ANÁLISE MATEMÁTICA II

ANÁLISE MATEMÁTICA II

TEORIA E EXERCÍCIOS

ANA SÁ

BENTO LOURO

2003

Índice

Capítulo 1

Séries Numéricas

1.1 Generalização da operação adição

A operação adição (ou soma) é inicialmente definida como a aplicação que a cada par de números reais faz corresponder um número real, de acordo com determinadas regras. Essa operação goza de certas propriedades e verificamos que podemos generalizar a operação a um número finito de parcelas mantendo todas as propriedades. A definição de soma de um número finito de parcelas é feita por recorrência:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} a_1, & \text{se n=1} \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Podemos pensar agora em fazer uma generalização a um número infinito numerável de parcelas. As parcelas constituirão a sucessão $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Se existir uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são nulos, tem-se a soma de todas as parcelas igual à soma dos p primeiros termos:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i.$$

Se existir uma subsucessão de termos não nulos poderemos chamar soma ao limite, se existir e for finito, da sucessão das somas dos n primeiros termos de a_n, sucessão essa $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

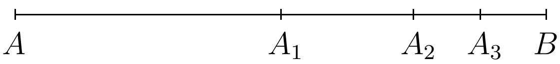
Se a sucessão a_n tivesse todos os termos positivos, poderia parecer à primeira vista que S_n não é convergente. De facto, supor que a soma de um número infinito de parcelas positivas é um número real não é um conceito intuitivo.

Neste caso, a intuição falha precisamente porque pretendemos generalizar para o infinito um conceito, o de soma, que temos intuitivo para um número finito de parcelas. É comum que a intuição nos engane em casos de “passagem” do finito para o infinito.

De qualquer modo é verdade que S_n nem sempre é convergente, ou seja, que nem sempre poderemos definir, por este processo, soma de um número infinito de parcelas. Interessa, no entanto, saber como deve ser a sucessão a_n de modo que a essa sucessão esteja associado um número real, soma de todos os seus termos.

Citando o Prof. Campos Ferreira:

"Vem a propósito lembrar um dos paradoxos formulados, há mais de 2000 anos, pelo filósofo grego Zenão. Zenão imaginou um corredor, deslocando-se de certo ponto A para a meta B, com velocidade constante, e raciocionou de maneira que pode exprimir-se nos termos seguintes: designe-se por A_1 o ponto médio do segmento AB, por A_2 o ponto médio de A_1B, etc. Em geral, para todo o $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} designará o ponto médio do segmento A_nB.



Nestas condições, se for t o tempo gasto pelo corredor a percorrer a distância que vai de A a A_1, será $t/2$ o tempo gasto de A_1 a A_2, $t/2^2$ o tempo necessário para ir de A_2 a A_3, etc. O tempo total necessário para completar a corrida, T, equivaleria assim à "soma" de uma infinidade de tempos parciais todos positivos:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \ldots + \frac{t}{2^n} + \ldots$$

Daqui julgava Zenão poder deduzir que esse tempo total era necessariamente infinito e que, portanto, o corredor jamais poderia atingir a meta. Tal resultado, que lhe parecia solidamente estabelecido, estava porém em contradição evidente com o facto de que, sendo o movimento uniforme por hipótese, o tempo correspondente ao percurso deveria ser simplesmente o dobro do que o corredor gastava na primeira metade, isto é, $T = 2t$. Além disso, aquele resultado estava ainda em contradição com a mais elementar experiência do mundo físico. Por isso se dizia tratar-se de um paradoxo.

O esclarecimento completo da questão só veio a ser alcançado, cerca de 2000 anos depois de o paradoxo ter sido enunciado por Zenão, com a criação da teoria das séries.

Convém ainda registar que coube a um matemático português, José Anastácio da Cunha, um papel percursor de grande relevo no estudo desta teoria (em particular, deve-se-lhe a primeira definição rigorosa do conceito de série convergente, formulada em 1790); mais tarde, graças a trabalhos de grandes matemáticos como Cauchy, Weierstrass, etc., as séries tornar-se-iam instrumentos de valor inestimável para o desenvolvimento de todos os ramos da Análise Matemática."

1.2 Definição de série. Convergência. Propriedades gerais

Definição 1.2.1 *Seja a_n uma sucessão numérica. Chama-se* ***série gerada*** *por a_n à sucessão S_n definida do modo seguinte:*

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ & \vdots & \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ & \vdots & \end{array}$$

Para designar a série usa-se qualquer das notações:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum a_n, \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Os números a_1, a_2, ..., chamam-se **termos** da série, a_n diz-se **termo geral** da série e as somas S_1, S_2, ... chamam-se **somas parciais**.

Definição 1.2.2 *A série $\sum a_n$ diz-se* ***convergente*** *se existir e for finito o limite*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Se este limite não existir ou não for finito a série diz-se ***divergente****.*

No caso de convergência chama-se **soma** da série ao valor, S, do limite, isto é,

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

NOTA: A identificação de uma série com o símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um abuso de linguagem já que é a identificação da série com a sua soma, quando ela existe. Este abuso, no entanto, é de uso corrente e tem-se demonstrado útil e inofensivo.

<u>EXEMPLO 1</u>: Chama-se **série geométrica** à série gerada por uma progressão geométrica: se a_n é uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ temos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad .$$

Sabemos que S_n é convergente se, e só se, $|r| < 1$, logo a série geométrica é convergente se, e só se, o valor absoluto da razão da progressão geométrica que a gerou for menor do que 1. No caso de convergência temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}\,.$$

Se $r = 1$ a série é uma série de termo geral constante, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1,$$

tendo-se, assim, $S_n = na_1$ e, se $a_1 \neq 0$, a série será divergente.

<u>EXEMPLO 2</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, construamos a sucessão das suas somas parciais e estudemos o seu limite:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\\
S_3 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\vdots\\
S_n &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, a sucessão S_n tem limite $+\infty$ e a série em estudo é divergente.

<u>EXEMPLO 3</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Sabendo que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

podemos escrever a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1-\frac{1}{2}\\
S_2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}\\
S_3 &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}\\
&\vdots\\
S_n &= 1-\frac{1}{n+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, a série é convergente e a sua soma é 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

<u>EXEMPLO 4</u>: A sucessão das somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(\log n-\log(n+1))$$

é a sucessão

$$\begin{aligned}
S_1 &= \log 1-\log 2=-\log 2\\
S_2 &= -\log 2+\log 2-\log 3=-\log 3\\
S_3 &= -\log 3+\log 3-\log 4=-\log 4\\
&\vdots\\
S_n &= -\log(n+1)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\log(n+1))=-\infty$, a série é divergente.

<u>EXEMPLO 5</u>: O termo geral da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$$

pode escrever-se na forma $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\right)$. A sucessão das somas parciais pode agora ser construída:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)\\
S_2 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\\
S_3 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\\
S_4 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\\
S_5 &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\\
&\vdots\\
S_n &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$, a série é convergente.

Os três últimos exemplos são casos particulares de um tipo de séries chamadas **séries telescópicas**. São séries cujo termo geral a_n se pode escrever na forma $\alpha_n - \alpha_{n+k}$, com $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+k}).$$

Estas séries são convergentes se, e só se, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, onde $v_n = \alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+k}$, existe e é finito.

No caso particular de existir, finito, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+k}) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - ka,$$

sendo $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$. De facto, a sucessão das somas parciais é a sucessão

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i+k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i+k} \\
&= \alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n - (\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+k}) \\
&= \alpha_1 + \cdots + \alpha_k - (\alpha_{n+1} + \cdots \alpha_{n+k}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - \sum_{i=1}^{k}\alpha_{i+n}
\end{aligned}$$

Sendo α_n convergente então $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{i+n}$ existe e

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_{i+n}$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i+n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - ka.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.1 *Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente então* a_n *é um infinitésimo.*

Demonstração: Como a série é convergente, a sucessão $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ é uma sucessão convergente, o mesmo acontecendo a S_{n-1}, tendo-se $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}$. Então

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0. \blacksquare$$

NOTA: Este teorema indica uma condição necessária, mas não suficiente para que uma série seja convergente. Assim a sua utilidade é sobretudo para decidir que uma série é divergente já que se o termo geral não for um infinitésimo a série será concerteza divergente.

EXEMPLO 6: A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ é divergente porque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

EXEMPLO 7: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Temos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, o que não nos permite concluir nada pelo Teorema 1.2.1. No entanto, já demonstrámos, no Exemplo 2, que esta série é divergente.

Teorema 1.2.2 *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries convergentes de somas* A *e* B*, respectivamente, e* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Então*

a) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$*, a que se chama série soma, também é convergente e a sua soma é* $A + B$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *é convergente e a sua soma é* λA*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração:

a) Sejam S_n^* e S_n^{**} as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Como são séries convergentes temos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^* = A \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} S_n^{**} = B.$$

Seja S_n a sucessão das somas parciais da série soma, isto é, $S_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = S_n^* + S_n^{**}$. Então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n^* + S_n^{**}) = \lim_{n\to+\infty} S_n^* + \lim_{n\to+\infty} S_n^{**} = A + B,$$

isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $A + B$.

b) Seja S_n^* a sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por hipótese, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n^* = A$. Seja S_n a sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$. Então $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \lambda S_n^*$.
Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \lambda S_n^* = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n^* = \lambda A,$$

isto é, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA. ■

NOTAS:

1. Da demonstração da alínea a) ressalta que pode acontecer que as séries dadas sejam divergentes e, no entanto, a série soma seja convergente. Também se nota através da demonstração que se as sucessões das somas parciais tiverem limites infinitos do mesmo sinal – as séries são ambas divergentes – a sucessão das somas parciais será divergente, o mesmo acontecendo se uma das séries for convergente e a outra divergente. Se S_n^* e S_n^{**} tiverem limites infinitos, mas de sinais contrários, a série soma poderá ser convergente ou divergente já que no cálculo do limite aparece uma indeterminação.

2. Da demonstração de b) resulta que se $\lambda \neq 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente se, e só se, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o for. Se $\lambda = 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente pois todos os seus termos serão nulos.

<u>EXEMPLO 8</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$.

$$\frac{1}{n(n+3)(n+6)} = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right).$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$ é uma série telescópica em que $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ e $k = 3$. Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ a série é convergente e a sua soma é $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}\right)$ é igualmente uma série telescópica em que $\alpha_n = \dfrac{1}{n+3}$ e $k = 3$. Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ a série é convergente e a sua soma é $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{37}{60}$.

Como são ambas convergentes, a série dada também é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)} = \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6} \right) = \frac{73}{1080}.$$

Teorema 1.2.3 *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e só se,*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \qquad m > n > p \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \delta.$$

Demonstração: Como

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = |S_m - S_n|,$$

o que pretendemos demonstrar é que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \qquad m > n > p \Rightarrow |S_m - S_n| < \delta,$$

ou seja, S_n é uma sucessão de Cauchy.

Mas, por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se, S_n é uma sucessão convergente e em $\mathbb{R}$ uma sucessão é convergente se, e só se, é de Cauchy. O teorema fica assim demonstrado. ■

EXEMPLO 9: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ denominada **série harmónica**. Vamos demonstrar, utilizando o Teorema 1.2.3, que a série harmónica é divergente.

Se a série fosse convergente, dado $\delta > 0$, existiria $p \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n > p$ então $|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \delta$. Mas, se $m = n + n$,

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + \cdots + a_m| &= |a_{n+1} + \cdots + a_{n+n}| \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &\geq \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ou seja, a condição do teorema não se verifica para $\delta < \frac{1}{2}$. Portanto, a série harmónica é divergente.

Corolário 1 *A natureza de uma série não depende dos p primeiros termos, seja qual for $p \in \mathbb{N}$, isto é, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries tais que $\exists p \in \mathbb{N} : a_n = b_n \; \forall n > p$, então ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.*

Definição 1.2.3 *Chama-se* ***resto de ordem p*** *da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à série*

$$r_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Pelo corolário anterior podemos concluir que se uma série é convergente o mesmo acontece ao seu resto de qualquer ordem. A soma do resto de ordem p de uma série convergente dá-nos o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma da série a sua soma parcial S_p. De facto, o erro é dado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = r_p.$$

Corolário 2 *A natureza de uma série não é alterada se lhe suprimirmos um número finito, arbitrário, de termos.*

O teorema que se segue pode considerar-se, de certo modo, uma generalização da propriedade associativa da adição ao caso das séries convergentes.

Teorema 1.2.4 *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ uma sucessão de elementos de $\mathbb{N}$, estritamente crescente. Seja ainda b_n a sucessão definida do seguinte modo:*

$$b_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k_1} a_i, & \text{se } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} a_i, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração: Por definição de série convergente existe e é finito o limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Então qualquer subsucessão de S_n será convergente e terá o mesmo limite $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será convergente se, e só se, $S_n^{'} = \sum_{i=1}^{n} b_i$ for convergente. Mas

$$S_n^{'} = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{k_1} a_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i + \cdots + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} a_i = \sum_{i=1}^{k_n} a_i = S_{k_n},$$

ou seja, $S_n^{'}$ é uma subsucessão de S_n sendo, portanto, convergente e para o mesmo valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} S_n^{'} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \blacksquare$$

NOTA: O teorema diz que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} + \cdots + a_{k_2} + \cdots = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots$$

Esta "propriedade associativa"não é válida se a série for divergente. Basta observar que se na demonstração do teorema, S_n não fosse convergente nada poderíamos dizer sobre a natureza de $S_n^{'}$. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente pois o seu termo geral não tende para zero. No entanto, $(-1+1) + (-1+1) + \cdots = 0$.

1.3 Séries alternadas

Definição 1.3.1 *Uma série diz-se* ***alternada*** *se os seus termos são alternadamente positivos e negativos.*

Supondo que o primeiro termo da série é positivo podemos escrevê-la na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad a_n>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Teorema 1.3.1 (**Critério de Leibniz**)
Se a_n é uma sucessão decrescente de termos positivos e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ é convergente.

Demonstração: Seja S_n a sucessão das somas parciais desta série:

$$S_n=a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n.$$

Vamos estudar as subsucessões de índices pares e de índices ímpares. Seja $k\in\mathbb{N}$, qualquer;

$$\begin{aligned} S_{2k} &= a_1-a_2+\cdots+a_{2k-1}-a_{2k}\\ S_{2k+1} &= a_1-a_2+\cdots+a_{2k-1}-a_{2k}+a_{2k+1}\end{aligned}$$

A subsucessão S_{2k} é crescente porque, como a_n é decrescente,

$$\begin{aligned} S_{2k+2}-S_{2k} &= a_1-a_2+\cdots+a_{2k-1}-a_{2k}+a_{2k+1}-a_{2k+2}-\\ &\quad -(a_1-a_2+\cdots+a_{2k-1}-a_{2k})\\ &= a_{2k+1}-a_{2k+2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

e é uma sucessão limitada porque

$$S_2\leq S_{2k}=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+a_{2k}]<a_1$$

Sendo uma sucessão monótona e limitada, S_{2k} é uma sucessão convergente. Por outro lado, de $S_{2k+1}=S_{2k}+a_{2k+1}$ conclui-se que $\lim\limits_{k\to+\infty}S_{2k+1}=\lim\limits_{k\to+\infty}S_{2k}$, visto que por hipótese a_n é um infinitésimo.

Como as subsucessões dos termos de ordem par e de ordem ímpar têm o mesmo limite, S_n é convergente. Então, por definição, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ é convergente. ■

Teorema 1.3.2 *Sejam a_n uma sucessão decrescente de termos positivos, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, e S a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Então*

$$0\leq(-1)^n(S-S_n)\leq a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Demonstração: Sabemos da demonstração do teorema anterior que S_{2k} é uma subsucessão de S_n crescente e com o mesmo limite, S, da subsucessão S_{2k+1}. Prova-se, por um processo análogo ao usado para S_{2k}, que S_{2k+1} é decrescente. Então

$$S_{2k} \leq S \quad \text{e} \quad S \leq S_{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Destas desigualdades conclui-se que

$$\begin{array}{l} 0 \leq S_{2k-1} - S \leq S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k} \\ 0 \leq S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{l} 0 \leq S_{2k-1} - S \leq a_{2k} \\ 0 \leq S - S_{2k} \leq a_{2k+1}, \end{array}$$

ou ainda,

$$\begin{array}{l} 0 \leq (-1)^{2k-1}(S - S_{2k-1}) \leq a_{2k} \\ 0 \leq (-1)^{2k}(S - S_{2k}) \leq a_{2k+1}. \end{array}$$

Destas duas últimas desigualdades conclui-se que

$$0 \leq (-1)^n (S - S_n) \leq a_{n+1}. \ \blacksquare$$

Corolário 1 *Sejam a_n uma sucessão decrescente de termos positivos tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e S a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Então*

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

NOTA: Do corolário anterior ressalta que, nas condições indicadas, o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma de uma série alternada alguma soma parcial é, em valor absoluto, inferior ao valor absoluto do primeiro dos termos desprezados. Com efeito,

$$|(-1)^n (S - S_n)| \leq |(-1)^n a_{n+1}|,$$

ou seja,

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

EXEMPLO 1: Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$, denominada **série harmónica alternada**. Pelo Critério de Leibnitz esta série é convergente, pois $a_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sucessão de termos positivos, decrescente e com limite zero. Se nesta série tomarmos para valor aproximado da soma a soma parcial S_9 cometeremos um erro que em valor absoluto é inferior a $\frac{1}{10}$, valor de a_{10}.

EXEMPLO 2: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \leq 0$ a série diverge porque o seu termo geral não tende para zero.

Se $\alpha > 0$ a série é convergente porque $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ é uma sucessão decrescente, de termos positivos e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 3: Seja a_n o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Como a_n é um infinitésimo e $a_n > 0$ $\forall n > 1$, mas a_n não é decrescente, pelo Critério de Leibniz nada podemos concluir.

No entanto, vê-se facilmente que a série dada é divergente porque é a soma de uma série convergente – a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ – com uma série divergente – a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

1.4 Convergência absoluta

Teorema 1.4.1 *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente, o mesmo acontece à série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração: A série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente se, e só se,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad m > n > p \Rightarrow \big|\, |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \,\big| < \delta.$$

Como

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$$

e

$$\big|\, |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \,\big| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$$

temos que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad m > n > p \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \delta,$$

ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. ■

NOTA: É importante observar que o recíproco deste teorema não é verdadeiro, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser convergente sem que a série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, o seja. Basta observar a série harmónica (divergente) e a série harmónica alternada (convergente): a série harmónica é a série dos módulos da série harmónica alternada.

Definição 1.4.1 *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diz-se* ***absolutamente convergente*** *se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente. Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diz-se* ***simplesmente convergente*** *ou* ***condicionalmente convergente*** *se for convergente e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for divergente.*

Definição 1.4.2 *Diz-se que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é um* ***rearranjo*** *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, ou que desta se obtém por reordenação dos seus termos, se existir uma bijecção* ϕ *de* $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{N}$ *tal que* $b_n = a_{\phi(n)}$.

Teorema 1.4.2 *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente então qualquer série que dela se obtenha por reordenação dos seus termos é absolutamente convergente e tem a mesma soma.*

Este teorema generaliza às séries absolutamente convergentes a propriedade comutativa da adição usual. Contudo, é de referir que esta propriedade não vale para as séries simplesmente convergentes e pode mesmo demonstrar-se que por reordenação dos termos de uma série simplesmente convergente se pode obter outra série de soma previamente fixada e até uma série divergente.

Teorema 1.4.3 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série simplesmente convergente. Então:*

a) Existem bijecções $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tais que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *é divergente.*

b) Para todo o número real k *existe uma bijecção* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *é convergente e tem soma igual a* k*.*

EXEMPLO: Consideremos a série harmónica alternada, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$, que sabemos ser simplesmente convergente. Reorganizemos os seus termos por forma que cada termo positivo seja seguido por dois termos negativos. Obtemos a seguinte série:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

Temos para esta série as somas parciais:

$$\begin{aligned}
S_1' &= 1\\
S_2' &= 1-\frac{1}{2}\\
S_3' &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}S_2\\
S_4' &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\\
S_5' &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\
S_6' &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}S_4\\
&\vdots\\
S_9' &= S_6'+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}S_6\\
&\vdots
\end{aligned}$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i}$.

Então $S'_{3n} = \frac{1}{2} S_{2n}$ o que implica que, sendo $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to+\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} S$.

Como $S'_{3n+1} = S'_{3n} + \frac{1}{2n+1}$ e $S'_{3n+2} = S'_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} S'_{3n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n+2} = \lim_{n\to+\infty} S'_{3n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n+2}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} S'_{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} S'_{3n+2} = \lim_{n\to+\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} S.$$

Conclui-se assim que $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{2} S$, isto é, a série obtida por reordenação dos termos da série harmónica alternada é convergente e tem soma igual a metade da soma da série dada.

1.5 Séries de termos não negativos

Neste parágrafo vamos estabelecer alguns critérios de convergência de séries de termos não negativos e, portanto, aplicáveis também à investigação da convergência absoluta das séries em geral. É evidente que uma série de termos não negativos se for convergente é absolutamente convergente uma vez que o valor absoluto do seu termo geral é ele próprio.

Teorema 1.5.1 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e só se, a sucessão das suas somas parciais é limitada.*

Demonstração: Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Se a série é convergente então, por definição, a sucessão S_n tem limite finito. Consequentemente é uma sucessão limitada.

Suponhamos que S_n é limitada. Como $a_n \geq 0$ tem-se $S_{n+1} \geq S_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, S_n é uma sucessão monótona crescente. As duas afirmações anteriores implicam a convergência de S_n o que equivale a dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. ∎

Teorema 1.5.2 (**Critério geral de comparação**) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que* $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

Demonstração: Sejam $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $S'_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Como $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $0 \leq S_n \leq S'_n$.

a) Visto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente a sucessão das suas somas parciais, S'_n, é limitada (Teorema 1.5.1) o que implica que a sucessão S_n também é limitada, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então a sucessão S_n não é limitada (Teorema 1.5.1). Isto implica que a sucessão S'_n também não é limitada e, assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente. ∎

NOTA: A omissão de um número finito de termos não altera a natureza da série como vimos, portanto, o teorema anterior mantém-se válido se $\exists p \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq p$.

EXEMPLO 1: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Como

$$0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$, portanto convergente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

EXEMPLO 2: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha < 1$. Com esta hipótese, $n^{\alpha} < n$, o que implica que $\dfrac{1}{n^{\alpha}} > \dfrac{1}{n}$. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente a série dada também será divergente.

EXEMPLO 3: Estudemos a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Já vimos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e como temos

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

podemos concluir, pelo Teorema 1.5.2, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ é convergente, o mesmo acontecendo à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ porque difere desta apenas num termo.

Corolário 1 *Sejam* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos, c uma constante positiva e p um número natural tais que* $a_n \leq c\, b_n$, $\forall n \geq p$.

a) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

b) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

Demonstração: Seja $c_n = c\, b_n$. Pelo Teorema,

a) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

b) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é divergente.

Como $c > 0$, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza e deste facto sai o resultado pretendido. ■

Corolário 2 *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}^+$ *então as séries são da mesma natureza.*

Demonstração: Seja $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Por definição,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad \forall n > p \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \delta.$$

Seja $\delta = \frac{k}{2}$. A partir de certa ordem p temos

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \frac{k}{2} \Leftrightarrow -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}k$$

e, portanto,

$$a_n < \frac{3}{2}k\, b_n \quad \text{e} \quad \frac{k}{2}\, b_n < a_n.$$

Destas desigualdades conclui-se, pelo corolário anterior, o resultado pretendido. ■

Corolário 3 *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *então*

a) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também é convergente;*

b) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também é divergente.*

<u>Demonstração</u>: Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Por definição,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \delta.$$

A partir de certa ordem p temos

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{a_n}{b_n} < \delta,$$

pois $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Consequentemente, $0 \leq a_n < \delta b_n$, e do Corolário 1 sai o resultado. ∎

Corolário 4 *Sejam* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ *então*

a) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *também é divergente;*

b) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *também é convergente.*

<u>Demonstração</u>: Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$. Por definição,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \quad \frac{a_n}{b_n} > \delta.$$

A partir de certa ordem p temos $a_n > \delta b_n > 0$, pois $b_n > 0$, e desta desigualdade conclui-se, pelo Corolário 1, o que pretendíamos. ∎

Corolário 5 *Sejam* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se existir* $p \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \forall n \geq p$$

então

a) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

b) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

Demonstração: Como $a_n > 0$ e $b_n > 0$ temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n},$$

ou seja, a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é uma sucessão decrescente a partir da ordem p. Então existe uma constante k ($k \geq \frac{a_p}{b_p}$) tal que

$$\frac{a_n}{b_n} \leq k,$$

ou seja, $a_n \leq k\, b_n$, $\forall n \geq p$. Do Corolário 1 sai o resultado. ■

EXEMPLO 4: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3}$. É uma série de termos positivos. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2n^2+1}{n^4+3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4+n^2}{n^4+3} = 2$$

pelo Corolário 2 as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza e como esta última é convergente (Exemplo 3) a série dada é convergente.

