Álgebra lineal numérica

Polinomios ortogonales

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Noviembre, 2020

Polinomios ortogonales

Definición

El conjunto de funciones $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ es linealmente independiente en $[a, b]$ si

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) = 0, \ \forall x \in [a, b]$$

entonces $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Caso contrario linealmente dependiente.

Continuación...

Teorema

$\phi_j(x) \equiv$ representa un polinomio de grado j, entonces

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$$

es linealmente independiente en $[a, b]$.

Continuación...

Teorema

$\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ $\equiv$polinomios linealmente independientes en $\prod_n =$ conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$, entonces un elemento de $\prod_n$ puede ser escrito como una combinación lineal de $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$.

Continuación. . .

Definición

$w =$ función integrable es llamada de una función peso en el intervalo I si $w(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, mas $w(x) \neq 0$ en ningun subintervalo.

Continuación. . .

Ejemplo

$w(x) = \frac{1}{1-x^2}$ es una función peso.

Continuación...

Sean $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ linealmente independiente en $[a, b]$, $w(x)$ una función peso en $[a, b]$ y $f \in C[a, b]$. Podemos buscar minimizar

$$\begin{aligned} E(a_0, \ldots, a_n) &= \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \right]^2 dx \\ (f, g) &= \int_a^b w(x) f(x) g(x) \, dx \end{aligned}$$

estamos aproximando f en un espacio de dimensión finita (con base $\phi_k(x)$) relativo a un peso $w(x)$.

Continuación...

Ecuaciones normales

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b w(x)\,\phi_k(x)\,\phi_j(x)\,dx \right) a_k = \int_a^b w(x)\,f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

Tenemos un sistema de la forma $Ax = b$.

$$\left(\mathcal{F}, \phi_j\right) = \left(f, \phi_j\right) \; j = 0, \ldots, n \; \mathcal{F} = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \approx f(x)$$

En el caso de la base ortogonal ser tal que

$$\int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\,\phi_k(x)\,dx = \begin{cases} = 0, & j \neq k \\ = \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

Continuación. . .

Observación

$\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es dicha una base ortonormal cuando

$$\int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\,\phi_k(x)\,dx = \delta_{ij} \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ = 1, & i = j \end{cases}$$

Continuación...

Observación

Ortonormal

$$a_j = \frac{(f, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)}$$

Continuación. . .

Ejemplo

Sea $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, k = 1, 2, \ldots, n$

$\phi_{n+k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} kx$, $k = 1, \ldots, n-1$

$\{\phi_j\}$ es un conjunto ortonormal en $[-\pi, \pi]$ con $w(x) = 1$.

Continuación...

$$\mathcal{T}_n = \{\text{conjunto de todas las combinaciones lineales de los } \phi_j\}$$

Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ la aproximación de mínimos cuadrados por funciones en $\mathcal{T}_n$ es dada por $S_n(x) = \sum_{k=1}^{2n-1} a_k \phi_k(x)$.

Continuación...

Teorema

$\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$, definido abajo, es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a $w(x)$ donde $\phi_0(x) \equiv 1$, $\phi_1(x) = x - B_1$, donde

$$B_1 \equiv \frac{\int\limits_a^b x w(x)\, \phi_0^2(x)\, dx}{\int\limits_a^b w(x)\, \phi_0^2(x)\, dx}$$ *y para $k \geq 2$*

$\phi_k(x) = (x - B_k)\, \phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x)$ *con*

$$B_k = \frac{\int\limits_a^b x w(x)\, \phi_{k-1}^2(x)\, dx}{\int\limits_a^b w(x)\, \phi_{k-1}^2(x)\, dx}, \quad C_k = \frac{\int\limits_a^b x w(x)\, \phi_{k-1}(x)\, \phi_{k-2}(x)\, dx}{\int\limits_a^b w(x)\, \phi_{k-2}^2(x)\, dx}$$

Gram-Schimdt

Dados tres vectores a, b, c queremos q_1, q_2, q_3

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a}{\|a\|} \\ p &= \left(b^T q_1\right) q_1 \\ b - \left(b^T q_1\right) q_1 &= b^{'} \end{aligned}$$

Siguiendo esa idea tenemos el algoritmo de Gram-Schmidt

$$a_j^{'} = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left(q_i^T a_j\right) a_i \quad q_j = \frac{a_j^{'}}{\left\|a_j^{'}\right\|}$$