Álgebra lineal numérica

Fundamentos de Álgebra Lineal

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Setiembre, 2020

Espacios vectoriales

Definición

Un espacio vectorial E sobre el campo $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ consiste de un conjunto no vacío con dos operaciones: adición $E \times E \xrightarrow{+} E$ y multiplicación por escalar $K \times E \xrightarrow{\cdot} E$ tales que las siguientes propiedades se satisfacen:

Continuación...

1. $u, v \mapsto u + v \in E$;
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in E$;
3. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in E$;
4. $\exists 0 \in E$ tal que $0 + v = v + 0 = v$, $\forall v \in E$;
5. Dado $v \in E$, $\exists\,(-v) \in E$ tal que $v + (-v) = 0$;
6. $\alpha \in K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $v \in E \mapsto \alpha v \in E$;
7. $1v = v$, $\forall v \in E$;
8. $(\alpha\beta)\, v = \alpha\,(\beta v)$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $v \in E$;
9. $\alpha\,(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K$, $v \in E$;
10. $(\alpha + \beta)\, v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $v \in E$.

Continuación...

Ejemplos

Los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{R}^0 = \{0 : 0 \in \mathbb{R}\}, \ \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \ \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

con la suma y multiplicación por escalar usuales en $\mathbb{R}$ son espacios vectoriales reales.

Continuación. . .

Ejemplo

$E = \mathbb{R}^{m \times n}$, el conjunto de las matrices reales $m \times n$ con la suma y producto por un escalar es un espacio vectorial real.

Continuación...

Ejemplo

$E = \mathcal{P}_n$, el conjunto de los polinomios con coeficientes reales, de grado menor o igual a n es un espacio vectorial real.

Subespacios vectoriales

Definición

$F \subset E$ se llama un subespacio vectorial de E, si F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ bajo las operaciones de adición vectorial y multiplicación por escalares definidas en E.

Continuación. . .

Teorema

$F \subset E$ es dicho un subespacio vectorial de E si y solo si

1. $0 \in F$.
2. Si $u, v \in F$, entonces $u + v \in F$.
3. Si $v \in F$, entonces $\alpha v \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Continuación...

Ejemplo

En $E = \mathbb{R}^2$, un subespacio vectorial F, es una recta de este plano que pasa por el origen.

Continuación...

Ejemplo

En $E = \mathbb{R}^3$, un subespacio vectorial F, es un plano pasando por el origen.

Continuación. . .

Ejemplo

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset C^{k}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \ldots \supset C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Hiperplanos

Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ consideremos un conjunto de la forma:

$$\mathcal{H} = \{v = (x_1, \ldots, x_n) : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}$$

se llama hiperplano.
Notar que $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Continuación...

Si E es un espacio vectorial y $X \subset E$ con $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{span}X &= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m : v_1, \ldots, v_m \in X \text{ y } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ X(S) &= \mathrm{span}X \end{aligned}$$

Continuación...

Ejemplos

1. Si $X = \{v\}$, entonces el $\mathrm{span} X$ es la recta pasando por el origen y pasando por el vector v.
2. Si $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ con $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\,\{u, v\}$$

Notar que una condición necesaria y suficiente para que u sea múltiplo de v (es decir, $u = \alpha v$ o $v = \alpha u$ en que $\alpha \in \mathbb{R}$) es que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$$

Continuación...

Ejemplo

Si $E = \mathbb{R}^n$ y $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces

$$\mathrm{span} X = \mathbb{R}^n$$

en que

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Además,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

se puede identificar con un vector columna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

Combinación lineal y sistemas de ecuaciones lineales

Considerar $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \cong \mathbb{R}^m$$

Notar que $(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$.

Continuación...

El siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

posee solución $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ es combinación lineal

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ v_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ v_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

Continuación...

Se puede poner el sitema 1 de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \cong \mathbb{R}^m$$

Continuación...

Considerar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ y } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

para obtener $Ax = b$.

Notar que $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. La compenente i es dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \ i = 1, \dots, m$$

Continuación. . .

Si F_1, F_2 son subespacios de E, entonces

$$F_1 + F_2 = \{u + v : u \in F_1, v \in F_2\}$$

es un subespacio vectorial de E.

Suma directa

Definición

Si $F_1 + F_2 = E$ y $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, decimos que

$$E = F_1 \oplus F_2$$

es la suma directa de F_1 y F_2.

Continuación. . .

Teorema

Sean $F_1, F_2 \subset F$ subespacios vectoriales de E, entonces son equivalentes:

1. $F = F_1 \oplus F_2$
2. $\forall w \in F$ se puede escribir de modo único como $w = v_1 + v_2$ con $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$.

Variedades afín

Un conjunto $\mathcal{V}$ es dicho una variedad afín si y solo si la recta r que une cualquiera de dos puntos de $\mathcal{V}$ está completamente contenida en $\mathcal{V}$, en que

$$r = \{(1-t)\,x + ty : t \in \mathbb{R}\}$$

Continuación...

Teorema

Sea $\mathcal{V}$ una variedad afín no vacío del espacio vectorial E, entonces $\exists! F \subset E$, subespacio vectorial tal que $\forall x \in \mathcal{V}$ tenemos

$$\mathcal{V} = x + F = \{x + v : v \in F\}$$

Independencia lineal

Definición

Si E es un espacio vectorial, $X \subset E$ es dicho linealmente independiente cuando ningun vector $v \in X$ es combinación lineal de otros elementos de X. Caso que $X = \{v\}$ es dicho linealmente independiente si $v \neq 0$.

