CAPÍTULO 3

Funções reais de variável real

Para realçar a importância da entidade matemática, que iremos estudar neste capítulo - uma função - nada melhor que transcrever algumas passagens do livro, da nossa bibliografia, do grande matemático português Bento de Jesus Caraça, onde por sua vez, um outro grande homem do conhecimento, Leonardo da Vinci, é citado. Bento de Jesus Caraça esboça historicamente o caminho do conceito de função.

"... *Veja bem o leitor o que há de importante nesta nova relação-tradução de leis analíticas em leis geométricas...";" ...Nesta unificação, realizada de há três séculos para cá, reside um dos factos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do Conhecimento..."; "...o facto de ser o próprio conceito de função, instrumento do estudo das correspondências que vai agora servir de elemento definidor dessa nova correspondência, de motivo de unificação dos dois campos...","...Foi um homem extraordinário, a quem nada parece ter sido alheio das preocupações dominantes no seu tempo, do domínio da Técnica ao da Ciência, da Filosofia e das Artes - Leonardo da Vinci - quem deu essa formulação precisa...",* escreve Leonardo*: "...Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Esperiência, e científico o que nasce da Razão, e semi-mecânico o que nasce na Ciência e acaba nas operações manuais...",* continua Leonardo*: "...Nenhuma investigação merece o nome de Ciência se não passa pela demonstração matemática...";"...nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemática ou se não pode ligar essas ciências..."* Estes textos são extractos do seu livro*: "Tratado de Pintura*".

Como um termo matemático, "função", foi introduzido por Leibniz em 1694, para descrever quantidades relacionadas com uma curva tais como a inclinação da curva ou um ponto específico dessa curva. Funções relacionadas com curvas são actualmente chamadas funções diferenciáveis, tema do nosso próximo capítulo. A palavra função foi posteriormente usada por Euler em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos; i.e. $y = F(x)$. Ampliando esta definição os matemáticos foram capazes de estudar "estranhos" objectos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer dos seus pontos. Tais funções, inicialmente tidas como puramente imaginárias e chamadas genericamente de "monstros", foram, já no final do século XX, identificadas como importantes para a construção de muitos modelos físicos.

No século XIX Weierstrass defendia que se construísse o cálculo infinitesimal utilizando a Aritmética e não a Geometria, o que favorecia a definição de Euler relativamente à definição de Leibniz. Já no final do século, o desenvolvimento da formalização de toda a Matemática começou a utilizar como forte ferramenta a Teoria dos conjuntos. É nesta sequência que Dirichlet cria a moderna definição "formal" de função.

3.1 Generalidades

Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\begin{array}{lll} f: & D \subset \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \to f(x). \end{array}$$

O conjunto $D \subset \mathbb{R}$ onde a função f está definida é designado por **domínio** de f. O **contradomínio** de f é o conjunto

$$D' = f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}.$$

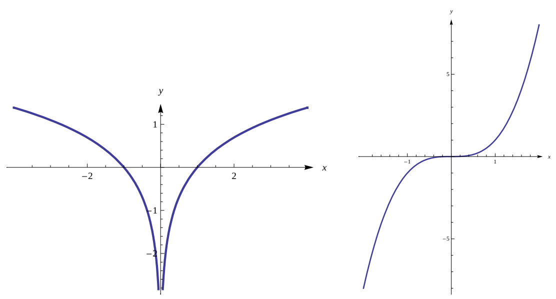
Definição 3.1 *Uma função f, diz-se **minorada**, **majorada** ou **limitada**, se o seu contradomínio $f(D) = D'$ for um conjunto minorado, majorado ou limitado. Escrito de uma outra forma, uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se **limitada** se*

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq L, \quad \forall x \in D.$$

O **gráfico** de uma função f é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\text{gráfico de } f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

Tabela 3.1: Gráficos duma função par e duma função ímpar.



Definição 3.2 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se:*

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{par}} & \textit{se} & f(x) = f(-x), \quad \forall x \in D, \\ \textbf{\textit{ímpar}} & \textit{se} & f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in D. \end{array}$$

Observemos que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos yy enquanto o gráfico de uma função ímpar (ver tabela 3.1) é simétrico relativamente à origem dos eixos.

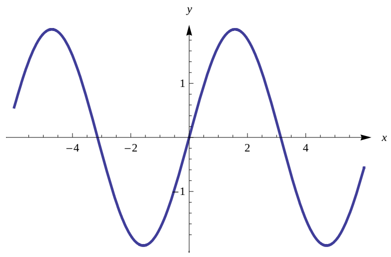
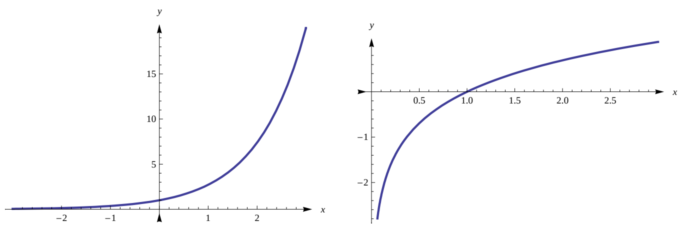


Figura 3.1: Função periódica.

Definição 3.3 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se:*

crescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
decrescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
estritamente crescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y), \quad \forall x, y \in D,$
estritamente decrescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y), \quad \forall x, y \in D,$
monótona	*se é crescente ou decrescente e*
estritamente monótona	*se é est. crescente ou est. decrescente.*

Tabela 3.2: Gráficos da função $f(x) = e^x$ para $-4 \leq x \leq 2$ e da função $f(x) = \log x$ para $0 < x \leq 3$



Consideremos as funções $f(x) = e^x$ e $f(x) = \log x$ (ver tabela 3.2) que são ambas estritamentes crescentes nos respectivos domínios.

Definição 3.4 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, (ver fig.3.1) diz-se:*

$$\textbf{\textit{periódica}} \textit{ com período } T > 0 \qquad \textit{se } f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Definição 3.5 *Chamam-se zeros da função f, os elementos x do domínio tais que $f(x) = 0$.*

Definição 3.6 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A \subset D$. A **restrição** de f a A, designada por $f_{|A}$ é a aplicação de A em $\mathbb{R}$ tal que $f_{|A}(x) = f(x)$ para cada $x \in A$.*

Definição 3.7 *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se:*

injectiva	*se* $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
sobrejectiva	*se* $\forall y \in B, \quad \exists x \in D : f(x) = y,$
bijectiva	*se é injectiva e sobrejectiva.*

A injectividade (ou não injectividade) duma função é visível no seu gráfico (ver tabela 3.3). Uma função é injectiva se e só se nenhuma recta horizontal (de equação $y = k$) intersectar o seu gráfico em mais do que um ponto.

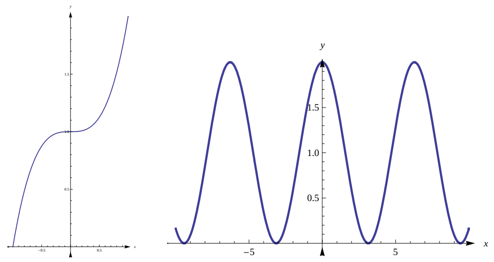


Tabela 3.3: Gráficos duma função injectiva e duma função que não é injectiva.

Definição 3.8 *Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to f(D_f)$ uma função injectiva. A sua* ***função inversa*** *é definida como a função*

$$\begin{aligned} f^{-1} : D_{f^{-1}} = f(D_f) \subset \ & \mathbb{R} \to D_f \subset \mathbb{R} \\ & y \to f^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de f tal que $f(x) = y$.

O conceito de função inversa é fácil de visualizar através duma representação gráfica como podemos observar na figura 3.2.

Dado o gráfico duma função invertível f, o gráfico da sua inversa f^{-1} é simétrico ao gráfico de f, relativamente à recta $y = x$. Podemos observar os casos da função $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$ na figura 3.3.

Nota 3.1 *Dada uma função injectiva $f(x)$ é importante não confundir a notação da função inversa $f^{-1}(x)$ com o inverso multiplicativo $\dfrac{1}{f(x)}$.*

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, é estritamente crescente em todo o seu domínio, logo é injectiva e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa f^{-1} definida em todo o $\mathbb{R}$, que é a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na figura 3.4.

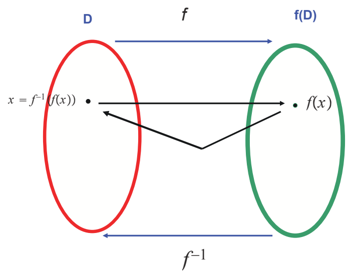


Figura 3.2: Função inversa.

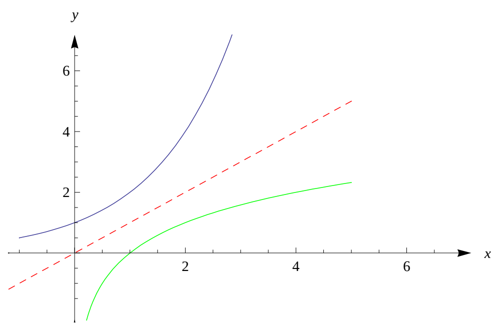


Figura 3.3: Gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$.

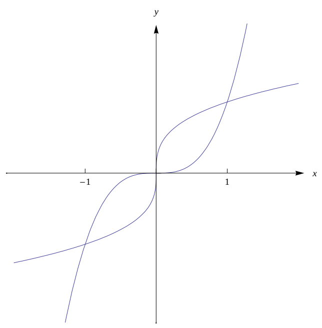


Figura 3.4: Gráfico da função $f(x) = x^3$ e da sua inversa.

