Álgebra lineal numérica

Descomposición de LU

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Setiembre, 2020

Descomposición de LU

Esa operación elemental $2E_3 + E_2 \to E_2$ hacemos esta operación elemento en la identidad nos da la siguiente matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Continuación...

Pre-multiplicando MA : matriz A con operaciones elementos impuesta, entonces

$$(M_m M_{m-1} \dots M_2 M_1)\, Ax = Ux = \widetilde{b} = (M_m M_{m-1} \dots M_2 M_1)\, b$$

Notar que M^{-1} es la matriz M con el multiplicador multiplicado por (-1).
Acontece

$$\left(M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1} M_m^{-1}\right) Ux = b$$

Continuación...

Como M_j son triangulares inferiores para cada $j = 1, \ldots, m$, acontece que

$$L = \left(M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{m-1}^{-1} M_m^{-1} \right)$$

es triangular inferior.

Sustitución progresiva

Si

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_1 - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

Uso LU para resolver sistemas lineales

Dada el sistema $Ax = b$ cuadrático, hallar la descomposición LU

$$LUx = b$$

Luego

$$\begin{cases} Ly = b & \text{aplicar sustitución progresiva} \\ Ux = y & \text{aplicar sustitución regresiva} \end{cases}$$

Descomposición PLU

Dada una matriz $A_{n\times n}$ vamos a encontrar matrices P, L, U tales que

$$PA = LU$$

Resolución de sistemas lineales mediante la descomposición *PLU*

Dada el sistema $Ax = b$ cuadrático, hallar la descomposición PLU

$$PAx = Pb$$

Luego

$$\begin{cases} Ly = Pb & \text{aplicar sustitución progresiva} \\ Ux = y & \text{aplicar sustitución regresiva} \end{cases}$$

Continuación. . .

Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Resolver mediante descomposición *PLU* aplicando la técnica de pivotéo parcial