Análise Matemática II (2013/2014)

Ficha 7

Cálculo Integral. Integrais duplos e triplos

1. Calcule o integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy$ num domínio rectangular $D \subset \mathbb{R}^2$ se

   (**a**) $f(x,y) = 12xy^2 - 8x^3$ e $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 2\}$;
   (**b**) $f(x,y) = 4xy^3 + y$ e $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq -1\}$;
   (**c**) $f(x,y) = \frac{y}{x}$ e $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq 1\}$;
   (**d**) $f(x,y) = e^x \cos y$ e $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$;
   (**e**) $f(x,y) = xe^{-x-y}$ e $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$;
   (**f**) $f(x,y) = \sin^2 x \cos^2 y$ e $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$;
   (**g**) $f(x,y) = y + 2x$ e D é o rectângulo com os vértices em pontos $(-1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ e $(-1,1)$.

2. Represente cada um dos seguintes *integrais duplos* na forma de *integral iterado* e calcule o seu valor:

   (**a**) $\iint\limits_D (x-y)\ dxdy$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a região triangular com os vértices $(2,9)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$;
   (**b**) $\iint\limits_D x^3 \cos(xy)\ dxdy$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pelas rectas $y = 0$ e $x = 1$;
   (**c**) $\iint\limits_D x\, dxdy$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a região limitada pelas linhas $y = x$, $x + y = 0$ e $x - 2y + 3 = 0$.

3. Para cada um dos integrais iterados seguintes esboce a região $D \subset \mathbb{R}^2$ e inverta a ordem de integração

   (**a**) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)\ dy$;

(b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy;$

(c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{0} f(x,y)\ dx;$

(d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{1-x^2} f(x,y)\ dy.$

4. Invertendo a ordem de integração calcule:

   (a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y}^{3} e^{x^2}\, dx;$

   (b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} y \sin x\, dx.$

5. Usando integração dupla calcule a área da região

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 2 - x^2\right\}.$$

   Além disso calcule as coordenadas do centro de massa e os momentos de inércia em relação aos eixos Ox e Oy e à origem de uma placa que tem a forma da região D e densidade constante (seja 1).

6. Usando integração dupla, calcule o volume do sólido cilíndrico que tem como base o triângulo limitado pelos eixos $x = 0$, $y = 0$ e a recta $2x + y = 2$, e que está limitado por cima pelo gráfico da função $z = x^2 + y^2 + 1$.

7. Passando a coordenadas polares, calcule os seguintes integrais duplos:

   (a) $\iint\limits_D xy\, dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\};$

   (b) $\iint\limits_D (3x + 4y^2)\ dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\};$

   (c) $\iint\limits_D y\, dxdy$ onde D é a região plana limitada por $x^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ e $y = x$.

8. Calcule o integral duplo

$$\iint\limits_{D} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a região limitada pelas rectas $y = \pm x$ e pelas circunferências $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

9. A massa de determinada lâmina está distribuída numa região

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

com densidade $f(x, y) = x^2$. Encontre a massa total desta lâmina e o seu centro de massa.

10. Uma carga eléctrica está distribuída numa chapa circular

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\pi^2,\ y \geq 0\right\}$$

com densidade $f(x, y) = k \sin \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a carga total da chapa.

11. Usando integração tripla, calcule o volume do poliedro

$$\Pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1,\ x + y - 2z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

12. Calcule o volume do sólido

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2,\ x \geq 0\right\},$$

usando integração dupla e tripla. Compare os resultados.

13. Usando integração tripla e coordenadas cilíndricas ou esferícas (conforme achar conveniente), calcule os volumes dos sólidos seguintes:

   (a) $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$;

   (b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x,\ z \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

14. Determine a massa de uma coroa esférica situada entre as esferas de raios 1 e 2, sabendo que a densidade em qualquer ponto é proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem.

15. Considere o sólido $G \subset \mathbb{R}^3$ limitado pela superfície cilíndrica $x^2 = 2z$ e pelos planos $x - 2y = 0$, $y - 2x = 0$, $x = 2\sqrt{2}$ e $z = 0$. Supondo que a sua densidade é constante, determine

(**i**) o volume de G;

(**ii**) o centro de massa de G.

16. Seja $G \subset \mathbb{R}^3$ um sólido homogéneo limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = x^2 + y^2$. Determine as coordenadas do centro de massa de G e o momento de inércia em relação ao eixo Oz.