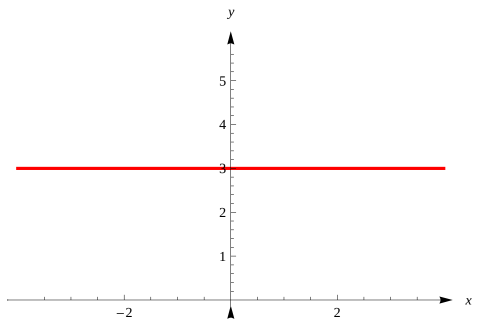


Figura 3.5: Gráfico da função constante $f(x) = 3$.

3.2 Exemplos importantes

Apresentamos nesta secção vários exemplos de funções elementares já vossas conhecidas, mas que convém recordar.

3.2.1 Funções polinomiais

Exemplo 3.1 ***Funções polinomiais*** *são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad com \;\; c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

Quando uma função polinomial tem grau ímpar o seu contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$, enquanto que quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$.

Consideremos alguns casos particulares de funções polinomiais:

Exemplo 3.2 ***Função constante****: quando $n = 0$, (ver fig. ??) polinómio de grau zero,*

$$f(x) = a$$

Exemplo 3.3 ***Função afim****: quando $n = 1$, (ver fig. 3.6) polinómio de grau 1,*

$$f(x) = ax + b, \quad com \;\; a \neq 0$$

O grau do polinómio é ímpar o domínio e o contradomínio $D = D' = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.4 ***Função cúbica****: quando $n = 3$, (ver fig. 3.7) polinómio de grau 3,*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad com \;\; a \neq 0$$

Como o grau do polinómio é ímpar o domínio e o contradomínio $D = D' = \mathbb{R}$.

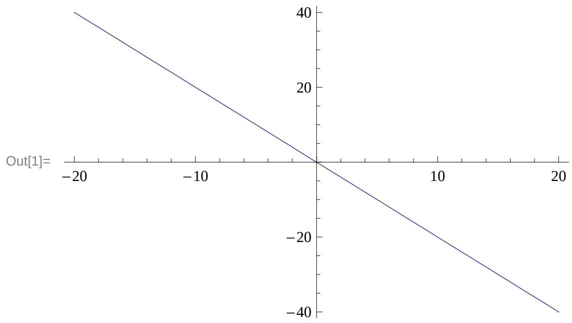


Figura 3.6: Gráfico da função afim $f(x) = 3x - 2$.

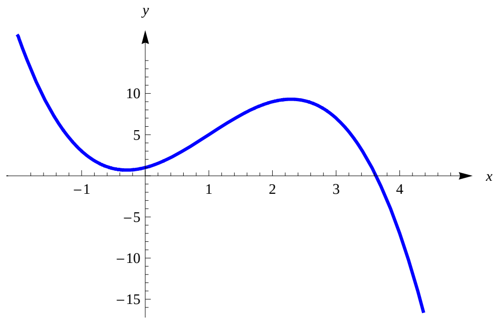


Figura 3.7: Gráfico da função cúbica $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$.

3.2.2 Funções racionais

Exemplo 3.5 ***Funções racionais*** *são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e. funções da forma*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Exemplo 3.6 *Um exemplo simples é a função definida por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$*, cujo gráfico está representado na figura 3.8. Tanto o seu domínio como o seu contradomínio são* $D = D' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. É uma função ímpar e estritamente decrescente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$*.*

As funções polinomiais são casos particulares das funções racionais mas, claro que podemos considerar funções racionais que não são funções polinomiais.

Exemplo 3.7 *Consideremos as funções*

$$f(x) = x^\alpha, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Consoante o valor de α*,* f *é uma função polinomial ou não.*

Vejamos o gráfico desta função (fig.3.9) para vários valores de α.

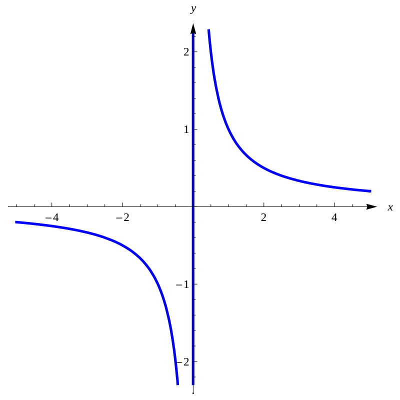


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

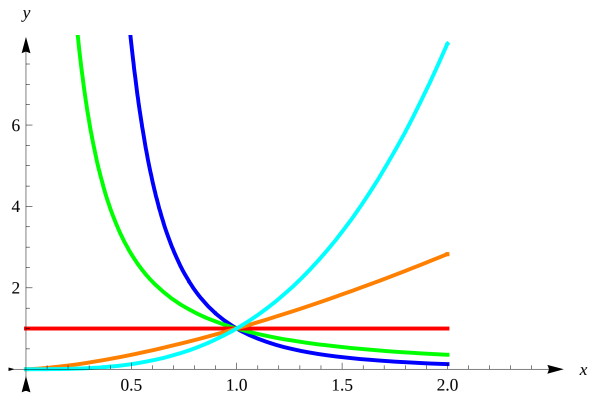


Figura 3.9: Gráficos das funções $f(x) = x^{\alpha}$ para $\alpha = -3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3$.

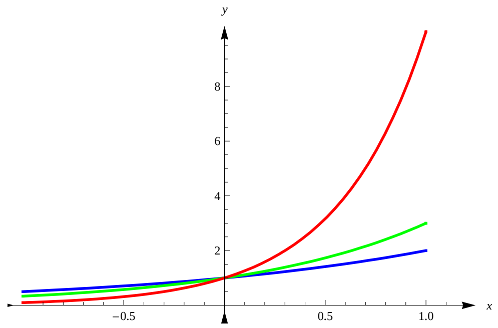


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a = 2, 3, 10$..

3.2.3 Funções exponencial e logarítmica

Definição 3.9 *Sendo a um número positivo diferente de* 1*, chama-se* ***função exponencial*** *de base a, à função dada por*

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = a^x \end{aligned}$$

Na figura 3.10 estão representadas graficamente diversas funções exponenciais para diferentes valores de a.

O domínio da função exponencial é o conjunto de todos os números reais $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o conjunto de todos os números reais positivos, $D' = \mathbb{R}^+$. A função exponencial é estritamente crescente em todo o seu domínio e é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$.

Podemos definir a função inversa da função exponencial, a função logaritmo.

Exemplo 3.8 *Seja* $f(x) = a^x$ *a função exponencial de base* a $(a \neq 1)$*. A função inversa de* $f(x)$ *designa-se por* ***função logaritmo*** *de base* a *e é definida por:*

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to f^{-1}(x) = \log_a x \end{aligned}$$

Quando $a = e$ a função designa-se simplesmente por $\log x$ e este logaritmo designa-se por logaritmo neperiano.

O domínio desta função logaritmo é o conjunto $D = \mathbb{R}^+$.

Das definições anteriores resulta que

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$

donde se pode concluir que se $y > 0$ e $a \neq 1$,

$$a^{\log_a y} = y$$

Recordamos algumas propriedades da função logaritmo.

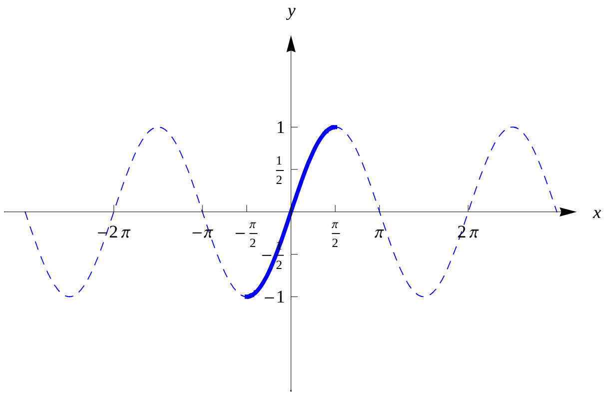


Figura 3.11: Gráfico da restrição da função *seno* ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposição 3.1 *Sendo a um número real positivo diferente de 1 tem-se que:*

1. $\log_a a = 1 \quad e \quad \log_a 1 = 0$

2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

3. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

4. $\log_a x^b = b \log_a x, \quad \forall b \in \mathbb{R}.$

5. $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \dfrac{\log_a x}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

6. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}.$

3.2.4 Funções trigonométricas e as suas inversas

Exemplo 3.9 *A **função seno** define-se por*

$$\begin{aligned} \textit{seno}: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ & x \longrightarrow \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o intervalo $f(D) = D' = [-1, 1]$ (ver fig.3.11). Trata-se duma função ímpar e periódica de período 2π.

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quando se restringe a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ obtém-se a chamada restrição principal. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e $\operatorname{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

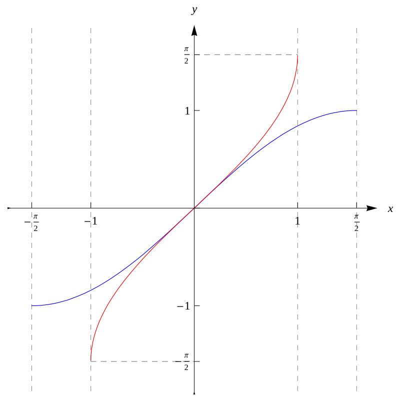


Figura 3.12: Gráficos da função *seno* e da sua inversa *arc seno*.

