Resumo de Análise Matemática II

Polinómio de Taylor, Série de Taylor e Resto de Lagrange

$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$ (polinómio de Taylor em torno do ponto zero)

$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f(a)$ (polinómio de Taylor em torno de um elemento genérico a)

$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n(x))$ (Resto de Lagrange de n-ésima ordem)

R_n tem que satisfazer a condição de $\lim_{x \to a} \frac{R_n}{(x-a)^n} = 0$ o que de facto acontece

Enunciado para aplicação do Polinómio de Taylor e resto de Lagrange
Se f é $(n+1)$ vezes diferenciável e, $v_\epsilon(a)$
$\forall\ x \in V_\epsilon(a) \setminus \{a\} \exists\ c$ entre a e x
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

A generalização para a série de Taylor passa-se quando a função é indefinidamente diferenciável, i.e., $f \in C^\infty$

Se f é diferenciável em a
O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em a sse
$\exists\ V_\epsilon(a), \forall\ x \in V_\epsilon(a), f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em a sse
$\exists\ V_\epsilon(a), \forall\ x \in V_\epsilon(a), f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)$

O Ponto de inflexão existe quando na vizinhança do ponto $(a, f(a))$, passa-se
na semivizinhança esquerda de a a concavidade é voltada para cima (ou para baixo)
na semivizinhança direita de a a concavidade é voltada para baixo (ou para cima)

Nota: Se, em particualr, na Série ou Polinómio de Taylor, $a = 0$, a série e o polinómio passam a ter a designação de Mac-Laurin

Fórmulas definidas por série de Taylor

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$
$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^k + \ldots \binom{n}{n} x^n \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^k + \ldots + x^n\end{aligned}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \ldots$$
Série binomial $\quad |x| < 1$

Integrabilidade

d - decomposição de um inetrvalo em intervalos mais pequenos

S_d - soma superior da área formada no gráfico da função pela decomposição d

s_d - soma inferior da área formada no gráfico da função pela decomposição d

Teorema:
Se $d' \supset d$ então $s_d \leq s_{d'} \leq S_{d'} \leq S_d$

Teorema:
Se d_1, d_2 são duas decomposições do mesmo intervalo então $s_{d_1} \leq S_{d_2}$

Teorema:
f limitado em $[a, b]$
f é integrável em $[a, b]$ sse $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ d\ S_d - s_d < \epsilon$

Teorema:
f limitado em $[a, b]$
f é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = \alpha$ sse $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ d\ s_d, S_d \in V_\epsilon(\alpha)$

Teorema:
Toda a função monótona em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$

Teorema:
Toda a função continua em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$

Teorema:
Se f é integrável em $[a, b]$ e αf é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$

Nota: A alteração da função num número finito de pontos não altera o integral de uma função, em particula, o integral de uma função é igual quer ela esteja definidaem $[a,b]$ quer em $]a,b[$ (mas desde que a função seja limitada)

Nota: A integrabilidade só é válida para funções limitadas

Nota: $\mathcal{R}([a,b])$ designa espaço de Riemann no intervalo $[a,b]$ que é o espaço das funções integráveis

Teoremas de Integrabilidade

1. Linearidade Se $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) e \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
2. . Se $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $f \leq g$ então $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$
3. . Se $f in \mathcal{R}([a,b])$ então $|f| \in \mathbb{R}([a,b])$ e $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
4. . Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $J \subset [a,b]$ é um intervalo então f é integrável em J
5. . $a < c < b$. Se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ então f é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
6. Teorema do valo intermédio Se f é integrável em $[a;b]$ existe $\lambda \in [m,M]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = \lambda(b-a)$

   $$\lambda = \frac{\int_a^b f}{b-a} \quad a < b \left(A = \lambda(b-a) \quad \lambda = \frac{A}{b-a} \right)$$

