geométrica de primeiro termo** a e **razão** r.*

Como curiosidade consideramos uma sucessão muito falada ultimamente nos meios de comunicação, a sucessão dos números de Fibonacci.

"...13-3-2-21-1-1-8-5, leu Robert Langdon nas letras púrpuras o que Jacques Saunière tinha escrito no soalho do Louvre antes de morrer. O código escapava-lhe, mas a jovem Sophie Neveu, especialista em criptografia, descobriu que se tratava de uma permutação dos primeiros termos da sucessão de Fibonacci..."

Quem tenha lido *O Código Da Vinci*, de Dan Brown, recordar-se-á de imediato de uma das cenas iniciais deste livro absorvente. E saberá que esta sucessão de Fibonacci aparece vezes sem conta neste livro.

Exemplo 1.10 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, na sucessão de Fibonacci:*

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&w_1 = 1, \\
&w_2 = 1, \\
&w_3 = w_2 + w_1 = 1 + 1 = 2, \\
&w_4 = w_3 + w_2 = 2 + 1 = 3, \\
&w_5 = w_4 + w_3 = 3 + 2 = 5, \\
&... \\
&w_{n+2} = w_{n+1} + w_n, \\
&... \\
&V = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}.
\end{aligned}$$

Nota 1.1 *Dadas duas sucessões de números reais u e v, chama-se **soma**, **diferença** e **produto** de u e v às sucessões $u+v$, $u-v$ e uv de termos gerais, respectivamente, $u_n + v_n$, $u_n - v_n$ e $u_n.v_n$. Se $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, chama-se sucessão **quociente** de u e v à sucessão $\frac{u}{v}$ de termo geral $\frac{u_n}{v_n}$.*

1.2 Limite de uma sucessão, sucessões convergentes

A noção de limite é uma das mais importantes de toda a Análise Matemática.

1.2.1 Introdução histórica

O conceito de limite constitui um dos fundamentos do Cálculo, é necessário para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência. No entanto, embora sendo um dos mais antigos conceitos, a definição moderna tem menos de 150 anos. Durante muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito – números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjectivas, nem sempre rigorosas. O termo limite, no sentido moderno, é produto dos séculos XVIII e XIX.

A primeira vez em que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 A.C., na discussão de quatro paradoxos formulados pelo filósofo grego Zenão, mas só no século XIX, com os trabalhos de Augustin Louis Cauchy, quando preparava uma exposição sobre Cálculo para apresentar aos seus estudantes de engenharia na École Polytechnique de Paris, e de Karl Weierstrass, professor da High School (entre outros), é formulada uma definição de limite moderna e rigorosa.

1.2.2 Definição de limite

Antes de introduzirmos a noção fundamental desta secção recordo algumas propriedades relacionadas com a distância entre dois números reais.

Definição 1.2 *Para dois números reais a e b, definimos* $dist(a,b) = |a-b|$. $dist(a,b)$ *representa a distância entre a e b.*

Algumas propriedades básicas.

Proposição 1.1 *Sendo* $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \textit{(i)} \quad |a| \geq 0, \\ \textit{(ii)} \quad |ab| = |a| \,.\, |b|\,, \\ \textit{(iii)} \quad |a+b| \leq |a| + |b|\,, \ \textit{(desigualdade triangular).} \end{cases}$

Definição 1.3 *Diz-se que o número real* ***a*** *é o* ***limite da sucessão*** (u_n)*, ou que* (u_n) *converge ou tende para a, e escreve-se*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad ou \quad u_n \to a$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$ *existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que para qualquer* $n > p$, $|u_n - a| < \varepsilon$. *Isto é*

$$u_n \to a \ sse \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Ou seja, $u_n \to a$ sse para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Em termos pouco rigorosos mas sugestivos o número real a é limite da sucessão (u_n) se para grandes valores de n todos os termos de (u_n) se aproximam de a. Observemos que:

$$|u_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < u_n - a < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(a).$$

Nesta definição a letra grega ε representa um número positivo e não qualquer número exótico. Tradicionalmente, em Matemática, utilizam-se as letras gregas ε e δ em situações onde interessa considerar pequenos valores positivos. Utilizaremos, nestas notas, estas letras indiferentemente.

Definição 1.4 *Uma sucessão* (u_n) *diz-se* ***convergente*** *se existe um número real a tal que* $u_n \to a$. *Uma sucessão que não é convergente diz-se* ***divergente***.

Para tentar apreender o significado deste conceito vamos estudar detalhadamente um exemplo.

Exemplo 1.11 *Consideremos a sucessão, cujo termo de ordem n é* $u_n = \dfrac{3n+1}{7n-4}$. *Se escrevermos esta sucessão na forma* $u_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}$ *e notarmos que tanto* $\frac{1}{n}$ *como* $\frac{4}{n}$ *são bastante pequenos para grandes valores de n, é razoável pensar que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{7}$.

Em primeiro lugar estamos interessados em analisar o que significa $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{7}$. Pela definição de limite significa que

$$\text{para qualquer } \varepsilon > 0 \text{ existe um número } p \text{ tal que } n > p \text{ implica } \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon.$$

Sempre que ε varia o nosso número p também varia. Consideremos alguns valores para ε:

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon = 1 & : \ n > 0 & \text{implica} & \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < 1 \\
\varepsilon = 0,1 & : \ n > 4 & \text{implica} & \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < 0,1 \\
\varepsilon = 0,01 & : \ n > 39 & \text{implica} & \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < 0,01 \\
\varepsilon = 0,001 & : \ n > 388 & \text{implica} & \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < 0,001 \\
\varepsilon = 0,000001 & : \ n > 387755 & \text{implica} & \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < 0,000001.
\end{array}$$

Observemos para estes valores que os termos da sucessão se aproximam do limite $\dfrac{3}{7}$:

n	$u_n=\frac{3n+1}{7n-4}$ aprox.	$\left\|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right\|$ aprox.
1	$u_1 = 1,3333$	$0,9047$
2	$u_2 = 0,7000$	$0,2714$
3	$u_3 = 0,5882$	$0,1597$
4	$u_4 = 0,5417$	$0,1131$
5	$u_5 = 0,5161$	$0,0876$
6	$u_6 = 0,5000$	$0,0714$
40	$u_{40} = 0,4384$	$0,0098$
400	$u_{400} = 0,4295$	$0,00097$

Mas, apenas calculámos **alguns** termos da sucessão, ou seja, para alguns valores de n determinámos, aproximadamente, a distância entre o termo da sucessão correspondente, u_n, e o valor real $\dfrac{3}{7}$. Para que este número real seja limite da sucessão é necessário e suficiente que para **qualquer escolha dum número real positivo** ε exista um número natural p tal que para qualquer $n > p$ se verifique que $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$. Mostremos que tal se verifica neste caso.

