

NOTAS ANÁLISE MATEMÁTICA I

**Clara Grácio
Telma Santos
Sara Fernandes
Fátima Pereira
Graça Carita**

Outubro 2010

Introdução

O presente texto, ainda em fase de redacção, pretende servir de apoio ao estudo de Análise Matemática I, disciplina semestral leccionada nas licenciaturas de Bioquímica, Ciências Físicas, Ciências Terra e da Atmosfera, Engenharia Civil, Engenharia Energias Renováveis, Engenharia Geológica, Engenharia Mecatrónica, Engenharia Informática, Engenharia Química, Engenharia de Recursos Hídricos, Física e Química. Esta publicação está em permanente construção e inclui toda a matéria desta disciplina, sem atender, de modo tão estrito, às limitações de tempo inerentes às aulas para que estas folhas foram escritas. Surge como complemento da actividade desenvolvida por uma equipa de docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Évora que nos últimos anos tem leccionado esta disciplina. Procura-se dar uma apresentação, dos diversos assuntos que, por um lado, tire partido da natureza geométrica de muitos conceitos que os torna mais intuitivos e, por outro, introduza os temas com o rigor necessário para que possa servir de base a estudos mais aprofundados.

Outubro 2010

Índice

1	Sucessões	5
1.1	Definição de Sucessão	5
1.2	Limite de uma sucessão, sucessões convergentes	10
1.2.1	Introdução histórica	10
1.2.2	Definição de limite	11
1.3	Sucessões limitadas	15
1.4	Sucessões monótonas	16
1.5	Subsucessões	18
1.6	Propriedades dos limites	20
1.7	Limites infinitos	24
1.8	Sucessões de Cauchy	30
1.9	Exercícios propostos	32
1.9.1	Soluções exercícios	36
2	Séries Numéricas	39
2.1	Introdução	39
2.2	Definição, natureza e exemplos de séries	40
2.3	Algumas propriedades de séries	47
2.4	Séries de termos não negativos	51
2.5	Séries de termos sem sinal fixo	65
2.6	Convergência absoluta	67
2.7	Exercícios propostos	71
2.7.1	Soluções dos exercícios	75
3	Funções reais de variável real	77
3.1	Generalidades	78
3.2	Exemplos importantes	82
3.2.1	Funções polinomiais	82
3.2.2	Funções racionais	83
3.2.3	Funções exponencial e logarítmica	85
3.2.4	Funções trigonométricas e as suas inversas	86
3.2.5	Funções hiperbólicas	90
3.3	Definição de limite	91
3.3.1	Limites infinitos	97
3.3.2	Limites Relativos e Laterais	99
3.4	Funções contínuas num ponto	100

3.4.1	Prolongamento por continuidade	102
3.5	Propriedades globais das funções contínuas	103
3.6	Exercícios propostos	111
3.6.1	Soluções dos exercícios	115
4	Cálculo diferencial	117
4.1	Introdução	117
4.2	Funções diferenciáveis	117
4.3	Teoremas fundamentais	131
4.3.1	Levantamento de indeterminações em limites de funções diferenciáveis, utilizando a regra de Cauchy	140
4.4	Derivadas de ordem superior à primeira.	144
4.5	Aplicações da fórmula de Taylor.	155
4.5.1	Máximos, mínimos, sentido da concavidade e pontos de inflexão duma função	155
4.6	Exercícios Propostos	162
4.7	Soluções dos exercícios	167
5	Cálculo integral em \mathbb{R}	171
5.1	Primitivação	172
5.1.1	Introdução	172
5.1.2	Primitivas imediatas	175
5.1.3	Primitivação por partes	178
5.1.4	Primitivação por mudança de variável (ou substituição)	179
5.1.5	Primitivação de funções racionais	181
5.1.6	Exercícios Propostos (1ª Parte)	189
5.1.7	Soluções dos exercícios	195
5.2	Integração	202
5.2.1	Introdução	202
5.2.2	Definições	202
5.2.3	Teoremas fundamentais	209
5.2.4	Integrais impróprios	209
5.2.5	Aplicações	209
5.2.6	Exercícios Propostos (2ª Parte)	210