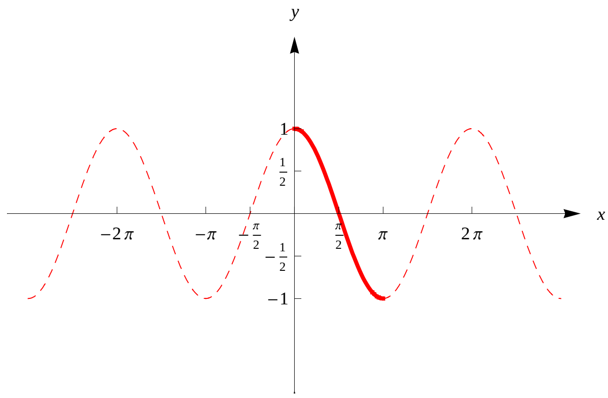


Figura 3.13: Gráfico da função *coseno*.

Exemplo 3.10 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada **função arco seno**:*

$$\begin{aligned} \textit{seno}^{-1} = \textit{arco seno}: \quad & [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x \longrightarrow \operatorname{arcsen} x. \end{aligned}$$

Os gráficos são apresentados na figura 3.12.

Exemplo 3.11 *A **função coseno** define-se por*

$$\begin{aligned} \textit{coseno}: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ & x \longrightarrow \cos x \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o intervalo $f(D) = D' = [-1,1]$. Trata-se duma função par e periódica de período 2π.

$$\cos x = \cos(-x) \qquad \text{e} \qquad \cos{(x+2\pi)} = \cos x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quando se restringe a função coseno ao intervalo $[0,\pi]$ obtém-se a chamada restrição principal. A função coseno é estritamente decrescente neste intervalo, logo injectiva, e $\cos{([-0,\pi])} = [-1,1]$ (ver fig.3.13)

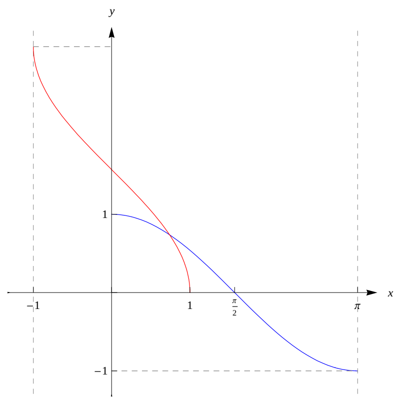


Figura 3.14: Gráficos das funções *coseno* e *arc coseno*.

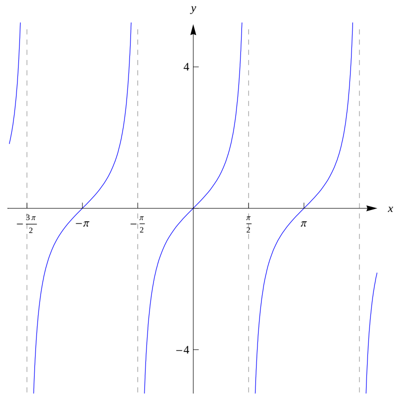


Figura 3.15: Gráfico da função *tangente*.

Exemplo 3.12 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada **função arco coseno**:*

$$\begin{aligned} coseno^{-1} = arco\ coseno: \quad & [-1,1] \longrightarrow [-0,\pi] \\ & x \longrightarrow \arccos x. \end{aligned}$$

Os gráficos são apresentados na figura 3.14.

A função tangente define-se pelo quociente entre a função seno e a função coseno.

Exemplo 3.13 *A **função tangente** define-se por:*

$$\begin{aligned} tangente: \quad & D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Trata-se duma função ímpar e periódica de período π.

$$tg\ x = -tg\ (-x) \qquad \text{e} \qquad tg\,(x+\pi) = tg\ x,\ \ \forall x \in D.$$

Uma vez que é periódica não é uma função injectiva em todo o seu domínio A sua restrição ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (a chamada restrição principal) é estritamente crescente, logo injectiva, e $tg\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$ (ver fig. 3.15).

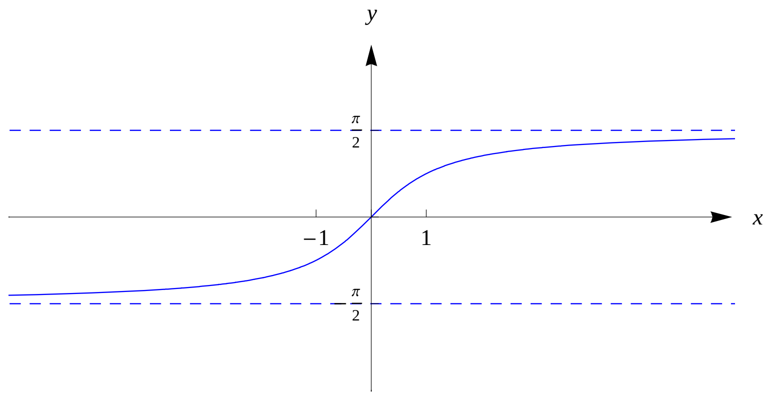


Figura 3.16: Gráfico da função *arco tangente*.

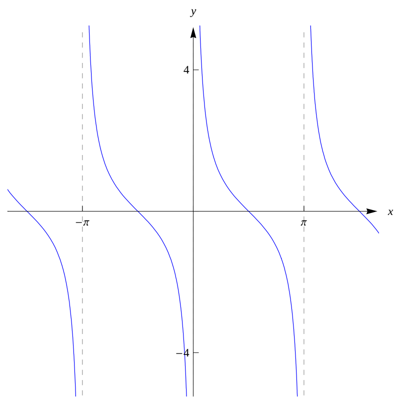


Figura 3.17: Gráfico da função co*tangente*.

Exemplo 3.14 *A sua função inversa, neste intervalo, é a chamada* ***função arco tangente****:*

$$\begin{aligned} tangente^{-1} = arco\ \tan gente: \ & \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x \to arctg\ x. \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na figura 3.16.

Exemplo 3.15 *A* ***função cotangente*** *é o inverso aritmético da tangente e define-se por:*

$$\begin{aligned} cotangente: \ & D = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ & x \to \cot g(x) = \frac{1}{tg\ x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dado que esta função não está definida nos pontos em que o *seno* se anula. O contradomínio desta função é o conjunto $\mathbb{R}$ (ver fig.3.17). Tal como a *tangente*, trata-se duma função ímpar e periódica de período π.

$$cotg\ x = -\cot g\ (-x) \quad \text{e} \quad cotg\ (x+\pi) = cotg\ x, \ \ \forall x \in D.$$

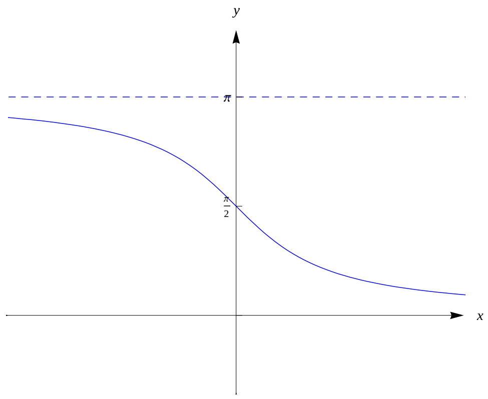


Figura 3.18: Gráfico da função *arco cotangente*.

Uma vez que é periódica não é uma função injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ (a chamada restrição principal) é uma função injectiva.

Exemplo 3.16 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada* ***função arco cotangente****:*

$$\begin{aligned} \textit{cotangente}^{-1} = \textit{arco cotangente}: \ & \mathbb{R} \rightarrow \,]0, \pi[\\ & x \rightarrow \textit{arc cotg } x. \end{aligned}$$

3.2.5 Funções hiperbólicas

As funções seguintes são definidas a partir da função exponencial e, como o seu nome indica, têm uma relação directa com a hipérbole.

Exemplo 3.17 *A* ***função seno hiperbólico*** *define-se por*

$$\begin{aligned} \textit{seno hiperbólico}: \ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio e o contradomínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ (ver fig.3.19). Trata-se duma função ímpar.

$$\operatorname{senh} x = -\operatorname{senh}(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.18 *A* ***função coseno hiperbólico*** *define-se por*

$$\begin{aligned} \textit{coseno hiperbólico}: \ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

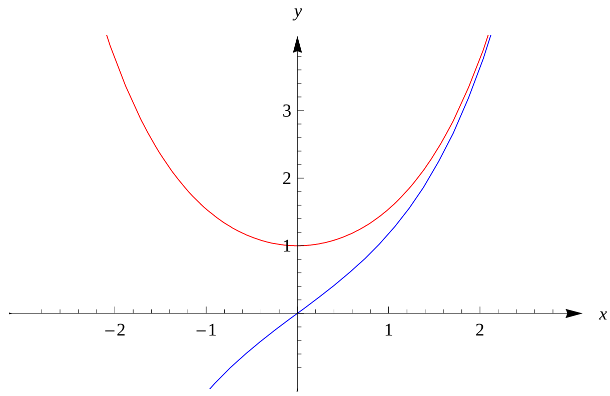


Figura 3.19: Gráficos das funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico*.

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$, e que o contradomínio é o intervalo $[1, +\infty)$ (ver fig.3.19). É uma função par:

$$\cosh x = \cosh(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estas funções satisfazem a seguinte relação fundamental

$$\cosh^2(x) - (\text{senh}(x))^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.3 Definição de limite

A noção de limite demorou muito tempo a ser estabelecida na História da Matemática, aparecendo as primeiras definições aceitáveis apenas nos fins do século XVIII, princípios do século XIX. Entre os primeiros a apresentar uma definição satisfatória, contam-se o português Anastácio da Cunha e o francês Augustin-Louis- Cauchy.