   Nota: m - infimo (mínimo) da função; M - supremo (máximo) da função

Notas sobre as propriedades dos integrais

$[a,b] \;\; a < b \;\; a, c, b$

$a = c < b$

$$\int_a^b f = \int_a^a f + \int_a^b f \Rightarrow \int_a^a f = 0$$

$a = b < c$

$$0 = \int_a^a f == \int_a^c f + \int_c^a f \Rightarrow \int_b^a f = -\int_a^b f$$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \quad -\int_b^a f \leq -\int_b^a g \Leftrightarrow \int_b^a f \geq \int_b^a g$$

$a \leq b$

$$\left|\int_b^a f\right| \leq -\int_b^a |f|$$

Integral definido:
$\int_a^b f(x)dx$

Integral indefinido:
f continua em $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \ni x \overset{\phi_a}{\mapsto} \int_a^x f \in \mathbb{R} \leftarrow$ integral indefinido de f

Integral indefinido de f com origem no ponto a
$\phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\phi_a(x) = \int_a^x f$

I intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se localmente integrável em I sse f é integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em I ($\mathcal{R}_{loc}(I)$)

Teorema:
φ_a é continua em I

Teorema: (fundamental da Análise ou do Cálculo
Se $f \in \mathcal{R}_{loc}(I)$ é continua em $c \in I$ etão φ_a é diferenciavel em c e $\varphi_a'(c) = f(c)$

Teorema: (Regra de Barrow)
(Nas mesmas condições que no Teorema fundamental da Análise) $\int_a^b f(x)dx = \varphi_c(b) - \varphi_c(a)$ onde φ_c é uma primitiva de $f(x)$

Notação: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Teorema:(Integração por partes)
Se $u, v \in C^1([a,b])$ então $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(X)v'(x)dx$

Teorema:(Integração por substituição)
Hipótese: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua em $[a,b]$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ (J intervalo), $\varphi(J) \supset [a,b]$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$, $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$
Tese: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Teorema:
Se $f \in C^1([a,b])$ então o gráfico de f é rectificável e so seu comprimentos é dado por $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

Continuidade de f
$\forall\ x \in \mathbb{D} \forall\ \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \forall y \in \mathbb{D}, |x - y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

Continuidade uniforme de f
$\forall\ \delta > 0\ \exists\ \epsilon > 0\ \forall\ x \in \mathbb{D}\ \forall\ y \in \mathbb{D}, |x - y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

Teorema: (de Heine - Cantor)
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então f é continua em $[a, b]$ sse é uniformemente contínua em $[a, b]$

Convergência pontual
$f_n \xrightarrow{p} f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{D}\ \lim f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{D}\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \epsilon > 0\ \forall\ n > p f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$
Convergência uniforme
$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall B_\epsilon(f) \exists\ p\ \forall\ n < p\ f_n \in B_\epsilon(f) \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ p\ \forall\ n < p\ \forall x \in \mathbb{D}\ f - \epsilon < f_n < f + \epsilon$

Nota: Tanto a continuidade como a diferenciabilidade e a integrabilidade dão-se mal com a convergência pontual

Teorema:
Se $f_n \xrightarrow{u} f$, f_n é continua em $\mathbb{D}$ então f é continua em $\mathbb{D}$

Teorema:
Hipótese: $f_n f : [a, b] \to \mathbb{R}, f_n \xrightarrow{u} f, f_n$ são integráveis em $[a, b]$
Tese: f é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f\ \&\ \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_u f_n$

Definição: Uma sucessão diz-se convergente à Cauchy sse $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ p\ \forall\ m, n > p\ ||x_n - x_m|| < \epsilon$
Nota: Nem sempre toda a sucessão de Cauchy é convergente!!