Exemplo 1.12 *Dada a sucessão de termo geral* $u_n = \frac{3n+1}{7n-4}$, *mostremos, por definição, que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{7}$, *ou seja, que*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left|u_n - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$$

Discussão: *Para cada* $\varepsilon > 0$, *precisamos de decidir quão grande* n *deve ser para garantir que* $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{21n+7-21n+12}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{19}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon.$$

Como $7n - 4 > 0$ *para todos os valores de* n, *podemos simplificar a expressão obtendo:*

$$\frac{19}{7(7n-4)} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{19}{7\varepsilon} < 7n - 4 \Longleftrightarrow \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7} < n$$

Podemos escolher $p \geq \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}$ *sendo* $p \in \mathbb{N}$.

Prova: *Seja* $\varepsilon > 0$ *e seja* $p \geq \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\text{Então } n > p \text{ implica que } n > \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}.$$

$$n > \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7} \Longleftrightarrow 7n > \frac{19}{7\varepsilon} + 4 \Longleftrightarrow 7n - 4 > \frac{19}{7\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{19}{7(7n-4)} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7} < \varepsilon.$$

Podemos concluir que $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$. *Provámos que para qualquer valor* $\varepsilon > 0$ *existe um número* p *tal que* $n > p$ *implica* $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$.

Exemplo 1.13 *Mostre que a sucessão* $a_n = (-1)^n$ *não converge.*

Discussão: *Vamos assumir que existe um valor* b *para o qual* $(-1)^n \to b$ *e com esta assumpção verificamos que se obtém uma contradição. Não interessa qual o valor de* b, *seja 1 ou -1 a sua distância a* b *será pelo menos 1. Logo a desigualdade* $|(-1)^n - b| < 1$ *não será verificada para grandes valores de* n.

Prova: *Supomos que* $(-1)^n \to b$ *para algum* $b \in \mathbb{R}$. *Seja* $\varepsilon = 1$, *então quando consideramos a definição de limite, sabemos que existe* p *tal que* $n > p$ *implica* $|(-1)^n - b| < 1$.*Considerando os casos para* n *par e* n *ímpar temos que*

$$|1 - b| < 1 \text{ e } |-1 - b| < 1$$

Através da desigualdade triangular podemos concluir que

$$2 = |1 - (-1)| = |1 - a + a - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < 1 + 1 = 2.$$

Chegámos ao absurdo $2 < 2$ *o que mostra que a nossa suposição inicial,* $(-1)^n \to b$ *para algum* $b \in \mathbb{R}$*, não está correcta. Não existe limite para esta sucessão, ou seja, a sucessão é divergente.*

Exemplo 1.14 *Dada a sucessão de termo geral* $u_n = a^n$*, com* $0 < a < 1$*, mostremos, por definição, que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*, ou seja, que*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

Discussão*: Mais uma vez, para cada* $\varepsilon > 0$*, precisamos de decidir quão grande* n *deve ser para garantir que* $|a^n - 0| < \varepsilon$*.*

$$|a^n - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow a^n < \varepsilon.$$

$$a^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n \log a < \log \varepsilon \Longleftrightarrow n \underset{\log a < 0}{>} \frac{\log \varepsilon}{\log a}$$

Podemos escolher $p > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$ *sendo* $p \in \mathbb{N}$*.*

Prova*: Seja* $\varepsilon > 0$ *e seja* $p > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$*,* $p \in \mathbb{N}$*.*

Então para todo o $n > p$ *temos que* $n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log a}$*.*

Mas $n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log a} \Longleftrightarrow a^n < \varepsilon$*.*

Logo, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$*, com* $0 < a < 1$*.*

Nas considerações e exemplos anteriores preocupámo-nos com a existência ou não de limite, mas será que podem existir dois ou mais limites para a mesma sucessão? A resposta é negativa, o limite de uma sucessão quando existe é único.

Teorema 1.1 *Seja* u_n *uma sucessão real e* $a, b \in \mathbb{R}$*; se* $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *e* $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$ *então* $a = b$*.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição de limite sabemos que:

existe um número p_1 tal que $n > p_1$ implica $|u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

existe um número p_2 tal que $n > p_2$ implica $|u_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Para $n > \max(p_1, p_2)$, a desigualdade triangular mostra que

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, obtemos que $|a - b| < \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Podemos concluir que $|a - b| = 0$, logo $a = b$. ■

Definição 1.5 *Diz-se que a sucessão* (u_n) *é um* ***infinitésimo*** *se* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*

Nota 1.2 *E claro, a partir das definições, que* $u_n \to a$ *é equivalente a* $(u_n - a)$ *ser um infinitésimo.*

1.3 Sucessões limitadas

Recordemos que sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, diz-se que b é um **majorante** de A se qualquer elemento de A for menor ou igual a b

$$\forall x \in A,\, x \leq b$$

e diz-se que a é um **minorante** de A se qualquer elemento de A for maior ou igual a a

$$\forall x \in A,\, x \geq a.$$

Diz-se que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é **majorado** se tiver majorantes, **minorado** se tiver minorantes e **limitado** se for majorado e minorado. Um conjunto que não seja limitado diz-se **ilimitado**.

Definição 1.6 *Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada** se o conjunto dos seus termos, $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, é limitado, ou seja se:*

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N},\, a \leq u_n \leq b.$$

Nota 1.3 *A condição anterior é equivalente à seguinte:*

$$\exists b \in \mathbb{R}^+ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq b.$$

Exemplo 1.15 *As sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ e $v_n = (-1)^n$ consideradas em exemplos anteriores, são limitadas.*

Exemplo 1.16 *As sucessões de termo geral $u_n = 3 + 5(n-1)$ e $v_n = e^n$ não são limitadas.*

Consideramos algumas propriedades das sucessões limitadas.

Teorema 1.2 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão (u_n). Fazendo $\varepsilon = 1$ na definição de limite, temos então que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p \Longrightarrow |u_n - a| < 1$, pelo que $a - 1 < u_n < a + 1$ para todo o $n > p$. Definindo $m, M \in \mathbb{R}$ por $m = \min\{a-1, u_1, u_2, ..., u_p\}$ e $M = \max\{a+1, u_1, u_2, ..., u_p\}$, temos que $m \leq u_n \leq M$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão (u_n) é de facto limitada. ■

Nota 1.4 *A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a sucessão de termo geral $a_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.*

Esquematicamente:

$$\text{Sucessão convergente} \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ \text{sucessão limitada.}$$

Proposição 1.2 *Se (u_n) é um infinitésimo e (v_n) é uma sucessão limitada, então $(u_n.v_n)$ é um infinitésimo.*

Demonstração. Como (v_n) é uma sucessão limitada existe $M > 0$ tal que $|v_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $\delta > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $|u_n| < \frac{\delta}{M}$, $\forall n > p$.

