# Álgebra lineal numérica

## Método iterativos para resolver ecuaciones lineales

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Octubre, 2020

# Métodos iterativos para resolver ecuaciones lineales

## Definición

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz convergente si para cada $i, j = 1, \ldots, n$

$$\lim_{n \to \infty} a_{i,j}(n) = 0$$

donde $a_{i,j}(n)$ es una entrada $i, j$ de la matriz $A^n$.

# Continuación...

## Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, entonces $A$ es convergente una vez que

$$A^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

## Continuación...

**Notación**. $\sigma(A)$: el espectro de la matriz $A$.
$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ es el radio espectral.

# Continuación...

**Teorema**

*Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son equivalentes*

1. *$A$ es convergente.*
2. $\lim\limits_{m\to\infty} \|A^m\| = 0$ *para alguna norma natural.*
3. $\rho(A) < 1$.

# Método de Jacobi

Dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ se va a estudiar soluciones de la ecuación

$$Ax = b$$

donde $\det(A) \neq 0$ y $b \neq 0$.
Se va a descomponer la matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ como $D = \mathrm{diag}(a_{ii})$ y $R = A - D$.

# Continuación...

$$A = D + R$$

en que

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D + R)\, x = Ax = b \Rightarrow Dx = -Rx + b$$

# Continuación...

Entonces

$$x = D^{-1}\left(-Rx + b\right)$$

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad \text{dato inicial} \\ x^1 &= D^{-1}\left(-Rx^0 + b\right) \\ &\vdots \\ x^{k+1} &= D^{-1}\left(-Rx^k + b\right) = -D^{-1}Rx^k + D^{-1}b \end{aligned}$$

Asi

$$x^{k+1} = Tx^K + c$$

en que $T = -D^{-1}R$ y $c = D^{-1}b$.
Para cada $i = 1, \ldots, n$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k\right)$$

## Continuación...

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$$

se puede reescribir

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(4 - x_2) \\ x_2 = \frac{1}{6}(5 + x_1) \end{cases}$$

También se reescribe en la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde $G(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}(4 - x_2), \frac{1}{6}(5 + x_1)\right)$ es apropiada, entonces para cierto $x_0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, la suceción

$$x_0, G(x_0), G^2(x_0), \ldots$$

converje a un punto fijo de $G$.

# Método de Jacobi

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

se puede reescribir en la forma (Asumiendo que $a_{ii} \neq 0$):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\right) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1})\right) \end{cases}$$

# Fórmula de recurrencia del método de Jacobi

La fórmula de recurrencia del método de Jacobi es:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \left(a_{12}x_2^k + \ldots + a_{1n}x_n^k\right)\right) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \left(a_{n1}x_1^k + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^k\right)\right) \end{cases}$$

Notar que

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k\right)$$

# Continuación...

## Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1. Realizar los arreglos necesarios para aplicar el método de Jacobi y luego expresar matricialmente la fórmula recursiva de Jacobi para este caso.
2. Aplicar el método de Jacobi, con $x^0 = (1, 0, -1)$ hasta que $\left\|x^i - x^{i-1}\right\|_1 < 10^{-4}$.

# Continuación...

## Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

1. Realizar los arreglos necesarios para aplicar el método de Jacobi y luego expresar matricialmente la fórmula recursiva de Jacobi para este caso.
2. Aplicar el método de Jacobi, con $x^0 = (0, 0, 0)$ hasta que $\left\| x^i - x^{i-1} \right\|_1 < 10^{-5}$.

## Método de Gauss-Seidel

$$D = \mathrm{diag}(a_{ii}), \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = (D + L + U)\, x = b \Rightarrow (D + L)\, x = -Ux + b$$

Si $a_{ii} \neq 0$ para todo $i$, entonces $\det(D + L) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$.

$$x = -(D + L)^{-1} Ux + (D + L)^{-1} b = Tx + c$$

# Continuación. . .

$$
\begin{aligned}
x^0 \quad &: \quad \text{dato inicial} \\
&\vdots \\
x^{k+1} \quad &= \quad Tx^K + c
\end{aligned}
$$

# Continuación. . .

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} = -a_{12}x_2^k - \ldots - a_{1n}x_n^k + b_1 \\ a_{12}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = -a_{23}x_3^k - \ldots - a_{2n}x_n^k + b_2 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1^{k+1} + a_{2n}x_2^{k+1} + \ldots + a_{nn}x_n^{k+1} = b_n \end{cases}$$

Acontece que

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^k\right) \\ x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{12}x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^k\right) \\ &\vdots \\ x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \end{aligned}$$

# Continuación...

Sea la sucesión

$$\begin{aligned} x^0 &= \text{dato inicial} \\ x^{k+1} &= Tx^k + c \end{aligned}$$

Suponiendo que $x^k$ converge, sea $x^L = \lim_{k \longrightarrow \infty} x^k$

## Continuación...

Como $x^L = Tx^L + c \Leftrightarrow (I - T)\,x^L = c$.

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= Tx^k + c \\
&= T\left(Tx^{k-1} + c\right) + c = T^2 x^{k-1} + c + Tc \\
&\vdots \\
&= T^k x^0 + \left(I + T + \ldots + T^{k-1}\right) c \overset{k\to\infty}{\to} (I\text{-T})^{-1}\, c
\end{aligned}
$$

Si $T$ fuera convergente ($\rho\,(T) < 1$), entonces $\lim_{k\to\infty} T^k x^0 = 0$.

# Continuación. . .

Si $S_k = I + T + \ldots + T^k$, entonces

$$(I - T)\, S_k = I - T^{k+1} \Rightarrow S_k = (I - T)^{-1} \left(I - T^{k+1}\right)$$

Asi $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k = (I - T)^{-1}$

# Continuación...

Si la sucesión $x^k$ es convergente para cada dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\rho(T) < 1$.
Sea $x^0$ y sea $x^L = \lim_{k\to\infty} x^k$

$$x^L - x^k = Tx^L + c - \left(Tx^{k-1} + c\right) = T\left(x^L - x^{k-1}\right) = \ldots = T\left(x^L - x^0\right)$$

Dado $z \in \mathbb{R}^n$ con $x^0 = x^L - z$, entonces

$$T^k z = T^k\left(x^L - x^0\right) = x^L - x^k$$

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = 0 \text{ o sea } T^k \to 0 \Leftrightarrow \rho(T) < 1$$

# Continuación. . .

## Ejemplo

Usar el método de Gauss-Seidel para resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases}$$

# Continuación...

A es estrictamente diagonal dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

### Teorema

*Sea A estrictamente diagonal dominante, entonces cualquier $x^0$ la sucesión $\{x^k\}$ de los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel converge a la única solución del problema $Ax = b$.*

# Continuación. . .

**Nota**. Por el teorema de Gerschgorim toda matriz estrictamente dominante es inversible.