

Análise Matemática II

(Funções reais de várias variáveis reais)

Fátima F. Pereira e Vladimir V. Goncharov
Universidade de Évora

Índice

Índice	1
1 Funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m. Generalidades	2
1.1 O espaço vetorial \mathbb{R}^n	2
1.2 Noções topológicas em \mathbb{R}^n	16
1.3 Sucessões em \mathbb{R}^n	22
1.4 Funções. Limite e continuidade	23
Bibliografia	38

Capítulo 1

Funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Generalidades

Antes de começar com o estudo das funções propriamente ditas vamos recordar algumas noções básicas acerca do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n que generalizam as respectivas propriedades da reta numérica \mathbb{R} sendo última a representação (imagem) geométrica do conjunto de números reais. Essas noções podem ser divididas em dois grupos: noções algébricas que permite interpretar \mathbb{R}^n como um espaço vetorial (de dimensão finita) e noções topológicas que dão interpretação geométrica e infinitesimal de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

1.1 O espaço vetorial \mathbb{R}^n

Sendo n um número natural, o conjunto

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R},$$

ou seja, o produto cartesiano de n factores iguais a \mathbb{R} , é constituído por todos os elementos da forma (x_1, x_2, \dots, x_n) , onde cada x_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, é um número real. Representamos os elementos de \mathbb{R}^n por uma única letra, a negrito, por exemplo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n dizemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ sse $x_i = y_i$ para todos $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ determina, de forma unívoca, cada uma das suas coordenadas (ou componentes), x_1, x_2, \dots, x_n (designadas, respectivamente, por 1ª, 2ª, ..., n-ésima coordenada de \mathbf{x}).

Seguindo a notação usual, quando $n = 2$ ou $n = 3$, usaremos, na maioria das vezes, (x, y) e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3) , respectivamente.

Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a soma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e o produto $\alpha \mathbf{x}$ por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

O conjunto \mathbb{R}^n quando munido destas operações, é um *espaço vectorial real*. Os elementos de \mathbb{R}^n chamam-se *pontos* ou *vetores* e os números reais chamam-se *escalares*. Ao elemento com as n coordenadas iguais a zero, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, chama-se *zero* de \mathbb{R}^n ou *vetor nulo*. Se $n = 2$ ou 3 ao conceito do vetor pode ser dada uma interpretação geométrica. Nomeadamente, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

pode ser visto como uma seta que tem origem em $\mathbf{0}$ e extremidade no ponto \mathbf{x} . Ainda por cima, qualquer seta obtida da \mathbf{x} com uma translação paralela considera-se igual a \mathbf{x} . Assim, qualquer vetor tem dois *invariantes* (que identificam um vetor e distinguem-o de um outro): o comprimento e a direção.

Usando as operações lineares acima podemos representar qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

onde \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os vetores da *base canônica* em \mathbb{R}^n (todas as coordenadas de \mathbf{e}_i são iguais a 0 exceto i -ma que igual a 1). No caso $n = 3$ (ou 2) vamos usar os símbolos standart $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$.

Produto interno. Norma

Introduzimos agora uma operação de "multiplicação" entre vetores.

Definição 1.1 Sendo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, chama-se produto interno (ou produto escalar) de \mathbf{x} e \mathbf{y} , e denota-se por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, o número real

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Têm-se seguintes simples propriedades do produto interno. Deixamos ao cargo do leitor verificação das respectivas afirmações.

Proposição 1.2 Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- I1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (comutatividade);
- I2) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ (distributividade em relação à adição);
- I3) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle$ (homogeneidade);
- I4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Com base na noção de produto interno introduzimos um outro conceito, fundamental em tudo o que segue - a norma de um vector em \mathbb{R}^n - e que generaliza o módulo de um número real.

Definição 1.3 Sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ chamamos norma euclideana de \mathbf{x} , e designamos pelo símbolo $\|\mathbf{x}\|_n$ (ou simplesmente $\|\mathbf{x}\|$ se n é fixo), o número real

$$\|\mathbf{x}\|_n = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Proposição 1.4 Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
- N2) $\|\mathbf{x}\| = 0$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$N3) \quad \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|;$$

$$N4) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (desigualdade triangular).}$$

Esta afirmação sai diretamente da Proposição 1.2 (**verifique!**)

Observação 1.5 *É possível definir outras normas em \mathbb{R}^n com as propriedades acabadas de referir como, por exemplo, a norma da soma e a norma do máximo, definidas, respectivamente, por*

$$\|\mathbf{x}\|_s = |x_1| + \dots + |x_n| \quad e \quad \|\mathbf{x}\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Temos a seguinte relação

$$\|\mathbf{x}\|_m \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_s \quad (1.1)$$

qualquer que seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (justifique!).

Nestes apontamentos iremos usar apenas a norma euclideana, à qual chamaremos simplesmente *norma*. Só esta norma é gerada pelo produto interno. Em sua vez daqui saem seguintes propriedades.

Proposição 1.6 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$(i) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \text{ (desigualdade de Cauchy-Schwarz);}$$

$$(ii) \quad ||\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Demonstração deixamos ao cargo de leitor. Sugerimos só que a desigualdade de Cauchy Schwarz deduz-se da desigualdade $\|\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}\| \geq 0$ válida para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ (ver Proposição 1.2).

Definição 1.7 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dois vetores não nulos. O número $\theta \in [0, \pi]$ definido por*

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

diz-se o ângulo entre os vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Observação 1.8 *Assim, o produto interno entre dois vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, pode ser interpretado geometricamente da seguinte forma*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta,$$

sendo $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo entre os vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Definição 1.9 *Diz-se que os vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{R}^n são ortogonais (ou perpendiculares), e escreve-se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.*

Observamos que quaisquer dois vetores diferentes do sistema de base canónica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ introduzida acima são ortogonais enquanto $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Por isso tal sistema ainda chama-se *ortonormada*.

Distância entre vetores

Definição 1.10 *Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontos de \mathbb{R}^n . A distância euclidiana (ou simplesmente distância) entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , denotada $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é dada por*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Observação 1.11 *Tendo em conta a definição de norma de um vector, a distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é dada por*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Proposição 1.12 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Então*

D1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdade triangular);

D2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetria);

D3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Demonstração: Deixamos como exercício.

Observação 1.13 *Assim, a norma de um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a distância de \mathbf{x} à origem.*

Em \mathbb{R}^3 podemos definir mais dois produtos entre vetores, nomeadamente, o produto externo e o produto misto que vão ser útil em Capítulos que seguem (graças a aplicações em Geometria e Física).

Produto externo

Definição 1.14 *O produto externo (também chamado produto vetorial) de dois vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, denotado $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, é um vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ tal que*

- (i) $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 0$ (isto é, \mathbf{z} é ortogonal a ambos \mathbf{x} e \mathbf{y});*
- (ii) $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$, onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{y} ;*
- (iii) um observador colocado na posição terminal do vector \mathbf{z} observa a rotação mais curta de \mathbf{x} para \mathbf{y} no sentido contrário dos ponteiros do relógio.*

Exemplo 1.15 *Em particular, temos $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Lembramos que $\mathbf{i} := (1, 0, 0)$; $\mathbf{j} := (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} := (0, 0, 1)$.*

O produto externo goza das seguintes propriedades.

Proposição 1.16 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Então tem-se*

E1) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ (anti-simetria);

E2) $\mathbf{x} \times (\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) = \alpha (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + \beta (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$ sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

E3) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ sse \mathbf{x} e \mathbf{y} são **colineares** (isto é, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não nulos simultaneamente);

E4) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como lados os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} ;

E5) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}$.

Na prática, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ o vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ pode obter-se calculando o seguinte determinante (simbólico):

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Ou seja,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Demonstrações de Proposição 1.16 e da fórmula (1.2) podem ser vistas, por exemplo, em [9].

Exemplo 1.17 Consideremos os vetores $\mathbf{x} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, -1, 2)$, $\mathbf{z} = (2, -1, -3) \in \mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Exercício 1.18 Para os mesmos vetores do exemplo anterior determine $\mathbf{x} \times \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ e $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.

Produto misto

Definição 1.19 O produto misto de três vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, denotado por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ é o escalar $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Proposição 1.20 M1) Se colocamos os vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ numa sucessão da forma

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$$

então o produto misto de quaisquer três elementos consecutivos dá o mesmo valor. Em particular, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$. Por outro lado, se trocarmos a ordem de dois vetores quaisquer então o produto misto muda o sinal. Em particular, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$.

M2) O produto misto $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ é linear (isto é distributivo em relação à adição e homogêneo, ver Proposição 1.2) relativamente a cada uma das variáveis \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .

M3) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$ sse $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ são linearmente dependentes ou coplanares, isto é pertencem ao mesmo plano. Em particular, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$ se dois dos vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ coincidem.

Analogamente ao produto externo há uma fórmula que facilita cálculo do produto misto (compare com (1.2)).

Proposição 1.21 *O produto misto dos vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ é dado por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração de Proposições 1.20 e 1.21 deixamos como exercício.

