CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

CIMAT

Unidad Monterrey

Maestría en computo estadístico

Proyecto Algebra

Comprobación de matriz si es de cholesky y comparación de tiempos de método de reducción y formula.

Luis David Torres Pérez

índice

Introducción

En este proyecto se generará una matriz cuadrada, la cual puede poseer números aleatorios o el usuario ingresar los datos, el objetivo de que sean aleatorios es determinar si se podría calcular la matriz de cholesky, de no ser así el programa lo indicara, además que si genera una matriz de cholesky la calculara, nos dará los tiempos en los que tarda en calcular una matriz que sea de cholesky mediante los métodos algebraico y por medio de la fórmula de cholesky.

El objetivo de que se pueda hacer con una matriz dada es poder determinar si dicha matriz posee la descomposición de cholesky, así también a que nosotros podamos determinar los tiempos de cada método, en el programa también pese a estar comentados, contamos con la impresión para poder visualizar la matriz original, matriz diagonal superior e inferior por el método de factorización LU y la matriz de cholesky.

Este programa nos puede ayudar a poder determinar si una matriz dada con números aleatorios es de cholesky, al igual que si una matriz ingresada es de cholesky o no, esto nos puede servir como ayuda en ejercicios de algebra, en economía para una matriz de correlaciones, en mínimos cuadrados teniendo una matriz simétrica y definida positiva, que esto generalmente pasa en una función de energía, siendo el resultado positivo bajo condiciones físicas, entre otros.

Descomposición de cholesky

Matriz definida positiva

Una matriz se define positiva si

$$\forall\, x \;\neq 0$$
$$x^T A x > 0$$

Por la naturaleza de la expresión, todo es positivo a menos que todos los elementos sean cero, es decir x el vector 0.

Dicha forma cuadrática se describe como positiva definida y

$$A = A^T$$

Corresponde a una matriz positiva definida.

Matriz simétrica

Una matriz es simétrica si es una matriz cuadrada, la cual tiene la característica de ser igual a su transpuesta. Una matriz de nxn elementos

$$\begin{pmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} & a_{1_n} \\ a_{2_1} & a_{2_2} & a_{2_n} \\ a_{n_1} & a_{n_3} & a_{n_n} \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica, si $a_{i_j} = a_{j_i} \forall i,j \;\; con \;\; i,j = 1,2,3,4,\ldots,n$. Nótese que la simetría es respecto a la diagonal principal.

Teorema descomposición de Cholesky

Si A es una matriz simétrica definida positiva de orden n, existe una única matriz triangular superior, G, con todos sus elementos diagonales positivos, tal que

$$A = G^T G$$

Si A es una matriz no negativa con rango igual a r, entonces existe una única matriz triangular superior U, con r elementos positivos en su diagonal, con n-r dila de ceros tal que

$$A = U^T U$$

Esto es conocido como la factorización de Cholesky de A, y G es llamado el factor de Cholesky de A.

Factorización LU

Sea A una matriz de tamaño mxn que se puede reducir por filas a su forma escalonada sin intercambio de filas. Entonces, A se puede escribir de la siguiente forma:

$$A = LU$$

Donde L es una matriz triangular inferior de mxm con números 1 en la diagonal y U es una forma escalonada de mxn de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2_1} & 1 & 0 \\ L_{3_1} & L_{3_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1_1} & U_{1_2} & U_{1_3} \\ 0 & U_{2_2} & U_{2_3} \\ 0 & 0 & U_{3_3} \end{bmatrix}$$

Una factorización de este tipo se llama factorización LU de A. La matriz L es invertible y se llama matriz triangular inferior unitaria.

Método Programado

Método Algebraico

Para la matriz introducida se le hará una reducción algebraica por el método LU, de esta forma se puede ver si en la matriz U se puede realizar una factorización obteniendo una matriz de la siguiente forma

$$A = LDL^T$$

Si es que cumple con esta forma quiere decir que será una matriz candidata a realizar la factorización de cholesky, después de ello la matriz D diagonal si es que la matriz diagonal en cada entrada existe una raíz del elemento entonces se vera de la siguiente forma

$$D = \begin{pmatrix} D_{1_1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{2_2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{D_{1_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{D_{2_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{D_{3_3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{D_{1_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{D_{2_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{D_{3_3}} \end{pmatrix} = D * D *$$

Entonces obtendremos la matriz de la siguiente forma

$$A = LD * D * L^T = UU^T$$

Así obteniendo la matriz de cholesky

Formula de factorización de Cholesky

Se programaron las ecuaciones para encontrar la descomposición de cholesky, con la matriz A ingresada, recordando que a_{k_i} de la matriz A y que los elementos l_{i_j} son los elementos de la matriz U generada, las cuales son

$$l_{k_i} = \frac{\left(a_{k_i} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i_j} l_{k_j}\right)}{l_{i_i}} \quad para\ i = 1,2,3, \dots, k-1$$

Y

$$l_{k_k} = a_{k_k} - j = 1k - 1 \left(l_{k_j}\right)^2$$

Conclusiones

El programa cumple con determinar si es un matriz de cholesky, ya sea la generada aleatoriamente o la ingresada por el usuario, además que muestra los tiempos que tarda en calcular la matriz por el método LU y por el método de formula, pese a que podemos determinar que la manera más rápida es la fórmula, recordemos que no es tan sencillo el ver si es definida positiva ya que deberíamos encontrar los valores propios, si bien este programa no calcula los valores propios, el método para pasar a verlo con formula es notar que haya sido posible llegar a la factorización con LU.

Además nos ayuda a visualizar que no cualquier matriz cumple con las condiciones para la factorización de Cholesky y pareciera casi imposible que obtuviéramos una matriz A con factorización de Cholesky, si los elementos de esta esté generado con números aleatorios, por ello se optó por colocar que el usuario pudiera ingresar los elementos de la matriz cuadrada ya que le da un enfoque mas practico y se vio que por este método es más rápido calcular la factorización Cholesky por la formula de la matriz.

Nota

Se encuentran como comentarios en las líneas 95,96,97,98 el determinar la matriz LU de la matriz ingresada, luego de ello en la 184 para ver la matriz D dada de la factorización de cholesky y en la 192,193 la impresión de la matriz original, si desea verlos deberá quitar esos comentarios.

El programa se encuentra programado en C++, las partes resaltantes del mismo se encuentran comentadas, así como cuando se crea un objeto para que se ocupa este mismo y sin modificar el objeto creado, las librerías y comandos utilizados son las siguientes:

#include<cstdlib>

#include <iostream>

#include <math.h>

#include <chrono>

#include<ctime>

#define HAVE_STRUCT_TIMESPEC

using namespace std;

using namespace std::chrono;

Así también debe de verificarse que se pueda correr chrono, ya que en algunos compiladores no lo tiene por default.