Capítulo 3

Derivadas de funções vectoriais

3.1 Derivada direccional, diferencial e matriz Jacobiana

A teoria da derivação para funções vectoriais é uma extensão directa da das funções escalares.

Definição 3.1 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ *e* $\mathbf{v}$ *um vector qualquer de* $\mathbb{R}^n$. *Se* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *diz-se que* f *tem* derivada em $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{v}$ *se existem as derivadas* $f_k'(\mathbf{a}; \mathbf{v})$ *para qualquer* $k \in \{1, 2, ..., m\}$, *e escreve-se*

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{v}) = \left(f_1'(\mathbf{a}; \mathbf{v}), f_2'(\mathbf{a}; \mathbf{v}), ..., f_m'(\mathbf{a}; \mathbf{v})\right).$$

Observação 3.2 *Qualquer que seja o ponto* $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ *e o vector* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *a derivada* $f'(\mathbf{a}; \mathbf{v})$ *é sempre um vector de* $\mathbb{R}^m$.

Observação 3.3 *Evitando a definição rigorosa de diferenciabilidade no caso vectorial notamos que uma aplicação* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *com* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, *é* diferenciável *(resp.* continuamente diferenciável*) num ponto* $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$ *sse todas as funções* $f_1, f_2, ..., f_m$ *são diferenciáveis (resp. continuamente diferenciáveis) em* $\mathbf{a}$, *e o diferencial de* f *em* $\mathbf{a}$ *é uma aplicação linear* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *que a cada* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *associa o vector*

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = (df_1(\mathbf{a})(\mathbf{v}), df_2(\mathbf{a})(\mathbf{v}), ..., df_m(\mathbf{a})(\mathbf{v})).$$

Como qualquer operador linear de $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$ *se pode definir à custa de uma matriz* $\mathcal{M}$ *de ordem* $m \times n$, *podemos representar*

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \mathcal{M} \cdot \mathbf{v},$$

onde o ponto significa o produto da matriz pelo vector. Veremos abaixo que $\mathcal{M}$ *é a matriz das derivadas parciais* $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $k = 1, 2, ..., m$ *e* $i = 1, 2, ..., n$.

Chegamos assim à seguinte definição

Definição 3.4 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$. *Se existem as derivadas parciais* $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ *para todo* $k \in \{1, 2, ..., m\}$ *e* $i \in \{1, 2, ..., n\}$, *a matriz constituída pelas* n *derivadas parciais de* *cada uma das m funções escalares que compõem f, calculadas em* $\mathbf{a}$, *chama-se* matriz Jacobiana *(ou* matriz de Jacobi*) de f em* $\mathbf{a}$ *e denota-se por* $\operatorname{Jac} f(\mathbf{a})$:

$$\operatorname{Jac} f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Se $n = m$ chama-se Jacobiano *ao determinante da matriz Jacobiana, e denota-se por $J(f)$ ou* $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

Observamos que a linha i da matriz $\operatorname{Jac} f(\mathbf{a})$ é o gradiente da função f_i calculado em $\mathbf{a}$.

Da mesma forma que tinhamos para o gradiente no caso de funções escalares, temos agora o seguinte para a matriz Jacobiana

Observação 3.5 *Se a aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, é diferenciável em* $\mathbf{a} \in \operatorname{int} D$, *então*

(i) a derivada $f'(\mathbf{a}; \mathbf{v})$ existe para qualquer $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ e tem-se

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{v}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \operatorname{Jac} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v},$$

onde $\operatorname{Jac} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ *representa o produto da matriz* $\operatorname{Jac} f(\mathbf{a})$ *pelo vector* $\mathbf{v}$.

(ii) f é contínua em $\mathbf{a}$.

3.2 Derivada da aplicação composta

Teorema 3.6 *Sejam $D \subset \mathbb{R}^p$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : D \to \mathbb{R}^m$ e $g : W \to \mathbb{R}^p$ aplicações tais que $g(W) \subset D$. Se g é diferenciável em $\mathbf{a} \in W$ e f é diferenciável em $g(\mathbf{a})$, então a aplicação composta $\varphi : W \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = (f \circ g)(\mathbf{x})$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e tem-se*

$$\operatorname{Jac} \varphi(\mathbf{a}) = \operatorname{Jac} f(g(\mathbf{a})) \operatorname{Jac} g(\mathbf{a}), \tag{3.1}$$

onde a parte direita da igualdade representa o produto de matrizes.