Então $|u_n.v_n| < \delta$, $\forall n > p$, ou seja, $|u_n.v_n - 0| < \delta$, $\forall n > p$, donde se conclui que

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n.v_n - 0| < \delta.$$

A sucessão $(u_n.v_n)$ é um infinitésimo. ■

Exemplo 1.17 *Consideremos a sucessão de termo geral*

$$w_n = \frac{\cos^2(n+1)}{2n+3}.$$

A sucessão $u_n = (\cos^2(n+1))$ *é limitada pois* $0 \leq \cos^2(n+1) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão $v_n = \left(\frac{1}{2n+3}\right)$ *é um infinitésimo.*

Pela proposição anterior, a sucessão (w_n) *converge para zero, uma vez que é o produto do infinitésimo* $\left(\frac{1}{2n+3}\right)$ *pela sucessão limitada* $(\cos^2(n+1))$.

1.4 Sucessões monótonas

Gostaríamos de definir uma classe de sucessões que são necessárias e importantes para traçar este caminho das sucessões: as sucessões monótonas.

Monótonas não tem aqui o significado que habitualmente se dá a esta palavra!! Comecemos com alguns exemplos: consideremos as sucessões u, v, w e z definidas por:

$$u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 1 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \quad z = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...)$$

O que estas sucessões terão em comum? Pensemos na relação de ordem que, para cada uma delas, existe entre os seus termos.

Exemplo 1.18 *1) Consideremos a sucessão* (u_n)*: o primeiro termo* $u_1 (= 1)$ *é menor do que o segundo termo* $u_2 (= 2)$ *e este é menor do que* $u_3 (= 3)$*, e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$u_1 < u_2 < u_3 < ...$$

2) Consideremos a sucessão (v_n)*: o primeiro termo* $v_1 (= 0)$ *é menor do que o segundo termo* $v_2 (= \frac{1}{2})$ *e este é menor do que* $v_3 (= \frac{2}{3})$*, e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$v_1 < v_2 < v_3 < ...$$

3) Consideremos a sucessão (z_n)*: o primeiro termo* $z_1 (= 1)$ *é igual ao segundo* *termo* $z_2(=1)$, *este é menor que o terceiro* $z_3(=2)$, *este, por sua vez é igual ao quarto termo* $z_4(=2)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$z_1 \leq z_2 \leq z_3 < z_4 \leq ....$$

4) Consideremos a sucessão (w_n)*: o primeiro termo* $w_1(=3)$ *é igual ao segundo termo* $w_2(=3)$, *por sua vez é igual ao terceiro termo* $w_3(=3)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$w_1 = w_2 = w_3 = ...$$

Em muitas sucessões existe uma relação de ordem que se mantém entre todos os seus termos.

Consideremos outros exemplos de sucessões :

$$a_n = -2n, \forall n \in \mathbb{N}; \quad b_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad c_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que estas sucessões terão em comum? Pensemos na relação de ordem que, para cada uma delas, existe entre os seus termos.

Exemplo 1.19 *1) Consideremos a sucessão* (a_n)*: o primeiro termo* $a_1(=-2)$ *é maior do que o segundo termo* $a_2(=-4)$ *e este é maior do que* $a_3(=-6)$, *e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$a_1 > a_2 > a_3 > ...$$

2) Consideremos a sucessão (b_n)*: o primeiro termo* $b_1(=1)$ *é maior do que o segundo termo* $b_2(=\frac{1}{2})$ *e este é maior do que* $b_3(=\frac{1}{3})$, *e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$v_1 > v_2 > v_3 > ...$$

3) Consideremos a sucessão (c_n)*: o primeiro termo* $c_1(=5)$ *é igual ao segundo termo* $c_2(=5)$, *por sua vez é igual ao terceiro termo* $c_3(=5)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$c_1 = c_2 = c_3 = ...$$

É necessário verificar se esta relação acontece para todos os valores de n.

Definição 1.7 *Uma sucessão*(u_n) *diz-se* ***crescente*** *se* $u_n \leq u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Dir-se-á ***estritamente crescente*** *se* $u_n < u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão(u_n) *diz-se* ***decrescente*** *se* $u_n \geq u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Dir-se-á ***estritamente decrescente*** *se* $u_n > u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão(u_n) *diz-se* ***monótona*** *se for crescente ou decrescente e* ***estritamente monótona*** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Porque se chamarão monótonas? Porque não varia a natureza do crescimento entre os seus termos. Consideremos uma sucessão e verifiquemos a monotonia.

Exemplo 1.20 *Seja* (u_n) *a sucessão de termo geral* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$*. É claro que esta sucessão é decrescente uma vez que o numerador é constantemente igual a* 1 *e o denominador é positivo e crescente. De facto,*

$$n^2 + n < (n+1)^2 + (n+1),$$

donde se conclui que

$$\sqrt{n^2+n} < \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)},$$

donde (sendo números positivos) se conclui que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}}.$$

Portanto, $u_n > u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$*, pelo que* (u_n) *é estritamente decrescente.*

Exemplo 1.21 *Seja* (v_n) *a sucessão de termo geral* $v_n = 2n + 6$*. Vamos recorrer ao estudo da diferença* $v_{n+1} - v_n$ *para averiguar sobre a monotonia desta sucessão.*

$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) + 6 - (2n+6) = 2n + 2 + 6 - 2n - 6 = 2 > 0$$

Podemos concluir que $v_{n+1} - v_n > 0$ $(\iff v_{n+1} > v_n)$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$*, logo a sucessão é estritamente crescente.*

1.5 Subsucessões

No título desta secção aparece a palavra subsucessão. Que significará?

Consideremos uma sucessão u definida por:

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, ..., u_n, ...)\,.$$

Exemplo 1.22 *Se eliminarmos alguns termos desta sucessão, por exemplo, os termos com as ordens* $1, 3, 4, 6$ *e* 8*, ou seja, se eliminarmos os termos* u_1, u_3, u_4, u_6 *e* u_8*, o que resta da sucessão, escrito na ordem herdada, será*

$$(u_2, u_5, u_7, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, ..., u_n, ...)\,.$$

Ainda continua a ser uma sucessão? Como se define? Na verdade ainda continua a ser uma sucessão, que chamaremos v*, que se pode definir por:*

$$\begin{cases} v_1 = u_2 \\ v_2 = u_5 \\ v_3 = u_7 \\ v_n = u_{n+5}, \ \forall n \geq 4. \end{cases}$$

Escrevemos um primeiro exemplo duma subsucessão da sucessão u*.*

Exemplo 1.23 *Se eliminarmos todos os termos desta sucessão com ordens superiores a* 700*, ou seja, os termos com as ordens* $701, 702, 703, 704, 705, ...$ *, isto é, se eliminarmos os termos* $u_{701}, u_{702}, u_{703}, u_{704,......}$ *o que resta da sucessão, escrito na ordem herdada, seria*

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_{698}, u_{699}, u_{700}) .$$

Ainda continua a ser uma sucessão? Não!

Obtemos uma sequência finita de números reais e uma sequência finita de números reais não pode ser uma sucessão, uma vez que uma sucessão é uma aplicação de $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{R}$.

