

Capítulo 5

Cálculo integral. Integrais duplos e triplos

Neste capítulo generalizamos o conceito de integral $\int_a^b f(x) dx$ dado na Análise Matemática I. O intervalo unidimensional $[a, b]$ será substituído por um conjunto bidimensional Q , chamado *região de integração* e a *função integranda* por uma função escalar f definida e limitada em Q . O integral resultante chama-se *integral duplo* e representa-se por

$$\iint_Q f dA \quad \text{ou} \quad \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

Se Q for um subconjunto de \mathbb{R}^3 o integral chama-se *triplo* e denota-se por

$$\iiint_Q f dV \quad \text{ou} \quad \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz$$

Chegamos à noção de integral duplo quando queremos determinar o volume de um sólido (analogamente, como chegámos à noção do integral simples $\int_a^b f(x) dx$ para determinar a área de um conjunto no plano).

Primeiro temos que definir rigorosamente o que é o volume de um sólido. Com este objectivo vamos introduzir um conceito universal (chamado *medida de Jordan*) que dá um sentido rigoroso não só ao volume mas também à área (em \mathbb{R}^2) e pode ser generalizado para qualquer espaço \mathbb{R}^n .

Por simplicidade consideramos o caso \mathbb{R}^2 . As alterações que têm de ser feitas no caso \mathbb{R}^n (incluindo o caso $n = 3$) são bastante óbvias. No entanto, quando for necessário indicamo-las explicitamente.

5.1 Medida de Jordan. Definição e propriedades

Fixemos $k = 0, 1, 2, \dots$ e consideremos uma malha em \mathbb{R}^2 formada por quadrados que medem de lado $\frac{1}{2^k}$, com vértices em pontos $\left(\frac{i}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right)$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Seja T_k o conjunto de todos os quadrados que constituem a referida malha. A área de qualquer elemento $Q \in T_k$, denotada

por $\mu_2(Q)$, é, portanto, igual a $\left(\frac{1}{2^k}\right)^2$. Além disso, qualquer conjunto que se represente como a reunião de um número finito de quadrados

$$Q = \bigcup_{i=1}^p Q_p, \quad Q_p \in T_k, \quad Q_p \neq Q_q \text{ se } p \neq q,$$

tem área

$$\mu_2(Q) = \sum_{i=1}^p \mu_2(Q_p) = p \left(\frac{1}{2^k}\right)^2.$$

Observemos que em \mathbb{R}^3 esta malha é formada por cubos com lado $\frac{1}{2^k}$ e em vez de "área" utilizamos a palavra "volume". Assim, está definido o volume de um cubo $Q \in T_k$:

$$\mu_3(Q) = \left(\frac{1}{2^k}\right)^3$$

e da reunião finita de cubos:

$$\mu_3\left(\bigcup_{i=1}^p Q_p\right) = \sum_{i=1}^p \mu_3(Q_p) = p \left(\frac{1}{2^k}\right)^3.$$

Generalizando para \mathbb{R}^n , definimos a malha como o conjunto de "*cubos n -dimensionais*"

$$\left\{x = (x_1, \dots, x_n) : \frac{i_1}{2^k} \leq x_1 \leq \frac{i_1+1}{2^k}, \dots, \frac{i_n}{2^k} \leq x_n \leq \frac{i_n+1}{2^k}\right\} \quad (5.1)$$

onde i_1, \dots, i_n são números inteiros arbitrários e "o volume n -dimensional" de um cubo (5.1):

$$\mu_n(Q) = \left(\frac{1}{2^k}\right)^n.$$

Agora seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um qualquer conjunto não-vazio e limitado. Considerando a malha acima, definimos as famílias de quadrados

$$T_n^-(D) = \{Q \in T_n : Q \subset D\} \quad \text{e} \quad T_n^+(D) = \{Q \in T_n : Q \cap D \neq \emptyset\}.$$

Tem-se $T_k^-(D) \subset T_k^+(D)$ e

$$\bigcup_{Q \in T_k^-(D)} Q \subset D \subset \bigcup_{Q \in T_k^+(D)} Q.$$

Como D é limitado estas uniões são finitas. Conforme foi dito acima podemos determinar as suas áreas

$$\underline{S}_k(D) := \mu_2\left(\bigcup_{Q \in T_k^-(D)} Q\right) = \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 N_1$$

e

$$\overline{S}_k(D) := \mu_2\left(\bigcup_{Q \in T_k^+(D)} Q\right) = \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 N_2,$$

onde N_1 é o número de quadrados $Q \in T_k$ que estão contidos em D e N_2 é o número de quadrados $Q \in T_k$ que intersectam D .

É fácil perceber que a sucessão numérica $(\underline{S}_n(D))$ é crescente e majorada (uma vez que D é limitado). Logo, pelo Teorema de Weierstrass, a sucessão $(\underline{S}_n(D))$ converge. O seu limite costuma ser chamado *medida interior de Jordan* de D e denotado por $\mu_*(D)$. Analogamente, a sucessão $(\overline{S}_n(D))$ é decrescente e minorada (porque é formada por números não negativos). Assim, esta sucessão também converge para um número $\mu^*(D)$ chamado *medida exterior de Jordan* de D . Tem-se sempre

$$\mu_*(D) \leq \mu^*(D).$$

A desigualdade contrária pode falhar, como acontece no exemplo seguinte.

Exemplo 5.1 *Seja D o conjunto de todos os pontos $(p, q) \in [0, 1] \times [0, 1]$ com coordenadas racionais. Neste caso, para qualquer $k = 0, 1, 2, \dots$ não existe nenhum quadrado $Q \in T_k$ que esteja contido em D (porque $\text{int } D = \emptyset$). Logo $\underline{S}_k(D) = 0, \forall k$. Por outro lado, qualquer quadrado $Q \in T_{nk}$ que intersecta $[0, 1] \times [0, 1]$ contém também pontos de D . Assim, $\overline{S}_k(D)$ é igual à soma das áreas de todos estes quadrados, isto é, é igual à área de todo o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Passando ao limite, temos $\mu_*(D) = 0$ enquanto que $\mu^*(D) = 1$.*

Definição 5.2 *O conjunto limitado $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se Jordan mensurável se*

$$\mu_*(D) = \mu^*(D)$$

e o valor comum acima chama-se medida de Jordan de D , e denota-se por $\mu_2(D)$.

Observe que os elementos do conjunto T_k são Jordan mensuráveis.

Assim, definimos, rigorosamente, *área* de um conjunto limitado arbitrário no plano (destacando a classe de conjuntos para os quais tal definição pode ser dada).

Raciocinando da mesma forma no espaço \mathbb{R}^n chegamos à noção de conjunto Jordan mensurável em \mathbb{R}^n e de medida de Jordan $\mu_n(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$. A medida de Jordan três-dimensional $\mu_3(D)$ chama-se também *volume* de D . Se o espaço \mathbb{R}^n está fixo e não há perigo de confusão, em vez de $\mu_n(Q)$ escrevemos simplesmente $\mu(Q)$.

