Índice

Capítulo 1

Funções de várias variáveis

Antes de começar com o estudo das funções propriamente ditas vamos recordar alguns conceitos de Álgebra Linear (Secção 1.1), introduzir o conceito de vizinhança e a partir deste outras noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ (Secção 1.2). Estas duas primeiras secções não são só fundamentais para o estudo das funções mas como para toda a Análise Matemática II.

1.1 O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

Sendo n um número natural, o conjunto

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R},$$

ou seja, o produto cartesiano de n factores iguais a $\mathbb{R}$, é constituido por todos os elementos da forma $(x_1, x_2, ..., x_n)$, onde cada x_i, com $i = 1, 2, , ..., n$, é um número real. Representamos os elementos de $\mathbb{R}^n$ por uma única letra, a negrito, por exemplo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ dizemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ sse $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, , ..., n$. Assim, cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ determina, de forma unívoca, cada uma das suas coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ (designadas, respectivamente, por 1^a, 2^a, ..., n-ésima coordenada de $\mathbf{x}$).

Seguindo a notação usual, quando $n = 2$ ou $n = 3$, usaremos, na maioria das vezes, (x, y) e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3), respectivamente.

Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, e α um número real, definimos a soma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e o produto $\alpha\mathbf{x}$ por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ quando munido destas operações, é um *espaço vectorial real.* Os elementos de $\mathbb{R}^n$ chamam-se *pontos* ou *vectores* e os números reais chamam-se *escalares.* O elemento com as n coordenadas iguais a zero, $\mathbf{0} = (0, 0, ...0)$, chama-se *zero* de $\mathbb{R}^n$ ou *vector nulo.* Geometricamente, considerar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, como um vector significa pensar na seta que tem origem no ponto $\mathbf{0}$ e extremidade no ponto $\mathbf{x}$.

O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n, sendo a sua *base canónica* dada por $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$, onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$. Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n.$$

No caso $n = 2$ ou $n = 3$ denotamos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respectivamente.

Introduzimos agora uma outra operação de "multiplicação".

Produto interno. Norma

Definição 1.1 *Sendo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, *chama-se* produto interno *(ou* produto escalar*) de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$, *e denota-se por* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, *o número real*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

As propriedades principais do produto interno são:

Proposição 1.2 *Sejam* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então tem-se*

I1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;

I2) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ *e* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;

I3) $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle$;

I4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ *e* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *sse* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demonstração: Exercício.

Com base na noção de produto interno introduzimos um outro conceito, fundamental em tudo o que segue - a norma de um vector em $\mathbb{R}^n$ - e que generaliza a noção de módulo de um número real.

Definição 1.3 *Sendo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *chamamos* norma euclideana *de* $\mathbf{x}$, *e designamos pelo símbolo* $\|\mathbf{x}\|_n$, *o número real*

$$\|\mathbf{x}\|_n = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Observação 1.4 *Quando não houver perigo de confusão em relação ao conjunto a que pertence o vector* $\mathbf{x}$ *pode-se escrever, simplesmente,* $\|\mathbf{x}\|$ *em vez de* $\|\mathbf{x}\|_n$.

Proposição 1.5 *Sejam* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então tem-se*

N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;

N2) $\|\mathbf{x}\| = 0$ *sse* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

N3) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$;

N4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(*desigualdade triangular*).*

Demonstração: Ver [5, p. 4].

Observação 1.6 *É possível definir outras normas em $\mathbb{R}^n$ com as propriedades acabadas de referir como, por exemplo, a* norma da soma *e a* norma do máximo*, definidas, respectivamente, por*

$$\|\mathbf{x}\|_+ = |x_1| + ... + |x_n| \qquad e \qquad \|\mathbf{x}\|_M = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}.$$

Temos a seguinte relação

$$\|\mathbf{x}\|_M \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_+ \tag{1.1}$$

qualquer que seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (justifique!).

Nestes apontamentos iremos usar apenas a norma euclideana, à qual chamaremos simplesmente *norma*.

A norma verifica também as seguintes propriedades, sendo a segunda uma consequência imediata da desigualdade triangular.

Proposição 1.7 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Então tem-se*

(i) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ *(*desigualdade de Cauchy-Schwarz*);*

(ii) $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Demonstração: Ver [5, p. 4].

Definição 1.8 *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dois vectores não nulos. O número $\theta \in [0, \pi]$ definido por*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

diz-se o ângulo entre os vectores $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*.*

Observação 1.9 *Assim, o produto interno entre dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, pode ser interpretado geometricamente da seguinte forma*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta,$$

sendo $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo entre os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Definição 1.10 *Diz-se que os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ são* ortogonais *(ou* perpendiculares*), e escreve-se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.*

Distância

Definição 1.11 *Sejam* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *pontos de* $\mathbb{R}^n$*. A* distância euclideana *(ou simplesmente* distância*) entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*, denotada* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*, é dada por*

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Observação 1.12 *Tendo em conta a definição de norma de um vector, a distância entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *é dada por*

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Proposição 1.13 *Sejam* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$*. Então tem-se*

D1) $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *(desigualdade triangular);*

D2) $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

D3) $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ *e* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *sse* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$*.*

Demonstração: Exercício.

Observação 1.14 *Assim, a norma de um vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *é a distância de* $\mathbf{x}$ *à origem.*

Em $\mathbb{R}^3$ podemos definir mais dois produtos entre vectores, nomeadamente, o produro externo e o produto misto.

Produto externo

Definição 1.15 *O* produto externo *(também chamado* produto vectorial*) de dois vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$*, denotado* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$*, é um vector* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

(i) $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *e* $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 0$ *(isto é,* $\mathbf{z}$ *é ortogonal a* $\mathbf{x}$ *e a* $\mathbf{y}$*);*

(ii) $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$*, onde* $\theta \in [0, \pi]$ *é o ângulo entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*;*

(iii) um observador colocado na posição terminal do vector $\mathbf{z}$ *observa a rotação mais curta de* $\mathbf{x}$ *para* $\mathbf{y}$ *no sentido contrário dos ponteiros do relógio.*

Exemplo 1.16 *Em particular, temos* $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$*,* $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$*,* $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

O produto externo goza das seguintes propriedades.

Proposição 1.17 *Sejam* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$*. Então tem-se*

E1) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ *(anti-simetria);*

E2) para cada $\mathbf{y}$ *fixo a função* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *é linear;*

E3) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *sse* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *são* colineares *(isto é,* $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *para alguns* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *não nulos simultaneamente);*

E4) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ *é igual à área do paralelogramo que tem como lados os vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*;*

E5) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}$.

Demonstração: Ver, por exemplo, [4, p. 217].

Na prática, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ o vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ pode obter-se calculando o seguinte determinante (simbólico):

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ou seja,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{k}.$$

Não se trata de um verdadeiro determinante porque na primeira linha temos vectores e não números.

Exemplo 1.18 *Consideremos os vectores* $\mathbf{x} = (-1, 1, 2)\,, \mathbf{y} = (0, -1, 2)\,, \mathbf{z} = (2, -1, -3) \in \mathbb{R}^3$*. Temos*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Exercício 1.19 *Para os mesmos vectores do exemplo anterior determine* $\mathbf{x} \times \mathbf{z}$*,* $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ *e* $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$*.*

Produto misto

Definição 1.20 *O* produto misto *de três vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$*, denotado por* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$ *é o escalar* $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$*.*

Proposição 1.21 *M1) Se colocamos os vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *numa sucessão da forma*

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...$$

então o produto misto de quaisquer três elementos consecutivos dá o mesmo valor. Em particular, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle$*. Por outro lado, se trocarmos a ordem de dois vectores quaisquer então o produto misto muda o sinal. Em particular,* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle$*.*

M2) As aplicações $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$*,* $\mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$*,* $\mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$ *são lineares.*

M3) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = 0$ *sse* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *são linearmente dependentes, isto é pertencem ao mesmo plano. Em particular,* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = 0$ *se dois dos vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *coincidem.*

Demonstração: Exercício.

