Análise Matemática II (2013/2014)

Ficha 4

Cálculo Diferencial.
Derivadas parciais e diferenciabilidade de primeira ordem

1. Calcule, utilizando a definição, a derivada direccional de f no ponto $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{v}$ se

   (a) $f(x, y) = 2x - y$, $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$;

   (b) $f(x, y, z) = xy + 2x^2 + z$, $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$;

   (c) $f(x, y) = 2x - y$, $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

   (d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

   (e) $f(x, y) = x^2 y$, $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$, onde $\mathbf{a}$ é um vector constante. Calcule $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ arbitrários.

3. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

   (a) Calcule $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ arbitrários.

   (b) Usando o resultado da alínea (a) no caso $n = 2$ determine todos os vectores (u, v) para os quais $f'((2{,}3); (u, v)) = 6$.

   (c) Usando o resultado da alínea (a) no caso $n = 3$ determine todos os vectores (u, v, w) para os quais $f'((1{,}2, 3); (u, v, w)) = 0$.

4. Sejam $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear dada e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{x}) \rangle$. Calcule a derivada $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

5. Calcule as derivadas parciais de função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   no ponto $(0, 0)$, caso existam.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 4 \\ e^{y-2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Calcule, usando a definição, as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

7. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 2xy$.

   (a) Calcule, usando a definição, as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

   (b) Verifique os resultados da alínea (a) usando as regras de derivação.

8. Determine as derivadas parciais das funções seguintes em todos os pontos onde existem

   (a) $f(x,y) = xy^2 + xe^y$; (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$; (d) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+1)$;

   (e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(2x)$; (f) $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y - \cos y$;

   (g) $f(x,y,z) = xyz$; (h) $f(x,y,z) = x\sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$;

   (i) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$; (j) $f(x,y,z) = \begin{cases} e^{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

9. Verifique se as funções seguintes são diferenciáveis na origem:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

10. Verifique se a função $f(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$ é diferenciável e calcule, caso exista, o seu diferencial no ponto $(1,0)$.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule, caso existam, as derivadas de f no ponto $(0,0)$ segundo os vectores $(\alpha,0), (0,\beta)$ e (α,β), com $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(b) Com base na alínea anterior determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(d) Mostre que a função não é diferenciável na origem.

12. Verifique se as funções seguintes são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e determine, caso existam, os seus diferenciais:

    (a) $f(x,y) = 3xy^2 + 4x^2y + 2xy$;

    (b) $f(x,y) = \sin(xy^2)$.

13. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y|x|$. Mostre que f é contínua no ponto $(0,1)$, mas não é diferenciável nesse ponto.

14. Determine o gradiente das funções dadas e usando o gradiente calcule as derivadas direccionais das funções respectivas no ponto $\mathbf{a}$ e segundo o vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ dados:

    (a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

    (b) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x+y}$ se $x+y \neq 0$, $\mathbf{a} = (1,-2)$, $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

    (c) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

    (d) $f(x,y) = x^3y^2$, $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$;

    (e) $f(x,y) = e^x \cos y$, $\mathbf{a} = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

15. Determine o gradiente da função dada por

    (a) $g(x,y,z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$;

    (b) $h(x,y) = \frac{xy}{x-2y}$.

16. Use a regra da cadeia para calcular a derivada da função composta $t \mapsto f(x(t), y(t))$ se

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$;

    (b) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x^2 + y)$, $x(t) = 2t$, $y(t) = t^2$;

    (c) $f(x,y) = x\cos y$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = t$.

17. Determine, usando a regra da cadeia, as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ se

(a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ onde $x = 2u + 1$, $y = \sqrt[3]{v^2}$;

(b) $\ln (x^2 + y^2)$ onde $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \sin v$.

18. Seja f uma função diferenciável numa bola $B(\mathbf{a}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que se $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$, então a função f é constante em $B(\mathbf{a}, \delta)$.

19. Mostre que o plano tangente ao elipsoide definido por $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ num ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) é dado pela equação $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$. Interprete geometricamente.

20. Escreva a equações do plano tangente e da recta normal à superfície dada no ponto indicado. Faça o desenho.

    (a) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ no ponto $(2, -1, 1)$;

    (b) $f(x, y) = xy$ no ponto $(1, 1, 1)$;

    (c) $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, -2, 5)$;

    (d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ no ponto $(4, 3, 4)$.