Passemos ao estudo das propriedades dos conjuntos mensuráveis e da medida de Jordan. Em tudo o que se segue consideramos o espaço \mathbb{R}^n , para um qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Comecemos pelas propriedades das medidas exterior e interior de Jordan:

Proposição 5.3 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos limitados. Então*

- (i) $0 \leq \mu_*(A) < +\infty$ e $0 \leq \mu^*(A) < +\infty$;
- (ii) se $A \subset B$ então $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (iii) $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$;
- (iv) se A e B são disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), então $\mu_*(A \cup B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B)$.

Demonstração.

As propriedades (i) e (ii) são óbvias (saem directamente da definição).

Para ver a desigualdade em (iii) (chamada *semi-aditividade* da medida exterior) observamos que, para quaisquer $k = 0, 1, 2, \dots$ e $Q \in T_k$, a intersecção $Q \cap (A \cup B)$ não é vazia sse $Q \cap A \neq \emptyset$ ou $Q \cap B \neq \emptyset$, logo

$$T_k^+(A \cup B) = T_k^+(A) \cup T_k^+(B).$$

Se denotarmos por N (N_1 ou N_2) o número dos elementos da família $T_k^+(A \cup B)$ ($T_k^+(A)$ ou $T_k^+(B)$, resp.) então temos, obviamente, $N \leq N_1 + N_2$, donde

$$\overline{S}_k(A \cup B) \leq \overline{S}_k(A) + \overline{S}_k(B).$$

Passando ao limite nesta desigualdade por $k \rightarrow \infty$ chegamos a (iii).

Sejam agora A e B conjuntos disjuntos. Então qualquer $Q \in T_k^-(A) \cup T_k^-(B)$ está contido em $A \cup B$ e não pode estar contido em $A \cap B$. Assim o número de elementos em $T_k^-(A \cup B)$ não pode ser inferior à soma do números de elementos em $T_k^-(A)$ e em $T_k^-(B)$ (note que alguns dos cubos podem estar contidos na reunião $A \cup B$, intersectando A e B ao mesmo tempo). Logo

$$\underline{S}_k(A \cup B) \geq \underline{S}_k(A) + \underline{S}_k(B)$$

e passando ao limite por $k \rightarrow \infty$ chegamos à desigualdade em (iv). ■

Da Proposição 5.3 é facil deduzir as propriedades dos conjuntos Jordan mensuráveis.

Proposição 5.4 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos Jordan mensuráveis. Tem-se*

- (i) $0 \leq \mu(A) < +\infty$;
- (ii) se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- (iii) se A e B são disjuntos, então o conjunto $A \cup B$ é Jordan mensurável e $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

A última propriedade diz-se *aditividade da medida de Jordan*.

Demonstração:

As propriedades (i) e (ii) saem directamente das respectivas alíneas (i) e (ii) da Proposição 5.3.

Se os conjuntos A e B são disjuntos, então usando as alíneas (iii) e (iv) da proposição anterior e a mensurabilidade de A e B temos

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \leq \mu_*(A \cup B) \leq \mu^*(A \cup B)$$

donde sai a mensurabilidade de $A \cup B$ e a igualdade $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. ■

Observação 5.5 *É facil ver que a condição $A \cap B = \emptyset$ em (iii) pode ser substituída por $\mu(A \cap B) = 0$.*

Esta propriedade pode ser generalizada a qualquer união finita de conjuntos Jordan mensuráveis. Nomeadamente, se A_i , $i = 1, \dots, k$, são conjuntos Jordan mensuráveis e tais que $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, $i \neq j$, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i). \quad (5.2)$$

A igualdade (5.2) costuma ser chamada aditividade finita da medida de Jordan.

Exercício 5.6 Mostre que, em \mathbb{R}^2 , qualquer retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados é um conjunto Jordan mensurável, e a sua medida (ou seja, a sua área) é o produto dos comprimentos dos lados.

Proposição 5.7 Qualquer subconjunto dum conjunto de medida nula é Jordan mensurável e a sua medida também igual a zero.

Demonstração.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Jordan mensurável com $\mu(A) = 0$. Então para qualquer $B \subset A$ temos (ver (i) e (ii) da Proposição 5.3)

$$0 \leq \mu_*(B) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0.$$

Logo B é mensurável e $\mu(B) = 0$. ■

Por convenção pomos que $\mu(\emptyset) = 0$ sendo o conjunto vazio Jordan mensurável.

Observação 5.8 Um exemplo simples de um conjunto não vazio Jordan mensurável e com medida nula é a fronteira de qualquer cubo n -dimensional $Q \in T_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (naturalmente, em \mathbb{R}^n).

Mostremos isto no caso $n = 2$ (para n arbitrário mostra-se de forma análoga). A fronteira dum cubo (quadrado neste caso) consiste em quatro segmentos de forma

$$I_1 = \left\{ \left(\frac{i}{2^k}, t \right) : \frac{j-1}{2^k} \leq t \leq \frac{j}{2^k} \right\} \quad \text{ou} \quad I_2 = \left\{ \left(t, \frac{j}{2^k} \right) : \frac{i-1}{2^k} \leq t \leq \frac{i}{2^k} \right\}$$

para alguns inteiros i e j . Dado $m > k$ arbitrário contamos o número de quadrados $Q \in T_m$ que tocam no segmento I_1 (ou I_2), isto é têm uma aresta ou um vértice comum. O número de tais quadrados será obviamente

$$\left(\frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^m}} + 2 \right) \times 2 = 2^{m-k+1} + 4.$$

Logo, a área total de todos esses quadrados (área de $\bigcup_{Q \in T_m^+(I_i)} Q$) é igual a

$$\left(2^{m-k+1} + 4 \right) \times \left(\frac{1}{2^m} \right)^2 = \frac{1}{2^{m+k-1}} + \frac{1}{2^{2(m-1)}},$$

e tende a zero quando $m \rightarrow \infty$. Isto significa que $\mu^*(I_i) = 0$, $i = 1, 2$.

