Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G15

a100714	Diogo Santos
a100608	Luís Ribeiro
a100647	Martim Félix

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\
4 \arrow[r] & 5 & 6 \arrow[d] \\
7 \arrow[u] & 8 \arrow[l] & 9 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\
5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 & 8 \arrow[d] \\
9 \arrow[u] & 10 \arrow[l] & 11 \arrow[l] & 12 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> $\square$

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f,g \rangle$, $f \times g$, $[f,g]$, $f + g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

Inverter as vogais de um string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo E.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (1), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (2).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo E e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo F). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\mathbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \mathbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\mathinner{.\,.}S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de $Stop$ na classe $Enum$;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\mathbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice G, página 9, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \mathsf{Dist}\ Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos ($Delay$) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \mathsf{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em db, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \rightarrow Stop \rightarrow \mathsf{Dist}\ Delay$$

$pdelay\ a\ b$ deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\mathinner{.\,.}b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

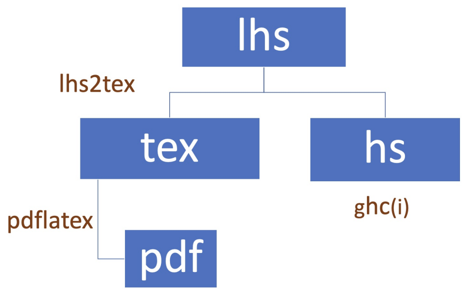
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [2], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo H com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo G disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[ll, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & & 1 + B \arrow[ll, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
\quad init = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [3].

[3] Lei (3.95) em [3], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{array}{l} f\ 0 = c \\ f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\ k\ 0 = a + b \\ k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{array}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{array}{l} f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\ \quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\ \quad init = (c, a + b) \end{array}$$

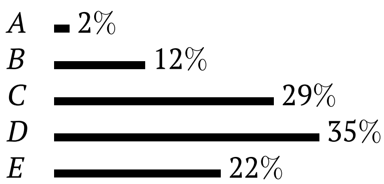
F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{array}{l} d1 :: \mathsf{Dist}\ Char \\ d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)] \end{array}$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [3] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'   35.0%
'C'   29.0%
'E'   22.0%
'B'   12.0%
'A'    2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"   20.0%
   "cinco"   20.0%
      "de"   20.0%
   "frase"   20.0%
"palavras"   20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist}\ B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

G Código fornecido

Problema 1

$$m1 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]$$
$$m2 = [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$

$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 6, 7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\,..\,20] \equiv [1, 20, 3, 18, 5, 16, 7, 14, 9, 12, 11, 10, 13, 8, 15, 6, 17, 4, 19, 2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [1].

Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\mathbf{type}\ Delay = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{aligned}
dados = [&((S0, S1), 0), ((S0, S1), 2), ((S0, S1), 0), ((S0, S1), 3), ((S0, S1), 3),\\
&((S1, S2), 0), ((S1, S2), 2), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 4),\\
&((S2, S3), 2), ((S2, S3), 2), ((S2, S3), 4), ((S2, S3), 0), ((S2, S3), 5),\\
&((S3, S4), 2), ((S3, S4), 3), ((S3, S4), 5), ((S3, S4), 2), ((S3, S4), 0),\\
&((S4, S5), 0), ((S4, S5), 5), ((S4, S5), 0), ((S4, S5), 7), ((S4, S5), -1)]
\end{aligned}$$

"Funcionalização" de listas:

$$\begin{aligned}
&mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a, b)] \rightarrow a \rightarrow Maybe\ b\\
&mkf = flip\ Prelude.lookup
\end{aligned}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{aligned}
&instantaneous :: \text{Dist}\ Delay\\
&instantaneous = D\ [(0, 1)]
\end{aligned}$$

H Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Análise do problema

Neste problema decidimos analisar bem as imagens de exemplo que apareciam no enunciado, pois achamos que com uma perceção visual do problema conseguimos mais rapidamente chegar a uma solução.

Após a dita análise conseguimos observar um certo **padrão** na travessia pedida, lembrando que uma matriz é apenas uma lista de listas:

1. A cabeça da lista mantém-se (e retira-se)
2. Os próximos elementos são os últimos das seguintes listas (e retira-se)
3. Inverte-se a ordem dos elementos de todas as sub-listas restantes, da própria matriz e volta-se ao passo 1.

