DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Joaquim M. C. Correia

DMat, ECT, Universidade de Évora
CLAV, Gab.237
Email: jmcorreia@uevora.pt

Unidade Curricular

Álgebra Linear e Geometria Analítica I
(sigla: ALGA I; SIIUE: MAT0900)

Ano Letivo: **2015/2016**
1º Ciclo, 1º Ano, 1º Semestre

Cursos:
Matemática Aplicada à Economia e Gestão, Matemática Aplicada, Engs. Informática, Mecatrónica, Energias Renováveis, Geológica

Departamento: DMat, ECT, UÉvora
Responsável: Joaquim M. C. Correia

Horas Letivas (de J.M.C. Correia)

Local: CLAV (Colégio Luís António Verney)

	5ª-fª	**6ª-fª**
T	Anf.4(16h)	Anf.3(9h)
PL	128(9h), 066(11h),128(14h)	127(14h)
At.	237(13h)	237(13h)

Datas de Avaliação

Frequências			
1ª	23 out	18h	Anf.2
2ª	25 nov	18h	Anf.2
3ª	13 jan	14h	Anf.2
Recup.	13 jan	14h	Anf.2
Exames			
Normal	13 jan	14h	Anf.2
Recurso	27 jan	14h	Anf.2
Especial	? set	?	?

Bibliografia

[Mag] L. T. Magalhães, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editores, 1998 [http://www.texto.pt/catalogo/detalhes_produto.php?id=3244]

[Hef] J. Hefferon, *Linear Algebra*, free e-Book, 2014 [http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/]

[Chi] A. C. Chiang, K. Wainwright, *Matemática para Economistas*, Pearson, 2006 [http://www.pearson.com.br/produtos_detalhes.asp?id_p=0&livro_cod=9788534615006&pag_id=3&area_pai=21]

(Exercícios)

[Mo1] A. Monteiro, *Matrizes*, Verlag Dashöfer, 2011
[http://elivro.pt/engenharia-e-ciencias/matematica-e-estatistica/978-989-642-083-3-matrizes]

[Mo2] A. Monteiro, *Álgebra Linear*, Verlag Dashöfer, 2011
[http://www.elivro.pt/engenharia-e-ciencias/matematica-e-estatistica/9789896420819-algebra-linear-espacos-vectoriais-e-transformaces-lineares]

[Mo3] A. Monteiro, *Geometria Analítica*, Verlag Dashöfer, 2011
[http://elivro.pt/engenharia-e-ciencias/matematica-e-estatistica/978-989-642-147-2-geometria-analilica-espacos-euclidianos]

Textos de Referência

[Agu] F. R. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, 1996 [ISBN: 9789725920503]

[Lax] P. D. Lax, *Linear Algebra and its Applications*, Wiley, 2007 [http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471751561.html]

[Mo4] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Editora McGraw-Hill, 2001 [ISBN: 972-773-106-6]

(Aplicações)

[Bra] M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer, 1993 [http://www.springer.com/mathematics/analysis/book/978-0-387-97894-9]

[Wei] A. Bivar Weinholtz, *Equações Diferenciais— Uma Introdução*, Univ. Lisboa, Fac. Ciências, Depart. Matemática, 2005 [http://www.fc.ul.pt/en/pagina/9565/publica%C3%A7%C3%B5e do-dm]

Apoio

[Cor] Joaquim M. C. Correia, *Moodle*
[https://www.moodle.uevora.pt/1516/course/view.php?id=815]

[Kha] Khan Academy, *Videos*
[http://www.khanacademy.org/math/linear-algebra]

Obs.

- SIIUE: é o endereço-UÉ oficial (Moodle não o é);
- consultar no SIIUE a Ficha Curricular (oficial) da disciplina;
- erros, faltas de clareza, melhorias: p.f., comunicar ao (e-mail:) jmcorreia@uevora.pt

Semana 1

Acompanhamento pelo livro:

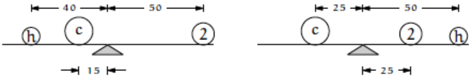
[Mo1] Mo1 Cap.1, *Sistemas de equações lineares*, pp. 1–21.

[Hef] p. 1

I Solving Linear Systems

Systems of linear equations are common in science and mathematics. These two examples from high school science [Onan] give a sense of how they arise.

The first example is from Statics. Suppose that we have three objects, one with a mass known to be 2 kg and we want to find the unknown masses. Suppose further that experimentation with a meter stick produces these two balances.



For the masses to balance we must have that the sum of moments on the left equals the sum of moments on the right, where the moment of an object is its mass times its distance from the balance point. That gives a system of two equations.

$$\begin{aligned} 40h + 15c &= 100 \\ 25c &= 50 + 50h \end{aligned}$$

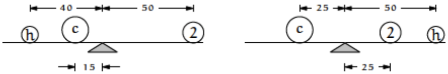
[Hef] p. 1 Anotada

I Solving Linear Systems

Systems of linear equations are common in science and mathematics. These two examples from high school science [Onan] give a sense of how they arise.

The first example is from Statics. Suppose that we have three objects, one with a mass known to be 2 kg and we want to find the unknown masses. Suppose further that experimentation with a meter stick produces these two balances.

more objects...
more known masses...
without meter stick?



symm. balance (... depend.)

For the masses to balance we must have that the sum of moments on the left equals the sum of moments on the right, where the moment of an object is its mass times its distance from the balance point. That gives a system of two equations.

(Cons.) Law!
Def. or Concept
why two?

$$\begin{aligned} 40h + 15c &= 100 \\ 25c &= 50 + 50h \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

Problema: vamos "acertar a equação" (2º exemplo de [Hef], p.1 Hef)

$$x\, C_7 H_8 + y\, HNO_3 \Longrightarrow z\, C_7 H_5 O_6 N_3 + w\, H_2 O\,,$$

recorrendo ao princípio de conservação dito Lei de Lavoisier: o nº de átomos de cada elemento químico nos reagentes (lado esquerdo) e nos produtos da reação (lado direito) tem de ser o mesmo:

$$\begin{cases} 7x = 7z\,, & \text{para o } \textbf{C}\textit{arbono} \\ 8x + y = 5z + 2w\,, & \text{para o } \textbf{H}\textit{idrogéneo} \\ y = 3z\,, & \text{para o } \textbf{N}\textit{itrogéneo} \text{ ou } \textit{azoto} \\ 3y = 6z + w\,, & \text{para o } \textbf{O}\textit{xigéneo} \end{cases} .$$

Discussão

N.B. a reação *acontece*, portanto o sistema tem de ser possível (tem solução) e se x moléculas de tolueno reagem com y de ácido nítrico resultando z de trinitrotolueno e w de água, então com o dobro de x e de y resultam o dobro de z e de w: o sistema é possível indeterminado (tem várias soluções).

Outro problema: no plano $x\mathcal{O}y$ a *coincidência*, *paralelismo estrito* ou a *obliquidade* de duas retas, $ax + by = c$ e $dx + ey = f$, pode-se estudar pela sua interseção

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

conforme o sistema é, respetivamente, indeterminado, impossível ou possível determinado (uma única solução).

Questões:

- O que significa sistema *linear* (vs. não-linear)?
  - Como visualizar a linearidade, e.g., em termos de geometria analítica da reta, do plano ou do espaço?
  - E para o problema do sistema de quatro equações a quatro variáveis?

Questões:

- O que é a *solução* de um sistema?
  - No contínuo dos números reais, $\mathbb{R}$, ou dos complexos, $\mathbb{C}$, ou no discreto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, ou dos naturais, $\mathbb{N}$, ...?
  - Quantas soluções tem um sistema indeterminado? (E, ainda o caso 'linear' vs. o 'não-linear'...)

Questões:

- Existem soluções *matemáticas* e soluções *"físicas"* ?
  - Como *interage* a matemática com as outras ciências?
  - " — Geometricamente o que são $x = 2$, $y = x$ ou $x + y + z = 1$?
    — Não sei, porque essa é uma não-pergunta. Não faz sentido sem enunciar em que *espaço linear* $\mathbb{R}^n$ estamos: em $\mathbb{R}$ $x = 2$ é um ponto, mas em $\mathbb{R}^2$ é uma reta e é um plano em $\mathbb{R}^3$..."

