# Álgebra lineal numérica

## Método de eliminación Gaussiana

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Setiembre, 2020

# Método de eliminación Gaussiana

Si $E_i$ es la ecuación de la fila $i$, definimos las tres operaciones elementales que no alteran el sistema:

1. $\lambda E_i \to E_i$ (re-escalonamiento).
2. $E_i + \lambda E_j \to E_i$ (combinación lineal).
3. $E_i \longleftrightarrow E_j$ (intercambio de filas).

# Método de Gauss

Dado $Ax = b$, entonces

1. Algoritmo usa la matriz ampliada $\left[A \vdots b\right]$.
2. Aplicación de operaciones elementales.
3. La meta es llegar a una matriz triangular superior.

# Sustitución regresiva

Si

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}\left(\frac{b_n}{a_{nn}}\right)}{a_{n-1n-1}} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{1n}\left(\frac{b_n}{a_{nn}}\right) - \ldots - a_{12}\,(*)}{a_{11}} \end{aligned}$$

# MEG

Algoritmo usa la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} \overline{*} & \overline{*} & \dots & \overline{*} & \overline{*} \\ 0 & \overline{*} & \dots & \overline{*} & \overline{*} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \overline{*} & \overline{*} \end{array}\right]$$

# Continuación...

## Ejemplo

Resolver

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

# Continuación...

### Ejemplo

Resolver

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

## Eliminación Gaussiana

Notar que el computador no trabaja en esta base $\pm 0, d_1 d_2 d_3 * 10^m$ sino en base 2, entonces aparece un problema en sistemas lineales. En aproximaciones aritméticas aparecen **arredondamiento** o **truncamiento**.

## Continuación...

### Ejemplo

Trabajar el siguiente sistema

$$\begin{cases} 0,0001x_1 + x_2 = 1 \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 = 1 \end{cases}$$

con 3 dígitos de precisión.
Notar que la solución exacta es $x_1 = \frac{10000}{9999}$, $x_2 = \frac{9998}{9999}$, pero el MEG nos da

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1 \\ x_2 &\approx 1 \end{aligned}$$

# Continuación...

### Ejemplo

En el siguiente sistema

$$\begin{cases} 0,100 * 10^{-3}x_1 + 0,100 * 10x_2 = 0,100 * 10 \\ 0,500 * 10^{0}x_1 + 0,500 * 10^{0}x_2 = 0,100 * 10 \end{cases}$$

nos da un arredondamiento catrastrófico debido a la aritmética con número finito.