Testemos então este **padrão** com o exemplo dado no enunciado, a matriz

$$mat = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]$$

Mantemos a lista resultado na variável *result*:

1. A cabeça da lista mantém-se (e retira-se):

   result = [1,2,3] e *mat* = [[4,5,6], [7,8,9]]

2. Os próximos elementos são os últimos das seguintes listas (e retira-se)

   result = [1,2,3,6,9] e *mat* = [[4,5], [7,8]]

3. Inverte-se a ordem dos elementos de todas as sub-listas restantes, da própria matriz e volta-se ao passo 1.

   result mantém-se. Primeiro inverter a ordem das sub-listas: *mat* = [[5,4], [8,7]]. Depois da própria matriz: *mat* = [[8,7], [5,4]]

Ao voltar-se ao passo 1. e repetir o processo chega-se ao resultado final de *result* = [1,2,3,6,9,8,7,4,5] que é o esperado.

Resolução

Partindo agora para a resolução do problema, começamos por definir um catamorfismo que tratasse de nos retornar os últimos elementos das sub-listas, originando este diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A^*)^* \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "lasts"'] & 1 + A^* \times (A^*)^* \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id+id\times lasts"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "{[nil, cons\cdot(last\times id)]}"]
\end{tikzcd} \qquad lasts = \llparenthesis\, [nil, cons \cdot (last \times id)] \,\rrparenthesis$$

Agora precisamos de algo que nos retorne as sub-listas da matriz sem os últimos elementos, pois partimos sempre da mesma matriz independentemente das operações que aplicamos, e o catamorfismo anterior e qualquer outro que usemos não alteram a "referência" da matriz.

Deu origem a este diagrama de um catamorfismo:

$$\begin{tikzcd}
(A^*)^* \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "myinits"'] & 1 + A^* \times (A^*)^* \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id+id\times myinits"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "{[nil, cons\cdot(init\times id)]}"]
\end{tikzcd} \qquad myinits = \llparenthesis\, [nil, cons \cdot (init \times id)] \,\rrparenthesis$$

Por fim é preciso algo que nos trate do ponto 3. do **padrão**. Um simples *reverse* não chega pois é preciso reverter as sub-listas também. De certa forma é preciso um "deep" reverse, que trate das duas coisas.

O diagrama do catamorfismo seguinte é apenas referente à parte de reverter as sublistas:

$$\begin{tikzcd}
(A^*)^* \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "aux"'] & 1 + A^* \times (A^*)^* \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id+id\times aux"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "{[nil, cons\cdot(reverse\times id)]}"]
\end{tikzcd} \qquad deepreverse = reverse \cdot \llparenthesis\, [nil, cons \cdot (reverse \times id)] \,\rrparenthesis$$

Com estas 3 funções definidas, podemos tratar de resolver por fim o problema:

$$
\begin{array}{l}
matrot :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a] \\
matrot\ [\,] = [\,] \\
matrot\ (h : t) = h +\!\!+\ lasts\ t +\!\!+\ matrot\ (deepreverse\ (myinits\ t)) \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad lasts = (\!|\, [nil, cons \cdot (last \times id)] \,|\!) \\
\qquad myinits = (\!|\, [nil, cons \cdot (init \times id)] \,|\!) \\
\qquad deepreverse = reverse \cdot (\!|\, [nil, cons \cdot (reverse \times id)] \,|\!)
\end{array}
$$

NB: O grupo gostaria de ter utilizado mais conhecimento desta cadeira para tentar tornar tudo *pointfree* no entanto esta foi a solução que conseguimos obter.

Problema 2

Análise do problema

Neste problema, a informação de que se trata de uma questão popular em entrevistas de emprego ajudou para pesquisar mais sobre este desafio. Rapidamente se chegou a soluções implementadas noutro tipo de linguagens como **C**, **C++**, **Java** e **Python**.

A que era mais aceite e apreciada, de uma forma sucinta, era uma solução que envolve dois *pointers*, um no início da String e outro no fim, em que se iam aproximando do "centro" da String e trocavam de referências quando o predicado era verificado. Tentamos ver se conseguiamos tirar proveito dessa solução mas não foi o caso.