Escrita Matricial

Consideramos aqui um qualquer sistema de p equações (sendo $i = 1, \ldots, p$ o índice de linha) a n incógnitas x_j ($j = 1, \ldots, n$ o índice de coluna) com termos independentes d_i e coeficientes a_{ij}, números reais:

$$(S_1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = d_3 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \cdots + a_{pn}x_n = d_p \end{cases} ,$$

(S_2) (S_3) (S_4)

que se reescreve matricialmente (*matriz ampliada*)

$$(S_2) \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} & d_p \end{array}\right].$$

E, por aplicação dos *princípios de equivalência*, se simplifica na seguinte forma (triangular superior) que no-lo permite discutir ou resolver:

▸ (S_3) ▸ (S_4)

Theorem

Por aplicação em número finito das operações de troca de linhas ou colunas e adição ordenada a uma linha de outra (eventualmente multiplicada por uma qualquer constante) obtém-se sempre um sistema equivalente a (S_1) da forma

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\
0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\
0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & p_{c-1} & 0 & \star & \cdots & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_c & \star & \cdots & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star
\end{array}\right].$$

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos (usados):

- de condensação;
- de eliminação de Gauss;
- de Gauss-Jordan.

Questões:

- O que são sistemas *equivalentes?*
  - Que *princípios de equivalência?* (Como se refraseiam na terminologia das matrizes?)
  - Por que há que fixar o nº de variáveis n, i.e., a dimensão do espaço de soluções $\mathbb{R}^n$?

Questões:

- O que distingue os métodos de *condensação*, *eliminação de Gauss* e *Gauss-Jordan?*
  - Como colocar uns na posição dos pivots? E, por que é indiferente ter zeros ou não acima dos pivots?
  - Se não recorrermos à *troca de colunas*, então como se reescreve a matriz do teorema? (Importante! Cf. em [Mag] p. 25 o conceito de *matriz em escada*.)

Questões:

- Como se classifica a partir da matriz do teorema?
  - Quando é o sistema possível? E determinado? (Qual a relação entre o nº de equações, p, o nº de incógnitas, n, e o nº de pivots, c?)
  - Considerou todas as possibilidades de $p > n$, $p = n$ e $p < n$?
- Obs. Ao nº de pivots, c, chama-se a caraterística da matriz do sistema. (Um pivot nunca é nulo.)

Semana 2

Acompanhamento pelo livro:

[Mo1] Mo1 Cap.2, *Matrizes*, pp. 23–28; 40–46.

[Mag] Mag Cap.1, *Resolução de sistemas de equações lineares por eliminação de Gauss*, pp. 1–48.

Produto Matricial

Atrás substituímos a escrita usual de um sistema (S_1) ▸ (S_1) pela escrita (abreviada) matricial (S_2) ▸ (S_2).
Agora, *definiremos* uma noção de *produto matricial*, que dê sentido à reescrita matricial (operacionalizada):

$$(S_3) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}.$$

▸ (S_4)

Definition

Duas matrizes do mesmo tipo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{p,n}$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{i,j=1}^{p,n} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ dizem-se iguais, $A = \tilde{A}$, quando

$$\forall_{i,j=1}^{p,n} \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}.$$

Definition

Multiplica-se à esquerda a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{p,n} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ pela matriz $B = [b_{ki}]_{k,i=1}^{m,p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, em que o nº de colunas de B é igual ao nº de linhas de A, resultando a matriz produto $BA = P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ onde

$$P = [p_{kj}]_{k,j=1}^{m,n} : \quad \forall_{k,j=1}^{m,n} \quad p_{kj} = \sum_{i=1}^{p} b_{ki}\, a_{ij}.$$

Assim, (S_3) escreve-se sucintamente $\quad AX = D\,,$

$$\text{onde}\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}.$$

E, se a equação $\quad AX = D \quad$ for solúvel, poderemos então obter uma outra resolução do sistema (S_1):

Explícitemos (como se se tratasse da resolução da equação no conjunto dos números reais) as propriedades suficientes à seguinte resolução

$$\begin{aligned} AX = D &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}D && \text{(inverso)} \\ &\iff \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}D && \text{(associatividade)} \\ &\iff \mathbb{I}\,X = A^{-1}D && \text{(unidade)} \\ &\iff X = A^{-1}D\,, \end{aligned}$$

onde nos falta calcular a matriz inversa A^{-1}. (Existe?)

Definition

Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível se existir outra matriz quadrada $X \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$XA = \mathbb{I} = AX\,.$$

Obs. O que se passa quando a matriz A não é quadrada?

Invertibilidade

Proposition

Se a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível, então a matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}$ da definição anterior é única, denota-se por A^{-1} e diz-se a inversa de A.
Se X_j e 1_j $(j = 1, \dots, n)$ forem, respetivamente, a coluna j da matriz A^{-1} (desconhecida) e da unidade $\mathbb{I}$, então

$$AX = \mathbb{I} \iff AX_j = 1_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Ou seja, resolvendo em simultâneo estes n sistemas, pelo método de Gauss-Jordan, calculamos a matriz inversa A^{-1}. Esquemática, mas sugestivamente:

$$\left[A \,|\, \mathbb{I}\right] \iff \dots \iff \left[\mathbb{I} \,|\, A^{-1}\right].$$

Questões:

- Quando é uma matriz quadrada invertível?
- E se a matriz não é quadrada?
- Dada uma matriz A, discuta quando existe e qual é a matriz unidade $\mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I}A = A = A\mathbb{I}$.
- Mostre que o produto matricial não é comutativo (dadas matrizes ao arbítrio A e B, não é em geral verdade que $AB = BA$— discuta!).
- Porque o produto de matrizes quadradas não é comutativo, resulta que os "casos notáveis" se não verificam— mostre-o!
- Mostre também que a *propriedade de anulamento do produto* é falsa para as matrizes. Repare que então a *propriedade do corte* não se verifica.

Semana 3

Acompanhamento pelo livro:

[Mo1] ▸ Mo1 Cap.2, *Matrizes*, pp. 28–39.

Até agora reescrevemos o sistema (S_1) ▸ (S_1)

- matricial e abreviadamente como (S_2) ▸ (S_2) e, depois
- quando definido o produto de matrizes, como (S_3). ▸ (S_3)
- Vamos ainda reescrevê-lo, funcionalmente:

Começamos por identificar 'vetores' e 'matrizes coluna'

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = [x_{i1}]_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n.$$

Sendo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{d} \in \mathbb{R}^p$, definimos uma função vetorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ por

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p,$$

e então o sistema (S_1) reescreve-se funcionalmente como

$$(S_4) \quad \left(\; f(\vec{x}) = \vec{d} \; \right) \equiv \left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \right).$$

Obs. Como também $A\vec{x} = \vec{d}$, então é forçoso, para efeitos de coerência, definirmos $A\vec{x}$ como sendo igual a $f(\vec{x})$. Ou seja, estamos conforme à definição de produto matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{bmatrix}.$$

Aplicação Linear

Mostre que $A\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\right)=A\vec{x_1}+A\vec{x_2}$ e que, sendo $\lambda\in\mathbb{R}$, se tem $A\left(\lambda\vec{x}\right)=\lambda A\vec{x}$. Então

Definition

A função (aplicação ou transformação) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ verifica as duas propriedades:

$$\text{(Aditividade)}\qquad \forall\vec{x_1},\vec{x_2}\in\mathbb{R}^n,\qquad f\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\right)=f\left(\vec{x_1}\right)+f\left(\vec{x_2}\right),$$

$$\text{(Homogeneidade)}\qquad \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\qquad f\left(\lambda\vec{x}\right)=\lambda f\left(\vec{x}\right),$$

e diz-se que ela é *linear*.

Obs. É essencial “convencer-se” de que: uma função f é linear sse tem uma representação matricial (i.e., $\exists$ matriz $A: f(\vec{x})=A\vec{x}$). Além disso, a representação é única. (Este é o facto básico na prova dos resultados seguintes.)