Exemplo 1.22 *Nas condições do Exemplo 1.17 e utilizando a Proposição 1.20 temos*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle (4, 2, 1), (2, -1, -3) \rangle = 3,$$

o que também pode ser obtido calculando diretamente o determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$

Observação 1.23 *Do ponto de vista geométrico, o módulo do produto misto representa o volume do paralelepípedo construído sobre os vectores considerados (justifique!).*

Aplicações lineares. Hiperplanos lineares e afins

Sabemos do curso de Álgebra Linear que sobre um espaço \mathbb{R}^n (como sobre qualquer espaço linear) pode ser definida uma aplicação linear (de facto aplicação mais simples) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, que verifique as condições:

- (i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notamos que qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tem a representação $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ onde \mathbf{A} é uma $p \times n$ -matriz, e \mathbf{Ax} significa produto da matriz \mathbf{A} ao vetor \mathbf{x} . Aqui n é o número de colunas, e p é o número de linhas de \mathbf{A} (ver, por exemplo, [9]). É fácil ver que a matriz \mathbf{A} tem os elementos $f_j(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, p$. Aqui $f_j(\mathbf{e}_i)$ significa j -ma coordenada do vetor $f(\mathbf{e}_i)$. Em particular, quando $p = 1$ tal aplicação diz-se *funcional* (ou *função*) *linear*. Neste caso \mathbf{A} é uma *matriz-linha* $1 \times n$. Assinalando com $\mathbf{a} = \mathbf{A}^T$ a sua *transposta* que é um vetor de \mathbb{R}^n obtemos representação de qualquer função linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ através produto interno:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Deixamos ao cargo de leitor verificar que o vetor \mathbf{a} tem as coordenadas $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n))$.

Com uso de funções lineares introduzimos logo um class de conjuntos mais simples em \mathbb{R}^n .

Definição 1.24 *Dado $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\} \quad (1.3)$$

diz-se hiperplano afim (ou simplesmente hiperplano) em \mathbb{R}^n . Se $\alpha = 0$ tal hiperplano diz-se linear.

Observação 1.25 Se \mathbf{x}^0 é um ponto dado do hiperplano H então $\alpha = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle$, e a equação (1.3) admite forma

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = 0\}$$

ou por extenso

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0\}.$$

No caso concreto $n = 2$ todos os hiperplanos são retas no plano \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\} \quad (1.4)$$

onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto fixo na recta, e o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ define o *declive* da recta ($= a/b$ se a recta não é vertical). Analogamente, se $n = 3$ então qualquer hiperplano é um plano usual em \mathbb{R}^3 , e a representação dele é:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\}. \quad (1.5)$$

Aqui $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto dado no plano enquanto o vetor $\mathbf{a} = (a, b, c)$ determine a *orientação* do plano (não só um "declive" que no caso três-dimensional perde sentido). De facto, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ é um *vetor normal* ao plano (1.5) que é único salvo *homotetias* (isto é os vetores $\lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e só eles determinam o mesmo plano). A última observação tem lugar claro em qualquer espaço \mathbb{R}^n . Além disso, o conjunto $\{\lambda \mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ diz-se a *reta normal* ao hiperplano (1.3) (respetivamente, à recta (1.4) ou ao plano (1.5)).

Notamos que **uma recta em \mathbb{R}^3 não é um hiperplano** mas apenas intersecção de dois hiperplanos (aliás planos) apropriados.

Outra class (relativamente simples) de funções e de conjuntos envolve chamadas formas quadraticas que vamos usar sobre tudo em estudo de extremos locais de funções de várias variáveis.

Formas quadráticas

Definição 1.26 Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ diz-se uma **aplicação bilinear** se para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica as condições seguintes:

- (i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}')$;
- (ii) $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}' + \mathbf{y}') = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$;
- (iii) $f(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{x}') = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Em particular, quando $n = m$ e $p = 1$ a aplicação linear f toma o nome de **forma bilinear**.

Em outras palavras aplicação bilinear é uma aplicação que depende de dois vetore e é linear em relação a cada um.

É fácil ver (deixamos a carga de leitor de verificar isso) que a cada forma bilinear $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pode associada uma matriz $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, tal que para quaisquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ se tem

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Se em Definição 1.26 $n = m$ então diz-se que f é a *forma bilinear sobre \mathbb{R}^n* . Observamos que os produtos interno e externo introduzidos acima são exemplos de formas bilineares sobre \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^3 , respetivamente. **Justifique-o!**

Definição 1.27 *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, uma forma bilinear e \mathbf{A} é a respetiva matriz (de dimensão $n \times n$). A forma quadrática sobre \mathbb{R}^n associada a f é a aplicação $Q_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Todas as formas quadráticas podem ser expressas em termos de matrizes simétricas¹.

Proposição 1.28 *Se \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$ então para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ onde $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) / 2$ (uma matriz simétrica).*

Demonstração:

Como $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é escalar, tem-se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}$. Portanto,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}}{2} = \mathbf{x}^T \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}{2} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}.$$

Aqui nos usamos só as propriedades das matrizes transpostas. ■

Definição 1.29 *Diz-se que uma forma quadrática Q , ou uma matriz simétrica que lhe esteja associada, é*

- (i) **definida positiva** se $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$;
- (ii) **definida negativa** se $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$;
- (iii) **semidefinida positiva** se $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (iv) **semidefinida negativa** se $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (v) **indefinida** se existem pontos onde Q é positiva e pontos onde Q é negativa.

Lembramos conhecido da Álgebra Linear noção de *valores próprios* de uma $n \times n$ -matriz \mathbf{A} como todas (reais ou complexas) soluções λ da equação $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ onde $\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ a matriz identidade de ordem n .

Tem lugar seguinte critério que permite determinar se uma matriz é (semi)definida positiva (negativa) ou não.

¹Uma matriz quadrada diz-se simétrica quando é igual á sua transposta.

Proposição 1.30 *Sejam \mathbf{A} uma $n \times n$ -matriz simétrica e $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a \mathbf{A} . Então*

- (i) *Q é definida positiva (negativa) sse todos os valores próprios de \mathbf{A} são positivos (resp., negativos);*
- (ii) *Q é semidefinida positiva (negativa) sse todos os valores próprios de \mathbf{A} são não negativos (resp., não positivos).*

Demonstração deste e seguinte critério (que na prática torna-se mais fácil para aplicar) pode ser encontrada, por exemplo, em [9, p. 296].

Proposição 1.31 (Critério de Silvestre) *Seja $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática associada a uma $n \times n$ -matriz simétrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Escrevemos a lista dos números seguintes (designados por menores principais de \mathbf{A}):*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_{11}, & \Delta_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \\ \Delta_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, & \Delta_n &= \det \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Então a forma Q é:

- (i) *definida positiva sse $\Delta_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$;*
- (ii) *definida negativa sse $(-1)^k \Delta_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$;*
- (iii) *semidefinida positiva sse $\Delta_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$;*
- (iv) *semidefinida negativa sse $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$.*

Exemplos 1.32 1. A forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$, é definida positiva. Pois, está associada à matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ e tem-se $\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0$ e $\Delta_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$.

Sendo a forma Q muito simples este facto pode ser mostrado diretamente usando a definição. Basta só extrair um quadrato completo (a técnica muito vulgar em matemática). Nomeadamente, representamos

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= x^2 + 2x\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0,\end{aligned}$$

e ainda por cima pode ser igual a 0 só quando $x = y = 0$.

2. A forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2$, é definida negativa. Pois, a matriz simétrica que lhe está associada é $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e vemos que $\Delta_1 = a_{11} = -2 < 0$ e $\Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0$.
3. A forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 3xz + xy + 4yz$ é indefinida. De facto, a matriz simétrica associada aqui é $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix}$, e tem-se

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \Delta_3 = -10.$$

Exercício 1.33 Classifique as formas quadráticas seguintes

- (i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = 6x^2 + 8xy + 4y^2 + 3z^2 + 4yz$;
- (ii) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = 4x^2 + 4xy + 5y^2$;
- (iii) $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(x, y, z) = -2x^2 - 2xy + 4xz + 2yz - 2y^2 - 2z^2$.

De mesma maneira como anteriormente após a introdução de formas lineares referimos ao conjuntos que envolvem essas funções (*hiperplanos afins*), a partir das formas quadráticas podemos construir os conjuntos denominados como *quadricas* e que têm interpretação geométrica em espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 como chamadas linhas (resp., superfícies) de 2ª ordem.

Qualquer quadrica (ou *hipersuperfície de 2ª ordem*) tem representação

$$K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\} \quad (1.6)$$

onde \mathbf{A} é uma $n \times n$ -matriz simétrica (que define uma *forma quadrática* $Q(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle$), $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixo (que define uma *forma linear* $x \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$) e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como bem conhecido da Álgebra Linear (ver, por exemplo, [9]) a matriz simétrica \mathbf{A} tem exactamente n valores próprios reais λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, e existe uma *matriz ortogonal* \mathbf{T} (isto é tal que $\det \mathbf{T} \neq 0$ e $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$) com a propriedade

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T} \quad (1.7)$$

e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ é a *matriz diagonal* com $b_{ii} = \lambda_i$ e $b_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Tendo em vista a transformação (1.7) e a ortogonalidade da matriz auxiliar \mathbf{T} podemos fazer uma substituição $\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$ em (1.6) e chegar ao conjunto

$$K' := \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}', \mathbf{Bx}' \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}' \rangle = \alpha\} \quad (1.8)$$

onde $\mathbf{b} := \mathbf{T}\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Observamos que geometricamente (em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) tal mudança de variáveis significa nada que *rotação* da respetiva imagem (de linha ou superfície), isto é mudança da sua orientação no espaço. Vamos dizer que (1.8) é a forma canónica de representação de uma quadrica que por extenso dá

$$K' := \left\{ \mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + b_i x_i = \alpha \right\}. \quad (1.9)$$

Observação 1.34 *Nota-se que*

- (1) se $\lambda_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$ então o coeficiente b_i dá uma translação paralela do respectivo conjunto ao longo do eixo x_i e por isso sem perda de generalidade podemos pôr $b_i = 0$;
- (2) quando um coeficientes b_i que corresponde a um valor próprio não nulo é anulado (ver Observação (1)), o módulo de $\lambda_i \neq 0$ e $|\alpha|$ (também se $\alpha \neq 0$) sem perda de generalidade podem ser considerados iguais a 1 porque no caso contrário o quociente $\lambda_i/|\alpha|$ significa apenas extensão (contração) da respectiva imagem ao longo do eixo x_i .

