Análise Matemática II - Ficha 2

Topologia do espaço $\mathbb{R}^n$. Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Domínios e gráficos

1. Em cada uma das alíneas S representa o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verificam as desigualdades dadas. Esboce S no plano, diga e justifique se S é aberto ou fechado. Determine a fronteira de S e indique, justificando, um ponto interior, um ponto fronteiro e um punto de acumulação de S. Verifique também se S é um conjunto compacto.

   (a) $x^2 + y^2 > 1$;

   (b) $1 \leq x^2 + y^2 < 2$;

   (c) $x^2 + y^2 \leq 2x$;

   (d) $3x^2 + 2y^2 < 6$;

   (e) $1 \leq x \leq 2$ e $3 < y < 4$;

   (f) $y = x^2$;

   (g) $y < x^2$ e $|x| < 2$;

   (h) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$;

   (i) $x^2 + y^2 - 2y \geq 0$ e $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

2. Em cada uma das alíneas S representa o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verificam as desigualdades dadas. Esboce S, e diga justificando se S é aberto.

   (a) $z^2 - x^2 - y^2 > 1$;

   (b) $|x| \leq 1$, $|y| < 1$ e $|z| < 1$;

   (c) $x + y + z < 1$;

   (d) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $-3 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Verifique se o conjunto abaixo é topologicamente conexo e/ou conexo por arcos

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

4. Determine, interpretando geometricamente, o domínio e os conjuntos de nível das funções seguintes

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$;

(b) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$;

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \frac{1}{y}\cos x^2$;

(e) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

5. Determine o contradomínio das funções e verifique se é limitado e fechado. Além disso, construa os gráficos das funções das alíneas (a) e (b).

   (a) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$;

   (b) $f(x,y) = 3-x-y$;

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6. Encontre o domínio da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida abaixo e desenhe-o no plano

$$f(x,y) = \left(\ln\left(1-x^2-y^2\right), \sqrt{x^2-2x+y^2}\right).$$