EXEMPLO 5: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$ é uma série de termos não negativos. Como

$$0 \leq \frac{1+(-1)^n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a série dada é convergente (Corolário 1).

EXEMPLO 6: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$ é uma série de termos não negativos. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\log n}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

podemos concluir, pelo Corolário 3, que a série dada também é convergente.

EXEMPLO 7: Consideremos as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots 2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. São ambas séries de termos positivos, sendo a segunda divergente. Como

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots 2n(2n+2)}}{\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots 2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \quad \text{e} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1},$$

verifica-se facilmente que

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2},$$

o que permite concluir, pelo Corolário 5, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

Teorema 1.5.3 (**Critério da Razão**) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

a) Se existirem $r < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tais que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$, $\forall n \geq p$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

b) Se existir $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n \geq p$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração:

a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é uma série geométrica de razão r. Como $0 < r < 1$, a série é convergente. Mas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} = r, \quad \forall n \geq p,$$

o que implica, pelo Corolário 5, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ é uma série divergente. Como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \forall n \geq p,$$

o Corolário 5 permite-nos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. ■

Corolário 1 (**Critério de D'Alembert**) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se existir* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ $(a \in \mathbb{R}_0^+$ *ou* $a = +\infty)$, *então*

a) se $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

<u>Demonstração</u>: Sabemos que, se $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < \delta.$$

a) Seja δ tal que $0 < \delta < 1 - a$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < \delta \ \ \forall n > p \Leftrightarrow -\delta < \frac{a_{n+1}}{a_n} - a < \delta \ \ \forall n > p \Leftrightarrow a - \delta < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \delta \ \ \forall n > p.$$

Mas se $\delta < 1 - a$ então $a + \delta < 1$ e a alínea a) do Critério da Razão permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $a \in \mathbb{R}$, seja $\delta = a - 1$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < a - 1 \ \ \forall n > p \Leftrightarrow 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2a - 1 \ \ \forall n > p.$$

Pelo teorema anterior a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Se $a = +\infty$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ \ \forall n > p,$$

e, ainda pelo teorema anterior, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ■

NOTA: Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nada se pode concluir, pois existem séries divergentes e séries convergentes nesta situação. Por exemplo, a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

No entanto, se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e a convergência for por valores maiores do que 1, isso significa que existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, o que implica, pelo Critério da Razão, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

<u>EXEMPLO 8</u>: Seja $k > 0$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$ é uma série de termos positivos. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{k^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k^{n+1}(n+1)!\, n^n}{k^n\, n!\, (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} k \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = k \cdot \frac{1}{e}$$

o Critério de D'Alembert permite-nos concluir que: se $\dfrac{k}{e} < 1$, isto é, se $k < e$, a série é convergente e se $\dfrac{k}{e} > 1$, isto é, se $k > e$, a série é divergente.

Se $\dfrac{k}{e} = 1$, isto é, se $k = e$, nada se pode concluir pelo Critério de D'Alembert. No entanto, como $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ é uma sucessão crescente com limite e, $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ é uma sucessão decrescente com limite $\dfrac{1}{e}$, o que implica que $e \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ será decrescente e terá limite 1, ou seja, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tende para 1 por valores maiores do que 1. Então a série é divergente se $k = e$.

<u>EXEMPLO 9</u>: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + n!}{(4n)! + n^4}$ é uma série de termos positivos e

$$0 < \frac{(n!)^2 + n!}{(4n)! + n^4} < \frac{2(n!)^2}{(4n)!}\,.$$

Estudemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)^2}{(4n)!}$ pelo Critério de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2((n+1)!)^2}{(4n+4)!}}{\dfrac{2(n!)^2}{(4n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = 0$$

Concluímos, assim, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n!)^2}{(4n)!}$ converge, logo a série dada converge.

<u>EXEMPLO 10</u>: Consideremos a série de termos positivos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3^2} + \cdots$$

ou seja, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$, $a_3 = \dfrac{1}{2^2}\cdot\dfrac{1}{3}$, $a_4 = \dfrac{1}{2^2}\cdot\dfrac{1}{3^2}$, ..., ou ainda,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}\,, & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n-1}{2}}}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

se n é par então $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}}{\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}} = \frac{2^{\frac{n}{2}}3^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n+2}{2}}3^{\frac{n}{2}}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

se n é ímpar então $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{\dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\dfrac{1}{3^{\frac{n-1}{2}}}} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}3^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}3^{\frac{n+1}{2}}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Pelo Critério da Razão a série converge.

Teorema 1.5.4 (**Critério da Raiz**) *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

a) Se existirem $r < 1$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, $\forall n > p$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se existirem $p \in \mathbb{N}$ e uma subsucessão, (a_{k_n}), de (a_n) tal que $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} \geq 1$, $\forall k_n > p$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração:

a) Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r, \ \forall n > p$ então $a_n \leq r^n < 1 \ \forall n \geq p$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é uma série convergente por ser uma série geométrica de razão r, com $0 < r < 1$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} \geq 1, \ \forall k_n > p$ então $a_{k_n} \geq 1, \ \forall k_n > p$, pelo que não tende para zero. Em consequência, a sucessão a_n não tende para zero o que implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. ∎

Corolário 1 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

a) Se $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

b) Se $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração: Seja $a = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.
a) Seja r tal que $a < r < 1$. Podemos afirmar que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \quad \sqrt[n]{a_n} < r$$

o que implica, pela alínea a) do teorema, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
b) Por definição de limite superior, existe uma subsucessão de $\sqrt[n]{a_n}$ com limite $a > 1$, pelo que esta sucessão tem uma infinidade de valores maiores do que 1. Pela alínea b) do teorema, a série diverge. ∎

Corolário 2 (Critério da Raiz de Cauchy) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos. Se existir* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ $(a \in \mathbb{R}_0^+$ *ou* $a = +\infty)$, *então*

a) se $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

<u>Demonstração</u>:

Se existir $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, então $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ e aplica-se o Corolário 1. ■

NOTA: Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nada se pode concluir, pois existem séries divergentes e séries convergentes nesta situação. Por exemplo, a série harmónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

<u>EXEMPLO 11</u>: A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ é uma série de termos positivos. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = e > 1$$

a série é divergente.

<u>EXEMPLO 12</u>: Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Então $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Critério da Raiz a série é convergente.

NOTA: O Critério de Cauchy é mais geral do que o Critério de D'Alembert. Isto significa que se nada se puder concluir pelo Critério de Cauchy também nada se concluirá pelo Critério de D'Alembert. De facto, sabe-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ (em particular, se $a = 1$, o Critério de D'Alembert é inconclusivo, o mesmo acontecendo com o Critério de Cauchy). Note-se que o recíproco não é verdadeiro. Pode, portanto, acontecer que se possam tirar conclusões através do Critério de Cauchy sem que o possamos fazer com o Critério de D'Alembert.

EXEMPLO 13: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$. Usando o Critério de Cauchy,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-1}.2^{-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

concluímos que a série é convergente. Pelo Critério de D'Alembert nada se pode concluir. De facto,

$$\frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-n-1-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n} = 2^{-1-(-1)^{n+1}+(-1)^n} = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2^{-3}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Teorema 1.5.5 (**Critério de Kummer**) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos, com* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente. Se existir* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = k \quad (k \in \mathbb{R}$ *ou* $k = \infty)$, *então*

a) se $k > 0$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente;*

b) se $k < 0$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração: Se $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = k \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n > p \quad \left| \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} - k \right| < \delta$$

Mas

$$\left| \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} - k \right| < \delta \Leftrightarrow k - \delta < \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < k + \delta$$

a) Seja $k \in \mathbb{R}^+$ e $\delta = \frac{k}{2}$. Existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem

$$\begin{aligned} & k - \frac{k}{2} < \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{k}{2} < \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \frac{2}{k} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} < \frac{2}{k}\, a_{n+1} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} < \frac{2}{k} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Somando ordenadamente os dois membros da desigualdade desde n_0+1 até $n+1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n_0+1}^{n+1} a_i &< \sum_{i=n_0+1}^{n+1} \frac{2}{k}\left(\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} - \frac{a_i}{b_i}\right) \\
\sum_{i=n_0+1}^{n+1} a_i &< \frac{2}{k}\left(\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} - \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} + \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} - \frac{a_{n_0+2}}{b_{n_0+2}} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \\
\sum_{i=n_0+1}^{n+1} a_i &< \frac{2}{k}\left(\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) < \frac{2}{k}\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}
\end{aligned}$$

Então a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é limitada, pois

$$0 < S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = S_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n+1} \leq S_{n_0} + \frac{2}{k}\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$$

e pelo Teorema 1.5.1 a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Se $k = +\infty$, seja $\alpha > 0$, qualquer. Existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > \frac{\alpha}{2}$$

e podemos aplicar o raciocínio anterior.
b) Seja $k \in \mathbb{R}^-$ e $\delta = -k$. Existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}
\end{aligned}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, o Corolário 5 permite-nos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
Se $k = -\infty$, também existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0$$

e termina-se do mesmo modo. ∎

Corolário 1 (**Critério de Raabe**) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se existir* $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = a$, *então*

a) se $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente;*

b) se $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Demonstração: Basta fazer no teorema anterior $b_n = \frac{1}{n}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = a - 1.$$

O corolário está demonstrado. ■

NOTA: Muitas vezes os casos que pelo Critério de D'Alembert são inconclusivos podem ser resolvidos pelo Critério de Raabe.

EXEMPLO 14: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+2)} = 1$$

e, assim, pelo Critério de D'Alembert nada se pode concluir. Pelo Critério de Raabe

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+1)} - 1\right)\\ = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+2) - n(2n+1)}{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

portanto, a série é convergente.

Teorema 1.5.6 (**Critério do integral**) *Seja* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e decrescente em* $[1, +\infty[$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *seja* $a_n = f(n)$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e o integral impróprio* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *são da mesma natureza (isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes).*

Demonstração: $\forall x \geq 1 \quad \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x \leq n+1$. Como f é decrescente,

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$

Mas $f(n) = a_n$ e podemos escrever

$$a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n.$$

Integrando em ordem a x entre n e $n+1$ obtemos

$$\int_n^{n+1} a_{n+1}\ dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leq \int_n^{n+1} a_n\ dx \Leftrightarrow a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leq a_n.$$

Somando ordenadamente desde $n = 1$ até $n = N-1$ temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left(\int_n^{n+1} f(x)\ dx \right) \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} \leq \int_1^N f(x)\ dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n \end{aligned}$$

Se o integral é divergente, pelas condições de f, $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_1^N f(x)\ dx = +\infty$. Então, pela desigualdade da direita, o limite da sucessão das somas parciais da série é também $+\infty$, isto é, a série diverge. Se o integral converge então existe e é finito $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_1^N f(x)\ dx$. Em consequência, a sucessão $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ é limitada. Como a série é de termos positivos conclui-se que é convergente. ■

EXEMPLO 15: Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, habitualmente designada por série de Dirichlet.

Se $\alpha \leq 0$, a série é divergente porque o seu termo geral não tende para zero.

Se $\alpha > 0$, a função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty[$. Sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx$ converge se, e só se, $\alpha > 1$. Então, pelo Critério do Integral, a série converge se, e só se, $\alpha > 1$.

EXEMPLO 16: Seja $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ a série de termo geral $a_n = \frac{1}{n(\log(n))^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja

$$f(x) = \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}.$$

É uma função positiva e contínua em $[2,+\infty[$. Como, se $x>2$,

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \ &\Leftrightarrow -\frac{(\log(x))^{\alpha}+\alpha(\log(x))^{\alpha-1}}{x^2(\log(x))^{2\alpha}}=0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{(\log(x))^{\alpha-1}(\log(x)+\alpha)}{x^2(\log(x))^{2\alpha}}=0 \\ &\Leftrightarrow \log(x)+\alpha=0 \\ &\Leftrightarrow x=e^{-\alpha} \end{aligned}$$

se $x>e^{-\alpha}$ vem $f'(x)<0$ e, portanto, f é decrescente. Estudemos o integral

$$\int_p^{+\infty}\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,dx$$

sendo $p\in\mathbb{N}$ tal que $p\geq 2$ e $p\geq e^{-\alpha}$.

Se $\alpha=1$

$$\int_p^t \frac{1}{x\log(x)}\,dx=[\ \log(\log(x))\ ]_p^t=\log(\log(t))-\log(\log(p))$$

e se $\alpha\neq 1$

$$\int_p^t \frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,dx=\left[\ \frac{(\log(x))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\ \right]_p^t=\frac{(\log(t))^{-\alpha+1}-(\log(p))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

tendo-se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_p^t\frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\,dx=\begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha\leq 1 \\ \dfrac{(\log(p))^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha>1$. Pelo Critério do integral a série converge se, e só se, $\alpha>1$.

1.6 Multiplicação de séries

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes de somas A e B, respectivamente. Ao pensarmos no produto $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ será natural defini-lo por forma que a série obtida, sendo convergente, tenha soma $A \times B$. Podemos definir, por exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

obtendo-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot B = B \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = B \times A.$$

Pode, no entanto, perguntar-se se não seria possível fazer o produto das séries multiplicando cada termo a_n da primeira por cada termo b_k e formar uma única série cujos termos sejam os produtos $a_n b_k$ por qualquer ordem, de modo que a soma dessa série fosse $A \times B$. Como resposta temos o teorema

Teorema 1.6.1 *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries convergentes, de somas* A *e* B, *respectivamente. Seja* ϕ *uma aplicação bijectiva,* $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \phi(i,j) = n$. *A cada* ϕ *podemos fazer corresponder uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *com* $c_n = c_{\phi(i,j)} = a_i \times b_j$. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge, seja qual for a aplicação* ϕ *considerada se, e só se,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são absolutamente convergentes e, nesse caso, tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \times B$, *sendo a série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *também absolutamente convergente.*

NOTA: Dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge seja qual for a aplicação ϕ considerada, equivale a afirmar que a série produto converge seja qual for a ordem por que se tomem os seus termos.

Definição 1.6.1 *Chama-se* ***produto de Cauchy*** *de duas séries convergentes,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *à série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k+1}\right)$.

NOTA: Se $n \in \mathbb{N}_0$ então o produto de Cauchy escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right).$$

Corolário 1 *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, são séries absolutamente convergentes de somas A e B, respectivamente, então o seu produto de Cauchy é absolutamente convergente e tem soma $A \times B$.*

<u>EXEMPLO 1</u>: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

a série é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Então o produto de Cauchy de duas séries deste tipo é absolutamente convergente. Formemos o produto e verifiquemos que a série obtida é absolutamente convergente.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x^k y^{n-k}\right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}
\end{aligned}$$

NOTA: O produto de Cauchy de duas séries não absolutamente convergentes pode conduzir a uma série divergente.

<u>EXEMPLO 2</u>: A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ é uma série simplesmente convergente. Calculando o produto de Cauchy da série por ela própria, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k+1)}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n
\end{aligned}$$

que é uma série alternada e como

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1$$

a_n não tende para zero, sendo a série produto uma série divergente.

Teorema 1.6.2 (**Mertens**) *Se pelo menos uma das séries convergentes* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é absolutamente convergente, então o seu produto de Cauchy é convergente e tem por soma o produto das somas das séries dadas.*

Teorema 1.6.3 *Se as séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são convergentes, de somas A e B, respectivamente, então, se o seu produto de Cauchy é convergente, tem soma $A \times B$.*

EXEMPLO 3: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é uma série simplesmente convergente e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é uma série absolutamente convergente. Pelo Teorema de Mertens a série produto, que é uma série alternada, é convergente:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)^2}\right) \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k+1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Séries de Funções

2.1 Introdução. Sucessões de funções

Em muitas questões de Análise interessa considerar sucessões de funções da forma $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ e surge evidentemente a questão da passagem ao limite.

Definição 2.1.1 *Seja f_n uma sucessão de funções, $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que f_n* ***converge num ponto*** *$a \in D$ se a sucessão numérica $f_n(a)$ é convergente (com limite finito).*

Se a sucessão f_n converge em todos os pontos de D, pode definir-se uma função $f : D \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, a qual se diz ***limite de*** *f_n em D. Diz-se também que f_n* ***converge pontualmente*** *para f em D.*

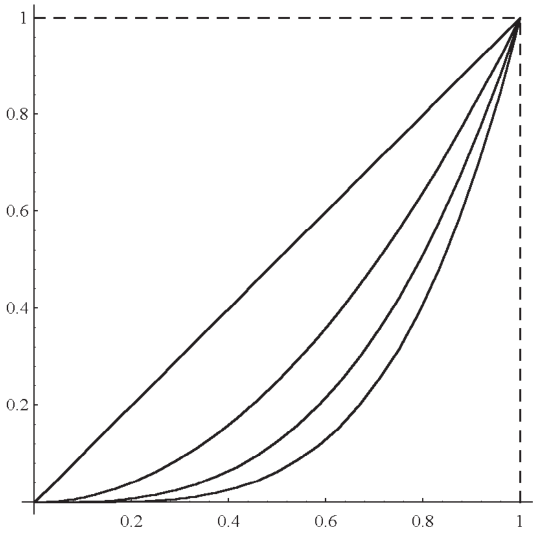
EXEMPLO 1: A sucessão de funções $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, definidas em $\mathbb{R}$, converge qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. A função limite é a função $f(x) = e^x$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2: Consideremos as funções $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, no intervalo $[0, 1]$. São funções contínuas e a função limite existe:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Note-se que esta função não é contínua.



Vimos em Análise Matemática I que se verifica uma certa compatibilidade entre as operações algébricas fundamentais e a continuidade, derivabilidade e integrabilidade de funções reais de variável real. Surge naturalmente a pergunta: verificar-se-á esse mesmo tipo de compatibilidade entre continuidade, derivabilidade e integrabilidade e a passagem ao limite? No caso da continuidade, por exemplo, a pergunta pode pôr-se da seguinte forma: se a sucessão de funções convergir para uma função determinada e se os termos da sucessão são funções contínuas, será também contínua a função limite? A resposta é: não necessariamente, isto é, existem sucessões de funções contínuas que convergem, no sentido da Definição 2.1.1, para uma função descontínua (Exemplo 2).

É possível, no entanto, definir outro tipo de convergência de forma a obter resposta afirmativa à pergunta anterior. Trata-se da convergência uniforme.

Definição 2.1.2 *Diz-se que a sucessão de funções f_n* ***converge uniformemente para f em D*** *se*

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \delta, \ \ \forall x \in D.$$

Esta condição é equivalente a

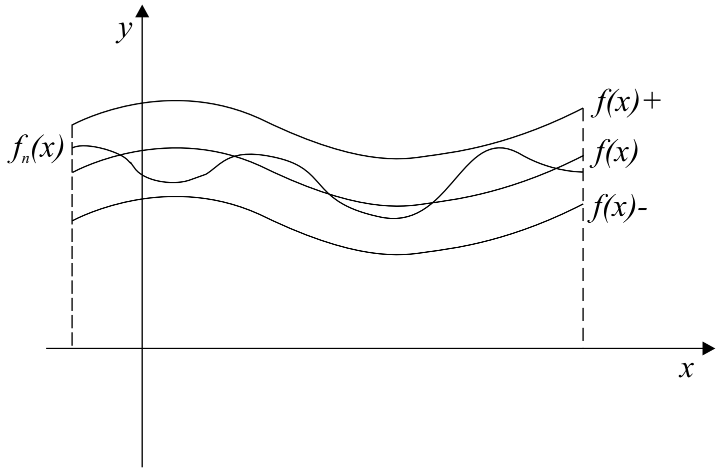
$$\forall \delta > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : \ \ \forall n > p, \ \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \delta$$

isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

É evidente que se uma sucessão de funções f_n converge uniformemente para f em D, então também f_n converge pontualmente para f em D. A recíproca não é verdadeira. Se tomarmos a sucessão f_n do EXEMPLO 2, que converge pontualmente para f em $[0,1]$, temos $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que f_n não converge uniformemente para f em $[0,1]$.

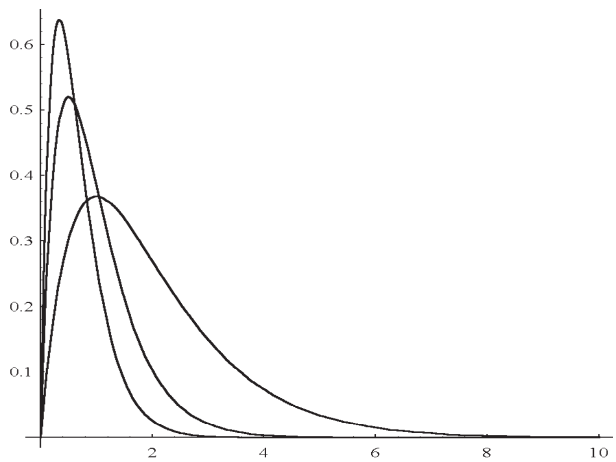
A definição de convergência uniforme significa que, seja qual for $\delta > 0$ fixado, existe uma ordem a partir da qual todas as funções estão na faixa entre $f(x) - \delta$ e $f(x) + \delta$. Geometricamente,



Evidentemente, existem sucessões de funções que convergem para funções contínuas, mas não uniformemente, como se pode ver no exemplo seguinte.

<u>EXEMPLO 3</u>: A sucessão de funções $f_n(x) = xn^\alpha e^{-nx}$ converge para a função $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$. No entanto, essa convergência não é uniforme, se $\alpha \geq 1$: note-se que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_0^+} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}_0^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$



2.2 Convergência pontual e convergência uniforme de séries de funções

Os conceitos de convergência pontual e convergência uniforme estendem-se às séries de funções.

Definição 2.2.1 *Seja f_n uma sucessão de funções, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chama-se* ***série de termo geral*** *f_n à sucessão de funções S_n definida por*

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),\ \forall x \in X;$$

também se representa a série por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definição 2.2.2 *Diz-se que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge no ponto*** *$a \in X$ se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ *for convergente.*

Se a série for convergente em todos os pontos de $D \subset X$, podemos definir uma função $f : D \to \mathbb{R}$ que a cada ponto $x \in D$ faz corresponder a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*; à função f chama-se* ***função soma da série****.*

<u>EXEMPLO 1</u>: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Se $x = 0$ a série dada é a série nula, logo convergente.

Se $x \neq 0$, podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

e esta série é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{1+x^2}$; como $|r| < 1$, a série é convergente. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

e a função soma é

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

<u>EXEMPLO 2</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Podemos usar os critérios das séries numéricas para estudar a convergência pontual das séries de funções. Neste caso, vamos aplicar o critério de D'Alembert para estudar a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| .$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \dfrac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Concluímos, assim, que a série dada é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$, definindo uma função f em $\mathbb{R}$. Veremos mais tarde que $f(x) = e^x$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>EXEMPLO 3</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x\,(1-x)^n,\ x \in [0,1]$.

Se $x = 0$ a série dada é a série nula, logo convergente.

Se $x \neq 0$, como a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$ é uma série geométrica de razão $r = 1 - x$ e $|r| < 1$ se, e só se, $0 < x < 2$, a série converge porque $x \in]0,1]$. Neste caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\,(1-x)^n = x \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = 1.$$

Podemos então dizer que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x\,(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Definição 2.2.3 *Diz-se que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***converge uniformemente*** *para a função* f *em* $D \subset \mathbb{R}$ $(D \neq \emptyset)$ *se*

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| < \delta,\ \forall x \in D.$$

Esta condição é equivalente a

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}: \; \forall n > p, \; \sup_{x \in D} |f(x) - S_n(x)| < \delta$$

isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |f(x) - S_n(x)| = 0.$$

NOTA: A convergência uniforme implica a convergência pontual, mas o recíproco não é verdadeiro.

