Análise Matemática II - Ficha 3

Limite e continuidade de funções de várias variáveis

1. Mostre que o limite seguinte não existe

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}.$$

2. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{x^2y+y^2}{x^2+y^2}.$$

   (a) Mostre que as funções dadas não têm limite quando $(x,y) \to (0,0)$.

   (b) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f+g)(x,y)$.

3. Usando um dos limites notáveis mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right)}{x^2+y^2} = \pi.$$

4. Seja

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{sempre que} \quad x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0.$$

   Mostre que

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right) = 0,$$

   mas que $f(x,y)$ não tem limite quando $(x,y) \to (0,0)$ (**Sugestão**: examine f ao longo da recta $y = x$).

5. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

   Calcule, caso existam, os limites iterados de f em $(0,0)$. Mostre que $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Que conclusão pode tirar daqui?

6. Estude o comportamento da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2y - 2xy - xy^2 + y^2 + y}{x^2 - 2x + y^2 + 1}, \frac{y - xy}{x^2 - 2x + y^2 + 1} \right)$$

quando $(x,y) \to (1,0)$.

7. Mostre que a função $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $p_i(\mathbf{x}) = x_i$, para $i = 1, 2, ..., n$, chamada *i-ésima função coordenada*, é contínua em qualquer ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

8. Escreva $g(f(x,y))$ em termos de x e y, determine o domínio da função composta resultante e verifique onde é contínua.

   (a) $f(x,y) = xe^y, \ \ g(t) = 3t^2 + t + 1$;

   (b) $f(x,y) = y - 4x^2, \ \ g(t) = \sin\sqrt{t}$.

9. Mostre que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = e^{x^3+5xy+y^2}$ é contínua em todo o ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

10. Verifique se as aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ seguintes são contínuas em todo o seu domínio

    (a) $f(x,y) = \left(\frac{xy}{1-x^2-y^2}, \frac{x}{\sqrt{y^2-x}} \right)$;

    (b) $f(x,y,z) = \left(\ln(x^2+y^2+z^2-4), \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}} \right)$;

    (c) $h(x,y) = f(g(x,y))$, sendo $g(x,y) = x^2 - y^2$ e $f(t) = \frac{t^2-4}{t}$;

    (d) $h(x,y) = f(g(x,y))$, sendo $g(x,y) = 3x + 2y - 4$ e $f(t) = \ln(t+5)$.

11. Em cada uma das alíneas que se segue diga, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$. No caso afirmativo, diga qual é o valor que se deve atribuir a $f(0,0)$ para que tal aconteça.

    (a) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

    (b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

    (c) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^4+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

    (d) $f(x,y) = \frac{2x+3y}{x-y}$, se $x \neq y$.