Álgebra lineal numérica

Interpolación y aproximación polinomial

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Noviembre, 2020

Interpolación polinomial

Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ e $y_0, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathcal{P}_{\mathrm{N}}[\mathbb{R}]$ con $P(x_j) = y_j$ para $j = 0, 1, \ldots, N$

$$\begin{array}{rcl} \delta_{x_j} : \mathcal{P}_{\mathrm{N}}[\mathbb{R}] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \delta_{x_j}(P) = P(x_j) \end{array}$$

Notar que δ_{x_j} es una aplicación lineal.

Continuación...

Sea $\left\{1, x, \ldots, x^N\right\}$ una base canónica de $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}\left[\mathbb{R}\right]$, ¿cuál es la matriz del operador δ_{x_j} en la base canónica?

Continuación...

En $\left[1, x, \ldots, x^N\right]$, si $P(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$, entonces

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

Continuación...

Sea

$$\begin{aligned} A : \mathcal{P}_{\mathrm{N}}[\mathbb{R}] &\rightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ P &\mapsto A(P) = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en la base canónica la representación del operador A es:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Calcular el polinomio interpolador es equivalente a resolver el sistema lineal 1.

Continuación...

La matriz A es llamada la matriz de Vandermonde.

n	cond (en la norma 2)
3	99
4	686
10	$O\left(10^8\right)$
13	$O\left(10^{12}\right)$

Aproximación polinomial

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vamos a procurar una mejor aproximación polinomial de f dado $N = \mathrm{grad}\,(P)$.

Continuación...

En $C([a,b],\mathbb{R})$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dado $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{N}}[\mathbb{R}]$, entonces

$$d(P,f) = \|P - f\|_2 = \left(\int_a^b |P(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Continuación. . .

$$E(c_0, \ldots, c_N) = \int_a^b |P(x) - f(x)|^2 \, dx, \quad \text{para} \quad P = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$$

Vamos a minimizar $E : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}[\mathbb{R}]$.

Continuación...

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial c_0} &= \frac{\partial}{c_0}\left[\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{N} c_k x^k - f(x)\right)^2\right] dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial c_0}\left[\sum_{k=0}^{N} c_k x^k - f(x)\right]^2 dx \\ &= \int_a^b 2\left[\sum_{k=0}^{N} c_k x^k - f(x)\right] dx\end{aligned}$$

Para $j = 0, 1, \ldots, N$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = \int_a^b 2\left[\sum_{k=0}^{N} c_k x^k - f(x)\right] x^j dx = 0$$

Continuación...

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sum_{k=0}^{N} c_k x^{k+j} dx &= \int_a^b f(x)\, x^j dx,\ j = 0, \ldots, N \\
\sum_{k=0}^{N} \int_a^b x^{k+j} dx\, c_k &= \int_a^b f(x)\, x^j dx,\ j = 0, \ldots, N
\end{aligned}$$

Entonces

$$Hc = F,\ k, j = 1, \ldots, N+1$$

donde

$$H_{k,j} = \int_a^b x^{k+j-2} dx$$

H es la matriz de Hilbert.

Continuación...

La matriz de Hilbert clásica es cuando $a = 0$ y $b = 1$.

n	$\operatorname{cond}(H)$
3	525
4	$O\left(10^4\right)$
10	$O\left(10^{13}\right)$
15	$O\left(10^{14}\right)$

Continuación...

Teorema (Teorema de Wierstrass)

Sea f definida y continua en $[a, b]$ *con* $\epsilon > 0$ *dado, entonces existe un polinomio* $\mathtt{P}$*definido en* $[a, b]$ *tal que*

$$|f(x) - \mathtt{P}(x)| < \epsilon, \ \forall x \in [a, b]$$