Proposição 1.22 *O produto misto dos vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *é dado por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Exercício.

Exemplo 1.23 *Nas condições do Exemplo 1.18 e utilizando a Proposição 1.21 temos*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle (4, 2, 1), (2, -1, -3) \rangle = 3,$$

o que também pode ser obtido calculando directamente o determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

Observação 1.24 *Do ponto de vista geométrico, o módulo do produto misto representa o volume do paralelipipedo construído sobre os vectores considerados.*

Formas quadráticas

Definição 1.25 *Uma aplicação* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *é uma* aplicação bilinear *quando verifica as condições seguintes, para quaisquer* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^m$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}')$;

(ii) $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}' + \mathbf{y}') = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$;

(iii) $f(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}') = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Em particular, quando $n = m$ *e* $p = 1$ *a aplicação linear* f *toma o nome de* forma bilinear.

Proposição 1.26 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear e* A *a matriz* $n \times n$ *cujos elementos são* $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, *com* $i, j = 1, ..., n$. *A forma bilinear* f *fica completamente determinada pela matriz* A, *uma vez que, para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *quaisquer, se tem*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{y},$$

onde $\mathbf{x}^T$ *é a transposta da matriz coluna formada pelas coordenadas do vector* $\mathbf{x}$.

Reciprocamente, dada uma matriz B *qualquer, de ordem* n, *existe uma e uma só forma bilinear* $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b_{ij}$, *para quaisquer* $i, j = 1, ..., n$.

Definição 1.27 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear. A* forma quadrática *associada a* f *é a aplicação* $Q_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por* $Q_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Observação 1.28 *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* n, *tendo em conta a Proposição 1.26, podemos dizer que a forma quadrática associada a* A *é a função* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

Todas as formas quadráticas podem ser expressas em termos de matrizes simétricas[1].

Proposição 1.29 *Se A é uma matriz $n \times n$, X é uma matriz $n \times 1$ e B é a parte simétrica de A, $B = \left(A + A^T\right)/2$, tem-se $X^T AX = X^T BX$.*

Demonstração:
Como $X^T AX$ é escalar, tem-se $X^T AX = \left(X^T AX\right)^T = X^T A^T X$. Portanto,

$$X^T AX = \frac{X^T AX + X^T A^T X}{2} = X^T \frac{\left(A + A^T\right)}{2} X = X^T BX.$$

■

Definição 1.30 *Diz-se que uma forma quadrática Q, ou uma matriz simétrica que lhe esteja associada, é*

(i) definida positiva *se* $Q(\mathbf{x}) > 0$ *para* $\mathbf{x} \neq 0$;

(ii) definida negativa *se* $Q(\mathbf{x}) < 0$ *para* $\mathbf{x} \neq 0$;

(iii) semidefinida positiva *se* $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ *para todo* $\mathbf{x}$;

(iv) semidefinida negativa *se* $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ *para todo* $\mathbf{x}$;

(v) indefinida *se existem pontos onde Q é positiva e pontos onde Q é negativa.*

Definição 1.31 *Os* valores próprios *de uma matriz A de ordem n são as soluções da equação* $\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$, *sendo* $I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ *a* matriz identidade de ordem n.

Proposição 1.32 *Sejam A uma matriz simétrica real $n \times n$ e $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a A. Tem-se*

(i) Q é definida positiva sse todos os valores próprios de A são positivos;

(ii) Q é definida negativa sse todos os valores próprios de A são negativos;

(iii) Q é semidefinida positiva sse todos os valores próprios de A são ≥ 0;

(iv) Q é semidefinida negativa sse todos os valores próprios de A são ≤ 0;

(v) Q é indefinida sse A tem valores próprios positivos e valores próprios negativos.

Demonstração: Ver [4, p. 296].

Na prática há uma forma mais simples de classificar uma forma bilinear, de acordo com a proposição seguinte:

[1] Uma matriz quadrada diz-se *simétrica* quando é igual á sua transposta.

Proposição 1.33 (Critério de Silvestre) *Sejam $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática associada a uma matriz simétrica A de ordem n. Consideremos os números seguintes (designados por* menores principais *de A):*

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots , \quad \Delta_n = |A| .$$

A forma Q é:

(i) definida positiva sse $\Delta_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$;

(ii) definida negativa sse $(-1)^k \Delta_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$;

(iii) semidefinida positiva sse $\Delta_k \geq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$;

(iv) semidefinida negativa sse $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Demonstração: Ver [4, p. 296].

Como é óbvio, em qualquer outro caso a forma quadrática é indefinida.

Exemplos 1.34 *(1) A forma quadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $q(x, y) = x^2 + xy + y^2$ é definida positiva. De facto, está associada à matriz simétrica*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

e tem-se $\Delta_1 = |a_{11}| = 1 > 0$ e $\Delta_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$.

(2) A forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2$ é definida negativa. A matriz simétrica que lhe está associada é

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\Delta_1 = |a_{11}| = -2 < 0$ e $\Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0$

(3) Enquanto que a forma quadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x, y) = x^2 + y^2 - z^2 - 3xz + xy + 4yz$ é indefinida. A matriz simétrica associada a q é

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e tem-se

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \Delta_3 = -10.$$

Exercício 1.35 *Classifique as formas quadráticas seguintes*

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = 6x^2 + 8xy + 4y^2 + 3z^2 + 4yz$;

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 5y^2$;

(iii) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $q(x,y,z) = -2x^2 - 2xy + 4xz + 2yz - 2y^2 - 2z^2$.

Recorrendo à noção de norma (tal como no caso de $\mathbb{R}$ recorremos à de módulo) ou, se preferirmos, à de distância, podemos agora introduzir vários conceitos fundamentais para o estudo do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

A teoria da derivação no caso unidimensional trata com funções definidas em intervalos abertos. Para generalizar esta teoria a $\mathbb{R}^n$, vamos considerar generalizações de intervalos abertos chamados *conjuntos abertos*, para isso precisamos da noção de bola aberta em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.36 *Sejam* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\varepsilon > 0$. *O conjunto de todos os pontos* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ *chama-se* bola aberta *de raio* ε *e centro* $\mathbf{a}$ *e representa-se por* $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ *ou* $B(\mathbf{a};\varepsilon)$.

Em $\mathbb{R}$ é, simplesmente, o intervalo aberto centrado em a e de raio ε (também conhecido por vizinhança de a de raio ε): $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Em $\mathbb{R}^2$ é o círculo "aberto" de centro $\mathbf{a}$ e raio ε, isto é, o conjunto de todos os pontos do plano cuja a distância ao ponto $\mathbf{a}$ é menor do que ε.

Na definição de alguns conceitos fundamentais da Análise em $\mathbb{R}^n$, como por exemplo o de limite, as "bolas" acabadas de definir desempenham naturalmente o papel que coube às "vizinhanças", no caso de $\mathbb{R}$ (ver Secção 1.4). Mas convém deixar bem claro que, em $\mathbb{R}^n$, o termo *vizinhança* é usado num sentido muito mais geral do que acabámos de referir (ver Definição 1.48).

Vamos agora definir mais algumas noções importantes, chamadas *noções topológicas* por se exprimirem através do conceito de bola aberta.

Definição 1.37 *Sejam* $S \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

(i) *Diz-se que* $\mathbf{a}$ *é* ponto interior *de* S *se existe uma bola aberta com centro em* $\mathbf{a}$, *cujos pontos pertencem todos a* S, *i.e., se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset S$.