Adição

Proposition

Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *duas transformações lineares de matrizes* $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$, *respetivamente. A função soma,*

$$\varphi + \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad \textit{definida por} \quad (\varphi + \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}) \,,$$

é também uma transformação linear cuja matriz é

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \,.$$

- $(\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo comutativo.

Produto por Escalar

Proposition

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma transformação linear de matriz* $A = [a_{ij}]$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *um escalar. A função produto de* φ *pelo escalar* λ*,*

$$\lambda \cdot \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad \textit{definida por} \quad (\lambda \cdot \varphi)(\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})\,,$$

é uma transformação linear de matriz

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}]\,.$$

- $(\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Produto Matricial

Proposition

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ *transformações lineares de matrizes* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}$, $B = [b_{ki}] \in \mathcal{M}_{m\times p}$, *respetivamente. A função composta,*

$$\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{definida por} \quad (\psi \circ \varphi)(\vec{v}) = \psi(\varphi(\vec{v}))\,,$$

é uma transformação linear de matriz

$$B \circ A = [p_{kj}] \in \mathcal{M}_{m\times n}\,, \quad \textit{onde} \quad p_{kj} = \sum_{i=1}^{p} b_{ki}\, a_{ij}\,.$$

- $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \circ)$ é um monóide, $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \circ)$ é uma álgebra.

N.B. Da identificação funcional resulta necessariamente o produto matricial, ou seja, não precisávamos de o ter definido.

PROVA: Queremos mostrar que $B \circ A = \left[\sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij}\right]$.

Sendo $[y_{i1}] = \vec{y} = \varphi(\vec{x}) = A\,\vec{x} = [a_{ij}]\,[x_{j1}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1}\right]$, então

$$B \circ A\,\vec{x} = \psi \circ \varphi\,(\vec{x}) = \psi\,(\varphi(\vec{x})) = \psi(\vec{y}) = B\,\vec{y} = [b_{ki}]\,[y_{i1}] =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{p} b_{ki} y_{i1}\right] = \left[\sum_{i=1}^{p} b_{ki} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1}\right)\right] = \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{ki} a_{ij} x_{j1}\right] =$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij} x_{j1}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij}\right) x_{j1}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}\right] [x_{j1}].$$

c.q.p.

Obs. Compare a prova direta da associatividade $A(BC) = (AB)\,C$ com a obtida usando a representação funcional.

Operação

Definition

Dado um conjunto arbitrário A, dizemos que uma aplicação $\star : A^2 \to A$ é uma operação em A se o seu domínio é todo o A^2.

- Em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a adição e a multiplicação são operações;
- em $\mathbb{N}$ nem a subtração nem a divisão são operações;
- em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a subtração é uma operação, mas a divisão não;
- em $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a divisão é uma operação, mas em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ não.
- Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a adição, $+$, ou o produto matricial, $\circ$, são operações.

Monóide

Definition

Dada uma operação $\star$ em A, dizemos que $(A, \star)$ é um monóide se se verificam as propriedades:

(Associativa) $\forall_{x,y,z \in A} \quad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z\,;$

(El. Neutro) $\exists_{e \in A} : \forall_{x \in A} \quad e \star x = x = x \star e\,.$

- $(\mathbb{N}, +)$ não é um monóide, mas $(\mathbb{N}_0, +)$ ou $(\mathbb{N}, \times)$ sim.
- $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), +)$ e $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \circ)$ são monóides.

Grupo

Definition

Dada uma operação $\star$ em A, dizemos que $(A, \star)$ é um grupo se é um monóide e verifica ainda a propriedade:

(El. Oposto) $\quad \forall_{x \in A} \exists_{\tilde{x} \in A} : \quad \tilde{x} \star x = e = x \star \tilde{x}\,.$

- $(\mathbb{N}_0, +)$ não é grupo, mas $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ou $(\mathbb{C}, +)$ sim;
- $(\mathbb{N}, \times)$ ou $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$ não são grupos, mas $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ ou $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ sim;
- $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \circ)$ não é grupo, mas $(\mathbb{R}^n, +)$ ou $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$ sim.

Corpo

Definition

Dado um grupo $(A, +)$, seja $\mathbf{0}$ o seu zero e $(A \setminus \{\mathbf{0}\}, \times)$ outro grupo, então $(A, +, \times)$ diz-se um corpo se se verificam ainda as propriedades:

(Comut. Adição) $\forall_{x,y \in A} \quad x + y = y + x\,;$

(Comut. Multipl.) $\forall_{x,y \in A} \quad x \times y = y \times x\,;$

(Distributividade) $\forall_{x,y,z \in A} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z\,.$

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ e $(\mathbb{C}, +, \times)$ são corpos.

Anel

Definition

Dado um grupo $(A, +)$, seja $\mathbf{0}$ o seu zero e $(A \setminus \{\mathbf{0}\}, \times)$ um monóide, então $(A, +, \times)$ diz-se um anel se se verificam ainda as propriedades:

(Comut. Adição) $\forall_{x,y \in A} \quad x + y = y + x\,;$

(Distributividade) $\forall_{x,y,z \in A} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z\,,$
$(y + z) \times x = y \times x + z \times x\,.$

- todo o corpo é um anel;
- $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \circ)$ não é um corpo, mas é um anel.

Operação Externa

Definition

Dados um corpo $(K, +, \times)$ e um conjunto arbitrário A, dizemos que uma aplicação $\cdot : K \times A \to A$ é uma operação externa em A se o seu domínio é todo o $K \times A$.

- Dado o corpo $(\mathbb{R}, +, \times)$ e o conjunto dos vetores $\mathbb{R}^n$ ou mais geralmente das matrizes $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, o produto de números reais (ditos escalares) por vetores ou matrizes constitui uma operação externa.

Espaço Vetorial

Definition

Dado um grupo comutativo $(\mathcal{V},+)$, um corpo $(K,+,\times)$ e uma operação externa $\cdot : K \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, então $(\mathcal{V},+,\cdot)$ diz-se um espaço vetorial sobre o corpo K se se verificam ainda as propriedades:

(Distribut. vetorial) $\forall_{\lambda\in K}\, \forall_{x,y\in\mathcal{V}} \quad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y\,;$

(Distribut. escalar) $\forall_{\alpha,\beta\in K}\, \forall_{x\in\mathcal{V}} \quad (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x\,;$

(Associat. mista) $\forall_{\alpha,\beta\in K}\, \forall_{x\in\mathcal{V}} \quad (\alpha\times\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)\,;$

(Elemento neutro) $\forall_{x\in\mathcal{V}} \quad 1\cdot x = x\,.$

- $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Álgebra

Definition

$(\mathcal{V},+,\circ,\cdot)$ é uma álgebra sobre o corpo $(K,+,\times)$ se

- $(\mathcal{V},+,\cdot)$ é um espaço vetorial sobre $(K,+,\times)$;
- $(\mathcal{V},+,\circ)$ é um anel;
- $(\mu A)B=\mu(AB)=A(\mu B),\ \ \forall \mu \in K,\ \forall A,B\in\mathcal{V}$.

- $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\circ,\cdot)$ é uma álgebra sobre o corpo dos números reais.

Semana 4

Acompanhamento pelo livro:

[Mo1] ▸ Mo1 Cap.2, *Matrizes*, pp. 47–52.

[Mag] ▸ Mag Cap.5, *Determinantes*, pp. 225–228.

Mais Exemplos de Espaços Vetoriais

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ com a adição e o produto por escalares reais definidos "coordenada a coordenada" constitui exemplo habitual de espaço vetorial real. (Mas também é espaço vetorial racional.)
- $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ com a adição e o produto por escalares complexos definidos "coordenada a coordenada" constitui exemplo frequente de espaço vetorial complexo. (Mas também é espaço vetorial racional ou real.)
- $(\mathbb{Q}^n, +, \cdot)$ com a adição e o produto por escalares racionais definidos "coordenada a coordenada" constitui exemplo de espaço vetorial racional. (Mas não é espaço vetorial real nem complexo.)

(Cont.)

