Combinación, independencia y base

viernes, 25 de setiembre de 2020 7:10 a. m.

Definición

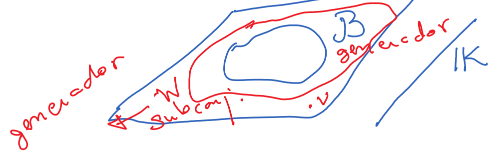
Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(1) Un vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n \in V$ si $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

(2) Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de V. Decimos que $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V (o que $\mathcal{B}$ genera V) si todo elemento de V es una combinación lineal de un número finito de elementos de $\mathcal{B}$. $(V,+,\cdot)$

Observaciones



a) Todo espacio vectorial posee un conjunto generador.

b) Sea $\mathcal{B}$ un conjunto generador de un espacio vectorial V. Todo subconjunto de V que contenga $\mathcal{B}$ es un conjunto generador.

generadores

c) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. El subconjunto de V formado por todas las combinaciones de $v_1, \dots, v_n$ es también un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Denotaremos tal espacio vectorial por $[v_1, \dots, v_n]$.

Ejemplo 1.

es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Encontrar un conjunto de generadores para el subespacio $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=0,\ y-z+w=0\}$

$z = x+y$, $w = z-y$

$z - y = x$

Tenemos que $(x,y,z,w) \in W \Leftrightarrow z = x+y$, $w = z-y = x$. Luego

$$(x,y,z,w) = (x,y,x+y,x) = x(1,0,1,1) + y(0,1,1,0)$$

$\therefore\ W = [(1,0,1,1),(0,1,1,0)]$

Ejemplo 2.

El espacio vectorial $P_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + \dots + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ es finitamente generado por el conjunto de monomios

$$m_0(t) = 1,\ m_1(t) = t,\ \dots,\ m_n(t) = t^n \leftarrow n+1 \text{ polinomios}$$

puesto que todo polinomio $p(t) = a_n t^n + \dots + a_0 = a_n \cdot m_n(t) + \dots + a_0 m_0(t)$ es combinación lineal de los monomios. $\therefore\ P_n(\mathbb{R}) = [m_0(t), \dots, m_n(t)]$

Ejemplo 3.

Encuentre el subespacio generado por S, siendo

a) $S = \{(1,2),(0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $S = \{(2,2,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

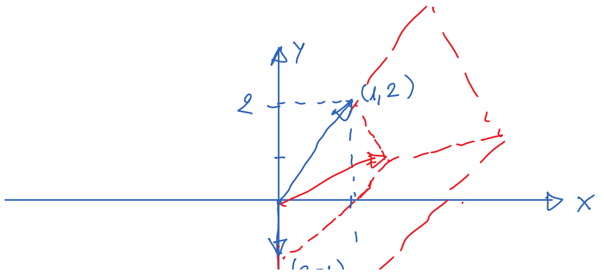
c) $S = \{1+t,\ t+t^2,\ t^2+t^3,\ 1+t^3\} \subset P_3(\mathbb{R})$

a) $[(1,2),(0,-1)] \subset \mathbb{R}^2$ ✓

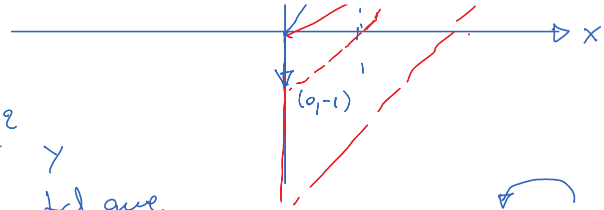
Subespacio

- $\mathbb{R}^2 \subset [(1,2),(0,-1)]$

??



• $\mathbb{R}^2 \subset [(1,2),(0,-1)]$
??