EXEMPLO 4: Vimos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ é pontualmente convergente para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

No entanto, esta série não é uniformemente convergente em $[-1, 1]$, por exemplo. De facto,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - S_n(x)| = \lim_{n \to +\infty} \sup_{\substack{x \in [-1,1] \\ x \neq 0}} \left| 1 + x^2 - (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sup_{\substack{x \in [-1,1] \\ x \neq 0}} \left| \frac{1}{(1+x^2)^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \sup_{\substack{x \in [-1,1] \\ x \neq 0}} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1.$$

Teorema 2.2.1 *É condição necessária e suficiente para que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente em* $D \subset \mathbb{R}$ *que*

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}: \; m > n > p \Rightarrow \left| \sum_{r=n+1}^{m} f_r(x) \right| < \delta, \quad \forall x \in D.$$

Teorema 2.2.2 **(Weierstrass)** *Se existir uma série numérica convergente, de termos positivos,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, tal que*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \; \forall x \in D, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *é uniformemente convergente em* D.

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 1.2.3, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se,

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} :\ m > n > p\ \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \delta.$$

Seja $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leq a_{n+1} + \cdots + a_m \quad \forall x \in D \\ &= |a_{n+1} + \cdots + a_m|, \text{ pois } a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então

$$\exists p \in \mathbb{N} :\ m > n > p \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \delta$$

ou ainda,

$$\exists p \in \mathbb{N} :\ m > n > p \Rightarrow \left| \sum_{r=n+1}^{m} f_r(x) \right| < \delta.$$

Do teorema anterior sai o resultado pretendido. ■

EXEMPLO 5: Seja k uma constante tal que $|k| < 1$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \cdot k^{2n}(\operatorname{sen}(x))^{2n}$, é uniformemente convergente em qualquer conjunto $D \subset \mathbb{R}$. De facto,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \cdot k^{2n}(\operatorname{sen}(x))^{2n} \right| \leq \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \cdot k^{2n}, \quad \forall x \in D$$

e a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \cdot k^{2n}$ é convergente. Para o verificar basta aplicar o critério de D'Alembert:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n(2n+2)} \cdot |k|^{2n+2}}{\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \cdot |k|^{2n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot |k|^2 = |k|^2 < 1.$$

EXEMPLO 6: Como $\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ é uniformemente convergente em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

NOTA: O Critério de Weierstrass é uma condição suficiente, mas não necessária para a convergência uniforme de uma série de funções: há séries uniformemente convergentes cujo termo geral não admite uma majoração do tipo da do Critério de Weierstrass. Repare-se que essa majoração implica a convergência absoluta da série de funções.

EXEMPLO 7: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$. É uma série alternada e pelo Critério de Leibnitz podemos afirmar que é convergente qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mas não é absolutamente convergente porque

$$\left|(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}\right| = \frac{x^2+n}{n^2} \geq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente. Não é então possível usar o Critério de Weierstrass para tirar conclusões sobre a convergência uniforme desta série.

Teorema 2.2.3 *Se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são contínuas em D e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em D, então f é contínua em D.*

Demonstração: Seja x_0 um ponto arbitrário de D. Queremos provar que

$$\forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon > 0 \;\; |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Podemos escrever

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - f(x_0),$$

o que implica que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Seja $\delta > 0$. Como a série converge uniformemente para f sabemos que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \;\; |f(x) - S_n(x)| < \frac{\delta}{3} \;\; \forall x \in D.$$

Como $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são contínuas, S_n é uma função contínua, isto é,

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\delta}{3}\,.$$

Então

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Da arbitrariedade de x_0 sai o resultado. ■

NOTA: Se a soma de uma série de funções não é contínua isso significa que as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ não são contínuas ou a convergência da série não é uniforme. Portanto, se $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são funções contínuas e f não é contínua podemos afirmar que a convergência não é uniforme.

EXEMPLO 8: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, no intervalo $[-a, a]$, $a > 0$. Provámos que esta série converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Como f é descontínua em $x = 0$ e $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ é contínua $\forall n \in \mathbb{N}$, a convergência da série não é uniforme.

Teorema 2.2.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são contínuas em $[a, b]$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(*Diz-se que a série é integrável termo a termo*).

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.3 f é contínua em $[a, b]$, portanto, integrável em $[a, b]$. Por hipótese, as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são contínuas em $[a, b]$, o que implica que são integráveis nesse intervalo.

Pretendemos provar que a sucessão S_n^* das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ tem limite $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, isto é,

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} : \quad \forall n > p \; \left| S_n^*(x) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \delta.$$

Seja $\delta > 0$.

$$\begin{aligned}\left|S_n^*(x) - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx\right) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x)\right) dx\right| \\ &\leq \int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x)\right| dx \\ &= \int_a^b |S_n(x) - f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para f em $[a,b]$, portanto

$$\exists p \in \mathbb{N}: \quad \forall n > p \ \ |f(x) - S_n(x)| < \frac{\delta}{b-a}$$

o que implica que

$$\exists p \in \mathbb{N}: \quad \forall n > p \quad \int_a^b |S_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\delta}{b-a}\,dx = \delta. \ \blacksquare$$

<u>EXEMPLO 9</u>: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{2^n}$, em $[0,1]$.

$$\left|\frac{e^{-nx}}{2^n}\right| = \frac{1}{e^{nx}2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in [0,1].$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo, portanto, convergente. Pelo Teorema de Weierstrass a série dada é uniformemente convergente em $[0,1]$. Pelo Teorema 2.2.4

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{2^n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{2^n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}}{n2^n}\ .$$

<u>EXEMPLO 10</u>: A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, pois nesse intervalo

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{M^n}{n!}, \quad \text{sendo } M = \max(|a|, |b|),$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ é convergente. Como $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ é contínua $\forall n \in \mathbb{N}$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é integrável termo a termo e

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)!}\, .$$

NOTA: Uma série pode não ser uniformemente convergente num intervalo $[a, b]$ e ser integrável termo a termo nesse intervalo.

<u>EXEMPLO 11</u>: A série $x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ é convergente em $[0, 1]$ para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Como f_n é contínua em $[0, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e f é descontínua nesse intervalo, a série não é uniformemente convergente. No entanto, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx &= \int_0^1 x\, dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{n-1})\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Corolário 1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ são contínuas em $[a, b]$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt, \quad \forall x \in [a, b],$$

isto é, a série é primitivável termo a termo.

Corolário 2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente, no intervalo $[a, b]$ para a função f, se nesse intervalo existem e são contínuas as derivadas f_n' e se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$ então f é diferenciável em $[a, b]$ e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração: Seja $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, $x \in [a, b]$. Pelo Corolário 1

$$\int_a^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(t)]_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(a)),$$

ou seja,

$$\int_a^x g(t)\, dt = f(x) - f(a),$$

ou ainda,

$$f(x) = \int_a^x g(t)\, dt + f(a),$$

o que implica que $f'(x) = g(x)$, isto é, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. ∎

EXEMPLO 12: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. É uma série geométrica de razão x. A série converge se, e só se, $|x| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ .$$

Seja $0 < r < 1$. Então $|x^n| \leq r^n$, $\forall x \in [-r, r]$. Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é uma série numérica convergente, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é uniformemente convergente em $[-r, r]$.

$$
\begin{aligned}
& \int_{-r}^{r} \frac{1}{1-x}\, dx = \int_{-r}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-r}^{r} x^n\, dx \\
\Leftrightarrow \quad & [\, -\log|1-x|\,]_{-r}^{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-r}^{r} \\
\Leftrightarrow \quad & -\log|1-r| + \log|1+r| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^{n+1} - (-r)^{n+1}}{n+1} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \log\left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1}(1-(-1)^{n+1}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1}\ .
\end{aligned}
$$

Consideremos novamente a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Derivando-a termo a termo obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Como

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{|(n+2)x^{n+1}|}{|(n+1)x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)|x|}{n+1} = |x|
$$

podemos afirmar, pelo Critério de D'Alembert, que se $|x| < 1$ a série converge e se $|x| > 1$ a série diverge; se $|x| = 1$ temos as séries divergentes $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$.

Esta série, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[-r, r]$ se $0 < r < 1$ porque $|(n+1)x^n| \leq (n+1)r^n$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n$ é convergente. Podemos então escrever que

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x| < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x| < 1.
\end{aligned}
$$

2.3 Séries de potências

Definição 2.3.1 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Chama-se* ***série de potências*** *em $x - x_0$ a uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ com $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

NOTA: Fazendo $y = x - x_0$, as séries de potências podem sempre reduzir-se à forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teorema 2.3.1 *Seja $\dfrac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}} = r$. Se $r \in \mathbb{R}^+$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente em cada ponto $x \in \,]-r, r[$ e divergente em cada ponto $x \in \,]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$. Se $r = +\infty$ então a série de potências é absolutamente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se $r = 0$, a série converge se $x = 0$ e diverge se $x \neq 0$.*

<u>Demonstração</u>: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Tendo em conta que

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|},$$

temos, pelo Corolário 1 do Critério da Raiz, que, se $|x|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ (isto é, se $|x| < r$), a série converge, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.

Se $|x|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ (isto é, se $|x| > r$) então, pelo raciocínio usado no Corolário 1 do Critério da Raiz, existe uma subsucessão de $|a_n x^n|$ que toma valores maiores ou iguais a 1, o que implica que a sucessão $|a_n x^n|$ não tende para zero, pelo que sucessão $a_n x^n$ não tende para zero, donde se conclui que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. ■

Definição 2.3.2 *Nas condições do Teorema 2.3.1, a r chama-se* ***raio de convergência*** *da série e, ao intervalo $]-r, r[$,* ***intervalo de convergência****.*

Corolário 1 *Se $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r \in \mathbb{R}^+$ então o raio de convergência da série de potências é r.*

<u>EXEMPLO 1</u>: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n x^n$. Sendo $a_n = (3 + (-1)^n)^n$, não existe $\lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, mas $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{4}$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Calculemos o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \dfrac{1}{n}} = +\infty.$$

A série tem raio de convergência infinito, isto é, a série é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>EXEMPLO 3</u>: A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ tem raio de convergência $r = 0$:

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0,$$

isto é, a série só converge em $x = 0$.

<u>EXEMPLO 4</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Tendo em conta que

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

podemos afirmar que o intervalo de convergência da série é $]-1,1[$: a série converge absolutamente no intervalo $]-1,1[$ e diverge em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

<u>EXEMPLO 5</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n}$. Seja $y = x+1$. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2^n}$$

tem raio de convergência

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\dfrac{(-1)^n}{2^n}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}} \right| = 2.$$

Então a série converge absolutamente se $y \in]-2,2[$, isto é, se $x \in]-3,1[$, e diverge se $x \in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$.

NOTA: O teorema anterior não diz nada sobre a natureza da série de potências nos extremos do intervalo de convergência, $]-r,r[$, $r\in\mathbb{R}^+$. Pode acontecer que a série seja convergente nos dois extremos, convergente num e divergente no outro, ou divergente nos dois. Teremos sempre de estudar os casos $x=r$ e $x=-r$.

No caso do Exemplo 4, o intervalo de convergência é $]-1,1[$:

– Se $x=-1$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente.

– Se $x=1$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que é divergente.

Concluímos que a série converge no intervalo $[-1,1[$ e diverge em $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$.

Teorema 2.3.2 *Se o raio de convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$ *é* $r>0$ *e se* $0<\rho<r$ *então a série é uniformemente convergente em* $[-\rho,\rho]$.

Demonstração: Por hipótese, $|a_n\,x^n|\le|a_n|\,\rho^n$, $\forall x\in[-\rho,\rho]$. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,\rho^n$ é uma série numérica convergente, pois

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|\,\rho^n}=\overline{\lim}\,\rho\sqrt[n]{|a_n|}=\rho\,\frac{1}{r}<\rho\,\frac{1}{\rho}=1.$$

Então, pelo Critério de Weierstrass, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$ é uniformemente convergente em $[-\rho,\rho]$. ■

Corolário 1 *Toda a série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado* $[a,b]$ *contido no seu intervalo de convergência e tem-se:*

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ .$$

Demonstração: Se $[a,b]\subset\,]-r,r[$ então existe $\rho>0$ tal que $[a,b]\subset[-\rho,\rho]\subset\,]-r,r[$. Pelo teorema, a série é uniformemente convergente em $[-\rho,\rho]$ e sê-lo-á também em $[a,b]$. Então podemos integrar a série termo a termo em $[a,b]$:

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n\,x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ .\blacksquare$$

Teorema 2.3.3 *Toda a série de potências de raio de convergência* $r>0$ *é derivável termo a termo no intervalo de convergência, isto é,*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^{n-1},\ \ \forall x\in\,]-r,r[.$$

Demonstração: Vimos no Corolário 2 do Teorema 2.2.4 condições suficientes para que uma série de funções $\sum u_n(x)$ seja derivável termo a termo:

– $\sum u_n(x)$ pontualmente convergente em $[a, b]$;

– u_n' contínua em $[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

– $\sum (u_n(x))'$ uniformemente convergente em $[a, b]$.

Consideremos a série $\sum a_n\, x^n$:

– é pontualmente convergente em $]-r, r[$;

– $(a_n\, x^n)' = n a_n\, x^{n-1}$ são contínuas em $]-r, r[$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

– $\sum n a_n\, x^{n-1}$ é uma série de potências cujo raio de convergência é r:

$$\frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} = r,$$

portanto, é uniformemente convergente em $[a, b] \subset\ ]-r, r[$.

Assim,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}, \quad \forall x \in\ ]-r, r[. \ \blacksquare$$

NOTA: Se a série de potências $\sum a_n\, x^n$ tem raio de convergência r, então a série das derivadas tem o mesmo raio de convergência r, assim como a série das primitivas.

EXEMPLO 6: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Seja $y = x^2$ e estudemos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{(2n+1)!}$.

$$\lim \left| \frac{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}} \right| = \lim \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim\ (2n+3)(2n+2) = +\infty$$

portanto, a série é absolutamente convergente $\forall y \in \mathbb{R}_0^+$, sendo a série em estudo absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>EXEMPLO 7</u>: Calculemos $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ sendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Seja $y = x^2$. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^n}{(2n)!}$ tem raio de convergência infinito:

$$r = \lim \left| \frac{\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}} \right| = \lim \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim\,(2n+2)(2n+1) = +\infty,$$

o que implica que a série dada converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Será então uniformemente convergente em $[0,1]$ e integrável termo a termo nesse intervalo:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

<u>EXEMPLO 8</u>: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n\,5^n}$. Seja $y = x - 5$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n\,5^n}$ tem raio de convergência

$$r = \lim \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,5^n}}{\dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\,5^{n+1}}} \right| = \lim \frac{(n+1)\,5^{n+1}}{n\,5^n} = 5,$$

o que implica a convergência absoluta da série dada no intervalo $]0,10[$.

– Se $x = 0$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ que é divergente.

– Se $x = 10$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que é convergente.

Concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n\,5^n}$ converge no intervalo $]0,10]$ e diverge em $]-\infty,0]\cup]10,+\infty[$.

A série das derivadas é a série

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n\,5^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,n\,\frac{(x-5)^{n-1}}{n\,5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^{n-1}}{5^n}$$

O intervalo de convergência desta série é $]0,10[$.

– Se $x=0$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}$ que é divergente.

– Se $x=10$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5}$ que é divergente.

2.4 Série de Taylor e série de MacLaurin

Sejam I um intervalo e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I. Seja $x_0 \in I$. Sabemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = f^{(n)}(x_0 + \theta\,(x - x_0))\,\dfrac{(x - x_0)^n}{n!}$, sendo $0 < \theta < 1$. É a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange, em torno do ponto x_0.

Suponhamos que $f \in C^\infty(I)$. Chama-se **série de Taylor de f em x_0** à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0 \in I$, a série de Taylor designa-se por **série de MacLaurin** e escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

<u>EXEMPLO 1</u>: Determinemos a série de MacLaurin de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{n\pi}{2})$. Então $f^{(n)}(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ e, portanto, a série de MacLaurin de f é

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Vimos, num exemplo anterior, que esta série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Consideremos a função $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Esta função é de classe C^∞ no seu domínio e $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$. Portanto, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$ e a sua série de MacLaurin é

$$1 + \alpha\,x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}\,x^n + \cdots,$$

isto é,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}\,x^n.$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}_0$ a série reduz-se ao desenvolvimento do binómio de Newton. Suponhamos que $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ e estudemos a convergência da série. O raio de convergência é

$$\lim \left| \frac{\dfrac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}}{\dfrac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(\alpha - n)}{(n+1)!}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{1}{|\alpha - n|} = \lim \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Então a série converge absolutamente em $]-1,1[$ e diverge em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Esta série designa-se, habitualmente, por **série binomial**.

A questão fundamental no desenvolvimento em série de Taylor de uma função indefinidamente diferenciável é a seguinte:

Existe uma vizinhança V de x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

$\forall x \in V$, isto é, a série de Taylor de f em x_0 é convergente para todo o $x \in V$ e a sua soma é igual a $f(x)$?

Na realidade, a mera existência das derivadas $f^{(n)}(x_0)$ para todos os valores naturais de n, embora permita escrever a série de Taylor de f no ponto x_0, não garante que, em alguma vizinhança de x_0, seja verificada a igualdade:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2.1}$$

como se pode ver no exemplo seguinte:

<u>EXEMPLO 3</u>: Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Como $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a série de MacLaurin de f é a série

$$0 + 0x + 0x^2 + \cdots,$$

que converge para a função nula em $\mathbb{R}$. Portanto, f não é a soma da série em nenhum ponto, excepto em 0, dado que $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Que condições suplementares devem ser impostas a uma função f, suposta indefinidamente diferenciável numa vizinhança de x_0, para que fique garantida a igualdade (2.1)? A consideração da fórmula de Taylor de f permite responder de forma simples a esta questão. De facto, sendo $S_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da série de Taylor de f em $x_0 \in I$, tem-se

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x),$$

verificando-se o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1 *É condição necessária e suficiente para que a função indefinidamente diferenciável, $f : I \to \mathbb{R}$, seja soma da sua série de Taylor numa vizinhança, V, de $x_0 \in I$, que*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Na prática utilizam-se condições suficientes:

Teorema 2.4.2 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função indefinidamente diferenciável e suponhamos que existem constantes $M, k \geq 0$ tais que, numa vizinhança, V, de x_0, se verifica*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq Mk^n, \quad \forall x \in V,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então f é soma da sua série de Taylor em V.

<u>Demonstração</u>: Sabemos que a expressão do resto de Lagrange, $R_n(x)$, é

$$R_n(x) = f^{(n)}(x_0 + \theta\,(x - x_0))\,\frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Então

$$|R_n(x)| \leq M\,\frac{(k|x - x_0|)^n}{n!}, \quad x \in V;$$

como a série de termo geral $\dfrac{(k|x - x_0|)^n}{n!}$ é convergente, esta sucessão tem limite 0, sendo o resultado pretendido uma consequência imediata do Teorema 2.4.1. ∎

Corolário 1 *Se existe $M \geq 0$ tal que em V se tenha*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad \forall x \in V,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

então f é soma da sua série de Taylor em V.

<u>EXEMPLO 4</u>: Consideremos a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Concluímos no Exemplo 1 que a sua série de MacLaurin converge absolutamente em $\mathbb{R}$. Sabemos que

$$R_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\,x^n, \quad 0 < \theta < 1,$$

donde

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|}{n!}\,|x|^n \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Mas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por se tratar do termo geral de uma série convergente, o que implica que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 5: Se $f(x) = e^x$ obtemos $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então o seu desenvolvimento em série de MacLaurin é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Sabemos que esta série é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$ definindo uma função g em $\mathbb{R}$. Provemos que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Para isso, vamos demonstrar que o resto de Lagrange da fórmula de MacLaurin da função f tende para 0 em $\mathbb{R}$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n = \frac{e^{\theta\, x}}{n!}\, x^n, \quad 0 < \theta < 1,$$

o que implica que, tendo em conta que $e^{\theta\, x} \leq e^x$ pois e^x é uma função crescente,

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{n!}\, |x|^n.$$

Mas a série de termo geral $\dfrac{e^{|x|}}{n!}\, |x|^n$ é uma série convergente, $\forall x \in \mathbb{R}$, portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{|x|}}{n!}\, |x|^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que nos permite concluir que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nos dois primeiros exemplos, os desenvolvimentos em série de MacLaurin foram obtidos recorrendo directamente à fórmula

$$f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots$$

na qual se substituíram os valores das sucessivas derivadas da função considerada. Dado que este processo é bastante trabalhoso, raramente se recorre a ele na prática, preferindo-se o recurso a certos desenvolvimentos já conhecidos e tendo em conta o seguinte resultado:

Teorema 2.4.3 *Toda a série de potências de $x - x_0$ é a série de Taylor (em torno de x_0) da função por ela definida. Em particular, o desenvolvimento em série de potências de $x - x_0$ é único.*

Demonstração: Por hipótese,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n$$

numa vizinhança V de x_0, o que implica que $f(x_0) = a_0$. Derivando,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \, (x - x_0)^{n-1}$$

e, portanto, $f'(x_0) = a_1$. A derivada de ordem n é

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1) \dots 2 a_{n+1}(x - x_0) + (n+2)(n+1) \dots 3 a_{n+2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

donde se deduz que $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Concluímos, assim, que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

<u>EXEMPLO 6</u>: Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$. Tendo em conta que

$$\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{3}{2}\, x)}$$

e que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in \,]-1, 1[$$

podemos concluir que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{3}{2}\, x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\, x \right)^n$$

igualdade válida desde que $\left| -\dfrac{3}{2}\, x \right| < 1$, isto é, $|x| < \dfrac{2}{3}$.

Então a série de MacLaurin de f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+1}}\, x^n, \quad |x| < \frac{2}{3}\ .$$

<u>EXEMPLO 7</u>: Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$. Tendo em conta que $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ vem

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{x}{2} \right)} \right).$$

Sabendo que

$$\frac{1}{1 - \dfrac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n, \quad |x| < 3$$

e

$$\frac{1}{1 - (-\dfrac{x}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad |x| < 2$$

podemos escrever a série de MacLaurin de f, tendo-se:

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n,\ |x| < 2.$$

<u>EXEMPLO 8</u>: No Exemplo 2 desenvolvemos a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, em série de MacLaurin, obtendo

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n,$$

convergente no intervalo $]-1,1[$. Seja

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n, \quad |x| < 1.$$

Provemos que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in]-1,[1$, isto é, f é a soma da sua série de MacLaurin naquele intervalo.

Sendo uma série de potências, é derivável termo a termo no intervalo de convergência. Obtemos

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n-1},$$

e multiplicando por x

$$x\,g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n}.$$

Então

$$\begin{aligned}
g'(x) + x\,g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\,x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n} \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right)x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha-n}{n}+1\right)x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\;\frac{\alpha}{n}\,x^n \\
&= \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n\right) \\
&= \alpha\,g(x)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1+x)\, g'(x) = \alpha\, g(x). \tag{2.2}$$

Consideremos a função $\dfrac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ e calculemos a sua derivada:

$$\left(\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}g(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}((1+x)\, g'(x) - \alpha\, g(x))}{(1+x)^{2\alpha}}.$$

O numerador desta fracção é zero por (2.2), isto é,

$$\left(\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = 0$$

o que implica que

$$\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$$

é uma função constante em $]-1,1[$, ou ainda, $g(x) = c\,(1+x)^\alpha$, se for c essa constante. Mas como $g(0) = 1$, obtém-se para c o valor 1 e vem $g(x) = (1+x)^\alpha$, $\forall x \in\,]-1,1[$.

Capítulo 3

Noções Topológicas em $\mathbb{R}^N$

3.1 Normas e métricas

Definição 3.1.1 *Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial real. Uma aplicação*
$\|\cdot\| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *diz-se uma* ***norma*** *se verifica as seguintes propriedades:*
1) $\|x\| \geq 0, \;\; \forall x \in \mathbb{E}$,
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \;\; \forall x \in \mathbb{E}, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \;\; \forall x, y \in \mathbb{E}$, *(**desigualdade triangular**).*

Um espaço vectorial real onde está definida uma norma, diz-se um ***espaço normado****.*

EXEMPLO 1: Seja $N \geq 1$. Se definirmos em $\mathbb{R}^N$ a soma de dois elementos por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N) + (y_1, y_2, \ldots, y_N) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N)$$

e o produto por um escalar por

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_N),$$

obtemos um espaço vectorial real.

