Primer examen de Álgebra Lineal Numérica

1 Dados los espacios vectoriales E y F probar que $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E,F)$ (el espacio vectorial real de las funciones reales de una variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
Notar que $\mathcal{L}(E,F) \subseteq \mathcal{F}(E,F)$

1.1. La función nula $O: E \to F$ definida por $O(v) = 0_F$ para todo $v \in E$ es lineal, por tanto $O \in \mathcal{L}(E,F)$.

1.2. Si $T, R: E \to F$ son lineales, entonces

$$(T+R)(u+v) = T(u+v) + R(u+v) = T(u) + T(v) + R(u) + R(v)$$
$$= (T+R)(u) + (T+R)(v)$$

esto es, $T, R \in \mathcal{L}(E,R)$ acontece que $T+R \in \mathcal{L}(E,F)$.

1.3) Si $T: E \to F$ es lineal, entonces

$$\alpha T(v) = \alpha(T(v)) = (\alpha T)(v)$$

esto es, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ acontece que $\alpha T \in \mathcal{L}(E,F)$.

2) Probar que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de las funciones infinitamente derivable, $C^\infty(\mathbb{R})$.

Supongamos que

$$(0) \quad \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} + \alpha_4 e^{4x} = 0 \quad (0: \text{función nula})$$

Derivando y dividiendo por e^x sucesivamente, se tiene

$$\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + 3\alpha_3 e^{3x} + 4\alpha_4 e^{4x} = 0 \quad \left(\frac{1}{e^x} \neq 0\right)$$

$$(1) \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 e^x + 3\alpha_3 e^{2x} + 4\alpha_4 e^{3x} = 0$$

$$2\alpha_2 e^x + 6\alpha_3 e^{2x} + 12\alpha_4 e^{3x} = 0 \quad \left(\frac{1}{e^x}\right)$$

$$(2) \quad 2\alpha_2 + 6\alpha_3 e^x + 12\alpha_4 e^{2x} = 0$$

$$6\alpha_3 e^x + 24\alpha_4 e^{2x} = 0 \quad \left(\frac{1}{e^x}\right)$$

$$(3) \quad 6\alpha_3 + 24\alpha_4 e^x = 0$$

$$24\alpha_4 e^x = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = 0} \ *$$

Sustituyendo $\alpha_4 = 0$ en la antepenúltima ecuación se concluye que

$\boxed{\alpha_3 = 0}$ $(**)$

Sustituyendo $(*)$ y $(**)$ en (2), se consigue

$\boxed{\alpha_2 = 0}$ $(***)$

Sustituyendo $(*)$, $(**)$ y $(***)$ en (1), se obtiene

$\boxed{\alpha_1 = 0}$ $(****)$

Finalmente, sustituyendo $(*)$, $(**)$, $(***)$ y $(****)$ en (0), se tiene

$\boxed{\alpha_0 = 0}$

Por lo tanto, $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es L.I.

3) Sea $\beta = \{1, x, \ldots, x^N\}$ la base canónica de $P_N[\mathbb{R}]$ y sea $T: P_N[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^{N+1}$ tal que

$$T[p] = \begin{bmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_N) \end{bmatrix} \leftrightarrow (p(x_0), \ldots, p(x_N))$$

en la base canónica, hallar la representación de la transformada lineal T.

Si $\beta' = \{e_1, \ldots, e_N, e_{N+1}\}$ base canónica de $\mathbb{R}^{N+1}$

$T(1) = (1, \ldots, 1) = 1e_1 + \cdots + 1e_{N+1}$

$T(x) = (x_0, \ldots, x_N) = x_0 e_1 + \cdots + x_N e_{N+1}$

$T(x^2) = (x_0^2, \ldots, x_N^2) = x_0^2 e_1 + \cdots + x_N^2 e_{N+1}$

$\vdots$

$T(x^N) = (x_0^N, \ldots, x_N^N) = x_0^N e_1 + \cdots + x_N^N e_{N+1}$

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$