Análise Matemática II (2013/2014)

Ficha 6

Derivadas e diferenciais de ordem superior. Extremos locais

1. Para cada uma das funções abaixo determine todas as derivadas parciais de segunda ordem nos pontos onde existem, e verifique as condições do *teorema de Schwarz* das derivadas mistas

   (a) $f(x,y) = xy^2 + xe^y$; (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$; (d) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+1)$;

   (e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(2x)$; (f) $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y - \cos y$;

   (g) $f(x,y,z) = xyz$; (h) $f(x,y,z) = x\sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$;

   (i) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$; (j) $f(x,y,z) = \begin{cases} e^{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Calcule, caso exista, a derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Mostre que f satisfaz as condições do *teorema de Schwarz* das derivadas mistas no ponto $(1,1)$ e não as satisfaz na origem.

   (c) Verifique se a função f é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

3. Determine as derivadas parciais de terceira ordem da função

$$f(x,y) = x + y + x^3 - x^2 - y^2.$$

4. Escreva a matriz Hessiana para cada uma das funções abaixo

   (a) $f(x,y) = xy^2 + xe^y$;

   (b) $f(x,y,z) = xyz$;

(c) $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 - 2y + 2z^2$.

5. Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem para as funções abaixo nos pontos indicados

   (a) $f(x,y) = xy^2$ em $(1,2)$;
   (b) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1,2,3)$;
   (c) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ em $(0,0)$;
   (d) $f(x,y) = xe^y$ em $(1,0)$;
   (e) $f(x,y) = \ln(y + e^x)$ em $(0,1)$.

6. Desenvolva a função $f(x,y) = x^2 + xy + 1$ em potências de $(x-2)$ e de $(y+1)$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 y + \sin y + e^x$. Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem para f no ponto $(1,\pi)$. Usando a fórmula obtida determine, aproximadamente, $1.1^2\pi + e^{1.1}$.

8. Verifique se $(0,0)$ é ponto estacionário das funções seguintes

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
   (c) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

9. Verifique que $(-2,0)$ e $(0,0)$ são pontos estacionários da função

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - y^2 + x^2,$$

   mas que só o primeiro é ponto de extremo local.

10. Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de sela das funções seguintes

    (a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$;
    (b) $f(x,y) = y^4 - x^3 + x^2$;
    (c) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$;
    (d) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;
    (e) $f(x,y) = x \sin y$;
    (f) $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 - 2y + 2z^2$;
    (g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$;

(h) $f(x,y) = x^6 + y^6 - x^2 - y^2$;

(i) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

(j) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$.

11. Determine os extremos locais da função $y(x)$ definida implicitamente pela equação $y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$.

12. Usando a *regra dos multiplicadores de Lagrange* determine os extremos relativos das funções seguintes :

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ sujeita a $x + y = 3$;

    (b) $f(x,y) = x + 2y$ sujeita a $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$;

    (c) $f(x,y,z) = 2x^2 + y + z$ sujeita a $x + y + z = 4$ e $x + 2y = 6$;

    (d) $f(x,y,z) = 2x + y^2 + 2z$ sujeita a $x + 2y + z = 10$ e $x + 2z = 8$;

    (e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ sujeita a $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.

13. A temperatura T em qualquer ponto (x,y) do plano é dada por $T = 3y^2 + x^2 - x$. Qual é a temperatura máxima e mínima num círculo fechado de raio 1 centrado na origem?

14. Sejam $(1,1), (2,3)$, $(3,-1)$ os vértices de um triângulo. Determine o ponto (x,y) do triângulo cuja soma dos quadrados das suas distâncias aos vértices seja mínima.

15. Encontre o ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ mais próximo de $(2,1)$.

16. Determine a distância mínima entre $(0,0)$ e a hipérbole $y^2 - x^2 + 2x + 3 = 0$.

17. Encontre os pontos da superfície $x^2y^2z = 1$ que estão mais próximos da origem.

18. Determine os pontos da curva de intersecção das superfícies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

que estão mais próximos da origem.