Pensamos então melhor e chegamos à conclusão que podíamos utilizar uma lista auxiliar que (no contexto do *reverseVowels*) teria todas as vogais presentes na String, já pela ordem inversa. Com esta lista auxiliar seria percorrer ambas e quando o predicado se verificar na principal, construía-se a lista final com a cabeça da lista auxiliar. Caso contrário constrói-se com a cabeça da principal

Resolução

Começa-se por definir o predicado usado para o caso das vogais:

$$
\begin{array}{l}
isVowel :: Char \rightarrow Bool \\
isVowel = (\in \texttt{"aáàãâeéèêiíìîoóòõôuúùûAÁÀÃÂEÉÈÊIÍÌÎOÓÒÕÔUÚÙÛ"})
\end{array}
$$

A *reverseVowels* será apenas a mais genérica, *reverseByPredicate*, com o predicado definido anteriormente:

$$
\begin{array}{l}
reverseVowels :: String \rightarrow String \\
reverseVowels = reverseByPredicate\ isVowel
\end{array}
$$

A parte principal e mais desafiante começa agora, que seria definir a função genérica. Implementar a solução discutida na secção de análise em Haskell não seria algo complicado, no entanto queriamos tentar envolver mais conceitos da cadeira.

Tentamos então fazer diagramas para tentar perceber o que se poderia utilizar aqui. Olhando para a definição de catamorfismo:

$$
(\!|\, g \,|\!) = g \cdot F\ (\!|\, g \,|\!) \cdot \mathsf{out}
$$

Achamos que para o contexto do que queriamos obter, era o que mais se adequava. Não seria no entanto um catamorfismo já definido, teríamos que definir um "novo" pois estamos a trabalhar com as duas listas, principal e auxiliar.

Este foi o diagrama que, juntamente com a definição de catamorfismo, nos levou a essa conclusão:

$$\begin{tikzcd} A^* \times A^* \arrow[r, "out"'] \arrow[d, "f"'] & A^* + A \times (A^* \times A^*) \arrow[d, "id+id\times f"] \\ A^* & A^* + A \times A^* \arrow[l, "{[id,cons]}"] \end{tikzcd}$$

Este catamorfismo tem uma peculiaridade que é a necessidade de ser acompanhado pelo predicado requirido pelo problema. Isto levou-nos a considerar se seria válido chamar a esta solução um catamorfismo, no entanto, visto que segue a definição referida em cima, mantemos a nomenclatura.

Conseguimos então definir o BiFunctor:

$$B\ (f,g) = id + f \times g$$

Temos então a definição do *out* para esta estrutura de dados:

$$\begin{array}{l} outPredicateList :: (a \to Bool) \to ([a],[a]) \to [a] + (a,([a],[a])) \\ outPredicateList\ p\ ([\,], l) = i_1\ l \\ outPredicateList\ p\ (y : ys, x : xs) = \\ \quad \textbf{if}\ p\ x\ \textbf{then}\ i_2\ (y,(ys,xs))\ \textbf{else}\ i_2\ (x,(y : ys, xs)) \end{array}$$

Deixamos na primeira parte do *Either* a lista principal quando a auxiliar tiver sido toda percorrida. Na segunda parte, temos o conjunto com o elemento a "entrar" na lista resultado, e com as duas listas, principal e auxiliar.

Fica assim definido o catamorfismo:

$$cataPredicateList\ p\ g = g \cdot recList\ (cataPredicateList\ p\ g) \cdot outPredicateList\ p$$

Acabando então com a função genérica:

$$\begin{array}{l} reverseByPredicate :: (a \to Bool) \to [a] \to [a] \\ reverseByPredicate\ p = f\ p\ gene \cdot \langle reverse \cdot filter\ p, id \rangle \\ \quad \textbf{where} \\ \qquad f\ p\ gene = cataPredicateList\ p\ gene \\ \qquad gene = [id, cons] \end{array}$$

Antes do catamorfismo, criamos o par (lista auxiliar, lista principal). A lista auxiliar seria apenas filtrar a principal segundo o predicado e depois revertê-la.

Problema 3

Análise do Problema

Este é um desafio bastante interessante, porque possibilita um aumento em eficiência significativo quando comparado com a solução de forma recursiva. Ao observar a expressão matemática no corpo do somatório reparamos em algo interessante. Notamos que existe uma enorme semelhança com a definição da expressão do e^x, número de Euler:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{5}$$

Na verdade, se fixarmos $k = 2k + 1$ temos exatamente a expressão para *sinh* x (2). Lembramo-nos então de um exercício que ao se estudar para os testes escritos se resolveu que tratava de um problema semelhante mas para o número de Euler[1].

NB: Não mostramos a resolução do exercício mencionado pois é equiparado ao pedido para resolver no enunciado, como referido.

