# Análise Matemática II (2013/2014)

# Ficha 8

## Cálculo Integral. Integrais de linha

1. Represente parametricamente as linhas seguintes:

   (**a**) segmento de recta que liga os pontos $(0,0,0)$ e $(2,2,2)$;

   (**b**) segmento de recta que liga os pontos $(0,1,2)$ e $(1,2,4)$;

   (**c**) linha de intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=4$ e $z=1$.

2. Determine o comprimento de arco das curvas seguintes:

   (**a**) $\mathbf{r}(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, $r>0$ é constante;

   (**b**) $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$;

   (**c**) $\mathbf{r}(t)=\left(t^3, t, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2\right)$, $t\in[1,3]$.

3. Calcule os seguintes *integrais curvilíneos de 1ª espécie*:

   (**a**) $\int\limits_L x\ ds$ sendo $L\subset\mathbb{R}^2$ o arco da parábola $y=x^2$ que liga os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$;

   (**b**) $\int\limits_L xy\ ds$ sendo $L\subset\mathbb{R}^2$ o arco da parábola $y=x^2$ que liga os pontos $(0,0)$ e $(2,4)$;

   (**c**) $\int\limits_L (xz-y)\ ds$ sendo $L\subset\mathbb{R}^3$ o segmento de recta que liga os pontos $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$.

4. Considere a curva $C\subset\mathbb{R}^3$ parametrizada pelo caminho $\mathbf{r}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t)=\left(3t\cos t, 2t\sin t, 2\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\right).$$

   (**i**) Calcule o comprimento de $C$.

   (**ii**) Supomos que a massa está distribuida ao longo da curva $C$ com densidade constante $\rho(x,y,z)=\rho>0$. Calcule o momento de inércia de $C$ em relação ao eixo $Oz$.

5. Determine a massa de um filamento com a forma da curva parametrizada por $\left(2t, \ln t, 4\sqrt{t}\right)$, $t \in [1, 2]$, supondo que a densidade num ponto $(x, y, z)$ é proporcional ao quadrado da distância desse ponto ao plano $z = 0$.

6. Determine a massa do arco de curva $y = \ln x$ que une os pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$ supondo que a densidade em cada ponto é igual ao quadrado da abcissa do ponto.

7. Determine o centro de massa da hélice definida por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$, cuja densidade linear é $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

8. Calcule o integral $\displaystyle\int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$ onde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (2\sqrt{x} - y, y + x)$, ao longo de camínho rectilíneo percorrido do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 1)$ e no sentido inverso (isto é, de $(1, 1)$ para $(0, 0)$). Compare os resultados.

9. Calcule os seguintes *integrais curvilíneos de 2ª espécie*:

   **(a)** $\displaystyle\int_C xdy - ydx$ sendo $C$ um arco de ciclóide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$;

   **(b)** $\displaystyle\int_C xdy - ydx$ sendo $C$ a hipociclóide de quatro cúspides $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$;

   **(c)** $\displaystyle\int_C 4xy^2 dx - 3x^4 dy$ sendo $C$ a linha poligonal que une os pontos $(0, 1)$, $(-2, 1)$ e $(-2, 0)$, orientada no sentido sugerido pela sequência dos pontos;

   **(d)** $\displaystyle\oint_C \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$ sendo $C$ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido directo;

   **(e)** $\displaystyle\int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$ sendo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, e $C$ a parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;

   **(f)** $\displaystyle\int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$ sendo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, e $C$ o arco de sinusóide $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$;

   **(g)** $\displaystyle\oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$ sendo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$, e $C$ a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a > 0$, $b > 0$, oriendada no sentido directo.

10. Suponha que um ponto material no plano é sujeito à força $\mathbf{F}(x,y) = (3xy, 2xy)$. Calcule o trabalho realizado por essa força quando o ponto percorre completamente e uma única vez, no sentido contrário aos ponteiros do relógio, a curva fechada $x^2 + 4y^2 = 4$.

11. Determine o trabalho total efectuado pela força $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ ao deslocar uma partícula (no sentido directo) percorrendo uma vez o quadrado definido pelos eixos coordenados e pelas rectas $x = a$ e $y = a$, com $a > 0$.

12. Determine o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x,y) = (-zy, zx, yx)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo de uma hélice circular parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

13. Mostre que o integral

$$\int_C \left(2xy - 2y^2 + 1\right) dx + \left(x^2 - 4xy\right) dy$$

não depende de caminho de integração mas só do ponto inicial e do ponto final. Encontre todas as funções $u = u\,(x,y)$ tais que

$$du = \left(2xy - 2y^2 + 1\right) dx + \left(x^2 - 4xy\right) dy.$$

14. Determine, caso seja possível, todas as *primitivas* das formas diferenciais seguintes:

(**a**) $xdx + ydy$;

(**b**) $\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$;

(**c**) $(2xe^y + y)\,dx + (x^2e^y + x - 2y)\,dy$;

(**d**) $(\sin(xy) + xy\cos(xy))\,dx + x^2\cos(xy)\,dy$;

(**e**) $(x+z)\,dx - (y+z)\,dy + (x-y)\,dz$;

(**f**) $3y^4z^2dx + 4x^3z^2dy - 3x^2y^2dz$;

(**g**) $(2x^2 + 8xy^2)\,dx + (3x^3y - 3xy)\,dy + (4y^2z^2 + 2x^3z)\,dz$.

15. Usando o *Teorema de Green* calcule o integral

$$\oint_C x^2dx + xdy$$

sendo $C$ a curva dada com a orientação anti-horária:

(**i**) elipse $4x^2 + y^2 = 4$;

(**ii**) quadrado com vértices $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$;

(**iii**) triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$;

(**iv**) circunferência $x^2+y^2=4$.

16. Determine a área da região plana limitada pelos gráficos das funções $y=2x^2$ e $y=4x$, utilizando

   (**i**) integrais definidos de função de uma variável;

   (**ii**) integração dupla;

   (**iii**) integrais de linha.

17. Use o *Teorema de Green* para determinar a área da região limitada pela elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \quad a>0,\ b>0.$$

18. Através do Teorema de Green determine o trabalho (*circulação*) da força

$$\mathbf{F}(x,y)=(y+3x, 2y-x)$$

que efectua uma volta completa de uma parcela material em torno da elipse $4x^2+y^2=4$ no sentido anti-horário.

19. Calcule o integral

$$\oint_C y^2dx+3xydy,$$

onde $C$ é a fronteira da região semianular entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ contida no semiplano superior.