

Lógica y Programación

Programación lógica proposicional

Antonia M. Chávez, Agustín Riscos, Carmen Graciani

Dpto. Ciencias de la Computacion e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Refinando la Resolución

- Resolución: mecanismo muy potente de demostración
- Alto grado de indeterminismo: computacionalmente ineficiente
- Desde el punto de vista práctico, podemos sacrificar expresividad y ganar eficiencia.
- **Solución:** Restringir la forma de las cláusulas y estudiar un método de resolución específico para este tipo de cláusulas

Secuentes

- Sintaxis de seciente
 - $p_1, \dots, p_m \leftarrow q_1, \dots, q_n$ con $n \geq 0$, $m \geq 0$, p_i y q_j símbolos proposicionales
 - Cuerpo del seciente: $\{q_1, \dots, q_n\}$
 - Cabeza del seciente: $\{p_1, \dots, p_m\}$
- Relación entre secientes, fórmulas y cláusulas
 - Seciente: $p_1, \dots, p_m \leftarrow q_1, \dots, q_n$
 - Fórmula: $q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p_1 \vee \dots \vee p_m$
 - Cláusula: $\{p_1, \dots, p_m, \neg q_1, \dots, \neg q_n\}$

Cláusulas de Horn

- Cláusulas de Horn
 - Cláusulas de Horn son las que no tienen más de un literal positivo
 - Un seciente representa una cláusula de Horn si su cabeza tiene como máximo un elemento
- Propiedades
 - Completitud de resolución unidad para cláusulas de Horn
 - Completitud de resolución por entradas para cláusulas de Horn

Cláusulas de Horn

- Clasificación de cláusulas de Horn:
 - Cláusula definida:
 - Regla: $p \leftarrow q_1, \dots, q_n$ con $n > 0$
 - Hecho: $p \leftarrow$
 - Objetivo definido:
 - Objetivo propio: $\leftarrow q_1, \dots, q_n$ con $n > 0$
 - Éxito: \leftarrow
- Las reglas engloban todos los casos:
 - Un hecho es una regla con cuerpo vacío
 - Un objetivo es una regla con cabeza vacía
 - El éxito es una regla con cabeza y cuerpo vacíos

Sintaxis de programas lógicos

- Un programa lógico es un conjunto finito de cláusulas definidas
 - Ejemplo de programa lógico

$p \leftarrow q, r$

$p \leftarrow s$

$r \leftarrow$

$q \leftarrow$

$p_1 \leftarrow s$

$p_2 \leftarrow s$

Semántica declarativa

- Base de Herbrand:
 - La base de Herbrand, $BH(P)$, de un programa lógico, P , es el conjunto de los símbolos proposicionales que aparecen en el programa
 - Ejemplo:

$$BH\left(\begin{array}{l} p \leftarrow q, r \\ p \leftarrow s \\ r \leftarrow \\ q \leftarrow \\ p_1 \leftarrow s \\ p_2 \leftarrow s \end{array}\right) = \{p, q, r, s, p_1, p_2\}$$

Semántica declarativa

- Modelos de Herbrand
 - Los modelos de Herbrand, $MH(P)$, de un programa lógico P son aquellos modelos que están contenidos en la base de Herbrand de P
 - Ejemplo:

$$MH\left(\begin{array}{l} p \leftarrow q, r \\ p \leftarrow s \\ r \leftarrow \\ q \leftarrow \\ p_1 \leftarrow s \\ p_2 \leftarrow s \end{array}\right) = \left\{ \{p, q, r, s, p_1, p_2\}, \{p, q, r, p_1, p_2\}, \right. \\ \left. \{p, q, r, p_1\}, \{p, q, r, p_2\}, \{p, q, r\} \right\}$$

Semántica declarativa

- Propiedades: Sea P un programa lógico
 - $BH(P) \models P$
 - La intersección de modelos de P es modelo de P
- Menor modelo de Herbrand
 - I es el menor modelo de Herbrand de P si I es un modelo de P y es subconjunto de todos los modelos de P
 - $MMH(P) = \bigcap \{I : I \models P\} = \{p : P \models p\}$
 - Ejemplo:

$$MMH\left(\begin{array}{l} p \leftarrow q, r \\ p \leftarrow s \\ r \leftarrow \\ q \leftarrow \\ p_1 \leftarrow s \\ p_2 \leftarrow s \end{array}\right) = \{p, q, r\}$$

