# Aplicações da derivada

## Teorema de Rolle e teorema do valor médio

1.- Uma partícula desloca-se numa reta, encontrando-se a cada momento $t$, à distância

$$1 + 2\,t + 3\,t^2 \,,$$

do ponto de partida. Encontre a velocidace média da partícula entre $t = 0$ e $t = 3$. Encontre a velocidade instantánea e os tempos, entre $t = 0$ e $t = 3$, em que a velocidade intantánea é igual à velocidade média.

2.- Derivar o polinómio $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$ e mostre que o polinómio $-50 + 70\,x - 30\,x^2 + 4\,x^3$ tem exatamente 3 raizes.

## Maximos e mínimos

Trazar o gráfico de polinómio $24 + -50\,x + 35\,x^2 - 10\,x^3 + x^4$

Calcular os maximos e mínimos relativos e absolutos do polinómio.

Calcular a segunda derivada, a concavidade e os pontos de inflexão.

## Regra de L'Hôpital - Versão básica

A versão mais básica da regra de L'Hôpital diz que se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis num intervalo contendo $x = a$ (excepto possivelmente em $x = a$, se $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$, se

$$\lim_{x \to a} f(a) = \lim_{x \to a} g(a) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to a} f(a) = \lim_{x \to a} g(a) = \pm\infty \,,$$

e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (\textit{i.e.} o limite existe, incluindo a posibilidade dele ser } = \infty \text{ ),}$$

então também

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \,.$$

Este enunciado continua válido substituindo $a$ por $+\infty$ ou $-\infty$.

## Regra de L'Hôpital - Exercícios

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-5x)}{1-e^{-x}}, \quad \lim_{x \to -2} \frac{x^3 - x^2 - 13x - 14}{x^3 + 3x^2 - 2x - 8}$$

## A regra de L'Hôpital e o limite trigonométrico fundamental

O limite trigonométrico básico não pode ser avaliado utilizando a regra de L'Hôpital, pelo menos não no contexto de uma análise rigorosa. Para explicar isto melhor, que fique claro que se alguém não se lembrar que o limite é 1, mais "sabe" que a derivada da função Seno é a função Coseno, então aplicando a regra de L'Hôpital, obtem-se

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(\theta)}{1} = \frac{1}{1} = 1 .$$

A razão pela qual este procedimento não constitui "prova" de que o limite é efectivamente 1 deve-se a que para demonstrar que a derivada da função Seno é a função Coseno, nos utilizamos precisamente o facto que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$ !

Uma vez demonstrado (na aula) que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$ e apartir de ahi ter obtido as derivadas das funções trigonométricas, podemos utilizar a regra de L'Hôpital para avaliar os limites seguintes.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(2\theta)}{\tan(3\theta)}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

Por vezes, é necessário utilizar a regra de L'Hôpital reiteradamente, como se mostra nos exemplos a seguir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital a indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$$

Manipulações algébricas permitem converter outro tipo e indeterminações, como por exemplo $\infty^0$, $1^\infty$, $0^0$, e $\infty - \infty$ em formas onde pode-se aplicar a regra de L'Hôpital. Em lugar de catalogar todas as possibilidades e as condições que permitem as transformações em cada caso, vamos nos limitar a dar algunos exemplos ilustrando casos típicos.

$$\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} (\sec(t) - \tan(t)), \quad \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln(x), \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$