Definição: E espaço vectorial normado é completo (ou de Banach) sse toda a suceesão de Cauchy converge
Definição: $B(\mathbb{D})$ é o epsaço das funções limitadas

Teorema:
$B(\mathbb{D})$ é um espaço de Banach

Nota: A norma usual no espaço fas funções limitadas é $||f|| = \sup_{x \in \mathbb{D}} |f(x)|$

Teorema:
Hipótese: $f_n \in C^1(I)$ (I intervalo aberto), $f, q : I \to \mathbb{R}, f_n \xrightarrow{p}, f_n' \xrightarrow{u} g$
Tese: $f \in C^1(I)$, $f' = g$ e $D \lim f_n = \lim D f_n$

Teorema:
Hipótese: $f_n \in C^1(I)(I$ intervalo aberto$)$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{p} f, f_n' \xrightarrow{u} g$
Tese: $f \in C^1(I)$ e $f' = g$

Teoremas:(das séries de funções)

1. f_n são continuas
   $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente
   então a soma da série é uma função continua
2. f_n são integráveis em $[a,b]$
   $\sum f_n$ converge uniformemente
   então a soma da série é uma função integrável em $[a,b]$ e
   $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$
3. $\sum f_n \xrightarrow{u} f, \sum f_n' \to g \Rightarrow f' = g$

Teorema (de Weierstrass)
Sejam E um espaço de Banach, x_n uma sucessão de termos em E e a_n uma sucessão de números rais não negativos.
Suponhamos ainda que
$||x_n|| \leq a_n, \forall\ n$
Se $\sum a_n$ converge então $\sum x_n$ converge em E

Teorema: (de Abel)
Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em α e β (com $\alpha < \beta$) então converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$

Análise em $\mathbb{R}^N$
Relembrando Álgebra Linear...

Produto interno: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N$
Desiguladade de Cauchy Schwartz: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$ em que $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Propriedades(das normas)(Axiomas)

1. $||x|| = 0$ sse $x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$x \perp y$ sse $\langle x, y\rangle = 0$

Desigualdades usuais: $|x_i| \leq ||x|| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|$

Teorema:
$x_n \to a$ sse para todo o $i \in \{1, \ldots, N\}$, $x_{n,i}$ converge para a_i

Defnição:X é limitado sse $\exists\ R > 0\ X \subset B_R(0) \Leftrightarrow \exists\ R > 0\ \forall\ x \in X\ ||x|| < R$

Propiedades das sucessões em $\mathbb{R}^N$
$u_n \to a, v_n \to b, \alpha_n \to \alpha(u_n, v_n \in \mathbb{R}^N, \alpha_n \in \mathbb{R})$

- $u_n + v_n \to a + b$
- $u_n - v_n \to a - b$
- $\alpha_n u_n \to \alpha a$
- $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle a, b\rangle$
- $||u_n|| \to ||a||$

Propriedades do produto interno

1. $\langle 0, 0\rangle = 0$ e se $x \neq 0, \langle x, x\rangle > 0$
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

Teorema: (de Bolzano-Cauchy)
Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes

Teorema:
u_n é de Cauchy sse u_n é convergente (pois $\mathbb{R}^N$ é um espaço de Banach)

Noções topológicas
$X \subset \mathbb{R}^N$
(int$X$) a é ponto interior de X sse $\exists\ r > 0 R_r(a) \subset X$
(ext$X$) a é ponto exterior de X sse $\exists\ r < 0 B_r(a) \subset X^C$
(fr$X$ (ou) ∂X) a é ponto fronteiro de X sse não é ponto interior nem exterior
$\forall\ r > 0 B_r(a) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(a) \cap X^C \neq \emptyset$
$\overline{X} = \text{int } X \cup \partial X$ onde $\overline{X}$ designa o fecho de X

X é aberto sse $X = \text{int } X$ ($X \subset \text{int}X$)
X é fechado sse $X = \overline{X}$ ($\overline{X} \subset X$) sse $\partial X \subset X$

Observações...
...sobre os abertos

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ são abertos
2. A intersecção finita de abertos é um aberto
3. A união deconjuntos abertos é aberta