Continuación. . .

Ejemplo

$\{(1,0),(0,1),(x_1,x_2)\}$ no es linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$.

Continuación...

Ejemplo

$\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.

Continuación...

Teorema

1. *Si X es un conjunto linealmente independiente de E y*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$$

con $v_1, \ldots, v_m \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

2. *Si la única combinación lineal nula de vectores de $X \subset E$ es aquella cuyos coeficientes son todos iguales a cero, entonces X es linealmente independiente.*

Continuación...

Corolario

Si

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \\ &= \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m \end{aligned}$$

con $v_1, \ldots, v_m \in X$ *linealmente independiente, entonces*

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$$

Continuación...

Ejemplo

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}_n$.

Continuación...

Teorema

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *elementos no nulos del espacio vectorial E si ninguno de ellos es combinación lineal de los anteriores, entonces* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *es linealmente independiente.*

Base

Definición

Un conjunto $B \subset E$ linealmente independiente que genera E es dicho una base de E.

Continuación...

Ejemplo

$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Continuación...

Ejemplo

$B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_n$.

Dimensión

El número de elementos de una base de un espacio vectorial E es llamado dimensión de E y es denotado por:

$$\dim E$$

Continuación...

Ejemplo

$B = \{(1,0), (0,1)\}$ y $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.
Entonces $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Continuación...

Ejemplo

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$.

Continuación...

Ejemplo

$E = \mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

Continuación. . .

Lema

Sistema lineal homogéneo con mas incógnitas que ecuaciones posee una solución no trivial.

Continuación. . .

Teorema

Si $v_1, \ldots, v_m$ *generan* E*, entonces cualquier conjunto con mas de* m *vectores en* E *es linealmente dependiente.*

Continuación...

Teorema

Si $\dim E = n$*, entonces*

1. Todo conjunto X de generadores de E contiene una base.
2. Todo conjunto linealmente independiente $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ está conteniendo una base.
3. Todo $F \subset E$ subespacio vectorial de E tiene $\dim F \leq n$.
4. Si $F \subset E$ es subespacio vectorial con $\dim F = n$, entonces $F = E$.

Transformación lineal

Definición

Sean E y F dos espacios vectoriales. $T : E \to F$ es dicha lineal si satisfacen las siguientes condiciones:

1. $T\left(u + v\right) = T\left(u\right) + T\left(v\right), \forall u, v \in E$.
2. $T\left(\alpha u\right) = \alpha T\left(u\right)$, $\forall u \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Continuación...

Ejemplo

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces $T : E \to E$ dada por $T(v) = \lambda v$ es una transformación lineal.

Continuación...

Ejemplo

Sean $E_1, E_2 \subset E$ dos subespacios vectoriales de E y $T : E = E_1 \oplus E_2 \to E = E_1 \oplus E_2$ dada por $T(u_1 + u_2) = u_1$ con $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$ es una transformación lineal.

Continuación. . .

Ejemplo

$I_E : E \to E$ definida por $I_E\,(x) = x, \forall x \in E$ es una transformación y se llama **transformación lineal identidad.**

Continuación...

Ejemplo

$O_E : E \to E$ definida por $O_E(x) = 0$, $\forall x \in E$ es una transformación lineal y se llama **transformación nula**.

Continuación. . .

Ejemplo

Si v_0 es fijo, entonces $S : E \to E$ dada por $S(u) = u + v_0$ no es una transformación, pero es la tranformación afín.

Continuación...

Si $R : E \to F$ y $T : E \to F$ son dos transformaciones lineales, entonces definimos

$$(R + T)\, u = R(u) + T(u)\,,\ u \in E$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\alpha T)(u) = \alpha(T(u))$$

Si $R, T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces $(R + T) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Continuación...

Notar que $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$.
Y si $F = E$, entonces

$$\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$$

Continuación. . .

$$\mathcal{L}\left(E, \mathbb{R}\right)$$

es el **espacio dual** de E.

Continuación...

Teorema

Sean E, F espacios vectoriales, B una base de E, supongamos que tenemos

$$u \in B \longmapsto u'(u) \in F$$

Entonces, existe una única transformación lineal $T : E \to F$ tal que $T(u) = u'(u)$, $\forall u \in B$.

Continuación. . .

En $\mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathbb{R})$ podemos construir

$$T : p \to 0$$

Fijar $x \in \mathbb{R}$, podemos construir

$$T_x = p \in \mathcal{P}_n \mapsto p(x)$$

Si $F = \mathcal{F}(X, E)$, entonces

$$f \in F \mapsto f(x)$$

Continuación...

Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \{1, \ldots, n\} & \to & \mathbb{R} \\ i \in \{1, \ldots, n\} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Base canónica $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\left(e_{i_0}\right)_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = i_0 \\ 0, & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

La matriz de una transformación lineal

Recordemos que si $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y

$$\mathbb{R}^{m\times 1} \ni (T(e_j)) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \;\; j = 1, \ldots, n$$

entonces

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} x_j = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a_{ij}) \; i &= 1, \ldots, m \\ j &= 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Continuación. . .

Ejemplo

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que $T(1,1) = (2,1)$, $T(1,-1) = (1,2)$. Hallar $T(x,y)$.

Continuación...

Ejemplo

Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ y sean
$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$, calcular
$[T]_{\beta'}^{\beta}$.

Continuación. . .

Ejemplo

Sea $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ tal que $T\,(ax+b) = (a-b)\,x - a + 3b$, hallar la matriz de la transformación lineal en relación a las base canónica.