Ejercicios: Aproximación de Errores

Luis Tipan

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p*

a) $p = \pi, p* = \frac{22}{7}$

$E_a = |p - p^*| = |\pi - \frac{22}{7}|$

```
import math
abs1 = abs(math.pi-(22/7))
print(f"{abs1:.10f}")
```

```
0.0012644893
```

0.0012644893% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - \frac{22}{7}|}{|\pi|}$

```
import math

rel1 = abs((math.pi-(22/7))/(math.pi))
print(f"{rel1:.10f}")
```

```
0.0004024994
```

0.04024994% de Error

b) $p = \pi, p* = 3.1416$

$E_a = |p - p^*| = |\pi - 3.1416|$

```
abs2 = abs(math.pi-3.1416)
print(f"{abs2:.10f}")
```

```
0.0000073464
```

0.00073464% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi-3.1416|}{|\pi|}$

```
rel2 = abs((math.pi-3.1416)/(math.pi))
print(f"{rel2:.10f}")
```

```
0.0000023384
```

0.00023384% de Error

c) $p = e, p* = 2.718$ 8

$E_a = |p - p^*| = |e - 2.718|$

```
abs3 = abs(math.e-2.718)
print(f"{abs3:.10f}")
```

```
0.0002818285
```

0.02818285% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e-2.718|}{|e|}$

```
rel3 = abs((math.e-2.718)/(math.e))
print(f"{rel3:.10f}")
```

```
0.0001036789
```

0.01036789% de Error

d) $p = \sqrt{2}, p* = 1.414$

$E_a = |p - p^*| = |\sqrt{2} - 1.414|$

```
abs4 = abs(math.sqrt(2)-1.414)
print(f"{abs4:.10f}")
```

```
0.0002135624
```

0.02135624% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\sqrt{2}-1.414|}{|\sqrt{2}|}$

```
rel4 = abs((math.sqrt(2)-1.414)/(math.sqrt(2)))
print(f"{rel4:.10f}")
```

```
0.0001510114
```

0.01510114% de Error

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p*

a) $p = e^{10}, p* = 22000$

$E_a = |p - p^*| = |e^{10} - 22000|$

```
abs5 = abs(math.pow(math.e,10)-22000)
print(f"{abs5:.10f}")
```

```
26.4657948067
```

2646.57948067% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e^{10}-22000|}{|e^{10}|}$

```
rel5 = abs((math.pow(math.e,10)-22000)/(math.pow(math.e,10)))
print(f"{rel5:.10f}")
```

```
0.0012015452
```

0.0012015452% de Error

b) $p = 10^{\pi}, p* = 1400$

$E_a = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400|$

```
abs6 = abs(math.pow(10,math.pi)-1400)
print(f"{abs6:.10f}")
```

```
14.5442686330
```

1454.42686330% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|10^\pi-1400|}{|10^\pi|}$

```
rel6 = abs((math.pow(10,math.pi)-1400)/(math.pow(10,math.pi)))
print(f"{rel6:.10f}")
```

```
0.0104978227
```

0.0104978227% de Error

c) $p = 8!, p* = 39900$

$E_a = |p - p^*| = |8! - 39900|$

```
abs7 = abs(math.factorial(8)-39900)
print(f"{abs7:.10f}")
```

```
420.0000000000
```

42000.00000000% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|8!-39900|}{|8!|}$

```
rel7 = abs((math.factorial(8)-39900)/(math.factorial(8)))
print(f"{rel7:.10f}")
```

```
0.0104166667
```

1.04166667% de Error

d) $p = 9!, p* = \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9$

$E_a = |p - p^*| = |9! - \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9|$

```
abs8 = abs(math.factorial(9)-(math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9/math.e),9)))
print(f"{abs8:.10f}")
```

```
3343.1271580516
```

334312.71580516% de Error

$E_r = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|8!-39900|}{|8!|}$

```
rel8 = abs((math.factorial(9)-(math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9/math.e),9)))/(math.factoria
print(f"{rel8:.10f}")
```

```
0.0092127622
```

0.92127622% de Error

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar * para aproximarse a con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de .