Em primeiro lugar formalizamos este conceito e, em seguida, consideramos alguns exemplos que o ilustram.

Uma subsucessão duma sucessão (u_n) é simplesmente uma sucessão que é extraída da original escolhendo certos índices, em número infinito, por ordem crecente. Isto é, escolhendo n_1, n_2, n_3,..., com $n_1 < n_2 < n_3 <$ ..., e considerando a sucessão $u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}$,...constituída pelos elementos da sucessão original correspondentes a esses naturais, obtemos uma subsucessão da sucessão original.

Na verdade trata-se dum caso particular de composição de sucessões: o caso em que, além de se verificarem as condições para a composição estar bem definida, uma das sucessões é estritamente crescente e o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Definição 1.8 *Seja* (u_n) *uma sucessão e* (n_k) *uma sucessão estritamente crescente de elementos de* $\mathbb{N}$. *A sucessão* (v_k)*:*

$$v_k{=}u(n_k) = (u \circ n)_k = u_{n_k}$$

diz-se uma ***subsucessão*** *de* (u_n).

Duma sucessão (u_n) podem extrair-se uma infinidade de subsucessões:

i) $(u_2, u_4, u_6, u_8, ..., u_{2k}, ...)$ dos termos de índice par;
ii) $(u_1, u_3, u_5, u_7, ..., u_{2k-1}, ...)$ dos termos de índice ímpar;
iii) $(u_3, u_6, u_9, ..., u_{3k}, ...)$ dos termos de índice múltiplo de 3;
etc

Exemplo 1.24 *Por exemplo, no estudo da sucessão de termo geral* $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ *são particularmente importantes duas subsucessões: a subsucessão dos termos de índice par, a sucessão de termo geral* $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{2n}$*, e a subsucessão dos termos de índice ímpar, a sucessão de termo geral* $w_n = u_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n-1}$.

Consideremos o limite duma subsucessão quando este existe.

Definição 1.9 *Diz-se que* $a \in \mathbb{R}$ *é* ***sublimite*** *da sucessão* (u_n) *se existir uma subsucessão de* (u_n) *que converge para* a.

Se considerarmos a sucessão $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+5}$ então -1 e 1 são sublimites da sucessão.

Proposição 1.3 *O conjunto dos sublimites de uma sucessão limitada tem máximo e mínimo.*

Definição 1.10 *Sejam (u_n) uma sucessão limitada e S o conjunto dos sublimites de (u_n). Chama-se* ***limite máximo*** *ou* ***limite superior*** *de (u_n) ao máximo de S e representa-se $\overline{\lim}\, u_n = \limsup u_n = \max(S)$. Chama-se* ***limite míunimo*** *ou* ***limite inferior*** *de (u_n) ao mínimo de S e representa-se $\underline{\lim}\ u_n = \liminf\ u_n = \min(S)$.*

1.6 Propriedades dos limites

Proposição 1.4 *Não se altera o limite de uma sucessão convergente, modificando um número finito de termos da sucessão.*

Proposição 1.5 *Se os termos de uma sucessão são todos iguais a uma certa constante, então a sucessão tem por limite essa constante.*

Proposição 1.6 *(**Propriedades operatórias**) Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes, $u_n \to a$, $v_n \to b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *$u_n + v_n \to a + b$;*
2. *$cu_n \to ca$, com $c \in \mathbb{R}$;*
3. *$u_n.v_n \to a.b$;*
4. *se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ com $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{a}{b}$;*
5. *se $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \to a^p$;*
6. *$|u_n| \to |a|$;*
7. *se $p \in \mathbb{N}$ e $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$;*
8. *se $p \in \mathbb{N}$ e p é ímpar então$\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$.*

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira propriedade enunciada: se $u_n \to a$, $v_n \to b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to a + b$.

Pelas hipóteses da proposição sabemos que:

$$u_n \to a \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \delta)$$

$$v_n \to b \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \delta)$$

e queremos provar que

$$u_n + v_n \to a + b \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p \in N : n > p \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta)$$

Seja então $\delta > 0$ arbitrário,

$$\exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2},$$

$$\exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$$

tomemos $p = max\{p_1, p_2\}$. Com esta escolha de p, e para qualquer $n > p$, é válida a seguinte sequência de desigualdades:

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq$$

$$\leq |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Podemos então concluir que $u_n + v_n \to a + b$. ■

Nota 1.5 *Observemos que a propriedade 6) do teorema anterior afirma que se $u_n \to a$ então $|u_n| \to |a|$.* ***Não*** *é verdade, em geral, que $|u_n| \to |a| \Longrightarrow u_n \to a$.*

Basta considerar a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$. A sucessão módulo $|u_n| = |(-1)^n| = 1$ é uma sucessão constante, convergente para essa constante, neste caso igual a 1. No entanto a sucessão (u_n) é divergente.

Também é interessante estabelecer propriedades dos limites relacionadas com relações de ordem.

Teorema 1.3 *Sejam (u_n) e (v_n) sucessões convergentes para as quais existe $p \in \mathbb{N}$, tal que para $n > p \Longrightarrow u_n \leq v_n$. Então $\lim u_n \leq \lim v_n$.*

Teorema 1.4 *(das sucessões enquadradas) Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Se $u_n \to a$, $w_n \to a$ com $a \in \mathbb{R}$ então $v_n \to a$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, qualquer. Como $u_n \to a$ e $w_n \to a$ então:
$\exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow a - \delta < u_n < a + \delta$,
$\exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow a - \delta < w_n < a + \delta$.
Como, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n \leq w_n$,
$\exists p_3 \in N : n > p_3 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$.
Seja $p = max\{p_1, p_2, p_3\}$. Se $n > p$, então $a - \delta < u_n \leq v_n \leq w_n < a + \delta$.
Podemos concluir que:

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |v_n - a| < \delta,$$

ou seja, $v_n \to a$. ■

Exemplo 1.25 *Considere-se a sucessão de termo geral*

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + ... + \frac{1}{n^2 + n}.$$

Vamos mostrar que $u_n \rightarrow 1$, utilizando o teorema das sucessões enquadradas. Em primeiro lugar verifica-se facilmente que $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado temos que:

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + ... + \frac{1}{n^2+n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + ... + \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}.$$

Podemos enquadrar a sucessão da seguinte maneira:

$$0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Como o limite da sucessão nula é o próprio zero e $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, pelo teorema das sucessões enquadradas, podemos concluir que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Nesta altura já introduzimos os conceitos de sucessão limitada, monótona e convergente. Podemos estabelecer um importante resultado que relaciona duma forma poderosa estes conceitos.