No livro "Principios Mathematicos" (1790), José Anastácio da Cunha afirma:

I. Se uma expressão admitir mais de um valor, quando outra expressão admite um só, chamar-se-á esta constante, e aquela variável.

II. A variável que puder sempre admitir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamar-se-á infinita; e a variável que poder sempre admitir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamar-se-á infinitésima.

No livro "Cours D'Analyse de L' École Royale Polytechnique: I-Analyse Algébrique" (1821) de Augustin-Louis Cauchy pode ler-se:

Chama-se quantidade variável aquela que se considera como devendo receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros. Designa-se uma tal quantidade por uma letra tomada ordinariamente entre as últimas letras do alfabeto. Chama-se pelo contrário quantidade constante, e designa-se ordinariamente por uma das primeiras letras do alfabeto toda a quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a diferir dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite de todos os outros.

Para enunciar a definição de limite de uma função necessitamos de recordar alguns conceitos preliminares.

Definição 3.10 *Seja a um número real. Chama-se* ***vizinhança de*** **a**, *e representa-se por* $V_\delta(a)$, *ao conjunto de valores cuja distância a a é inferior a* δ*:*

$$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)\,.$$

Definição 3.11 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *um conjunto. Um ponto* $a \in \mathbb{R}$ *diz-se um* ***ponto de acumulação*** *de* A *se em qualquer vizinhança de* a *existir pelo menos um elemento de* A *diferente de* a*. Chama-se* ***derivado*** *do conjunto* A *ao conjunto de pontos de acumulação de* A *que se denota por* A'

Observemos que um ponto de acumulação dum conjunto pode não pertencer ao próprio conjunto.

Exemplo 3.19 *Seja* $A = (b, c)$*, um intervalo aberto. Então o conjunto dos pontos de acumulação é o intervalo fechado* $A' = [b, c]$.

Exemplo 3.20 *Seja* $A = \{b\}$*, um conjunto singular. Então o conjunto dos pontos de acumulação é o conjunto vazio,* $A' = \varnothing$.

A noção de ponto de acumulação é bastante importante uma vez que só nos pontos de acumulação do domínio da função é que podemos definir limite de uma função.

Definição 3.12 *(**Segundo Cauchy**) Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* a *um ponto de acumulação do domínio de* f *e* $b \in \mathbb{R}$*. Diz-se que* b *é* ***limite*** *de* f ***no ponto*** a *(ou quando* x *tende para* a*), e escreve-se* $\lim_{x\to a} = b$*, se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Esta definição de limite também pode ser escrita, utilizando o conceito de vizinhanças, da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : x \in V_\varepsilon(a) \backslash \{a\} \Longrightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

Podemos interpretar graficamente este conceito (ver fig.3.20).

O matemático inglês G. H. Hardy, um apaixonado pelo criquete, o desporto nacional britânico, dizia que, para se entender bem a noção de limite, é preciso pensar numa competição entre um herói e um bandido. O herói tenta provar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ enquanto que o bandido tenta provar o contrário. O bandido escolhe deltas (δ) à sua vontade enquanto o herói tenta encontrar épsilons (ε) de modo que para todo o x tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$ ele consiga ter que $|f(x) - b| < \delta$. O herói ganhará o jogo (e provará assim que $\lim_{x\to a} f(x) = b$) quando, para qualquer δ escolhido pelo bandido, conseguir encontrar sempre um ε nas condições pretendidas. O bandido ganhará, pelo contrário, quando conseguir encontrar um δ para o qual o herói não consiga encontrar um ε que satisfaça o pretendido.

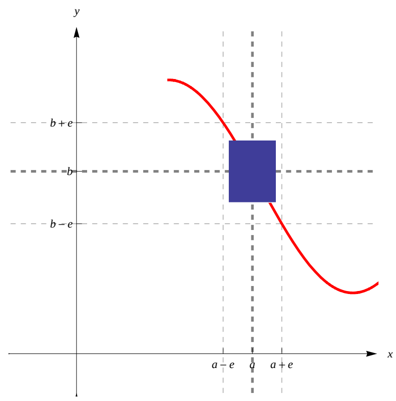


Figura 3.20: Interpretação geométrica de $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Exemplo 3.21 *Vamos mostrar, utilizando esta definição, que:*

$$\lim_{x\to 0}\left(x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

O domínio da função $f(x) = x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *é* $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Logo o ponto zero não pertence ao domínio da função mas é ponto de acumulação do domínio. É, portanto, legítimo analisar o limite da função neste ponto. O que se pretende mostrar é que*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists\varepsilon > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : 0 < |x - 0| < \varepsilon \Longrightarrow \left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| < \delta$$

É imediato verificar que

$$\left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\,.\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para garantir que a condição pretendida é verificada basta tomar $\varepsilon = \delta$*, ou seja,*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists\varepsilon = \delta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : 0 < |x| < \varepsilon \Longrightarrow \left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| < \varepsilon = \delta.$$

No Ensino Secundário foi dada uma definição de limite de função recorrendo aos limites de sucessões. É costume designá-la por definição de limite segundo Heine, em homenagem ao matemático alemão Heinrich Eduard Heine (1821-1881). Esta definição faz a ponte entre os conceitos de limite em funções e em sucessões.

Esta definição reflecte duma forma mais sugestiva expressões usadas correntemente para descrever limites, como "*quando x tende para a, a função tende para b*".

Definição 3.13 *(**Segundo Heine**) Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, a um ponto de acumulação do domínio de f e* $b \in \mathbb{R}$*. Diz-se que b é **limite** de f **no ponto** a (ou quando x tende para a) se para todas as sucessões* (x_n) *de termos no domínio de*

f, diferentes de a e convergentes para a, as correspondentes sucessões $(f(x_n))$ convergem para um mesmo valor, b, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} \textit{para toda a sucessão } (x_n) \textit{ tal que } x_n \in D\setminus\{a\} \textit{ e } \lim_{n\to+\infty} x_n = a \\ \Longrightarrow \textit{ a correspondente sucessão } (f(x_n)) \textit{ verifica } \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b. \end{cases}$$

É necessário garantir que estas duas definições, de limite de uma função num ponto, são equivalentes.

Teorema 3.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação do domínio de f e $b \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se, e só se, para toda a sucessão (x_n) tal que $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ se verifica que para toda a correspondente sucessão $(f(x_n))$ verifica $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Hipóteses: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

A provar: $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$, i. é,

(?) $\quad \forall\varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon.$

Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário.

(i)	Como $\lim_{x\to a} f(x) = b$	temos que $\exists\delta > 0 : (x \in D$ e $0 < \lvert x - a\rvert < \delta) \Longrightarrow \lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon.$
(ii)	Como $x_n \to a$	sabemos também que $\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \lvert x_n - a\rvert < \delta.$

Então, com $p \in \mathbb{N}$ dado por (ii) e para $n > p$, temos que

$$(x_n \in D\setminus\{a\} \text{ e } |x_n - a| < \delta) \Longrightarrow^{(i)} |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.

($\Longleftarrow$) Hipóteses: $(x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.

A provar: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, i. é,

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Suponhamos por absurdo que isto não era verdade. Teríamos então que

$$\exists\varepsilon > 0\ \ \forall\delta > 0\ \ \exists x \in D : 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - b| > \varepsilon.$$

Consideremos uma sucessão (δ_n) da forma $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Para cada δ_n existiria um $x_n \in D\setminus\{a\}$ tal que

$$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - b| > \varepsilon > 0.$$

Teríamos assim uma sucessão (x_n) com $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $x_n \to a$ mas com $f(x_n) \nrightarrow b$. Isto é uma absurdo, pois contraria a hipótese. ■

Nota 3.2 *Em particular, se existirem sucessões* (x_n) *e* (y_n), *com* $x_n, y_n \in D\backslash\{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ *e* $y_n \to a$ *e* $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) \neq \lim_{n\to+\infty}(f(y_n))$, *então* f *não tem limite no ponto* a.

Exemplo 3.22 *Consideremos a função* $f : D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

A função não está definida na origem mas 0 *é ponto de acumulação do domínio. Verifiquemos que não existe o limite de* f *no ponto* 0. *Consideremos, por exemplo,*

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad e \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

temos que

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

enquanto que

$$\lim_{n\to+\infty}(f(y_n)) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1.$$

Logo não existe limite de f *no ponto* 0.

Usando o teorema anterior, as propriedades seguintes são consequência imediata das correspondentes propriedades do limite de sucessões especificadas no Cap.2 destas Notas.

