Álgebra lineal numérica

Condicionamiento y estabilidad

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Octubre, 2020

Breve revisión de norma vectorial

$N(u) = \|u\|$ vector u.

1. $N(u) > 0$, $u \neq 0$.
2. $N(\alpha u) = |\alpha| \, N(u)$.
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$

Continuación...

Mas usuales

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \sum_{i=1}^{N} |u_i| \\
\|u\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{N} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\|u\|_\infty &= \max_i \{|u_i|\}
\end{aligned}$$

Para matrices $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Continuación...

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.
2. Si A es no singular, entonces $\frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|Ax\|$.
3. $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$.

Normas en $\mathbb{R}^{m \times n}$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty}$$

Continuación. . .

Haremos una estimativa de error de la solución del sistema $Ax = b$.

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{solución exacta} \\ x_a &\equiv \text{solución aproximada} \\ x - x_a &\equiv e \text{ (vector error)} \end{aligned}$$

$$\widetilde{b} = b - Ax_a = r \text{ (vector residuo)}$$

Continuación...

Como $r = Ax - Ax_a = Ae$, entonces $A^{-1}r = e$, usando 3) acontece que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|A\|} &\leq \frac{\|A^{-1}r\|}{\|r\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \\ \frac{\|r\|}{\|A\|} &\leq \|e\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|r\| \end{aligned}$$

Continuación...

Como $Ax = b$, usando 3) acontece que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left\|A^{-1}\right\|} &\leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \\ \frac{1}{\left\|A^{-1}\right\| \|b\|} &\leq \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \end{aligned}$$

Número de condición de una matriz

Usando estas dos desigualdades tenemos que

$$\frac{1}{\|A\| \left\|A^{-1}\right\|} \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad \leq \quad \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

$\mathrm{cond}\,(A) = \mathcal{K}\,(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \equiv$número de condicionamiento de A.

Continuación...

Observación

1. Si $\operatorname{cond}(A) = 1$, entonces $\frac{\|x-x_a\|}{\|x\|} = \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}$.
2. $\operatorname{cond}(A)$ no es muy grande, entonces nos dá un intervalo pequeño, el error relativo de la solución.
3. $\operatorname{cond}(A) >> 1$ matriz mal-condicionada.
4. Regla empírica $cond\,(A) = \Theta\,(10^p)$, entonces estamos perdiendo entorno de p-dígitos de precisión.

Continuación. . .

Ejemplo

Calcular el número de condición de

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Continuación...

Ejemplo

Si $B = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verificar que $\mathrm{cond}_1\left(B\right) = \Theta\left(10^4\right)$.

Continuación...

Ejemplo

Resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}0001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$