Ficha 1

Estrutura linear do espaço $\mathbb{R}^n$

1. Calcule o produto interno $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, sendo

   (a) $\mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\pi, 0, 1\right)$ e $\mathbf{b} = \left(3\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \ln 2, e\right)$;

   (b) $\mathbf{a} = (1, 2, 3, -5, e)$ e $\mathbf{b} = (-1, 0, \sin 3, 1, 2)$;

   (c) $\mathbf{a} = (\cos^2 2, -1)$ e $\mathbf{b} = \left(-1, \sin^2 2\right)$.

2. Calcule a norma dos vetores $\mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 3, -1)$ e $\mathbf{c} = (\sin 1, \cos 1)$. Faça desenho onde possível.

3. Determine a distância entre os vetores seguintes

   (a) $\mathbf{a} = (1, -2)$ e $\mathbf{b} = (0, -1)$;

   (b) $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$;

   (c) $\mathbf{a} = (0, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{b} = (e, 1, 0, \ln 2)$.

   Faça desenho onde possível.

4. Determine o produto externo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, sendo

   (a) $\mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\pi, 0\right)$ e $\mathbf{b} = \left(e, \frac{1}{2}, 3\sqrt{2}\right)$;

   (b) $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$.

   Faça desenho. Dê interpretação geométrica.

5. Determine o produto misto $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, sendo

   (a) $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$;

   (b) $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{c} = (1, -1, 3)$.

   Dê interpretação geométrica.

6. Determine a área do paralelogramo definido pelos vectores $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$. Faça desenho.

7. Determine o volume do paralelepipedo definido pelos vectores $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$. Faça desenho.

3. Utilizando os métodos conhecidos averigue se a forma quadrática seguinte é (semi)definida positiva, (semi)definida negativa ou indefinida:

   (a) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = x^2 - xy + y^2$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 3x^2 + 8xy - 2yz + y^2 + xz - z^2$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - x_3^2 + x_1x_3 - x_2^2 - 2x_1^2 - x_4^2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.