Álgebra lineal numérica

Descomposición de valores singulares

Mg. Roger Mestas Chávez

Ciencia de la Computación

Noviembre, 2020

SVD

Teorema (Teorema SVD)

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*, entonces existen matrices ortogonales* $U = [u_1 | \ldots | u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *y* $V = [v_1 | \ldots | v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tales que*

$$U^T A V = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$$

con $p = \min\{m, n\}$ *y* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0$*.*

Continuación...

Definición

σ_i es llamado el i-ésimo valor singular, $v_i \in \mathbb{R}^n$ es llamado el i-ésimo vector singular a la izquierda, $u_i \in \mathbb{R}^m$ es llamado del i-ésimo vector singular a la derecha.

Continuación. . .

Corolario

Usando la notación del teorema SVD

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0$$

entonces

1. Rango de A es r.
2. $\mathrm{N}(A) = \mathrm{span}\langle v_{r+1}, \ldots, v_p \rangle$.
3. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$.
4. $\|A\|_F^2 = \|\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)\|_F^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2$.
5. $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Continuación...

Corolario

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango r. Para $k < r$ definimos la matriz A_k como

$$U^T A V = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$$

entonces

$$\min_{B\in\mathbb{R}^{m\times n}\ rango(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$