- $(\mathcal{M}_{n\times n}(K), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo K, e.g., dos números racionais, dos números reais ou dos números complexos.
- $(\mathbb{R}^A, +, \cdot)$ é o espaço vetorial real das funções reais de domínio A, com as operações de adição e produto por escalar usuais.

Definition

Dado um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ e vetores $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k} \subseteq \mathcal{V}$, diz-se que:

- $v \in \mathcal{V}$ é gerado pelos $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$ (ou que é uma combinação linear deles) quando existem escalares $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,k} \subseteq \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \,;$$

- os $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$ são linearmente independentes quando a sua única combinação linear nula é a que corresponde a todos os escalares nulos, i.e.,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \forall_{i=1}^{k} \ \alpha_i = 0\,.$$

Definition

Dado um subconjunto finito S de um espaço vetorial $\mathcal{V}$, $S \subseteq \mathcal{V}$, ao número máximo de vetores independentes de S chama-se a sua *caraterística*.

Questão: Olhando as linhas (resp. as colunas) de uma matriz como vetores, como se mostra que a caraterística desse conjunto de vetores é igual à caraterística da matriz?

Definição de Determinante

Definition

Uma aplicação $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ verificando os seguintes três axiomas diz-se *determinante de ordem n* (ou *n-determinante*):

(Ax.1: Multilinearidade) Para cada $k \in \{1, ..., n\}$, fixados ao arbítrio $n-1$ vetores $\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}, \vec{v_{k+1}}, ..., \vec{v_n} \in \mathbb{R}^n$, a função $D_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ obtida a partir de D por

$$D_k(\vec{x}) = D(\vec{v_1}, ..., \vec{v_{k-1}}, \vec{x}, \vec{v_{k+1}}, ..., \vec{v_n})$$

é uma aplicação linear.

(Ax.2: Degeneração) Para cada par $i, j \in \{1, ..., n\}$ com $i < j$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $D^{ij} : (\mathbb{R}^n)^{n-2} \to \mathbb{R}$ obtida de D fixando as variáveis $\vec{x_i} = \vec{x_j} = \vec{v}$ é nula:

$$D(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{i-1}}, \vec{v}, \vec{x_{i+1}}, ..., \vec{x_{j-1}}, \vec{v}, \vec{x_{j+1}}, ..., \vec{x_n}) \equiv 0.$$

(Ax.3: Normalização) Seja $\forall_{i\in\{1,...,n\}}$ $\vec{e_i} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de coordenadas nulas à exceção da i-ésima cujo valor é 1, então

$$D(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}) = 1.$$

Cálculo Explícito do Determinante

Lemma

Existe uma única aplicação determinante $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, *cuja expressão explícita é*

$$D(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma_i i}.$$

Questões:

- Como se calculam os determinantes?
- Determinantes para quê?

Semana 5

Acompanhamento pelo livro:

[Mo1] ▸ Mo1 Cap.3, *Determinantes*, pp. 53–71.

[Mag] ▸ Mag Cap.5, *Determinantes*, pp. 228–245.

Propriedades

Definition

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times p}$, chama-se matriz *transposta* de A à matriz $A^t = [\tilde{a}_{ji}] \in \mathcal{M}_{p \times n}$ tal que $\tilde{a}_{ji} = a_{ij}$.

Corollary

Dada uma matriz A quadrada, $|A^t| = |A|$.

Proposition

Seja $D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *uma forma multilinear, à* degeneração *equivalem a:*

(Dependência) *se* $\exists_{k\in\{1,\ldots,n\}}$: $\vec{v}_k = \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i \neq k,$ $i = 1, \ldots, n)$, *então*

$$D(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = 0\,.$$

(Alternância) *se* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $i < j$, *então tem-se que*

$$D(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n) = -D(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n).$$

Corollary (Cálculo do Determinante)

Dada uma matriz quadrada A, proceda-se à eliminação de Gauss (até se obter uma matriz triangular). Seja $t =$ nº de trocas de linhas e/ou colunas e d_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ os seus elementos diagonais (ditos pivots quando não nulos), então

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} (-1)^t d_{ii}\,.$$

Corollary (Teorema de Laplace; Cálculo do Determinante)

Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, uma matriz quadrada $n \times n$, então fixando a coluna $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ de A tem-se que

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0}(-1)^{i+j_0}|A_{ij_0}|\,,$$

ou fixando a linha $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ de A vale

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}(-1)^{i_0+j}|A_{i_0 j}|\,,$$

onde $|A_{ij}|$ se diz o menor-ij e $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ o cofator ou complemento algébrico de a_{ij} e a matriz A_{ij} obtém-se de A suprimindo a sua linha i e a sua coluna j.

Regra de Cramer

Para sistemas com um mesmo número de equações e incógnitas (ditos 'quadrados')

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right],$$

se o determinante da matriz reduzida é não nulo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

então cada incógnita fica determinada pelo quociente

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad \forall_{i=1,\ldots,n} .$$

Caso contrário, se o determinante da matriz reduzida (no denominador) for nulo, então

- se algum dos determinantes no numerador for não nulo, o sistema é *impossível*;
- se todos os determinantes no numerador forem nulos, o sistema é *indeterminado*.

Questões:

- Vantagens e desvantagens da resolução de sistemas pela regra de Cramer ou por eliminação de Gauss?
- Como se usa a regra de Cramer num sistema não-quadrado?
- Qual é o grau de indeterminação de um sistema discutido pela regra de Cramer?
- Existe o método mais eficiente de cálculo de determinantes?

Proposition

Para uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ são equivalentes:

a) *a matriz A é invertível;*
b) *a caraterística de A é n;*
c) *o determinante de A é diferente de zero;*
d) *existe uma matriz $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n\times n} : A\tilde{A} = \mathbb{I}$.*

Theorem

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, então $|AB| = |A||B|$.

Corollary

Se A é uma matriz invertível, então $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Definition

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$, chama-se matriz *complementar* de A à matriz $A^c = [\tilde{a}_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ onde $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ é o complemento algébrico de a_{ij} (vd. Teorema de Laplace).

Proposition

Se A é uma matriz invertível, então $A^{-1} = |A|^{-1}(A^c)^t$.

Semana 6

Acompanhamento pelo livro:

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.1, *Espaços vetoriais*, pp. 1–12.

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.2, *Subespaços vetoriais*, pp. 37–42.

[Mag] ▸ Mag Cap.2, *Espaços lineares*, pp. 49–55.

Espaço Linear

Definition

Dado um grupo comutativo $(\mathcal{V}, +)$, um corpo $(K, +, \times)$ e uma operação externa $\cdot : K \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, então $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ diz-se um espaço vetorial (ou linear) sobre o corpo K se se verificam as propriedades:

(Distribut. vetorial) $\forall_{\lambda \in K} \forall_{x,y \in \mathcal{V}} \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y\,;$

(Distribut. escalar) $\forall_{\alpha,\beta \in K} \forall_{x \in \mathcal{V}} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\,;$

(Associat. mista) $\forall_{\alpha,\beta \in K} \forall_{x \in \mathcal{V}} \quad (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)\,;$

(Elemento neutro) $\forall_{x \in \mathcal{V}} \quad 1 \cdot x = x\,.$

Exemplos

- Vd. Semana 4, Estruturas Algébricas ('Mais Exemplos de Espaços Vetoriais' & '(Cont.)').
- Seja $\mathbb{R}_n[x]$ o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais e variável x, algebrizado com a operação usual '$+$' de adição entre polinómios e a multiplicação '$\cdot$' por escalares reais. Então $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Por simplicidade passaremos a omitir, sempre que não haja ambiguidade, o símbolo da operação de produto por escalar.