Teorema 5.9 (Critério de mensurabilidade de Jordan) *Um subconjunto D limitado de \mathbb{R}^n é Jordan mensurável se e só se a sua fronteira ∂D é Jordan mensurável e $\mu(\partial D) = 0$.*

Demonstração:

Fixemos $k = 0, 1, 2, \dots$ e denotemos por $T_k^0(D)$ a família de todos os cubos n -dimensionais $Q \in T_k^+(D) \setminus T_k^-(D)$, isto é

$$Q \in T_k^0(D) \quad \text{sse} \quad Q \cap D \neq \emptyset \quad \text{e} \quad Q \cap (R^n \setminus D) \neq \emptyset.$$

Agora, seja Z a reunião das fronteiras de todos os cubos $Q \in T_k^+(D)$. Como D é limitado, apenas um número finito de cubos intersectam D . Então, pela Observação 5.8, Z é um conjunto mensurável com $\mu(Z) = 0$. Além disso,

$$\partial D \setminus Z \subset \bigcup_{Q \in T_k^0(D)} Q \quad (5.3)$$

(pois, se $x \in \partial D$ então $x \in Q$ para algum $Q \in T_k$, logo $Q \in T_k^+$; se $x \notin Z$ então Q é uma vizinhança de x , mas qualquer vizinhança de x intersecta simultaneamente o conjunto D e o seu complementar, isto é $Q \in T_k^0(D)$). Como o número de cubos em $T_k^0(D)$ é igual a $N_1 - N_2$, onde N_1 é o número de cubos que intersectam D e N_2 é o número de cubos contidos em D , o volume (n -dimensional) da reunião finita

$$\bigcup_{Q \in T_k^0(D)} Q$$

é igual a

$$\mu \left(\bigcup_{Q \in T_k^0(D)} Q \right) = \overline{S}_k(D) - \underline{S}_k(D).$$

Por (ii) da Proposição 5.3, de (5.3) sai que

$$\mu^*(\partial D \setminus Z) \leq \mu^* \left(\bigcup_{Q \in T_k^0(D)} Q \right) = \overline{S}_k(D) - \underline{S}_k(D),$$

donde, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$ temos

$$\mu^*(\partial D) \leq \mu^*(\partial D \setminus Z) + \mu(Z) = \mu^*(\partial D \setminus Z) \leq \mu^*(D) - \mu_*(D) \quad (5.4)$$

(ver (iii) da Proposição 5.3). Por outro lado, qualquer cubo $Q \in T_k^0(D)$ intersecta, pela conexão, também a fronteira ∂D , isto é $Q \in T_k^+(\partial D)$. Por isso,

$$\overline{S}_k(D) - \underline{S}_k(D) = \mu \left(\bigcup_{Q \in T_k^0(D)} Q \right) \leq \mu \left(\bigcup_{Q \in T_k^+(\partial D)} Q \right) = \overline{S}_k(\partial D),$$

e passando ao limite, encontramos

$$\mu^*(D) - \mu_*(D) \leq \mu^*(\partial D). \quad (5.5)$$

As desigualdades (5.4) e (5.5) implicam que $\mu^*(\partial D) = 0$ sse $\mu^*(D) - \mu_*(D) = 0$. ■

O gráfico de qualquer função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é um exemplo de um conjunto com medida de Jordan nula em \mathbb{R}^2 . Também qualquer curva plana $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, tem medida de Jordan zero. Analogamente, em \mathbb{R}^3 , o gráfico da função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ou uma porção de uma superfície

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

$(u, v) \in D$, onde D é uma região limitada, representam conjuntos de medida de Jordan 3-dimensional nula.

Assim, pelo critério de mensurabilidade, como conjunto mensurável pode ser considerado qualquer região $D \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $D \subset \mathbb{R}^3$) limitada por um número finito de curvas contínuas (resp. porções de superfícies).

Exemplo 5.10 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa então o conjunto

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

é Jordan mensurável e a sua medida (área) é dada por

$$\mu(S) = \int_a^b f(x) dx.$$

5.2 Integral duplo. Definições de Riemann e de Darboux

Para definir *medida de Jordan (volume)* de certos conjuntos em \mathbb{R}^3 pode-se proceder de forma análoga ao que se fez na Análise Matemática I para construir o integral de Riemann (ver também Exemplo 5.10).

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto limitado Jordan mensurável. Sem perda de generalidade supomos que D é fechado e tal que $D = \text{int } \overline{D}$. Se além disso, D é conexo por arcos, chamamos-lhe *região* (ou *domínio*). O gráfico da função f é uma porção da superfície que fica por cima do plano Oxy (a sua projecção é a região D). Consideramos o conjunto 3-dimensional

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Para determinar a medida de Jordan (volume) do sólido Ω dividimos D num número finito de conjuntos Jordan mensuráveis, D_1, \dots, D_k , tais que a intersecção de quaisquer dois desses conjuntos diferentes tem medida nula (isto é, os conjuntos D_i são disjuntos dois a dois). O conjunto finito $\tau = \{D_1, \dots, D_k\}$ diz-se a partição de D .

Denotamos por

$$\text{diam } D_i = \sup_{P, Q \in D_i} d(P, Q),$$

o diâmetro de D_i ($d(P, Q)$ é a distância entre os pontos P e Q), e definimos o *diâmetro da partição* τ

$$\|\tau\| := \max_{1 \leq i \leq k} \text{diam } D_i.$$

Escolhemos pontos $P_i \in D_i$, $i = 1, \dots, k$, arbitrários e construímos o conjunto

$$\Omega(\tau; f) := \bigcup_{i=1}^k \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq f(P_i), (x, y) \in D_i\}$$

que melhor aproxima Ω se a partição τ for mais fina (isto é, se o diâmetro $\|\tau\|$ for mais pequeno). A medida de Jordan (volume) do sólido "em escada" $\Omega(\tau; f)$ é dado por

$$\mu(\Omega(\tau; f)) = \sum_{i=1}^k f(P_i) \mu(D_i). \quad (5.6)$$

A soma na parte direita de (5.6) chama-se *soma integral de Riemann*. Para encontrar agora o volume do sólido inicial Ω basta passar (5.6) ao limite quando $\|\tau\| \rightarrow 0$. Na definição abaixo já não supomos que f é contínua ou não negativa. Obtemos assim uma generalização da medida de Jordan em \mathbb{R}^3 .

Definição 5.11 *Se existe o limite das somas integrais (5.6) quando $\|\tau\| \rightarrow 0$, e este limite não depende nem da escolha da partição τ de D nem da selecção dos pontos P_i em D_i , então a função f diz-se (Riemann) integrável em D , e tal limite chama-se o integral duplo de f sobre D e representa-se por*

$$\iint_D f(P) \, dx dy = \lim_{\|\tau\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i) \mu(D_i).$$

Chegamos ao mesmo conceito de integral se introduzimos somas superiores e somas inferiores de Darboux (compare com as respectivas somas no caso do integral definido de Riemann para uma função de uma variável). Nomeadamente, dada a partição $\tau = \{D_1, \dots, D_k\}$ de D , definimos

$$m_i(f) = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x, y) \quad \text{e} \quad M_i(f) = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x, y)$$

(supondo *a priori* que a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada). Definimos *somas inferior* e *superior de Darboux* de f (relativamente à partição τ), respectivamente, por

$$\underline{\sigma}(f; \tau) = \sum_{i=1}^k m_i(f) \mu(D_i) \quad \text{e} \quad \overline{\sigma}(f; \tau) = \sum_{i=1}^k M_i(f) \mu(D_i),$$