Tomemos $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y hallemos $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ tal que

$$(x,y)=v=\overset{?}{\alpha_1}(1,2)+\overset{?}{\alpha_2}(0,-1) \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha_1 \\ y=2\alpha_1-\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1=x} \quad \alpha_2=2\alpha_1-y \quad \boxed{\alpha_2=2x-y}$$

$\Rightarrow v\in[(1,2),(0,-1)] \Rightarrow \mathbb{R}^2\subset[(1,2),(0,-1)]$

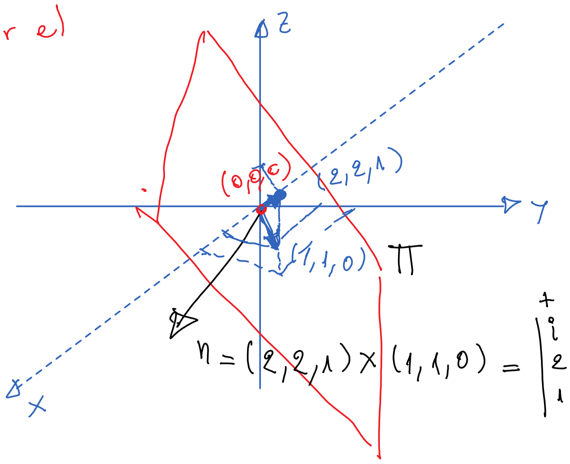
$\therefore [(1,2),(0,-1)]=\mathbb{R}^2$

b) $S=\{(2,2,1),(1,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$

$[S]=??$

$[S]=\{\alpha_1(2,2,1)+\alpha_2(1,1,0) : \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)=(0,0,0)+\alpha_1(2,2,1)+\alpha_2(1,1,0) : \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$

plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen



(2,2,1)
No son paralelos
(1,1,0)

$$n=(2,2,1)\times(1,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=i(-1)-j(-1)+k(0)=(-1,1,0)$$

$\Pi : \left((x,y,z)-(0,0,0)\right)\cdot(-1,1,0)=0 \Rightarrow \Pi: -x+y=0$

$[S]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -x+y=0\}$ plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$

Definición.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B}$ un subconjunto de V.

a) Decimos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente (ou l.i.) si

$$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=\vec{0} \quad \text{para } v_i\in\mathcal{B} \text{ y } \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=1\dots n$$

implica que $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$

b) El conjunto $\mathcal{B}$ es llamado linealmente dependiente (ou l.d.) si no es l.i.

Observaciones

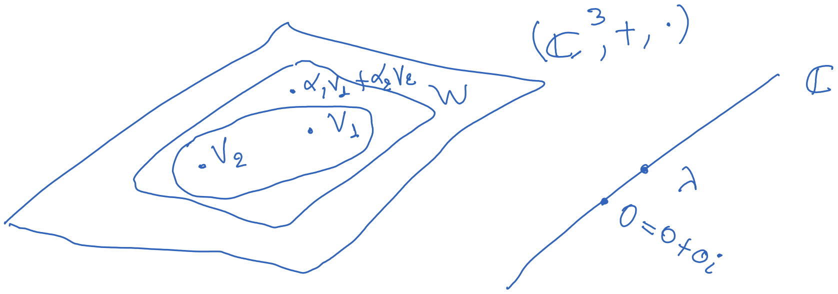
a) Todo conjunto que contiene al vector nulo es l.d.

b) Todo espacio vectorial no nulo posee un conjunto l.i. no vacío. Basta considerar, por ejemplo, un conjunto que consiste de un único vector no nulo.

c) Todo subconjunto de un conj. l.i. es l.i.

Ejemplo 1.

Sea $W = [v_1, v_2] \subseteq \mathbb{C}^3$ esp. vectorial sobre $\mathbb{C}$ donde $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1+i, 1, -1)$. Muestre que $\{v_1, v_2\}$ es l.i.



Tomemos

$$\alpha_1 v_1 \overset{?}{+} \alpha_2 v_2 \overset{?}{=} (0,0,0)$$

$$\alpha_1 (1, 0, i) + \alpha_2 (1+i, 1, -1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1, 0, \alpha_1 i) + (\alpha_2 + i\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_2) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2(1+i) = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 i - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 i = 0 \ \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\therefore \{v_1, v_2\}$ es l.i.

Definición.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Decimos que un subconjunto $\mathcal{B}$ de V es una base de V si

i) $\mathcal{B}$ es conj. generador de V y

ii) $\mathcal{B}$ es l.i.