Proposition

Num qualquer espaço vetorial $(\mathcal{V},+,\cdot)$ *valem as seguintes propriedades:*

$$\begin{array}{ll}
\forall_{x\in\mathcal{V}}, & 0x=\mathbf{0};\\
\forall_{\alpha\in K}, & \alpha\mathbf{0}=\mathbf{0};\\
\forall_{x\in\mathcal{V}}, & (-1)x=-x;\\
\forall_{\alpha\in K}\forall_{x\in\mathcal{V}}, & \alpha(-x)=-(\alpha x)=(-\alpha)x;\\
\forall_{\alpha\in K}\forall_{x\in\mathcal{V}}, & \alpha x=\mathbf{0}\Longrightarrow \alpha=0 \text{ ou } x=\mathbf{0};\\
\forall_{x,y,z\in\mathcal{V}}, & x+y=x+z\Longrightarrow y=z.
\end{array}$$

Definition

Dado um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$, um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ diz-se um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ quando, com as operações induzidas de $\mathcal{V}$, $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Abv. escreve-se '$\mathcal{F} \leq \mathcal{V}$' e lê-se $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ (distinguir de 'subconjunto': '$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$').

Proposition

Num espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$, um subconjunto $\mathcal{F}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ sse $\mathcal{F}$ é não vazio e fechado para as operações:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \neq \emptyset; \\
&\forall_{x,y \in \mathcal{F}}, \qquad x + y \in \mathcal{F}; \\
&\forall_{\alpha \in K} \forall_{x \in \mathcal{F}}, \qquad \alpha x \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Questões:

- Na definição de subespaço não se exige que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mas na proposição seguinte sim. Porquê?

Semana 7

Acompanhamento pelo livro:

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.2, *Subespaços vetoriais*, pp. 43–68.

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.1, *Espaços vetoriais*, pp. 13–35.

[Mag] ▸ Mag Cap.2, *Espaços lineares*, pp. 55–79.

Proposition

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathcal{V}$ (abv. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$), então

- $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$;
- $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$ *sse* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ *ou* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F} + \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$.

Definition

Nas condições da proposição anterior, quando $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \left\{\vec{0}\right\}$, dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ estão em *soma direta* e escreve-se $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, em vez de $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Definition

Dados um espaço vetorial $\mathcal{V}$ e um subconjunto não vazio S (finito ou não), $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{V}$, seja $\langle S \rangle$ (lê-se *o conjunto gerado por* S) o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de vetores de S.

Proposition

Seja $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial e* $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{V}$, *então*

- $S \subseteq \langle S \rangle \leq V$;
- $\langle S \rangle$ *é o menor subespaço de* $\mathcal{V}$ *que contém* S;
- $\langle S \rangle = \bigcap_{\{F \leq V:\ S \subseteq F\}} F$;
- $\langle S \rangle = S$ *sse* $S \leq V$.

Proposition

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial, valem:

- *se $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{V}$, então $\langle X \rangle \leq \langle Y \rangle$;*
- *se $X, Y \subseteq \mathcal{V}$, então $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$;*
- *se $\mathcal{F}, \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$, então $\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rangle = \mathcal{F} + \mathcal{G}$.*

Definition

Dois subconjuntos S_1 e S_2 de vetores do mesmo espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ dizem-se equivalentes, escreve-se $S_1 \approx S_2$, se geram o mesmo subespaço.

Proposition

Dois subconjuntos são equivalentes sse cada vetor de um conjunto se escreve como combinação linear de vetores do outro.

Definition

Um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ diz-se de dimensão finita se $\mathcal{V} = \left\{\vec{0}\right\}$ ou se existe um seu subconjunto finito não vazio, digamos $S = \{v_j\}_{j=1,\ldots,k}$ (para algum $k \in \mathbb{N}$), tal que $\mathcal{V} = \langle S \rangle = \langle v_j \rangle_{j=1,\ldots,k}$.

Proposition

Sejam $\{v_j\}_{j=1,\ldots,k}$ e $\{u_i\}_{i=1,\ldots,p}$ dois subconjuntos equivalentes. Se os vetores $\{u_j\}_{j=1,\ldots,p}$ forem independentes, então $p \leq k$. Portanto sendo ambos os subconjuntos independentes, eles terão o mesmo número de vetores, $p = k$.

É grande a utilidade prática do

Theorem (de Steinitz)

Seja $\{u_i\}_{1\leq i\leq p}$ *um sistema de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial* $\mathcal{V}$ *tal que cada um dos seus* p *vetores* u_i *é combinação linear dos vetores* $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}\subseteq\mathcal{V}$. *Então* $k\geq p$ *e é possível substituir* p *dos* k *vetores de* $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$ *pelos vetores* $\{u_i\}_{1\leq i\leq p}$ *obtendo um sistema de vetores equivalente a* $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$.

Corollary

Dois sistemas de vetores equivalentes têm a mesma caraterística.

Definition

Um subconjunto de vetores $\{v_i\}_{i=1,\dots,k} \subseteq \mathcal{V}$ de um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ diz-se uma base de $\mathcal{V}$ quando os vetores $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ geram $\mathcal{V}$ e são linearmente independentes.

Corollary

Se o espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ é de dimensão finita, então possui uma base $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$). E, qualquer outra base tem o mesmo número de vetores, n.

Definition

Nas condições do corolário anterior, diz-se então que o espaço vetorial $\mathcal{V}$ tem dimensão n, $\dim(\mathcal{V}) = n$.

Proposition

Se o espaço vetorial $\mathcal{V}$ *tem* $dim(\mathcal{V}) = n$, *então um conjunto de* n *vetores* $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ *é independente sse é gerador de* $\mathcal{V}$.

- **N.B.** No espaço vetorial usual $\mathbb{R}^3$, dois planos diferentes têm ambos dimensão 2.

Proposition

Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G} \leq \mathcal{V}$. *Valem:*

- *se* $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, *então* $dim(\mathcal{F}) \leq dim(\mathcal{G})$;
- *se* $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ *e* $dim(\mathcal{F}) = dim(\mathcal{V})$ *é finita, então* $\mathcal{F} = \mathcal{V}$;
- *se* $dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ *é finita, então* $dim(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = dim(\mathcal{F}) + dim(\mathcal{G}) - dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$;
- *se* $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, *então* $dim(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = dim(\mathcal{F}) + dim(\mathcal{G})$.

Proposition

O conjunto solução de um sistema de equações lineares homogéneas nas variáveis x_i, $i = 1, \ldots, n$, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Além disso, se a caraterística do sistema for c, então a dimensão do subespaço é $n - c$. Reciprocamente, num espaço vetorial de dimensão n, um subespaço de dimensão $n - c$ carateriza-se como sendo o conjunto solução de um sistema de c equações lineares homogéneas (de caraterística c).

Questões:

- Por que se deve convencionar que $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$?
- Como se mostra que um espaço vetorial tem dimensão infinita?
- Se cada vetor de um conjunto se escreve como combinação linear dos vetores de outro conjunto, então qual é a relação entre os subespaços gerados pelos dois conjuntos?
- Olhando as linhas (resp. as colunas) de uma matriz como vetores, como se mostra que a caraterística desse conjunto de vetores é igual à caraterística da matriz?
- Qual a relevância da última proposição?

Semana 8

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.3, *Aplicações lineares*, pp. 69–77.

[Mag] ▸ Mag Cap.3, *Transformações lineares*, pp. 135–145.

Theorem (Mudança de variável)

Considere o espaço vetorial $\mathcal{V}$ com uma base inicial $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq m}$ e sejam $(y_1,\ldots,y_m)$ as coordenadas nessa base de um vetor $\vec{b}\in\mathcal{V}$. Sendo $(x_1,\ldots,x_m)$ as coordenadas do mesmo vetor noutra base $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq m}$, então $(x_1,\ldots,x_m)$ é a solução única do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} s_{11} & \cdots & s_{1m} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mm} & y_m \end{array}\right] \qquad i.e. \qquad SX = Y\,,$$

onde X e Y são, respetivamente, as matrizes coluna que se identificam com $(x_1,\ldots,x_m)$ e $(y_1,\ldots,y_m)$, enquanto que $S=[s_{ij}]$ é a matriz quadrada cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\vec{u}_j$ $(j=1,\ldots,m)$ na base dos $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq m}$:

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij}\vec{v}_i\,.$$

Definition

Dados $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K, dizemos que a aplicação $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma transformação linear, ou um *homomorfismo*, se é

$$\text{(Aditiva:)} \quad T(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = T(\vec{u_1}) + T(\vec{u_2}), \qquad \forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in \mathcal{U};$$

$$\text{(Homogénea:)} \quad T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \qquad \forall \alpha \in K, \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{U}.$$

Proposition

Se $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma transformação linear, então

$$Nuc(T) \stackrel{def}{=} \left\{ \vec{u} \in \mathcal{U} : T(\vec{u}) = \vec{0} \right\} \leq \mathcal{U}, \qquad e$$

$$Im(T) \stackrel{def}{=} \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} : \ \exists \vec{u} \in \mathcal{U} : \ \vec{v} = T(\vec{u}) \right\} \leq \mathcal{V}.$$

Classificação

Definition

Um homomorfismo $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ diz-se um

Monomorfismo quando é injetiva;

Epimorfismo quando é sobrejetiva;

Isomorfismo quando é bijetiva;

Endomorfismo quando $\mathcal{U} = \mathcal{V}$;

Automorfismo quando é um endomorfismo e isomorfismo.

