Exercícios sobre Séries de Taylor

Encontrar a soma duma séries "telescópica"

Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} .$$

(Note que esta série não é geométrica, mas o termo geral pode ser escrito en frações parciais, que permite anular os termos do "meio" e calcular as somas parciais, para depois tomar o limite.)

Solução: Utilizando $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$, temos.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+2)} &= \frac{2}{1\cdot(1+2)} + \frac{2}{2\cdot(2+2)} + \frac{2}{3\cdot(3+2)} + \ldots + \frac{2}{n(n+2)} + \ldots \\ &\quad + \frac{2}{N(N+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &\quad + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \to \frac{3}{2} \text{ quando } N \to \infty .\end{aligned}$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}$.

Encontrar a soma duma série de Taylor

Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} .$$

Esta série é a série de Taylor da função exponencial a volta do 0 , quando $x=-1$.

Portanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$.

Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} , \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2\,n!} , \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{2\,n!} .$$

Encontrar a série de $\ln(1+x)$, em $x=0$.

Solução: Primitivar a série geométrica de razão $-x$ ($|x| < 1$). Ou seja, sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$, primitivamos termo a termo a série da esquerda e o termo da direita. Obtendo-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-x)^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) + C.$$

Pondo $k = n+1$ e avaliando ambos os lados para $x = 0$, vemos que a constante é nula:

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}.$$

Calcular o raio de convergência desta série e calcular $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$. Calcular a suma da série harmónica (ter atenção ao raio de convergência).

Encontrar a série de Taylor de $\frac{1}{(1+x)^2}$, em $x = 0$. Solução: Derivar a série geométrica de razão $-x$ ($|x| < 1$). Ou seja, sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$, derivar termo a termo a série da esquerda e o termo da direita.