Semántica de punto fijo

- Operador de consecuencia inmediata

$$T_P(I) = \{p : (p \leftarrow q_1, \dots, q_n) \in P \text{ y } \{q_1, \dots, q_n\} \subseteq I\}$$

- Ejemplo:

- Programa P :

$$p \leftarrow q, r \qquad p \leftarrow s$$

$$r \leftarrow \qquad q \leftarrow$$

$$p_1 \leftarrow s \qquad p_2 \leftarrow s$$

- Aplicación del operador de consecuencia inmediata:

$$T_P(\{\}) = \{r, q\}$$

$$T_P(\{r, q\}) = \{p, r, q\}$$

$$T_P(\{p, r, q\}) = \{p, r, q\}$$

- Menor punto fijo: $\text{MPF}(P) = \{p, r, q\}$
- Propiedad: $\text{MPF}(P) = \text{MMH}(P)$
- Encadenamiento adelante

Resolución SLD

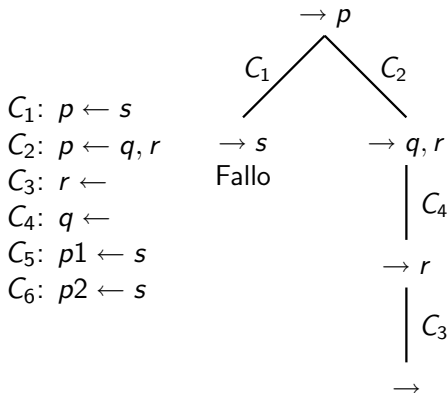
- SLD–resolución: resolución **L**ineal con función de **S**elección para cláusulas **D**efinidas
- Es un caso particular de la resolución general, donde:
 - Los resolventes son siempre objetivos
 - Los programas son conjuntos de cláusulas de Horn, es decir, hechos y reglas
 - Hay que seleccionar un átomo al que aplicar la resolución

Resolución SLD

- SLD-resolución: resolución **L**ineal con función de **S**elección para cláusulas **D**efinidas
- SLD-resolventes
 - Objetivo: $\leftarrow p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n$
 - cláusula: $p_i \leftarrow q_1, \dots, q_m$
 - SLD-resolvente: $\leftarrow p_1, \dots, p_{i-1}, q_1, \dots, q_m, p_{i+1}, \dots, p_n$
 - Ejemplo:
Objetivo: $\{q, r\}$, cláusula: $q \leftarrow p, s$, SLD-resolvente: $\{p, s, r\}$
- Doble indeterminismo
 - Regla de computación: Selección del literal del objetivo
 - Regla de elección: Selección de la cláusula del programa

Arbol de SLD-resolución

- Ejemplo 1



Arbol de SLD-resolución

- Ejemplo 2

$C_1: a \leftarrow e$

$C_2: e \leftarrow a$

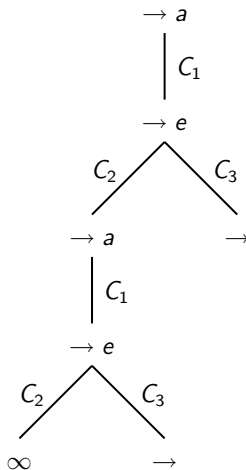
$C_3: e \leftarrow$

- Ramas:

- Éxito
- fallo
- infinita

- Estrategias de búsqueda:

- profundidad
- anchura



SLD-resolución

- Ejemplo 1

$C_1: p \leftarrow s$

$C_2: p \leftarrow q, r$

$C_3: r \leftarrow$

$C_4: q \leftarrow$

$C_5: p1 \leftarrow s$

$C_6: p2 \leftarrow s$

$$\begin{array}{c} \rightarrow p \\ | \\ C_2 \\ \rightarrow q, r \\ | \\ C_4 \\ \rightarrow r \\ | \\ C_3 \\ \rightarrow \end{array}$$