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) & \longrightarrow & ||x|| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| \end{array}$$

é uma norma:

1) $||x|| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| \geq 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^N$;

2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_N| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $||\lambda x|| = ||\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N)|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_N)|| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_N| = |\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| + \cdots + |\lambda||x_N| = |\lambda|(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N|) = |\lambda| \, ||x||, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall x \in \mathbb{R}^N$;

4) $||x+y|| = ||(x_1, x_2, \ldots, x_N) + (y_1, y_2, \ldots, y_N)|| = ||(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_N+y_N)|| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \ldots, +|x_N+y_N| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \ldots, +|x_N| + |y_N| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_N| = ||x|| + ||y||, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

EXEMPLO 2: Em $\mathbb{R}^N$, com a soma e o produto por um escalar definidos da maneira habitual (ver Exemplo 1) a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) & \longrightarrow & ||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} \end{array}$$

é uma norma:
1) $||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$;
2) $0 = ||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $||\lambda x|| = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, \ldots, |\lambda x_N|\} = \max\{|\lambda|\,|x_1|, |\lambda|\,|x_2|, \ldots, |\lambda|\,|x_N|\} =$
$= |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} = \lambda\, ||x||, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
4) $||x+y|| = \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|, \ldots, |x_N+y_N|\} \leq \max\{|x_1|+|y_1|, |x_2|+|y_2|, \ldots, |x_N|+ |y_N|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} + \max\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_N|\} = ||x|| + ||y||, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

EXEMPLO 3: Em $\mathbb{R}^N$, com a soma e o produto por um escalar definidos da maneira habitual (ver Exemplo 1), se $p > 1$, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) & \longrightarrow & ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

é uma norma:

1) $||x||_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

2) $||x||_p = 0 \Leftrightarrow ||x||_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^N |x_i|^p = 0 \Leftrightarrow |x_1|^p = \cdots = |x_N|^p = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $||\lambda x||_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^N |\lambda\, x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^N |\lambda|^p\, |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \displaystyle\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\displaystyle\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$= |\lambda|\, ||x||_p, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4) Dado que a demonstração da desigualdade triangular é muito extensa, vamos usar dois resultados intermédios (Lemas 1 e 2), para uma melhor compreensão.

Lema 1 *Se $p > 1$, $q > 1$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então*

$$a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é evidente. Suponhamos que a e b são ambos positivos. Sejam $k \in]0,1[$ e $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ a função $f(t) = k(t-1) - t^k + 1$. Como $f(1) = 0$ e $f'(t) \geq 0, \forall t \in [1,+\infty[$, então $f(t) \geq 0, \forall t \in [1,+\infty[$, pelo que $t^k \leq kt + 1 - k$.

Se $a \geq b$, tomando $t = a/b$ (≥ 1) e $k = 1/p$, obtemos

$$\frac{a^{1/p}}{b^{1/p}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\,\frac{a}{b} + \frac{1}{q},$$

donde

$$a^{1/p}\, b\, b^{-1/p} = a^{1/p}\, b^{1-1/p} = a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Se $a < b$, tomando $t = b/a$ (> 1) e $k = 1/q$, obtemos

$$\frac{b^{1/q}}{a^{1/q}} \leq \frac{1}{q}\,\frac{b}{a} + 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q}\,\frac{b}{a} + \frac{1}{p},$$

pelo que

$$a^{-1/q}\, a\, b^{1/q} = a^{1-1/q}\, b^{1/q} = a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{b}{q} + \frac{a}{p}. \quad \blacksquare$$

Lema 2 (**Desigualdade de Hölder**) *Se $p > 1$, $q > 1$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ \sum_{i=1}^{N} |x_i\, y_i| \leq ||x||_p\, ||y||_q = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração: Se $x = 0$ ou $y = 0$, a desigualdade é evidente ($\sum_{i=1}^{N} |x_i\, y_i| = 0$). Supondo que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ sejam, para cada i, $a_i = \dfrac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p} = \dfrac{|x_i|^p}{||x||_p^p}$ e $b_i = \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q} = \dfrac{|y_i|^q}{||y||_q^q}$. Note-se que $\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} b_i = 1$ e, pelo Lema 1,

$$\frac{|x_i\, y_i|}{||x||_p\, ||y||_q} = a_i^{1/p} b_i^{1/q} \leq \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{q}.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i\, y_i|}{||x||_p\, ||y||_q} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i\, y_i|}{||x||_p\, ||y||_q} \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{q}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{N} b_i}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \ \blacksquare$$

Estamos agora em condições de demonstrar a desigualdade triangular (também conhecida, neste caso, por **desigualdade de Minkowski**):

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{N} (|x_i|+|y_i|)\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{N} |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= (||x||_p + ||y||_p) \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = (||x||_p + ||y||_p)\,||x+y||_p^{p/q},$$

pelo que,

$$\frac{||x+y||_p^p}{||x+y||_p^{p/q}} = ||x+y||_p^{p-p/q} = ||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

EXEMPLO 4: Em $C([0,1])$, conjunto das funções contínuas em $[0,1]$, com a soma e o produto por um escalar definidos da maneira habitual, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & ||f|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \end{array}$$

é uma norma:
1) $||f|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq 0,\ \forall f \in C([0,1])$;
2) $||f|| = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0,\ \ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0$;
3) $||\lambda f|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} (|\lambda|\,|f(x)|) = |\lambda| \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda|\,||f||,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in C([0,1])$;
4) $||f+g|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| = ||f|| + ||g||,\ \forall f,g \in C([0,1])$.

EXEMPLO 5: Em $C([0,1])$, conjunto das funções contínuas em $[0,1]$, com a soma e o produto por um escalar definidos da maneira habitual, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & ||f|| = \int_0^1 |f(x)|\,dx \end{array}$$

é uma norma:
1) $||f|| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 0,\ \forall f \in C([0,1])$;
2) $||f|| = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0,\ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0$;
3) $||\lambda\, f|| = \displaystyle\int_0^1 |\lambda\, f(x)|\,dx = \int_0^1 |\lambda|\,|f(x)|\,dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\,dx = |\lambda|\,||f||,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in C([0,1])$;
4) $||f+g|| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)\,dx = \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx$ $= ||f|| + ||g||,\ \forall f, g \in C([0,1])$.

EXEMPLO 6: Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial real. Chama-se **produto interno** em $\mathbb{E}$ a uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ (x,y) & \longrightarrow & x\cdot y \end{array}$$

tal que
$i)$ $x\cdot x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{E}$;
$ii)$ $x\cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
$iii)$ $x\cdot y = y\cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{E}$;
$iv)$ $(\lambda x)\cdot y = \lambda(x\cdot y),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{E}$;
$v)$ $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z,\ \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.

Se em $\mathbb{E}$ estiver definido um produto interno então

$$|x\cdot y| \leq \sqrt{x\cdot x}\,\sqrt{y\cdot y},\ \forall x, y \in \mathbb{E} \qquad \text{(desigualdade de Cauchy-Schwarz).}$$

Passamos a demonstrar esta desigualdade. Sejam $x, y \in \mathbb{E}$, quaisquer. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = (x+ty)\cdot(x+ty)$; por $iii)$, $iv)$ e $v)$, $f(t) = x\cdot x + 2t(x\cdot y) + t^2(y\cdot y)$; por $i)$, $f(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ pelo que (note-se que $At^2 + Bt + C \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ é equivalente a dizer que $At^2 + Bt + C = 0$ ou não tem raízes reais ou tem apenas uma, isto é, $B^2 - 4AC \leq 0$): $4(x\cdot y)^2 - 4\,(x\cdot x)\,(y\cdot y) \leq 0$ isto é, $(x\cdot y)^2 \leq (x\cdot x)\,(y\cdot y)$, donde se deduz a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Se em $\mathbb{E}$ estiver definido um produto interno então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ x & \longrightarrow & ||x|| = \sqrt{x\cdot x} \end{array}$$

é uma norma (que se diz a norma induzida pelo produto interno):
A aplicação está bem definida porque, por $i)$, $x\cdot x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{E}$;
1) $||x|| = \sqrt{x\cdot x} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{E}$;

2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x \cdot x} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (por ii));
3) $||\lambda\, x|| = \sqrt{(\lambda\, x) \cdot (\lambda\, x)} = \sqrt{\lambda^2\, (x \cdot x)} = |\lambda|\, \sqrt{x \cdot x} = |\lambda|\, ||x||, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{E}$;
4) $||x + y||^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2\, x \cdot y + y \cdot y \leq x \cdot x + 2\, \sqrt{x \cdot x}\, \sqrt{y \cdot y} + y \cdot y = \left(\sqrt{x \cdot x} + \sqrt{y \cdot y}\right)^2 = (||x|| + ||y||)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{E}$, pelo que $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \ \ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

Vejamos alguns exemplos:

Consideremos o espaço $C([0,1])$, definido atrás. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} C([0,1]) \times C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longrightarrow & f \cdot g = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \end{array}$$

é um produto interno. Pelo que acabámos de expor, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & ||f|| = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\, dx} \end{array}$$

é uma norma.

Em $\mathbb{R}^N$, define-se um produto interno do seguinte modo:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i;$$

daqui resulta que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & ||x|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2} \end{array}$$

é uma norma (denominada **norma euclidiana**).

Definição 3.1.2 *Seja $\mathbb{E}$ um conjunto não vazio. Chama-se* ***distância*** *(ou* ***métrica****) a uma aplicação $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ tal que:*
1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{E}$, (simetria)
*3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$, (****desigualdade triangular****).*

A um conjunto $\mathbb{E}$ onde está definida uma distância chama-se um ***espaço métrico****.*

NOTA: A distância é uma aplicação não negativa:
$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2\, d(x, y)$, pelo que $d(x, y) \geq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

Teorema 3.1.1 *Seja* $\mathbb{E}$ *um espaço vectorial normado, com a norma* $\|\cdot\|$. *Então a aplicação* $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *definida por* $d(x, y) = \|x - y\|$ *é uma distância (que se diz a métrica induzida pela norma).*

Demonstração: 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $d(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1|\, ||y - x|| = ||y - x||,\ \forall x, y \in \mathbb{E}$;
3) $d(x, y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \le ||x-z||+||z-y|| = d(x, z)+d(z, y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.
■

Tendo em conta as normas estudadas atrás, em $C([0, 1])$ podemos definir as distâncias:

$$d(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|;$$

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx;$$

$$d(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx};$$

em $\mathbb{R}^N$, podemos definir as distâncias:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|;$$

$$d(x, y) = \max_{1\le i\le N} |x_i - y_i|;$$

se $p > 1$,

$$d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p}.$$

Há métricas que não são induzidas por normas. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & d(x, y) = |e^x - e^y| \end{array}$$

é uma distância:
1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |e^x - e^y| = 0 \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$;
2) $d(x, y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = d(y, x)$;
3) $d(x, y) = |e^x-e^y| = |e^x-e^z+e^z-e^y| \le |e^x-e^z|+|e^z-e^y| = d(x, z)+d(z, y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

No entanto, não existe nenhuma norma tal que $||x - y|| = d(x, y)$: se existisse tal norma, então $||x|| = d(x, 0)$, pelo que $||\lambda x|| = d(\lambda x, 0) = |e^{\lambda x} - 1|$; por outro lado, $|\lambda|\, ||x|| = |\lambda|\, d(x, 0) = |\lambda|\, |e^x - 1|$ e, em geral, $||\lambda x|| \ne |\lambda|\, ||x||$.

3.2 Noções topológicas em $\mathbb{R}^N$

Em $\mathbb{R}^N$ considera-se a norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2}$

Definição 3.2.1 *Dados $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$, chama-se* ***bola aberta de centro*** a ***e raio*** δ *ao conjunto $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x-a\| < \delta\}$. Ao conjunto $\overline{B}_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x-a\| \leq \delta\}$ chama-se* ***bola fechada de centro*** a ***e raio*** δ***.***

<u>EXEMPLO 1</u>: Em $\mathbb{R}$,

$$B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta\} =]a-\delta, a+\delta[.$$

A bola aberta de centro a e raio δ é o intervalo $]a-\delta, a+\delta[$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Em $\mathbb{R}^2$,

$$B_\delta(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)-(a,b)|| < \delta\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x-a, y-b)|| < \delta\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 < \delta^2\}$$

A bola aberta de centro (a,b) e raio δ é o interior do círculo de centro (a,b) e raio δ.

<u>EXEMPLO 3</u>: Em $\mathbb{R}^3$,

$$B_\delta(a,b,c) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x,y,z)-(a,b,c)|| < \delta\} =$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 < \delta^2\}$$

A bola aberta de centro (a,b,c) e raio δ é o interior da esfera de centro (a,b,c) e raio δ.

Definição 3.2.2 *Chama-se* ***vizinhança*** *de $a \in \mathbb{R}^N$ a uma bola aberta de centro a e raio $\delta > 0$.*

A partir da noção de vizinhança, introduzem-se as noções topológicas.

Definição 3.2.3 *Sejam $C \subset \mathbb{R}^N$ e $a \in \mathbb{R}^N$.*
a) Diz-se que a é ***interior*** *a C se existir uma vizinhança de a contida em C. Ao conjunto dos pontos interiores a C chama-se* ***interior de*** *C e representa-se por $int(C)$.*
b) Diz-se que a é ***exterior*** *a C se é interior ao complementar de C, isto é, se existir uma vizinhança de a que não intersecta C. Ao conjunto dos pontos exteriores a C chama-se* ***exterior de*** *C e representa-se por $ext(C)$.*
c) Diz-se que a é ***fronteiro*** *a C se qualquer vizinhança de a intersecta C e o seu complementar. Ao conjunto dos pontos fronteiros a C chama-se* ***fronteira de*** *C e representa-se por $fr(C)$.*
d) Chama-se ***fecho*** *ou* ***aderência*** *de C ao conjunto $\overline{C} = C \cup fr(C)$.*

NOTA: A partir das definições conclui-se imediatamente que $\overline{C} = C \cup \mathrm{fr}(C) = \mathrm{int}(C) \cup \mathrm{fr}(C)$.

Das definições também se conclui facilmente:

Teorema 3.2.1 *Seja $C \subset \mathbb{R}^N$. Então:*
$int(C) \cup ext(C) \cup fr(C) = \mathbb{R}^N$;
$int(C) \cap ext(C) = int(C) \cap fr(C) = ext(C) \cap fr(C) = \emptyset$.

<u>EXEMPLO 1</u>: Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq 1\}$. Então:
$\mathrm{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < 1\}$,
$\mathrm{fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0 \vee y = 1\}$,
$\mathrm{ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < 0 \vee y > 1\}$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x+1\}$. Então:
$\mathrm{int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \wedge y > 0 \ \wedge y < -x+1\}$,
$\mathrm{fr}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x = 0 \ \wedge 0 \ \leq y \leq 1) \vee (y = 0 \ \wedge 0 \ \leq x \leq 1) \vee (y = -x+1 \ \wedge 0 \ \leq x \leq 1)\}$,
$\mathrm{ext}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0 \vee y < 0 \ \vee \ y > -x+1\}$.

<u>EXEMPLO 3</u>: Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1\}$. Então:
$\mathrm{int}(C) = C$,
$\mathrm{fr}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\}$,
$\mathrm{ext}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} > 1\}$

Definição 3.2.4 *Um conjunto C diz-se* ***aberto*** *se $int(C) = C$. Um conjunto C diz-se* ***fechado*** *se $\overline{C} = C$*

NOTA 1: C é fechado se, e só se, $\mathrm{fr}(C) \subset C$:
De facto, se $C = \overline{C} = C \cup \mathrm{fr}(C)$ então $\mathrm{fr}(C) \subset C$; se $\mathrm{fr}(C) \subset C$, então $\overline{C} = C \cup \mathrm{fr}(C) = C$.

NOTA 2: C é aberto se, e só se, $\mathrm{fr}(C) \cap C = \emptyset$:
Se $C = \mathrm{int}(C)$, então $\mathrm{fr}(C) \cap C = \mathrm{fr}(C) \cap \mathrm{int}(C) = \emptyset$ (pelo Teorema 3.2.1); se $\mathrm{fr}(C) \cap C = \emptyset$, como $x \in C \Rightarrow x \in \mathrm{int}(C) \vee x \in \mathrm{fr}(C)$, então $x \in C \Rightarrow x \in \mathrm{int}(C)$, isto é, C é aberto.

NOTA 3: C é aberto se, e só se, $\mathbb{R}^N \setminus C$ é fechado:
Se C é aberto, então $\mathrm{fr}(C) \cap C = \emptyset$, pelo que $\mathrm{fr}(C) = \mathrm{fr}(\mathbb{R}^N \setminus C) \subset (\mathbb{R}^N \setminus C)$ e concluimos que $\mathbb{R}^N \setminus C$ é fechado; reciprocamente, se $\mathbb{R}^N \setminus C$ é fechado, $\mathrm{fr}(\mathbb{R}^N \setminus C) = \mathrm{fr}(C) \subset (\mathbb{R}^N \setminus C)$, donde $\mathrm{fr}(C) \cap C = \emptyset$, o que implica que C é aberto.

NOTA 4: C é fechado se, e só se, $\mathbb{R}^N \setminus C$ é aberto:
Pela Nota 3, $\mathbb{R}^N \setminus C$ é aberto se, e só se, $\mathbb{R}^N \setminus (\mathbb{R}^N \setminus C) = C$ é fechado.

EXEMPLOS: O conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1\}$ é aberto; o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 1\}$ é fechado; o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1\}$ não é aberto nem fechado.

Teorema 3.2.2 *A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração: Sejam A_1, A_2, $\dots$, A_m conjuntos abertos, $A = \cap_{i=1}^m A_i$. Se $A = \emptyset$, A é aberto. Se $A \neq \emptyset$, seja $x \in A$, isto é, $x \in A_i$, $i = 1, \dots, m$; como os A_i são todos abertos, para cada i, existe δ_i tal que $B_{\delta_i}(x) \subset A_i$; se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$, então $B_\delta(x) \subset A_i$, $i = 1, \dots, m$, pelo que $B_\delta(x) \subset \cap_{i=1}^m A_i = A$. Concluimos assim que, para todo o $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A$, isto é, A é aberto. ∎

NOTA: A intersecção de um número infinito de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \dfrac{1}{n^2}$ (círculo aberto de centro na origem e raio $\dfrac{1}{n}$); então $\cap_{n=1}^\infty A_n = \{(0, 0)\}$ que não é um conjunto aberto.

Corolário 2 *A união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração: Sejam F_1, F_2, $\dots$, F_m conjuntos fechados. Então, tendo em conta as Notas que se seguem à definição e o Teorema, $\mathbb{R}^N \setminus (\cup_{i=1}^m F_i) = \cap_{i=1}^m (\mathbb{R}^N \setminus F_i)$ é um conjunto aberto, pelo que $\cup_{i=1}^m F_i$ é fechado. ∎

Teorema 3.2.3 *A união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma colecção, finita ou infinita, de conjuntos abertos e seja $A = \cup_{i \in I} A_i$; se $x \in A$, então existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$ e, visto que A_j é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A_j$ pelo que $B_\delta(x) \subset A$. ∎

Corolário 3 *A intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração: Seja $(F_i)_{i \in I}$ uma colecção, finita ou infinita de conjuntos fechados. Então, tendo em conta as Notas que se seguem à definição e o Teorema, $\mathbb{R}^N \setminus (\cap_{i \in I} F_i) = \cup_{i \in I} (\mathbb{R}^N \setminus F_i)$ é um conjunto aberto, pelo que $\cap_{i \in I} F_i$ é fechado. ∎

Definição 3.2.5 *Diz-se que uma sucessão $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de pontos de $\mathbb{R}^N$* ***converge*** *para $a \in \mathbb{R}^N$, e escreve-se $\lim x_n = a$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$, se*

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n > p, \; \|x_n - a\| < \delta.$$

NOTA 1: A definição anterior é equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = 0$$

(note-se que $\|x_n - a\|$ é uma sucessão de números reais).

NOTA 2: Se uma sucessão de pontos de $\mathbb{R}^N$ convergir, o seu limite é único. Esta propriedade pode ser demonstrada de modo análogo ao usado para sucessões de números reais e deixamo-la ao cuidado do leitor.

Teorema 3.2.4 *É condição necessária e suficiente para que a sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de pontos de $\mathbb{R}^N$, convirja para a que cada uma das sucessões coordenadas convirja para a coordenada correspondente de a.*

Demonstração: Seja $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,N}) \in \mathbb{R}^N$ o termo geral da sucessão; queremos mostrar que

$$x_n \to a \Leftrightarrow x_{n,i} \to a_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Como $|x_{n,i} - a_i| = \sqrt{(x_{n,i} - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{n,i} - a_i)^2} = ||x_n - a||$, então $||x_n - a|| \to 0 \Rightarrow |x_{n,i} - a_i| \to 0$, isto é, $x_{n,i} \to a_i,\; i = 1, 2, \ldots, N$.

Reciprocamente, se $x_{n,i} \to a_i,\; i = 1, 2, \ldots, N$, então $(x_{n,i} - a_i)^2 \to 0,\; i = 1, 2, \ldots, N$, pelo que $\sum_{i=1}^{N}(x_{n,i} - a_i)^2 \to 0$ donde se conclui que $\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{n,i} - a_i)^2} = ||x_n - a|| \to 0$. ∎

Definição 3.2.6 *Diz-se que uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de pontos de $\mathbb{R}^N$ é **sucessão de Cauchy** se*

$$\forall \delta > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall m, n > p, \;\; \|x_n - x_m\| < \delta.$$

Teorema 3.2.5 *É condição necessária e suficiente para que a sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de pontos de $\mathbb{R}^N$, seja de Cauchy que cada uma das sucessões coordenadas seja de Cauchy.*

Demonstração: Da desigualdade $|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{n,i} - x_{m,i})^2} = ||x_n - x_m||$ deduzimos que se $\{x_n\}$ é sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}^N$, então $\{x_{n,i}\}$ é sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Reciprocamente, se $\{x_{n,i}\}$ são sucessões de Cauchy em $\mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, N$, então

$$\forall \delta > 0 \; \exists p_i \in \mathbb{N} \; \forall m, n > p_i, \;\; |x_{n,i} - x_{m,i}| < \delta/\sqrt{N},$$

pelo que, tomando $p = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$,

$$\forall m, n > p, \quad ||x_n - x_m|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_{n,i} - x_{m,i})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta^2}{N}} = \sqrt{\delta^2} = \delta. \ \blacksquare$$

Corolário 4 *Uma sucessão de elementos de $\mathbb{R}^N$ é convergente se, e só se, for de Cauchy.*

Demonstração: Resulta imediatamente dos Teoremas 3.2.4 e 3.2.5 e do facto de uma sucessão de números reais ser convergente se, e só se, for de Cauchy. $\blacksquare$

Teorema 3.2.6 *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ é fechado se, e só se, todos os limites das sucessões convergentes de elementos de C pertencem a C.*

Demonstração: Seja $\{x_n\} \subset C$ uma sucessão tal que $x_n \to a$; pela definição de fecho, $a \in \overline{C}$ (de facto, se $a \in \text{ext}(C)$, $\exists \delta > 0 : \ B_\delta(a) \cap C = \emptyset$). Se C é fechado, $a \in \overline{C} = C$.

Reciprocamente, suponhamos que $\{x_n\} \subset C \wedge x_n \to a \Rightarrow a \in C$. Seja $b \in \text{fr}(C)$; para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $y_n \in B_{1/n}(b) \cap C$, isto é, $\{y_n\} \subset C \wedge ||y_n - b|| < 1/n$. Então $y_n \to b$ e, pela hipótese, $b \in C$. Concluímos assim que $\text{fr}(C) \subset C$ pelo que C é fechado. $\blacksquare$

Definição 3.2.7 *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ diz-se limitado se*

$$\exists M > 0 \ \forall x \in C, \ ||x|| \leq M$$

Teorema 3.2.7 *Um conjunto C é limitado se, e só se, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, o conjunto $C_i = \{x_i \in \mathbb{R} : \ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \in C\}$ é limitado.*

Demonstração: Como $|x_i| \leq ||x||$, $i = 1, 2, \cdots, N$, se C é limitado, C_i é obviamente limitado.