Conforme Observação anterior, na classificação de quadricas podemos tomar em consideração apenas sinais de valores próprios λ_i e de α (ou o caso $\alpha = 0$) e os termos da parte linear $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ que correspondem a $\lambda_i = 0$. Vamos ilustrar tudo dito acima no caso de $n = 2$ e 3.

Em \mathbb{R}^2 escrevemos (1.9) como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_1 x + b_2 y = \alpha\}. \quad (1.10)$$

Logo excluindo casos degenerados quando (1.10) é vazio (se, por exemplo, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha < 0$), reduz-se a um ponto (se, por exemplo, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = 0$) ou a reunião de duas retas interseccionadas (se, por exemplo, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = 0$), vamos ter 3 classes de curvas de 2ª ordem completamente distintas:

- (i) *elipses* se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = 1$ (ver Observação acima). O caso particular é a *circunferência* quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Em geral, λ_i (mais exactamente $1/\sqrt{\lambda_i}$) significam os coeficientes da extensão (contração) do elipse ao longo dos eixos x ou y ;
- (ii) *hiperbolas* se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = 1$. Como no caso de elipses os coeficientes λ_1 e $|\lambda_2|$ servem para estender (contrair) a curva ao longo dos eixos x ou y , resp. Estes números indicam, em particular, a posição das assíntotas (nomeadamente, as retas $\sqrt{\lambda_1}x \pm \sqrt{\lambda_2}y = 1$ exactamente são tais assíntotas). Nota-se que o caso $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = 1$ (ou, equivalentemente, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = -1$) reduz-se ao caso anterior só alterando as variáveis x e y . Observamos ainda que a simples hipérbola

$$\{(x, y) : xy = 1\}$$

bem conhecida ainda do Secundário obtém-se da hipérbola canónica

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

(aqui $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$) com uma rotação a 45° .

- (iii) *parábolas* se $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (ou, vice versa, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$) e $b_2 = 0$ (resp., $b_1 = 0$), ver Observação acima. Sem perda de generalidade neste caso podemos por $a = 0$. Assim uma parábola (com vértice em $(0, 0)$) tem a forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_2 y^2 + b_1 x = 0\}$$

ou

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 x^2 + b_2 y = 0\}$$

e é orientada ao longo do eixo x (ou, ao longo do eixo y , resp.)

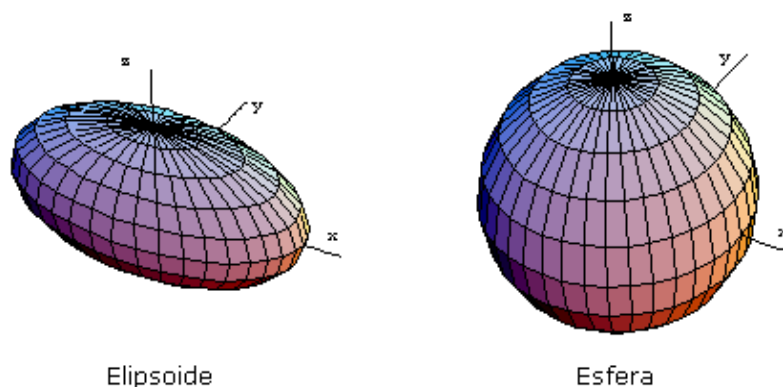


Figura 1.1:

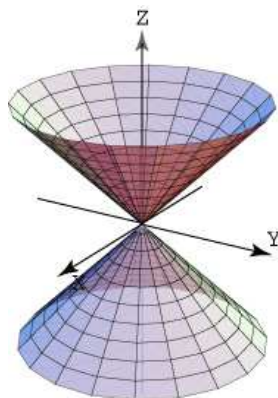


Figura 1.2:

Deixamos ao cargo do leitor fazer as respectivas imagens.

O caso \mathbb{R}^3 é mais complicado e mais variado. A forma geral de uma superfície de 2ª ordem é:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z = \alpha\}. \quad (1.11)$$

Se todos os três valores próprios $\lambda_i \neq 0$ então sem perda de generalidade pomos $b_i = 0$, $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, e $\alpha = 1$ (ou $\alpha = 0$) (ver Observação 1.34). São possíveis então **quatro** casos completamente distintos:

- (i) todos λ_i são positivos e $\alpha = 1$. Neste caso nos tem simplesmente a *esfera* centrada na origem de raio 1 (superfície de uma bola). Se $\lambda_i \neq 1$ então a esfera sofre as extensões (contrações) ao longo dos eixes x , y e z (com os coeficientes $1/\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$, resp.) e transforma-se num *elipsoide* (a forma da superfície de uma bola de regbi), ver Fig. 1.1.
- (ii) **dois** valores próprios são positivos e **um** negativo (*por exemplo*, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$) e $\alpha = 0$. Tal superfície diz-se *cone circular* ou *cone de revolução* (torna-se *cone elíptico* se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ são quaisquer), ver Fig. 1.2.

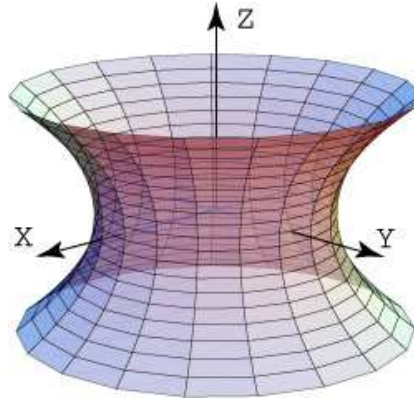


Figura 1.3:

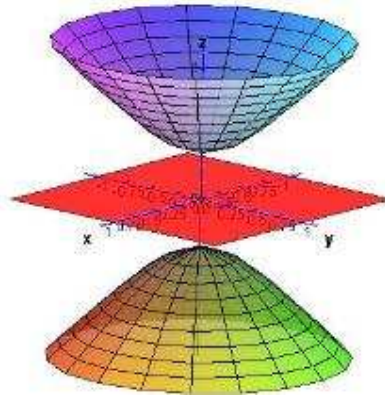


Figura 1.4:

- (iii) como no caso (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$ mas $a = 1$. Escrevemos a equação na forma

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2$$

e observamos que o plano horizontal $\{z = 0\}$ corte esta superfície pela circunferência $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Tal superfície diz-se *hiperboloide de revolução* (em relação ao eixo Oz) *de uma folha* que torna-se *hiperboloide elíptico de uma folha* caso os coeficientes λ_1 e λ_2 não necessariamente iguais a 1 (no entanto sempre positivos), ver Fig. 1.3.

- (iv) se com mesmos sinais de λ_i , $i = 1, 2, 3$, como nos dois casos anteriores pomos $a = -1$ então o plano horizontal $\{z = 0\}$ não intersecta a superfície que por isso divide-se em duas partes separados e chama-se *hiperboloide elíptico (de revolução caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) de duas folhas*, ver Fig. 1.4.

Se nos casos (i)-(iii) há outra distribuição dos sinais entre λ_i (sempre dois positivos e um negativo) então altera-se a orientação do cone (resp., do hiperboloide de uma ou de duas folhas) em relação dos eixos coordenados. Nomeadamente, em vez de Oz eixo coordenado Ox ou Oy torna-se o eixo central do cone ou do hiperboloide (ou o eixo de revolução).

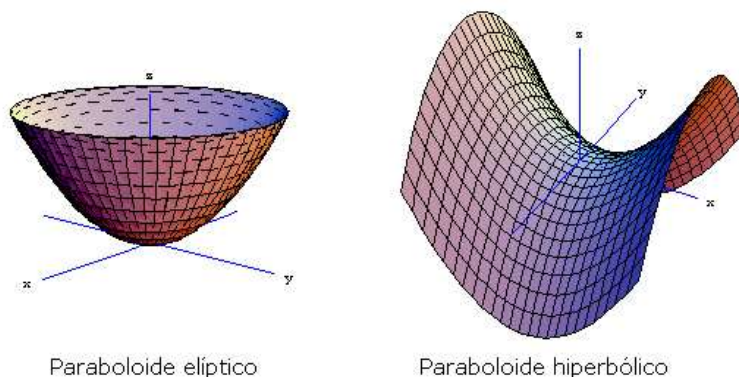


Figura 1.5:

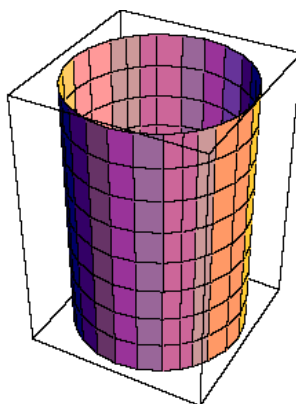


Figura 1.6:

Se um dos vetores próprios (seja λ_3) se anula então sem perda de generalidade podemos supor que $b_1 = b_2 = \alpha = 0$, e nos temos **dois** casos distintos:

- (i) *parabolóide elíptico* se λ_1 e λ_2 têm mesmos sinais, por exemplo, ambos positivos (diz-se *parabolóide de revolução* em torno de eixo Oz se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), ver Fig. 1.5.
- (ii) *parabolóide hiperbólico* se λ_1 e λ_2 têm sinais diferentes (seja $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$). Tal superfície está mostrada na Fig. 5 também. Num caso mais simples a sua equação é

$$z = x^2 - y^2.$$

Para além dos casos considerados acima pode acontecer que uma das variáveis x , y ou z está ausente na equação (1.11). Tal superfície diz-se *cilíndrica* com o eixo Ox , Oy ou Oz (dependentemente de qual variável está em falta). Por exemplo, se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ e $\alpha = 1$ nos temos o *cilindro elíptico* "estendido" ao longo do eixo Oz , ver Fig. 1.6.

Outros casos, se não degenerados (como, por exemplo, se $\lambda_i > 0$, $b_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, mas $\alpha \leq 0$ ou se todos os três λ_i são iguais a 0) facilmente reduzem-se à classificação apenas descrita.

