Ficha 4

Cálculo Diferencial.
Derivadas parciais e diferenciabilidade de primeira ordem

1. Calcule, utilizando a definição, a *derivada direccional* de f no ponto $\mathbf{a}$ segundo o vetor $\mathbf{v}$ se

   (a) $f(x,y) = 2x - y$, $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = (1,1)$;

   (b) $f(x,y) = 2x - y$, $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

   (c) $f(x,y) = x^2 y$, $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$;

   (d) $f(x,y,z) = xy + 2x^2 + z$, $\mathbf{a} = (1,-1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2,3)$;

   (e) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$, onde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor dado. Calcule $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ arbitrários.

3. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

   (a) Calcule $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ arbitrários.

   (b) Usando o resultado de alínea (a) no caso $n = 2$ determine todos os vetores (u,v) para os quais $f'((2{,}3); (u,v)) = 6$.

   (c) Usando o resultado de alínea (a) no caso $n = 3$ determine todos os vectores (u,v,w) para os quais $f'((1{,}2{,}3); (u,v,w)) = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a forma quadrática $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ onde $\mathbf{A}$ é uma $n \times n$-mastriz simétrica. Calcule a derivada $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ para qualquer que sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} \neq 0$.

5. Calcule as *derivadas parciais* de função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   no ponto $(0,0)$, caso existam.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 4 \\ e^{y-2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 4. \end{cases}$$

   Pela definição calcule as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

7. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 2xy$.

   (a) Calcule, usando a definição, as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

   (b) Verifique os resultados de alínea (a) usando as regras de derivação.

8. Determine as *derivadas parciais* das funções seguintes nos pontos onde existem

   (a) $f(x,y) = xy^2 + xe^y$; (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$; (d) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+1)$;

   (e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(2x)$; (f) $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y - \cos y$;

   (g) $f(x,y,z) = xyz$; (h) $f(x,y,z) = x\sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$;

   (i) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$; (j) $f(x,y,z) = \begin{cases} e^{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

9. Mostre que a função
$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$
admete as *derivadas parciais* $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(0,0)$ mas *não é diferenciável* nesse ponto.

10. Verifique se as seguintes funções são *diferenciáveis* na origem:

    (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

    (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

    (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

11. Averigue *diferenciabilidade* da função $f(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$ e calcule o seu *diferencial* no ponto $(1,0)$.

12. Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4+2x^3-2xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
é diferenciável na origem ou não. No caso afirmativo determine o seu diferencial $df(0,0)$.

13. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule, caso existam, as derivadas de f no ponto $(0,0)$ segundo os vectores $(\alpha, 0), (0, \beta)$ e (α, β), com $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

(b) Com base na alínea anterior determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que a função não é diferenciável na origem.

14. Verifique se as funções seguintes são *diferenciáveis* em $\mathbb{R}^2$ e determine os seus *diferenciais*:

(a) $f(x,y) = 3xy^2 + 4x^2y + 2xy$;

(b) $f(x,y) = \sin(xy^2)$.

15. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y|x|$. Mostre que f é contínua no ponto $(0,1)$, mas não é diferenciável nesse ponto.

16. Determine o *gradiente* das funções definidas em alíneas (a)-(e) em baixo e com uso dele calcule as *derivadas direccionais* no ponto $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

(b) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x+y}$ se $x + y \neq 0$, $\mathbf{a} = (1,-2)$, $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

(c) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

(d) $f(x,y) = x^3y^2$, $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$;

(e) $f(x,y) = e^x \cos y$, $\mathbf{a} = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

17. Determine o *gradiente* da função dada por

(a) $g(x,y,z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$;

(b) $h(x,y) = \frac{xy}{x-2y}$.

18. Use a *regra da cadeia* para calcular a derivada da função composta $t \mapsto f(x(t), y(t))$ se

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$;

(b) $f(x,y) = \mathrm{tg}\,(x^2 + y)$, $x(t) = 2t$, $y(t) = t^2$;

(c) $f(x,y) = x\cos y$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = t$.

19. Determine, *usando a regra* da cadeia, as derivadas parciais da função

(a) $f(x,y) = xy\ln(x+y)$;

(b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2-y^2}}$;

(c) $f(x,y) = \ln\left(\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2 x\sin^2 y\right)$;

(d) $f(x,y,z) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3\sqrt{\frac{x+z}{x-z}}$.

20. Escreva as equações do *plano tangente* e da *reta normal* à superfície dada no ponto indicado. Faça desenho.

(a) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ no ponto $(2,-1,1)$;

(b) $f(x,y) = xy$ no ponto $(1,1,1)$;

(c) $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1,-2,5)$;

(d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ no ponto $(4,3,4)$.