Error relativo $= \frac{|p^{*}-p|}{|p|}$

$\frac{|p^{*}-p|}{|p|} \leq 10^{-4}$

$p - 10^{-4} \cdot p \leq p^{*} \leq p + 10^{-4} \cdot p$

a) π

$p = \pi$

$\pi - 10^{-4} \cdot \pi \leq p^{*} \leq \pi + 10^{-4} \cdot \pi$

$\pi - 3.1415926536 \cdot 10^{-4} \leq p^{*} \leq \pi + 3.1415926536 \cdot 10^{-4}$

$3.1412784943 \leq p^{*} \leq 3.1419068129$

b)e

$p = e$

$e - 10^{-4} \cdot e \leq p^{*} \leq e + 10^{-4} \cdot e$

$2.7182818285 - 2.7182818285 \cdot 10^{-4} \leq p^{*} \leq 2.7182818285 + 2.7182818285 \cdot 10^{-4}$

$2.7180090000 \leq p^{*} \leq 2.7185546567$

c) $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \leq p^{*} \leq \sqrt{2} + 10^{-4} \cdot \sqrt{2}$

$1.4142135624 - 1.4142135624 \cdot 10^{-4} \leq p^{*} \leq 1.4142135624 + 1.4142135624 \cdot 10^{-4}$

$1.4140721411 \leq p^{*} \leq 1.4143549836$

d) $\sqrt[3]{7}$

$\sqrt{7}-10^{-4}\cdot\sqrt{7}\leq p^*\leq\sqrt{7}+10^{-4}\cdot\sqrt{7}$

$2.6457513111-2.6457513111\cdot 10^{-4}\leq p^*\leq 2.6457513111+2.6457513111\cdot 10^{-4}$

$2.6454867360\leq p^*\leq 2.6460158862$

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo

con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a) $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$\frac{13}{14}=0.9285714286$

$\frac{5}{7}=0.7142857143$

$\frac{13}{14}-\frac{5}{7}=0.2142857143$

$ e = 2 2.7182818285 = 5.4365636570$

$2e-5.4=5.4365636570-5.4=0.0365636570$

$\frac{0.2142857143}{0.0365636570}=5.8607594937$

5.86

$|5.8607594937-5.86|=0.0007594937$

$\frac{0.0007594937}{5.8607594937}=1.2953367873\times 10^{-4}$

b) $-10\pi+6e-\frac{3}{61}$

$-10\pi=-10\times 3.1415926536=-31.4159265360$

$6e=6\times 2.7182818285=16.3096909710$

$\frac{3}{61}=0.0491803279$

$-31.4159265360+16.3096909710-0.0491803279=-15.1554158929$

-15.2

$|-15.1554158929-(-15.2)|=0.0445841071$

$\frac{0.0445841071}{15.1554158929}=2.9414620453\times 10^{-3}$

c) $(\frac{2}{9})(\frac{9}{11})$

$\frac{2}{9} = 0.2222222222$

$\frac{9}{11} = 0.8181818182$

$0.2222222222 \times 0.8181818182 = 0.1818181818$

0.182

$|0.1818181818 - 0.182| = 0.0001818182$

$\frac{0.0001818182}{0.1818181818} = 9.9999999991 \times 10^{-4}$

d) $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$\sqrt{13} = 3.6055512755$

$\sqrt{11} = 3.3166247904$

$3.6055512755 + 3.3166247904 = 6.9221760659$

$3.6055512755 - 3.3166247904 = 0.2889264851$

$\frac{6.9221760659}{0.2889264851} = 23.9600672727$

24.0

$|23.9600672727 - 24.0| = 0.0399327273$

$\frac{0.0399327273}{23.9600672727} = 1.6668306113 \times 10^{-3}$

5.Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:

$x - (\frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5})x^5$ Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a. $4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})]$

$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ...$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5000000000 - 0.0416666667 + 0.0062500000 = 0.4645833333$

$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.3333333333 - 0.0123456790 + 0.0008230453 = 0.3218106996$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.4645833333 + 0.3218106996 = 0.7863940329$