Reciprocamente, se existem M_1, M_2, $\ldots$, M_N tais que $|x_i| \leq M_i$, $\forall x_i \in C_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$, então, se $x \in C$, $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (M_i)^2}$ Basta, pois, fazer $M = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (M_i)^2}$. $\blacksquare$

Definição 3.2.8 *Uma sucessão $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ diz-se **limitada** se o conjunto dos seus termos, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, for limitado.*

Teorema 3.2.8 *Em $\mathbb{R}^N$, toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente.*

Demonstração: Seja $\{x_n\}$ uma sucessão limitada. Pelo Teorema 3.2.7 a sucessão $\{x_{n,1}\}$ é limitada em $\mathbb{R}$, pelo que tem uma subsucessão $x_{n_k,1}$ convergente. Consideremos agora a sucessão $x_{n_k,2}$; trata-se de uma sucessão limitada pelo que tem uma subsucessão $x_{n_{k_p},2}$ convergente; procedendo do mesmo modo, existe uma subsucessão $x_{n_{k_{p_q}},3}$ convergente, $\ldots$, existe uma subsucessão $x_{n_{\ddots_z},N}$ convergente. A sucessão $(x_{n_{\ddots_z},1}, x_{n_{\ddots_z},2}, \ldots, x_{n_{\ddots_z},N})$ é, pelo Teorema 3.2.4, convergente. $\blacksquare$

Definição 3.2.9 *a) Diz-se que* $a \in \mathbb{R}^N$ *é* ***ponto de acumulação*** *(ou ponto limite) de* $C \subset \mathbb{R}^N$ *se toda a vizinhança de* a *contém, pelo menos, um ponto de* $C \setminus \{a\}$*. Ao conjunto dos pontos de acumulação de* C *chama-se* ***derivado*** *de* C *e designa-se por* C'*.*
b) Diz-se que $a \in C$ *é* ***ponto isolado*** *de* $C \subset \mathbb{R}^N$ *se existir uma vizinhança de* a *cuja intersecção com* C *é o próprio* a*.*

Teorema 3.2.9 $a \in \mathbb{R}^N$ *é ponto de acumulação de* C *se, e só se, existir uma sucessão de pontos de* C*, todos distintos de* a*, que converge para* a*.*

Demonstração: Se existir uma sucessão de pontos de C, todos distintos de a que converge para a, pela Definição 3.2.5, para toda a vizinhança de a, existe uma ordem p a partir da qual todos os elementos da sucessão pertencem a essa vizinhança (e pertencem a C, por hipótese) pelo que qualquer vizinhança de a contém pontos de $C \setminus \{a\}$.

Reciprocamente, se a é ponto de acumulação de C, então $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in C \setminus \{a\} : x_n \in B_{1/n}(a)$, isto é, $||x_n - a|| < 1/n$, pelo que $||x_n - a|| \to 0$, ou ainda $x_n \to a$; obtivemos, assim, uma sucessão de elementos de $C \setminus \{a\}$ que converge para a. ■

Teorema 3.2.10 (**Weierstrass**) *Todo o conjunto infinito limitado tem, pelo menos, um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja C um conjunto infinito limitado; então existe um subconjunto de elementos distintos dois a dois $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset C$. Visto tratar-se de uma sucessão limitada, ela admite uma subsucessão convergente, $x_{n_k} \to a$; a é ponto de acumulação de C pelo Teorema 3.2.9. ■

Teorema 3.2.11 (**Borel**) *Sejam* $C \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto limitado e fechado e* $(U_j)_{j \in J}$ *uma cobertura aberta de* C*, isto é, uma família de conjuntos abertos tais que* $C \subset \bigcup_{j \in J} U_j$*. Então existe uma parte finita* $I \subset J$ *tal que* $C \subset \bigcup_{j \in I} U_j$*.*

Capítulo 4

Funções de Várias Variáveis

4.1 Funções reais de várias variáveis reais

Definição 4.1.1 *Chama-se **função real de** N **variáveis reais** a toda a aplicação de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$. Ao conjunto D chama-se **domínio** da função.*

*Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in D$ e $f(x) = y \in \mathbb{R}$. As variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_N$ são as **variáveis independentes** e y é a **variável dependente**.*

*Ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} : \; y = f(x), \; x \in D\}$ chama-se **contradomínio** de f.*

*Chama-se **gráfico** de f ao subconjunto de $\mathbb{R}^{N+1}$:*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_N, y) : \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in D \wedge y = f(x)\}$$

NOTA: Se a função for dada por uma expressão analítica, o seu domínio é o da expressão analítica, isto é, o conjunto dos pontos para os quais a expressão analítica tem sentido.

<u>EXEMPLO</u>: A função

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \sqrt{64 - 4\,x^2 - 16\,y^2}$$

tem por domínio o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 64 - 4\,x^2 - 16\,y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 4\,y^2 \leq 16\} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1\};$$

o contradomínio é o conjunto $[0, 8]$. Vejamos qual o gráfico de f:

$$z = \sqrt{64 - 4\,x^2 - 16\,y^2} \Leftrightarrow 4\,x^2 + 16\,y^2 + z^2 = 64 \;\wedge\; z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{8}\right)^2 = 1 \;\wedge\; z \geq 0$$

Definição 4.1.2 *Dadas duas funções* $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *diz-se que* f *é um* ***prolongamento*** *de* g *se* $B \subset A$ *e* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in B$. *Neste caso, também se diz que* g *é a* ***restrição*** *de* f *ao conjunto* B.

4.2 Funções vectoriais

Definição 4.2.1 *Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, a que se chama função vectorial, fica definida por P funções reais de N variáveis:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (y_1, y_2, \ldots, y_P)$$

em que

$$\begin{array}{ccc} y_1 & = & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ y_2 & = & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_P & = & f_P(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{array}$$

e $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, P$. A f_i chama-se ***função coordenada*** *de f.*

<u>EXEMPLO</u>: Consideremos a função:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (\log(x - y), \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

As funções coordenadas são:

$$f_1(x, y) = \log(x - y) \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

O domínio de f é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > y \wedge 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > y \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4.3 Limites e continuidade.

Definição 4.3.1 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* $f(x)$ ***tende para*** b ***quando*** x ***tende para*** a *(ou que tem* ***limite*** b *em* a*), e escreve-se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *se*

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ x \in D \wedge \|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Em termos de vizinhanças, escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ f(B_\varepsilon(a) \cap D) \subset B_\delta(b).$$

Teorema 4.3.1 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *se, e só se, a toda a sucessão* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *de pontos de* D*, que tende para* a*, corresponde uma sucessão* $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ *de números reais que tende para* b*.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e seja $\delta > 0$. Pela Definição 4.3.1,

$$\exists \varepsilon > 0 :\ x \in D \wedge ||x-a|| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta;$$

seja $\{x_n\} \subset D$ uma sucessão que converge para a; usando a Definição 3.2.5, sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > p,\ ||x_n - a|| < \varepsilon$; então, $\forall n > p,\ |f(x_n) - b| < \delta$. Concluimos, pois, que $f(x_n) \to b$.

Reciprocamente, vamos mostrar que se para toda a sucessão $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \to a$, $f(x_n) \to b$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Usamos a contra-recíproca: suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$ (ou que não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$), isto é,

$$\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in D :\ ||x-a|| < \varepsilon \wedge |f(x) - b| \geq \delta.$$

Seja $\varepsilon = 1/n$; $\exists x_n \in D :\ ||x_n - a|| < 1/n \wedge |f(x_n) - b| \geq \delta$. Obtemos assim uma sucessão $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to a$ tal que $f(x_n) \not\to b$. ■

Teorema 4.3.2 *O limite* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$*, se existir, é único.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ com $b \neq c$. Tomando $\delta < \dfrac{|b-c|}{2}$, obtemos $B_\delta(b) \cap B_\delta(c) = \emptyset$. Pela Definição 4.3.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in D \wedge ||x-a|| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_\delta(b)$ e $x \in D \wedge ||x-a|| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B_\delta(c)$ o que é impossível porque $B_\delta(b) \cap B_\delta(c) = \emptyset$. ■

Dos dois Teoremas anteriores e do conhecimento de que, para sucessões, o limite da soma é a soma dos linites, o limite do produto é o produto dos limites e o limite do quociente é o quociente dos limites (quando os quocientes têm sentido), obtemos:

Teorema 4.3.3 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ duas funções com limites finitos quando x tende para a. Então:*

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*

c) se $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0, \qquad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

<u>EXEMPLO</u>: Seja

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

O domínio de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dado $(a,b) \in D$, seja $\{(x_n,y_n)\} \subset D$ uma sucessão tal que $(x_n,y_n) \to (a,b)$. Então $x_n \to a$ e $y_n \to b$ pelo que

$$\lim f(x_n,y_n) = \lim \frac{x_n\,y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} = \frac{\lim x_n\ \lim y_n}{\sqrt{(\lim x_n)^2+(\lim y_n)^2}} = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Como $(0,0) \in \overline{D}$, faz sentido falar em $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Vejamos que este limite é zero:

$$\left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Na definição basta, pois, fazer $\varepsilon = \delta$.

Definição 4.3.2 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e B um subconjunto próprio de D (isto é, $B \subset D$ e $B \neq D$). Suponhamos que a é um ponto aderente a B. Diz-se que f tem limite b, quando x tende para a, segundo B ou que b é o **limite relativo** a B de f quando x tende para a, se o limite da restrição de f a B quando x tende para a é b. Designa-se este limite por*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a,\ x\in B} f(x) = b.$$

NOTA: Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ então, qualquer que seja B tal que $a \in \overline{B}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = b$. A recíproca não é verdadeira: podem existir os limites relativos a alguns subconjuntos e não existir o limite. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Se $B = \{(x,y):\ x \geq 0\}$, então $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = 1$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Alguns limites relativos importantes são:

I) $B = D\setminus\{a\}$; obtemos assim o limite de $f(x)$ quando x tende para a, por valores diferentes de a e escreve-se:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x).$$

Note-se que este limite apenas faz sentido se $a \in \overline{D\setminus\{a\}}$, isto é, se a é ponto de acumulação de D.

II) Se $N = 1$, isto é, se f é uma função real de variável real, definem-se limite à esquerda e limite à direita; o limite por valores diferentes existe se existirem o limite à esquerda e o limite à direita e forem iguais. Se $N > 1$, as noções de esquerda e direita deixam de ter sentido; além disso, x pode tender para a por uma infinidade de caminhos.

Seja B uma recta tal que $a \in B$. Ao $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$ chama-se **limite direccional**.

Se $N = 2$, com $a = (a_1, a_2)$, obtemos, para cada $m \in \mathbb{R}$,

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = m\,(x-a_1)+a_2\}$$

e, ainda, a recta vertical

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x = a_1\}.$$

Como vimos atrás, se existir o limite, existem todos os limites direccionais e são iguais ao limite. No Exemplo 1, que se segue ao Teorema da unicidade do limite, poderíamos fazer

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=m\,x}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x\,m\,x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{m\,x^2}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{m\,|x|}{\sqrt{1+m^2}} = 0.$$

Concluiríamos, assim, que o limite, se existir, é 0. A prova que de facto o limite é 0 foi escrita atrás.

Se algum dos limites direccionais não existir ou se não forem todos iguais, conclui-se que o limite não existe.

<u>EXEMPLO 1</u>: Seja

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}.$$

O domínio é $D = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e $(0,0)\in\overline{D}$. Calculemos os limites direccionais:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=m\,x}} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,m\,x}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

O limite depende da recta considerada, pelo que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Se existirem todos os limites direccionais e forem iguais, não podemos concluir que existe o limite.

EXEMPLO 2: Seja

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}.$$

O domínio é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0) \in \overline{D}$. Calculemos os limites direccionais:

$$\lim_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ y\,=\,m\,x}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,m^2\,x^2}{x^2+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^2x^2} = 0;$$

para a recta vertical

$$\lim_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ x\,=\,0}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

Os limites direccionais são, pois, todos iguais a 0. Consideremos a curva $y = \sqrt{x}$; então

$$\lim_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ y\,=\,\sqrt{x}}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como existem limites relativos com valores diferentes, concluimos que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

EXEMPLO 3: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq y \\ 1, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \\ x^2, & \text{se} \quad x = y \neq 0 \end{cases}$$

a) Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $a \neq b$, seja $\{(x_n,y_n)\}$ uma sucessão que converge para (a,b); então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq y_n$, $\forall n > p$, isto é, $f(x_n,y_n) = 0$, $\forall n > p$ pelo que $\lim f(x_n,y_n) = 0$ e concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$.
b) Se $(a,b) = (0,0)$, como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ x\,=\,0,\,y\,\neq\,0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ x\,=\,0,\,y\,\neq\,0}} 0 = 0$ e $f(0,0) = 1$, pelo que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Vejamos que existe o limite por valores diferentes de $(0,0)$: se $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq x^2 \leq ||(x,y)||^2$; na definição, para cada $\delta > 0$, basta tomar

$\varepsilon = \sqrt{\delta}$ para concluir que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0.$

c) Se $a = b \neq 0$, então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\x=a,\,y\neq a}} f(x,y) = \lim_{x=a,y\to a,y\neq a} 0 = 0$$

pelo que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$.

Definição 4.3.3 *Chamam-se* ***limites iterados*** *de* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *quando* (x,y) *tende para* (a,b) *aos dois limites:*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad e \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

Suponhamos que existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ e que, para um certo $\varepsilon_0 > 0$ é válida a propriedade: para cada $x \in]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[$ existe $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$. Em $]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[$, definimos a função $\phi(x) = \displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$. Sejam $\delta > 0$ (qualquer) e $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \delta < f(x,y) < \alpha + \delta$, $\forall (x,y) \in B_\varepsilon(a,b)$ (obviamente, podemos tomar $\varepsilon < \varepsilon_0$); então $\alpha - \delta \leq \phi(x) \leq \alpha + \delta$, $\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, pelo que $\displaystyle\lim_{x\to a} \phi(x) = \alpha$ e, tendo em conta as definições, $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \alpha$. O raciocínio anterior continua válido se supusermos que existe $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$, $\forall x \in]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[\setminus\{a\}$.

Concluímos que se existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ e se numa vizinhança de (a,b) existir, para cada x, $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$, então existe o limite iterado $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$. É claro que podemos estabelecer uma afirmação análoga para o outro limite iterado. Em particular, se existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, e existirem os limites iterados, estes têm o mesmo valor que o limite.

Se existirem os limites iterados e forem diferentes então não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$. Note-se que os limites iterados podem ser iguais sem que exista $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

<u>EXEMPLO 1</u>: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Então $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq -y\}$ e $(0,0) \in \overline{D}$. Calculemos os limites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

e concluímos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Vimos atrás que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y}{x^2+y^2}$. No entanto, os limites iterados são iguais:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

<u>EXEMPLO 3</u>: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (x+y)\,\cos\left(\frac{1}{xy}\right).$$

A função co-seno é limitada e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$ pelo que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Para $x \neq 0$, não existe $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$ pelo que não existe o limite iterado $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$ e, para $y \neq 0$, não existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y)$ pelo que não existe o limite iterado $\displaystyle\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$.

Este exemplo permite-nos concluir que pode existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ sem que existam os limites iterados.

Por vezes usa-se, para o cálculo de limites, o processo de "mudança de variáveis", que passamos a descrever.

Sejam $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\Psi : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\,\pi[\to \mathbb{R}^2$ a função definida por $\Psi(r,\theta) = (x,y)$, onde

$$\begin{cases} x = a + r\,\cos(\theta) \\ y = b + r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

Trata-se da mudança de **coordenadas cartesianas** em **coordenadas polares**.

Como vemos na Figura 4.1, r é a distância entre (a,b) e (x,y) e θ o ângulo que faz a recta paralela ao eixo do xx que passa por (a,b) e a recta que une (a,b) a (x,y).

A função Ψ transforma o rectângulo $\Sigma_R = [0,R[\times[0,2\,\pi[$ no círculo aberto de centro em (a,b) e raio R, isto é, na vizinhança $B_R(a,b)$ (ver Figura 4.2).

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathrm{int}(D)$, $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a,b) \subset D$ e $F = f \circ \Psi$, isto é, $F(r,\theta) = f(a + r\cos(\theta), b + r\,\mathrm{sen}(\theta))$.

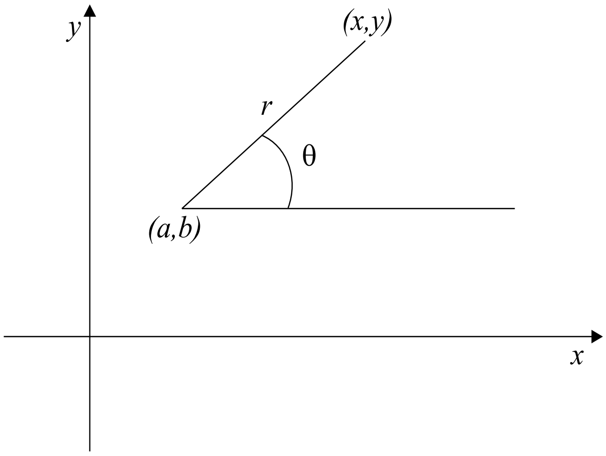


Figura 4.1: Significado de r e θ

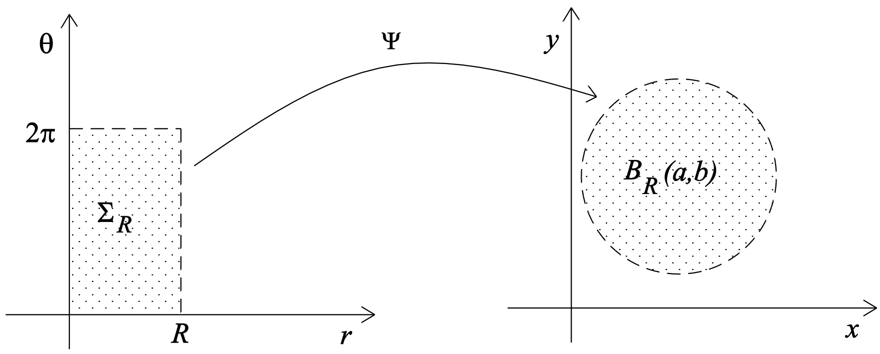


Figura 4.2

Então,

$$F(\Sigma_\varepsilon) = (f \circ \Psi)(\Sigma_\varepsilon) = f(\Psi(\Sigma_\varepsilon)) = f(B_\varepsilon(a,b)).$$

Pela definição, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ é equivalente a

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \ (x,y) \in B_\varepsilon(a,b) \Rightarrow |f(x,y) - c| < \delta$$

isto é,

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \ (r,\theta) \in \Sigma_\varepsilon \Rightarrow |F(r,\theta) - c| < \delta,$$

ou ainda

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \ 0 \leq r < \varepsilon \Rightarrow |F(r,\theta) - c| < \delta,\ \ \forall \theta \in [0, 2\pi[.$$

Concluímos, assim, que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ se, e só se, $\lim\limits_{r\to 0} F(r,\theta) = c$, uniformemente em θ.

NOTA : O que dissemos atrás adapta-se de forma evidente ao caso em que $(a,b) \notin D$

mas $(a,b) \in \overline{D}$. Neste caso, teríamos que considerar as intersecções com D, r seria sempre diferente de 0 e nas variáveis polares teríamos que considerar as intersecções respectivas.

EXEMPLO 1: Consideremos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vamos usar coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} F(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r\,\cos(\theta)\, r\,\text{sen}(\theta)}{\sqrt{r^2\,\cos^2(\theta) + r^2\,\text{sen}^2(\theta)}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\,\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)}{r\sqrt{\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\,\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) = 0$$

porque a função $\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)$ é limitada. Concluímos, pois, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

EXEMPLO 2: Seja

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

Vamos estudar o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$, usando coordenadas polares. (Estamos no caso da Nota, $(0,0) \notin D$).

$$\lim_{r\to 0} F(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r\,\cos(\theta)\, r\,\text{sen}(\theta)}{r^2\,\cos^2(\theta) + r^2\,\text{sen}^2(\theta)} = \lim_{r\to 0} \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) = \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)$$

Como o limite estudado depende de θ, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

EXEMPLO 3: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

cujo domínio é $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq y\}$. Usando coordenadas polares vamos verificar se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$F(r,\theta) = \frac{r^2\cos^2(\theta) + r^2\text{sen}^2(\theta)}{r\,\cos(\theta) - r\,\text{sen}(\theta)} = \frac{r}{\cos(\theta)-\text{sen}(\theta)}.$$

Visto que a função de θ, $\dfrac{1}{\cos(\theta)-\text{sen}(\theta)}$, não é limitada (se $\theta = \pi/4$, o denominador é nulo e próximo de $\pi/4$ obtemos valores do denominador tão pequenos quanto queiramos) a convergência não é uniforme em θ e o limite não existe (note-se que se existisse teria que ser 0 porque, fixando θ, o limite, quando r tende para 0, é 0). Talvez se compreenda melhor que o limite não existe se voltarmos à proposição que teria que se verificar caso ele existisse:

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \;\; 0 < r < \varepsilon \Rightarrow |F(r,\theta)| < \delta, \;\; \forall \theta \in [0, 2\pi[\backslash \{\pi/4\},$$

que é falsa porque, como vimos atrás, "próximo" de $\theta = \pi/4$, $F(r,\theta)$ pode ser tão grande quanto se queira.

Para uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ podemos proceder de modo semelhante ao que acabámos de expor, usando, neste caso, a mudança para **coordenadas esféricas**, isto é, a função $\psi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ é definida por $\psi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ onde

$$\begin{cases} x = a + r \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \\ y = b + r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \\ z = c + r \cos(\varphi), \end{cases}$$

Na Figura 4.3 exibem-se os significados de r, θ e φ, no caso em que $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ (que foi usado para simplificar o desenho; o leitor não deverá ter dificuldade de fazer a generalização para (a, b, c) qualquer). É claro que, neste caso, existirá $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z)$ se, e só se, existir $\lim\limits_{r\to 0} (f \circ \psi)(r, \theta, \varphi)$ uniformemente em θ e φ.

Definição 4.3.4 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que $f(x)$ **tende para** $b = (b_1, b_2, \ldots, b_P)$ **quando** x **tende para** a (ou que tem **limite** b em a), e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se*

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; : \; x \in D \wedge \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta.$$

Em termos de vizinhanças, escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; : \; f(B_\varepsilon(a) \cap D) \subset B_\delta(b).$$

Note-se que, embora as representemos do mesmo modo, as normas que aparecem na definição estão definidas em espaços diferentes: a primeira em $\mathbb{R}^N$ e a segunda em $\mathbb{R}^P$. A mesma observação se pode fazer para as vizinhanças.

Teorema 4.3.4 *É condição necessária e suficiente para $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ que as funções coordenadas verifiquem: $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, P$.*

Demonstração: Visto que $|f_i(x) - b_i| \leq ||f(x) - b||$, de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ concluimos, usando as definições, que $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, P$.