SLD-resolución

- Ejemplo 2

$C_1: a \leftarrow b, c$

$C_2: b \leftarrow c, d$

$C_3: c \leftarrow e$

$C_4: d \leftarrow$

$C_5: e \leftarrow$

$\rightarrow a$

$| C_1$

$\rightarrow b, c$

$| C_2$

$\rightarrow c, d, c$

$| C_3$

$\rightarrow e, d, c$

$| C_5$

$\rightarrow d, c$

$| C_4$

$\rightarrow c$

$| C_3$

$\rightarrow e$

$| C_5$

\rightarrow

Resolución SLD

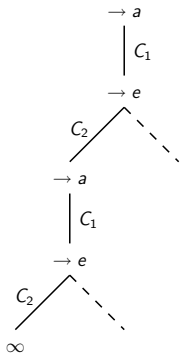
- SLD-resolución: resolución lineal por entradas
- Completitud de SLD-resolución
 - P un programa lógico
 - $G \leftarrow p_1, \dots, p_n$ un objetivo
 - Son equivalentes:
 - $P \cup \{G\} \vdash_{SLD} \{\}$
 - $P \cup \{G\}$ es inconsistente
 - $P \models p_1 \wedge \dots \wedge p_n$

Procedimiento de SLD-resolución

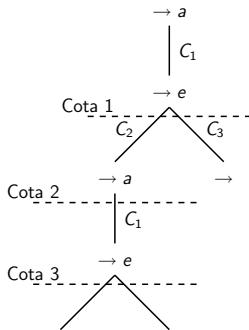
- Características:
 - Elección de literal en objetivo: El primero
 - Elección de la cláusula: La primera que se equipare
 - Estrategia de búsqueda: En profundidad

SLD-resolución acotada

- Problema: ramas infinitas

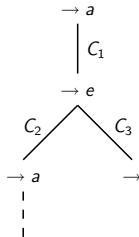
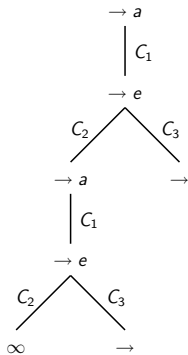


- Búsqueda en profundidad acotada



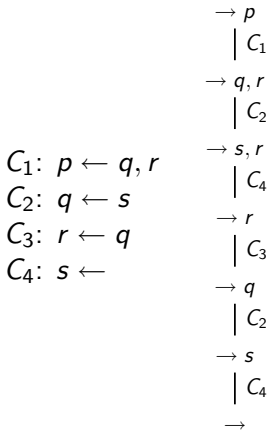
SLD-resolución en anchura

- Problema: ramas infinitas
- Búsqueda en anchura

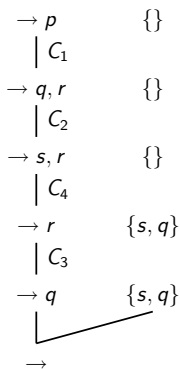


SLD-resolución con objetivos resueltos

- Objetivos duplicados

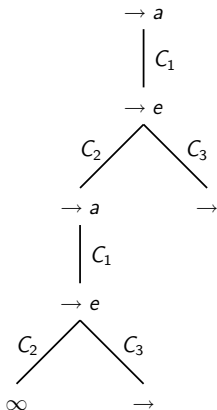


- Con objetivos resueltos

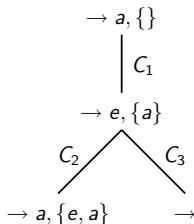


SLD-resolución con objetivos pendientes

- Problema: ramas infinitas



- Objetivos pendientes



Referencias

- Lucas, P. y Gaag, L.v.d. *Principles of Expert Systems* (Addison–Wesley, 1991).
 - Cap. 2: “Logic and resolution”
- Rich, E. y Knight, K. *Inteligencia artificial (segunda edición)* (McGraw–Hill Interamericana, 1994).
 - Cap. 5: “La lógica de predicados”
- Russell, S. y Norvig, P. *Inteligencia artificial (un enfoque moderno)* (Prentice–Hall, 1996).
 - Cap. 9: “La inferencia en la lógica de primer orden”
 - Cap. 10: “Sistemas de razonamiento lógico”
- Winston, P.R. *Inteligencia Artificial (3a. ed.)* (Addison–Wesley, 1994).
 - Cap. 13: “lógica y prueba de resolución”