Teorema 1.5 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente e:*
(i) se (u_n) é crescente então $\lim\ u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) se (u_n) é decrescente então $\lim\ u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão limitada e crescente (a demonstração seria análoga para o caso duma sucessão decrescente). Denotemos por $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos seus termos. Como a sucessão é limitada o conjunto U é limitado, seja $a = \sup U$. Iremos mostrar que $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Seja $\delta > 0$, qualquer. Como $a = \sup U$ então $a - \delta$ não é majorante do conjunto U, logo existe um elemento do conjunto U (um termo da sucessão) tal que u_p¿a-δ. Como a sucessão é decrescente temos que $u_p \leq u_n$, para todo $n > p$. Claro que $u_n \leq a$ uma vez que $a = \sup U$. Então $n > p$ implica que $a - \delta < u_n \leq a$ que por sua vez implica que $a - \delta < u_n \leq a + \delta$, donde podemos concluir que $|u_n - a| < \delta$. Ou seja,

$$\forall \delta > 0 \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta,$$

isto é, a sucessão converge para o número real a. ∎

Nota 1.6 *A recíproca não é verdadeira, isto é, existem sucessões não monótonas que são convergentes. Consideremos a sucessão $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$: não é monótona mas converge para zero.*

Analisemos um caso muito significativo em Matemática.

Exemplo 1.26 *Considere-se um dos primeiros exemplos de sucessões estudados nestas notas, a sucessão de termo geral*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Observemos o seu comportamento na figura 1.1. Prova-se que esta sucessão é crescente e tem todos os termos compreendidos entre 2 e 3. É, portanto, uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente em $\mathbb{R}$.

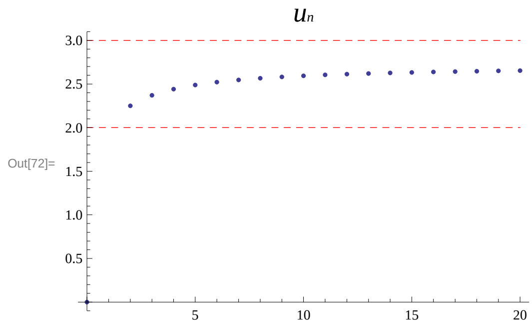

Figura 1.1: Comportamento da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

John Napier (lê-se e escreve-se, em geral, Neper) (1550-1617) introduziu o cálculo logarítmico em 1614. A obra de Napier envolvia de uma forma não explícita o número que hoje, em homenagem a este matemático escocês, se designa por número de Neper e que se denota por **e**, sendo este um número irracional.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Teorema 1.6 *Uma sucessão real é convergente se e só se todas as suas subsucessões forem convergentes para um mesmo limite.*

Demonstração. Provaremos, apenas, uma das implicações: se a sucessão (u_n) converge, então todas as suas subsucessões convergem para o mesmo limite.

Seja (u_{n_k}) uma subsucessão da sucessão (u_n), arbitrária. Notemos que $n_k \geq k$ para qualquer k (prova-se facilmente por indução). Seja $a = \lim u_n$ e seja $\delta > 0$. Então existe uma ordem p tal que $n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$. Mas $k > p$ implica $n_k \geq p$ o que por sua vez implica $|u_{n_k} - a| < \delta$. Então $a = \lim u_{n_k}$. ■

Este teorema revela-se muito útil nomeadamente para provar a divergência de sucessões.

Exemplo 1.27 *Consideremos a sucessão real (u_n) com termo geral dado por $u_n = 2(-1)^n$. Temos que a sua subsucessão dos termos de ordem par satisfaz*

$$u_{2n} = 2(-1)^{2n} = 2 \to 2,$$

enquanto que a sua subsucessão dos termos de ordem ímpar satisfaz

$$u_{2n-1} = 2(-1)^{2n-1} = -2 \to -2.$$

Assim, a sucessão $u_n = 2(-1)^n$ tem duas subsucessões com limites distintos, $2 \neq -2$. Usando o Teorema anterior, podemos então concluir que a sucessão $u_n = 2(-1)^n$ não é convergente.

O nosso objectivo, agora, é provar o teorema de Bolzano-Weiestrass. Precisamos de estabelecer dois resultados cuja demonstração deixaremos como exercício.

Teorema 1.7 *Toda a sucessão (u_n) tem uma subsucessão monótona.*

Teorema 1.8 *Seja (u_n) uma sucessão arbitrária. Então existe uma subsucessão monótona cuja limite é o* $\limsup u_n$ *e existe uma subsucessão monótona cuja limite é o* $\liminf u_n$.

Estamos agora em condições de enunciar o teorema de Bolzano-Weiestrass.

Teorema 1.9 ***(Bolzano-Weiestrass)*** *Toda a sucessão limitada (u_n) tem uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Este resultado prova-se facilmente através das proposições anteriores. Sabemos por um dos teoremas anteriores que (u_n) tem uma subsucessão (u_{n_k}) monótona. Mas se (u_n) é limitada então qualquer sua subsucessão é limitada, logo (u_{n_k}) é limitada. Mas se é limitada e monótona então (u_{n_k}) é convergente. Podemos concluir que (u_n) tem uma subsucessão convergente. ■

1.7 Limites infinitos

Já apareceram duma forma implícita, por diversas vezes os símbolos $+\infty$, $-\infty$ ou ∞. Duma forma pouco rigorosa, para uma sucessão (u_n), $\lim u_n = +\infty$ significará que os seus termos, a partir duma certa ordem, "são tão grandes quanto se queira". Nesta seccção vamos estudar estas situações.

Definição 1.11 *Diz-se que a sucessão (u_n) é um **infinitamente grande positivo** (ou que tende para $+\infty$), e representa-se $u_n \to +\infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n > L.$$

*Diz-se que a sucessão (u_n) é um **infinitamente grande negativo** (ou que tende para $-\infty$), e representa-se $u_n \to -\infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n < -L.$$

*Diz-se que a sucessão (u_n) é um **infinitamente grande em módulo** (ou que tende para ∞), e representa-se $u_n \to \infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n| > L.$$

Consideremos alguns exemplos

Exemplo 1.28 *1)* $u_n = n^2 \to +\infty$.
2) $v_n = -n \to -\infty$.
3) Seja $w_n = (-n)^n$. *Então* $|w_n| = n^n \to +\infty$.

Claro que muitas sucessões não tendem para $+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞ mesmo não sendo limitadas.

Nota 1.7 *Se (u_n) é tal que $u_n \to +\infty$, $u_n \to -\infty$ ou $u_n \to \infty$ então (u_n) é não limitada.*

A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a sucessão

$$u_n = \begin{cases} n, \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é não limitada e $u_n \nrightarrow +\infty$, $u_n \nrightarrow -\infty$ e $|u_n| \nrightarrow +\infty$.

Uma sucessão diz-se **propriamente divergente** se tende para mais infinito ou para menos infinito. Uma sucessão diz-se **oscilante** se não for convergente nem propriamente divergente.

Esquematicamente:

- **Convergentes** (limite finito)
- **Divergentes** $\begin{cases} \textbf{propriamente divergentes} \text{ (limite } +\infty \text{ ou } -\infty) \\ \textbf{oscilantes} \text{ (restantes casos).} \end{cases}$

Exemplo 1.29 *Mostre que* $\lim\,(\sqrt{n}+7) = +\infty$.