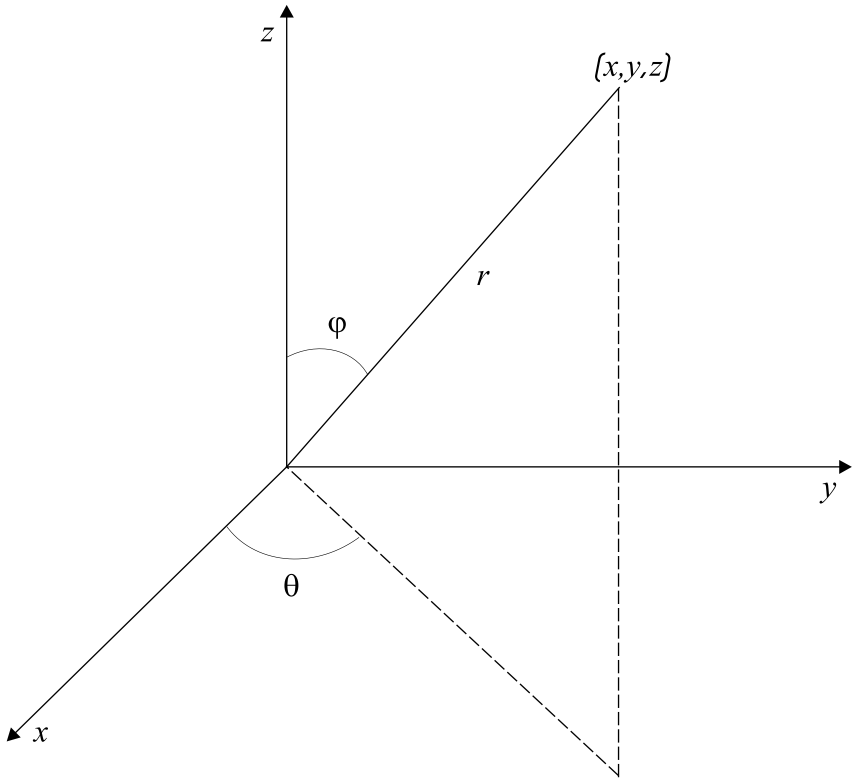


Figura 4.3: Significados de r, θ e φ

Reciprocamente, suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, P$, e seja $\delta > 0$. Então, para cada i, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$x \in D \wedge ||x - a|| < \varepsilon_i \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \frac{\delta}{\sqrt{P}}.$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_P\}$; então

$$x \in D \wedge ||x - a|| < \varepsilon \Rightarrow ||f(x) - b||^2 = \sum_{i=1}^{P} (f_i(x) - b_i)^2 < \sum_{i=1}^{P} \frac{\delta^2}{P} = \delta^2,$$

isto é

$$x \in D \wedge ||x - a|| < \varepsilon \Rightarrow ||f(x) - b|| < \delta. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3.5 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *se, e só se, a toda a sucessão* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *de pontos de* D*, que tende para* a*, corresponde uma sucessão* $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ *de elementos de* $\mathbb{R}^P$ *que tende para* b*.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.3.4, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se, e só se, para cada i, $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$. Basta aplicar, a cada i, o Teorema 4.3.1. $\blacksquare$

Definição 4.3.5 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, $P \geq 1$. Suponhamos que D é tal que faz sentido tomar $\|x\|$ tão grande quanto se queira. Diz-se que*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = b$$

se

$$\forall \delta > 0\ \exists L > 0\ :\ x \in D \wedge \|x\| > L \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta.$$

EXEMPLO: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (\frac{\cos(x)}{x^2+y^2+1}, e^{-x^2-y^2})$$

Visto que $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$, então

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} (x^2+y^2) = +\infty \text{ e } \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{1}{x^2+y^2+1} = 0;$$

como $\cos(x)$ é limitada, $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+y^2+1} = 0$. Por outro lado, $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} e^{-x^2-y^2} = 0$. Concluímos, assim, que $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = (0,0)$.

Definição 4.3.6 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se*

$$\forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ x \in D \wedge \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > L.$$

EXEMPLO: Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

A partir da definição, é fácil verificar que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = +\infty$ (de facto, basta tomar, para cada $L > 0$, $\varepsilon = 1/\sqrt{L}$).

Analogamente podemos definir

Definição 4.3.7 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se*

$$\forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ x \in D \wedge \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < -L.$$

EXEMPLO: Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{xy-1}{x^2+y^2}$$

Podemos tomar uma vizinhança de $(0,0)$, suficientemente pequena de modo que, para todos os pontos dessa vizinhança, $xy - 1 < -1/2$ e proceder de modo semelhante ao exemplo anterior, concluindo que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = -\infty$

Podemos ainda definir o limite para infinito "sem sinal":

Definição 4.3.8 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *se*

$$\forall L > 0\; \exists \varepsilon > 0 \; : \; x \in D \wedge \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| > L.$$

Definição 4.3.9 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* $f(x)$ *é um* ***infinitésimo*** *com* $x - a$ *se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. *Em particular, se* $a = (0, 0, \ldots, 0)$, *diz-se que* $f(x)$ *é um infinitésimo com* x.

<u>EXEMPLOS</u>: $f(x, y) = x - 1 + y^2$ é um infinitésimo com $(x - 1, y)$; $g(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ é um infinitésimo com (x, y).

Definição 4.3.10 *Dados dois infinitésimos com* $x - a$, f *e* g, *diz-se que*

a) são da mesma ordem se o limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *for finito e diferente de zero; se este limite for 1, os infinitésimos dizem-se equivalentes;*

b) o infinitésimo $f(x)$ *é de ordem superior à de* $g(x)$ *se* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$*;*

c) são não comparáveis se não existir $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

<u>EXEMPLOS</u>: $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ e $g(x, y) = 2\,x^2 + 2\,y^2$ são infinitésimos da mesma ordem com (x, y) ($\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2 + x^3}{2\,x^2 + 2\,y^2} = 1/2$); $h(x, y) = x^3$ é um infinitésimo de ordem superior a $j(x, y) = x^2 + y^2$ com (x, y) ($\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$); $\phi(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ e $\psi(x, y) = 2\,x^2 + y^2$ são infinitésimos com (x, y) não comparáveis: não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\phi(x, y)}{\psi(x, y)}$.

Definição 4.3.11 *Seja* f *um infinitésimo com* $x - a$. *Se existir* $\mu \in \mathbb{R}^+$ *tal que o limite* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\|x - a\|^\mu}$ *é finito e diferente de zero, diz-se que* $f(x)$ *é um* ***infinitésimo de ordem*** μ *com* $x - a$.

<u>EXEMPLO</u>: $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ é um infinitésimo de ordem 2 com (x, y):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + x^3}{||(x, y)||^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + x^3}{x^2 + y^2} = 1.$$

Definição 4.3.12 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ *e* $a \in D$. *Diz-se que* f *é* ***contínua*** *em* a *se* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Diz-se que f *é* ***contínua num conjunto*** $B \subset D$ *se for contínua em todos os pontos de* B.

Se f *não é contínua num ponto* a, *diz-se que é* ***descontínua*** *em* a.

Como consequência imediata do Teorema 4.3.4, podemos enunciar:

Teorema 4.3.6 *É condição necessária e suficiente para f ser contínua em a que as funções coordenadas sejam contínuas em a.*

Como consequência imediata de resultados semelhantes para as sucessões, obtemos

Teorema 4.3.7 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ funções contínuas em a. Então $f + g$ é contínua em a.*

Se $P = 1$, então $f \cdot g$ é contínua em a e, se além disso, $g(a) \neq 0$ então f/g é contínua em a.

EXEMPLO 1: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq y \\ 2, & \text{se } x < y \end{cases}$$

Se (a,b) é tal que $a > b$, então existe uma vizinhança de (a,b) contida no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > y\}$; a função tem o valor 1 em todos os pontos dessa vizinhança pelo que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 1 = f(a,b)$, isto é, a função é contínua em (a,b).

De modo semelhante, concluímos que f é contínua no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < y\}$.

No conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$ a função é descontínua:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x,a) = 2 \neq f(a,a) = 1.$$

EXEMPLO 2: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A função é contínua no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, visto tratar-se do quociente de dois polinómios em que o denominador não se anula.

Verifiquemos o ponto $(0,0)$:

$$\left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3 + (\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2};$$

concluímos, assim que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, isto é, a função é contínua em $(0,0)$.

EXEMPLO 3: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vimos atrás que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, pelo que a função é descontínua em $(0,0)$. É contínua em todos os outros pontos, visto tratar-se do quociente de duas funções contínuas em que o denominador não se anula.

Definição 4.3.13 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que a é uma **descontinuidade não essencial** de f se existir $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ for finito e diferente de $f(a)$. Se não existir $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, diz-se que a é uma **descontinuidade essencial** de f.*

EXEMPLOS: A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem uma descontinuidade não essencial em $(0,0)$ e a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem uma descontinuidade essencial em $(0,0)$, visto que não existe $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y)$.

Teorema 4.3.8 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ uma função contínua num conjunto limitado e fechado $A \subset D$. Então $f(A)$ é um conjunto limitado e fechado.*

Demonstração: Vejamos que $f(A)$ é limitado. Se tal não fosse verdade, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $y_n \in f(A)$ tal que $||y_n|| > n$. Por definição de $f(A)$, para cada $y_n \in f(A)$ existe um $x_n \in A$ tal que $y_n = f(x_n)$. Obtemos uma sucessão $\{x_n\}$ que é limitada por estar contida em A. Pelo Teorema 3.2.8, existem $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e uma subsucessão $x_{n_k} \to x_0$. Visto que A é fechado $x_0 \in A$, pelo que f é contínua em x_0. Então $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e a sucessão $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ é limitada o que contradiz a hipótese feita.

Vejamos que $f(A)$ é fechado, usando o Teorema 3.2.6. Seja $\{y_n\} \subset f(A)$ uma sucessão $y_n \to y_0$; queremos demonstrar que $y_0 \in f(A)$. Consideremos uma sucessão de elementos de A tal que $y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como vimos atrás, existem $x_0 \in A$ e uma subsucessão $x_{n_k} \to x_0 \in A$ e, visto f ser contínua em x_0, $f(x_{n_k}) \to y_0 = f(x_0)$, pelo que $y_0 \in f(A)$. ■

Em $\mathbb{R}$, todo o conjunto limitado e fechado tem máximo e mínimo pelo que

Corolário 1 (Weierstrass) *Toda a função $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínua num conjunto fechado e limitado tem, nesse conjunto, um máximo e um mínimo.*

Definição 4.3.14 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $A \subset D$. Diz-se que f é uniformemente contínua em A se*

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x, y \in A: \ \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \delta.$$

EXEMPLO 1: *Toda a aplicação linear de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^P$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^N$.*

Começamos por mostrar que se $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ é uma aplicação linear, então

$$\exists C > 0: \ \|Lx\| \le C\|x\|, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consideremos, como de costume, a base canónica em $\mathbb{R}^N$: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_N = (0, 0, \ldots, 1)$. Seja $C > 0$ dado por

$$C = \sqrt{\|L(e_1)\|^2 + \|L(e_2)\|^2 + \cdots + \|L(e_N)\|^2}$$

(ou $C > 0$ qualquer, se esta quantidade for nula).

Usando as desigualdades triangular e de Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|L(x)\| = \|L(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_N\, e_N)\| &= \|x_1\, L(e_1) + x_2\, L(e_2) + \cdots + x_N\, L(e_N)\| \\
&\le \|x_1\, L(e_1)\| + \|x_2\, L(e_2)\| + \cdots + \|x_N\, L(e_N)\| \\
&= |x_1|\, \|L(e_1)\| + |x_2|\, \|L(e_2)\| + \cdots + |x_N|\, \|L(e_N)\| \\
&\le \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_N|^2} \cdot \sqrt{\|L(e_1)\|^2 + \|L(e_2)\|^2 + \cdots + \|L(e_N)\|^2} \\
&= C \cdot \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_N)^2} = C \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

Visto que

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L(x - y)\| \le C \cdot \|x - y\|,$$

para concluir basta, na definição, considerar $\varepsilon = \dfrac{\delta}{C}$.

EXEMPLO 2: A função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^N$.

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x - y\|, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Do mesmo modo se mostra que $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Usando estas duas desigualdades, obtemos

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

isto é, $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$. Para concluir basta, na definição, considerar $\varepsilon = \delta$.

É evidente que se f é uniformemente contínua em A então a restrição de f a A é contínua em A. A recíproca não é verdadeira, tendo-se, no entanto o seguinte teorema:

Teorema 4.3.9 (Teorema de Heine-Cantor) *Toda a função contínua num conjunto fechado e limitado é uniformemente contínua nesse conjunto.*

Demonstração: Se a função não fosse uniformemente contínua, então

$$\exists \delta > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists x, y \in A \; \|x - y\| < \varepsilon \wedge \|f(x) - f(y)\| \geq \delta.$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/n$, obtemos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n, y_n \in A \; \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \wedge \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \delta.$$

Como A é limitado e fechado, pelo Teorema 3.2.8, existem $x_0 \in A$ e uma subsucessão $x_{n_k} \to x_0$. Da desigualdade $\|x_n - y_n\| < 1/n$, concluimos que também $y_{n_k} \to x_0$ e, visto que f é contínua em x_0, $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(x_0) - f(x_0) = 0$, o que contradiz a desigualdade $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \delta \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Capítulo 5

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^N$

5.1 Derivadas parciais. Teorema de Schwarz.

Definição 5.1.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Se existir*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_N)-f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_N)}{h},$$

diz-se que este limite é a ***derivada parcial de*** *f, em ordem a x_i, no ponto a.*

Designa-se este limite por uma das formas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a), \quad f'_i(a), \quad \dot{f}_{x_i}(a).$$

<u>EXEMPLO</u>: A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem derivadas parciais em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

NOTA: Com vimos atrás, a função f do exemplo anterior não é contínua em $(0,0)$. Concluimos, assim, que **uma função $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ pode ter todas as derivadas parciais num ponto e ser descontínua nesse ponto**.

Recordemos que as funções reais de variável real (isto é, se $N = 1$) que têm derivada num ponto são contínuas nesse ponto. O facto de se $N > 1$, f poder ser descontínua, mesmo que existam todas as derivadas parciais no ponto, não é surpreendente se notarmos que para a definição da derivada parcial em ordem a x_i apenas temos em conta os valores da função na recta que passa pelo ponto e é paralela ao eixo dos x_i, enquanto que para a definição de continuidade temos em conta os valores da função numa vizinhança do ponto.

Devido à semelhança da definição com a derivada de uma função de variável real, podem-se demonstrar de modo análogo, apenas com as adaptações evidentes, as relações entre as derivadas parciais e as operações elementares:

Teorema 5.1.1 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Então,*

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(a) = g(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + f(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) - f(a) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g^2(a)}$$

Pela razão que expusemos atrás, as regras de derivação válidas para as funções de variável real continuam a aplicar-se, com as adaptações que se tornam evidentes.

<u>EXEMPLO 1</u>: A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

que considerámos atrás tem também derivadas parciais nos pontos diferentes de $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{\partial(x\,y)}{\partial x}\,(x^2+y^2) - \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}\,(x\,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y\,(x^2+y^2) - 2\,x\,(x\,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{\partial(x\,y)}{\partial y}\,(x^2+y^2) - \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\,(x\,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x\,(x^2+y^2) - 2\,y\,(x\,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - x\,y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

<u>EXEMPLO 2</u>: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x$ tem por derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

EXEMPLO 3: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = e^{xyz}$ tem por derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yze^{xyz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xze^{xyz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xye^{xyz}.$$

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existir em todos os pontos de $\text{int}(D)$, podemos definir uma nova função, a que chamamos derivada de f em ordem a x_i e representamos por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Definição 5.1.2 *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : int(D) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *admitir derivada em ordem a* x_i *no ponto* a*, a essa derivada chama-se* ***derivada de segunda ordem de*** f ***em ordem a*** x_i *no ponto* a *e designa-se por uma das formas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\ , \quad f''_{x_i^2}(a)\ , \quad f'_{ii}(a).$$

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *admitir derivada em ordem a* x_k *no ponto* a*, a essa derivada chama-se* ***derivada de segunda ordem de*** f ***em ordem a*** x_i ***e a*** x_k *no ponto* a *e designa-se por uma das formas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a)\ , \quad f''_{x_i x_k}(a)\ , \quad f'_{ik}(a).$$

Se $x_i \neq x_k$*, a estas últimas derivadas chama-se* ***derivadas cruzadas****.*

EXEMPLO 1: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x\,y\,z$ tem por derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = x.$$

EXEMPLO 2: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = e^{xyz}$ tem por derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = y^2z^2e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = x^2z^2e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = x^2y^2e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = (z + xyz^2)e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = (z + xyz^2)e^{xyz},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = (y + xy^2z)e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = (y + xy^2z)e^{xyz},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = (x + x^2yz)e^{xyz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = (x + x^2yz)e^{xyz}.$$

Teorema 5.1.2 (Teorema de Schwarz) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto interior a D. Se as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ estão definidas numa vizinhança de (a,b) e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em (a,b) então $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ também está definida em (a,b) e*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Demonstração: Sejam $\delta > 0$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ estão definidas em $B_\delta(a,b)$ e $\varepsilon > 0$ tal que o quadrado $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ está contido em $B_\delta(a,b)$ (ver Figura 5.1).

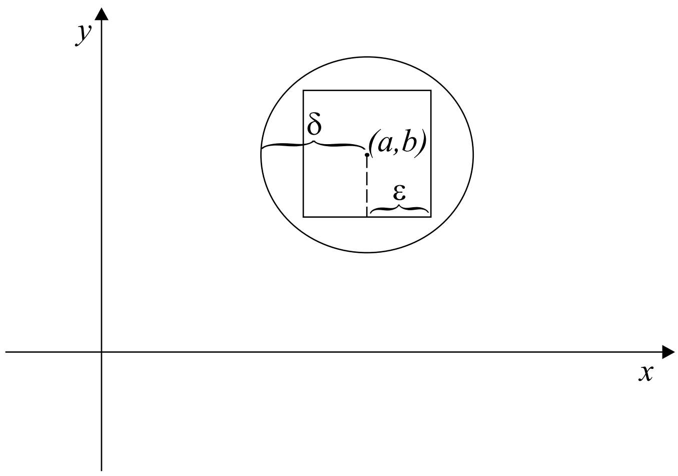


Figura 5.1

Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $|k| < \varepsilon$ e consideremos a função $\varphi :]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$$

Vejamos que φ é diferenciável (portanto contínua) em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$:

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b+k) - f(x+h,b) - f(x,b+k) + f(x,b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b+k) - f(x,b+k)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b) - f(x,b)}{h}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b).$$

Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \varepsilon$. Pelo Teorema de Lagrange, existe θ_1, $0 < \theta_1 < 1$, tal que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\,\varphi'(a+\theta_1 h)$$

isto é,

$$\Psi(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$
$$= h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)\right)$$

Fixemos h, nas condições anteriores, e consideremos a função $\psi :]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y).$$

ψ é diferenciável (portanto contínua) em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$:

$$\psi'(y) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, y);$$

novamente pelo Teorema de Lagrange, existe θ_2, $0 < \theta_2 < 1$, tal que

$$\psi(b+k) - \psi(b) = k\psi'(b+\theta_2 k) = k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k),$$

isto é,

$$k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)$$

pelo que

$$h\,k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = \Psi(h,k)$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em (a,b), então

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Psi(h,k)}{h\,k} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

Queremos mostrar que existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$, isto é, que existe o limite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)}{h\,k} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{\Psi(h,k)}{h\,k}$$

Para cada $h \neq 0$, existe $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\Psi(h,k)}{h\,k} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}$; vimos atrás que existe $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\Psi(h,k)}{h\,k}$ pelo que existe o limite iterado $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\Psi(h,k)}{h\,k}$ e estes limites são iguais (conforme as considerações que se seguem à definição de limite iterado).

Concluímos, pois, que existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b). \quad \blacksquare$$

NOTA 1: Do Teorema de Schwarz deduzimos imediatamente que se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ forem contínuas num conjunto aberto $C \subset \mathbb{R}^2$ então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \;\; \forall (x,y) \in C$

NOTA 2: Aplicando o Teorema de Schwarz às derivadas de primeira ordem, conclui-se que se $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ forem contínuas, então são iguais. Isto é, se forem contínuas, as derivadas são iguais independentemente da ordem pela qual se derive em relação a cada variável (interessa apenas o número de vezes que se deriva em relação a cada variável). O mesmo se aplica às derivadas de ordem superior.

NOTA 3: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. O Teorema de Schwarz continua válido com as adaptações evidentes (e com a "mesma" demonstração):

Se as derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

estão definidas numa vizinhança de a e são contínuas em a, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

É claro que as notas 1 e 2 continuam a aplicar-se ao caso de funções de várias variáveis, com as devidas adaptações:

se todas as derivadas em causa forem contínuas num conjunto aberto $C \subset D$ então

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_N} f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_N^{p_N}}(x)$$

é independente da ordem pela qual se derive, desde que se derive p_1 vezes em ordem a x_1, p_2 vezes em ordem a x_2, ..., p_N vezes em ordem a x_N (seguindo a convenção de que se algum dos p_i for nulo, não se deriva em ordem a x_i).

Vimos atrás que uma função pode ter todas as derivadas parciais de primeira ordem num ponto e ser descontínua nesse ponto. No entanto, é válido o seguinte Teorema (que não demonstraremos):

Teorema 5.1.3 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais em todos os pontos de um conjunto aberto C e tal que existe $M > 0$ verificando*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| < M, \quad \forall x \in C, \;\; i = 1, 2, \ldots, N,$$

então f é contínua em C.

Definição 5.1.3 *Diz-se que $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é continuamente derivável num ponto se admitir todas as derivadas parciais de primeira ordem e estas forem contínuas nesse ponto.*

f é continuamente derivável num conjunto $A \subset D$ se f for continuamente derivável em todos os pontos de A. Neste caso, também se diz que f é de classe C^1 em A, e escreve-se $f \in C^1(A)$.

Se $p > 1$, diz-se que f é de classe C^p em A, e escreve-se $f \in C^p(A)$, se as derivadas parciais de ordem p de f forem contínuas em A.

Diz-se que f é de classe C^∞ em A, e escreve-se $f \in C^\infty(A)$, se $f \in C^p(A)$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

<u>EXEMPLO 1</u>: A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, mas estas são descontínuas em $(0,0)$; por isso $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. De facto, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

<u>EXEMPLO 2</u>: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = e^{xyz}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$.

NOTA: Se $f \in C^2(A)$, A aberto de $\mathbb{R}^N$, estamos nas condições do Teorema de Schwarz pelo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad \forall x \in A, \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Mais geralmente, se $f \in C^p(A)$, podemos aplicar as considerações da Nota 3 a seguir ao Teorema de Schwarz, com $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_N$.

5.2 Diferencial.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \text{int}(D)$. Diz-se que existe derivada de f em a (ou que f é diferenciável em a) se existir o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c\,;$$

a c chama-se a derivada de f em a e escreve-se $f'(a) = c$.

O quociente da fórmula anterior não faz sentido se $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, com $N > 1$ (nesse caso teríamos $h \in \mathbb{R}^N$ e não podemos dividir por h). Podemos, no entanto, reformular a definição anterior de modo a podermos efectuar a generalização pretendida a funções de várias variáveis. Consideremos a aplicação linear $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda(h) = f'(a)\, h$, $\forall h \in \mathbb{R}$; a equação anterior é equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Podemos, pois, reformular a definição de diferenciabilidade:

Diz-se que $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a ($a \in \text{int}(D)$) se existir uma aplicação linear $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

É esta formulação que vamos generalizar.

Definição 5.2.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e a um ponto interior a D. Diz-se que f é **diferenciável** em a se existir uma aplicação linear $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

*À aplicação linear λ chama-se o **diferencial** de f em a e representa-se por $df(a)$ ou por $f'(a)$.*

Ao valor de $df(a)$ num elemento $h \in \mathbb{R}^N$ chama-se diferencial de f, no ponto a, segundo h.

Se f for diferenciável em todos os pontos de um conjunto $X \subset \text{int}(D)$ podemos definir a aplicação df que, a cada elemento x de X, faz corresponder o elemento $df(x)$ de

$L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^P)$ (espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^P$). Assim:

$$df : X \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^P).$$

NOTA: Tendo em conta a definição de limite, dizer que f é diferenciável em $a \in \text{int}(D)$ é equivalente a dizer que existem $\varepsilon > 0$, uma aplicação linear $df(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e uma função $o : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}^P$ tais que

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$$

e a função o verifica $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

As funções coordenadas de $f(a+h) - f(a) - \lambda(h)$ são $f_i(a+h) - f_i(a) - \lambda_i(h)$, $i = 1, \ldots, P$ em que λ_i é a função coordenada de λ (também linear, portanto). Vimos, quando estudámos os limites, que o limite existe se, e só se, existirem os limites das funções coordenadas pelo que

Teorema 5.2.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e a um ponto interior a D. f é diferenciável em a se, e só se, as funções coordenadas de f forem diferenciáveis em a.*

Dadas duas bases ordenadas, uma em $\mathbb{R}^N$ e outra em $\mathbb{R}^P$, a cada aplicação linear, λ, corresponde uma matriz com P linhas e N colunas e reciprocamente, a cada matriz $P \times N$, corresponde uma aplicação linear, expressa naquelas bases. A coluna i da matriz é formada pelos coeficientes, na base de $\mathbb{R}^P$, da imagem do i-ésimo elemento da base de $\mathbb{R}^N$.

Doravante, consideramos as bases canónicas, isto é, as bases $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_N = (0, 0, \ldots, 1)$ e $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_P = (0, 0, \ldots, 1)$ em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^P$, respectivamente.

Começamos por considerar o caso $P = 1$. Vejamos qual o valor de $df(a)(e_i)$. Visto que $\lim\limits_{t\to 0}(te_i) = 0$, se f é diferenciável em a, então

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{|f(a+te_i) - f(a) - df(a)(te_i)|}{||te_i||} = \lim_{t\to 0} \frac{|f(a+te_i) - f(a) - t\,df(a)(e_i)|}{|t|\;||e_i||} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{|f(a+te_i) - f(a) - t\,df(a)(e_i)|}{|t|} = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+te_i) - f(a) - t\,df(a)(e_i)}{t} \right| \\
&= \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} - df(a)(e_i) \right| = 0
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = df(a)(e_i),$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + t, \ldots, a_N) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N)}{t} = df(a)(e_i),$$

pelo que a matriz que corresponde ao diferencial é

$$\left[\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_N}(a) \end{array}\right]$$

que se chama **gradiente** de f em a.