Demonstração:

Representamos a função vectorial φ pelas suas coordenadas $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. A diferenciabilidade de todas as funções

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n))$$

sai da diferenciabilidade da função composta (ver Secção 2.4). Para calcular uma das derivadas parciais de φ_i usamos a regra da cadeia (ver (2.18)):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial g_k}(g(\mathbf{a})) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

e vemos que na parte direita desta fórmula está o produto da i-ésima linha da matriz Jacobiana de f calculada em $g(\mathbf{a})$ pela j-ésima coluna da matriz Jacobiana de g calculada em $\mathbf{a}$. Daqui sai a fórmula (3.1). ■

Exemplo 3.7 *Consideremos as funções* $f(u,v) = (\ln u, ve^{-u})$ *e* $g(x,y,z) = \left(x^2+1, y+z\right)$. *Temos*

$$D_f =]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}^3 \quad e \quad D_{f\circ g} = \mathbb{R}^3.$$

A matriz Jacobiana de f *num ponto* $(u,v) \in D_f$ *é*

$$\operatorname{Jac} f(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ -ve^{-u} & e^{-u} \end{bmatrix}.$$

A matriz Jacobiana de f *num ponto* $g(x,y,z)$ *é*

$$\operatorname{Jac} f(g(x,y,z)) = \operatorname{Jac} f\left(x^2+1, y+z\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & 0 \\ -(y+z)\,e^{-\left(x^2+1\right)} & e^{-\left(x^2+1\right)} \end{bmatrix}.$$

A matriz Jacobiana de g *num ponto* (x,y,z) *é*

$$\operatorname{Jac} g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz Jacobiana de $f\circ g$ *num ponto* (x,y,z) *é o produto das duas últimas matrizes:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Jac} f(g(x,y,t)) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & 0 \\ -(y+z)\,e^{-\left(x^2+1\right)} & e^{-\left(x^2+1\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+1} & 0 & 0 \\ -2x(y+z)\,e^{-\left(x^2+1\right)} & e^{-\left(x^2+1\right)} & e^{-\left(x^2+1\right)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.3 Teorema da aplicação implícita

O Teorema da função implícita (Teorema 2.32) pode ser extendido a funções vectoriais. Nomeadamente,

Teorema 3.8 *Se* $F_i : X\times Y \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,m$, *com* $X\subset\mathbb{R}^n$ *e* $Y\subset\mathbb{R}^m$ *conjuntos abertos, são funções continuamente diferenciáveis numa vizinhança de um ponto* $\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0\right)\in X\times Y$, *tais que* $F_i\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0\right) = 0$ *para todo* $i\in\{1,2,...,m\}$, *e*

$$\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0\right) \neq 0,$$

então existem vizinhanças $U\left(\mathbf{x}^0\right)$ *e* $V\left(\mathbf{y}^0\right)$, *nos espaços* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$, *respectivamente, tais que para cada* $\mathbf{x}\in U\left(\mathbf{x}^0\right)$ *existe um e um só* $\mathbf{y}\in V\left(\mathbf{y}^0\right)$ *tal que* $F_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, $i = 1,2,...,m$. *Se* f *é a função definida em* $U\left(\mathbf{x}^0\right)$ *tal que a cada* $\mathbf{x}\in U\left(\mathbf{x}^0\right)$ *associa esse único vector* $\mathbf{y}$ *(i.e.,* $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1,2,...,m$*), então* f *é uma função continuamente diferenciável,* $\mathbf{y}^0 = f\left(\mathbf{x}^0\right)$, *e a matriz Jacobiana de* f *em* $\mathbf{x}^0$ *pode ser encontrada aplicando a regra da cadeia às equações*

$$F_i(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n)) = 0.$$

Exemplo 3.9 $(n = m = 2)$ *Mostremos que as equações*

$$x^3u + yv^3 = 2 \quad e \quad xu^3 + y^3v = 2$$

definem u e v implicitamente como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(1,1,1,1)$, isto é que a cada par (x,y) próximo de $(1,1)$ corresponde um único (u,v):

$$\begin{aligned} u &= u(x,y)\,; \\ v &= v(x,y)\,, \end{aligned}$$

na vizinhança de $(1,1)$ tal que o quadruplo (x,y,u,v) satisfaz às equações acima. Além disso, calculemos $\operatorname{Jac} f(x,y)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$, onde $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

Seja $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y,u,v) = \left(x^3u + yv^3 - 2, xu^3 + y^3v - 2\right),$$

e sejam

$$F_1(x,y,u,v) = x^3u + yv^3 - 2 \quad e \quad F_2(x,y,u,v) = xu^3 + y^3v - 2.$$

A função F é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^{2+2}$ (justifique!), $F(1,1,1,1) = 0$. Determinemos o Jacobiano da aplicação F relativamente às variáveis u e v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{array} \right|_{(1,1,1,1)} \\ &= \left| \begin{array}{cc} x^3 & 3yv^2 \\ 3xu^2 & y^3 \end{array} \right|_{(1,1,1,1)} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = -8 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema da função implícita aplica-se e $(u,v) = f(x,y)$ nalguma vizinhança de $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$.