Exercício 1.35 *Averigue que tipo de superfície está definida com a equação (1.11) se dois dos valores próprios anulam-se, sejam $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$ e $b_3 = 0$. Construa tal superfície num caso particular $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $\alpha = 0$.*

Recorrendo à noção de norma (tal como no caso de \mathbb{R} recorremos à de módulo) ou, se preferirmos, à de distância, podemos agora introduzir várias noções topológicas extendendo ao caso de \mathbb{R}^n respetivos conceitos conhecidos da Análise Matemática I (para reta numérica \mathbb{R}). Essas noções tornam-se importantes sobre tudo no Cálculo Diferencial onde estuda-se comportamento local de uma função (isto é numa vizinhança de um ponto).

1.2 Noções topológicas em \mathbb{R}^n .

Em maioria dos casos funções de uma variável consideram-se definidas sobre os intervalos abertos ou fechados da reta numérica. Uma generalização imediata de intervalos no espaço \mathbb{R}^n dá o conceito de *bola aberta* (e *fechada*) donde deriva depois a noção de *conjuntos abertos* e outras noções topológicas em \mathbb{R}^n

Definição 1.36 *Sejam $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. O conjunto de todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ ($\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \varepsilon$) chama-se **bola aberta** (resp., **bola fechada**) de raio ε e centro \mathbf{a} e representa-se por $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ ou $B(\mathbf{a}; \varepsilon)$ (resp., por $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{a})$ ou $\overline{B}(\mathbf{a}; \varepsilon)$).*

Em \mathbb{R} a bola aberta (fechada) é, simplesmente, o intervalo aberto centrado em a e de raio ε (também conhecido por vizinhança de a de raio ε): $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ (ou $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, resp.). Em \mathbb{R}^2 a bola é o círculo de centro \mathbf{a} e raio ε , isto é, o conjunto de todos os pontos do plano cuja a distância ao ponto \mathbf{a} é menor (menor ou igual) do que ε .

Definição 1.37 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.*

- (i) *Diz-se que \mathbf{a} é ponto interior de A se existe uma bola com centro em \mathbf{a} , cujos pontos pertencem todos a A , i.e., se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.*

O conjunto de todos os pontos interiores de A diz-se o interior de A e representa-se por $\text{int } A$.

- (ii) *Diz-se que \mathbf{a} é ponto fronteiro de A se para qualquer $\varepsilon > 0$ se tem $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

O conjunto de todos os pontos fronteiros de A chama-se fronteira de A e representa-se por $\text{fr } A$ ou ∂A .

- (iii) *Diz-se que \mathbf{a} é ponto aderente a A se qualquer bola centrada em \mathbf{a} intersecta A , ou seja, se para qualquer $\varepsilon > 0$ se tem $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \emptyset$.*

O conjunto de todos os pontos aderentes a A chama-se aderência ou fecho de A , e representa-se por \overline{A} .

Obviamente para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\text{int } A \subset A \subset \overline{A}.$$

As situações quando inclusões tornam-se igualdades merecem uma definição especial.

Definição 1.38 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$.*

(i) *Diz-se que A é aberto se $A = \text{int } A$.*

(ii) *Diz-se que A é fechado se $A = \overline{A}$.*

Um exemplo de conjunto aberto em \mathbb{R}^n é a bola aberta $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ (para quaisquer $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$). Pois, seja $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$, logo $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ donde $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \varepsilon - \delta$ para algum $\delta > 0$. Então $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$. De facto, a relação $\mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{y})$, isto é $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < \delta$, implica que

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon,$$

isto é, $\mathbf{z} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$. Por isso $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset \text{int } B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$.

Analogamente a bola fechada $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \varepsilon\}$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$) é um conjunto fechado. **Justifique-o!**

Observamos que \emptyset e \mathbb{R}^n são únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados em \mathbb{R}^n .

Todas as propriedades dos conjuntos abertos e fechados conhecidas em \mathbb{R} são válidas também no espaço \mathbb{R}^n . Em particular, para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tem-se

1. A é aberto sse $\mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
3. $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$.

Deixamos ao cargo de leitor de verificar as propriedades acima.

Acontece que dados dois conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ abertos em respectivos espaços, o produto cartesiano $A \times B$ é aberto no espaço \mathbb{R}^{n+m} . De facto, todo ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B$ onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in B$ pode ser representado de forma $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ onde $x_{n+1} = y_1, \dots, x_{n+m} = y_m$. Nos raciocínios seguintes vamos denotar a bola nos espaços \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m ou \mathbb{R}^{n+m} de mesmo símbolo. Uma vez que \mathbf{x} é ponto interior de A , existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}) \subset A$. Analogamente, como $\mathbf{y} \in \text{int } B$, para algum $\varepsilon_2 > 0$ tem-se $B_{\varepsilon_2}(\mathbf{y}) \subset B$. Pomos agora

$$\varepsilon := \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Seja $\mathbf{z} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Então $\mathbf{z} = (x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m})$ onde $\mathbf{x}' := (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}' := (x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m}) \in \mathbb{R}^m$ e

$$\|\mathbf{z} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{n+m} := \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_{n+m} - x_{n+m})^2} < \varepsilon$$

donde imediatamente sai que

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| := \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2} < \varepsilon \leq \varepsilon_1$$

e

$$\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| := \sqrt{(x'_{n+1} - x_{n+1})^2 + \dots + (x'_m - x_m)^2} < \varepsilon \leq \varepsilon_2.$$

As últimas desigualdades significam que $\mathbf{x}' \in A$ e $\mathbf{y}' \in B$ e por isso $\mathbf{z} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in A \times B$. Logo $A \times B \subset \text{int}(A \times B)$, e o conjunto $A \times B$ é aberto. Com esta propriedade podemos construir classes de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n a partir de conjuntos abertos em espaços de dimensão menor. Por exemplo, considerando dois intervalos abertos $]a_1, b_1[$ e $]a_2, b_2[$ em \mathbb{R} , temos que o retângulo

$$P := \{(x, y) : a_1 < x < b_1 \text{ e } a_2 < y < b_2\} \quad (1.12)$$

é um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 . Depois, a partir de retângulo e um outro intervalo construi-se um paralelepípedo aberto em \mathbb{R}^3 , etc.

Por outro lado, dados dois conjuntos fechados $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ (em respectivos espaços) tem-se que o produto cartesiano $A \times B$ é fechado em \mathbb{R}^{n+m} . Para ver isso temos de mostrar que $\overline{A \times B} \subset A \times B$. De facto, sejam $\mathbf{z} \in \overline{A \times B}$ e $\varepsilon > 0$. Pela definição de ponto aderente existe $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B$ com $\|\mathbf{z} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{n+m} < \varepsilon$. Representando $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ e $\mathbf{z} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ onde $\mathbf{x}' := (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}' := (y'_1, \dots, y'_m) \in \mathbb{R}^m$, obviamente temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_n &:= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2 + (y'_1 - y_1)^2 + \dots + (y'_m - y_m)^2} \\ &= \|\mathbf{z} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{n+m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|_m < \varepsilon$. Como $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in B$ e $\varepsilon > 0$ é arbitrário, daqui concluímos que $\mathbf{x}' \in \overline{A} = A$ e $\mathbf{y}' \in \overline{B} = B$. Logo $\mathbf{z} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in A \times B$, e o conjunto $A \times B$ é fechado. Aplicando esta propriedade podemos construir o *retângulo fechado*

$$\overline{P} := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1 \text{ e } a_2 \leq y \leq b_2\}$$

a partir dos intervalos fechados $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ em \mathbb{R} (compare com (1.12)).

Demos mais algumas propriedades de conjuntos abertos e fechados e algumas definições úteis.

Proposição 1.39 (i) *A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

(ii) *A reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

(iii) *A reunião de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

(iv) *A intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração: Ver [1].

Definição 1.40 Diz-se que um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma **vizinhança** de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V \supset B_\varepsilon(\mathbf{a})$ (isto é, V contém \mathbf{a} e uma bola centrada em \mathbf{a}). Se V é um conjunto aberto diz-se que V é uma **vizinhança aberta**.

Definição 1.41 Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n .

(i) Diz-se que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é **ponto de acumulação** de A se qualquer bola centrada em \mathbf{a} tem pelo menos um ponto de A distinto de \mathbf{a} , isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se $A \cap (B_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}) \neq \emptyset$.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de A chama-se **conjunto derivado** de A e representa-se por A' .

(ii) Um ponto $\mathbf{a} \in A$ que não seja ponto de acumulação diz-se **ponto isolado** de A , isto é, \mathbf{a} é ponto isolado de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A = \{\mathbf{a}\}$.

Observação 1.42 Da definição anterior resulta que um ponto isolado de A pertence a A e que um ponto de acumulação de A pode não pertencer a A .

Observação 1.43 Para ver a diferença entre A' e \overline{A} consideremos, por exemplo, o conjunto $A = [0, 1[\cup \{2\} \subset \mathbb{R}$. Temos $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$ e $A' = [0, 1]$ enquanto 2 é um ponto isolado de A .

Observação 1.44 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. As afirmações seguintes são consequências das definições anteriores:

(i) $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

(ii) $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A = A \cup \partial A = A \cup A'$.

Exemplo 1.45 Se A é a bola $B_1(\mathbf{0})$ em \mathbb{R}^2 temos $\text{int } A = A$, $\mathbb{R}^n \setminus A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$, $\partial S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, $\overline{A} = \overline{B}_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

O conjunto $S_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \varepsilon\}$ é a fronteira das bolas $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ e $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{a})$ e chama-se **esfera** de raio ε centrada no ponto \mathbf{a} .