Teorema 3.2 *(**Unicidade do limite**) O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.*

Teorema 3.3 *(**Operações Algébricas**) Sejam*

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ e } g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

funções tais que a *é ponto de acumulação do conjunto* $D_f \cap D_g$, $b, c \in \mathbb{R}$ *e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Então:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c.$

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = b - c.$

(iii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$

(iv) *se* $c \neq 0$ *e se* $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f \cap D_g$, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}.$

Teorema 3.4 ***(Limite da função composta)*** *Sejam* $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções reais de variável real. A função composta* $(f \circ g)$ *é definida por*

$$\begin{array}{rccl} (f \circ g): & D_{f \circ g} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & (f \circ g)(x) =^{def} f(g(x)), \end{array}$$

onde $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \quad e\ g(x) \in D_f\}$. *Se* a *é ponto de acumulação de* $D_{f \circ g}$,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \qquad e \qquad \lim_{y \to b} f(x) = c$$

então

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = c.$$

Teorema 3.5 ***(Limite duma função enquadrada)*** *Sejam* $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *funções reais de variável real,* a *ponto de acumulação de* D *e* $b \in \mathbb{R}$. *Se, para todo o* $x \in D \backslash \{a\}$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

Demonstração. Como $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ tem-se que:

$$\begin{array}{lcl} \lim_{x \to a} f(x) = b & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_f > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta_f \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ \lim_{x \to a} h(x) = b & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_h > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta_h \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \end{array}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$, sabemos que para qualquer ε,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} |f(x) - b| < \varepsilon & \Longleftrightarrow & b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \\ |h(x) - b| < \varepsilon & \Longleftrightarrow & b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon \end{array} \right.$$

Mas $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo o $x \in D \backslash \{a\}$, logo

$$b - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < b + \varepsilon, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta.$$

Então, podemos concluir que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

■

Nota 3.3 *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *funções reais de variável real e* a *ponto de acumulação de* D. *Se* f *for uma função limitada numa vizinhança de* a *e se* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

3.3.1 Limites infinitos

O conceito de limite de uma função num ponto anteriormente enunciado pode ser estendido em dois sentidos: limite de uma função quando "*a variável tende para infinito*" e "*limite infinito*" da função.

Definição 3.14 *Seja f uma função real com domínio D contendo um intervalo da forma $(a, +\infty)$. Diz-se que f* ***tem limite*** *b* ***quando*** *x* ***tende para*** *$+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, quando*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M > a \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } x > M \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Exemplo 3.23 *Vamos mostrar, utilizando esta definição, que:*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x\right) = 0.$$

O que se pretende mostrar é que

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M > 0 \text{ tal que } x > M \implies \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| < \delta$$

De facto, tem-se que

$$\left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| = \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x\right| = \left|\frac{1}{x}\right|.|\operatorname{sen} x| \leq \left|\frac{1}{x}\right|, \quad \forall x \in D_f.$$

Nesse caso, tem-se, para qualquer $\delta > 0$, que

$$\text{se } |x| > M = \frac{1}{\delta} \text{ então } \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| < \delta.$$

Esta constante M está bem definida para qualquer $\delta > 0$, pelo que está verificada a condição pretendida.

Podemos ilustrar esta situação através do gráfico (ver fig.3.21) da função $f(x) = \frac{1}{x}.\operatorname{sen} x$.

De uma forma análoga podemos adaptar esta definição para o caso em que f **tem limite** b **quando** x **tende para** $-\infty$.

Definição 3.15 *Seja f uma função real com domínio D contendo um intervalo da forma $(-\infty, a)$. Diz-se que f* ***tem limite*** *b* ***quando*** *x* ***tende para*** *$+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, quando*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M < a \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } x < M \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Consideramos, agora, a situação em que o limite da função possa ser $+\infty$ ou $-\infty$.

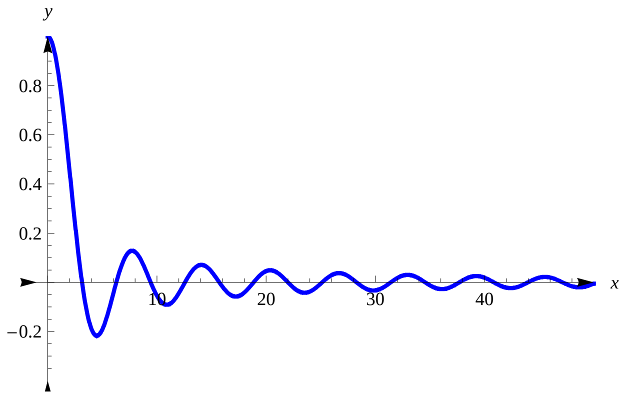


Figura 3.21: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}. \operatorname{sen} x$.

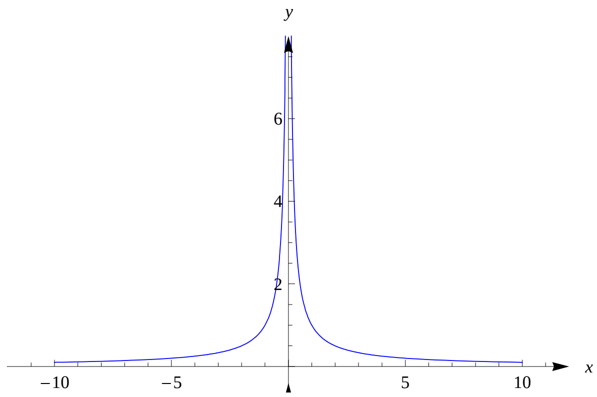


Figura 3.22: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{|x|}$ para $-5 \leq x \leq 5$.

Definição 3.16 *(i) Diz-se que o* ***limite de*** f ***em*** a *(sendo a ponto de acumulação do domínio de D de f)* ***é*** $+\infty$, *e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, *quando*

$$\forall M > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } 0 < |x-a| < \epsilon \Longrightarrow \; f(x) > M.$$

(ii) Diz-se que o ***limite de*** f ***em*** a *(sendo a ponto de acumulação do domínio de D de f)* ***é*** $-\infty$, *e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, *quando*

$$\forall M > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } 0 < |x-a| < \epsilon \Longrightarrow \; f(x) < M.$$

Exemplo 3.24 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to \mathbb{R} \\ & x & \to f(x) = \dfrac{1}{|x|}. \end{array}$$

Tem-se que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. *Este caso está representado na figura 3.22.*

3.3.2 Limites Relativos e Laterais

Definição 3.17 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D$ e a um ponto de acumulação do conjunto A. Chama-se **limite** de f no ponto a **relativo** ao conjunto A, e escreve-se $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ o limite em a da restrição $f_{|A}$. Ou seja,*

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{x\to a} \left(f_{|A}\right)(x).$$

Dois casos particulares desta definição são bem conhecidos desde o Ensino Secundário.

Definição 3.18 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D$ e a um ponto de acumulação do conjunto A.*

1. *Sendo $A = (a, +\infty) \cap D$, chama-se **limite lateral direito** ao limite relativo a A e representa-se por $\lim_{x\to a^+} f(x)$*
2. *Sendo $A = (-\infty, a) \cap D$, chama-se **limite lateral esquerdo** ao limite relativo a A e representa-se por $\lim_{x\to a^-} f(x)$*

Em termos simbólicos podemos escrever da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : a < x < a + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta \;\; (\text{com } x \in D)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < x < a \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta \;\; (\text{com } x \in D)$$

Exemplo 3.25 *Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Os limites laterais no ponto zero são:

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0.$$

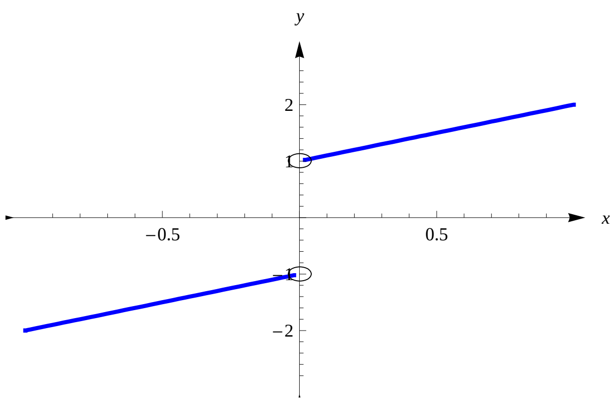


Figura 3.23: Gráfico da função $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Exemplo 3.26 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *(ver figura 3.23) definida por:*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = x + \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Os limites laterais no ponto zero são:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1.$$

Para pontos em que seja legítimo admitir a existência dos dois tipos de limite lateral, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Seja* f *uma função definida numa vizinhança de um ponto* a. *Então, existe limite de* f *em* a *se e só se existirem e forem iguais ambos os limites laterais de* f *nesse ponto.*

No exemplo anterior os limites laterais no ponto $x = 0$ da função $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ existem, mas não são iguais, logo não existe limite da função nesse ponto.

3.4 Funções contínuas num ponto

A continuidade é uma propriedade importante no estudo de uma função.

Definição 3.19 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. *Diz-se que* f *é uma* ***função contínua no ponto*** a, *se*

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

ou seja, se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Desta definição resulta imediatamente que a função é contínua em qualquer ponto isolado do seu domínio.

Definição 3.20 *Os pontos do domínio em que a função não é contínua, dizem-se* ***pontos de descontinuidade.***

Tendo em conta as equivalentes definições de limite de uma função num ponto, estudadas na secção anterior é imediato o seguinte resultado.

Teorema 3.7 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f *é contínua no ponto* a,

(ii) ***continuidade à Cauchy:***
$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta,$

(iii) ***continuidade à Heine:***
$\forall$ *sucessão* (x_n), $(x_n \in D \text{ e } x_n \to a) \Longrightarrow f(x_n) \to f(a).$

Exemplo 3.27 *Consideremos a função* $f(x) = 2x^2 + 1$ *para* $x \in \mathbb{R}$. *Vamos provar que dado* $a \in \mathbb{R}$ *a função é contínua nesse ponto, de duas formas.*

(i) *Usando a definição de Cauchy.*

Seja $a \in \mathbb{R}$ *e seja* $\delta > 0$.