...sobre os fechados

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ são fechados
2. A reunião finita de fechados é fechada
3. A itersecção de fechados é fechada

Teorema:
$a \in \overline{X}$ sse existe uma sucessão de tremos em X convergernte para a

Teorema:
X é fechado sse X contem o limite de todas as sucessões de termos nele, convergentes

Teorema:
X é limitado e fechado sse toda a suces sao de termos em X tem uma sucessão converegnte para um ponto de X

Um conjunto X diz-se compacto sse toda a sucesão de termos em X tem uma subsuceesão convergente para um ponto de X

Definição: Um conjunto diz-se conexo se não for desconexo
Definição: Um conjunto X diz-se desconexo sse $X = A \cup B$ onde A e B são conjuntos separados e onde se passa: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \overline{A} \cap B = \emptyset, A \cap \overline{B} = \emptyset$

Teorema:
$X \subset \mathbb{R}$ é conexo sse X é um intervalo

Continuidade em $\mathbb{R}^N$
Definição: f é continua em a sse $\forall\ \delta > 0\ \exists\ \epsilon 0\ \forall\ z \in \mathbb{D}\ x \in B_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in B_\delta(f(a))$ sse $\forall\ \delta > 0\ \exists\ \epsilon 0\ \forall\ z \in \mathbb{D}\ ||x - a|| < \epsilon \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \delta$

Teorema:
$f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é continua em $a \in \mathbb{D}$ sse todas as suas funções coordenadas são continuas em a

Definição: f é contínua à Heine em $a \in \mathbb{D}$ sse para toda a sucessão x_n de termos em $\mathbb{D}$ convergente para a se tem $f(x_n) \to f(a)$

Teorema:
f é contínua à Cauchy em a sse f é contínua à Heine em a

$f, g : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
f, g continua em a

- $f + g$ é contínua em a
- $f.g$ é contínua em a
- $\frac{f}{g}$ é continua em a $(g(a) \neq 0)$

Teorema:
Se f é continua em a e g é continua em $b = f(A)$, então $g \circ f$ é contínua em a

Teorema: (de Weierstrass)
Se $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é continua em $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}$ é limitado e fechado, então $f(\mathbb{D})$ é limitado e fechado

Corolário: (Teorema de Weierstrass)
$M = 1, \mathbb{D} \neq \emptyset$, $f(\mathbb{D})$ tem máximo e mínimo

Teorema:
Se $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é continua em $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}$ é conexo, então $f(\mathbb{D})$ é conexo

$X \subset \mathbb{R}^N$ é conexo por arcos sse para cada par de pontos de X, existe uma curva continua que os una e totalmente continua em X

Teorema:
Se $X \subset \mathbb{R}^N$ é conexo por arcos então é conexo

Teorema: (de Heine-Cantor)
Se $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é continua em $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}$ é limitado e fechado então f é uniformemente continua em $\mathbb{D}$

Definição: (de limite) $f(x) \to b$ quando $x \to b$ sse $\forall\ \delta > 0\ \exists\ \epsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{D}\ x \in B_\epsilon(a) \Rightarrow F(x) \in B_\delta(b) \Leftrightarrow ||x - a|| < \epsilon \Rightarrow ||f(x) - b|| < \delta$

Diferenciabilidade:
Derivadas pariciais

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}$ - derivada segundo a coordenada x no ponto (a_1,a_2)

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)=\lim_{k\to 0}\dfrac{f(a_1,a_2+k)-f(a_1,a_2)}{k}$ - derivada segundo a coordenada y no ponto (a_1,a_2)

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{\varphi_v(t)-\varphi_v(0)}{t}=\varphi'(0)$ - derivada segundo o vector v no ponto a

Definição: f é diferenciável sse existir uma aplicação linear

$L_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^M$

tal que $\begin{cases} f(x)=f(a)+L_a(x-a)+||x-a||\varphi(x) \\ \varphi(a)=0 \text{ e } \varphi \text{ continua em } a\end{cases}$

em que a aplicação L_a é representada matricialmente pela matriz $M_a=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}\end{bmatrix}_{x=a}$ dita jacobiana

