Álgebra lineal numérica

Método de la potencia

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Diciembre, 2020

Método de la potencia

Si $A_{n\times n}$ y por hipótesis el mayor valor propio es simple

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

A es diagonalizable con vectores propios $\overrightarrow{v}_k$ linealmente independiente.

Continuación...

Luego

$$\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{v_j} \tag{1}$$

$$A\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j \overrightarrow{v_j}$$

$$A^2\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 \overrightarrow{v_j}$$

Asi

$$A^k\overrightarrow{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \overrightarrow{v_j}$$

Continuación...

Entonces

$$\lim_{k \to \infty} A^k \overrightarrow{x} = \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k \alpha_1 \overrightarrow{v_1}$$

Algoritmo

*N*0: Sea $\overrightarrow{x}^{(0)}$ un vector tal que 1 normalizada $\left\|\overrightarrow{x}^{(0)}\right\| = 1$ donde $\overrightarrow{x}^{(0)}_{p_0} = 1$.

*S*0: $\overrightarrow{y}^{(1)} = A\overrightarrow{x}^{(0)}$ y definimos $\mu^{(1)} = \overrightarrow{y}^{(1)}_{p_0}$.

Podemos excribir (donde $v^{(j)}_{p_0} = \left(v_j\right)_{p_0}$)

$$\mu^{(1)} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}} \quad = \quad \frac{\alpha_1 \lambda_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}} \equiv \frac{\left[A\overrightarrow{x}^{(0)}\right]_{p_0}}{\left[\overrightarrow{x}^{(0)}\right]_{p_0}}$$

$$= \lambda_1 \quad \left[\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}}\right]$$

Continuación...

Sea $\left|y_{p_1}^{(1)}\right| = \|\overrightarrow{y}^{(1)}\|_\infty$, p_1: menor índice que corresponde a $\|\|_\infty$.
$N1$: Sea $\overrightarrow{x}^{(1)} = \frac{\overrightarrow{y}^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{A\overrightarrow{x}^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}}$, entonces $\|\overrightarrow{x}^{(1)}\|_\infty = 1 = x_{p_1}^{(1)}$.
$S1$: $\overrightarrow{y}^{(2)} = A\overrightarrow{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} A^2 \overrightarrow{x}^{(0)}$.
Asi

$$\mu^{(2)} = y_{P_0}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(0)}} = \frac{\dfrac{\alpha_1\lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}}}{\dfrac{\alpha_1\lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}}}$$

Continuación...

Sea ahora $\left|y_{p_2}^{(2)}\right| = \|\overrightarrow{y}^{(2)}\|_\infty$, p_2: menor índice donde esto ocurra.
$N2$: Sea $\overrightarrow{x}^{(2)} = \frac{\overrightarrow{y}^{(2)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} A\overrightarrow{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}} A^2\overrightarrow{x}^{(0)}$.
$S2$: $\overrightarrow{y}^{(3)} = A\overrightarrow{x}^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}} A^3\overrightarrow{x}^{(0)}$.

Continuación. . .

Observación

1. El (menor) índice p_m (a partir de la norma l_∞) eventualmente debe quedar invariante en el esquema iterativo.
2. La tasa de convergencia es $\theta\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$ en el sentido que

$$\left|\mu^{(m)} - \lambda_1\right| \approx k\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$$

o sea

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\mu^{(m+1)} - \lambda_1}{\mu^{(m)} - \lambda_1}\right| \approx \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$$

La sucesión $\left\{\mu^{(m)}\right\}$ converge linealmente.

Continuación...

Observación

1. Si λ_1 tiene multiplicidad y A fuera diagonalizable el método aun converge y la sucesión $\left\{\overrightarrow{x}^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}$ ira a convergir para una combinación lineal de los vectores propios asociados a λ_1.
2. Existen formas de acelerar un poco el método, en particular cuando A es simétrica.

Continuación. . .

Resumiendo obtenemos las siguientes secuencias

$$\overrightarrow{y}^{(m)} = A\overrightarrow{x}^{(m-1)} \tag{2}$$

$$\mu^{(m)} = y^{(m)}_{p_{m-1}} = \lambda_1 \left[\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} \alpha_j v^{(j)}_{p_{m-1}}} \right] \tag{3}$$

$$\overrightarrow{x}^{(m)} = \frac{\overrightarrow{y}^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}} = \frac{A^m \overrightarrow{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^{m} y^{(k)}_{p_k}} \tag{4}$$

donde a cada paso $\left|y^{(m)}_{p_m}\right| = \left\|\overrightarrow{y}^{(m)}\right\|_\infty$.

Continuación...

Conclusión:

$$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lim_{m\to\infty} y^{(m)}_{p_{m-1}} = \lambda_1 \text{ ya que } \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$$

De 2 y 4

$$A\overrightarrow{x}^{(m-1)} = y^{(m)}_{p_m}\overrightarrow{x}^{(m)}, \ \left\|\overrightarrow{x}^{(k)}\right\|_{\infty} = 1$$

$$\mu^{(m)} \to \lambda_1$$

Método de la potencia inverso

Problema: Hallar el valor propio mas próximo del valor q.

Continuación. . .

Si $Ax = \lambda x$, donde A es diagonalizable. Sea $B = A - qI$, entonces

$$(A - qI)\,x = \mu x$$

$$Ax = (q + \mu)\,x \Rightarrow \lambda - q = \mu,\ \mu \in \sigma\,(B)$$

Continuación...

El truco es usar la inversa de B, pues el mayor valor propio de B^{-1} será $\frac{1}{\lambda - q}$.
Ahora usamos el método de la potencia para la matriz $B^{-1} = (A - qI)^{-1}$.
En analogia con 2 (arriba) tenemos

$$y^{(m)} = (A - qI)^{-1} \overrightarrow{x}^{(m-1)} \Rightarrow (A - qI) \overrightarrow{y}^{(m)} = \overrightarrow{x}^{(m-1)}$$