Dimensión

viernes, 2 de octubre de 2020 7:00 a. m.

Definición.
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Decimos que un subconjunto $\mathcal{B}$ de V es una base de V si
i) $\mathcal{B}$ es conj. generador de V y
ii) $\mathcal{B}$ es l.i.

Ejemplos.
1. $V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ espacio vectorial real. Aquí tenemos un conj. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V, llamada base canónica.

En efecto:

i) B es conj. generador de V, puesto que si $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{31} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B$ es conj. generador.

ii) B es l.i. puesto que

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 0 & \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 & \alpha_5 = 0 \\ \alpha_3 = 0 & \alpha_6 = 0 \end{matrix} \Rightarrow B \text{ es l.i.}$$

$\therefore B$ es base.

2. (pág 59)
Encontrar una base para el subespacio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \underline{x-y=0} \wedge \underline{x+2y+t=0}\}$ de $\mathbb{R}^4$ espacio vectorial real.

Solución

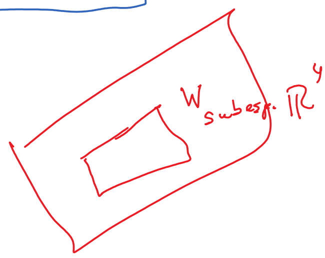
i) Hallemos un conj. generador para W:

$$(x,y,z,t) \in W \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x \checkmark \\ t = -x-2y = -3x \end{array}$$

$$\Rightarrow (x,y,z,t) = (x,x,z,-3x) = (x,x,0,-3x) + (0,0,z,0)$$

$$\boxed{(x,y,z,t) = x\,(1,1,0,-3) + z\,(0,0,1,0)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{B = \{(1,1,0,-3),\ (0,0,1,0)\}}$ es conj. generador de W.



ii) ¿B es l.i.?

Tomemos $\boxed{\alpha_1 (1,1,0,-3) + \alpha_2 (0,0,1,0) = (0,0,0,0)}$

$$(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, -3\alpha_1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow$ B es l.i.

. B es base de W.

Proposición

Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ no es base de V.

Teorema

Todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finitamente generado admite una base.

Dimensión

Teorema.

En un espacio vectorial $V \neq \{0\}$ finitamente generado toda base posee el mismo número de elementos.

Definición

Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Si $V = \{0\}$ definimos la dimensión de V como 0. Si $V \neq \{0\}$ definimos la dimensión de V como el número de elementos de una base cualquiera de V. Usaremos la notación

$$\dim_{\mathbb{K}} V$$

Definición

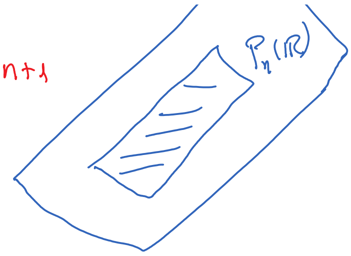
Si un espacio vectorial no es finitamente generado decimos que V posee dimensión infinita.

Ejemplos

1. $V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = 6$
2. $V = P_n(\mathbb{R})$ es espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n+1$

1. $V = M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ es espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}}$

2. $V = P_n(\mathbb{R})$ es espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n+1$



$\hookrightarrow \underbrace{\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}}_{n+1}$ base canónica

3. $V = P(\mathbb{R})$ espacio vectorial real conformado por todos los polinomios con coeficientes reales con dimensión INFINITA.

Observe que

$$B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\} \text{ es base de } V.$$

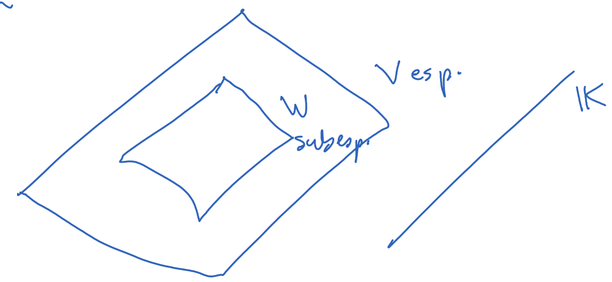
4. $V = C([0,1], \mathbb{R})$ espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{R}$.

Proposición

En un espacio vectorial de dimensión n cualquier sucesión de vectores con más de n elementos es linealmente dependiente.

Corolario

Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita también tiene dimensión finita



$$\dim_{\mathbb{K}} V < +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$\dim_{\mathbb{K}} W < +\infty$$

Corolario

Si V es espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ y $u_1, \ldots, u_n$ son vectores de V l.i. $\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de V.

Teorema (Completamiento)

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $\underline{\underline{n}}$. Si los vectores $u_1, \ldots, u_r$ son l.i. en V con $r < n$ entonces $\exists\, u_{r+1}, \ldots, u_n$ tales que

$$u_1, \ldots, u_r, \overbrace{u_{r+1}, \ldots, u_n}$$

forman una base de V.

Proposición

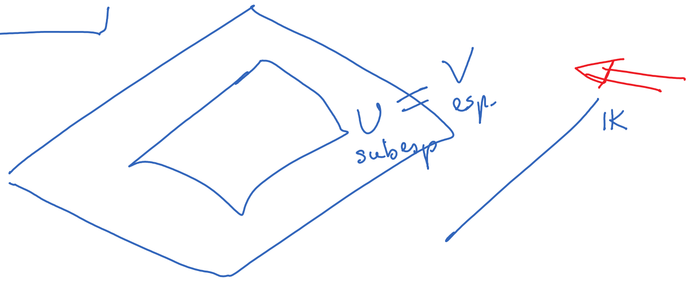
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si U y W son subespacios vectoriales de V $\Rightarrow$

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

Corolario

Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita V. Si $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial de [illegible]
V. Si $\underbrace{\dim U = \dim V}$ $\Rightarrow$ $U = V$



$$\dim_{\mathbb{K}} V < +\infty$$
$$||$$
$$\dim_{\mathbb{K}} U < +\infty$$

Coordenadas

Sea V un espacio vectorial finitamente generado y B una base de V formada por los vectores $\underline{u_1, \dots, u_n}$.

Propesición

Sean $u_1, \dots, u_n$ vectores l. i. del espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Entonces $v \in [u_1, \dots, u_n]$ se escribe de forma única como

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

son únicos

Así podemos decir que todo elemento $\underline{u \in V}$ se escribe

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

con coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ únicamente determinados. Estos coeficientes son denominados coordenadas de u en relación a la base B. Representamos

$$u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B^T = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)_B$$

Ejemplos

1. (pág 59 Apuntes) Determinar las coordenadas del vector $\underline{u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3}$ en relación a la base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

a) Base canónica $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Tenemos

$$u = (-1, 8, 5) = (-1, 0, 0) + (0, 8, 0) + (0, 0, 5) = \underline{-1}(1,0,0) + \underline{8}(0,1,0) + \underline{5}(0,0,1)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_B = (-1, 8, 5)_B}$$

b) $B' = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ base

b) $B' = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ base

Tenemos

$$u = (-1,8,5) = \alpha_1 (0,0,1) + \alpha_2 (0,1,1) + \alpha_3 (1,1,1)$$

? ? ?

$$(-1,8,5) = (0,0,\alpha_1) + (0,\alpha_2,\alpha_2) + (\alpha_3,\alpha_3,\alpha_3)$$

$$(-1,8,5) = (\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -1 = \alpha_3 \\ 8 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 = 9 \\ \alpha_1 = -3 \end{array}}$$

$$\Rightarrow u_{B'} = (-3, 9, -1)_{B'} = -3(0,0,1) + 9(0,1,1) - 1(1,1,1)$$