- A mudança de variável (cf. 'Theorem (Mudança de variável)') define um automorfismo do espaço vetorial $\mathcal{V}$ com a base dos $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq m}$ à partida e à chegada a base dos $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq m}$, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sendo $T(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$ ou, matricialmente, $SX = Y$.

Proposition

Se $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma transformação linear, então

(i) *T é um monomorfismo sse $Nuc(T) = \{\vec{0}\}$;*

(ii) *se $T(\vec{a}) = \vec{b}$, então $T^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + Nuc(T)$;*

(iii) *se $\mathcal{E} \leq \mathcal{U}$, então $T(\mathcal{E}) \leq \mathcal{V}$ e se $\mathcal{F} \leq \mathcal{V}$, então $T^{-1}(\mathcal{F}) \leq \mathcal{U}$;*

(iv) *se $\{u_i\}_i \subseteq \mathcal{U}$ são linearmente dependentes, então os $\{T(u_i)\}_i \subseteq \mathcal{V}$ também o são;*

(v) *se $\{u_i\}_i \subseteq \mathcal{U}$ são linearmente independentes, então os $\{T(u_i)\}_i \subseteq \mathcal{V}$ também o são se T é um monomorfismo.*

N.B. *em que condições podemos escrever "...o são sse T é um monomorfismo."?*

Semana 9

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.3, *Aplicações lineares*, pp. 78–79.

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.4, *Matrizes*, pp. 95–105.

[Mag] ▸ Mag Cap.2, *Espaços lineares*, pp. 80–94.

[Mag] ▸ Mag Cap.3, *Transformações lineares*, pp. 107–112 e 123–128.

Fixadas bases nos espaços vetoriais de partida e de chegada, qualquer aplicação linear se escreve/representa matricialmente (relativamente a essas bases):

Proposition (Representação matricial)

Sendo $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *uma transformação linear sobre o corpo* K, $\{\vec{e_i}\}_{1\leq i\leq m}$ *uma base de* $\mathcal{E}$ *e* $\{\vec{f_j}\}_{1\leq j\leq n}$ *uma base de* $\mathcal{F}$, *sejam os transformados dos vetores da base de partida escritos na base de chegada como*

$$\begin{aligned}
T(\vec{e_1}) &= a_{11}\vec{f_1} + a_{21}\vec{f_2} + \ldots + a_{n1}\vec{f_n} = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1});\\
T(\vec{e_2}) &= a_{12}\vec{f_1} + a_{22}\vec{f_2} + \ldots + a_{n2}\vec{f_n} = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2});\\
&\vdots\\
T(\vec{e_m}) &= a_{1m}\vec{f_1} + a_{2m}\vec{f_2} + \ldots + a_{nm}\vec{f_n} = (a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm});
\end{aligned}$$

então

$$T(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_m\vec{e_m}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

ou, identificando pelas suas coordenadas o vetor $x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_m\vec{e_m}$ $= (x_1, x_2, \ldots, x_m) = X$ *e denotando por* A *a matriz,* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$,

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = AX\,.$$

- A recíproca é verdadeira.
- Assim, a mudança de variável do teorema corresponde à transformação $Id : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, a *identidade* do espaço vetorial $\mathcal{V}$ com a base dos $\{\vec{u_i}\}$ à partida e com a base dos $\{\vec{v_i}\}$ à chegada,

$$Id(x_1, x_2, \ldots, x_m) = SX\,.$$

Corollary

Seja $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ um homomorfismo e $\{\vec{e_i}\}_{1\leq i\leq m}$ uma base de $\mathcal{E}$, então

a) $Im(\varphi) = \langle \varphi(\vec{e_i}) \rangle_{1\leq i\leq m}$;
b) *a* $\dim(Im(\varphi))$ *é igual à caraterística de* $\{\varphi(\vec{e_i})\}_{1\leq i\leq m}$;
c) *a* $\dim(Im(\varphi))$ *é igual à caraterística das colunas de qualquer representação matricial de* φ ;
d) *a* $\dim(Im(\varphi))$ *é igual à caraterística das linhas de qualquer representação matricial de* φ ;
e) *a* $\dim(Im(\varphi))$ *é igual ao número de pivots não nulos (após a eliminação de Gauss).*

Definition

Dada uma transformação linear $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, ao número invariante no corolário anterior chamamos *caraterística de* φ, c_φ. E à $\dim(\mathrm{Nuc}(\varphi))$ chamamos *nulidade de* φ, n_φ.

Theorem

Dado um homomorfismo $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, *então* $dim(\mathcal{E}) = n_\varphi + c_\varphi$.

Corollary

Nas condições do teorema, se $dim(\mathcal{F}) = dim(\mathcal{E})$, *então* φ *é um monomorfismo sse é um epimorfismo (portanto um isomorfismo).*

Theorem

Dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo, $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$, *com a mesma dimensão,* $dim(\mathcal{E}) = dim(\mathcal{F})$, *são isomorfos.*

Semana 10

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.3, *Aplicações lineares*, pp. 79–94.

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.4, *Matrizes*, pp. 106–118.

[Mag] ▸ Mag Cap.3, *Transformações lineares*, pp. 117–123.

Adição

Proposition

Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ espaços lineares sobre o mesmo corpo K com $\dim(\mathcal{E}) = m$ e $\dim(\mathcal{F}) = n$. Fixadas bases em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, sejam $\varphi, \psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ aplicações lineares de matrizes $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, respetivamente. Então, a função soma

$$\varphi + \psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \quad \textit{definida por} \quad (\varphi + \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v})$$

é também uma aplicação linear, cuja matriz é

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)\,.$$

- Seja $L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ o conjunto das transformações lineares de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$, então $\big(L(\mathcal{E}, \mathcal{F}), +\big)$ é um grupo comutativo.

Produto por Escalar

Proposition

Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K, com $\dim(\mathcal{E}) = m$ e $\dim(\mathcal{F}) = n$. Sejam $\lambda \in K$ um escalar e $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ uma transformação linear de matriz, fixadas bases em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$. Então a função

$$\lambda \cdot \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \quad \textit{definida por} \quad (\lambda \cdot \varphi)(\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v})$$

é uma transformação linear de matriz

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)\,.$$

- $\big(L(\mathcal{E}, \mathcal{F}), +, \cdot\big)$ é um espaço vetorial sobre o corpo K, de dimensão $n \times m$, isomorfo a $(\mathcal{M}_{n\times m}(K), +, \cdot)$.

Produto Matricial

Proposition

Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K com bases fixadas e $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ transformações lineares com matrizes $A = [a_{ji}] \in \mathcal{M}_{n\times m}$ e $B = [b_{kj}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$, respetivamente. A função composta,

$$\psi \circ \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{G} \quad \textit{definida por} \quad (\psi \circ \varphi)(\vec{v}) = \psi(\varphi(\vec{v}))\,,$$

é uma transformação linear de matriz

$$B \circ A = [c_{ki}] \in \mathcal{M}_{p\times m}(K)\,, \quad \textit{onde} \quad c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\, a_{ji}\,.$$

Semana 11

[Mo2] ▸ Mo2 Cap.4, *Matrizes*, pp. 118–124.