Tem-se, obviamente, sempre

$$\underline{\sigma}(f; \tau) \leq \sum_{i=1}^k f(P_i) \mu(D_i) \leq \overline{\sigma}(f; \tau),$$

qualquer que seja a partição τ de D , e qualquer que seja a escolha dos pontos $P_i \in D_i, i = 1, \dots, k$. Passando ao supremo o lado esquerdo (para todas as possíveis partições τ) e ao ínfimo o lado direito chegamos aos chamados *integrais inferior e superior de Darboux* de f sobre D , respectivamente:

$$\iint_* f(x, y) \, dx dy = \sup_{\tau} \underline{\sigma}(f; \tau)$$

$$\iint^* f(x, y) \, dx dy = \inf_{\tau} \overline{\sigma}(f; \tau).$$

Estes integrais existem sempre e são finitos (uma vez que f é limitada). Além disso,

$$\iint_* f(x, y) \, dx dy \leq \iint^* f(x, y) \, dx dy. \quad (5.7)$$

No caso, em que se verifica a igualdade em (5.7) a função f diz-se *integrável segundo Darboux* e o valor comum dos integrais inferior e superior chama-se *integral (duplo) de f sobre D* .

De facto, as definições de Riemann e de Darboux são equivalentes, no sentido em que a função f é Riemann integrável se e só se é integrável segundo Darboux, e os respectivos integrais coincidem.

Apresentamos, sem demonstração, o critério seguinte de integrabilidade.

Teorema 5.12 (Condição suficiente de integrabilidade de Riemann) *Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ Jordan mensurável) é Riemann integrável se o conjunto dos pontos de D onde f não é contínua tem medida de Jordan nula.*

Principais propriedades do integral duplo

Os integrais duplos gozam sensivelmente das mesmas propriedades que o integral de Riemann de uma função de uma variável.

Proposição 5.13 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto Jordan mensurável.*

(i) *A função constante $f(x, y) \equiv c \in \mathbb{R}, (x, y) \in D$, é integrável em D e*

$$\iint_D c \, dx dy = c \mu(D).$$

(ii) *(Linearidade do integral) Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis em D , e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $\alpha f + \beta g$ é integrável em D e*

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

(iii) *Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis então o produto fg é integrável em D , e o quociente $\frac{f}{g}$ é integrável se $g(x) \neq 0, x \in D$.*

(iv) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável (em D) e $D' \subset D$ é um subconjunto Jordan mensurável, então f é integrável em D' . Se além disso a função f é não negativa, então

$$\iint_{D'} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

(v) (Monotonia do integral) Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis em D e $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) em D , então

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

(vi) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em D então o módulo $|f|$ é integrável em D e

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy.$$

(vii) (Aditividade do integral) Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1, D_2 são Jordan mensuráveis em \mathbb{R}^2 tais que $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, e f é integrável em cada um dos conjuntos D_1 e D_2 , então f é integrável em D e

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

(viii) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em D então f é limitada e

$$m\mu(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M\mu(D),$$

$$\text{sendo } m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y) \text{ e } M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y).$$

Demonstração:

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor. ■

Da propriedade (viii) sai facilmente a versão 2-dimensional do teorema do valor médio para o cálculo integral.

Teorema 5.14 (Teorema do valor médio) Se f é uma função contínua num subconjunto D compacto e mensurável em \mathbb{R}^2 , então existe um ponto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0) \mu(D).$$

Demonstração:

Sendo a função f contínua e D um conjunto compacto então, pelo Teorema de Weierstrass, existem pontos $(x^*, y^*), (x^{**}, y^{**}) \in D$ tais que

$$\begin{aligned} m &= \min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x^*, y^*); \\ M &= \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x^{**}, y^{**}). \end{aligned}$$

Pela continuidade de f a imagem $f(D)$ é um conjunto conexo em \mathbb{R} , e como $m, M \in f(D)$ então temos $[m, M] \subset f(D)$. Pela propriedade (viii) acima

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy \in [m, M],$$

logo

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0)$$

para algum $(x_0, y_0) \in D$. ■

5.3 Métodos de cálculo para os integrais duplos

Há dois métodos específicos que ajudam a calcular os integrais duplos. O primeiro reduz a integração dupla à integração simples em cada uma das variáveis em causa, enquanto o segundo método permite simplificar a função integranda e/ou a região de integração através de uma mudança de variáveis. Vamos então descrever os métodos.

Redução ao integral iterado

Um integral duplo pode ser imediatamente reduzido a dois integrais simples (o primeiro para x e o outro para y ou vice versa) se a região de integração $D \subset \mathbb{R}^2$ tem uma das formas seguintes:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\} \quad (5.8)$$

ou

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\} \quad (5.9)$$

onde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, e $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, são funções contínuas. No primeiro caso diz-se que a região D é *elementar em relação à variável x* (ou que é do tipo I) enquanto que no segundo diz-se *elementar em relação a y* (ou que é do tipo II). Se D é representável numa destas formas diz-se simplesmente que D é uma região *elementar*.

Geometricamente, a representação (5.8) significa que o segmento $[a, b]$ é a projecção do conjunto D sobre o eixo Ox e que qualquer recta vertical que passa através de $x \in [a, b]$ intersecta a fronteira de D em dois pontos, a ordenada de um deles é denotada por $\varphi_1(x)$ enquanto que a do outro é denotada por $\varphi_2(x)$ (em particular pode ser $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$). A interpretação geométrica da representação (5.9) é análoga.

O integral duplo de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sobre uma região elementar pode ser calculado pela fórmula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (5.10)$$

se D se representa na forma (5.8) ou por

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (5.11)$$

se D tem a forma (5.9). Os integrais do lado direito de (5.8) e (5.9) dizem-se *integrais iterados*. Para evitar parênteses os integrais iterados em (5.10) e em (5.11) costumam escrever-se também como

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

ou

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

respectivamente.

Logo a integração dupla reduz-se ao cálculo de dois integrais de funções de uma variável, aos quais se podem aplicar todos os métodos de cálculo: integração por partes, por substituição, fórmula de Barrow, etc. No caso particular em que D é um rectângulo $[a, b] \times [c, d]$ as funções $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ são constantes e temos a fórmula:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Se além disso a função f se representa como um produto de duas funções: uma depende só de x e a outra só de y :

$$f(x, y) = p(x) q(y),$$

então o integral duplo calcula-se como o produto de dois integrais simples:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b p(x) dx \cdot \int_c^d q(y) dy. \quad (5.12)$$

Se a região D não é elementar, em muitas situações que aparecem na prática, pode ser dividida num número finito de conjuntos elementares D_i , $i = 1, \dots, k$, tais que

$$D = \bigcup_{i=1}^k D_i \quad \text{e} \quad \mu(D_i \cap D_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Então aplicando a aditividade do integral (ver Proposição 5.13 (vii)) podemos calcular o integral duplo de f em D pela fórmula

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) \, dx dy.$$

Exemplo 5.15 Calculemos o integral $\iint_D x^2 y \, dx dy$, onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}.$$

Como D é um rectângulo e a função integranda é o producto de duas funções: uma dependente só de x e a outra só de y , aplicamos a fórmula (5.12) e obtemos

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \int_0^3 x^2 \, dx \cdot \int_1^2 y \, dy = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

No exemplo seguinte a região D e a função integranda são já mais complicadas.