Se $P > 1$, então

$$\lim_{t\to 0}\frac{||f(a+te_j)-f(a)-df(a)(te_j)||}{||te_j||}=\lim_{t\to 0}\frac{||f(a+te_j)-f(a)-t\,df(a)(e_j)||}{|t|}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}-df(a)(e_j)\right\|=0$$

que é equivalente a

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=df(a)(e_j),$$

o que, como vimos quando estudámos os limites, equivale a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_N)-f_i(a_1,a_2,\ldots,a_j,\ldots,a_N)}{t}$$

$$=df_i(a)(e_j),\quad i=1,\ldots,P.$$

Concluímos assim que a matriz correspondente ao diferencial é

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_P}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_P}{\partial x_N}(a) \end{bmatrix}$$

que se chama **matriz jacobiana** (ou derivada total) de f em a. Observe-se que o gradiente é a matriz jacobiana no caso em que $P = 1$.

A construção que fizemos da matriz jacobiana é apenas baseada na definição de diferencial o que nos permite concluir:

Teorema 5.2.2 *Se f é diferenciável em a, a aplicação linear $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ tal que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)\|}{\|h\|}=0,$$

é única.

Teorema 5.2.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Se f é diferenciável em a, então existem todas as derivadas parciais de primeira ordem de f em a e*

$$df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\,h_N,\quad \forall h\in\mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Vimos atrás que se f é diferenciável em a, existem todas as derivadas parciais de primeira ordem de f em a. Por outro lado, como a matriz associada a $df(a)$ é o gradiente sabe-se, da Álgebra Linear, que a imagem de h por $df(a)$ é o elemento de $\mathbb{R}$ que resulta do produto matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\, h_N. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 1: Vamos verificar que função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$.

Sabemos que se f for diferenciável em $(0,0)$, então

$$df(0,0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, k.$$

Calculemos as derivadas parciais de f em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2}}\right)}{k} = \lim_{k\to 0} k\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{|k|}\right) = 0.$$

f será diferenciável se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

isto é, f é diferenciável se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0.$$

Usando coordenadas polares e tendo em conta que a função seno é limitada, obtemos

$$\lim_{r\to 0} r\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

pelo que f é diferenciável em $(0,0)$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Vamos verificar que a função $f(x,y) = \sqrt{|x\,y|}$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Calculemos as derivadas parciais de f em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

Pela definição, f será diferenciável se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-0\cdot h-0\cdot k}{\|(h,k)\|} = 0$$

isto é, se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|h\,k|}}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|h\,k|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0;$$

se considerarmos os limites direccionais ($k = m\,h$),

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h\cdot mh|}}{\sqrt{h^2+m^2h^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h^2\cdot m|}}{\sqrt{h^2(1+m^2)}} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|\sqrt{|m|}}{|h|\sqrt{1+m^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}}$$

e assim se conclui que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|h\,k|}}{\|(h,k)\|}$$

não existe, isto é, f não é diferenciável em $(0,0)$.

<u>EXEMPLO 3</u>: Seja $L:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^P$ uma aplicação linear. Então L é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^N$ e tem-se: $dL(a) = L,\ \forall a\in\mathbb{R}^N$.

De facto, sejam $a,h\in\mathbb{R}^N$, quaisquer. Então

$$L(a+h) = L(a)+L(h) = L(a)+L(h)+0.$$

Basta ter em conta a Nota que se segue à definição, tomando $o(h)=0$.

Por facilidade de notação, consideramos a seguir, $P = 1$. O caso $P > 1$, reduz-se a este, tomando as funções coordenadas.

Seja, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\phi_i(x) = \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = x_i$.

As funções ϕ_i são lineares de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$, pelo que $d\phi_i = \phi_i$; é usual representar estas aplicações por dx_i, isto é, $dx_i = d\phi_i = \phi_i$. Note-se que, se $h \in \mathbb{R}^N$, $dx_i(h) = h_i$.

Pelo Teorema 5.2.3, sabemos que, se f for diferenciável em $a \in \operatorname{int}(D)$, então

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\, h_N, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N,$$

pelo que

$$\begin{aligned} df(a)(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1(h) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, dx_2(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\, dx_N(h) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\, dx_N\right)(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

isto é,

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\, dx_N.$$

Se f for diferenciável em todos os pontos de $X \subset \operatorname{int}(D)$, podemos escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\, dx_N$$

em que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ é a função que, a cada $x \in X$, faz corresponder $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Teorema 5.2.4 *Se f é diferenciável em a, então é contínua em a.*

Demonstração: Usando a Nota que se segue à definição de função diferenciável, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + o(x-a), \quad \forall x \in B_\varepsilon(a) \subset (D).$$

Como $df(a)$ é linear, é contínua em $\mathbb{R}^N$, pelo que

$$\lim_{x \to a} df(a)(x-a) = \lim_{x-a \to 0} df(a)(x-a) = df(a)(0) = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to a} o(x-a) = \lim_{x-a \to 0} \left(\frac{o(x-a)}{\|x-a\|}\, \|x-a\|\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Concluimos, assim, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. ∎

Tendo em conta a definição e as regras de derivação, facilmente se pode demonstrar (o que nos abstemos de fazer) o seguinte:

Teorema 5.2.5 *Se f e g são diferenciáveis em a então $f+g$ é diferenciável em a e $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.*

Se f e g são funções reais, diferenciáveis em a, então $f\,g$ é diferenciável em a ($d(f\,g)(a) = f(a)\,dg(a) + g(a)\,df(a)$) e, se $g(a) \neq 0$, f/g é diferenciável em a ($d(f/g)(a) = 1/(g(a))^2 \cdot (g(a)\,df(a) - f(a)\,dg(a))$).

Teorema 5.2.6 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $g : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ duas funções tais que $g(E) \subset D$. Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $b = g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e $d(f \circ g)(a) = df(b) \circ dg(a)$.*

Demonstração: Usando a Nota que se segue à definição de função diferenciável, sabemos que existem $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $o_1 : B_{\varepsilon_1}(b) \to \mathbb{R}^P$ e $o_2 : B_{\varepsilon_2}(a) \to \mathbb{R}^N$ tais que

$$f(y) = f(b) + df(b)(y-b) + o_1(y-b), \quad \forall y \in B_{\varepsilon_1}(b)$$

e

$$g(x) = g(a) + dg(a)(x-a) + o_2(x-a), \quad \forall x \in B_{\varepsilon_2}(a).$$

Como g é diferenciável em a, é contínua em a, pelo que existe ε_3 tal que $g(B_{\varepsilon_3}(a)) \subset B_{\varepsilon_1}(b)$. Visto que a expressão anterior continua válida se tomarmos $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$, obtemos, para todo o $x \in B_{\varepsilon_2}(a)$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(a)) + df(b)(g(x)-b) + o_1(g(x)-b) \\ &= f(g(a)) + df(b)(g(x)-g(a)) + o_1(g(x)-g(a)) \\ &= f(g(a)) + df(b)(dg(a)(x-a) + o_2(x-a)) + o_1(dg(a)(x-a) + o_2(x-a)) \end{aligned}$$

Pondo $h = x - a$, a expressão anterior toma a forma

$$(f \circ g)(a+h) = (f \circ g)(a) + (df(b) \circ dg(a))(h) + df(b)(o_2(h)) + o_1(dg(a)(h) + o_2(h))$$

e terminamos a demonstração se provarmos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{df(b)(o_2(h)) + o_1(dg(a)(h) + o_2(h))}{\|h\|} = 0$$

Visto que a aplicação $df(b)$ é linear, é contínua e $df(b)(0) = 0$, pelo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{df(b)(o_2(h))}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} df(b)\left(\frac{o_2(h)}{\|h\|}\right) = 0.$$

Sabemos que

$$\lim_{k \to 0} \frac{o_1(k)}{\|k\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{o_2(h)}{\|h\|} = 0,$$

que pela definição de limite, são equivalentes a

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \quad \|k\| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\|o_1(k)\|}{\|k\|} < \delta$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0: \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \frac{\|o_2(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon,$$

isto é,

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \quad \|k\| < \varepsilon \Rightarrow \|o_1(k)\| < \delta \|k\| \tag{5.1}$$

e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0: \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \|o_2(h)\| < \varepsilon \|h\|. \tag{5.2}$$

Como $dg(a)$ é uma aplicação linear,

$$\exists C_1 > 0: \quad \|dg(a)(h)\| \leq C_1\|h\|$$

Tomando, em (5.2), $\varepsilon < C_1$,

$$\exists \eta > 0: \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \|dg(a)(h) + o_2(h)\| \leq \|dg(a)(h)\| + \|o_2(h)\|$$

$$\leq C_1\|h\| + \varepsilon\|h\| < 2C_1\|h\| = C\|h\| < C\eta.$$

Nesta expressão, podemos tomar $\eta < \dfrac{\varepsilon}{C}$ e obtemos

$$\|h\| < \eta \Rightarrow \|dg(a)(h) + o_2(h)\| < C\|h\| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Sejam $\delta > 0$, qualquer, e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|k\| < \varepsilon \Rightarrow \|o_1(k)\| < \frac{\delta}{C} \|k\|.$$

Para este ε, seja $\eta > 0$ tal que (5.3) se verifica. Então

$$\|h\| < \eta \Rightarrow \|o_1(dg(a)(h) + o_2(h))\| < \frac{\delta}{C} \|dg(a)(h) + o_2(h)\| < \frac{\delta}{C} C \|h\| = \delta \|h\|.$$

Provámos que

$$\forall \delta > 0, \exists \eta > 0: \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \|o_1(dg(a)(h) + o_2(h))\| < \delta \|h\|,$$

isto é,

$$\lim_{h\to 0} \frac{o_1(dg(a)(h) + o_2(h))}{\|h\|} = 0. \quad \blacksquare$$

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $g : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ duas funções tais que $g(E) \subset D$, g diferenciável em a e f diferenciável em $b = g(a)$. Pelo Teorema 5.2.6 a função $h = f \circ g$ é diferenciável em a e $dh(a) = df(b) \circ dg(a)$. Sabemos que a matriz correspondente à composição de duas aplicações lineares é o produto das matrizes correspondentes a cada uma das aplicações. Assim a matriz jacobiana de h em a é o produto das matrizes jacobianas de f em b e de g em a:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_M}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_P}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial h_P}{\partial x_M}(a) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_N}(b \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_P}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_P}{\partial y_N}(b) \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_M}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial x_M}(a) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(b)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(b)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_M}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_P}{\partial y_i}(b)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_P}{\partial y_i}(b)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_M}(a) \end{array}\right]$$

Deduzimos que se $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $g : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ são duas funções tais que $g(E) \subset D$, g diferenciável em a e f diferenciável em $b = g(a)$ então a função $h = f \circ g$ é diferenciável em a e

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial y_r}(b)\, \frac{\partial g_r}{\partial x_j}(a), \quad i = 1, \ldots, P, \quad j = 1, \ldots, M$$

que é conhecida como **regra de derivação da função composta**.

EXEMPLO 1: Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; considerando a função $u(s,t) = F(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ vamos mostrar que

$$t\,\frac{\partial u}{\partial s} + s\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Consideremos a função composta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longrightarrow & (x,y) & \longrightarrow & u = F(x,y) \end{array}$$

com

$$\begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = t^2 - s^2 \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s} = 2s\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2s\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} = -2t\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2t\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Destas últimas igualdades obtemos

$$t\,\frac{\partial u}{\partial s} + s\,\frac{\partial u}{\partial t} = t\,(2s\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2s\,\frac{\partial u}{\partial y}) + s\,(-2t\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2t\,\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$= 2st\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2st\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2st\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2st\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

EXEMPLO 2: Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 - z^2),$$

e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(r, \theta, \phi) = (r\cos(\theta)\cos(\phi), r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\,\mathrm{sen}(\theta)).$$

Como as funções coordenadas de f e g são diferenciáveis, a função $h = f \circ g$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Para facilitar as notações consideramos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta, \phi) & \longrightarrow & (x, y, z) & \longrightarrow & (u, v) = h(r, \theta, \phi) \end{array}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \\ z = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + y^2 + z^2 \\ v = x^2 + y^2 - z^2 \end{array} \right.$$

A matriz jacobiana de f é

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\[2ex] 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

e a matriz jacobiana de g é

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \\[2ex] \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & -r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\[2ex] \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz jacobiana de h é (antes de substituir x, y e z pelos seus valores):

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\[2ex] 2x & 2y & -2z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \\[2ex] \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & -r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\[2ex] \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\frac{\partial h_1}{\partial r} = 2x\ \cos(\theta)\cos(\phi) + 2y\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) + 2z\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= 2r\ \cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + 2r\ \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) + 2r\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$
$$= 2r\ (\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\theta))$$
$$= 2r\ (\cos^2(\theta)\ (\cos^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\phi)) + \mathrm{sen}^2(\theta)) = 2r\ (\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)) = 2r,$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \theta} = -2xr\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) - 2yr\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) + 2zr\ \cos(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos^2(\phi) - 2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) + 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)(\cos^2(\phi) + \ \mathrm{sen}^2(\phi)) + 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \phi} = -2xr\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) + 2yr\cos(\theta)\cos(\phi) + 0$$
$$= -2r^2\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + 2r^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) = 0$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial r} = 2x\ \cos(\theta)\cos(\phi) + 2y\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) - 2z\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= 2r\ \cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + 2r\ \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) - 2r\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$
$$= 2r\ (\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) - \mathrm{sen}^2(\theta))$$
$$= 2r\ (\cos^2(\theta)\ (\cos^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\phi)) - \mathrm{sen}^2(\theta)) = 2r\ (\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)) = 2r\cos(2\theta),$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \theta} = -2xr\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) - 2yr\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) - 2zr\ \cos(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos^2(\phi) - 2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\phi) - 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)(\cos^2(\phi) + \ \mathrm{sen}^2(\phi)) - 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - 2r^2\ \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = -2r^2\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \phi} = -2xr\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) + 2yr\cos(\theta)\cos(\phi) + 0$$
$$= -2r^2\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + 2r^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) = 0$$

A matriz jacobiana de h é pois

$$\begin{bmatrix} 2r & 0 & 0 \\ 2r\cos(2\theta) & -2r^2\,\mathrm{sen}(2\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 5.2.7 (**Princípio de invariância do diferencial**)
Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ e $g : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ duas funções diferenciáveis tais que $g(E) \subset D$. O diferencial de $u = f \circ g$, em ordem às variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_M$, pode obter-se formando em primeiro lugar o diferencial de u em ordem a $y_1, y_2, \ldots, y_N$ e exprimindo em seguida o diferencial de y_i, $i = 1, \ldots, N$, em ordem a $x_1, x_2, \ldots, x_M$.

Demonstração: Consideramos, para simplificar a notação, $P = 1$. O caso $P > 1$ reduz-se a este, tomando as funções coordenadas.

Usando a Regra de Derivação da Função Composta e as notações introduzidas atrás,

$$du = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_k = \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) dx_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial y_i} \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\, dx_k \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial y_i}\, dy_i \;\blacksquare$$

EXEMPLO: Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ duas funções definidas por

$$f(x, y) = x^2 - 2\,x\,y \quad \text{ e } \quad g(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)).$$

A função composta é dada por

$$u(r, \theta) = f(g(r, \theta)) = r^2\cos^2(\theta) - 2r^2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta).$$

Como vimos atrás,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$$

e

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta,$$

pelo que

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x - 2y)dx - 2xdy \\ &= (2x - 2y)(\cos(\theta)dr - r\ \mathrm{sen}(\theta)d\theta) - 2x(\mathrm{sen}(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) \\ &= (2r\cos(\theta) - 2r\ \mathrm{sen}(\theta))(\cos(\theta)dr - r\ \mathrm{sen}(\theta)d\theta) - 2r\cos(\theta)(\mathrm{sen}(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) \\ &= 2r\cos^2(\theta)dr - 2r^2\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)d\theta - 2r\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)dr \\ &\quad + 2r^2\ \mathrm{sen}^2(\theta)d\theta - 2r\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)dr - 2r^2\cos^2(\theta)d\theta \end{aligned}$$

$$= (2r\cos^2(\theta) - 4r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta))dr + (2r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) - 2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - 2r^2\cos^2(\theta))d\theta$$
$$= 2r(\cos^2(\theta) - \,\mathrm{sen}(2\theta))dr + 2r^2(\,\mathrm{sen}^2(\theta) - \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - \cos^2(\theta))d\theta$$
$$= 2r(\cos^2(\theta) - \,\mathrm{sen}(2\theta))dr - 2r^2(\cos(2\theta) + 1/2\,\,\mathrm{sen}(2\theta))d\theta = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta$$

Teorema 5.2.8 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e X um subconjunto aberto de D. Se $f \in C^1(X)$, então f é diferenciável em todos os pontos de X.*

Demonstração: Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset X$. Seja $h \in B_\varepsilon(0)$, isto é, $a + h \in B_\varepsilon(a)$; consideremos, como de costume, a base canónica de $\mathbb{R}^N$: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_N = (0, 0, \ldots, 1)$.

Podemos escrever

$$f(a + h) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_N + h_N) = f(a + h_1e_1 + h_2e_2 + \cdots + h_Ne_N)$$

pelo que

$$f(a + h) - f(a) = f(a + h_1e_1 + h_2e_2 + \cdots + h_Ne_N) - f(a)$$
$$= f(a + h_1e_1 + h_2e_2 + \cdots + h_Ne_N) - f(a + h_2e_2 + \cdots + h_Ne_N)$$
$$+ f(a + h_2e_2 + \cdots + h_Ne_N) - f(a + h_3e_3 + \cdots + h_Ne_N) + \cdots + f(a + h_Ne_N) - f(a).$$

Para cada i ($i = 1, 2, \ldots, N$), consideremos a função

$$\varphi(t) = f(a + t\,h_ie_i + h_{i+1}e_{i+1} + \cdots + h_Ne_N)$$

Se $t \in [-1, 1]$,

$$\|t\,h_ie_i + h_{i+1}e_{i+1} + \cdots + h_Ne_N\| = \sqrt{t^2h_i^2 + h_{i+1}^2 + \cdots + h_N^2}$$
$$\leq \sqrt{h_i^2 + h_{i+1}^2 + \cdots + h_N^2} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_N^2} = \|h\|$$

e concluímos que $(a + t\,h_ie_i + h_{i+1}e_{i+1} + \cdots + h_Ne_N) \in B_\varepsilon(a) \subset X$, pelo que a função φ está bem definida em $[-1, 1]$. Se $t_0 \in]-1, 1[$, pelas definições de derivada e de derivada parcial,

$$\varphi'(t_0) = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t_0 + s) - \varphi(t_0)}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{f(a + (t_0 + s)\,h_ie_i + \cdots + h_Ne_N) - f(a + t_0\,h_ie_i + \cdots + h_Ne_N)}{s}$$
$$= h_i \lim_{s\to 0} \frac{f(a + t_0\,h_ie_i + s\,h_ie_i + \cdots + h_Ne_N) - f(a + t_0\,h_ie_i + \cdots + h_Ne_N)}{h_i\,s}$$
$$= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t_0\,h_ie_i + h_{i+1}e_{i+1} + \cdots + h_Ne_N)$$

(se $h_i = 0$, a igualdade mantém-se porque, nesse caso $\varphi(t_0 + s)$ e $\varphi(t_0)$ têm o mesmo valor e $\varphi'(t_0) = 0$). A função φ tem, pois, derivada em todos os pontos de $]-1, 1[$; do mesmo modo, podemos verificar que φ tem derivada à esquerda em 1 e derivada à direita em -1, pelo que φ é contínua em $[-1,1]$. A função φ está nas condições do Teorema de Lagrange:

$$\exists \eta_i \in]0,1[: \quad \varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\eta_i)$$

isto é

$$\exists \eta_i \in]0,1[: \quad f(a+h_ie_i+h_{i+1}e_{i+1}+\cdots+h_Ne_N)-f(a+h_{i+1}e_{i+1}+\cdots+h_Ne_N)$$

$$=h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\eta_i\,h_ie_i+h_{i+1}e_{i+1}+\cdots+h_Ne_N).$$

Então $\exists \eta_i \in]0,1[,\ i=1,\ldots,N$ tais que

$$f(a+h)-f(a)=h_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\eta_1\,h_1e_1+h_2e_2+\cdots+h_Ne_N)$$

$$+h_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+\eta_2\,h_2e_2+\cdots+h_Ne_N)+\cdots+h_N\,\frac{\partial f}{\partial x_N}(a+\eta_N\,h_Ne_N)$$

$$=h_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+\cdots+h_N\,\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)+$$

$$h_1\,(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\eta_1\,h_1e_1+h_2e_2+\cdots+h_Ne_N)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a))$$

$$+h_2\,(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+\eta_2\,h_2e_2+\cdots+h_Ne_N)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a))$$

$$+\cdots+h_N\,(\frac{\partial f}{\partial x_N}(a+\eta_N\,h_Ne_N)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a))).$$

Para cada i ($i=1,2,\ldots,N$), seja ξ_i a função dada por

$$\xi_i(h)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\eta_i\,h_ie_i+\cdots+h_Ne_N)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Como vimos atrás,

$$f(a+h)-f(a)=h_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+\cdots+h_N\,\frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$$

$$+h_1\,\xi_1(h)+h_2\,\xi_2(h)+\cdots+h_N\xi_N(h).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|h_1\,\xi_1(h)+h_2\,\xi_2(h)+\cdots+h_N\xi_N(h)|$$

$$\le \sqrt{h_1^2+h_2^2+\cdots+h_N^2}\,\sqrt{\xi_1^2(h)+\xi_2^2(h)+\cdots+\xi_N^2(h)}$$

$$=\|h\|\,\sqrt{\xi_1^2(h)+\xi_2^2(h)+\cdots+\xi_N^2(h)},$$

pelo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h_1\,\xi_1(h)+h_2\,\xi_2(h)+\cdots+h_N\xi_N(h)|}{\|h\|}\leq \lim_{h\to 0}\sqrt{\xi_1^2(h)+\xi_2^2(h)+\cdots+\xi_N^2(h)}=0.$$

Note-se que, por hipótese, $f\in C^1(B_\varepsilon(a))$ o que implica que

$$\lim_{h\to 0}\xi_i(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\eta_i\,h_ie_i+\cdots+h_Ne_N)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)=0$$

Provámos, assim, que f é diferenciável em a. ■

5.3 Derivada segundo um vector.

Definição 5.3.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, $a \in int(D)$ e $\vec{u}$ um vector de $\mathbb{R}^N$. Chama-se derivada de f, no ponto a, segundo o vector $\vec{u}$, ao limite (se existir)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\,\vec{u}) - f(a)}{t}.$$

Designa-se esta derivada por $f'_{\vec{u}}(a)$ ou $D_{\vec{u}}f(a)$.

EXEMPLO 1: Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x + 5y^2$ e $\vec{u} = (2, 1)$; então,

$$f'_{\vec{u}}(1, 1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((1, 1) + t(2, 1)) - f(1, 1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + 2t, 1 + t) - f(1, 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2(1 + 2t) + 5(1 + t)^2 - 7}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 + 4t + 5 + 10t + 5t^2 - 7}{t} = \lim_{t \to 0}(14 + 5t) = 14$$

EXEMPLO 2: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathrm{int}(D)$ um ponto tal que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Então, se e_i designa o i-ésimo vector da base canónica,

$$f'_{e_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\,e_i) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_N) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_N)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Concluímos, assim, que a i-ésima derivada parcial de f em a é igual à derivada de f, segundo o vector e_i, em a.