O conjunto de todos os pontos interiores de S *diz-se o* interior *de* S *e representa-se por* $\operatorname{int} S$.

(ii) *Diz-se que* $\mathbf{a}$ *é* ponto de fronteiro *a* S *se para qualquer* $\varepsilon > 0$ *se tem* $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap S \neq \emptyset$ *e* $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap (\mathbb{R}^n \backslash S) \neq \emptyset$.

O conjunto de todos os pontos fronteiros de S *chama-se* fronteira *de* S *e representa-se por* $\operatorname{fr} S$ *ou* ∂S.

(iii) *Diz-se que* $\mathbf{a}$ *é* ponto aderente *a* S *se qualquer bola aberta centrada em* $\mathbf{a}$ *intersecta* S, *ou seja, se para qualquer* $\varepsilon > 0$ *se tem* $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap S \neq \emptyset$.

O conjunto de todos os pontos aderentes a S *chama-se* aderência *ou* fecho *de* S, *e representa-se por* $\overline{S}$.

Observação 1.38 *Chama-se* complementar de S *ao conjunto* $\mathbb{R}^n \backslash S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin S\}$.

Definição 1.39 *Seja* $S \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Diz-se que S *é* aberto *se* $S = \operatorname{int} S$.

(ii) Diz-se que S *é* fechado *se* $S = \overline{S}$.

Proposição 1.40 *A bola aberta* $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ *é um conjunto aberto* ($\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$).

Demonstração: Seja $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$, logo $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, o que implica que existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \varepsilon - \delta$. Então $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$. De facto, se $\mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{y})$ tem-se $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < \delta$, logo

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon,$$

isto é, $\mathbf{z} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$. Donde $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset \operatorname{int} B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$. ■

Proposição 1.41 *A* bola fechada $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \varepsilon\}$ *é um conjunto fechado* ($\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$).

Todas as propriedades dos conjuntos abertos, fechados são válidas também no espaço $\mathbb{R}^n$. Em particular, para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tem-se

1. A é aberto sse $\mathbb{R}^n \backslash A$ é fechado;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
3. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

Exemplos 1.42 *(1) Em* $\mathbb{R}$ *o exemplo mais simples de um conjunto aberto é um intervalo aberto.*

Um intervalo fechado $[a, b]$ *não é um conjunto aberto porque para nenhum dos pontos extremos do intervalo existe uma bola inteiramente contida no intervalo dado.*

(2) A bola $B_1(\mathbf{0})$ *em* $\mathbb{R}^2$ *centrada na origem e raio* 1 *é um exemplo de um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$. *Todo o ponto* $\mathbf{a} \in B_1(\mathbf{0})$ *é o centro de um círculo contido em* $B_1(\mathbf{0})$, *embora para os pontos próximos da fronteira o raio desse círculo seja muito pequeno.*

(3) Em $\mathbb{R}^2$ *podem-se construir conjuntos abertos através do produto cartesiano de conjuntos abertos de* $\mathbb{R}$, *como se pode ver no seguinte resultado.*

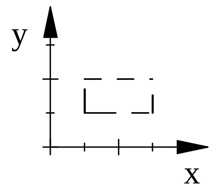
Proposição 1.43 *Sejam* A_1 *e* A_2 *subconjuntos abertos (resp. fechados) de* $\mathbb{R}$. *O seu* produto cartesiano*:*

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}$$

é um conjunto aberto (fechado).

Demonstração:

Demonstremos apenas no o caso em que A_1 e A_2 são intervalos abertos. O produto cartesiano de dois intervalos abertos é um rectângulo aberto:



Para demonstrar que $A_1 \times A_2$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, escolhemos $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ qualquer e mostremos que $\mathbf{a}$ é ponto interior de $A_1 \times A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos em $\mathbb{R}$ existe uma bola aberta $B(a_1; \varepsilon_1)$ contida em A_1 e uma bola aberta $B(a_2; \varepsilon_2)$ contida em A_2. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Prova-se que $B(\mathbf{a}; \varepsilon) \subseteq A_1 \times A_2$. De facto, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ é um ponto qualquer de $B(\mathbf{a}; \varepsilon)$ então $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, pelo que $\|x_1 - a_1\| < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e $\|x_2 - a_2\| < \varepsilon \leq \varepsilon_2$. Logo $x_1 \in B(a_1; \varepsilon_1)$ e $x_2 \in B(a_2; \varepsilon_2)$. Deste modo $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$, pelo que $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$. Isto mostra que cada ponto de $B(\mathbf{a}; \varepsilon)$ está em $A_1 \times A_2$. Por conseguinte todo o ponto de $A_1 \times A_2$ é ponto interior, pelo que $A_1 \times A_2$ é aberto. ■

Observação 1.44 *Note que, na demonstração anterior, as bolas $B(a_1; \varepsilon_1)$ e $B(a_2; \varepsilon_2)$ estão em $\mathbb{R}$ e a bola $B(\mathbf{a}; \varepsilon)$ está em $\mathbb{R}^2$.*

Observação 1.45 *Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ não é um conjunto aberto quando visto como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, pois não contém nenhuma bola de $\mathbb{R}^2$.*

Mas se $A \subset \mathbb{R}$ é fechado então A visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é fechado (em $\mathbb{R}^2$). Pois o conjunto correspondente a A em $\mathbb{R}^2$ é $A \times \{0\}$ que, pela Proposição 1.43, é fechado.

Observação 1.46 *Em $\mathbb{R}^n$ os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são simultaneamente abertos e fechados.*

Proposição 1.47 *(i) A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

(ii) A reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(iii) A reunião de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(iv) A intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Demonstração: Ver [1].

Definição 1.48 *Diz-se que um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma* vizinhança *de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V \supset B_\varepsilon(\mathbf{a})$ (isto é, V contém $\mathbf{a}$ e uma uma bola aberta centrada em $\mathbf{a}$). Se V é um conjunto aberto diz-se que V é uma* vizinhança aberta*.*

Definição 1.49 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Diz-se que* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *é* ponto de acumulação *de* S *se qualquer bola aberta centrada em* $\mathbf{a}$ *tem pelo menos um ponto de* S *distinto de* $\mathbf{a}$*, isto é, para qualquer* $\varepsilon > 0$ *tem-se* $S \cap (B_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}) \neq \emptyset$.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de S *chama-se* derivado *de* S *e representa-se por* S'.

(ii) *Um ponto* $\mathbf{a} \in S$ *que não seja ponto de acumulação diz-se* ponto isolado *de* S*, isto é,* $\mathbf{a}$ *é ponto isolado de* S *se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap S = \{\mathbf{a}\}$.

Observação 1.50 *Da definição anterior resulta que um ponto isolado de* S *pertence a* S *e que um ponto de acumulação de* S *pode não pertencer a* S.

Observação 1.51 *Para ver a diferença entre* S' *e* $\overline{S}$ *consideremos, por exemplo,* $S = [0,1[\cup\{2\}$. *Temos* $\overline{S} = [0,1] \cup \{2\}$ *e* $S' = [0,1]$ *e o ponto* 2 *é um ponto isolado de* S.

Observação 1.52 *Seja* $S \subset \mathbb{R}^n$. *As afirmações seguintes são consequência das definições anteriores:*

(i) $\operatorname{fr} S = \operatorname{fr}(\mathbb{R}^n \backslash S)$;

(ii) $\operatorname{int} S \subset S$, *e* $S \subset \overline{S}$;

(iii) $\overline{S} = \operatorname{int} S \cup \operatorname{fr} S = S \cup \operatorname{fr} S = S \cup S'$.