Exemplo 5.16 Calculemos o integral

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} \, dx dy \tag{5.13}$$

onde D é um "triângulo curvilíneo" delimitado pela parábola $y^2 = x$ e pelas rectas $x = 0$ e $y = 1$. Como facilmente se pode verificar, a região D pode ser representada na forma

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Logo, podemos aplicar a fórmula (5.11):

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} \, dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx. \tag{5.14}$$

Integrando a função em ordem de x (tendo em conta que y é constante) encontramos:

$$\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx = y \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} d\left(\frac{x}{y}\right) = \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=y^2}^{x=1} = y e^y - y.$$

Substituindo em (5.14) temos

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_0^1 (ye^y - y) dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 y dy \\ &= \int_0^1 y d(e^y) - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = [ye^y]_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{1}{2} \\ &= e - [e^y]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Para calcularmos o integral $\int_0^1 ye^y dy$ usamos o método de integração por partes.

Observamos que no exemplo anterior a região D é elementar também em relação a x e pode ser representada na forma

$$D = \{(x, y) : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Então, usando a fórmula (5.13), temos

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy.$$

Note, no entanto, que a primitiva da função $y \mapsto e^{\frac{x}{y}}$ existe mas não pode ser calculada pela fórmula de Barrow. Logo, há só uma maneira de redução ao integral iterado que dá bom resultado. Tendo em conta esta observação às vezes é conveniente calcular um integral iterado (como, por exemplo, $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy$, escrevendo-o primeiro na forma dum integral duplo e depois reduzindo-o a um integral iterado mas com outra ordem de variáveis (isto é, *alterando a ordem de integração*).

Exemplo 5.17 Dado o integral iterado

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right] dx, \quad (5.15)$$

determinemos o domínio de integração dupla $D \subset \mathbb{R}^2$ e alteremos a ordem de integração.

De (5.15) vê-se que, para cada x fixo entre 0 e 1, a integração em relação a y faz-se no intervalo de x^2 a x . Isto significa que a região é do tipo (5.8) e está limitada pelas curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x.$$

Note que a região D pode ser representada também na forma (5.9), nomeadamente,

$$D = \{(x, y) : y \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Logo o integral duplo $\iint_D f(x, y) dx dy$, de um lado, dado por (5.15), pode ser também calculado como:

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exercício 5.18 Inverta a ordem de integração no integral iterado seguinte

$$\int_0^3 \left[\int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx \right] dy.$$

Mudança de variáveis

Começamos por recordar que para o integral de uma função de uma variável utilizámos o método de substituição que se baseia na fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5.16)$$

A função φ é uma bijecção do intervalo $[c, d]$ sobre o intervalo $[a, b]$, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, e que, além disso, admite derivada contínua e tal que $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in [c, d]$. Destas hipóteses sai, em particular, que a função φ (chamada *substituição* ou *mudança das variáveis*) é estritamente crescente ou decrescente. No primeiro caso temos $c < d$ se $a < b$ enquanto que no segundo temos $c > d$, isto é o limite inferior no integral da direita em (5.16) é maior do que o limite superior (ao contrário do que acontece com o integral da esquerda). Se no caso φ decrescente trocarmos a ordem dos limites de integração e observarmos que nesse caso $\varphi'(t) < 0$, então (5.16) escreve-se como

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_c^d f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_d^c f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_{[d,c]} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt. \quad (5.17)$$

No caso em que φ é crescente não há necessidade de trocar os limites da integração e temos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_{[c,d]} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt. \quad (5.18)$$

Para o integral duplo há uma fórmula análoga, mas o método para a obter é um pouco mais complicado, pois a substituição de variáveis é vectorial $\varphi : G \rightarrow D$, onde $G, D \subset \mathbb{R}^2$ são conjuntos Jordan mensuráveis (regiões no plano). Por outras palavras, a mudança de variáveis é dada por duas equações que ligam as variáveis antigas $(x, y) \in D$ com as variáveis novas $(u, v) \in G$:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v). \end{cases} \quad (5.19)$$

As funções φ_1 e φ_2 são as coordenadas da função vectorial φ .

O resultado seguinte dá uma fórmula análoga a (5.16) para os integrais duplos.

Teorema 5.19 *Suponhamos que $\varphi : G \rightarrow D$, $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, $(u, v) \in G$, é uma função vectorial continuamente diferenciável em G e tal que o Jacobiano $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}$ nunca se anula em G . Então tem-se a fórmula*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (5.20)$$

Aqui o Jacobiano $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}$ (tal como em várias outras situações, ver Secção 3.3) desempenha o papel da derivada $\varphi'(t)$ na respectiva fórmula de mudança da variável para o integral simples (ver (5.17) e (5.18)).

Consideremos os dois tipos de substituição que se utilizam com maior frequência na prática.

1) Transformações lineares

Uma transformação linear é uma aplicação definida por um par de equações da forma

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv, \end{cases} \quad (5.21)$$

onde A, B, C, D são números dados. Neste caso, $\varphi_1(u, v) = Au + Bv$ e $\varphi_2(u, v) = Cu + Dv$, e o Jacobiano é

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = AD - BC.$$

A aplicação vectorial $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ é bijectiva (logo pode ser considerada como uma mudança de variáveis no integral duplo) se $AD - BC \neq 0$.

A fórmula (5.20) vem então

$$\iint_S f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_G f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv. \quad (5.22)$$

Exemplo 5.20 *Consideremos o integral*

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy,$$

onde D é o triângulo limitado pela recta $x + y = 2$ e pelos dois eixos coordenados.

A forma da função integranda sugere a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x. \end{cases} \quad (5.23)$$

Para aplicar a fórmula (5.22) temos que exprimir as variáveis (x, y) através de (u, v) . Resolvendo o sistema acima, temos

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u) \\ y = \frac{1}{2}(v + u), \end{cases}$$

sendo o Jacobiano desta transformação linear

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} = AD - BC = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Precisamos ainda de determinar a imagem G de D no plano- uv usando a aplicação (5.23). É fácil verificar que as rectas $x = 0$ e $y = 0$ se aplicam nas rectas $u = v$ e $u = -v$, respectivamente; a recta $x + y = 2$ se transforma na recta $v = 2$. Além disso, os pontos interiores a D verificam $0 < x + y < 2$ e transformam-se nos pontos interiores de G verificando $0 < v < 2$. Ou seja,

$$G = \{(u, v) : -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 2\}.$$

O integral duplo em questão é

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_G e^{u/v} du dv.$$

Passando ao integral iterado (primeiro em relação a u e depois em relação a v) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_G e^{u/v} du dv &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-v}^v e^{u/v} du \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v \left[e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) 2 = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

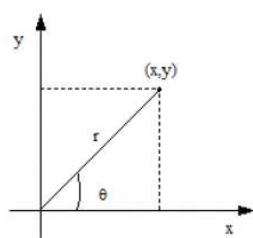
Exercício 5.21 Calcule os integrais duplos abaixo fazendo uma mudança de variáveis linear

- (a) $\iint_D \sin \frac{y-x}{y+x} dx dy$, onde D é limitada pelo trapézio de vértices $(1, 1), (2, 2), (4, 0), (2, 0)$;
- (b) $\iint_D \frac{2y+x}{y-2x} dx dy$, onde D é limitada o trapézio de vértices $(-1, 0), (-2, 0), (0, 4), (0, 2)$.