$4 \times 0.7863940329 = 3.1455761316$

ERROR:

$\pi = 3.1415926536$

$|3.1455761316 - 3.1415926536| = 0.0039834780$

$\frac{0.0039834780}{3.1415926536} = 1.2681963481 \times 10^{-3}$

b. $16acrtan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})$

$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.2000000000 - 0.0013333333 + 0.0000320000 = 0.1986986667$

$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx 0.0041841004 - 1.0310096 \times 10^{-7} + 2.4373424 \times 10^{-12} = 0.0041840003$

$16 \times 0.1986986667 = 3.1791786667$

$4 \times 0.0041840003 = 0.0167360012$

$3.1791786667 - 0.0167360012 = 3.1624426655$

ERROR:

$|3.1624426655 - 3.1415926536| = 0.0208500119$

$\frac{0.0208500119}{3.1415926536} = 6.6372267515 \times 10^{-3}$

6. El número e se puede definir por medio de $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})$, donde \$!n n(− 1) 2 $\cdot 1pa$n

\$ \$ y

0!\$ = 1. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximació e de

a. $\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!})$

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$\frac{1}{0!} = 1$

$\frac{1}{1!} = 1$

$\frac{1}{2!} = 0.5$

$\frac{1}{3!} = 0.1666666667$

$1 + 1 + 0.5 + 0.1666666667 + 0.0416666667 + 0.0083333333 = 2.7183333333$

$e = 2.7182818285$

$|2.7183333333 - 2.7182818285| = 0.0000515048$

$\frac{0.0000515048}{2.7182818285} = 1.8950519840 \times 10^{-5}$

b. $\sum_{n=0}^{10} (\frac{1}{n!})$

$\frac{1}{6!} = 0.0013888889$

$\frac{1}{7!} = 0.0001984127$

$\frac{1}{8!} = 0.0000248016$

$\frac{1}{9!} = 0.0000027557$

$\frac{1}{10!} = 0.0000002756$

$2.7183333333 + 0.0013888889 + 0.0001984127 + 0.0000248016 + 0.0000027557 + 0.0000002756 = 2.7182818011$

$|2.7182818011 - 2.7182818285| = 0.0000000274$

$\frac{0.0000000274}{2.7182818285} = 1.0073743100 \times 10^{-8}$

7. Suponga que dos puntos (x_0,y_0 se encuentran en línea racta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ y $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

a. Use los datos (x_0, y_0)=(1.31,3.24) y (x_1, y_1) = (1.93,5.76) y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas manera ¿Cuál método es mejor y por qué?

$(x_0, y_0) = (1.31, 3.24) \quad \text{y} \quad (x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$

$x_0 y_1 = 1.31 \times 5.76 = 7.5456 \quad \text{(redondeado: 7.55)}$

$x_1 y_0 = 1.93 \times 3.24 = 6.2532 \quad \text{(redondeado: 6.25)}$

$x_0 y_1 - x_1 y_0 = 7.55 - 6.25 = 1.30$

$y_1 - y_0 = 5.76 - 3.24 = 2.52$

$x = \frac{1.30}{2.52} = 0.5159 \quad \text{(redondeado: 0.516)}$

Segunda Fórmula:

$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$

$x_1 - x_0 = 1.93 - 1.31 = 0.62$

$0.62 \times 3.24 = 2.0088 \quad \text{(redondeado: 2.01)}$

$\frac{2.01}{2.52} = 0.7976 \quad \text{(redondeado: 0.798)}$

$x = 1.31 - 0.798 = 0.512$

¿Cuál método es mejor y por qué?

- La primera fórmula es más directa y tiende a ser más precisa cuando los valores de (x_0) y (x_1) son pequeños, ya que evita multiplicaciones adicionales con (y_0).
- La segunda fórmula puede introducir más error de redondeo porque involucra más operaciones intermedias.

Por lo tanto, en este caso, la primera fórmula es preferible porque es más sencilla y menos propensa a errores acumulativos en los pasos de cálculo.