***Discussão**: Nós devemos considerar um número positivo arbitrário, $L > 0$ e mostrar que existe um número p tal que $n > p$ implica $(\sqrt{n}+7) > L$. Para identificar quão grande este número L deve ser vamos estudar a desigualdade $(\sqrt{n}+7) > L$. Então de $(\sqrt{n}+7) > L$ obtemos $\sqrt{n} > L-7$ ou $n > (L-7)^2$. Podemos tomar $p = (L-7)^2$.*

***Prova**: Seja $L > 0$ e seja $p = (L-7)^2$. Então $n > p$ implica $n > (L-7)^2$, donde $\sqrt{n} > L-7$ e logo $(\sqrt{n}+7) > L$. Mostrámos que* $\lim\,(\sqrt{n}+7) = +\infty$.

Proposição 1.7 *Sendo (u_n) e (v_n) duas sucessões, tem-se que:*

1. *se $u_n \to +\infty$ e se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $v_n \to +\infty$;*
2. *se $u_n \to -\infty$ e se, a partir de certa ordem, $v_n \leq u_n$ então $v_n \to -\infty$.*

Proposição 1.8 *(**Propriedades operatórias**) Sendo (u_n) e (v_n) duas sucessões tem-se que:*

1. *se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to +\infty$ então $u_n + v_n \to +\infty$;*
2. *se $u_n \to -\infty$ e $v_n \to -\infty$ então $u_n + v_n \to -\infty$;*
3. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$);*
4. *se $u_n \to \infty$ e $v_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to \infty$;*
5. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to b$, $b \in \mathbb{R}^+$ então $u_n.v_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$);*
6. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to c$, $c \in \mathbb{R}^-$ então $u_n.v_n \to -\infty$ (resp. $+\infty$);*
7. *se $u_n \to \infty$ e $v_n \to \infty$ então $u_n.v_n \to \infty$.*

Definição 1.12 *Designa-se por **recta acabada**, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem de seguida.
1) Relativamente à adição, temos que

$$a + (+\infty) = +\infty \text{ e } \quad a + (-\infty) = -\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

bem como

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \text{ e } \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Mas

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty - \infty.$$

Estes símbolos, são designados por **símbolos de indeterminação**. Significa que o facto de existir ou não limite, bem como o seu valor depende das sucessões envolvidas.

Exemplo 1.30 *Consideremos as sucessões de termos gerais:* $u_n = 2n^2 + 1$, $v_n = n^3 + 3$ *e* $w_n = n^3 + 2$.

Como (u_n), (v_n) *e* (w_n) *tendem para* $+\infty$, *as sucessões* $(v_n - w_n)$ *e* $(u_n - w_n)$ *correspondem a situações de indeterminação. Temos de estudá-las caso a caso quanto à convergência.*

$$\begin{aligned} \lim(v_n - w_n) &= \lim\left[(n^3+3) - (n^3+2)\right] = \lim(1) = 1, \\ \lim(u_n - w_n) &= \lim\left[(2n^2+1) - (n^3+2)\right] = \lim(-n^3 + 2n^2 - 1) \\ &= \lim\left[-n^3(1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^3})\right] = -\infty. \end{aligned}$$

2) Relativamente à multiplicação, temos que:

$$a.(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, \text{ se } a > 0 \\ \mp\infty, \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

Temos também que:

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty = (-\infty).(-\infty) \text{ e } \quad (+\infty).(-\infty) = -\infty.$$

Por outro lado,

$$0.(\pm\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } 0.\infty.$$

Esta indeterminação dá naturalmente origem a indeterminações na divisão: as chamadas indeterminações do tipo

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}.\infty = 0.\infty \text{ e } \quad \frac{0}{0} = \frac{1}{0}.0 = 0.\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}.\infty = 0.\infty.$$

Relativamente à potenciação, se considerarmos as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$:

(i) $u_n \to a$ e $v_n \to +\infty$, temos que:

$$u_n^{v_n} \to \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq a < 1 \\ +\infty, \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

(ii) $u_n \to +\infty$ e $v_n \to b$, temos que:

$$u_n^{v_n} \to \begin{cases} 0, \text{ se } b < 0 \\ +\infty, \text{ se } b > 0. \end{cases}$$

Por outro lado, são indeterminações, os casos em que $a = 1$ e $b = +\infty$ ou $a = +\infty$ e $b = 0$, as chamadas indeterminações do tipo

$$1^{+\infty} \quad \text{e} \quad (+\infty)^0.$$

Nota 1.8 *Durante o ensino secundário, foram estudadas formas para levantar (ou seja, resolver) alguns tipos de indeterminações que surgem no cálculo do limite de sucessões:*

(i) indeterminações do tipo $0{\cdot}\infty$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *ou* $\dfrac{0}{0}$, *podem normalmente ser levantadas pondo em evidência os termos de maior grau;*

(ii) indeterminações do tipo $\infty - \infty$ *que envolvem a raiz quadrada podem normalmente ser levantadas multiplicando e dividindo pelo conjugado.*

Uma sucessão particularmente importante é a sucessão exponencial de termo geral $u_n = a^n$. Tem-se que:

$$\left[\begin{array}{l|l} \textbf{Valor de a} & \lim_{n\to+\infty}(\mathbf{a}^n) \\ a > 1, & +\infty, \text{ inf. grande positivo} \\ a = 1, & 1 \\ -1 < a < 1, & 0 \\ a \leq -1, & \text{não existe} \end{array}\right].$$

Nestas notas apenas mostramos o comportamento desta sucessão, em termos de convergência, para um dos casos, o caso em que $|a| < 1$.

Exemplo 1.31 *Para* $|a| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(\mathbf{a}^n) = \mathbf{0}$.

1º) Se $a = 0$, $\lim_{n\to+\infty}(\mathbf{a}^n) = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2º) Para $0 < a < 1$, *mostrámos, num exemplo anterior, que* $\lim_{n\to+\infty}(\mathbf{a}^n) = \mathbf{0}$.

3ª) Se $-1 < a < 0$, *então* $0 < -a < 1$ *e aplicando o (2º) caso, temos que* $\lim_{n\to+\infty}(-\mathbf{a})^n = \mathbf{0}$. *Mas* $\mathbf{a}^n = [(-1)(-a)]^n = (-1)^n(-a)^n$. *Como a sucessão de termo geral* $(-1)^n$ *é uma sucessão limitada e pelo (2º) caso,* $\lim_{n\to+\infty}(-\mathbf{a})^n = \mathbf{0}$, *podemos concluir que a sucessão produto,* $\mathbf{a}^n$, *também é um infinitésimo.*

Lema 1.1 *Sejam* (u_n) *uma sucessão de termos positivos,* $a \in \mathbb{R}^+$, $\delta \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < \delta < a$ *e* $p \in \mathbb{N}$. *Então:*

$$a - \delta < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta,\ \forall n \geq p \implies (a-\delta)^n \tfrac{u_p}{(a-\delta)^p} < u_n < (a+\delta)^n \tfrac{u_p}{(a+\delta)^p},\ \forall n > p.$$

Demonstração. Pode ser provado, duma forma, simples, usando o Método de Indução. ■

Teorema 1.10 *Seja* (u_n) *uma sucessão de termos positivos tal que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$*,* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*. Então:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

Demonstração. Demonstraremos apenas para $0 < a < +\infty$. Deixamos os casos $a = 0$ e $a = +\infty$ como exercício.

Uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, sabemos que

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in N : n > p \Rightarrow |\frac{u_{n+1}}{u_n} - a| < \delta,$$

logo

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in N : n > p \Rightarrow a - \delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta.$$

Em particular, se $0 < \delta < a$ temos pelo lema anterior que

$$(a-\delta)^n \frac{u_p}{(a-\delta)^p} < u_n < (a+\delta)^n \frac{u_p}{(a+\delta)^p}$$

Que implica

$$\Longrightarrow \quad (a-\delta) \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a-\delta)^p}} < \sqrt[n]{u_n} < (a+\delta) \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a+\delta)^p}}, \forall n > p.$$

Tendo em conta que

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a-\delta)^p}} & = \left[\frac{u_p}{(a-\delta)^p}\right]^0 = 1 \text{ e} \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a+\delta)^p}} & = \left[\frac{u_p}{(a+\delta)^p}\right]^0 = 1 \end{array}$$

E que δ pode ser arbitrariamente pequeno, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

■

Exemplo 1.32 *Mostre que* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$*.*
Uma vez que $u_n = n!$ *é uma sucessão de termos positivos e que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty,$$

Podemos concluír que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$*.*

Recordando que $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, enunciamos um resultado muito importante, que só demonstraremos no capítulo 3 destas notas.

Teorema 1.11 *Sejam* (u_n) *uma sucessão real tal que* $\lim |u_n| = +\infty$ *e* (x_n) *uma sucessão real tal que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, *com* $a \in \mathbb{R}$.

Então:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

Exemplo 1.33 *Consideramos a sucessão de termo geral*

$$v_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}.$$

Então:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{3n}\right)^{3n} = e^6.$$

Definição 1.13 *Sejam* (u_n) *e* (v_n) *duas sucessões reais. Diz-se que* (v_n) *tem uma ordem de grandeza superior a* (u_n), *e escreve-se* $u_n \ll v_n$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Consideremos dois exemplos de grande importância.

Exemplo 1.34 *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

(1º) Se $a = 0$ *então temos que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{0}{n!} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$

(2º) Seja $a > 0$. *Consideremos* $p \in \mathbb{N}$, *fixo e tal que* $\frac{a}{p+1} < 1$. *Então para todo o* $n > p$,

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = \frac{a^p}{p!}\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)...n} \le \frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p}.$$

Mas

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p}\right] = \frac{a^p}{p!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p} = \frac{a^p}{p!}0 = 0$$

Pelo teorema das Sucessões Enquadradas podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

(3º) Seja $a < 0$. *Então* $-a > 0$ *e, temos que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left[(-1)^n\frac{(-a)^n}{n!}\right] = 0$$

uma vez que a sucessão de termo geral $(-1)^n$ *é uma sucessão limitada e pelo (2º) caso,* $\lim^n_{n\to+\infty}\frac{(-a)^n}{n!} = \mathbf{0}$. *Então*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Significa que a sucessão de termo geral $n!$ tem uma ordem de grandeza superior a a^n.

Exemplo 1.35 *Mostramos que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Consideremos $p \in \mathbb{N}$, fixo. Então para todo o $n > p$,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{p!}{n^p}\frac{(p+1)(p+2)...n}{n^{n-p}} \leq \frac{p!}{n^p}\frac{n^{n-p}}{n^{n-p}} = \frac{p!}{n^p}.$$

Mas

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p!}{n^p} = p! \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = p!0 = 0$$

Pelo teorema das Sucessões Enquadradas podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Significa que a sucessão de termo geral n^n tem uma ordem de grandeza superior a $n!$.

Consideremos a proposição seguinte que sistematiza ordens de grandeza entre sucessões bastante importantes.

Proposição 1.9 *Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 1$ e sejam α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Tem-se que*

$$\log^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Demonstração. Os dois exemplos anteriores mostram duas destas relações. A demonstrações dos restantes casos é deixada como exercício. ■

1.8 Sucessões de Cauchy

Definição 1.14 *Uma **sucessão** (u_n) diz-se **de Cauchy** se*

$$\forall \delta > 0 \exists p \in N : m, n > p \Rightarrow |u_n - u_m| < \delta.$$

A sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sucessão de Cauchy.
De facto, sejam $m, n > p$; então

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2p}.$$

Sendo $\delta > 0$, qualquer; para concluir, basta tomarmos $p > \dfrac{2}{\delta}$

Na definição de sucessão convergente a ideia intuitiva de aproximação é estabelecida entre um número real e os termos da sucessão. A sucessão converge se, a partir de certa ordem, todos os elementos da sucessão "se aproximam" do limite. Na definição de sucessão de Cauchy apenas comparamos os elementos da própria sucessão uns com os outros. Dizemos que a sucessão é de Cauchy se, a partir de certa ordem, todos os elementos da sucessão "se aproximam" uns dos outros.

Teorema 1.12 *Uma sucessão real é convergente se, e só se, for sucessão de Cauchy.*

Este teorema permite-nos mostrar que uma sucessão é convergente sem ter que calcular o seu limite. Consideremos a sucessão:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}.$$

Podemos tomar, sem perda de generalidade, $n > m$; então:

$$|u_n - u_m| = \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + ... + \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + ... + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}.$$

Se $p > \dfrac{1}{\delta}$ e $n \geq m > p$, obtemos $|u_n - u_m| < \delta$ pelo que a sucessão é de Cauchy, logo convergente.

1.9 Exercícios propostos

1) Escreva os primeiros cinco termos das sucessões cujos termos de ordem n são:

a) $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$,

b) $v_n = \dfrac{n}{3^n}$,

c) $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

2) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas de modo seguinte:

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$,

b) $v_n = \dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$,

c) $w_1 = 0,\ w_{n+1} = \dfrac{2w_n+1}{3}$,

d) $v_n = n^{(-1)^n}$.

3) Para as sucessões consideradas no exercício anterior, indique se são monótonas (crescentes ou decrescentes).