Teorema:
Se f é diferNciável em a então f é continua em a

Teorema: f é diferenciável em a sse todas as suas funções coordenadas forem diferenciáveis em a

Nota: Nas derivada segundo um vector $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)=L_a(v)=M_a.v$

$M=1$
f e g são diferenciáveis em a

- $f\pm g$ é diferenciável em a e $(f\pm g)'(a)=f'a)\pm g'(a)$
- $f.g$ é diferenciável em a e $(f.g)'a)=g(a)f'(a)+f(a)g'(a)$
- $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e $(g(a)\neq 0)$ $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

Teorema (da derivação da função composta)
Se f é diferenciável em a e a é diferenciável em $b=f(A)$ então $g\circ f)'(a)=g'(b)\circ f'(a)$

Nota: $M_a^{g\circ f}=M_b^g M_a^f$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_N}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_P}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_P}{x_N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_M}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_P}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_P}{y_M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_N}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_M}{x_N}\end{bmatrix}$$

$\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial z_1}{\partial y_M}\partial y_M \partial x_1$
$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}=\frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial z_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial y_M}\frac{\partial y_M}{\partial x_j}$

Teorema:
Se $f \in C^1(\Omega)$ então f é diferente em Ω

Teorema:
Se $f \in C^1(\Omega)$ (Ω aberto de $\mathbb{R}^N$) então f é diferenciável em Ω

Teorema (de Schwartz – versão fraca)
Se $f \in C^2(\Omega)$ então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Teorema (de Schwartz)
Se existirem numa vizinhança de (a, b) as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ for continua em (a, b) então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ab)$

Nota: $D_v^n f(a)=\left(v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\ldots+v_n \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right)^{(n)}$

Nota: $f(a+v)=f(a)+f_v'(a)+\frac{1}{2} f_v''(a+\theta v)$ – fórmula de taylor com resto de Lagrange

Nota: $w=\frac{v}{||v||}, f(a+v)=f(a)+||v|| f_w'(a)+\frac{||v||^2}{2} f_w''(a+\theta v)$

Estudo dos extremos
f tem $a \in \mathbb{D}$ um máximo local (ou $f(a)$ é máximo local) sse $\forall\ \epsilon>0\ \forall\ x \in B_{\epsilon(a)} \cap \mathbb{D}\ f(x) \leq f(a)$
f tem $a \in \mathbb{D}$ um minimo local (ou $f(a)$ é mínimo local) sse $\forall\ \epsilon>0\ \forall\ x \in B_{\epsilon(a)} \cap \mathbb{D}\ f(x) \geq f(a)$

f tem em a um extremo local se $\forall\ v \neq 0\ \frac{\partial f}{\partial v}(a)=0 \Leftrightarrow \forall\ i \in\{1, \ldots, N\}\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$

Forma quadrática $Q(x)=\sum_{i, j} a_{i j} x_i x_j=x^t A x$ onde A é a matriz Hessiana, i.e., a amtriz das segundas derivadas parciais

A forma quadrática é definida positiva quando para todo o x ela vem maior que 0 (e aqui a função tem um mínimo)
A forma quadrática é definida negativa quando para todo o x ela vem menor que 0 (e aqui a função tem um máximo)
A forma quadrática é definida indefinida quando para alum x ela vem maior que 0 e para algum x ela vem menor que 0 (a função não tem extremo)

Nota: A Matriz hessiana pode ser transformada na matriz dos seus valores próprios (pois A é simétrica e toda a matriz simétrica é diagonalizável) sendo o estudo do "sinal"(positiva, negativa ou indefinida) confinado ao estudo do sinal dos valores próprios (todos positivos, todos negativos ou variados)

