# Miscelánea de exercícios sobre primitivação/integração

**Calcular a derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, utilizando a definição.**

**Supondo que $f'(x) = g'(x) = \sec^2(x)$, para todo $x \in (-\pi, \pi) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, diga se $f - g$ é constante.**

**Pergunta: Como se relacionam duas funções que têm a mesma derivada?**

A chave para entender esta questão é o teorema seguinte, que por sua vez é uma consequência direta do teorema do valor médio.

**Teorema - Propriedade básica da antiderivação**

Supor que a função $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável em todo o intervalo $(a, b)$. Supor que $F'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $F$ é constante.

De facto, pelo teorema do valor médio, para quaisquer par de pontos $x_1, x_2 \in (a, b)$, existe um valor $c$, compreendido entre $x_1$ e $x_2$ tal que

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0 .$$

E portanto, $F(x_2) = F(x_1)$ .

No último exemplo, como $F(x) = \tan(x)$ é uma antiderivada de $f(x) = \sec(x)^2$, qualquer outra deve diferir da primeira por uma constante, em cada um dos intervalos conexos, pudendo ser a constante diferente em intervalos diferentes.

**Encontrar $\int 2\, x^2\, e^{\frac{1}{2} - x^3}\, dx$, $\int x \cdot (\cos(x))^2\, dx$, e $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\, dx$**

**Movimento oscilató rio: A aceleração dum objeto, que se move ao longo de uma reta é dada pela fórmula**

$a(t) = 4\cos(\pi t)$ **. Se a posição a velocidade em $t = 0$ são nulas $x(0) = v(0) = 0$ , encontrar a fórmula que descreve a posição em função de $t$ .**

**Calcular** $\int_0^4 x \, dx$ **, utilizando a definição de integral de Riemann:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right)$$

**Sabe-se que** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **, calcular** $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ **,** $\int_1^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ **e** $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

**Sabe-se que** $f$ **é contínua em** $\left[0, \sqrt{2}\ \right]$ **e que** $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\, dx = 0$ **.**

**Podemos concluir que** $f(x) = 0$ **, para todo** $x \in \left[0, \sqrt{2}\ \right]$ **?**

**Sabe-se que** $f$ **é contínua e positiva em** $\left[0, \sqrt{2}\ \right]$ **e que** $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\, dx = 0$ **. Podemos concluir que** $f(x) = 0$ **, para todo** $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ **?**

**Sabe-se que** $f \leq g$ **e ambas são contínuas em** $[0, 2\ ]$ **. Supondo** $\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 g(x)\, dx$ **, podemos concluir que** $f(x) = g(x)$ **, para todo** $x \in \left[0, \sqrt{2}\ \right]$ **?**

**Encontrar a derivada de** $\int_{x+1}^{x} \sqrt{5-4t-t^2}\, dt$ **,** $x \in [-5, 1]$ **e de**

$$\int_{1-x}^{-5} \sqrt{5-4t-t^2}\, dt$$ **,** $x \in [0, 6]$ **.**

**Avaliar** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$ **e** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\, dx$ **.**

**Encontrar a área da região entre as curvas** $y = x^3 - x$ **e** $y = \sin(\pi \cdot x)$ **, para** $x \in [-1, 1]$ **.**

**Encontrar a área da região entre as curvas** $y = x^3 - x$ **e** $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ **, para** $x \in [0, 1]$ **.**

**Avaliar** $\int_0^2 x^2 \cdot e^x\, dx$ **,** $\int_0^2 x \cdot e^{x^2}\, dx$ **e** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arccos(x)\, dx$ **.**

**Integrar** $\int_0^1 \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{2x^3 - 5x^2 - x + 6} dx$ **e** $\int_0^1 \frac{x^4 + 4x^2 + 1}{x^4 - 16} dx$ **.**

**Integrar** $\int_0^{\pi} \cos(5x) \cdot \sin(2x)\, dx$ **,** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^4 \cos(x)^3\, dx$ **e**

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)}\, dx$ **.**

**Encontrar a área baixo o gráfico de** $f(x) = \sqrt{-3 - 4x - x^2}$ **no seu domínio de definição.**

**Integrar** $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx$ **.**

**Diga se o integral** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\theta)}\, d\theta$ **é convergente.**

**Diga se** $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{1+x^2}\, dx$ **é convergente. Calcular** $\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$ **.**

**Diga se a função** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3-4x-x^2}}$ **é integrável no seu domínio de definição. Calcular o integral em caso afirmativo.**