4) Prove, por definição, que:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+10}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$,

c) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

5) Calcule os limites das seguintes sucessões, caso existam, cujos termos de ordem n, são:

a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-2n+1}$, *b)* $\dfrac{n^3+1}{2n^2-3}$, *c)* $\dfrac{n-2}{n^3+2n^2-2}$, *d)* $\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, *f)* $\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$, *g)* $n-\sqrt{n^2-n}$, *h)* $\dfrac{n+\operatorname{sen}^2 n}{2n+3}$,

i) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2}$, *j)* $\dfrac{n^{n-1}}{n^n+2}$, *l)* $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, *m)* $\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$,

n) $\sqrt[n]{\dfrac{n^3-1}{4n^3+2}}$, *o)* $\sqrt[n]{\log n}$, *p)* $\left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n$, *q)* $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-2n}$.

6) Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular os limites das sucessões, cujos termos de ordem n, são:

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+...+\dfrac{1}{(n+n)^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$,

b) $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

c) $w_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

7) Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) A sucessão seguinte é divergente, cujo termo de ordem n é definido por:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{se} \quad n \leqslant 10 \\ 3 & \text{se} \quad n > 10 \end{cases};$$

b) A sucessão seguinte é divergente, cujo termo de ordem n é definido por

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ 3 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases};$$

c) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos então é convergente;

d) Uma sucessão decrescente de termos positivos tende para zero.

8) Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |a|<1, \\ 1 & \text{se} \quad a=1, \\ +\infty & \text{se} \quad a>1, \\ \text{não existe} & \text{se} \quad a \leq -1. \end{cases}$$

9) Estude a natureza das seguintes sucessões e indique se são ou não limitadas. Calcule, em cada caso, os limites inferior e superior:

a) $[2 + (-1)^n] .n,$ *b)* $\dfrac{(\operatorname{sen} n)^n}{5^{n-1}},$ *c)* $\dfrac{\cos(n\pi) + \cos(2n\pi)}{n},$

d) $\dfrac{a^n}{4^{2n}}, a \in \mathbb{R},$ *e)* $(-1)^n .n!,$ *f)* $[(-1)^n + 1] \dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 2n},$

g) $n^{(-1)^n},$ *h)* $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{3} + \cos \dfrac{n\pi}{3},$ *i)* $\dfrac{n + (-1)^n (2n - 1)}{n + 1}.$

10) Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[,$$

$$B = \left]0, \sqrt{2}\right[, \qquad C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dê um exemplo ou justifique a não existência de:

a) uma sucessão de termos no conjunto A monótona e divergente;
b) uma sucessão de termos no conjunto B crescente e divergente;
c) uma sucessão de termos no conjunto B com limite em $\mathbb{R}\backslash B$;
d) uma sucessão de termos no conjunto $\mathbb{R}\backslash B$ com limite em B;
e) uma sucessão de termos no conjunto $A\backslash B$ com limite em $A \cap B$;
f) uma sucessão de termo geral u_n no conjunto C tal que $lim\ u_n < \sqrt{2}$.

11) Considere a sucessão

$$u_n = \frac{3^n}{n!}.$$

Sabendo que, qualquer que seja $n > 3$,

$$u_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^2,$$

utilize o Teorema das Sucessões Enquadradas para determinar $\lim u_n$.

12) Sejam

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{em que } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule $\lim u_n$;

b) Sabendo que

$$v_n < 3 - \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

justifique que $(u_n + v_n)$ é convergente.

13) Considere as seguintes sucessões definidas por:

$$u_n = \cos(\frac{n\pi}{3}), \qquad v_n = \frac{3}{4n+1}, \qquad w_n = (-\frac{1}{2})^n, \qquad p_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

a) Para cada sucessão, identifique o conjunto dos seus sublimites.
b) Para cada sucessão, determine o lim *sup* e o lim *inf*.
c) Alguma ou algumas sucessões são limitadas?

14) Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}. \end{cases}$$

a) Encontre um minorante para o conjunto dos termos;

b) Mostre que (x_n) é decrescente;

c) Mostre que (x_n) é convergente;

d) Calcule $\lim u_n$.

15) Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2}. \end{cases}$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente;

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique o seu limite.

16) Sendo u_n o termo geral de uma sucessão monótona, v_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - v_n| < \frac{1}{n},$$

prove que u_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

17) Justifique que, se as condições:

$$u_n > 0 \;\text{ e }\; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

18) a) Mostre que:

i) se $u_n \to +\infty$ então $\dfrac{1}{u_n} \to 0$,

ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.

b) Será verdade que $u_n \to 0 \Longrightarrow (\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$ ou $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty)$?

19) Determine, se são convergentes ou propriamente divergentes, as sucessões que têm como termo de ordem n:

$$a)\ \frac{n^n}{1000^n}, \qquad b)\ \frac{(2n)!}{n!}, \qquad c)\ \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}},$$

$$d)\ \sqrt[n]{n!}, \qquad e)\ \left(2-\frac{1}{n}\right)^n.$$

1.9.1 Soluções exercícios

1) $a)\ \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}.$ $\quad b)\ \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}.$ $\quad c)\ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

2) a) Limitada. b) Limitada. c) Limitada. d) Minorada e não majorada.

3) a) Decrescente. b) Não monótona. c) Estritamente crescente. d) Não monótona.

5) a) $\frac{1}{3}$; b) $+\infty$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{3}{2}$; f) -1; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}$; i) 0;
j) 0; l) 1; m) $+\infty$; n) 1; o) 1; p) e^{-1}; q) e.

6) a) 0; b) 1; c) 0.

7) a) Falsa. b) Verdadeira. c) Verdadeira. d) Falsa.

9) a) Divergente, não limitada, $+\infty$, $-\infty$; b) Convergente, limitada, 0, 0; c) Convergente, limitada, 0, 0;

$$\text{d)} \begin{cases} |a| < 16, \text{ convergente, limitada}, 0, 0; \\ a > 16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty; \\ a < -16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty; \\ a = 16, \text{ convergente, limitada, } 1,\ 1; \\ a = -16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty. \end{cases};$$

e) Divergente, não limitada, $+\infty$, $-\infty$; f) Divergente, limitada, 0, 4; g) Divergente, não limitada, $+\infty$, 0; h) Divergente, limitada, $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; i) Divergente, limitada, 3, -1.

10)

i) A sucessão de termo geral $u_n = n + 1$.
ii) Não existe.
iii) A sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.
iv) Não existe.
v) Não existe.
vi) A sucessão constante de termo geral $u_n = \sqrt{2} - 1$.

11) 0.

12) a) 1.

13) a) Seja S o conjunto dos sublimites. Para a sucessão u_n: $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$; para a sucessão v_n: $S = \{0\}$; para a sucessão w_n: $S = \{0\}$; para a sucessão p_n: $S = \{-1, 1\}$.

b) lim sup $u_n = 1$, lim inf $u_n = -1$; lim sup $v_n =$ lim inf $v_n = 0$;
lim sup $w_n =$ lim inf $w_n = 0$; lim sup $p_n = 1$, lim inf $p_n = -1$.

c) Todas as sucessões são limitadas.

14) a) 0. d) 0.

15) c) 2.

18) b) Não.

19) a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) 1, d) $+\infty$, e) $+\infty$.