2) Coordenadas polares

Esta mudança de variáveis costuma ser usada quando a função integranda e/ou as equações que descrevem a fronteira do domínio de integração contêm a soma dos quadrados $x^2 + y^2$. Fazendo algumas alterações, as coordenadas polares também se aplicam quando a função integranda contém uma qualquer forma quadrática definida positiva (que não se reduza necessariamente $x^2 + y^2$). No caso canónico a passagem das coordenadas cartesianas iniciais às coordenadas polares efectua-se através as equações:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (5.24)$$



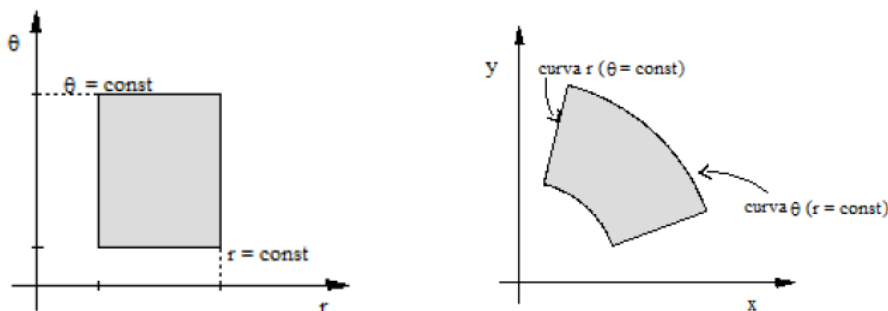
onde $r \geq 0$ é o chamado *raio polar* e $\theta \in [0, 2\pi]$ é o *ângulo polar*. Denotando por $\varphi_1(r, \theta) = r \cos \theta$ e $\varphi_2(r, \theta) = r \sin \theta$, vemos que a aplicação $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ é continuamente diferenciável e o seu *Jacobiano* é

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r,$$

que se anula quando $r = 0$, mas tal não afecta a validade da fórmula (5.20) porque o conjunto de pontos com $r = 0$ tem medida de Jordan nula. Logo (5.20) transforma-se em

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (5.25)$$

onde G é a pre-imagem da região D relativamente à aplicação (5.24). Para construir tal pre-imagem será útil saber que as curvas $\theta = \text{const}$ no plano cartesiano são rectas passando pela origem e as curvas $r = \text{const}$ são círcunferências centradas na origem. Assim, a imagem de um rectângulo no plano das variáveis r e θ é um conjunto no plano- xy limitado por dois raios e dois arcos de circunferência, como mostra a figura



Exemplo 5.22 Consideremos o integral que permite o cálculo do volume de um octante de esfera de raio a :

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

onde D é o primeiro quadrante do círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$. Aplicando a fórmula (5.25) calculamos o volume em coordenadas polares:

$$\iint_G \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta,$$

sendo G o rectângulo $[0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. A função integranda depende só de r . Por isso, o integral acima pode ser representado como o produto de dois integrais simples:

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta &= \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = -\frac{\pi}{6} (0 - a^3) = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

O mesmo resultado pode ser obtido utilizando coordenadas rectangulares, mas os cálculos são mais complicados.

5.4 Aplicações

Nesta secção resumimos as principais aplicações geométricas e físicas do integral duplo.

Áreas e volumes

- 1) A *área* de um subconjunto Jordan mensurável D de \mathbb{R}^2 é dada pelo integral duplo da função constante $f(x, y) = 1$:

$$a(D) = \iint_D dx dy;$$

- 2) O *volume* do sólido

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

para $Q \subset \mathbb{R}^2$ Jordan mensurável e $f : D \rightarrow [0, +\infty[$ contínua é igual a

$$V(D) = \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

- 3) Mais geralmente, se f e g são ambas contínuas em D com $f \leq g$, então o integral duplo $\iint_D (g - f) dx dy$ é igual ao volume do sólido compreendido entre os gráficos das funções f e g cuja projecção no plano- xy é a região Q .

Exemplo 5.23 *Determinemos o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região Q do plano- xy limitada pela recta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$. Representamos a região Q na forma*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \ x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

O volume pedido é

$$\begin{aligned} V &= \iint_Q (x^2 + y^2) \, dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 (2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{3} \right]_0^2 = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Aplicações físicas

- 1) Consideremos uma lâmina com a forma de uma região $Q \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que a matéria está distribuída sobre essa lâmina com uma densidade $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ conhecida, $\rho(x, y) \geq 0$. A massa total $m(Q)$ da lâmina é dada então pelo integral duplo

$$m(Q) = \iint_Q f(x, y) \, dx dy.$$

- 2) Com a integração dupla também podemos determinar o *centro de massa* da lâmina Q . Nomeadamente, é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) (que pode não pertencer a Q) onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m(Q)} \iint_Q x f(x, y) \, dx dy \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{m(Q)} \iint_Q y f(x, y) \, dx dy. \quad (5.26)$$

Notamos que a massa e o centro de massa são propriedades da lâmina e não dependem da localização da lâmina no plano. Por outras palavras, diz-se que estas características são *invariantes em relação às coordenadas*.

Exemplo 5.24 *Determinemos o centro de massa do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ sabendo que a densidade é dada por $\rho(x, y) = e^{x+y}$.*

Começemos por determinar a massa da região:

$$\begin{aligned} m(Q) &= \iint_Q \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} \, dx dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y) \, dy = [e^{1+y} - e^y]_0^1 = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2. \end{aligned}$$

Como

$$\iint_Q x f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} dy dx = \int_0^1 x (e^{x+1} - e^x) dx = (e-1) \int_0^1 x e^x dx$$

e integrando por partes obtemos

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1,$$

então

$$\iint_Q x f(x, y) dx dy = e - 1,$$

e portanto

$$\bar{x} = \frac{1}{m(Q)} \iint_Q x f(x, y) dx dy = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1}.$$

Analogamente se mostra que $\bar{y} = 1/(e-1)$. Logo o centro de massa é $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1}\right)$.