Exemplo 1.53 *Se* S *é a bola* $B_1(\mathbf{0})$ *em* $\mathbb{R}^2$ *temos* $\operatorname{int} S = S$, $\mathbb{R}^n \backslash S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| > 1\right\}$, $\operatorname{fr} S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$, $\overline{S} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\right\}$.

O conjunto $S_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \varepsilon\}$ *é a fronteira das bolas* $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ *e* $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{a})$ *e chama-se* esfera.

Observação 1.54 *Note que, em geral,* $\operatorname{int} S \neq \operatorname{int} \overline{S}$. *Para verificar esta afirmação considere, por exemplo, o conjunto* $S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\right\}$. *De facto, tem-se* $\operatorname{int} S = \emptyset$ *e* $\operatorname{int} \overline{S} = \operatorname{int}\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$

Exercício 1.55 *Considere o conjunto* $S \subset \mathbb{R}^2$ *dado por* $S = B_1(\mathbf{0}) \cup \{(2,2)\}$.

a) Determine $\operatorname{int} S$, $\overline{S}$, S'.

b) Diga, justificando, se S *é aberto e/ou fechado.*

c) Verifique se $\overline{\operatorname{int} S} = \overline{S}$.

Definição 1.56 *Um conjunto* $S \subset \mathbb{R}^n$ *diz-se* limitado *se existe um número real* $L > 0$ *tal que para qualquer* $\mathbf{x} \in S$ *se tenha* $\|\mathbf{x}\| \leq L$.

Exemplo 1.57 *O conjunto* $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \geq 0\right\}$ *não é limitado. (Justifique!)*

Definição 1.58 *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *tais que* $A \subset B$. *Diz-se que* A *é* denso *em* B *se* $B \subset \overline{A}$.

Exemplo 1.59 *O conjunto* $\mathbb{Q}^n := \{(r_1, ..., r_n) : r_i \in \mathbb{Q},\ i = 1, ..., n\}$ *é denso em* $\mathbb{R}^n$.

Conjuntos conexos. Curvas

Definição 1.60 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se* topologicamente conexo *se não existem dois conjuntos abertos (ou fechados) disjuntos A e B (em $\mathbb{R}^n$) tais que $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ e $X \subset A \cup B$.*

Na Análise usa-se também outro conceito de conexidade, mas para o apresentar precisamos primeiro de introduzir o conceito de curva.

Definição 1.61 *Um* caminho *em $\mathbb{R}^n$ definido num intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é uma função contínua $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.*

Observação 1.62 *Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, o caminho $r : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, definido por $r(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ chama-se o* caminho rectilíneo *que liga $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.*

Exemplo 1.63 *O caminho rectilíneo que liga $(1,2,3)$ a $(2,2,1)$ é $r : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dado por*

$$r(t) = (1,2,3) + t(1,0,-2) = (1+t, 2, 3-2t).$$

Definição 1.64 *Uma* curva *C é a imagem de um caminho. Isto é, existem um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tais que $C = r([a,b])$.*

Se $r(a) = r(b)$ a curva diz-se fechada.

Observação 1.65 *Por vezes confunde-se a curva com o caminho (que é sua parametrização). Mas uma mesma curva pode ser percorrida utilizando diferentes caminhos ou parametrizações, por exemplo*

$$\begin{array}{ccc} r_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 & \text{e} & r_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (t,t) & & t \to (1-t, 1-t) \end{array}$$

definem a mesma curva:

$$r_1([0,1]) = r_2([0,1]) = \{(x,x) : x \in [0,1]\}.$$

Definição 1.66 *O caminho $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se:*

(i) regular *se for de classe $\mathcal{C}^1$ e $r'(t) \neq \mathbf{0}$ para qualquer $t \in]a,b[$;*

(ii) seccionalmente regular *se existe uma partição finita do intervalo $[a,b]$ tal que r é regular em cada um dos seus subintervalos.*

Exemplo 1.67 *A função $r : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = (t, |t|)$ é contínua em $[-1,1]$ logo é um caminho em $\mathbb{R}^2$. A derivada existe, é contínua e diferente de $\mathbf{0}$ para qualquer $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$, logo trata-se de um caminho regular em $[-1,0]$ e $[0,1]$, ou seja, seccionalmente regular em $[-1,1]$.*

Definição 1.68 *Dois caminhos* $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *e* $\widetilde{r} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *dizem-se* equivalentes *se existe uma aplicação bijectiva continuamente diferenciável* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *tal que* $\varphi'(t) \neq 0$ *para qualquer* $t \in \,]c,d[$ *e* $\widetilde{r}(t) = r \circ \varphi(t)$ *para qualquer* $t \in [c,d]$.

Se $\varphi'(t) > 0$ *diz-se que* r *e* $\widetilde{r}$ *têm o* mesmo sentido*; se* $\varphi'(t) < 0$ *diz-se que* r *e* $\widetilde{r}$ *têm* sentidos opostos*; no primeiro caso diz-se que a função* φ preserva o sentido*, e no segundo caso que* inverte o sentido.

Observação 1.69 *Note que quaisquer dois caminhos equivalentes definem a mesma curva.*

Exemplo 1.70 *A elipse* $4x^2 + 9y^2 = 36$ *percorrida no sentido anti-horário é parametrizada por*

$$r(t) = (3\cos t, 2\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

A parametrização

$$r_1(t) = (3\cos(2t), 2\sin(2t)), \qquad t \in [0, \pi]$$

também descreve a mesma elipse. De facto, $r_1(t) = r(\varphi(t))$ *onde* $\varphi : [0,\pi] \to [0, 2\pi]$ *é dada por* $\varphi(t) = 2t$.

Já a parametrização

$$r_2(t) = (3\cos(2t), 2\sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

percorre a elipse duas vezes, mas não é equivalente a r *nem a* r_1*. Neste caso dizemos que* r_2 *é um caminho com multiplicidade* 2.

Definição 1.71 *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *diz-se* conexo por arcos *(ou apenas* conexo*) se para cada par de pontos* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ *existe um caminho* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $r(t) \in X$ *para qualquer* $t \in [\alpha, \beta]$*,* $r(\alpha) = \mathbf{x}$ *e* $r(\beta) = \mathbf{y}$.

Proposição 1.72 *Se* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é conexo por arcos então* X *é topologicamente conexo.*

O exemplo seguinte mostra que o contrário não é verdade

Exemplo 1.73 *Consideremos o conjunto*

$$X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

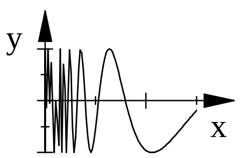


gráfico da função $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$

Claro que X *é topologicamente conexo porque* $(0,0)$ *é ponto de acumulação de* X*, mas não é simplesmente conexo porque não se pode ligar nenhum ponto da forma* $\left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$ *à origem por uma curva verificando as condições da Definição 1.71.*

Definição 1.74 *Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ diz-se* convexo *se dados dois pontos em S o segmento que os une também está em S.*

Nota 1.75 *Todo o conjunto convexo é conexo. Mas nem todo o conexo é convexo.*

Todos estes conceitos topológicos podem ser caracterizados em termos de sucessões, tal como em $\mathbb{R}$.