Observação 1.46 Note que, em geral, $\text{int } A \neq \text{int } \overline{A}$. Para verificar esta afirmação considere, por exemplo, o conjunto $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. De facto, tem-se $\text{int } A = \emptyset$ enquanto

$$\begin{aligned} \text{int } \overline{A} &= \text{int } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Exercício 1.47 Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ dado por $A = B_1(\mathbf{0}) \cup \{(2, 2)\}$.

a) Determine $\text{int } A$, \overline{A} e A' .

b) Diga, justificando, se A é aberto e/ou fechado.

c) Verifique se $\overline{\text{int } A} = \overline{A}$.

Definição 1.48 Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um número real $L > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in A$ se tenha $\|\mathbf{x}\| \leq L$.

Exemplo 1.49 O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \geq 0\}$ não é limitado. (**Justifique!**)

Definição 1.50 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \subset B$. Diz-se que A é denso em B se $B \subset \overline{A}$.

Exemplo 1.51 O conjunto $\mathbb{Q}^n := \{(r_1, \dots, r_n) : r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n\}$ é denso em \mathbb{R}^n .

Conjuntos conexos. Curvas

Definição 1.52 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se topologicamente conexo se não existem dois conjuntos abertos (ou fechados) disjuntos A e B (isto é $A \cap B = \emptyset$) tais que $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ e $X \subset A \cup B$.

Na Análise usa-se também outro conceito de conexidade, mas para o apresentar dele precisamos primeiro de introduzir os conceitos de caminho e de curva.

Definição 1.53 Um caminho em \mathbb{R}^n definido num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma função contínua $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Observação 1.54 Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, o caminho $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por $r(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ chama-se o **caminho rectilíneo** que liga \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Exemplo 1.55 O caminho rectilíneo que liga $(1, 2, 3)$ a $(2, 2, 1)$ é $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$r(t) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2) = (1 + t, 2, 3 - 2t).$$

Definição 1.56 A imagem C de um caminho $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se **curva** em \mathbb{R}^n .

Se $r(a) = r(b)$, a curva diz-se **fechada**.

Observação 1.57 Por vezes confunde-se a curva com o caminho (que diz-se também a sua **parametrização**). Uma mesma curva pode ser parametrizada de várias maneiras. Por exemplo,

$$\begin{array}{ll} r_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 & e \quad r_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow (t, t) & t \rightarrow (1 - t, 1 - t) \end{array}$$

definem a mesma curva:

$$r_1([0, 1]) = r_2([0, 1]) = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}.$$

Definição 1.58 O caminho $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se:

- (i) **regular** se for de classe \mathcal{C}^1 e $r'(t) \neq \mathbf{0}$ para qualquer $t \in]a, b[$;
- (ii) **seccionalmente regular** se existe uma partição finita do intervalo $[a, b]$ tal que r é regular em cada um dos subintervalos dessa partição.

Exemplo 1.59 A função $r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = (t, |t|)$ é contínua em $[-1, 1]$ logo é um caminho em \mathbb{R}^2 . A derivada existe, é contínua e diferente de $\mathbf{0}$ para qualquer $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, logo trata-se de um caminho regular em $[-1, 0]$ e $[0, 1]$, ou seja, seccionalmente regular em $[-1, 1]$.

Definição 1.60 Dois caminhos $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dizem-se **equivalentes** se existe uma aplicação bijectiva continuamente diferenciável $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tal que $\varphi'(t) \neq 0$ e $\tilde{r}(t) = r(\varphi(t))$ para qualquer $t \in [c, d]$.

Se $\varphi'(t) > 0$ diz-se que r e \tilde{r} têm o **mesmo sentido**; se $\varphi'(t) < 0$ diz-se que r e \tilde{r} têm **sentidos opostos**; no primeiro caso diz-se que a função φ **preserva o sentido**, e no segundo caso que **inverte o sentido** (nota-se que sendo contínua e diferente de zero a derivada $\varphi'(t)$ não pode alterar sinal no segmento $[c, d]$).

Observação 1.61 *Quaisquer dois caminhos equivalentes definem a mesma curva.*

Exemplo 1.62 *A elipse $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ percorrida no sentido anti-horário é parametrizada por*

$$r(t) = (3 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

A parametrização

$$r_1(t) = (3 \cos(2t), 2 \sin(2t)), \quad t \in [0, \pi]$$

também descreve a mesma elipse. De facto, $r_1(t) = r(\varphi(t))$ onde $\varphi: [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ é dada por $\varphi(t) = 2t$.

Já a parametrização

$$r_2(t) = (3 \cos(2t), 2 \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

*percorre a elipse duas vezes, mas não é equivalente a r nem a r_1 . Neste caso dizemos que r_2 é um caminho com **multiplicidade 2**.*

Definição 1.63 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se conexo por arcos (ou apenas conexo) se para cada par de pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ existe um caminho $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $r(t) \in X$ para qualquer $t \in [\alpha, \beta]$, $r(\alpha) = \mathbf{x}$ e $r(\beta) = \mathbf{y}$.*

Proposição 1.64 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por arcos então X é topologicamente conexo.*

O exemplo seguinte mostra que o contrário não é verdade

Exemplo 1.65 *Consideremos o conjunto*

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

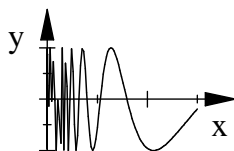


gráfico da função $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$

Claro que X é topologicamente conexo porque $(0, 0)$ é ponto de acumulação de X , mas não é simplesmente conexo porque não se pode ligar nenhum ponto da forma $(x, \sin \frac{1}{x})$ à origem por uma curva verificando as condições da Definição 1.63.

Definição 1.66 *Um subconjunto A de \mathbb{R}^n diz-se **convexo** se dados dois pontos em A o segmento (caminho rectilíneo) que os une também está em A .*

Nota 1.67 *Todo o conjunto convexo é conexo. Mas o contrário, obviamente, não é verdade.*

Todos os conceitos topológicos podem ser caracterizados em termos de sucessões, tal como em \mathbb{R} .

1.3 Sucessões em \mathbb{R}^n

Definição 1.68 Uma **sucessão** em \mathbb{R}^n é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada $m \in \mathbb{N}$ associa o ponto $f(m)$ denotado por $\mathbf{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in \mathbb{R}^n$, e chamado ***m*-ésimo termo** da sucessão. Em vez de f escrevemos $\{\mathbf{x}^m\}$ para denotar a sucessão. Se $\{k_m\}$ é uma sucessão de números naturais tal que $m_1 > m_2$ implica $k_{m_1} > k_{m_2}$ (i.e., a ordem de k coincide com a ordem dos índices m), então a sucessão $\{\mathbf{x}^{k_m}\}$ chama-se **subsucessão** de $\{\mathbf{x}^m\}$.

Definição 1.69 Diz-se que a sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ **converge** para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e escreve-se $\mathbf{x}^m \rightarrow \mathbf{x}$ quando $m \rightarrow \infty$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $m^* \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $m \geq m^*$ se tem $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$. Então o vetor \mathbf{x} diz-se **limite** da sucessão $\{\mathbf{x}^m\}$ e denota-se também por $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^m$.

Observação 1.70 Da definição anterior é imediato que $\mathbf{x}^m \rightarrow \mathbf{x}$ quando $m \rightarrow \infty$ é equivalente a $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$. Isto reduz a convergência em \mathbb{R}^n à convergência de números reais (não negativos).

Exercício 1.71 Mostre que o limite de sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ (se existe) é sempre **único**.

Exemplo 1.72 A sucessão em \mathbb{R}^3 com termo geral

$$\mathbf{x}^m = \left(\frac{m^2 - 1}{m^2}, 0, \frac{1}{3^m} \right)$$

converge para o vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$. Para mostrar basta ter em conta que

$$\|\mathbf{x}^m - \mathbf{e}_1\| = \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{3^{2m}}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Definição 1.73 O limite de qualquer subsucessão $\{\mathbf{x}^{k_m}\}$ da sucessão $\{\mathbf{x}^m\}$ chama-se **sublimite** de $\{\mathbf{x}^m\}$.

Ao contrário do limite, o sublimite não é necessariamente único.

É fácil ver que a convergência de uma sucessão é equivalente à convergência da sucessão das suas coordenadas. Formulamos este facto como afirmação seguinte e deixamos ao cargo de leitor a sua demonstração.

Proposição 1.74 A sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$, $m = 1, 2, \dots$, converge para um ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sse para cada $i = 1, 2, \dots, n$ tem-se $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = x_i$.

De mesma maneira como para sucessões de números reais em \mathbb{R} tem lugar um critério de convergência de uma sucessão chamado *critério de Cauchy* (ver, por exemplo, [7, Teorema 7, p.17]).

Teorema 1.75 (Critério de Cauchy) Uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ é convergente sse dado $\varepsilon > 0$ existe um número $m^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^p\| \leq \varepsilon$$

para todos $m, p \geq m^*$.

As vezes a propriedade anunciada em teorema acima (chamada *propriedade de Cauchy*) diz-se também "*convergência em si*" sublineando o facto que as distâncias entre termos da sucessão tendem a zero quando ambos índices tendem ao infinito.

Com uso de sucessões (e seus limites) podem ser interpretados várias noções topológicas.

Proposição 1.76 *Têm lugar seguintes propriedades.*

1. Um ponto \mathbf{x} é aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ sse existe uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset A$ convergente a \mathbf{x} .
2. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}^n$ sse existe uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset A$, $\mathbf{x}^m \neq \mathbf{x}$, convergente a \mathbf{x} .
3. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado sse o limite de qualquer sucessão convergente de elementos de A pertence a A .
4. $x \in \partial A$ sse existem duas sucessões $\{\mathbf{x}^m\}$ e $\{\mathbf{y}^m\}$, ambas convergentes a \mathbf{x} , tais que $\mathbf{x}^m \in A$ e $\mathbf{y}^m \in \mathbb{R}^n \setminus A$ para todos $m = 1, 2, \dots$.