Determinemos agora $\operatorname{Jac} f(x,y)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$ aplicando a regra da cadeia às equações

$$F_1(x,y,u,v) = x^3u + yv^3 - 2 = 0 \quad e \quad F_2(x,y,u,v) = xu^3 + y^3v - 2 = 0,$$

onde $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$, ou seja, às equações

$$x^3u(x,y) + yv^3(x,y) - 2 = 0 \quad e \quad xu^3(x,y) + y^3v(x,y) - 2 = 0. \tag{3.2}$$

Derivando estas equações em ordem a x obtemos o seguinte sistema de duas equações lineares:

$$\begin{cases} 3x^2u + x^3\frac{\partial u}{\partial x} + 3yv^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \\ u^3 + 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Tendo em conta que $u(1,1) = v(1,1) = 1$, resulta que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + 3\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -3; \\ 3\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -1. \end{cases}$$

Analogamente, derivando as equações em (3.2) em ordem a y e procedendo de forma análoga, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -1; \\ \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\operatorname{Jac} f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 3.10 *Podemos obter uma fórmula para a matriz Jacobiana da aplicação $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, definida implicitamente à custa da equação $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$, através do produto de matrizes:*

$$\operatorname{Jac} f\left(\mathbf{x}^0\right) = -\left(\operatorname{Jac}_{\mathbf{y}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)\right)^{-1} \operatorname{Jac}_{\mathbf{x}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right), \tag{3.3}$$

onde

$$\operatorname{Jac}_{\mathbf{y}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right) \end{bmatrix},$$

e $\operatorname{Jac}_{\mathbf{x}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)$ define-se da mesma forma mas relativamente às variáveis $x_1, ..., x_n$, e $\left(\operatorname{Jac}_{\mathbf{y}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)\right)^{-1}$ representa a inversa da matriz quadrada $\operatorname{Jac}_{\mathbf{y}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)$. Notemos ainda que as matrizes $\operatorname{Jac}_{\mathbf{x}} F\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)$ e $\operatorname{Jac} f\left(\mathbf{x}^0\right)$ podem não ser quadradas (o que acontece quando $n \neq m$).

Assim, a matriz $\operatorname{Jac} f(1,1)$ do exemplo anterior pode ser determinada pela fórmula (3.3), nomeadamente, como

$$\left(\operatorname{Jac}_{\mathbf{y}} F(1,1,1,1)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

e

$$\operatorname{Jac}_{\mathbf{x}} F(1,1,1,1) = \begin{bmatrix} 3x^2u & v^3 \\ u^3 & 3y^3v \end{bmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$\operatorname{Jac} f(1,1) = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4 Aplicação inversa

Se $\mathcal{I}$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$, isto é $\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\operatorname{Jac} \mathcal{I}(\mathbf{x}) = I_n$, onde I_n representa a matriz identidade de ordem n, e portanto o seu Jacobiano é igual a 1.

Agora consideremos uma aplicação $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f(D) = E$, onde $D, E \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos. Suponhamos que f tem inversa $g : E \to D$ diferenciável, ou seja g é tal que

$$g \circ f = \mathcal{I} = f \circ g.$$

Então $\operatorname{Jac}(g \circ f) = \operatorname{Jac} g \operatorname{Jac} f = I_n$, donde sai que os Jacobianos de ambas as aplicações f e g são diferentes de zero. Por outro lado, se a aplicação f é diferenciável num ponto $\mathbf{x}^0 \in D$ e $J(f)\left(\mathbf{x}^0\right) \neq 0$ então existe uma vizinhança do ponto $\mathbf{y}^0 = f\left(\mathbf{x}^0\right)$ onde a função inversa g está bem definida, é contínua e diferenciável. Se isto acontece em todos os pontos do conjunto aberto D então a aplicação f diz-se um *difeomorfismo* em D. A matriz Jacobiana da aplicação inversa g é a inversa da matriz Jacobiana de f:

$$\operatorname{Jac} g\left(\mathbf{y}^0\right) = (\operatorname{Jac} f)^{-1}\left(\mathbf{x}^0\right).$$