1.3 Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.76 *Uma* sucessão *em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $m \in \mathbb{N}$ associa o ponto $f(m)$ denotado por $\mathbf{x}^m = (x_1^m, ..., x_n^m) \in \mathbb{R}^n$, e chamado* m-ésimo termo *da sucessão. Em vez de f escrevemos $\{\mathbf{x}^m\}$ para denotar a sucessão. Se $\{k_m\}$ é uma sucessão de números naturais tal $m_1 > m_2$ implica $k_{m_1} > k_{m_2}$ (i.e., a ordem de k coincide com a ordem dos indices m) então a sucessão $\left\{\mathbf{x}^{k_m}\right\}$ chama-se* subsucessão *de $\{\mathbf{x}^m\}$.*

Definição 1.77 *Diz-se que a sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$* converge *para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e escreve-se $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$ quando $m \to \infty$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $m^* \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $m \geq m^*$ se tem $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$.*

Observação 1.78 *Da definição anterior é imediato que $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$ quando $m \to \infty$ é equivalente a $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\| \to 0$, quando $m \to \infty$. Isto reduz a convergência em $\mathbb{R}^n$ à convergência de números reais ≥ 0.*

Exemplo 1.79 *A sucessão em $\mathbb{R}^3$ com termo geral*

$$\mathbf{x}^m = \left(\frac{m^2-1}{m^2}, 0, \frac{1}{3^m}\right)$$

converge para o vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$. Para mostrar basta ter em conta que

$$\|\mathbf{x}^m - \mathbf{e}_1\| = \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{3^{2m}}} \to 0 \quad \text{quando } m \to \infty.$$

Observação 1.80 *Naturalmente, quando a sucessão $\{\mathbf{x}^m\}$ é convergente, chamamos* limite *de $\{\mathbf{x}^m\}$ ao único (Provar!) vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$, e escrevermos $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^m = \mathbf{x}$.*

O limite de qualquer subsucessão $\left\{\mathbf{x}^{k_m}\right\}$ da sucessão $\{\mathbf{x}^m\}$ chama-se sublimite *da sucessão $\{\mathbf{x}^m\}$. Ao contrário do limite de uma sucessão, o sublimite não é necessariamente único.*

A convergência de uma sucessão é equivalente à convergência da sucessão das suas coordenadas:

Proposição 1.81 *A sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^m = (x_1^m, ..., x_n^m)$, $m = 1, 2, ...$, converge para um ponto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sse para cada $i = 1, 2, ..., n$ tem-se $\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i$.*

Demonstração: Exercício.

Teorema 1.82 (Bolzano-Weierstrass) *Toda a sucessão limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsucessão convergente (ou, por outras palavras, possui pelo menos um sublimite).*

Demonstração: Ver, por exemplo, [3, Teorema 5, p.16].

Estendemos agora a $\mathbb{R}^n$ o critério de Cauchy para a convergência de sucessões de números reais.

Definição 1.83 *Uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma* sucessão de Cauchy *quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número $m^* \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, p \geq m^* \Rightarrow \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^p\| \leq \varepsilon.$$

Usando a Proposição 1.81 e o critério de Cauchy para sucessões numéricas podemos demonstrar a critério de Cauchy para sucessões em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.84 *Uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ é convergente sse é de Cauchy.*

Demonstração: Ver, por exemplo, [3, Teorema 7, p.17].

Definição 1.85 *Diz-se que uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ é* limitada *se existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}^m\| \leq M$, $\forall m = 1, 2, ...$ (i.e., o conjunto dos temos da sucessão é limitado).*

Proposição 1.86 *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é fechado sse o limite de qualquer sucessão convergente de elementos de S pertence a S.*

Definição 1.87 *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se* compacto *se cada sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset S$ tem uma subsucessão $\left\{\mathbf{x}^{k_m}\right\}$ que converge para um ponto $\mathbf{x} \in S$.*

Usando esta propriedade e a Proposição 1.86 podemos formular o Teorema de Bolzano-Weierstrass da seguinte forma:

Teorema 1.88 (Bolzano-Weierstrass) *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é compacto sse S é limitado e fechado.*

Exemplo 1.89 *A esfera $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 3\right\}$ é um conjunto compacto. (Justifique!)*

1.4 Funções. Limite e continuidade

Funções de várias variáveis

Até agora estudaram-se apenas funções reais de variável real. No entanto, existem situações em diferentes áreas da ciência em que são necessárias funções de várias variáveis, umas com valores reais (também chamadas *funções escalares*) como, por exemplo, no cálculo de áreas e volumes, outras com valores vectoriais (chamadas *funções vectoriais*) como, por exemplo, no cálculo da velocidade de um ponto num fluido em movimento. São estas funções, escalares e vectoriais, que vamos estudar a seguir.

Iniciamos o estudo das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ com a introdução de alguns conceitos já conhecidos no caso das funções reais de variável real, nomeadamente, os conceitos de função, domínio, contradomínio entre outros.

Definição 1.90 *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* função definida em A com valores em B, *a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $y \in B$ e representa-se por $y = f(x)$, onde x é a variável independente e y é a variável dependente.*

O conjunto A é o conjunto dos pontos onde a função está definida, chama-se domínio *de f e representa-se por D_f ou $D(f)$.*

Chama-se contradomínio *de f e representa-se por CD_f ou $CD(f)$ ao subconjunto de B que contém todos os valores que a função toma.*

O gráfico *de uma função $f : A \to B$ é o conjunto*

$$Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A \text{ e } y = f(x)\}.$$

Diz-se que $f : A \to B$ é uma função real de variável real *quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.*

Diz-se que $f : A \to B$ é uma função real de n variáveis reais *ou uma* função escalar *quando $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}$, com $n > 1$.*

Diz-se que $f : A \to B$ é uma função vectorial *(ou* aplicação*) quando $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$, com $n, m > 1$.*

Observação 1.91 *No último caso da definição anterior temos uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $n, m > 1$, definida por m funções reais de n variáveis reais $f_i : D_i \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, onde D_i é o domínio da função f_i. Ou seja,*

$$f(x_1, x_2..., x_n) = (y_1, y_2..., y_m),$$

onde

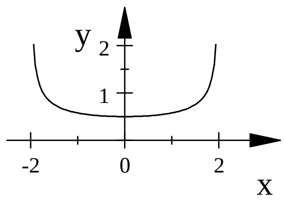
$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2..., x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2..., x_n), \end{aligned}$$

Cada função f_i diz-se uma coordenada *de f. Tem-se $D_f = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_m$, ou seja, o domínio de f é dado pela intersecção dos domínios das funções coordenadas.*

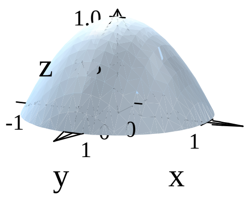
Exemplos 1.92 *(1) Consideremos a função real de variável real* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. *Esta função tem por domínio o conjunto*

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\right\} = \left]-2, 2\right[$$

e contradomínio o conjunto $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, *sendo o gráfico*



(2) Consideremos a função escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, *temos* $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $CD_f = [0, 1]$ *e*



(3) Consideremos a função vectorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x, y) = \left(\ln x, \sqrt{y}, \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$. *Esta função é constituida por 3 funções coordenadas* $f_i : D_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, *tais que*

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \ln x, & D_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\} \\
f_2(x, y) &= \sqrt{y}, & D_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\} \\
f_3(x, y) &= \tfrac{x^2}{x^2+y^2}, & D_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0\right\}.
\end{aligned}$$

O domínio da função f *é igual à intersecção dos domínios das suas funções coordenadas:*

$$D_f = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y \geq 0\right\}.$$

A representação gráfica de uma função real de variável real faz-se num espaço de dimensão 2, e a de uma função escalar definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ faz-se num espaço de dimensão 3. Em casos como o do Exemplo 1.92 costuma-se recorrer à representação de *curvas de nível.*

Definição 1.93 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Chama-se* conjunto de nível c *ao conjunto*

$$L(c) = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = c\},$$

onde c *é um dos valores que* f *toma. Quando* $n = 2$ *o conjunto* $L(c)$ *diz-se uma* curva de nível *e quando* $n = 3$ *diz-se uma* superfície de nível.