[Mag] ▸ Mag Cap.3, *Transformações lineares*, pp. 113–116 e 129–134.

[Mo1] ▸ Mo1 Cap.4, *Valores e vetores próprios*, pp. 73–90.

[Mag] ▸ Mag Cap.6, *Valores próprios e vetores próprios*, pp. 247–271.

Consideremos $L(\mathcal{V},\mathcal{V})$, o caso dos endomorfismos num espaço linear $\mathcal{V}$, finitamente gerado, com uma mesma base fixada à partida e à chegada:

1) porque a composição é associativa, então $\big(L(\mathcal{V},\mathcal{V}),\circ\big)$ é um semigrupo (grupóide associativo);

2) a composição de funções não é comutativa em geral, mas mesmo no semigrupo de endomorfismos $\big(L(\mathcal{V},\mathcal{V}),\circ\big)$ também não o é, portanto *o produto de matrizes quadradas não é comutativo!*

3) A aplicação identidade em $\mathcal{V}$,

$$\mathrm{Id} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \quad \text{definida por} \quad \forall_{\vec{v}\in\mathcal{V}} \ \mathrm{Id}(\vec{v}) = \vec{v},$$

é o elemento neutro para a composição em $L(\mathcal{V},\mathcal{V})$:

$$\forall_{\varphi\in L(\mathcal{V},\mathcal{V})} \quad \mathrm{Id}\circ\varphi = \varphi = \varphi\circ\mathrm{Id}\,.$$

A sua representação matricial $\mathbb{I}_{\mathrm{dim}(\mathcal{V})}$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathrm{dim}(\mathcal{V})\times\mathrm{dim}(\mathcal{V})}(K).$$

Assim, $\big(L(\mathcal{V},\mathcal{V}),\circ\big)$ ou $\big(\mathcal{M}_{\mathrm{dim}(\mathcal{V})\times\mathrm{dim}(\mathcal{V})}(K),\circ\big)$ são monóides não comutativos. E verifica-se que $\big(L(\mathcal{V},\mathcal{V}),+,\circ,\cdot\big)$ é uma álgebra sobre o corpo K.

4) $(L(\mathcal{V},\mathcal{V}),\circ)$ também não é um grupo pois nem todo o $\varphi \in L(\mathcal{V},\mathcal{V})$ tem oposto, i.e., nem todo o $\varphi \in L(\mathcal{V},\mathcal{V})$ é invertível.

5) Porém, $\varphi \in L(\mathcal{V},\mathcal{V})$, com representação matricial $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ onde $n = \dim(\mathcal{V})$, é invertível ou um automorfismo sse:

- φ for um monomorfismo;
- a nulidade de φ, $n_\varphi = 0$;
- a caraterística de φ, $c_\varphi = n$;
- φ for um epimorfismo;
- o nº de pivots de A for n;
- o nº de colunas independentes de A for n;
- o nº de linhas independentes de A for n;
- A for invertível;
- o determinante de A, $\det(A) \neq 0$;
- existe alguma matriz $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K) : \quad A\tilde{A} = \mathbb{I}_n$.

N.B. Dados dois espaços vetoriais com a mesma dimensão n, $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, e uma aplicação linear entre eles, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, então fixadas bases convenientes, teremos como representação matricial $\mathbb{I}_n$. Claro que $\varphi \neq \mathrm{Id}$. (Mas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são forçosamente isomorfos.)

Por outro lado, fixando bases diferentes num mesmo espaço vetorial $\mathcal{V}$, a aplicação linear $\mathrm{Id} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ não tem como representação matricial $\mathbb{I}_n$ (ou, se $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tem a representação matricial $\mathbb{I}_n$, então $\varphi \neq \mathrm{Id}$).

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de $\dim(\mathcal{V}) = n$, com uma base $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$ à partida e com outra base $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq n}$ à chegada. A matriz, S, de mudança de base é a representação matricial da aplicação linear identidade de mudança de variável, $\mathrm{Id} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$$\mathrm{Id}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{ou} \qquad SX = Y\,,$$

sendo $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ as coordenadas do mesmo vetor nas bases $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq n}$, respetivamente.

Reciprocamente, tomando agora à partida a base $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq n}$ e à chegada a base $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$, seja $\tilde{S}$ a matriz de mudança de base: $\tilde{S}Y = X$.

Pela associatividade da composição, $X = \tilde{S}Y = \tilde{S}(SX) = (\tilde{S}S)X$ e $Y = SX = S(\tilde{S}Y) = (S\tilde{S})Y$, ou seja,

$$\tilde{S}S = \mathbb{I} = S\tilde{S}$$

é a matriz de representação de $\mathrm{Id} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ com a mesma base $\{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$ à partida e à chegada se considerarmos $\tilde{S}S = \mathbb{I}$, e $\{\vec{v}_i\}_{1\leq i\leq n}$ para $S\tilde{S} = \mathbb{I}$.

Obs. por unicidade, $\tilde{S} = S^{-1}$.

Mudança de Variável

Dada uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ cuja representação matricial é $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, fixadas bases $\{\vec{e_i}\}_{1\leq i\leq m}$ em $\mathcal{E}$ e $\{\vec{f_j}\}_{1\leq j\leq n}$ em $\mathcal{F}$, sejam $S_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}_{m\times m}(K)$ e $S_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ matrizes de mudança de base em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, respetivamente. Então, a representação matricial de φ nas novas bases é dada por

$$B = S_{\mathcal{F}}^{-1} A\, S_{\mathcal{E}}\,.$$

Definition

Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ dizem-se equivalentes quando existem matrizes invertíveis $S_1 \in \mathcal{M}_{m\times m}(K)$ e $S_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que $B = S_2^{-1} A\, S_1$.

Valores e Vetores Próprios

Definition

Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K e $\varphi : E \to E$ um endomorfismo. Dizemos que $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ é um vetor próprio (ou caraterístico) associado ao valor próprio (ou caraterístico) $\lambda \in K$ quando

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}. \tag{1}$$

Obs. a aplicação φ deixa a direção $\vec{v}$ invariante (e, seja $K = \mathbb{R}$, invertida ou não e dilatada ou contraída conforme o valor de λ).

Consideremos E de dimensão finita e fixada uma mesma base à partida e à chegada, vimos que a representação matricial de $Id : E \to E$ é a matriz $\mathbb{I}$ e sendo A a de φ, então reescreve-se (1) como

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (A - \lambda\mathbb{I})\,\vec{v} = \vec{0},$$

e este sistema terá soluções não triviais ($\vec{v} \neq \vec{0}$) sse λ é raiz do polinómio caraterístico:

$$|A - \lambda\mathbb{I}| = 0 \qquad \text{(equação caraterística).}$$

Seja S a matriz mudança de base cujas colunas são as coordenadas dos vetores de uma nova base na base inicial e B a representação matricial de $\varphi : E \to E$ na nova base. Sabemos que $B = S^{-1}AS$ e $\mathbb{I} = S^{-1}S$, pelo que

$$\begin{aligned}
|B - \lambda\mathbb{I}| &= \left|S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S\right| = \left|S^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})\,S\right| = \\
&= \left|S^{-1}\right| |A - \lambda\mathbb{I}| \, |S| = |S|^{-1} |A - \lambda\mathbb{I}| \, |S| = \\
&= |A - \lambda\mathbb{I}|\,,
\end{aligned}$$

acabámos de demonstrar a

Proposition

O polinómio caraterístico é invariante com a representação matricial.

Definition

Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ dizem-se semelhantes quando existe uma matriz invertível $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que $B = S^{-1}AS$.

Semana 12

Acompanhamento pelo livro:

[Mo3] Mo3 Cap.1, *Formas bilineares*, pp. 1–41.

[Mag] Mag Cap.6, *Valores próprios e vetores próprios*, pp. 292–305.

Definition

Seja $\varphi : E \to E$ um endomorfismo e $\lambda \in K$, então

$$V_\lambda = \left\{ \vec{v} \in E : \ \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \right\} \leq E.$$

Definition

Seja λ um valor próprio do endomorfismo $\varphi : E \to E$, definem-se

- a multiplicidade algébrica de λ, $m_a(\lambda)$, como a sua multiplicidade enquanto raiz do polinómio caraterístico;
- a multiplicidade geométrica de λ, $m_g(\lambda)$, como a $\dim(V_\lambda)$.