5.5 Integral triplo. Construção e métodos de cálculo

O conceito de integral duplo pode generalizar-se a um qualquer espaço com dimensão $n \geq 3$. Nesta secção vamos apenas considerar o caso $n = 3$ e os chamados integrais triplos. Estes integrais têm muitas aplicações práticas, principalmente em Mecânica, Física e Técnica. O integral triplo é uma extensão do conceito de integral duplo onde a região de integração é, agora, um conjunto Jordan mensurável $D \subset \mathbb{R}^3$ (que se pode supor fechado, conexo e tal que $D = \overline{\text{int } D}$, isto é uma *região*) e a função integranda depende de três variáveis. Como o desenvolvimento do assunto é completamente análogo ao do caso $n = 2$, referimos apenas os passos principais da construção e do cálculo.

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, uma função limitada (não necessariamente contínua). Como no caso do integral duplo dividimos D num número finito de conjuntos Jordan mensuráveis (regiões) D_1, \dots, D_k , tais que $\mu_3(D_i \cap D_j) = 0$, $i \neq j$, onde μ_3 denota a medida de Jordan 3-dimensional. De facto, a intersecção de duas regiões diferentes D_i e D_j pode ser uma porção de superfície, um arco de curva ou alguns pontos isolados. O diâmetro da partição $\tau = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ (denotado por $\|\tau\|$) define-se de forma análoga ao do caso $n = 2$ (a distância entre pontos é, agora, 3-dimensional). Em seguida escolhemos pontos $P_i \in D_i$, $i = 1, \dots, k$, e construímos a soma integral de Riemann

$$\sum_{i=1}^k f(P_i) \mu_3(D_i). \quad (5.27)$$

Daqui vemos, em particular, que no caso $f(x, y, z) \equiv 1$ a soma acima dá exactamente a medida de Jordan (o volume) de toda a região D . Por outro lado, se f for a densidade da matéria em que consiste D , então a soma (5.27) aproxima a massa total do sólido D ; e esta aproximação

torna-se mais exacta se a partição τ for mais fina (isto é, se o seu diâmetro for menor). Assim, o limite das somas integrais

$$\lim_{\|\tau\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i) \mu_3(D_i),$$

caso exista e não dependa da forma como a região D foi dividida, nem da escolha dos pontos $P_i \in D_i$, chama-se *integral triplo de f sobre a região D* e denota-se por

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz. \quad (5.28)$$

Nestas condições a função f diz-se (*Riemann*) *integrável* sobre D . A integrabilidade e o integral triplo podem ser definidos também pelo método de Darboux, analogamente ao que fizemos para as funções de duas variáveis (e integrais duplos). Deixamos ao cuidado do leitor repetir os raciocínios respectivos.

O critério de integrabilidade também fica o mesmo: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se f é contínua ou se f é descontínua no máximo num conjunto de medida (3-dimensional) nula. Este conjunto pode ser, por exemplo, um número finito de porções de superfícies em \mathbb{R}^3 .

As propriedades do integral triplo e da integração em \mathbb{R}^3 são as mesmas dos integrais duplos (o leitor pode, sem dificuldade, reformular estas propriedades para o caso $n = 3$). Em particular, se $D = D_1 \cup D_2$ e os sólidos D_1 e D_2 são disjuntos (no sentido em que $\mu_3(D_1 \cap D_2) = 0$), então qualquer função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrável sobre D_1 e D_2 será integrável na reunião $D_1 \cup D_2$ e

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

(*aditividade do integral triplo*). Também, se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em D , então existe um ponto $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ tal que

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = f(M_0) \mu_3(D)$$

(*Teorema do valor médio para os integrais triplos*).

Para calcular um integral triplo usam-se essencialmente os mesmos métodos que usámos para os integrais duplos (redução ao integral iterado e mudança de variáveis), mas com algumas particularidades.

O método de *redução ao integral iterado* pode ser aplicado quando a região D tem uma das seguintes formas:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in Q_z\}; \quad (5.29)$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(y, z) \leq x \leq \psi_2(y, z), (y, z) \in Q_x\}; \quad (5.30)$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \chi_1(z, x) \leq y \leq \chi_2(z, x), (z, x) \in Q_y\}, \quad (5.31)$$

onde $Q_z, Q_x, Q_y \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi_1, \varphi_2 : Q_z \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 : Q_x \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi_1, \chi_2 : Q_y \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis sobre as respectivas regiões (planas). Em qualquer um destes casos o sólido D diz-se

elementar (relativamente à variável z, x ou y , resp.). Notemos que a região plana Q_z (resp., Q_x ou Q_y) é simplesmente a *projecção* de D sobre o plano xy (yz ou zx , resp.)

No caso da representação (5.29) tem-se a fórmula

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{Q_z} \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy. \quad (5.32)$$

Na parte direita da fórmula anterior temos um *integral iterado* que consiste no integral simples de uma função de uma variável (z) e de um integral duplo (sobre um domínio de variáveis (x, y)). Para evitar uso de parênteses o último integral pode-se escrever na forma

$$\iint_{Q_z} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

No caso em que D se representa na forma (5.30) ou (5.31) a fórmula para o cálculo do integral é, respectivamente,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{Q_x} dy dz \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx \quad (5.33)$$

ou

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{Q_y} dz dx \int_{\chi_1(z, x)}^{\chi_2(z, x)} f(x, y, z) dy. \quad (5.34)$$

Se D não é elementar (isto é, não se representa de nenhuma das formas (5.29), (5.30) ou (5.31)), então na prática este sólido pode ser dividido num número finito de partes, em que cada uma delas é de um destes tipos. Tal divisão costuma ser feita com um número finito de cortes com planos ou com algumas superfícies simples.

Os integrais duplos nas fórmulas (5.32), (5.33) ou (5.34) calculam-se novamente por redução a integrais iterados ou aplicando uma mudança das variáveis (linear, polar ou qualquer outra).

Uma *mudança de variáveis* pode ser aplicada ao integral triplo para simplificar a integração, reduzindo à integração sobre um domínio mais simples (nas novas coordenadas).

Sejam u, v, w variáveis relacionadas com x, y, z através das equações

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v, w) \\ y = \varphi_2(u, v, w) \\ z = \varphi_3(u, v, w) \end{cases} \quad (5.35)$$

As equações (5.35) definem uma aplicação vectorial $\mathbf{F} : G \rightarrow D$ onde $G \subset \mathbb{R}^3$ é a nova região (no espaço das variáveis u, v e w). Supomos que esta aplicação é bijectiva e continuamente diferenciável em G . Além disso, supomos que o Jacobiano

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)}$$

é diferente de zero em G . Daqui sai (ver Secção 3.3) que a aplicação \mathbf{F} é invertível, e que a aplicação inversa \mathbf{F}^{-1} também é continuamente diferenciável. Então temos a fórmula de mudança de variáveis num integral triplo:

$$\iiint_D f \, dx \, dy \, dz = \iiint_G f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw. \quad (5.36)$$

Tendo em conta as propriedades do integral (em particular, a aditividade) vemos que a condição

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$$

pode falhar num conjunto de medida de Jordan nula (por exemplo, num número finito de superfícies), o que, na prática, acontece frequentemente.