Teorema 5.3.1 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in int(D)$, então f admite derivada segundo qualquer vector, no ponto a, que é dada por*

$$f'_{\vec{u}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\,u_N.$$

Demonstração: Sejam $a \in \mathrm{int}(D)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ dada por $g(t) = a + t\vec{u}$. Consideremos a função $\varphi = f \circ g$; trata-se de uma função real de variável real, que está definida numa vizinhança de 0 (se $B_\varepsilon(a) \subset D$, então φ está definida em $]-\varepsilon, \varepsilon[$). A função φ é diferenciável em 0 por ser a composição da função g, que é diferenciável em 0, com a função f, que é diferenciável em $a = g(0)$. Podemos usar a regra de derivação da função composta:

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,g'_i(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,u_i.$$

Por outro lado,

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(0+t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(g(t))-f(g(0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} = f'_{\vec{u}}(a). \quad \blacksquare$$

NOTA: Podíamos ter enunciado o Teorema do seguinte modo:
Se $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \text{int}(D)$, então f admite derivada segundo qualquer vector $\vec{u}$, no ponto a, que é dada por $f'_{\vec{u}}(a) = \text{grad} f(a) \cdot \vec{u}$, isto é, $f'_{\vec{u}}(a)$ é o produto interno do gradiente de f, em a, por $\vec{u}$.

<u>EXEMPLO 1</u>: Consideremos, como no Exemplo 1 a seguir à definição, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x+5y^2$ e $\vec{u} = (2,1)$; então, $f'_{\vec{u}}(1,1) = (2,10)\cdot(2,1) = 14$.

<u>EXEMPLO 2</u>: Se f não for diferenciável, a fórmula evidenciada no Teorema pode não ser válida. Consideremos, por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq y \\ x+y, & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

Seja $\vec{u} = (1,1)$. Então

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, u_2 = 0\cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Capítulo 6

Exercícios

6.1 Séries Numéricas

1. Determine o termo geral e a soma de cada uma das seguintes séries:

   (a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}+\cdots;$

   (b) $\dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+\dfrac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots;$

   (c) $\dfrac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4\times 5}+\dfrac{1}{3\times 4\times 5\times 6}+\cdots.$

2. Determine a soma das séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)};$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2^n}\right)$, sabendo que $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)-2\operatorname{cotg}(x)$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}};$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-8}{3^n}.$

3. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uma série convergente. Mostre que é divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^3+5n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

4. Indique os valores de x para os quais convergem as seguintes séries e, quando possível, calcule a sua soma:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (|x|-1)^n$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$.

5. Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = 3A - a_1 - 2a_0$.

6. Estude do ponto de vista da convergência as seguintes séries e, em caso de convergência, se esta é absoluta ou condicional:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$.

7. Considere a seguinte série:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

   (a) Estude-a quanto à convergência.

   (b) Qual a soma S_n da série que dá um erro inferior a $\frac{1}{1000}$?

   (c) Indique um majorante do erro que se comete quando se toma para soma da série S_5.

8. Considere a série:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \ .$$

   (a) Verifique que é convergente.

   (b) Calcule a soma com erro inferior a $\frac{1}{1000}$.

9. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ duas séries divergentes e $\alpha \neq 0$ um número real. O que se pode afirmar sobre a natureza das seguintes séries?

   (a) $\sum(a_n + b_n)$ (b) $\sum(a_n b_n)$

   (c) $\sum(\alpha a_n)$ (d) $\sum(a_n + c_n)$

   (e) $\sum(a_n c_n)$ (f) $\sum(\alpha c_n)$

   (g) $\sum(c_n + d_n)$ (h) $\sum(c_n d_n)$

10. Determine a natureza das seguintes séries por um critério de comparação:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}\right)$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt{n^2-1})$

    (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$

    (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)^3\sqrt{n^3+1}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

11. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério da Raiz (ou da Raiz de Cauchy):

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$, k constante

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$

12. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério da Razão ou pelo de D'Alembert:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ (d) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots$

    (e) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots$ (f) $\displaystyle 1 + \frac{2}{3} + \frac{2\times 3}{3\times 5} + \frac{2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7} + \cdots$

13. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério de Raabe:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times n!}{(2n+1)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

14. Usando o Critério do Integral, estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

15. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n^n}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{3^n}}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{3n-1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)\ldots(\pi+n)}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{tg}\left(\frac{e}{n}\right)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} 2^n + \frac{1}{n^2+n}\right)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{n^2 \log(n+1)}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$

(p) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + p^2}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 2}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^n}{n^2 + 1}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n \log n}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\left(1+\frac{1}{\log n}\right)}}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^e \log n$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$

16. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n\pi)|}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n+3} \right)^n$, $a \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n\theta)}{n^{\frac{5}{2}}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log \left| \log \left(\frac{1}{n!} \right) \right|$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!) + n!}{n^n + 2^n}$

(i) $1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4} \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \dfrac{1}{7} + \cdots$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\ \log(4n+1)}{n(n+1)}$

17. Seja $\sum a_n$ uma série convergente. Mostre que a série $\sum b_n$, onde

$$\begin{array}{lcl} b_1 & = & a_1 + a_2 \\ b_2 & = & a_3 + a_4 + a_5 \\ b_3 & = & a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ b_4 & = & a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

também é convergente e as somas coincidem.

18. Para que valores de α são simples ou absolutamente convergentes as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \operatorname{sen}(\alpha))^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

19. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes, $a_n > 0$, $b_n > 0$. Mostre que a série $\sum \sqrt{a_n b_n}$ também converge. (Sugestão: prove que $\dfrac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$).

20. Sabendo que $\sum a_n$ é convergente, $a_n > 0$, e $b_n > 0$, qual a natureza da série $\sum \dfrac{a_n}{1+b_n}$?

21. Sabendo que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes, estude quanto à convergência as seguintes séries:

    (a) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$ sendo $a_n > 0$ e $b_n > 0$.

    (b) $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n}\ a_n$.

22. Seja $\sum a_n$ uma série divergente, $a_n \geq 0$, e seja s_n a soma dos seus n primeiros termos. Mostre que a série
$$\sum (\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n})$$
é divergente.

23. Prove que a série
$$\sum \frac{a_0 n^p + \cdots + a_p}{b_0 n^q + \cdots + b_q}$$
em que $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ são números reais e $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, é convergente se e só se $q - p > 1$.

24. Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a > 0$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}$

       i. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

       ii. Se $\alpha \in \mathbb{Z}^-$.

25. Seja $u_n > 0$ e $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Mostre que $\sum u_n$ é convergente.

26. Seja $u_n > 0$ e $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$. Mostre que $\sum u_n$ é divergente.

27. Estude a natureza da série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n!)}{27^n (n!)^3} \ .$$

28. Considere as séries
$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \ .$$

   (a) Calcule a soma de ordem três do produto de Cauchy das duas séries.

   (b) Estude quanto à convergência a série produto.

6.2 Séries de Funções

1. Mostre que se tem
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
com $|x| < 1$.

2. Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$
define uma função de domínio $\mathbb{R}$ e que a série não é uniformemente convergente num intervalo que contenha o ponto $x = 0$.

3. Prove que a série de funções
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$
converge uniformemente em todo o intervalo limitado, mas que não existe x tal que a série seja absolutamente convergente.

4. Tendo em conta que
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
mostre que
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5. Estude quanto à convergência a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x^n}$$
com $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e mostre que ela é uniformemente convergente no intervalo [2,3].

6. Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=2}^{\infty}(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n-1}})$$
converge pontualmente em [0,1], mas não uniformemente.

7. Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$
converge uniformemente em $\mathbb{R}$, mas que, no entanto, há pontos de $\mathbb{R}$ nos quais a série das derivadas diverge. Prove ainda que
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$
é integrável em [0,1]; exprima
$$\int_0^1 f(x)dx$$
como soma de uma série.

8. Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{2^n}$$
converge em [0,1] e que a função soma é integrável nesse intervalo; exprima o integral dessa função no intervalo [0,1] como soma de uma série.

9. Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$
converge em $\mathbb{R}$ e que a função soma é diferenciável.

10. Considere a função
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$$
sendo $x \in \mathbb{R}_0^+$.
    (a) Prove que f é contínua em [0,1].
    (b) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

11. Estude quanto à convergência uniforme as séries de funções
    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [0,1]$.
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$, $x \in [0,1]$.

12. Estude quanto à convergência as seguintes séries de funções

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{n+2}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)^n (2x+1)^n$.

13. Sejam a, $b \in \mathbb{R}^+$. Determine os valores de x para os quais as seguintes séries são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $a < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$.

14. Escreva o desenvolvimento de MacLaurin para as funções:

(a) $x \longrightarrow a^x$, $a > 0$;

(b) $x \longrightarrow \dfrac{1}{a^2 + x^2}$;

(c) $x \longrightarrow \operatorname{arc\,tg} x$.

15. Sabendo que

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad e \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

escreva as respectivas séries de potências de x.

16. Desenvolva em série de potências de $x + 3$ a função

$$f : x \longrightarrow \frac{2}{4x+5}$$

e determine o raio de convergência da série.

17. Desenvolva em série de potências de $x-3$ a função
$$f : x \longrightarrow \frac{1}{x^2-6x+5}$$
e determine o intervalo de convergência da série obtida.

18. Obtenha por dois processos diferentes a série de MacLaurin da função
$$f(x) = (1+x)^{-2}.$$
Qual o raio de convergência da série?

19. Determine duas séries de potências que representem a função
$$f : x \longrightarrow \frac{1}{2-x}$$
no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Justifique a resposta.

20. Determine a série de Taylor da função
$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$
numa vizinhança de $x = 0$.

21. Desenvolva em série de MacLaurin a função
$$f : x \longrightarrow 2^x + \frac{1}{2+x}$$
e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

22. Desenvolva em série de MacLaurin a função
$$f : x \longrightarrow x \log(1+x^3)$$
e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto $x = 0$.

23. Desenvolva em série de potências de $x-2$ a função
$$f : x \longrightarrow \log(x)$$
e indique um intervalo aberto no qual a função coincide com a soma da série obtida.

24. Desenvolva em série de potências de $x-1$ as funções
$$f : x \longrightarrow \log(3-x) \qquad e \qquad f : x \longrightarrow \frac{1}{x^2}\,.$$
Em cada caso indique o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento representa a função considerada.

25. Seja f a função definida por $f(x) = x^2 \log(x^2)$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Desenvolva f em série de potências de $x-1$ e indique o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento representa a função.

6.3 Normas e métricas

1. (a) Quando se diz que num espaço linear real está definida uma norma?

   (b) Considere o espaço linear real, $\mathcal{P}_3$, dos polinómios reais, $p(x)$, de grau menor ou igual a 3 (com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio). Seja $p(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ um elemento genérico de $\mathcal{P}_3$. Mostre que se define uma norma em $\mathcal{P}_3$ fazendo

   $$\| p(x) \| = \sum_{i=0}^{3} |a_i|.$$

   (c) Em relação à alínea anterior indique qual a métrica induzida pela norma.

2. Suponha definida em $\mathbb{R}$ uma norma p. Mostre que se pode definir em $\mathbb{R}^2$ uma norma q fazendo

   $$q(x,y) = 3p(x) + 5p(y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Considere o conjunto $\mathcal{C}$ das funções reais de uma variável real contínuas no intervalo [0,1]. Mostre que se define uma métrica ρ em $\mathcal{C}$ fazendo

   $$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \qquad f,g \in \mathcal{C}.$$

   Será esta métrica induzida por uma norma? Justifique.

4. Verifique que a função

   $$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se x=y} \end{cases}$$

   definida num espaço vectorial é uma distância, mas que não é possível definir no espaço uma norma $\| \, . \, \|$ tal que $d(x,y) = \| x - y \|$.

5. Considere o espaço linear real, $\mathcal{P}_1$, dos polinómios reais, $p(x)$, de grau menor ou igual a 1 (com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio) e sejam x_1 e x_2, $x_1 \neq x_2$, dois números reais determinados. Mostre que se define uma norma em $\mathcal{P}_1$ fazendo

   $$\| p \| = |p(x_1)| + |p(x_2)|,$$

   $p \in \mathcal{P}_1$.

6. Seja $C^1([0,1])$ o espaço das funções f deriváveis em [0,1] e de derivada f' contínua em [0,1]. Mostre que a aplicação

   $$\| \, . \, \| : C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

definida por

$$\| f \| = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f'(x)|dx$$

é uma norma.

7. Considere o espaço linear real, $\mathcal{P}_2$, dos polinómios reais, $p(x)$, de grau menor ou igual a 2 (com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio). Mostre que se define uma norma em $\mathcal{P}_2$ fazendo

$$\| p \| = \max(|p(0)|, |p(1)|, |p(2)|),$$

$p \in \mathcal{P}_2$.

8. Mostre que fica definida em $\mathbb{R}^3$ uma norma fazendo

$$\| (x_1, x_2, x_3) \| = k \sum_{i=1}^{3} |x_i|$$

sendo $k > 0$ e $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

6.4 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^N$

6.4.1 Domínios e gráficos

1. Determine o domínio, C, da função f definida por
$$f(x,y) = \log\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right) + \sqrt{y-x^2} + \frac{1}{x-y}$$
e dê uma interpretação geométrica de C. Diga, justificando, se C é um conjunto aberto ou fechado. Determine a fronteira e o derivado de C.

2. Considere a função real f de duas variáveis definida por
$$f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2-(y^2+1)x+y^2}.$$
Determine o domínio da função e dê uma interpretação geométrica desse conjunto.

3. Determine o domínio da função f definida por
$$f(x,y) = \log(4-((x-4)^2+(y-3)^2)) + \sqrt{x^2-16}.$$
Mostre que esse conjunto é limitado e indique a sua fronteira.

4. Determine o domínio da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \sqrt{y^2+2xy-3x^2} + \log(-1+x^2+y^2)$$
e dê uma interpretação geométrica desse domínio. Indique a sua fronteira.

5. Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções (dando uma interpretação geométrica):

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x<y \\ 0, & \text{se } x=y \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x>y \end{cases}$

   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-\dfrac{z^2}{9}}$;

   (c) $f(x,y) = \cos(y) + \log(\operatorname{sen}(x))$;

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x=y \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2 \\ 1, & \text{se } 0<y<x^2 \end{cases}$

6. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$;

   (b) $f(x,y) = \log y^2 + \sqrt{1 - x^2}$;

   (c) $f(x,y) = \log(5x - x^2 - 6) + \log(1 - y^2)$;

   (d) $f(x,y) = \log(5x - x^2 - 6)(1 - y^2)$;

   (e) $f(x,y) = \sqrt{(e^y - e^{-y})\cos x}$;

   (f) $f(x,y,z) = xyz + \sqrt{x^2 + xy + 2y - 4}$;

   (g) $f(x,y,z) = \log(1 - z^2) + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

7. Determine os gráficos de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$;

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < y \\ 0, & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x > y \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } \| (x,y) \| \leq 1 \\ 0, & \text{se } \| (x,y) \| > 1 \end{cases}$

8. Considere a função real f de duas variáveis definida por

$$f(x,y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{4 - x^2}.$$

   (a) Indique o domínio da função e dê uma interpretação geométrica desse conjunto.

   (b) Qual o derivado e a aderência do conjunto a que se refere a alínea anterior?

6.4.2 Limites e continuidade

1. Considere a função real f de duas variáveis definida por
$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2}.$$
Mostre que a função não tem limite no ponto $(0,0)$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:
$$(x,y) \longrightarrow \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$$
e mostre que $(0,0)$ é ponto de acumulação do seu domínio. Estude a existência de limite nesse ponto.

3. Determine o gráfico da função f assim definida:
$$f(x,y) = \begin{cases} 5, & \text{se } \| (x,y) \| > 1 \\ -2, & \text{se } \| (x,y) \| \leq 1 \end{cases}$$
Estude a continuidade da função.

4. Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x-y \neq 0 \\ x^2+2y, & \text{se } x-y = 0 \end{cases}$$

5. Estude quanto à continuidade a função $f(x,y)$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^2+4xy+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. Discuta a existência dos seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(b) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

8. Estude as descontinuidades da seguinte função:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2+z^2, & \text{se } x-y+z=0 \\ 0, & \text{se } x-y+z \neq 0 \end{cases}$$

6.4.3 Derivadas parciais e Teorema de Schwarz. Diferenciabilidade

1. Calcule as derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x,y,z) = x^y$;

   (b) $f(x,y,z) = z$;

   (c) $f(x,y) = \text{sen}(x\ \text{sen}(y))$;

   (d) $f(x,y,z) = \text{sen}(x\ \text{sen}(y\ \text{sen}(z)))$;

   (e) $f(x,y,z) = x^{y^z}$;

   (f) $f(x,y,z) = x^{y+z}$;

   (g) $f(x,y,z) = (x+y)^z$;

   (h) $f(x,y) = \text{sen}(xy)$;

   (i) $f(x,y) = (\text{sen}(xy))^{\cos 3}$.

2. Calcule as derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções (onde g(t) é contínua):

   (a) $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{x+y} g(t)\ dt$;

   (b) $f(x,y) = \displaystyle\int_y^{x} g(t)\ dt$;

   (c) $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{xy} g(t)\ dt$.

3. Calcule as derivadas parciais de 1^a ordem de f em função das derivadas de g e h se:

   (a) $f(x,y) = g(x)h(y)$;

   (b) $f(x,y) = (g(x))^{h(x)}$;

   (c) $f(x,y) = g(x)$;

   (d) $f(x,y) = g(y)$;

   (e) $f(x,y) = g(x+y)$.

4. Determine todas as derivadas parciais de 2^a ordem das seguintes funções num ponto genérico do seu domínio:

   (a) $f(x,y) = x^y$;

   (b) $f(x,y,z) = \text{sen}(xyz)$;

(c) $f(x, y, z) = e^{x+y}$;

(d) $f(x, y, z) = xyz$;

5. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação de Laplace se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Mostre que $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ e $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ satisfazem a equação de Laplace.

6. Seja f uma função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$, mas que f não é contínua em $(0, 0)$.

7. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\text{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e mostre que são descontínuas em $(0, 0)$.

(b) Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

8. Considere a função $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

(a) Estude a continuidade em $(0, 0)$.

(b) Prove que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) Prove que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

9. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

10. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $(0,0)$ e tal que $\varphi(0,0) = 0$. Prove que a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)\varphi(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

11. Mostre que a função definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq y^2 \text{ ou } x = y = 0 \\ 1+y, & \text{se } x = y^2 \text{ e } x \neq 0 \end{cases}$$

tem derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é diferenciável nesse ponto.

12. Mostre que a função definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x+y+z, & \text{se } xyz \neq 0 \\ 1, & \text{se } xyz = 0 \end{cases}$$

tem derivadas parciais em $(0,0,0)$, mas não é diferenciável nesse ponto.

13. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existem em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$ e são contínuas excepto em $(0,0)$.

14. Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{se } xy \neq 0 \\ 0, & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Por que razão não tem lugar o Teorema de Schwarz?

6.4.4 Função composta

1. Seja $w = f(u,v)$ com $u = x + at$, $v = y + bt$, a e b constantes. Prove que se f é diferenciável então satisfaz a relação
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}\ .$$

2. Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$ de tal modo que as funções compostas de t
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ g(x,y) &= x^2 + 2bxy + y^2,\ b \neq 0 \end{aligned}$$
tenham derivadas idênticas.

3. Seja F a função $u = F(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$. Mostre que
$$t\frac{\partial u}{\partial s} + s\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ e $F(x,y,z) = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que
$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 3F.$$

5. Prove que se $u = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$, onde
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$
então
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

6. Seja $u(x,t) = \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)\, ds$ em que $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.
   (a) Indique, justificando, o domínio de u.
   (b) Prove que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$

7. Sejam $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$, $y(r,\theta) = r\text{sen}(\theta)$, $F(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ com $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos(\theta).$$

8. Considere a função $u = f(x,y)$ com $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Mostre que:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Aplique esta expressão ao caso em que $f(x,y) = x^2 + e^{x+y}$, $x = t^2$ e $y = e^t$.

Verifique o resultado obtido para $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ calculando-o por outro processo. (Suponha que as derivadas cruzadas são iguais.)

6.4.5 Derivadas direccionais

1. Calcule $D_v f(P_0)$ - derivada direccional de f segundo o vector v no ponto P_0 - sendo:

   (a) $f(x,y) = 2x + 5y^2$, $P_0 = (1,1)$, $v = (2,1)$;

   (b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $P_0 = (1,1)$, $v = (1,2)$;

   (c) $f(x,y,z) = xy + yz + 2x$, $P_0 = (-1,1,7)$, $v = (3,4,-12)$;

   (d) $f(x,y,z) = \cos(xy) + \text{sen}(yz)$, $P_0 = (2,0,-3)$, $v = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

   (e) $f(x,y,z) = z - e^x \text{sen}(y)$, $P_0 = \left(\log 3, \frac{3\pi}{2}, -3\right)$, $v = (x,y,z)$.

2. Considere a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Prove que f tem derivada segundo qualquer vector no ponto $(0,0)$, mas que é uma função descontínua em $(0,0)$. Que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

3. Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy = 0 \\ 1, & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

   (a) Verifique que existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mas que f não é contínua na origem.

   (b) Que se passa quanto às derivadas segundo outros vectores, que não sejam os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, na origem?

4. Considere a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < y \\ 0, & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x > y \end{cases}$$

   Calcule $D_v f(a,a)$ com $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } y \neq x^2 \text{ ou } x = y = 0 \end{cases}$$

   Mostre que para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ existe $D_v f(0,0)$. Será f contínua em $(0,0)$?

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as derivadas segundo dois vectores u e v linearmente independentes são nulas em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. Prove que f é constante em $\mathbb{R}^2$.

6.4.6 Funções vectoriais

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$(x, y) \longrightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y), 3)$$
onde
$$f_1(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$f_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
Estude f quanto à continuidade.

2. Calcule a matriz Jacobiana da função f e $\mathrm{d}f(P_0)(u)$ sendo:
   (a) $f(x, y, z) = (\cos(xy), \operatorname{sen}(xy), xz)$; $P_0 = \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$; $u = (1, -1, 2)$;
   (b) $f(x, y) = (\operatorname{arctg}(xy), x, y)$; $P_0 = (x, y)$; $u = (1, 1)$;
   (c) $f(x, y, z, t) = (x + y + z, e^{xt})$; $P_0 = (0, 0, 0, 0)$; $u = (\sqrt{2}, \pi, \pi^2, \pi^3)$.

3. Estude a diferenciabilidade no ponto $(0, 0)$ da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2, x^2 + y^2)$.

4. Calcule as derivadas parciais da função $f \circ g$ sendo:
   (a) $f(x, y, z) = x^3 + 3xyz$; $g(t, s) = (2t + s, -t - s, t^2 + s^2)$;
   (b) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 - xy}$; $g(t, s) = (\operatorname{sen}(2t), \cos(3t - s))$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x, y) = (\operatorname{sen}(x), \log 2)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Calcule as derivadas parciais de $g \circ f$ em $(0, 2)$ sabendo que
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, y) = 16 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

6. Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ as funções definidas por
$$f(x, y) = (\operatorname{sen}(xy), x - 1)$$
$$g(x, y) = \left(e^{x-y}, \frac{xy}{4}\right).$$
Calcule a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(-2, -2)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x, y) = (1 + xy, e^{x-y})$. Sabendo que $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, que $g(0, y) = (y, 0)\ \forall y \in \mathbb{R}$ e que
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, -1) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, -1) = (1, 1)$$
calcule a matriz jacobiana de $f \circ g$ em $(0, -1)$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Sendo $g(x, y, z) = \big(f(x^2) + f(x^2 + y^2), (f(xyz))^2\big)$ e $h(x, y) = e^{8-x^3+y^3}$ prove que $h \circ g$ é diferenciável em $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

Bibliografia

[1] APOSTOL, T. - Calculus, Blaisdell, 1967.

[2] CAMPOS FERREIRA, J. - Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

[3] ELLIS, R.; GULLICK, D. - Calculus with Analytic Geometry, 5ª edição, Saunders College Publishing, 1994.

[4] FIGUEIRA, M. - Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática, vol. 5, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1996.

[5] HUNT, R. - Calculus, 2ª edição, Harper Collins, 1994.

[6] LARSON, R.; HOSTETLER, R.; EDWARDS, B. - Calculus with Analytic Geometry, 5ª edição, Heath, 1994.

[7] SANTOS GUERREIRO, J. - Curso de Análise Matemática, Livraria Escolar Editora, 1989.

[8] SARRICO, C. - Análise Matemática, Leituras e Exercícios, Gradiva, 1997.

[9] SPIVAK, M. - Calculus, World Student Series Edition, 1967.

[10] STEWART, J. - Calculus, 3ª edição, Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

[11] SWOKOWSKI, E. W. - Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1, 2ª edição, Makron Books, McGraw-Hill, 1994.

[12] TAYLOR, A.; MANN, R. - Advanced Calculus, 2ª edição, Xerox College Publishing, 1972.

Índice Remissivo