Pretendemos provar que, para $|x - a|$ *suficientemente pequeno, isto é, para* $|x - a| < \varepsilon$ *se verifica que* $|f(x) - f(a)| < \delta$. *Observemos que*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |2x^2 + 1 - (2a^2 + 1)| = |2x^2. - 2a^2| = \\ &= 2\,|x - a|\,|x + a|\,. \end{aligned}$$

Precisamos de encontrar um majorante para $|x + a|$ *que não dependa de* x. *Notemos, no entanto, que se* $|x - a| < 1$ *também* $|x| < |a| + 1$ *e, logo,* $|x + a| \leq |x| + |a| < 2\,|a| + 1$. *Então sendo,* $|x - a| < 1$, *tem-se*

$$|f(x) - f(a)| < 2\,|x - a|\,(2\,|a| + 1)\,.$$

Para encontrar $2\,|x - a|\,(2\,|a| + 1) < \delta$ *é suficiente ter* $|x - a| < \dfrac{\delta}{[2\,(2\,|a| + 1)]}$ *e* $|x - a| < 1$. *Então dado* $\delta > 0$ *escolhemos* $\varepsilon = \min\left\{1, \dfrac{\delta}{[2\,(2\,|a| + 1)]}\right\}$. *Todos os cálculos anteriores mostram que se escolhermos* ε, *desta forma, verificamos que* $|x - a| < \varepsilon$ *implica* $|f(x) - f(a)| < \delta$, *como desejado.*

(ii) *Usando a definição de Heine.*

Consideramos uma sucessão (x_n), *qualquer, formada por elementos pertencentes ao domínio de* f *tal que* $x_n \to a$. *Temos então, aplicando as propriedades dos limites de sucessões, que*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[2x_n^2 + 1\right] = 2\left[\lim_{n \to +\infty} x_n\right]^2 + 1 = 2a^2 + 1 = f(a).$$

Então a função é contínua no ponto a.

A noção de limite lateral dá, naturalmente, origem à seguinte definição de continuidade lateral assim como ao resultado posterior.

Definição 3.21 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. *Diz-se que:*

(i) f *é contínua à esquerda em* a *se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$;
(ii) f *é contínua à direita em* a *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Proposição 3.2 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. f *é contínua em* a *se, e só se,* f *é contínua à direita no ponto* a *e é contínua à esquerda no ponto* a.

Exemplo 3.28 *Consideremos a função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua à direita no ponto zero mas não é contínua à esquerda nesse ponto, (ver figura 3.24) uma vez que:

$$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0).$$

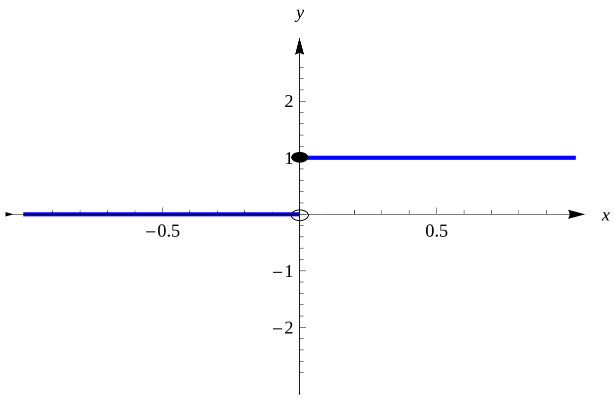


Figura 3.24: Gráfico da função de Heaviside para $-1 \leq x \leq 1$.

As propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. As demonstrações são exercícios simples considerando os resultados desta secção.

Proposição 3.3 *Uma função constante é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

Proposição 3.4 *(**Propriedades algébricas**) Se duas funções f e g são contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f+g$, $f-g$, fg e $\dfrac{f}{g}$ (com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f \cap D_g$) também são contínuas no ponto a.*

Proposição 3.5 *(**Continuidade da função composta**) Sejam f e g duas funções reais de variável real. Se $a \in D_{f\circ g}$, se g é contínua em a e se f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua no ponto a.*

Como poderíamos verificar qualquer função polinomial, racional, trigonométrica, exponencial, logarítmica, hiperbólica é contínua em todos os pontos do deu domínio.

Então, se considerarmos as proposições anteriores, poderemos estudar o comportamento dum enorme número de funções quanto à continuidade.

Exemplo 3.29 *Considere a função $f(x) = e^{2x^2+3x}$ e $a \in R$. A função exponencial é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ assim como a função polinomial $g(x) = 2x^2 + 3x$. Então a função f é contínua em a uma vez que a composição de duas funções contínuas, nos pontos respectivos, ainda é uma função contínua.*

3.4.1 Prolongamento por continuidade

Definição 3.22 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D tal que $a \notin D$. Diremos que f é **prolongável por continuidade** ao ponto a, se existir em $\mathbb{R}$, o $\lim_{x\to a} f(x)$. Nesse caso a função $F : D \cup \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in D, \\ b & se\ x = a. \end{cases}$$

*com $\lim_{x\to a} f(x) = b$, é contínua em a e designa-se por **prolongamento por continuidade de f ao ponto** a.*

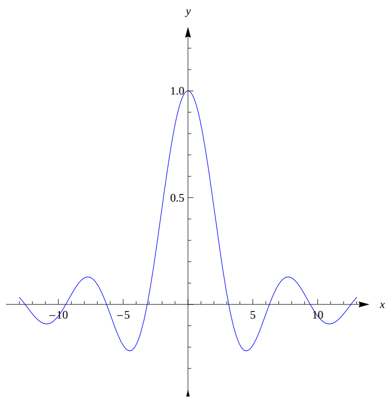


Figura 3.25: Gráfico da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)/x$ se $x \neq 0$ e $F(0) = 1$ se $x = 0$.

Exemplo 3.30 *Consideremos a função* $f : D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{x}.$$

A função não está definida na origem mas 0 *é ponto de acumulação do domínio. Tem-se que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1.$$

Como existe limite no ponto zero podemos afirmar que a função f *é prolongável por continuidade ao ponto zero. A função prolongamento por continuidade de* f *ao ponto* 0 *pode ser definida por:*

$$\begin{aligned} F: \;& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to F(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \textit{se } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 1 & \textit{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta situação é ilustrada na figura 3.25.

3.5 Propriedades globais das funções contínuas

Nesta secção estudaremos teoremas fundamentais que caracterizam o comportamento das funções contínuas definidas em intervalos de $\mathbb{R}$.

Em particular o primeiro teorema, o teorema de Bolzano, traduz uma ideia intuitiva das funções contínuas: *uma função contínua num intervalo fechado não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.*

Bernard Bolzano (1781-1848), matemático checo, foi um dos primeiros a reconhecer que essas propriedades sobre funções contínuas, que parecem "óbvias", necessitavam de uma demonstração matemática rigorosa. As suas observações sobre continuidade foram publicadas em 1850 num importante livro, para a época, chamado "*Paradoxien des Unandlichen*".

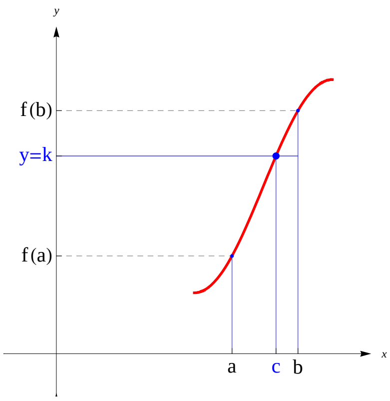


Figura 3.26: Interpretação geométrica do teorema de Bolzano.

Definição 3.23 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função f diz-se* ***contínua no conjunto*** *$A \subset D$ se é contínua em todos os pontos de A. A função diz-se simplesmente contínua se é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

Teorema 3.8 *(**Teorema do valor intermédio ou de Bolzano**) Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $I = [a, b] \subset D$. Então, para qualquer valor k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

Demonstração. Vamos supor que $f(a) \leq k \leq f(b)$; a demonstração seria análoga para o caso em que $f(b) \leq k \leq f(a)$.

Consideramos o intervalo I e dividimos este intervalo em dois subintervalos. Denotamos por $[a_1, b_1] = I_1$ o subintervalo tal que $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$. Dividimos este intervalo em dois subintervalos. Denotamos por $[a_2, b_2] = I_2$ o subintervalo tal que $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. Repetindo sucessivamente esta operação obtemos uma sucessão de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

tal que

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n) \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Estamos nas condições do princípio do encaixe que nos garante que as sucessões (a_n) e (b_n) convergem para um ponto $c \in \mathbb{R}$ e que este ponto c pertence a todos os intervalos I_n (e é único). Então temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f(a_n) &= c, \\ \lim_{n\to+\infty} f(b_n) &= c. \end{aligned}$$

Como f é contínua em I e utilizando o teorema das sucessões enquadradas obtemos que $f(c) = k$. ■

Exemplo 3.31 *Seja*

$$f(x) = x^3 - x^2 + x$$

Provemos que existe um número c tal que a sua imagem $f(c) = 10$. *De facto f é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[0,3]$. *Mas*

$$f(0) = 0 < 10 < f(3) = 21.$$

Então o teorema de Bolzano garante que existe um elemento c tal que $f(c) = 10$.

Algumas consequências deste teorema muito utilizadas no estudo das funções.

Corolário 3.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua num intervalo* $I = [a,b] \subset D$ *tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração. Podemos supor que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Seria análogo para o caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Então $f(a) < 0 < f(b)$. Como f é contínua em I, o teorema de Bolzano garante que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

■

Este corolário é muito útil na identificação dos zeros de uma função.