Exemplo 1.94 *Consideremos a função escalar* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. *As curvas nível são circunferências centradas em* $(0, 0)$ *e raio* $\sqrt{1 - c^2}$. *Por exemplo, a curva de nível* $L(0)$ *é a circunferência de centro* $(0, 0)$ *e raio* 1 *e é dada por*

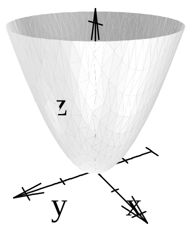
$$L(0) = \left\{(x, y) \in D : \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0\right\} = \left\{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Tal como acontece com as funções reais de variável real, também as funções de várias variáveis podem ser definidas de diferentes maneiras. No entanto nem sempre é possivel passar de umas para outras, por exemplo, em geral, não é possivel escrever de forma explicita uma função que é dada implicitamente, como veremos mais à frente. Temos então as seguintes formas de definir uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

(i) *explicita* quando é dada a expressão analítica da função f, isto é, $z = f(x_1, ..., x_n)$. Exemplo (em $\mathbb{R}^2$) $z = f(x, y) = x^2 \sin(2y)$;

(ii) *implícita* quando não há uma expressão analítica f mas é dada uma função $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in D$ existe um único $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz a equação $F(\mathbf{x}, z) = 0$. Neste caso diz-se que z é uma função de $\mathbf{x}$ definida implicitamente. Por exemplo z como função de x e y (variáveis independentes em $\mathbb{R}^2$) pode ser dada através da equação $F(x, y, z) = xe^z \cos(xy) + \ln\left(y^2 + 1\right) = 0$. Nalguns casos, como no exemplo anterior, a função z pode ser escrita explicitamente em função de x e y. Mas isto nem sempre é possível, como acontece, por exemplo, com a equação $xz = \sin(y + z)$.

(iii) *gráfica* quando é dado o gráfico da função, isto é, o conjunto $\{(\mathbf{x}, z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(\mathbf{x})\}$. Esta representação está apenas definida para $n = 1$ ou $n = 2$. Por exemplo



representa o conjunto $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}$ que é o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, esta superfície chama-se parabolóide de revolução;

(iv) *paramétrica* quando o gráfico da função f se representa como o conjunto

$$\{(\mathbf{x}, z) : \mathbf{x} = X(\mathbf{u}), \; z = Z(\mathbf{u}), \; \mathbf{u} \in G\},$$

onde $G \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de parâmetros e $X : G \to D$, $Z : G \to \mathbb{R}$ são funções. Por exemplo,

(a) para cada $r > 0$ fixado, as equações

$$x = r\cos\theta\sin\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi,$$

para $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, representam uma esfera de raio r e centro na origem;

(b) para cada $r > 0$, as equações

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad z = \pm\sqrt{1 + r^2},$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$ representam um hiperbolóide de revolução de duas folhas,

(c) para cada $r > 1$, as equações

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad z = \pm\sqrt{r^2 - 1},$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$ representam um hiperbolóide de revolução de uma folhas.

Limite

Os conceitos de limite e de continuidade, assim como as suas propriedades, introduzidos na Análise Matemática I, são facilmente generalizáveis a funções de várias variáveis.
Tal como para funções reais de variável real, o conceito de limite num ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, para uma função definida numa parte D de $\mathbb{R}^n$, exige que a variável independente $\mathbf{x} \in D$ se possa aproximar arbitrariamente do ponto $\mathbf{a}$. Assim, sendo irrelevante que $\mathbf{a}$ pertença ou não a D, é porém necessário que $\mathbf{a}$ seja ponto de acumulação de D, para que nos possamos aproximar de $\mathbf{a}$ através de pontos em $D \backslash \{\mathbf{a}\}$.

Definição 1.95 (Heine) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, uma aplicação e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D. Diz-se que o ponto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o* limite de f quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$, *com $\mathbf{x} \in D$, se para cada sucessão $\{\mathbf{x}^k\} \subset D$, $\{\mathbf{x}^k\} \to \mathbf{a}$, $k \to \infty$, tem-se*

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\mathbf{x}^k\right) = \mathbf{b}.$$

Neste caso escreve-se $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\ \mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *ou, simplesmente,* $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *(se D está fixado).*

Definição 1.96 (Cauchy) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, e $\mathbf{a} \in D'$. Diz-se que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o* limite de f quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$, *com $\mathbf{x} \in D$, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\mathbf{x} \in D \quad e \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n \leq \delta \quad implica \quad \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_m \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Recorde que $\|\cdot\|_n$ e $\|\cdot\|_m$ denotam a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Quando não houver perigo de confusão escrevemos simplesmente $\|\cdot\|$ para denotar qualquer uma delas.

Demonstra-se, analogamente como em $\mathbb{R}$, que as definições de Heine e de Cauchy são equivalentes, mas não vamos fazer isso aqui.

Observação 1.97 *O limite em (1.2) é equivalente ao limite nulo da função escalar* $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|$*:*

$$\lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\to 0} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = 0.$$

Denotando por f_j e b_j $(j = 1, 2, .., m)$ a coordenada j de f e de $\mathbf{b}$, respectivamente, temos, por (1.1),

$$\max_{j=1,2,\dots,m} |f_j(\mathbf{x}) - b_j| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq \sum_{j=1}^{m} |f_j(\mathbf{x}) - b_j|. \tag{1.3}$$

A ultima desigualdade permite-nos estabelecer o seguinte resultado

Proposição 1.98 *Sejam* $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in D'$ *e* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Temos*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j, \ \ \forall j = 1, 2, ..., m.$$

Observação 1.99 *Para perceber melhor a Definição 1.96 suponhamos que* $m = 1$ *e sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in D'$ *e* $b \in \mathbb{R}$. *Pela definição de norma euclideana dizer que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = b$ *significa que o valor da função* f *pode ser arbitrariamente próximo de* b *se a distância de* $\mathbf{x}$ *ao ponto* $\mathbf{a}$ *for suficientemente pequena. Observemos que a distância de* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{a}$ *pode ser medida no sentido da norma euclideana ou através das coordenadas (isto é, calculando a distância de cada coordenada de* $\mathbf{x}$ *à respectiva coordenada de* $\mathbf{a}$ *- ver (1.3)).*

Exemplo 1.100 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Provemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Temos então que mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{ tal que se } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \ \text{ e } \ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ se tem

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ então

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x|\, y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim, escolhendo $0 < \delta \leq \varepsilon$ tem-se (1.4).

Proposição 1.101 (Unicidade do limite) *O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.*

Demonstração:
Sai directamente da definição de Heine e da unicidade do limite de uma sucessão. ■

Proposição 1.102 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\mathbf{a} \in D'$. *Se* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *então a função* f *é limitada em torno do ponto* $\mathbf{a}$, *isto é, existem* $\delta > 0$ *e* $M > 0$ *tais que* $\|f(\mathbf{x})\| \leq M$ *para todo o* $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$.

Demonstração:
Por definição de limite para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in D$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$(\mathbf{x} \in D,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq 1.$$

Por outro lado, por uma propriedade das normas (ver Proposição 1.7 (ii)) sabemos que

$$\|f(\mathbf{x})\| - \|\mathbf{b}\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq 1.$$

Portanto, se $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$ tem-se que

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{b}\| + 1.$$

Tomando $M = \|\mathbf{b}\| + 1$ concluimos que $\|f(\mathbf{x})\| \leq M$, para todo $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$, para algum $\delta > 0$. ■

Proposição 1.103 *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\mathbf{a} \in D'$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *e* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, *então tem-se*

(a) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

(b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b}$;

(c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;

(d) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, *se* $m = 3$;

(e) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{b}\|$;

(f) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{b}{c}$, *se* $m = 1$ *e* $c \neq 0$.

