Ficha 3

Limite e continuidade de funções de várias variáveis

1. Mostre que o *limite* seguinte não existe

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}.$$

2. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{x^2y+y^2}{x^2+y^2}.$$

   (a) Mostre que as funções dadas não têm limite quando $(x,y) \to (0,0)$.

   (b) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f+g)(x,y)$.

3. Calcule o *limite* seguinte caso existe

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right)}{x^2+y^2}$;

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (1+\sin(xy))^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

4. Seja

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{sempre que} \quad x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0.$$

   Mostre que

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right) = 0,$$

   mas que $f(x,y)$ não tem limite quando $(x,y) \to (0,0)$ (**Sugestão**: examine f ao longo da recta $y=x$).

5. Seja
$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0.\end{cases}$$
Calcule, caso existam, os *limites iterados* de f em $(0,0)$. Mostre que $f(x,y)\to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$. Que conclusão pode tirar daqui?

6. Estude o comportamento da aplicação $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,
$$f(x,y)=\left(\frac{x^2y-2xy-xy^2+y^2+y}{x^2-2x+y^2+1},\frac{y-xy}{x^2-2x+y^2+1}\right)$$
quando $(x,y)\to(1,0)$.

7. Mostre que a função $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $p_i(\mathbf{x})=x_i$, para $i=1,2,...,n$, chamada *i-ésima função coordenada*, é contínua em qualquer ponto $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$.

8. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+2y}{x^2-2y} & \text{se } x^2-2y\neq 0;\\ 0 & \text{se } x^2-2y=0.\end{cases}$$
Diga, justificando, se f é *contínua* ou não na origem.

9. Escreva $g(f(x,y))$ em termos de x e y, determine o domínio da função composta resultante e verifique onde é contínua.

   (a) $f(x,y)=xe^y$, $g(t)=3t^2+t+1$;
   (b) $f(x,y)=y-4x^2$, $g(t)=\sin\sqrt{t}$.

10. Determine o conjunto onde que a função (aplicação) dada é contínua:

    (a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\frac{xy}{1-x^2-y^2},\frac{x}{\sqrt{y^2-x}}\right)$;
    (b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=\left(\ln(x^2+y^2+z^2-4),\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}\right)$;
    (c) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=f(g(x,y))$, sendo $g(x,y)=x^2-y^2$ e $f(t)=\frac{t^2-4}{t}$;
    (d) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=f(g(x,y))$, sendo $g(x,y)=3x+2y-4$ e $f(t)=\ln(t+5)$.

11. Em cada uma das alíneas que se segue diga, justificando, se f é *prolongável por continuidade* ao ponto $(0,0)$. No caso afirmativo, diga qual é o valor que se deve atribuir a $f(0,0)$ para que tal aconteça.

(a) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

(b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

(c) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^4+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;

(d) $f(x,y) = \frac{2x+3y}{x-y}$, se $x \neq y$;

(e) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, se $(x,y) \neq (0,0)$.