Resolução

Facilmente conseguimos perceber o valor de snh para $k = 0$:

$$snh\ x\ 0 = \frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} = \frac{x^1}{1!} = x$$

Agora tem de se ver o caso para $k = k + 1$

$$\mathrm{snh}\ \ x\ (k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{snh}\ \ x\ (k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{snh}\ \ x\ (k+1) = snh\ x\ k + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

Como temos $snh\ x\ (k+1)$ a depender do termo $\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$ definimos $h\ x\ k = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$

Repetimos agora o processo para $h\ x\ 0$:

$$h\ x\ 0 = \frac{x^{2\cdot 0+3}}{(2\cdot 0+3)!} = \frac{x^3}{6}$$

E para $h\ x\ (k+1)$:

$$\mathrm{h}\ \ x\ (k+1) = \frac{x^{2(k+1)+3}}{(2(k+1)+3)!}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{h}\ \ x\ (k+1) = \frac{x^{2k+3+2}}{(2k+3+2)!}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{h}\ \ x\ (k+1) = \frac{x^{2k+3}\cdot x^2}{(2k+3)!\cdot(2k+4)\cdot(2k+5)}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{h}\ \ x\ (k+1) = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{x^2}{(2k+4)\cdot(2k+5)}$$

$$\equiv$$

$$\mathrm{h}\ \ x\ (k+1) = h\ x\ k \cdot \frac{x^2}{4k^2+18k+20}$$

[1] Exercício (3.33) em [3], página 118.

Acontece mais uma vez a mesma coisa que em $snh\ x\ (k+1)$, o denominador da segunda parcela da soma em $h\ x\ (k+1)$ depende de k. Criamos entao $f\ k = 4k^2 + 18k + 20$.

Para esta parte não é preciso muitos mais cálculos, pois no anexo E é nos dado um exemplo envolvendo polinómios do segundo grau, que é exatamente o que $f\ k$ trata. Seguindo a resolução que lá mostra temos:

$$\begin{cases} \begin{cases} f\ 0 & = 20 \\ f\ (k+1) & = f\ k + g\ k \end{cases} \\ \begin{cases} g\ 0 & = 4 + 18 = 22 \\ g\ (k+1) & = g\ k + 2 \cdot 4 = g\ k + 8 \end{cases} \end{cases}$$

Em suma, temos então:

$$\begin{cases} \begin{cases} snh\ x\ 0 & = x \\ snh\ x\ (k+1) & = snh\ x\ k + h\ x\ k \end{cases} \\ \begin{cases} h\ x\ 0 & = \frac{x^3}{6} \\ \mathrm{h}\ x\ (k+1) & = h\ x\ k \cdot \frac{x^2}{f\ k} \end{cases} \\ \begin{cases} f\ 0 & = 20 \\ f\ (k+1) & = f\ k + g\ k \end{cases} \\ \begin{cases} g\ 0 & = 22 \\ g\ (k+1) & = g\ k + 8 \end{cases} \end{cases}$$

Com isto podemos então aplicar a *regra de algibeira* do anexo E:

$$\begin{array}{l} snh\ x = wrapper \cdot worker\ \textbf{where} \\ \quad worker = \mathrm{for}\ (loop\ x)\ (start\ x) \\ \quad wrapper\ (a, \_, \_, \_) = a \\ loop\ x\ (snh', h, f, g) = (snh' + h, h * (x ** 2\ /\ f), f + g, g + 8) \\ start\ x = (x, x ** 3\ /\ 6, 20, 22) \end{array}$$

Problema 4

Análise do Problema

Talvez o problema mais interessante, pelos seus efeitos práticos, mas também o que requeriu mais discussão para perceber por onde começar. Percebeu-se no entanto que o ínicio estaria pela implementação da função *mkdist*. O desafio aqui seria perceber como se iria calcular as probabilidades dos elementos. Basicamente será a probabilidade de um elemento occorrer na lista. Acabamos por perceber que se agruparmos os elementos iguais em sub-listas, podemos depois calcular a probabilidade desse elemento dividindo o tamanho da sub-lista desse elemento pelo tamanho da lista (inicial) total.

De seguida, com *mkdist* implementada, o próximo passo seria "preencher" a base de dados. Agora a tarefa é mais facilitada, teríamos que aplicar a função anterior aos conjuntos de segmentos obtidos em *dados*.

A parte mais simples seria a próxima, que era implementar *delay*. Com as funções *mkf* e *instantaneous* fornecidas no anexo G o nosso trabalho ficou facilitado se interpretarmos a *db* como uma espécie de **map** e *mkf* uma espécie de **get** dado uma key, para se obter o valor associado.

Por fim, teríamos que implementar a função "principal", *pdelay*. Aqui rapidamente percebemos que se, a partir das duas paragens dadas em argumento, obtivéssemos o caminho total (por exemplo, caminho de S0 a S3 seria [(S0, S1), (S1, S2), (S2, S3)]) bastaria fazer a probabilidade de *delay* acumulada.