Formulamos em conclusão um dos resultados fundamentais da Análise nos espaços \mathbb{R}^n que junto com o Critério de Cauchy (ver acima) forma base topológica dessa disciplina. Demos primeiro uma definição.

Definição 1.77 Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se qualquer sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset A$ admite pelo menos um sublimite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que pertence a A .

Teorema 1.78 (de Bolzano-Weierstrass) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto sse A é limitado e fechado.

Exemplo 1.79 A esfera $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 3\}$ é um conjunto compacto. (**Justifique!**)

1.4 Funções. Limite e continuidade

Conceitos gerais. Domínio. Conjuntos de nível

Iniciamos o estudo das funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m com a introdução de alguns conceitos já conhecidos no caso das funções reais de variável real, nomeadamente, os conceitos de função, domínio, contradomínio entre outros.

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$. Chama-se *função definida em A com valores em B* , a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento $\mathbf{x} \in A$ faz corresponder um único elemento $\mathbf{y} \in B$ e representa-se por $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é a *variável independente* e \mathbf{y} é a *variável dependente*. Em vez de $f(\mathbf{x})$ vamos também escrever $f(x_1, \dots, x_n)$ sendo x_1, \dots, x_n coordenadas do ponto (vetor) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

O conjunto A dos pontos onde a função está definida chama-se *domínio* de f e representa-se por D_f ou $D(f)$. Chama-se *contradomínio* de f e representa-se por CD_f ou $CD(f)$ ao subconjunto de B que contém todos os valores que a função toma, isto é

$$CD(f) := \{\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D(f)\}$$

O *gráfico* de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B : \mathbf{x} \in A \text{ e } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.$$

Diz-se que $f : A \rightarrow B$ é uma *função real de variável real* quando $n = m = 1$. Quando $m = 1$ mas $n > 1$ diz-se que f é uma *função (real ou escalar) de n variáveis* (reais). Finalmente, se ambos $n > 1$ e $m > 1$ nos vamos dizer que f é uma *função (ou aplicação) vetorial*. No último caso representando na forma coordenada a variável independente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ e a variável dependente $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ escrevemos

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

que é equivalente ao "sistema" de m funções reais (cada uma de n variáveis)

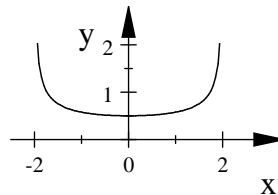
$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Aqui cada função f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, associa a $\mathbf{x} \in D(f)$ a m -ésima coordenada do vetor \mathbf{y} . As vezes domínio de uma função f_i pode ser mais largo que $D(f)$ (onde está definida aplicação vetorial). Neste caso $D(f)$ determina-se como a interseção $D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m$.

Exemplos 1.80 (1) Consideremos a função real de variável real $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Esta função tem por domínio o conjunto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\} =]-2, 2[$$

e contradomínio o conjunto $[\frac{1}{2}, +\infty)$, sendo o gráfico



(2) Consideremos a função escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Temos

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad CD_f = [0, 1],$$

e

$$\begin{aligned} Gr(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\} \end{aligned}$$

é o semiesfério superior de raio 1 centrado na origem.

(3) Consideremos a função vetorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = \left(\ln x, \sqrt{y}, \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$. Esta função é constituída por 3 **funções coordenadas** $f_i : D_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, tais que

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \ln x, & D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \\ f_2(x, y) &= \sqrt{y}, & D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \\ f_3(x, y) &= \frac{x^2}{x^2+y^2}, & D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}. \end{aligned}$$

O domínio da função f é igual à intersecção dos domínios das suas funções coordenadas:

$$D_f = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}.$$

A representação gráfica de uma função real de variável real faz-se num espaço de dimensão 2, e a de uma função escalar definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ faz-se num espaço de dimensão 3. Em casos de dimensões maiores costuma-se recorrer chamados assim *conjuntos de nível*.

Definição 1.81 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in CD_f$. Chama-se **conjunto de nível** c ao conjunto

$$L(c) = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = c\}.$$

No caso $n = 2$ o conjunto $L(c)$ diz-se uma **linha de nível** enquanto no caso $n = 3$ diz-se uma **superfície de nível**.

Exemplo 1.82 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função escalar do Exemplo 1.80(2). As linhas nível dela são circunferências centradas em $(0, 0)$ de raio $\sqrt{1 - c^2}$. Por exemplo, a curva de nível $L(0)$ é a circunferência centrada em $(0, 0)$ de raio 1 que é dada por

$$\begin{aligned} L(0) &= \{(x, y) \in D : \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0\} \\ &= \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Modos de definição de funções de várias variáveis

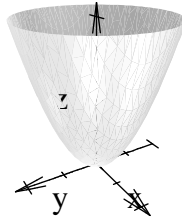
Tal como acontece com as funções reais de variável real, também as funções de várias variáveis podem ser definidas de diferentes maneiras. No entanto nem sempre é possível passar de uma para outra. Por exemplo, em geral, não é possível escrever de forma explícita uma função que é dada implicitamente, como veremos mais à frente. Temos então as seguintes formas de definir uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

- (i) *explícita* quando é dada uma expressão analítica da função f , $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Exemplo (em \mathbb{R}^2): $z = f(x, y) = x^2 \sin(2y)$;
- (ii) *implícita* quando não há uma expressão analítica f mas é dada uma função $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in D$ existe um único $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz a equação $F(\mathbf{x}, z) = 0$. Neste caso diz-se que z é uma função de \mathbf{x} definida implicitamente. Por exemplo z como função de x e y (variáveis independentes em \mathbb{R}^2) pode ser dada através da equação $F(x, y, z) = xe^z \cos(xy) - \ln(y^2 + 1) = 0$. Neste exemplo z pode ser escrita explicitamente em função de x e y . Basta só resolver a equação acima em ordem de z (considerando x e y como os parâmetros), e nos obtemos

$$z = f(x, y) = \ln \ln(y^2 + 1) - \ln \cos(xy) - \ln x.$$

Justifique! Mas esta passagem nem sempre é possível, como acontece, por exemplo, com a equação $xz = \sin(y + z)$.

- (iii) *gráfica* quando é dado o gráfico da função, isto é, o conjunto $\{(\mathbf{x}, z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(\mathbf{x})\}$. Esta representação tem sentido geométrico e logo significado especial apenas para $n = 1$ ou $n = 2$. Por exemplo a superfície seguinte (*paraboloide de revolução*, ver Secção 1.1)



representa o conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ que é o gráfico da função de duas variáveis $f(x, y) = x^2 + y^2$;

- (iv) *paramétrica* quando o gráfico da função f se representa como o conjunto

$$\{(\mathbf{x}, z) : \mathbf{x} = X(\mathbf{u}), z = Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in G\},$$

para algum conjunto de parâmetros $G \subset \mathbb{R}^n$ e funções (paramétricas) $X : G \rightarrow D$ e $Z : G \rightarrow \mathbb{R}$. Nota-se que a dimensão do espaço de parâmetros coincide com a dimensão do domínio. Demos alguns exemplos.

- (a) Dado fixo $r > 0$, as equações

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi$$

representam uma esfera de raio r centrada na origem se os parâmetros θ e φ pertencem aos intervalos $[0, 2\pi]$ e $[0, \pi]$, respetivamente. Aqui

$$\begin{aligned} G &: = [0, 2\pi] \times [0, \pi], \\ X(\theta, \varphi) &: = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi), \\ Z(\theta, \varphi) &: = r \cos \varphi. \end{aligned}$$

(b) As equações

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r^2 \quad (1.13)$$

representam parametricamente o parabolóide de revolução considerado na alínea (iii).
Aqui o conjunto de parâmetros

$$G := \{(r, \theta) : r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e

$$\begin{aligned} X(r, \theta) &: = (r \cos \theta, r \sin \theta), \\ Z(r, \theta) &: = r^2. \end{aligned}$$

Para ver isso basta passar da forma paramétrica (1.13) à forma explícita ou implícita.
Levantando aos quadrados as primeiras duas equações e somando tem-se

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 = z.$$

(c) Dado $r > 0$, as equações

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad z = \pm \sqrt{1 + r^2},$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$ representam um *hiperboloide de revolução de duas folhas*,

(d) para cada $r > 1$, as equações

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad z = \pm \sqrt{r^2 - 1},$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$ representam um *hiperboloide de revolução de uma folha*.

Justifique as alíneas (c) e (d) usando as definições de Secção 1.1. Nota-se que uma função definida parametricamente nem sempre pode ser representada explicitamente ou implicitamente (aliás tal representação é possível em situações bastante raras).

Limite de uma função

Os conceitos de limite e de continuidade, assim como as suas propriedades, introduzidos na Análise Matemática I, são facilmente generalizáveis a funções de várias variáveis.

Tal como para funções reais de variável real, o conceito de limite num ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ para uma função definida numa parte D de \mathbb{R}^n , exige que a variável independente $\mathbf{x} \in D$ se possa aproximar arbitrariamente do ponto \mathbf{a} . Assim, sendo irrelevante que \mathbf{a} pertença ou não a D , é porém necessário que \mathbf{a} seja *ponto de acumulação* de D , para que nos possamos aproximar de \mathbf{a} através de pontos em $D \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Definição 1.83 (de Heine) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, uma aplicação e \mathbf{a} um ponto de acumulação de D (simbolicamente $\mathbf{a} \in D'$). Diz-se que o ponto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o **limite de f quando x tende para \mathbf{a}** , com $\mathbf{x} \in D$, se para cada sucessão $\{\mathbf{x}^k\} \subset D$, $\{\mathbf{x}^k\} \rightarrow \mathbf{a}$, $k \rightarrow \infty$, tem-se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{b}.$$

Neste caso escreve-se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ou, simplesmente, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ (se D está fixado).

