Segundo examen de Álgebra Lineal Numérica

Sección: A

1) Probar la desigualdad

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

donde A es una matriz no singular, $b \neq 0$ es un vector, x es la solución del sistema $Ax=b$ y $x+\delta x$ es la solución del sistema perturbado $A(x+\delta x) = b+\delta b$.

Como $b+\delta b = A(x+\delta x) = \underbrace{Ax}_{b} + A\delta x = b + \underbrace{A\delta x}$ entonces

$$A(\delta x) = \delta b \Rightarrow \boxed{\delta x = A^{-1}\delta b}$$

Entonces

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \overset{(1)}{\leq} \|A^{-1}\|\|\delta b\| \qquad \varnothing_1$$

Siendo que $Ax=b$, entonces

$$\|b\| = \|Ax\| \overset{(1)}{\leq} \|A\|\|x\| \qquad \varnothing_2$$

Multiplicando las desigualdades $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$ conseguimos

$$\|\delta x\|\|b\| \leq \underbrace{\|A\|\|A^{-1}\|}\|\delta b\|\|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

2) Resolver los siguientes sistemas

$$\begin{bmatrix} 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

¿La matriz A es mal condicionada?

```
>> A=[1.0001 1; 1 1];
>> b=[2.0001; 2];
>> c=[2; 2]
>> condest(A)
      4.0004x10^4
>> det(A)= 1.0000x10^-4 = 0.0001
```

Por lo tanto, A es mal condicionada

$>> \quad x = A\backslash b$

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$

$>> \quad x = A\backslash c$

$x_1 = 0.0000$
$x_2 = 2.0000$

3) La línea recta $y(x) = ax + b$ debe ajustar a los datos

x_i	4	5	9	10	12	14	18	22
y_i	7	8	9	12	15	20	26	35

Determinar los parámetros de a y b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 18 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}_{8\times 2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix}_{8\times 1}$$

```
>> A=[1 4; 1 5; 1 9; 1 10; 1 12; 1 14; 1 14; 1 18; 1 22];
>> b=[7;8;9;12;15;20;26;35];
>> x=A\b   % Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial en Matlab
```

$b = x_1 = -1.91054613935168$

$a = x_2 = 1.56685499058380$

$r = 0.974762942$ $\qquad\qquad$ 95.02%

$y = 1.5669x - 1.9105$

segunda forma

$$\begin{cases} 1376a + 94b = 1967 \\ 94a + 8b = 132 \end{cases}$$