Exercícios sobre Sucessões e Séries

Identificar as Sucessões Geométricas e a Razão

As sucessões seguintes são funções de $n \in \mathbb{N}$. O termo geral é denotado a_n . O parámetro $x \in \mathbb{R}$ é fixo (quando aparecer)

$$\frac{9\cdot 4^{n-1}}{7\cdot 5^{n+1}} \;,\; \frac{4^{n+3}+6^{n-1}}{7^{n+1}} \;,\; e^{-n\cdot\ln(5)} \;,\; e^{n\cdot\ln(n)} \;,\; \frac{e^x}{n!} \;,\; e^{x-2n\cdot\ln(2)} \;,$$

$$2\,a_{n+1}+a_n=0 \;.$$

Operações aritméticas com sucessões geométricas

Sabendo que as sucessões $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ são geométricas, diga quais das seguintes sucessões são geométricas.

$$\left(a_n+b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \;,\; \left(a_n\cdot b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \;,\; \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Calcular o limite das seguintes sucessões (quando existir)

$$\frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^{n+1}} \;,\; \frac{5^n+2^{n-1}}{9^{n+1}} \;,\; \frac{9^{n+1}}{5^n+2^{n-1}} \;,\; e^{5n} \;,\; e^{n\cdot\ln(n)} \;,\; \frac{e^x}{n!} \;,\; e^{n-x} \;,$$

$$\frac{n^3+5n^2-1}{1-5n^3} \;,\; \frac{1-5n^3}{2+7n-2n^3} \;,\; \frac{2+(-1)^n\cdot n^3}{2+7n-2n^3} \;,$$

$$\frac{2(-1)^n+n^3}{2n^3-5} \;,\; \frac{1-n+(-1)^n\cdot n^3}{1+n^2-n^4} \;,\; \frac{1-n+(-1)^n\cdot n^3}{1+n^2} \;,$$

$$\frac{1-5n^3}{2+7n-2n^3}+\frac{2+(-1)^n\cdot n^3}{2+7n-n^3}+\frac{3+n^3}{n+(-1)^n\,n^3} \;,$$

$$n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) \;,\; \arctan\left(e^{n\cdot\ln(n)}\right) \;,\; e^{2n}\cdot\sin\left(e^{x-n}\right) \;,\; n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \;,\; n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{-\frac{1}{n}}\right) \;.$$

Encontrar a soma das séries seguintes

As sucessões seguintes são funções de $n \in \mathbb{N}$. O termo geral é denotado a_n . O parámetro $x \in \mathbb{R}$ é fixo (quando aparecer)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11 \cdot 2^{n-3}}{3^{n+2}} \ , \ \sum_{n=5}^{\infty} \frac{4^{2n-1} + 3^{n-1}}{3^{3n+1}} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+\ln(2)} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} e^{x-2n} \ .$$

Utilizando o critério do quociente ou da razão

Diga quais das séries seguintes são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n + 2^{n-1}} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \cdot \ln(n)} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^x}{n!} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1+2n-n^2} \ .$$

Séries de Dirichlet

Comparando com uma integral, diga para que valores de p às séries da forma $\sum \frac{1}{n^p}$, chamadas séries de Dirichlet, convergem.

Utilizando o critério de comparação

Diga quais das séries seguintes são convergentes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n^2}{1-5n^3} \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2(-1)^n + n^3}}{2n^3 - 5} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n}{\sqrt{1+n^4}} \ , \ \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2+7n+2n^4}} - \sqrt{\frac{3}{n^2+(-1)^n}} \ .$$

Polinómio e série de Taylor

- Encontrar o polinómio de Taylor até o grau 4, no ponto $x = 1$, da função $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Calcular o resto.

- Encontrar a série de Taylor de $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$ e $\frac{\cos(x) - 1}{x^2}$, em $x = 0$.

(sugestão: encontrar primeiro a série de $e^x - 1$, etc.)

- Encontrar a série de Taylor de $\sin(x^2)$ e de $\frac{1}{1+x^2}$, em $x = 0$. (sugestão: substituir x por x^2 na série de $\sin(x)$, etc.)

- Substituindo x por $\sqrt{x}$ (para $x \geq 0$) na série de Taylor de $\cos(x)$ (em $x = 0$), obtemos uma série de potências. Diga em que domínio esta série é igual a $\cos(\sqrt{x})$.

- Encontrar a série de Taylor de $e^{-\frac{1}{x^2}}$, em $x = 0$.

- Encontrar a série de Taylor de $\sqrt{1 + x^3}$, em $x = 0$ (sugestão: substituir x por x^3 na série de $\sqrt{1+x}$)

- Encontrar a série de Taylor de $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$, em $x = 0$ (sugestão: derivar termo a termo a série de $\sqrt{1+x^3}$)

- Encontrar a série de Taylor de $x \cdot \ln(x) - x$, em $x = 1$ (sugestão: primitivar termo a termo a série de $\ln(x)$)

Em todas as alinhas anteriores, calcular o raio de convergência das séries e o domínio no qual a série é igual à função, ou seja o domínio no qual o resto dos polinómios de Taylor tendem para zero quando n tende para infinito.