# Ficha 5

## Funções implícitas. Aplicações diferenciáveis

1. Considere a equação $(x+1)^2 y - xy^2 = 4$. Verifique se $y$ se define implicitamente como função de $x$ numa vizinhança de cada um dos pontos seguintes:

   (a) $(-1,2)$;

   (b) $(2,1)$;

   (c) $(1,2)$.

2. Mostre que $F(x,y) = x^3y + y^3x - 2$ define $y$ como função de $x$ numa vizinhança de $(1,1)$. Calcule a sua derivada em $x=1$.

3. Mostre que em torno do ponto $(0,-1)$ a função $y = y(x)$ univocamente definida implicitamente pela equação

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$$

   existe, contínua e diferenciável. Determine a sua derivada.

4. Considere a equação

$$x^3 + y^3 = 3xy + 3.$$

   Verifique se numa vizinhança do ponto $(1,2)$ a equação dada define implicitamente $y$ como uma função $f(x)$. Em caso afirmativo determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,2)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-2y)^2$ e a equação que resulta de igualar $f(x,y) = 0$. Verifique que, embora a derivada em ordem a $y$ seja igual a zero em $(0,0)$, a equação define $y$ implicitamente como função de $x$.

6. Mostra que a equação $x+y+z = \sin(xyz)$ define $z$ implicitamente como uma função de duas variáveis $x$ e $y$ numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$. Calcule as derivadas parciais de $z$ no ponto $(1,0)$.

7. Utilize o *Teorema da função implícita* para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ nos pontos $(x,y)$ onde tal teorema é aplicável

   (a) $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$;

   (b) $xyz = \cos(x+y+z)$;

(c) $xe^y + yz + ze^x = 0$;

(d) $\ln(x + yz) = 1 + xy^2z^3$.

8. Verifique se numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$ a equação $x^2z^2+xy^2-z^3+4yz-5 = 0$ define implicitamente $z$ como função de $x$ e $y$. Em caso afirmativo, calcule as derivadas parciais de $z$ no ponto $(1, 1)$.

9. Suponha que a função $w = f(u, v)$ é diferenciável e que a equação
$$f\left(\frac{z}{y}, \frac{x}{y}\right) = 0, \quad y \neq 0,$$
define $x$ implicitamente como função de $y$ e $z$, seja $x = g(y, z)$. Demonstre a igualdade
$$y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = g$$
nos pontos onde $\partial f/\partial v \neq 0$.

10. Mostre que a equação $x^2+2y^2+3z^2 = 1$ define implicitamente $z$ como função $f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

    Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ nesse ponto.

11. Verifique diferenciabilidade de aplicações

    (a) $\varphi(x, y) = (xe^y, \sqrt[3]{x} + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

    (b) $f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

    (c) $g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$;

    (d) $h(u, v, w) = (f \circ g)(u, v, w)$.

    Determine as *matrizes de Jacobi* de aplicações de alíneas (a)-(c) e calcule os *jacobianos* de aplicações de alíneas (a) e (b).

12. Considere as aplicações $f$ e $g$ definidas por
$$g(u, v) = (u + v, u - v, uv), \qquad f(x, y, z) = \left(xy + z, \frac{x^2 - 4z}{y}\right).$$

    (a) Determine a função composta $f \circ g$ e o seu domínio.

    (b) Determine as *matrizes jacobianas* de funções $f$, $g$ e $f \circ g$ em todos os pontos onde estão definidas.

13. Considere o sistema
$$\begin{cases} x + 2x^2y + z = 0 \\ y - e^x = 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema dado define implicitamente $x$ e $y$ como funções de $z$ numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

   (b) Calcule as derivadas destas funções na origem.

   (c) Indique os pontos $(x, y, z)$ que verificam o sistema dado, em torno dos quais não podemos garantir pelo teorema da função implícita a existência de funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$ univocamente definidas.

14. Considere o sistema
$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0, \\ x^2 - y + u - v^2 = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema dado pode ser univocamente resolvido relativamente as variáveis $u$ e $v$ numa bola centrada em $(0, 0)$ e que as funções $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são diferenciáveis nessa bola.

   (b) Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$.

   (c) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u, v) = (v \cos u, u \sin v)$. Calcule
$$\operatorname{Jac}(g \circ f)[(0, 0)]$$
   onde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

15. Mostre que a aplicação vectorial definida com as equações
$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \end{cases}$$
é invertível em vizinhança do ponto $(1, 1)$. Encontre nesse ponto as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ sendo $z = 2u + v$ e as funções $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ implicitamente definidas pelo sistema de equações acima.

16. Considere a função $z = z(x, y)$ definida parametricamente com as equações
$$\begin{cases} x = u + v; \\ y = u^2 + v^2; \\ z = u^3 + v^3, \end{cases}$$
$(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que a respectiva superfície (o gráfico da função $z = z(x, y)$) passa através o ponto $(0, 2, 0)$ e que nalguma vizinhança desse ponto a função $z = z(x, y)$ é bem definida e continuamente diferenciável. Encontre as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e escreva a equação do plano tangente à superfície no ponto $(0, 2, 0)$.

17. Mostre que o sistema das equações

$$\begin{cases} u \sin v = x + y \sin z, \\ v \sin u = x + z \sin y \end{cases}$$

admete uma solução única em relação às variáveis $u$ e $v$ numa vizinhança do ponto $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e que as funções $u = u\,(x, y, z)$ e $v = v\,(x, y, z)$ são continuamente diferenciáveis em torno desse ponto. Determine a matriz de Jacobi da aplicação $(x, y, z) \mapsto (u, v)$ no ponto $M_0$.