Resolução

Vejamos agora como está implementado.

mkdist como referido usaria um função que calcula a probabilidade de cada elemento estar presente na lista:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{calcularDistribuicaoProbabilidades} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [a] \rightarrow [(a, \mathit{ProbRep})] \\
\mathit{calcularDistribuicaoProbabilidades}\ \mathit{lista} = \\
\quad \mathbf{let}\ \mathit{totalElementos} = \mathit{fromIntegral}\ \$\ \mathit{length}\ \mathit{lista} \\
\qquad \mathit{contagem} = \mathsf{map}\ \ (\lambda x \rightarrow (\mathit{head}\ x, \mathit{fromIntegral}\ (\mathit{length}\ x)\ /\ \mathit{totalElementos}))\ \$\ \mathit{group}\ \mathit{lista} \\
\quad \mathbf{in}\ \mathit{contagem}
\end{array}
$$

Restava então utilizar uma função definida na biblioteca de probabilidades fornecida, *mkD*, que cria uma distribuição dado uma lista de $(a, \mathit{ProbRep})$:

$$
\mathit{mkdist} = \mathit{mkD} \cdot \mathit{calcularDistribuicaoProbabilidades}
$$

Para construir a base de dados, utiliza-se a função *agrupar* na lista de dados, que agrupa os segmentos iguais em sub-listas. Depois cria-se então um par de segmento e a distribuição do seu atraso, com a *mkdist*.

NB: Usamos um sort em *agrupar* para ser possível os dados serem passados em qualquer ordem, embora os do enunciado estejam já ordenados por segmento:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{db} = f\ \ \mathit{dados}\ \mathbf{where} \\
\quad f = \mathsf{map}\ \ \mathit{constroiDb} \cdot \mathit{agrupar} \\
\quad \mathit{agrupar} = \mathit{groupBy}\ (\lambda x\ y \rightarrow \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y) \cdot \mathit{sort} \\
\quad \mathit{constroiDb} = \langle \pi_1 \cdot \mathit{head}, \mathit{mkdist} \cdot \mathsf{map}\ \ \pi_2 \rangle
\end{array}
$$

Para a função *delay* seria apenas verificar o caso do **Maybe** que o *mkf* retorna. É **importante** referir que o grupo assumiu que caso o resultado fosse **Nothing** o suposto seria usar a função *instantaneous*:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{delay}\ \mathit{seg} = \\
\quad \mathbf{case}\ \mathit{mkf}\ \ \mathit{db}\ \mathit{seg}\ \mathbf{of} \\
\qquad \mathit{Nothing} \rightarrow \mathit{instantaneous} \\
\qquad \mathit{Just}\ \mathit{distDelay} \rightarrow \mathit{distDelay}
\end{array}
$$

Finalmente, para implementar *pdelay*, como foi referido na parte de análise seria preciso uma função que dadas duas paragens retorna o caminho de uma a outra:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{caminho} :: \mathit{Stop} \rightarrow \mathit{Stop} \rightarrow [\mathit{Segment}] \\
\mathit{caminho}\ \mathit{start}\ \mathit{stop} = \mathit{zip}\ \mathit{stops}\ (\mathit{tail}\ \mathit{stops}) \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad \mathit{stops} = \mathit{enumFromTo}\ \mathit{start}\ \mathit{stop}
\end{array}
$$

Para a função de produzir a distribuição das probabilidades acumuladas, tiramos proveito do facto de **Dist** ser um Monad, facilitando e tornando elegante a implementação desta função:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{distAccum} :: \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} \rightarrow \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} \rightarrow \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} \\
\mathit{distAccum}\ \mathit{d1}\ \mathit{d2} = \mathbf{do} \\
\quad x \leftarrow \mathit{d1} \\
\quad y \leftarrow \mathit{d2} \\
\quad \mathit{return}\ (x + y)
\end{array}
$$

Tendo agora a função *pdelay* concluída, que aplica *delay* nos vários segmentos do caminho de s1 a s2. Logo após, utilizamos *foldr1*, uma variante da muito famosa operação *foldr* que é uma função de ordem superior que é usada para reduzir uma lista a um único valor. Esta variante assume que a lista nunca é vazia não necessitando de inicialização.

$$pdelay\ s1\ s2 = foldr1\ distAccum\ \$\ \mathsf{map}\ \ delay\ \$\ caminho\ s1\ s2$$

Index

References

[1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.

[2] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[3] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.