Exercícios de AM I

Calcular os seguintes limites unilaterais

1.- $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

2.- $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x^2 + x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x^2 + x|}{x}$

3.- $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^3 + x^2 - 3x - 6|}{x - 2}$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^3 + x^2 - 3x - 6|}{x - 2}$

Encontrar o valor de k de forma a poder extender a função por continuidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x|}{x} + k, & x < 0 \\ \frac{|x^2 + x|}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} k e^x, & x < -1 \\ \frac{|x^2 + x|}{x + 1}, & x > -1 \end{cases}$$

Prolongar por continuidade (quando for possível). Calcular as derivadas nos pontos onde ela existir (da função extendida), compor a lista de pontos críticos, classificar os pontos críticos em máximos e mínimos relativos. Encontrar os máximos e mínimos absolutos no intervalo $[-3, 3]$ (quando existir) e traçar o gráfico das funções nesse intervalo

1) $\frac{|x|^3}{9x}, x \neq 0$; 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x|}{x} + 1, & x < 0 \\ \frac{|x^2 + x|}{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$; 4) $|x^3 - 3x^2 + 2x|$; 5) $\frac{x^4 - x^2 - 72}{x + 3}, x \neq -3$.

Calcular as derivadas nos pontos onde ela existir, compor a lista de pontos críticos, classificar os pontos críticos em máximos e mínimos relativos. Encontrar os máximos e mínimos absolutos em $\mathbb{R}$ (quando existir) e traçar o gráfico das seguintes funções

1) $x \cdot e^{1-x^2}$; 2) $e^{-\frac{x^2+x+1}{2}}$; 3) $\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2-3x-6}{x-2}, & x \neq 2 \\ 13, & x = 2 \end{cases}$.

Teorema do valor intermédio

1.- Mostre que todo polinómio de grau ímpar tem no mínimo uma raiz.

3.- Mostre que o polinómio $3x^3 - 3x + 1$ tem exatamente 3 raizes.

2.- Mostre que a equação $2x \cdot e^{1-x} = 1$ tem (no mínimo) uma solução no intervalo $[0, 1]$.

3.- Mostre que a equação $\sin(\pi x(1-x)) = \cos(\pi x)$ tem (no mínimo) uma solução no intervalo $[0, 1]$

4.- Mostre que a equação $x + \cos(x) = 0$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$ e esta se encontra no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$.

Derivação

Derivar $\dfrac{3x^4 - x^2 + 4}{2x + \cos(x)}$ (dar o domínio). Resposta:

$$\frac{(12x^3 - 2x)(2x + \cos(x)) - (3x^4 - x^2 + 4)(2 - \sin(x))}{(2x + \cos(x))^2}$$

Derivar duas vezes $(3x - 1) \cdot \tan(x)$. R:
$6 + 6\tan(x)^2 + 2(3x - 1)\tan(x)\left(1 + \tan(x)^2\right)$

Derivar três vezes $\sin(x) \cdot e^x$. R: $(2\cos(x) - 2\sin(x)) \cdot e^x$

Derivar quatro vezes $5x^2 + xe^x - \dfrac{8}{x}$. R: $4e^x + xe^x - \dfrac{192}{x^5}$

Derivada de funções compostas

Calcular a derivada das seguintes funções, duas vezes

$$e^{-\frac{x^2+x+1}{2}} \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad .$$

Respostas: $\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right)e^{-\frac{x^2+x+1}{2}}$, $\frac{\pi}{x^4}\cdot\left(2\,x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)-\pi\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

Teorema de Rolle e teorema do valor médio

1.- Uma partícula desloca-se numa reta, encontrando-se, a instante t, à distância

$$r(t) = -50 + 70\,t - 30\,t^2 + 4\,t^3 \;,$$

do ponto de partida.

i) Mostre que a partícula nunca volta à posição inicial.

ii) Encontre a velocidace média entre $t = 0$ e $t = 1$. Resposta: 44 .

iii) Encontre a velocidade para todo $t \in [0, 1]$ e os tempos em que a velocidade é igual à velocidade média.

2.- Mostre que a equação $2\,x + \cos(x) = 0$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3\,x+2}{1-x+x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-13\,x+14}{24+-50\,x+35\,x^2-10\,x^3+x^4}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\cdot\sin(2\,\theta)}{(\tan(3\,\theta))^2}=\frac{2}{9}$$ (é mais direto sem usar l´hôpital)