Exemplo 3.32 *Seja*

$$f(x) = x^4 - x^2 + x - 2$$

Provemos que existe um número c tal que a sua imagem $f(c) = 0$. *De facto f é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[1,2]$. *Como* $f(1) = -1$ *e* $f(2) = 12$ *então* $f(1) \cdot f(2) = -12 < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos um zero desta função no intervalo* $(1,2)$.

Exemplo 3.33 *Mostre que*

$$x^6 - 6x = -1$$

é uma equação que tem pelo menos uma raíz real.

De facto $f(x) = x^6 - 6x + 1$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[-1,2]$. *Como* $f(-1) = -4$ *e* $f(2) = 77$ *então* $f(-1) \cdot f(2) < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos um zero desta função no intervalo* $(1,2)$. *A equação inicial tem uma raíz real.*

Exemplo 3.34 *Mostre que qualquer polinómio do terceiro grau,* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_3 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, *isto é, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perda de generalidade que $a_3 > 0$, *temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} p(x) = &\ \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = -\infty \quad e \\ \lim_{x\to+\infty} p(x) = &\ \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Logo existem números reais $a \in \mathbb{R}^-$ *e* $b \in \mathbb{R}^+$ *tais que* $p(a) \cdot p(b) < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $p(c) = 0$.

O resultado seguinte pode ser enunciado duma forma sugestiva dizendo que a imagem, por uma função contínua, dum intervalo, ainda é um intervalo.

Corolário 3.2 *Se* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua num intervalo* $I \subset D$ *então* $f(I)$ *é também um intervalo.*

Demonstração. Seja $f : I \subset D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Se f é uma função constante então esta afirmação é imediata uma vez que $f(I)$ ou é vazio ou se reduz a um ponto.

Recordemos que um conjunto J, que contenha pelo menos dois pontos, é um intervalo se, e só se, verifica a propriedade

$$r, s \in J \ \text{ e } \ r < s \Longrightarrow [r, s] \subset J \text{ que é equivalente a } r, s \in J \ \text{ e } \ r < k < s \Longrightarrow k \in J$$

Supomos que f não é constante e que $r, s \in f(I)$ e $r < k < s$. Por definição de $f(I)$, existem $a, b \in I$ tais que $r = f(a)$ e $s = f(b)$. Como $f(a) = r < k < s = f(b)$, pelo teorema de Bolzano existe um c estritamente compreendido entre a e b (portanto $c \in I$), tal que $f(c) = k$. Então $k \in f(I)$, podemos concluir que $f(I)$ é um intervalo.
■

Claro que o intervalo $f(I)$ pode ser de um tipo diferente do intervalo I. vejamos alguns exemplos (ver figuras 3.27, 3.28 e 3.29).

Exemplo 3.35

$$\begin{array}{rccc} f: & (-\infty, +\infty) & \to & [-1, 1] \\ & x & \to & \operatorname{sen} x \end{array}$$

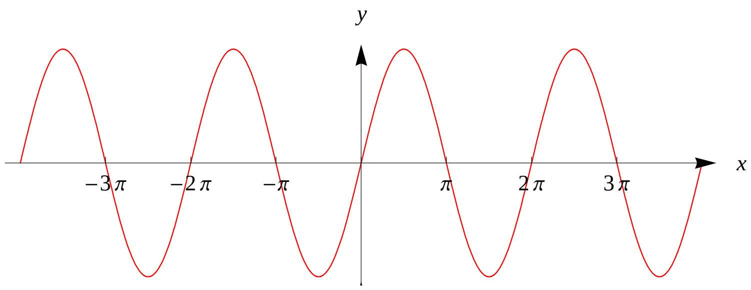


Figura 3.27: Gráfico da função seno.

Exemplo 3.36

$$\begin{array}{rccc} f: & (-\infty, +\infty) & \to & (0, 1) \\ & x & \to & \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Exemplo 3.37

$$\begin{array}{rccc} f: & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \to & (-\infty, +\infty) \\ & x & \to & tg(x) \end{array}$$

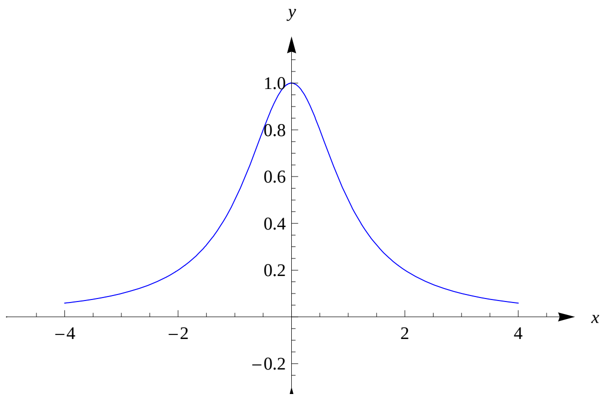


Figura 3.28: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

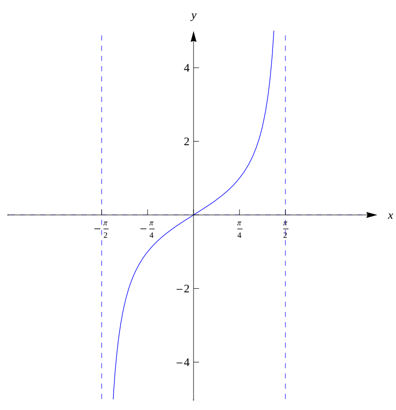


Figura 3.29: Gráfico da função tangente.

Corolário 3.3 *Se f é uma função contínua num intervalo I e injectiva em I, então f é estritamente monótona em I.*

Demonstração. Consideremos uma função f contínua num intervalo I e injectiva em I. Vamos supor, com vista a uma contradição, que f não era estritamente monótona. Supomos que existem $x, y, z \in I$ tais que $x < y < z$ e $f(z) < f(x) < f(y)$; então pelo teorema de Bolzano existe w tal que $y < w < z$ e $f(w) = f(z)$ pelo que f não é injectiva o que não é possível. Podemos concluir que f é estritamente monótona. Os outros casos de negação da monotonia estrita levariam , duma forma análoga, a estabelecer uma contradição com a injectividade da função. ∎

Corolário 3.4 *Se f é monótona num intervalo I e se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua em I.*

Demonstração. Supomos que f é crescente. (Seria análogo para o caso decrescente).

Para todo o ponto $c \in I$, diferente de $\inf I$, e para todo o $\delta > 0$, existe $a < c$ (com $a \in I$) tal que $f(a) > f(c) - \delta$.

Se esta afirmação não fosse verdadeira ter-se-ia que para qualquer $x < c$ em I, $f(x) < f(c) - \delta$, logo $f(I)$ não seria um intervalo, o que contraria a hipótese.

Tem-se, então, que em $[a, c]$, $f(c) - \delta < f(x) \leq f(c)$, donde se conclui que f é contínua à esquerda em c, isto é, $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$.

Analogamente se provaria que f é contínua à direita em c.

Podemos concluir que f é contínua em c. ∎

O teorema de Bolzano e os respectivos corolários permitem provar que a função inversa duma função contínua ainda é uma função contínua.

Proposição 3.6 ***(Continuidade da função inversa)*** *Seja f é uma função injectiva definida num intervalo I. Então, se f é contínua, a função inversa $g : J = f(I) \to I$ é também contínua.*

Demonstração. Seja f uma função contínua e injectiva no intervalo I. Sabemos por um dos corolários que $f(I)$ é um intervalo e pelo último corolário que f é estritamente monótona. Então f^{-1} é estritamente monótona no intervalo $f(I)$ e a sua imagem, I, é também um intervalo. Pelo corolário anterior f^{-1} é contínua em I. ∎

Exemplo 3.38 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{llll} g: & [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ & x & \to & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

É uma função contínua em $[0, +\infty)$ uma vez que é a função inversa da função $f(x) = x^n$ definida também em $[0, +\infty)$.

Com o objectivo de estudar mais pormenorizadamente uma função é importante conhecer os seus pontos extremos.

Definição 3.24 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:*

1) *f tem um **máximo** no conjunto D, se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in D$. Neste caso, c diz-se ponto de máximo de f em D, e $f(c)$ diz-se o máximo de f em D.*

2) *f tem um **mínimo** no conjunto D, se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(c) \leq f(x), \forall x \in D$. Neste caso, c diz-se ponto de mínimo de f em D, e $f(c)$ diz-se o mínimo de f em D.*

Proposição 3.7 *Se f é uma função contínua num conjunto fechado e limitado X, subconjunto de $\mathbb{R}$, então o conjunto imagem $f(X)$ é também fechado e limitado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Por um dos Corolários do Teorema de Bolzano sabemos que $f(I)$ é um intervalo. Resta-nos então provar que é fechado e limitado. Dividimos a demonstração em duas partes.Provemos que:

(i) $f(I)$ é limitado.

(ii) $f(I)$ é fechado.

(i) Suponhamos que $f(I)$ não era limitado e tentamos chegar a uma contradição.
Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| \geq n$.
Como I é limitado a sucessão (x_n) é limitada, logo (x_n) tem uma subsucessão (x_{n_k}) convergente.
Seja $x = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k})$; como I é fechado tem-se que $x \in I$.
Como f é contínua então $\lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ o que contraria a suposição $|f(x_n)| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Mostrámos que $f(I)$ é limitado.

(ii) Temos de provar que existem

$$a, b \in I \text{ tais que } f(a) = \sup_{x\in I} f(x) \text{ e } f(b) = \inf{}_{x\in I} f(x).$$

.