Nota: Para $M = 2$, a partir de uma matriz Hessiana $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ e sendo $\Delta = \lambda_1\lambda_2$ o detreminante da matriz podem-se fazre as seguintes observações:
Se $\Delta < 0$, não há extremos
Se $\Delta > 0$ e $A > 0$, há um mínimo local
Se $\Delta > 0$ e $A < 0$, há um máximo local

Anexo: (Primitivação)
A Primitivação é linear: $P(af + bg) = aP(f) + bP(g)$

1. Primitivação imediata

$\psi(x)$	$P\psi(x)$
$\frac{u'}{u}$	$\log\lvert u\rvert$
$(\alpha \neq -1)u^{\alpha}.u'$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'.\operatorname{sen} u$	$\cos u$
$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$
$e^u.u'$	e^u
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$
$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{arcsen} u$
$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\operatorname{tg} u$
$-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$	$\operatorname{cotg} u$
$f'(u)u'$	$f(u)$

2. Funções racionais $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ onde grau $N(x) <$ grau de $D(x) =$ n (se não for realiza-se primeiro a operação divisão de polinómios e aplica-se o método ao resto sobre o $D(x)$)

   Estas dividem-se em três casos

   (a) $D(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$
   $$f(x) = \frac{N(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$
   $$P\left(\frac{N(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\right) = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta|$$

(b) $D(x) = (x-\alpha)^2$

$f(x) = \dfrac{N(x)}{(x-\alpha)^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{(x-\alpha)^2}$

$P\left(\dfrac{N(x)}{(x-\alpha)^2}\right) = A \log|x-\alpha| - \dfrac{B}{x-\alpha}$

(c) $D(x)$ possui raizes complexas da forma $p \pm iq - D(x) = (x-p)^2 + q^2$

$f(x) = \dfrac{N(x)}{(x-p)^2+q^2} = \dfrac{Bx+C}{(x-p)^2+q^2} = B\dfrac{x-p}{(x-p)^2+q^2} + \dfrac{\frac{C}{B}-p}{(x-p)^2+q^2}$

$P\left(\dfrac{N(x)}{(x-p)^2+q^2}\right) = \dfrac{B}{2}\log|(x-p)^2+q| + q^{-1}(\dfrac{C}{B}-p)\text{arctg}\,(\sqrt{q^{-1}}.(x-p))$

Caso geral

$D(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ldots[(x-p_1)^2+q_1^2]^{m_1}[(x-p_2)^2+q_2^2]^{m_2}\ldots$

$\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \dfrac{A_{n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}}$ + (Analogamente para todas as raizes reais)+

$+\dfrac{B_1x+C_1}{(x-p_1)^2+q_1^2} + \ldots + \dfrac{B_{m_1}x+C_{m_1}}{[(x-p_1)+q_1^2]^{m_1}}$ + (Analogamente para todas as raizes complexas)

3. Método de primitivação por partes

$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+v'(x)u(x) \Leftrightarrow u(x)v(x)+P(u'(x)v(x))+P(u(x)v'(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(u(x)v'(x) = u(x)v(x) - P(u'(x)v(x))$

4. Substituição de variável

$f(x) \xrightarrow{P_x} F(x) \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x=u(t)} f(u(t))u'(t) \xrightarrow{P_t} F(u(t)) \xrightarrow{t=u^{-1}(x)} F(x)$

5. Combinação de todas elas

$P(\sqrt{Ax^2+Bx+C})$

a) $A > 0, \sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{A}x + t$

b) $C > 0, \sqrt{Ax^2+Bx+C} = xt + \sqrt{C}$

c) $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0 \wedge A\beta^2 + B\beta + C = 0, \alpha \neq \beta$
$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = (x-\alpha)t \vee \sqrt{Ax^2+Bx+C} = (x-\beta)t$

Nota: A substituição geral que se faz quando se tem uma expressão do tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ é $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ onde $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$