1) Transformações lineares

Em \mathbb{R}^3 uma transformação linear tem a forma

$$\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{u}$$

onde \mathbb{A} é uma matriz 3×3 ,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

O Jacobiano da aplicação $\varphi : u \mapsto \mathbb{A}\mathbf{u}$ é obviamente igual ao determinante da matriz \mathbb{A} . Supondo que $\det \mathbb{A} \neq 0$, no integral (5.28) podemos fazer a mudança de variáveis substituindo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ por $\mathbb{A}\mathbf{u}$ e a região da integração D por $G = \mathbb{A}^{-1}(D)$. Então, pela fórmula (5.36), obtemos

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = |\det \mathbb{A}| \iiint_G f(\mathbb{A}\mathbf{u}) \, du \, dv \, dw,$$

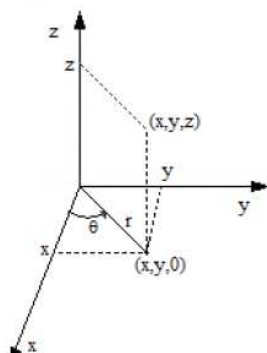
onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

2) Coordenadas cilíndricas

Estas coordenadas são parecidas às coordenadas polares (usadas na integração dupla) e utilizam-se, principalmente, quando a função integranda ou a equação da fronteira do domínio de integração contém a soma de dois quadrados ($x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$ ou $x^2 + z^2$). Se, por exemplo, os elementos de integração são invariantes relativamente a $x^2 + y^2$, aplica-se a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z, \end{cases} \quad (5.37)$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $z \in \mathbb{R}$ (a última variável fica inalterada).



Observamos que as *superfícies coordenadas* da aplicação (5.37) são cilindros circulares em torno do eixo z ($r = \text{const}$), planos verticais passando pela origem ($\theta = \text{const}$) e todos os planos horizontais ($z = \text{const}$).

O Jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r,$$

que igual a zero só no plano $r = 0$, isto é, num conjunto de medida nula. Por isso, pela fórmula (5.36), vem

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr \, d\theta \, dz,$$

onde G é a pré-imagem da região D relativamente à aplicação (5.37).

Exemplo 5.25 Calculemos o integral

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz,$$

sendo D o sólido limitado pelo plano- xy e o parabolóide de revolução $z = a^2 - x^2 - y^2$, onde $a > 0$ é um parâmetro dado.

A projecção do sólido D no plano- xy é o círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$. Assim, D pode ser escrito como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq a^2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Passando às coordenadas cilíndricas temos

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq a^2 - r^2.$$

Portanto

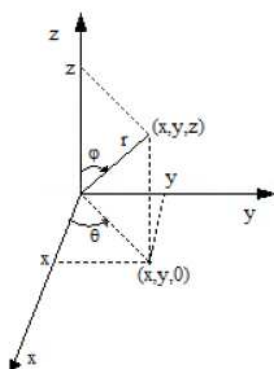
$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^{a^2-r^2} z dz r d\theta = 2\pi \int_0^a \frac{r}{2} (a^2 - r^2)^2 dr \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^a (a^2 - r^2)^2 d(a^2 - r^2) = \left[-\frac{\pi}{6} (a^2 - r^2)^3 \right]_0^a = \frac{\pi a^6}{6}. \end{aligned}$$

3) Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas usam-se quando a função integranda (ou o domínio de integração) é, de alguma forma, invariante em relação à soma dos três quadrados: $x^2 + y^2 + z^2$. As coordenadas cartesianas podem ser expressas através das coordenadas esféricas como

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi, \end{cases} \quad (5.38)$$

onde $r \geq 0$ é o *raio*, $\varphi \in [0, \pi]$ é o chamado *ângulo meredional* e $\theta \in [0, 2\pi[$ é o *ângulo polar*.



As superfícies coordenadas são esferas centradas na origem ($r = \text{const}$), planos verticais passando na origem ($\theta = \text{const}$), e cones circulares com eixo coincidente com z ($\varphi = \text{const}$).

Calculemos o Jacobiano desta aplicação. Derivando as funções (5.38) em ordem de r, θ e φ temos

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \varphi, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo este determinante pelos elementos da última linha, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} &= \cos \varphi \det \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix} + \\
 &\quad + r \sin \varphi \det \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \cos \varphi (r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta) + \\
 &\quad + r \sin \varphi (r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \\
 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= r^2 \sin \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin \varphi
 \end{aligned}$$

e observamos que o Jacobiano se anula nos planos $r = 0$, $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, isto é num conjunto de medida nula. Por isso a fórmula de mudança de variáveis para os integrais triplos é válida e tem-se:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

onde G é pré-imagem de D relativamente à aplicação (5.38).

Exemplo 5.26 *Calculemos*

$$\iiint_D z dx dy dz,$$

sendo D o sólido limitado pelo plano- xy e a superfície $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$, para algum $a > 0$.

Temos

$$D = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

Passando às coordenadas esféricas temos (a pré-imagem de D):

$$\left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r \cos \varphi) (r^2 \sin \varphi) dr d\varphi d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} d\theta = \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^4}{4} \pi.
 \end{aligned}$$

Exercício 5.27 *Calcule o integral do exemplo anterior utilizando coordenadas cilíndricas (relativamente às variáveis x e y) e compare os resultados.*

De entre as aplicações (geométricas e físicas) do integral triplo indicamos as seguintes.

1) *Cálculo de volumes de sólidos 3-dimensionais.*

Com a integração tripla calcula-se o volume de praticamente qualquer sólido em \mathbb{R}^3 (Jordan mensurável), ao contrário do que acontece com os integrais simples (que se aplicam às vezes para calcular volume de sólidos de revolução) ou com os duplos (que são usados para o cálculo do volume dos sólidos cilíndricos). A fórmula respectiva é

$$\text{Vol } (D) = \iiint_D dx dy dz.$$

Claro que, se o sólido for muito complicado, esta fórmula pode não dar um bom resultado. Os problemas que podem surgir estão relacionados quer com a representação de D como reunião de sólidos elementares, quer com a primitivação (pois nem todas as funções elementares admitem uma primitiva elementar).

2) *Massa e centro de massa*

Suponhamos que numa região limitada $D \subset \mathbb{R}^3$ está distribuída uma certa matéria com densidade $\rho(x, y, z)$. A *massa* desta matéria é dada pelo integral

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dx dy dz,$$

e as *coordenadas do centro de massa* de D são

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ \bar{y} &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ \bar{z} &= \frac{1}{m(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) \, dx dy dz.\end{aligned}$$