Proposition

Um endomorfismo $\varphi : E \to E$ admite uma representação matricial diagonal sse existe uma base de E formada por vetores próprios de φ. Vetores próprios $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_j}$ associados, respetivamente, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ valores próprios distintos são independentes e para cada valor próprio λ tem-se que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Obs. λ não é valor próprio sse $m_g(\lambda) = 0$ sse $m_a(\lambda) = 0$; sendo $\varphi : E \to E$ diagonalizável, então $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ para cada valor próprio λ (enuncie a 'recíproca').

Formas Bilineares

Seja E um espaço vetorial real de base fixada $\{\vec{e_i}\}_{1\leq i\leq n}$. Dada uma função $f : E\times E \to \mathbb{R}$, definimos $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ onde $a_{ij} = f(\vec{e_i}, \vec{e_j})$.

Definition

Quando a função $f : E\times E \to \mathbb{R}$ é bilinear, dizemos que ela é uma *forma bilinear sobre E*.

Theorem

A função $f : E\times E \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear sse $f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t AY$, onde X e Y são as matrizes coluna coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ na base fixada.

Theorem

Uma forma bilinear $f : E \times E \to \mathbb{R}$ diz-se:

[(Anti)Simétrica] *simétrica (antissimétrica), i.e., $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$ $(f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{y},\vec{x}))$ sse $A^t = A$ $(A^t = -A)$;*

[Definida] *definida positiva (negativa), i.e., $f(\vec{x},\vec{x}) > 0$ (< 0) para $\vec{x} \neq \vec{0}$ sse todos os valores próprios de A forem estritamente positivos (negativos);*

[Semidefinida] *semidefinida positiva (negativa), i.e., $f(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ (≤ 0), mas, para algum $\vec{x} \neq \vec{0}$ tem-se que $f(\vec{x},\vec{x}) = 0$ sse todos os valores próprios de A forem não-negativos (não-positivos) sendo pelo menos um nulo;*

[Indefinida] *indefinida, i.e., $f(\vec{x},\vec{x})$ assume valores positivos e negativos sse A tiver valores próprios positivos e negativos.*

Proposition

Uma forma bilinear simétrica $f : E \times E \to \mathbb{R}$ *de representação matricial* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}$ *é*

[definição] *definida positiva (negativa) sse todos os seus menores principais forem positivos,* $\Delta_K > 0$ *(resp.,* $(-1)^k \Delta_K > 0$*);*

[semidefinição] *altere-se a anterior 'definição' com a igualdade a zero para algum dos menores principais;*

[indefinição] *casos restantes.*

Mudança de Base

Proposition

Sejam, S a matriz mudança de base de E cujas colunas são as coordenadas dos vetores de uma nova base na base inicial, $\tilde{A}$ e A as representações matriciais da forma bilinear $f : E \times E \to \mathbb{R}$ na nova base e na base inicial, respetivamente. Então, sendo $X = S\tilde{X}$ e $Y = S\tilde{Y}$, tem-se

$$X^t AY = \left(S\tilde{X}\right)^t A \left(S\tilde{Y}\right) = \tilde{X}^t \left(S^t AS\right) \tilde{Y} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A} = S^t A\, S\,.$$

Semana 13

Acompanhamento pelo livro:

[Mo3] ▸ Mo3 Cap.2, *Produtos internos*, pp. 43–61.

[Mag] ▸ Mag Cap.4, *Projeções, comprimento e ortogonalidade*, pp. 163–174.

Produto Interno e Norma

Definition

Uma forma bilinear simétrica definida positiva num espaço vetorial E diz-se um produto interno.

Seja $\cdot : E \times E \to \mathbb{R}$ um produto interno em E, define-se então uma norma (ou comprimento) dos vetores de E:

$$|| \;\; || : E \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \vec{x} \longmapsto ||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\,.$$

Definition

Uma função $|| \ ||: E \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma norma quando verifica os axiomas:

[definida positiva] se $\vec{x} \neq \vec{0}$, então $||\vec{x}|| > 0$;

[positivamente homogénea] se $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in E$, então $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda| \, ||\vec{x}||$;

[desigualdade triangular] se $\vec{x}, \vec{y} \in E$, então $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$.

Definition

Duas normas $|| \ ||_1, || \ ||_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dizem-se equivalentes quando, para constantes $c_1, c_2 > 0$,

$$||\vec{x}||_2 \leq c_1||\vec{x}||_1 \leq c_2||\vec{x}||_2, \qquad \forall \vec{x} \in E.$$

Proposition

Num espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.

Proposition

Uma norma num espaço vetorial E, $|| \ || : E \longrightarrow \mathbb{R}$, provem de um produto interno, $\cdot : E \times E \to \mathbb{R}$, (à custa da fórmula $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$) sse verifica a regra do paralelogramo:

$$||\vec{x} - \vec{y}||^2 + ||\vec{x} + \vec{y}||^2 = 2||\vec{x}||^2 + 2||\vec{y}||^2 .$$

Além disso, o produto interno recupera-se pela expressão

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2^{-1} \left(||\vec{x} + \vec{y}||^2 - ||\vec{x}||^2 - ||\vec{y}||^2 \right) .$$

Medida de Ângulos

Proposition (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dado um produto interno no espaço vetorial E, $\cdot : E \times E \to \mathbb{R}$, verifica-se para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in E$ a desigualdade

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||\,,$$

além disso, a igualdade acontece sse os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são dependentes.

- Mostre que nas propriedades da norma a 'desigualdade triangular' acontece sse os vetores são dependentes.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta que, se $\vec{x}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, então

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||} \leq 1$$

e define-se a medida do ângulo entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por:

Definition

Se $\vec{x}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, então

$$\measuredangle\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \operatorname{arccos}\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||}\right).$$

Semana 14

[Mo3] Mo3 Cap.2, *Produtos internos*, págs. 61–108.

Theorem (Método de ortonormalização de Gram-Schmidt)

Em todo o espaço vetorial real de dimensão finita com um produto interno fixado (i.e., espaço euclideano*) existem bases ortonormadas.*

Produto Externo

Definimos o produto externo em $\mathbb{R}^3$, exclusivamente, e supondo fixada uma base ortonormada (base o.n.):

Definition

Sendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em coordenadas numa base o.n. de $\mathbb{R}^3$, então define-se o produto externo $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, nessa base, por

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Proposition

O produto externo em $\mathbb{R}^3$ verifica as seguintes propriedades:

[antissimetria] $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$;

[bilinearidade] *fixando* $\vec{y}$, *então* $\vec{x} \longmapsto \vec{x} \times \vec{y}$ *é linear;*

[ortogonalidade] $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ *e* $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$;

[área paralelogramo] $||\vec{x} \times \vec{y}|| = ||\vec{x}||\,||\vec{y}|| \sin(\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}))$.

Proposition

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, então

a) $||\vec{x} \times \vec{y}|| = \sqrt{||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}$;

b) $\vec{x}, \vec{y}$ *são dependentes sse* $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$;

c) $\vec{x}, \vec{y}$ *são independentes sse também o são* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$;

d) *sendo* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *independentes, se* $\vec{n} \perp \vec{x}$ *e* $\vec{n} \perp \vec{y}$, *então* $\vec{n} = \lambda\, \vec{x} \times \vec{y}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Enuncie em fórmulas matemáticas a 'regra do saca-rolhas'.
- Enuncie propriedades do 'produto misto' de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, definido por $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$. Interprete-o geometricamente.

Método de Estudo

Exemplo: Mostrar que a solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+w=z+1 \\ x-y+z=w \\ 2y-z+x=1 \\ -y+x-2z=1 \end{cases},$$

é dada por $(x,y,z,w)=(1/2,1/10,-3/10,1/10)$.

Votos

Votos de ótimo estudo e bom sucesso.

Ao vosso melhor dispor,

Joaquim M. C. Correia