Ficha 2

Topologia do espaço $\mathbb{R}^n$. Funções de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$. Domínios e gráficos

1. Em cada uma das alíneas seguintes S representa o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verificam as desigualdades dadas. Esboce S no plano, diga e justifique se S é aberto ou fechado. Determine a fronteira de S e indique, justificando, um ponto interior, um ponto fronteiro e um ponto de acumulação de S. Se os conjuntos são compactos? conexos?

   (a) $x^2 + y^2 > 1$;

   (b) $1 \leq x^2 + y^2 < 2$;

   (c) $x^2 + y^2 \leq 2x$;

   (d) $3x^2 + 2y^2 < 6$;

   (e) $1 \leq x \leq 2$ e $3 < y < 4$;

   (f) $y = x^2$;

   (g) $y < x^2$ e $|x| < 2$;

   (h) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$;

   (i) $x^2 + y^2 - 2y \geq 0$ e $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes S representa o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verificam as desigualdades dadas. Esboce S, e diga justificando se S é aberto ou fechado. Se os conjuntos são compactos? conexos?

   (a) $z^2 - x^2 - y^2 > 1$;

   (b) $|x| \leq 1$, $|y| < 1$ e $|z| < 1$;

   (c) $x + y + z < 1$;

   (d) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $-3 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Determine o domínio das funções seguintes

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$;

   (b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

   (c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

   (d) $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$;

(e) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Determine os conjuntos de nível em cada caso. Faça ilustração geométrica onde possível.

4. Encontre o domínio D da função de duas variáveis

   (a) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$;

   (b) $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$.

   Desenha no plano coordenado o conjunto D, a sua aderência $\overline{D}$ e as linhas de nível da função f.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)},$$

   e o conjunto $A = D_f \cup \{(-1,0)\}$, onde $D_f \subset \mathbb{R}^2$ representa o domínio de f.

   (a) Determine interior, fronteira, fecho, derivado e conjunto de pontos isolados de A;

   (b) Diga, justificando, se o conjunto A é aberto, fechado, conexo, compacto.

   Faça ilustração geométrica.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\ln(x^2+y^2)}.$$

   Determine o domínio $D(f)$ da função f e responde às perguntas seguintes.

   (a) Se o conjunto $D(f)$ é aberto ou fechado?

   (b) Se o conjunto $D(f)$ é conexo ?

   (c) Quais são pontos da fronteira $\partial D(f)$ que não pertencem a $D(f)$?

   (d) Se o conjunto $\partial D(f) \setminus D(f)$ é compato? conexo?

   Justifica bem cada resposta. Dê ilustração geométrica.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}\ln(x^2 + y^2)}{xy - 1}.$$

Determine o domínio $D(f)$ de f e responde às perguntas seguintes:

   (a) Se o conjunto $D(f)$ é aberto ou fechado?
   (b) Se o conjunto $\overline{D(f)}$ (aderência de $D(f)$) é compacto ? conexo?
   (c) Determine o conjunto derivado $D(f)'$ e a fronteira $\partial D(f)$.
   (d) Se $D(f)$ tem pontos isolados? quais são?

Justifica bem cada resposta. Dê ilustração geométrica.

8. Considere a função de duas variáveis

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(x - y^2)}{xy}.$$

   (a) Determine o domínio $D(f)$ desta função e representa-o geometricamente.
   (b) Se o conjunto $D(f)$ é conexo ou não ?
   (c) Determine a aderência $\overline{D(f)}$ do domínio. Se $\overline{D(f)}$ é um conjunto conexo ?

9. Encontre as superfícies de nível da função

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Interprete geometricamente.

10. Determine as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Interprete geometricamente (dê esboço pelo menos de três superfícies de nível consecutivas).

11. Desenha superfície em $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente com a equação:

   (a) $4x^2 + y^2 - 9z^2 = 4$;
   (b) $z^2 + 4y - x^2 - 2x - y^2 = 5$;
   (c) $(x^2 - y^2 - z)(x^2 + y^2 - z) = 0$.

12. Desenha superfície em $\mathbb{R}^3$ definida parametricamente com as equações:

    (a) $\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= 2r\sin\theta, \\ z &= r^2, \qquad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[\,. \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x &= \cos\theta\sin\varphi, \\ y &= 2\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= 3\cos\varphi, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \varphi \in [0, \pi]\,. \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} x &= \cos\theta + \sin\theta, \\ y &= \cos\theta - \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[\,. \end{cases}$

13. Determine o contradomínio das funções seguintes e verifique se é limitado e fechado:

    (a) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

    (b) $f(x, y) = 3 - x - y$;

    (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

    Nas alíneas (a) e (b) construi os gráficos de respectivas funções.

14. Encontre o domínio da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida abaixo e desenhe-o no plano

$$f(x, y) = \left(\ln\left(1 - x^2 - y^2\right), \sqrt{x^2 - 2x + y^2}\right).$$