Suponhamos que tal não é verdade, ou seja, que não existe $a \in I$ tal que $f(a) = \sup_{x\in I} f(x)$, isto é, $L = \sup_{x\in I} f(x)$ não é atingido.
Então $L - f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Portanto, $g(x) = \dfrac{1}{L - f(x)}$ é uma função contínua em I. Mas em (i) provámos que toda a função contínua num intervalo limitado é limitada o que implica que g é uma função limitada.
Sabemos, então, que

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0\ \exists c \in I : f(c) > L - \delta\ &\Longrightarrow \forall \delta > 0\ \exists c \in I : L - c < \delta \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \forall \delta > 0\ \exists c \in I : g(c) = \frac{1}{L - f(c)} > \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

o que contradiz o facto de g ser limitada.
Então existe $a \in I$ tal que $f(a) = \sup_{x\in I} f(x)$.
De forma análoga se provaria que $b \in I$ tal que $f(b) = \inf{}_{x\in I} f(x)$.
Logo $f(I)$ é fechado. ■
Estamos em condições de enunciar e provar o teorema de Weierstrass.

Teorema 3.9 *(**Teorema de Weierstrass**) Se f é uma função contínua num intervalo fechado e limitado I em $\mathbb{R}$ então tem máximo e mínimo.*

Demonstração. Se f é uma função contínua num intervalo I em $\mathbb{R}$ então, como mostrámos, $f(I)$ é fechado e limitado.

Se $f(I)$ é limitado então é majorado e minorado logo existem supremo e ínfimo de $f(I)$. Como $f(I)$ é fechado então o supremo e o ínfimo pertencem a $f(I)$, logo são máximo e mínimo de $f(I)$. ■

A continuidade da função é indispensável neste resultado como se pode observar no exemplo seguinte (ver figura 3.30).

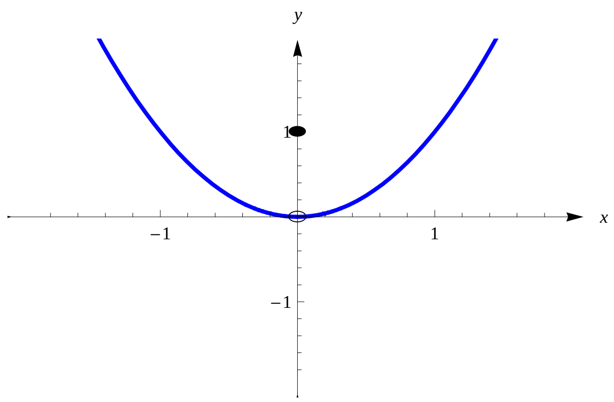


Figura 3.30: Gráfico da função f para ou $-2 < x \leq 2$.

Exemplo 3.39 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rccl} f: & [-2,2] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & se \quad -2 \leq x < 0 \quad ou \quad 0 < x \leq 2 \\ 1 & se \quad x = 0. \end{array} \right. \end{array} .$$

Esta função está definida num intervalo fechado e limitado e, no entanto, não tem mínimo. O seu ínfimo é zero mas nenhum ponto do intervalo tem por imagem zero. Esta afirmação não contradiz o teorema de Weierstrass uma vez que f não é contínua na origem.

3.6 Exercícios propostos

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; *c)* $f(x) = \sqrt{x^2-2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$; *e).* $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$; *f)* $f(x) = \log\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$;

g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$; *h)* $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\log\left(\dfrac{x}{10}\right)\right)$; *i)* $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$;

j) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$; *k)* $f(x) = \log\left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)$; *l)* $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

2) Verifique quais das funções dadas são pares e quais são ímpares:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2}$;

e) $f(x) = \log(|x|)$;

f) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$;

g) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

h) $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

i) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

3) Encontre a inversa da função y e determine o domínio da inversa:

a) $y = 2x+3$; *b)* $y = \log\left(\dfrac{x}{2}\right)$; *c)* $y = \operatorname{arctg}(3x)$.

4) Sendo $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = e^{2x}$ caracterize as funções:

a) $g \circ f$;

b) g^{-1}.

5) Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$.
Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

a) $\forall a \in D_f : f(a) = f(-a)$;
b) $\forall a, b \in D_f : a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$.

6) Mostre, usando a definição de limite, que:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5$; *b)* $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$; *c)* $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

7) Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; *c)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$; *e)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; *h)* $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$; *l)* $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$; *m)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\operatorname{sen} x}-e^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}(2x)}$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{2x^2}\right)^{x^2}$; *o)* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

8) Sabendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcule:

a). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

e). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$; *g)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}(2x)}{x+\operatorname{sen}(3x)}$.

9) Construa $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua num e num só ponto.

10) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes encontre os pontos de continuidade e de descontinuidade:

$$a)\ f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}; \qquad b)\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x};$$

$$c)\ f(x) = \left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|; \qquad d)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5 \\ 1, & x = 5 \end{cases}.$$

11) Determine os valores de a e de b para os quais a segunite função é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3, \\ x^2 + ax + b, & |x-2| \geq 1. \end{cases}$$

12) Construa uma bijecção de $[0, 1]$ em si próprio que não seja contínua.

13) Para cada par de valores reais atribuídos a m e t a expressão seguinte define uma função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} m, & x \leq 0, \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}, & 0 < x < 1, \\ t, & x \geq 1. \end{cases}$$

Determine m e t de modo que a função seja contínua no intervalo $[0, 1]$.

14) Sejam f e g funções reais de variável real contínuas no ponto $a \in \mathbb{R}$. Prove que a função $\max(f, g)$ é contínua no ponto a.

Sug.: Mostre primeiro que $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$.

15) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1; \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1; \\ r \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Determine r.
b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
d) Quais são os limites $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, caso existam?

16)

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pelas fórmulas:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções f e g é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

c) Mostre que f e g são funções limitadas.

17) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

18) Justifique que existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\log\left(1+x^2\right) \leqslant a|x| + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

19) Consideremos a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log|x+2| + arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) - \log 2, & \text{se } x < 0; \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } 0 < x < 1; \\ e^{x-1} + \dfrac{\pi}{4}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e prolongamento por continuidade.

20) Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$ é apenas contínua no ponto $x = 0$.

21) Mostre que, tem pelos menos duas raízes, a equação

$$x - \log x = 2.$$

22) Consideremos a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}, & \text{se } 0 \le x < 1; \\ a, & \text{se } x = 1; \\ \dfrac{x+5}{3}, & \text{se } 1 < x \le 4. \end{cases}$$

a) Determine os valores de a e b de modo que f seja contínua em todo o seu domínio.

b) Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que:

$$\exists c \in (2,4) : f(c) = c.$$

23) Dada a função real de variável real h, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ -x^2 + 2x, & x \le 2. \end{cases}$$

a) Determine $h(0)$ e $h(3)$.

b) Indique o valor lógico da proposição:

$$\exists c \in (0,3) : h(c) = \frac{3}{2}.$$

c) O resultado anterior contraria o teorema de Bolzano? Justifique.

d) Prove que a restrição de h ao intervalo $[0,2]$ tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.

3.6.1 Soluções dos exercícios

1) a) $[-1,+\infty)$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}\backslash\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$; d) $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$; e) $(-2,0]$; f) $(-2,2)$; g) $\left[-\frac{1}{3},1\right]$; h) $\left[\frac{10}{e},10\right]e$; i) $\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; j) $(-1,\operatorname{sen} 1)$; k) $[0,1)$; ł) $\mathbb{R}$.

2) a) Ímpar. b) Par c) Par, se n par e ímpar se n ímpar. d) Par. e) Par f) Par. g) Ímpar. h) Ímpar. i) Ímpar.

3) a) $y = \frac{1}{2}(x-3)$, $D_y = \mathbb{R}$. b) $y = 2e^x$, $D_y = \mathbb{R}$.

c) $y = \frac{1}{3}tg(x)$, $D_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) a) $gof(x) = (x+1)^2$, $D_{gof} = (-1, +\infty)$, $D'_{gof} = \mathbb{R}^+$.

b) $g^{-1}(x) = \frac{\log x}{2}$, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

5) a) Verdadeira; b) Falsa.

7) a) 2; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$; g) 4; h) 0; i) 0;

j) 1; l) e; m) $\frac{1}{2}$; n) 0; o) Não existe.

8) a) 5; b) $\frac{\operatorname{sen} 2}{2}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{2}{3}$; g) $-\frac{1}{4}$.

9) A função definida por.$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1-x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

10) a) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) Contínua em $\mathbb{R}^+$; c) Contínua em $\mathbb{R}$;
d) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

11) $a = -3$ e $b = 4$.

12) A função definida por.$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ x & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$.

13) $m = 0$ e $t = \frac{1}{2}$.

15) a) $r = \frac{\pi}{2}$; b) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; c) $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe.

16) a) f e g são contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) f é prolongável por continuidade a 0 e g não é prolongável por continuidade a 0 .

17) a) $D = [0,1) \cup (1, +\infty)$. b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. c) $f(D) = \mathbb{R}$.

d) Por exemplo as sucessões de termo geral $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $v_n = n$.

19) f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$ e é descontínua nos pontos $x = -2$ e $x = 1$.

22) $a = 2$ e $b = 0$.

23) a) $h(0) = 0$ e $h(3) = 3$. b) Falsa. c) Não

d) Máximo $h(1) = 1$ e mínimo $h(0) = h(2) = 0$.