Definição 1.84 (de Cauchy) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, e $\mathbf{a} \in D'$. Diz-se que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o **limite de f quando x tende para \mathbf{a}** , com $\mathbf{x} \in D$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n \leq \delta \text{ implica } \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_m \leq \varepsilon. \quad (1.14)$$

Recorde que $\|\cdot\|_n$ e $\|\cdot\|_m$ denotam a norma euclideana em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente. Quando não houver perigo de confusão escrevemos simplesmente $\|\cdot\|$ para denotar qualquer uma delas.

Demonstra-se, analogamente como em \mathbb{R} , que as definições de Heine e de Cauchy são equivalentes, mas não vamos fazer isso aqui.

Observação 1.85 *O limite em (1.14) é equivalente ao limite nulo da função escalar $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|$:*

$$\lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = 0.$$

Denotando por f_j e b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) a coordenada j de f e de \mathbf{b} , respectivamente, temos, por (1.1),

$$\max_{j=1,2,\dots,m} |f_j(\mathbf{x}) - b_j| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq \sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{x}) - b_j|. \quad (1.15)$$

A ultima desigualdade permite-nos estabelecer o seguinte resultado

Proposição 1.86 *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in D'$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Temos*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Observação 1.87 *Para perceber melhor a Definição 1.84 suponhamos que $m = 1$ e sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D'$ e $b \in \mathbb{R}$. Pela definição de norma euclideana dizer que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ significa que o valor da função f pode ser arbitrariamente próximo de b se a distância de \mathbf{x} ao ponto \mathbf{a} for suficientemente pequena. Observemos que a distância de \mathbf{x} a \mathbf{a} pode ser medida no sentido da norma euclideana ou através das coordenadas (isto é, calculando a distância de cada coordenada de \mathbf{x} à respectiva coordenada de \mathbf{a} - ver (1.15)).*

Exemplo 1.88 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.*

Provemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Temos então de mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com a propriedade que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implicam a desigualdade

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon. \quad (1.16)$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ logo temos

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Assim, escolhendo $0 < \delta \leq \varepsilon$ tem-se (1.16).

Proposição 1.89 (Unicidade do limite) *O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.*

Demonstração:

Sai directamente da definição de Heine e da unicidade do limite de uma sucessão. ■

Directamente da definição saem seguintes propriedades de limites.

Proposição 1.90 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se $\mathbf{a} \in D'$ e $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ então a função f é limitada em torno do ponto \mathbf{a} , isto é, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $\|f(\mathbf{x})\| \leq M$ para todo o $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$.*

Demonstração:

Por definição de limite para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in D$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, encontramos $\delta > 0$ com

$$(\mathbf{x} \in D, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < 1.$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular para $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$ temos

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\| \leq M := \|\mathbf{b}\| + 1.$$

■

Proposição 1.91 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in D'$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ e $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, então tem-se*

$$(a) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \mathbf{b} + \mathbf{c};$$

$$(b) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b};$$

$$(c) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle;$$

$$(d) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \text{ se } m = 3;$$

$$(e) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{b}\|;$$

$$(f) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}, \text{ se } m = 1 \text{ e } \mathbf{c} \neq 0.$$

Demonstração:

Provaremos apenas a propriedade (c). A (d) demonstra-se de forma análoga, e as outras provam-se da mesma maneira que as propriedades correspondentes para as funções reais de variável real.

Suponhamos que $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Aplicando a desigualdade triangular do módulo e as propriedades do produto interno (em particular, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ver Proposição 1.6 (i)) obtemos

$$\begin{aligned} |\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle| &= |\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x}) \rangle| + |\langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle| \\ &= |\langle f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}, g(\mathbf{x}) \rangle| + |\langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x}) - \mathbf{c} \rangle| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \|g(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{b}\| \|g(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\|. \end{aligned}$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Usando a definição limites e a Proposição 1.90 encontramos $\delta_1 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|g(\mathbf{x})\| \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_1;$$

$\delta_2 > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_2$$

e $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{b}\|} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_3.$$

Pondo $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ vemos que para todo $\mathbf{x} \in D$ com $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta$ tem-se

$$|\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \|\mathbf{b}\| \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{b}\|} = \varepsilon.$$

O caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ é óbvio e é deixado como exercício. ■

Quando estudámos limites de funções reais de variável real vimos que existem dois limites particularmente importantes: o *limite lateral direito* de f em a e o *limite lateral esquerdo* de f em a . Vimos também que uma função real de variável real tem limite num ponto a sse existem, forem finitos e iguais os dois limites laterais.

No caso de funções de várias variáveis a situação é mais complexa. Não existem apenas dois caminhos possíveis para nos aproximarmos de \mathbf{a} , mas sim uma infinidade deles, e não é possível calcular o limite ao longo de todos caminhos. No entanto, tal como anteriormente, se existirem dois caminhos diferentes ao longo dos quais o limite é diferente, podemos concluir que não há limite da função no ponto \mathbf{a} .

Para explicar melhor o que acabámos de afirmar precisamos do seguinte conceito.

Definição 1.92 Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função e A é um subconjunto de D , chama-se restrição de f ao conjunto A e representa-se por $f|_A$ à função que tem por domínio A e verifica a condição $f|_A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$.

Definição 1.93 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e \mathbf{a} um ponto de acumulação de D . Se A é um subconjunto de D ao qual \mathbf{a} ainda é ponto de acumulação chama-se limite de f no ponto \mathbf{a} relativo ao conjunto A ou restrito ao conjunto A ao limite em \mathbf{a} da restrição de $f|_A$, caso ele exista, e escreve-se

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f|_A(\mathbf{x}).$$

Observação 1.94 Das definições de limite e de restrição de uma função resulta que, caso exista limite de f em \mathbf{a} , todos os limites restritos de f em \mathbf{a} existem e são iguais ao limite de f em \mathbf{a} . No entanto, pode haver limite restrito a certos conjuntos sem que haja o limite em \mathbf{a} . De facto, se for possível determinar dois conjuntos $A, B \subset D$ com $\mathbf{a} \in A' \cap B'$ para os quais se tenha

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) \neq \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in B}} f(\mathbf{x}),$$

(ou um só conjunto A , nas mesmas condições, tal que não exista o limite de f no ponto \mathbf{a} relativo a A), então não existe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Exemplo 1.95 Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Mostremos que não existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Pondo

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \quad e \quad B = \{(0, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

temos

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1.$$

Como existem dois limites relativos de f no ponto $(0, 0)$ distintos, podemos concluir que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Observação 1.96 Os limites relativos a semiretas que passam pelo ponto \mathbf{a} , i.e., os limites relativos aos conjuntos de forma

$$\{\mathbf{a} + t\mathbf{v} : t > 0\}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathbf{v}\| = 1,$$

chamam-se limites direccionais. Se o limite depender da direcção \mathbf{v} (no caso $n = 2$ a direcção está definida a custo de um declive) então não existe limite. Por outro lado, se ao longo das semiretas obtivermos sempre o mesmo valor para o limite, não significa que exista limite, pois poderá existir um outro caminho que passe em \mathbf{a} ao longo do qual o limite seja diferente ou não exista.

Portanto, se os limites direccionais forem diferentes podemos concluir que não existe limite da função no ponto, mas se os limites direccionais forem todos iguais nada podemos concluir.

Exemplos 1.97 (1) Mostremos que a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não tem limite no ponto $(0, 0)$.

Fixamos um declive α e determinemos os limites direccionais ao longo da recta $y = \alpha x$. Sucessivamente vamos ter

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\alpha x}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\alpha x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2}{x^2 + (\alpha x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2}{x^2(1 + \alpha^2)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.\end{aligned}$$

Como o limite direccional depende de α , podemos concluir que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

(2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Verifiquemos se existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Como no exemplo anterior determinemos os limites direccionais:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\alpha x}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\alpha x}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^3}{x^4 + (\alpha x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^3}{x^2(x^2 + \alpha^2)} = 0.\end{aligned}$$

Ao longo da recta vertical $x = 0$ também temos

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0.$$

No entanto, o limite desta função em zero não existe. Pois, para ver isso basta encontrar o limite ao longo da parábola $y = x^2$. De facto,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Sendo último limite diferente dos limites direccionais, podemos concluir que não existe limite da função f no ponto $(0,0)$.

Exercício 1.98 Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Sugestão: basta ter em conta que $x^2 \leq x^2 + y^2$ e que $y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observações 1.99 Em \mathbb{R}^2 os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) \quad e \quad \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$$

chamam-se limites iterados de f em (a, b) . Se tais limites existirem e forem diferentes, podemos concluir que não existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$. No entanto, eles podem existir e serem iguais sem que exista $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$, como se pode ver no Exemplo 1.100.1 abaixo.

Exemplos 1.100 (1) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

No Exemplo 1.97.1 mostrámos que f não tem limite no ponto $(0, 0)$ mas, no entanto, os limites iterados existem e são iguais a zero (**justifique !**).

(2) Mostremos, utilizando limites iterados, que a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

não tem limite no ponto $(0, 0)$.

Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

e

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-y^2}{y^2} \right) = -1.$$

Como os limites iterados existem mas são diferentes, podemos concluir que não existe o limite da função dada no ponto $(0, 0)$, tal como já tínhamos visto no Exemplo 1.95.

O seguinte exemplo mostra que vice versa pode existir o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ sem que existam os limites iterados.

Exemplo 1.101 Consideramos a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Aqui o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe e igual a 0 porque

$$|f(x, y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

enquanto $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ não existe para qualquer que seja x (próximo a 0).

Por outro lado, se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$, e se existirem os limites unidimensionais

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow b} f(x,y),$$

então existem os limites iterados e são iguais:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = L.$$

Deixamos ao cargo de leitor demonstrar este facto.

Limites iterados (sucessivamente pela várias variáveis) podem ser introduzidos em qualquer espaço \mathbb{R}^n também. Só precisa tomar em conta que existência e igualdade de **todos** tais limites não garante a existência do limite de função.

