Álgebra lineal numérica

Aproximación de valores propios

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Diciembre, 2020

Aproximación de valores propios

Sea $A_{n\times n}$ diagonalizable, entonces

$$A\overrightarrow{x_i} = \lambda_i \overrightarrow{x_i},\ i = 1, \ldots, n$$

donde $\overrightarrow{x_i}$- vectores propios linealmente independiente y $\lambda_i \equiv$valores propios.

Continuación...

Si $(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{x}$ no trivial si $|A - \lambda I| = 0$.
$|A - \lambda I| =$polinomio característico de grado n en λ.
Entonces n raíces complejas λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Continuación. . .

Sea $M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2} & \ldots & \overrightarrow{x_n} \\ \hline \end{array}$ llamada (algunas veces) de matriz modal, entonces

$$M^{-1}AM = \text{人}, \ \text{人} \equiv \operatorname{diag}\{\lambda_i\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Continuación...

Si λ_i tiene multiplicidad algebraica m y multiplicidad geométrica 1 (1 vector propio linealmente independiente asociado a este valor propio), entonces tenemos que A no es diagonalizable mas puede ser escrita en la forma de Jordan.

Continuación...

Para matrices defectuosas ($\overline{n}$-diagonal), existen M y M^{-1} tales que

$$M^{-1}AM = J$$

Hechos de Álgebra Lineal

1. λ_i distintos, entonces $\overrightarrow{x_i}$ linealmente independiente.
2. A y B matrices simétricas, entonces $A = S^{-1}BS$. Por consiguiente $\sigma(A) = \sigma(B)$.
3. A simétrica, entonces $Q^{-1}AQ = \curlywedge$, $Q^{-1} = Q^T$ (ortogonal), $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
4. Teorema de Schur: $A_{n\times n}$ cualquiera, entonces existe M (no singular) tal que

   $$M^{-1}AM = U$$

   Se puede escojer M de forma que ella sea unitaria. $\|Mx\|_2 = \|x\|_2$.

Hechos de Álgebra Lineal

1. A es matriz simétrica positiva definida si y solo si $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.
2. Teorema del círculo de Gerschgorin: Sea $A_{n\times n}$ y R_i el disco en el plano complejo

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

centrado en a_{ii}, entonces $\sigma(A) \subset R = \cup_{i=1}^{n} R_i$.

Continuación...

Ejemplo

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces $\sigma(A) \cong \{1{,}9, 4{,}6, 8{,}5\}$. Por el teorema de Gerschgorin tenemos que

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 2\} \\ R_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\} \\ R_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 9| \leq 2\} \end{aligned}$$