Demonstração:

Provaremos apenas a propriedade (c). A (d) demonstra-se de forma análoga, e as outras provam-se da mesma maneira que as propriedades correspondentes para as funções reais de variável real.

Suponhamos que $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Aplicando a desigualdade triangular do módulo e a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Proposição 1.7 (i)) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} |\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle| &= |\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\rangle - \langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x})\rangle| + |\langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x})\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle| \\ &\leq |\langle f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}, g(\mathbf{x})\rangle| + |\langle \mathbf{b}, g(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\rangle| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \, \|g(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{b}\| \, \|g(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| . \end{aligned}$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Usando a definição de $\mathbf{b}$ e de $\mathbf{c}$ e a proposição anterior encontramos $\delta_1 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|g(\mathbf{x})\| \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in D, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_1;$$

$\delta_2 > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_2$$

e $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{b}\|} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_3.$$

Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ vemos que para todo $\mathbf{x} \in D$ com $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta$ tem-se

$$|\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \|\mathbf{b}\| \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{b}\|} = \varepsilon.$$

O caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ é óbvio e é deixado como exercício. ■

Quando estudámos limites de funções reais de variável real vimos que existem dois limites particularmente importantes: o *limite lateral direito* de f em a e o *limite lateral esquerdo* de f em a. Vimos também que uma função real de variável real tem limite num ponto a sse existem, forem finitos e iguais os dois limites laterais.

No caso de funções de várias variáveis a situação é mais complexa. Não existem apenas dois caminhos possíveis para nos aproximarmos de $\mathbf{a}$, mas sim uma infinidade deles, e não é possivel calcular o limite ao longo de todos eles. No entanto, tal como anteriormente, se existirem dois caminhos diferentes ao longo dos quais o limite é diferente, podemos concluir que não há limite da função no ponto $\mathbf{a}$.

Para explicar melhor o que acabámos de afirmar precisamos do seguinte

Definição 1.104 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função e A é um subconjunto de D, chama-se* restrição de f ao conjunto A *e representa-se por $f|_A$ à função que tem por domínio A e verifica a condição $f|_A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$.*

Definição 1.105 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função e $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de D. Se A é um subconjunto de D ao qual $\mathbf{a}$ ainda é ponto de acumulação chama-se* limite de f no ponto $\mathbf{a}$ relativo ao conjunto A *ou* restrito ao conjunto A *ao limite em $\mathbf{a}$ da restrição de $f|_A$, caso ele exista, e escreve-se*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f|_A(\mathbf{x}).$$

Observação 1.106 *Das definições de limite e de restrição de uma função resulta que, caso exista limite de f em $\mathbf{a}$, todos os limites restritos de f em $\mathbf{a}$ existem e são iguais ao limite de f em $\mathbf{a}$. No entanto, pode haver limite restrito a certos conjuntos sem que haja o limite em $\mathbf{a}$. De facto, se for possivel determinar dois conjuntos $A, B \subset D$ com $\mathbf{a} \in A' \cap B'$ para os quais se tenha*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) \neq \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}),$$

(ou um só conjunto A, nas mesmas condições, tal que não exista o limite de f no ponto $\mathbf{a}$ relativo a A), então não existe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Exemplo 1.107 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Mostremos que não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pondo

$$A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \qquad e \qquad B = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in B}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1.$$

Como existem dois limites relativos de f no ponto $(0,0)$ distintos, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Observação 1.108 *Em $\mathbb{R}^2$, os limites relativos a rectas que passam pelo ponto (a,b), i.e., os limites relativos a rectas da forma*

$$x = a \quad e \quad y = b + \alpha(x - a),$$

chamam-se limites direccionais. *Se o limite depender do declive da recta, α, então não existe limite. Por outro lado, se ao longo das rectas obtivermos sempre o mesmo valor para o limite, não significa que exista limite, pois poderá existir um outro caminho que passe em (a,b) ao longo do qual o limite seja diferente ou não exista.*

Portanto, se os limites direccionais forem diferentes podemos concluir que não existe limite da função no ponto, mas se os limites direccionais forem todos iguais nada podemos concluir.

Exemplos 1.109 *(1) Mostremos que a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não tem limite no ponto $(0,0)$.

Determinemos os limites direccionais ao longo da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Como o limite direccional depende de m*, podemos concluir que não existe o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}.$$

Verifiquemos se existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Determinemos os limites direccionais ao longo da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+(mx)^2} = 0$$

(justifique!), e ao longo da recta $x = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0.$$

Como todos os limites direccionais são iguais a zero nada podemos concluir. Determinemos agora o limite ao longo da parábola $y = x^2$*. Temos*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2},$$

como este limite é diferente dos limites direccionais, podemos concluir que não existe limite da função f *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 1.110 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Sugestão: basta ter em conta que $x^2 \leq x^2+y^2$ *e que* $y \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Observações 1.111 *Em* $\mathbb{R}^2$*, os limites*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad e \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

chamam-se limites iterados *(ou* limites repetidos*) de* f *em* (a,b)*. Se existirem, em* $\mathbb{R}$*, e forem diferentes, podemos concluir que não existe o limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$*. No entanto, podem existir e serem iguais sem que exista* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$*, como se pode ver no Exemplo 1.112.1 abaixo.*

Exemplos 1.112 *(1) Seja* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

No Exemplo 1.109.1 mostrámos que f *não tem limite no ponto* $(0,0)$ *mas, no entanto, os limites iterados existem e são iguais a zero (justifique).*

(2) Mostremos, utilizando limites iterados, que a função $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

não tem limite no ponto $(0,0)$*.*

Temos

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$$

e

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right)=-1.$$

Como os limites iterados existem em $\mathbb{R}$ *mas são diferentes, podemos concluir que não existe o limite da função dada no ponto* $(0,0)$*, tal como já tinhamos visto no Exemplo 1.107.*

Observação 1.113 *Note-se que pode existir o limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *sem que existam os limites iterados (ver Exercício 5 da Ficha 3).*

Mas se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$*, e se existirem os limites unidimensionais*

$$\lim_{x\to a} f(x,y) \quad e \quad \lim_{y\to b} f(x,y),$$

então existem os limites iterados e são iguais:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L.$$

(Demonstre!)

Continuidade

Definição 1.114 *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, *diz-se* contínua em $\mathbf{a} \in D \cap D'$ *se* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. *Por outras palavras,* f *é contínua em* $\mathbf{a}$ *se* $f\left(\mathbf{x}^k\right) \to f(\mathbf{a})$ *para cada sucessão* $\left\{\mathbf{x}^k\right\} \to \mathbf{a}$, $k \to \infty$*; ou* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n \leq \delta \text{ então } \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_m \leq \varepsilon. \tag{1.5}$$

Se f *não for contínua em* $\mathbf{a}$ *diz-se* descontínua *em* $\mathbf{a}$.

Definição 1.115 *Diz-se que* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, *é* contínua em D *se* f *é contínua em cada* $\mathbf{a} \in D$. *(Se* $\mathbf{a}$ *é um ponto isolado a função* f *considera-se contínua em* $\mathbf{a}$ *por convenção.)*

Observação 1.116 *Intuitivamente,* f *é contínua em* $\mathbf{a}$ *quando os pontos* $\mathbf{x}$ *que estão próximos de* $\mathbf{a}$ *têm imagens* $f(\mathbf{x})$ *próximas de* $f(\mathbf{a})$.

Tendo em conta a Proposição 1.98 temos

Proposição 1.117 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *com coordenadas* $f_1, f_2, ..., f_m$, *e* $\mathbf{a} \in D$. *Então* f *é contínua em* $\mathbf{a}$ *sse* f_j *é contínua em* $\mathbf{a}$, *para todo o* $j = 1, 2, ..., m$.