Continuidade

Definição 1.102 Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diz-se contínua em $\mathbf{a} \in D \cap D'$ se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Por outras palavras, f é contínua em \mathbf{a} se $f(\mathbf{x}^k) \rightarrow f(\mathbf{a})$ para cada sucessão $\{\mathbf{x}^k\} \rightarrow \mathbf{a}$, $k \rightarrow \infty$; ou dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_m \leq \varepsilon \text{ para todos } \mathbf{x} \in D \text{ com } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n \leq \delta. \quad (1.17)$$

Se f não for contínua em \mathbf{a} diz-se descontínua nesse ponto.

Definição 1.103 Diz-se que $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, é contínua no conjunto D se f é contínua em cada $\mathbf{a} \in D$. (Se \mathbf{a} é um ponto isolado a função f considera-se contínua em \mathbf{a} por convenção.)

Intuitivamente, f é contínua em \mathbf{a} quando os pontos \mathbf{x} que estão próximos de \mathbf{a} têm imagens $f(\mathbf{x})$ próximas de $f(\mathbf{a})$.

Da Proposição 1.86 sai logo seguinte afirmação (continuidade por coordenadas).

Proposição 1.104 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com coordenadas f_1, f_2, \dots, f_m , e $\mathbf{a} \in D$. Então f é contínua em \mathbf{a} sse todas as funções f_j , $j = 1, 2, \dots, m$, são contínuas em \mathbf{a} .

Tendo em conta as operações algébricas entre os limites (ver Proposição 1.91) obtemos a propriedade seguinte.

Proposição 1.105 Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas em $\mathbf{a} \in D$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as funções vectoriais $f + g$, λf e $f \times g$ (a última no caso $m = 3$), e as funções escalares $\langle f, g \rangle$ e $\|f\|$ são contínuas em \mathbf{a} . Além disso, se $m = 1$ e $g(\mathbf{a}) \neq 0$ a função $\frac{f}{g}$ é contínua em \mathbf{a} .

Proposição 1.106 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $f(D) \subset E$. Se f é contínua em \mathbf{a} e g é contínua em $f(\mathbf{a})$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em \mathbf{a} .

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade de g em $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{y} \in E \text{ e } \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_m < \delta_1 \text{ então } \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{b})\|_p < \varepsilon.$$

Analogamente, pela continuidade de f em \mathbf{a} existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta_2 \text{ então } \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_m < \delta_1.$$

Assim, tomando $\delta = \delta_2$ tem-se

$$\mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta \text{ então } \|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))\| < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de $g \circ f$ em \mathbf{a} . ■

Exemplo 1.107 *As funções*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x^2 y), \quad g(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \\ h(x, y) &= \frac{e^{x+y}}{x+y}, \quad r(x, y) = \ln|\cos(x^2 + y^2)|. \end{aligned}$$

são contínuas em todos os pontos em que estão definidas:

f é contínua em todos os pontos do plano, g em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, h é contínua em todos os pontos (x, y) tais que $x + y \neq 0$, r é contínua em todos os pontos para os quais $x^2 + y^2$ não seja múltiplo ímpar de $\pi/2$ (o conjunto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = \frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 3, 5, \dots$, é uma família de circunferências centradas na origem).

O exemplo anterior mostra que os pontos de descontinuidade de uma função de duas variáveis podem ser pontos isolados, ou podem formar curvas ou até famílias de curvas.

Observamos ainda que uma função de duas (ou mais) variáveis pode ser contínua em relação a cada uma das variáveis separadamente e ser descontínua quando considerada como função de todas as variáveis em conjunto. Este facto é ilustrado pelo exemplo seguinte.

Exemplo 1.108 *Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Para pontos (x, y) do eixo dos x temos $y = 0$ e $f(x, y) = f(x, 0) = 0$, pelo que a função tem valor constante 0 ao longo de todo o eixo dos x . Deste modo, se fizermos $y = 0$ e considerarmos f unicamente como uma função de x , f é contínua em $x = 0$.

Analogamente, f toma o valor 0 em todos os pontos do eixo dos y , pelo que se fizermos $x = 0$ e considerarmos f unicamente como uma função de y , f é contínua em $y = 0$. Porém, f considerada como função de duas variáveis não é contínua na origem. Com efeito, em cada ponto da reta $y = x$ (excepto na origem) a função toma o valor constante $\frac{1}{2}$, pois

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};$$

como existem sobre esta reta pontos tão próximos da origem quanto se queira e como $f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$, a função não é contínua em $(0, 0)$.

Destacamos as seguintes importantes propriedades das funções contínuas definidas em conjuntos.

Proposição 1.109 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e $X \subset D$ é um conjunto compacto em \mathbb{R}^n , então a imagem $f(X) := \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ é um conjunto compacto (em \mathbb{R}^m).*

Demonstração:

Seja $\{f(\mathbf{x}^m)\} \subset f(X)$ uma sucessão de pontos arbitrária. Então $\{\mathbf{x}^m\} \subset X$ e como X é compacto existe uma subsucessão $\{\mathbf{x}^{k_m}\} \rightarrow \mathbf{x}^0$, para algum $\mathbf{x}^0 \in X$. Mas $\{f(\mathbf{x}^{k_m})\}$ é subsucessão de $\{f(\mathbf{x}^m)\}$ e converge para $f(\mathbf{x}^0)$ (**justifique!**). Daqui se conclui que $f(X)$ é compacto. ■

Da proposição anterior no caso $m = 1$ sai imediatamente a generalização do Teorema de Weierstrass bem conhecida na Análise Matemática I.

Teorema 1.110 (de Weierstrass) *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $X \subset D$ é um conjunto compacto em \mathbb{R}^n , então f é limitada em X e atinge (em X) o seu valor máximo e mínimo; isto é, existem $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, tais que*

$$f(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \quad e \quad f(\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}).$$

Demonstração:

Da proposição anterior resulta, em particular, que $f(X)$ é um conjunto limitado e por conseguinte f é limitada em X . Portanto o supremo e o ínfimo de f em X existem e são finitos. Seja, por exemplo, $\sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = M$. Por definição de supremo existe uma sucessão $\{\mathbf{x}^k\} \subset X$ tal que

$$f(\mathbf{x}^k) \leq M \leq f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{k}, \quad (1.18)$$

$k = 1, 2, \dots$. Como X é compacto existe uma subsucessão $\{\mathbf{x}^{k_p}\} \rightarrow \mathbf{a}$, para algum $\mathbf{a} \in X$, o que pela continuidade implica que $\{f(\mathbf{x}^{k_p})\} \rightarrow f(\mathbf{a})$. Mas, por outro lado, as desigualdades (1.18) implicam que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{k_p}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^k) = M,$$

e, pela unicidade do limite (ver Proposição 1.89) $f(\mathbf{a}) = M$. Analogamente se mostra que o mínimo é atingido. ■

As aplicações contínuas também mantém a conexidade dos conjuntos

Proposição 1.111 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua num conjunto conexo (topologicamente ou por arcos) $X \subset D$, então o conjunto $f(X)$ é conexo (topologicamente ou por arcos, respetivamente).*

Demonstração:

Mostremos apenas que $f(X)$ é conexo por arcos, deixando a outra parte como exercício.

Sejam $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in f(X)$ dois pontos diferentes, então existem $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, com $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ tais que $f(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ e $f(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$. Como X é conexo por arcos existe um caminho $r : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $r(0) = \mathbf{a}$ e $r(1) = \mathbf{b}$, o que implica $f(r(0)) = f(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ e $f(r(1)) = f(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$. Portanto o caminho $f \circ r$ liga os pontos \mathbf{c} e \mathbf{d} em $f(X)$. ■

A Proposição anterior é generalização às dimensões superiores do *Teorema de Bolzano de ponto intermédio* para funções de uma variável bem conhecido da Análise Matemática I.

Prolongamento por continuidade

Definição 1.112 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{a} \in D' \setminus D$. Diz-se que a função f é prolongável por continuidade ao ponto \mathbf{a} se existe o limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$. Neste caso, a função $\tilde{f} : D \cup \{\mathbf{a}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por*

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in D \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{a}, \end{cases}$$

chama-se prolongamento de f ao ponto \mathbf{a} .

Exemplos 1.113 1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Vimos no Exemplo 1.88 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Logo a função dada é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$, e o prolongamento dela é a função $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Vimos no Exemplo 1.97.2 que não existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, logo a função dada não é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

Bibliografia

- [1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise em \mathbb{R}^n* , DMIST, 2003.
- [2] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. 2, Chap. 1-5, Wiley-Interscience, 1988.
- [3] B. Demidovich, Problemas e exercícios de Análise Matemática, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1993.
- [4] F. R. Dias Agudo, *Análise Real*, vol. 3, Escolar Editora, 1990.
- [5] M. Ferreira e I. Amaral, *Matemática, Cálculo diferencial em \mathbb{R}^n* , Edição Sílabo, 1991.
- [6] M. Krasnov, A. Kiselev, G. makarenko, E. Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. 2, Chap. 22-24, Mir Publisher, Moscow, 1990.
- [7] E. Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Projecto Euclides, 1995.
- [8] S. Lan, *Calculus of Several Variables*, Springer-Verlag, 1978.
- [9] L. T. Magalhães, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1997.
- [10] J. Marsden, A. Tromba, *Vector Calculus*, W. H. Freeman and co, 1976.
- [11] A. Ostrowski, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, vol. 2, 4ª edição, Fundação Calouste Gilbenkian, 1987.
- [12] G. Pires, *Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R}^n* , IST Press, 2012.
- [13] C. Sarrico, *Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis*, Esfera do caos, 2003.
- [14] J. Stewart, *Calculus, Concepts and Contexts*, 2nd Edition, Thomson Learning, 2005.
- [15] E. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. 2, 2ª edição, Makron Books do Brasil Editora.