Tendo em conta a Proposição 1.103 obtemos o seguinte resultado

Proposição 1.118 *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *contínuas em* $\mathbf{a} \in D$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então as funções vectoriais* $f + g$, λf *e* $f \times g$ *no caso* $m = 3$, *e as funções escalares* $\langle f, g\rangle$ *e* $\|f\|$ *são contínuas em* $\mathbf{a}$. *Além disso, se* $m = 1$ *e* $g(\mathbf{a}) \neq 0$ *a função* $\frac{f}{g}$ *é contínua em* $\mathbf{a}$.

Proposição 1.119 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $g : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *com* $f(D) \subset E$. *Se* f *é contínua em* $\mathbf{a}$ *e* g *é contínua em* $f(\mathbf{a})$, *então a função composta* $g \circ f$ *é contínua em* $\mathbf{a}$.

Demonstração:

Fixo $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade de g em $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in E \text{ e } \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_m < \delta_1 \text{ então } \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{b})\|_p < \varepsilon.$$

Fixo tal δ_1. Pela continuidade de f em $\mathbf{a}$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta_2 \text{ então } \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_m < \delta_1.$$

Assim, tomando $\delta = \delta_2$ tem-se

$$\mathbf{x} \in D \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta \text{ então } \|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))\| < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de $(g \circ f)$ em $\mathbf{a}$. ■

Exemplo 1.120 *As funções*

$$f(x,y) = \sin\left(x^2 y\right), \quad g(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right), \quad h(x,y) = \frac{e^{x+y}}{x+y}, \quad m(x,y) = \ln\left|\cos\left(x^2+y^2\right)\right|.$$

são contínuas em todos os pontos em que estão definidas:

f é contínua em todos os pontos do plano, g em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, h é contínua em todos os pontos (x,y) tais que $x+y \neq 0$, m é contínua em todos os pontos para os quais x^2+y^2 não seja múltiplo ímpar de $\pi/2$ (o conjunto de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2+y^2 = \frac{n\pi}{2}$, $n = 1,3,5,...$, é uma família de circunferências centradas na origem).

O exemplo anterior mostra que os pontos de descontinuidade podem ser pontos isolados, ou formar curvas ou famílias de curvas.

Uma função de duas variáveis pode ser contínua em relação a cada uma das variáveis separadamente e ser descontínua quando considerada como função das duas variáveis em conjunto. Este facto é ilustrado pelo exemplo seguinte.

Exemplo 1.121 *Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad se \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Para pontos (x,y) do eixo dos x temos $y = 0$ e $f(x,y) = f(x,0) = 0$, pelo que a função tem valor constante 0 ao longo de todo o eixo dos x. Deste modo, se fizermos $y = 0$ e considerarmos f unicamente como uma função de x, f é contínua em $x = 0$.

Analogamente, f toma o valor 0 em todos os pontos do eixo dos y, pelo que se fizermos $x = 0$ e considerarmos f unicamente como uma função de y, f é contínua em $y = 0$. Porém, f considerada como função de duas variáveis não é contínua na origem. Com efeito, em cada ponto da recta $y = x$ (excepto na origem) a função toma o valor constante $\frac{1}{2}$, pois

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};$$

como existem sobre esta recta pontos tão próximos da origem quanto se queira e como $f(0,0) \neq \frac{1}{2}$, a função não é contínua em $(0,0)$.

Destacamos as seguintes importantes propriedades das funções contínuas definidas em conjuntos.

Proposição 1.122 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $X \subset D$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$, então a imagem $f(X) := \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração:

Seja $\{f(\mathbf{x}^m)\} \subset f(X)$ uma sucessão de pontos arbitrária. Então $\{\mathbf{x}^m\} \subset X$ e como X é compacto existe uma subsucessão $\left\{\mathbf{x}^{k_m}\right\} \to \mathbf{x}^0$, para algum $\mathbf{x}^0 \in X$. Mas $\left\{f\left(\mathbf{x}^{k_m}\right)\right\}$ é subsucessão de $\{f(\mathbf{x}^m)\}$ e converge para $f\left(\mathbf{x}^0\right)$ (justifique!). Donde se conclui que $f(X)$ é compacto. ■

Da proposição anterior sai imediatamente a generalização do Teorema de Weierstrass bem conhecida na Análise Matemática I.

Teorema 1.123 (Weierstrass) *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $X \subset D$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$, então f é limitada em X e atinge (em X) o seu valor máximo e mínimo; isto é, existem $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, tais que*

$$f(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \qquad e \qquad f(\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}).$$

Demonstração:

Da proposição anterior resulta, em particular, que $f(X)$ é um conjunto limitado e por conseguinte f é limitada em X (justifique!). Portanto o supremo e o ínfimo de f em X existem e são finitos. Seja, por exemplo, $\sup\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = a$. Por definição de supremo existe uma sucessão $\{\mathbf{x}^m\} \subset X$ tal que $\lim\limits_{m \to \infty} f(\mathbf{x}^m) = a$. Como X é compacto existe uma subsucessão $\{\mathbf{x}^{k_m}\} \to \mathbf{x}^0$, para algum $\mathbf{x}^0 \in X$, o que implica que $\{f(\mathbf{x}^{k_m})\} \to f(\mathbf{x}^0) = a$ (justifique!). Analogamente se mostra que o mínimo é atingido. ■

As aplicações contínuas também mantém a conexidade dos conjuntos

Proposição 1.124 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua num conjunto conexo (topologicamente ou por arcos) $X \subset D$, então o conjunto $f(X)$ é conexo (topologicamente ou por arcos, respectivamente).*

Demonstração:

Mostremos apenas que $f(X)$ é conexo por arcos, deixando a outra parte como exercício.

Sejam $c, d \in f(X)$ dois pontos diferentes, então existem $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, com $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ tais que $f(\mathbf{a}) = c$ e $f(\mathbf{b}) = d$. Como X é conexo por arcos existe um caminho $r : [0,1] \to X$ tal que $r(0) = \mathbf{a}$ e $r(1) = \mathbf{b}$, o que implica $f(r(0)) = f(\mathbf{a}) = c$ e $f(r(1)) = f(\mathbf{b}) = d$. Portanto o caminho $f \circ r$ liga os pontos c e d em $f(X)$. ■

Prolongamento por continuidade

Definição 1.125 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{a} \in D' \backslash D$. Diz-se que a função f é* prolongável por continuidade ao ponto $\mathbf{a}$ *se existe o limite $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$. Neste caso, a função $\widetilde{f} : D \cup \{\mathbf{a}\} \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & se\ \mathbf{x} \in D \\ \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) & se\ \mathbf{x} = \mathbf{a}, \end{cases}$$

chama-se prolongamento de f ao ponto $\mathbf{a}$*.*

Exemplos 1.126 *(1) Seja $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Vimos no Exemplo 1.100 que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$. Logo a função dada é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$, e o prolongamento de f ao ponto $(0,0)$ é a função $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & se\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Vimos no Exemplo 1.109.2 que não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*, logo a função dada não é prolongável por continuidade ao ponto* $(0,0)$*.*

Bibliografia

[1] J.Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática em* $\mathbb{R}^n$, DMIST, 2003.

[2] F. R. Dias Agudo, *Análise Real*, vol. 3, Escolar Editora, 1990.

[3] E. Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Projecto Euclides, 1995.

[4] L. T. Magalhães, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1997.

[5] C. Sarrico, *Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis*, Esfera do caos, 2003.

[6] J. Stewart, *Calculus*, Concepts and Contexts, Thomson Learning, 2005.