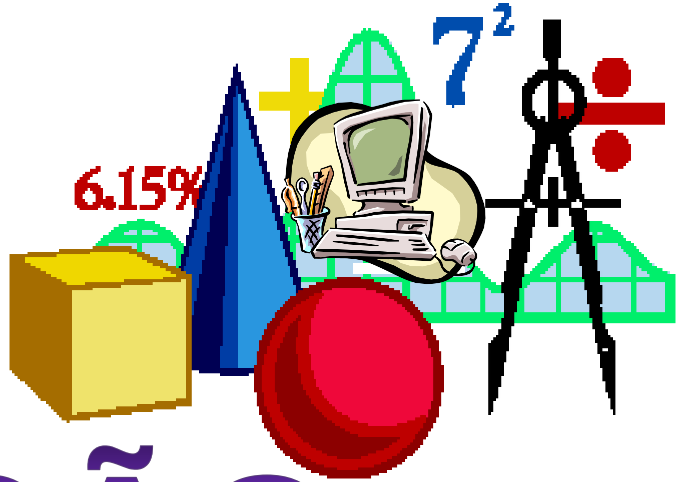
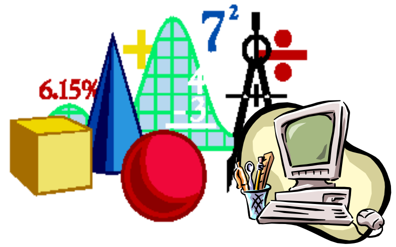
Introdução
à
INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



- A **Investigação Operacional** (**IO**) surgiu para resolver, de uma forma eficiente, problemas que envolvem a gestão otimizada de recursos escassos

- Aplica uma **análise quantitativa** aos problemas reais complexos que envolvem a **tomada de decisões**, utilizando um conjunto de métodos baseados essencialmente em **procedimentos matemáticos**

- O objetivo consiste em encontrar a **melhor solução** para os problemas, isto é, a **solução ótima**, de forma a poder tomar-se a melhor decisão

- Relativamente à **origem da IO**, existem diferentes visões dependendo da fonte de informação. De acordo com *The Operations Research Society*[1], a história da IO começou nas guerras mundiais, quando a investigação científica foi usada para melhorar as operações militares, com sucesso
- Foram contratados cientistas para analisar os problemas estratégicos e táticos associados às operações militares (ou seja, **investigar as operações**), com o objetivo de descobrir a forma mais eficiente de usar os recursos militares limitados, através da aplicação de técnicas quantitativas

[1] https://www.theorsociety.com/about-or/history-of-or/

- Em 1947, George Dantzig, cientista que trabalhava na alocação de recursos (materiais e humanos) em vários projetos da Força Aérea do Exército dos EUA, inventou o **algoritmo simplex** para resolver problemas de otimização e, nesse processo, fundou o ramo da **programação linear (PL)**

- Cedo se verificou que este algoritmo era ideal para resolver problemas anteriormente intratáveis, envolvendo centenas, ou mesmo milhares, de variáveis, pelo computador recém-inventado

- Em termos de aplicação generalizada, o **algoritmo simplex** é um dos mais bem-sucedidos de todos os tempos, tendo sido incluído num Top 10 dos melhores algoritmos do século 20[2]

- Algumas das possíveis aplicações práticas da **PL** e do **algoritmo simplex**:
  - **Negócios e indústria** no planeamento da produção, transporte e roteamento, bem como vários tipos de escalonamento

[2] http://web.ist.utl.pt/~ist11038/CD_Casquilho/PRINT/NotebookSC_6Simul_08pp.pdf

- **Companhias aéreas** para programar os seus voos, tendo em consideração, quer o escalonamento dos aviões, quer o escalonamento do pessoal

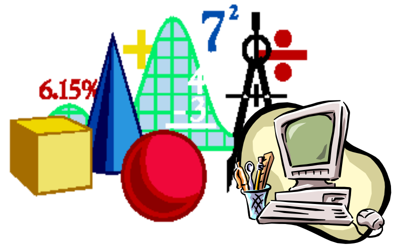
- **Serviços de entrega** para agendar e encaminhar remessas, de forma minimizar o tempo de entrega ou o custo

- **Retalhistas** para determinar como encomendar produtos aos fabricantes e organizar as entregas nas suas lojas

- **Instituições financeiras** para determinar a combinação de produtos financeiros a oferecer aos clientes, ou para programar transferências de fundos entre instituições
- **Instituições de saúde** para garantir que as provisões adequadas estão disponíveis quando for necessário, ou para organizar e coordenar procedimentos de saúde que salvam vidas (por exemplo, identificar com eficiência uma cadeia de doação de um rim)

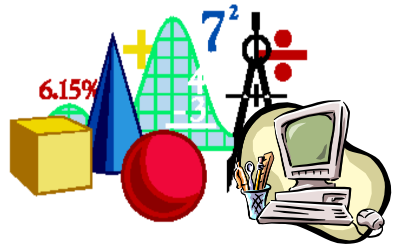
Alguns links para consulta:

- https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics_(Sekhon_and_Bloom)/04%3A_Linear_Programming_The_Simplex_Method/4.01%3A_Introduction_to_Linear_Programming_Applications_in_Business_Finance_Medicine_and_Social_Science
- https://digitalis-dsp.sib.uc.pt/handle/10316.2/35906
- https://youtu.be/0oMVVx81kCs



PROGRAMAÇÃO LINEAR

- A **programação linear** (**PL**) é um dos ramos mais desenvolvidos e mais utilizados da IO
- Otimiza problemas de decisão, representando-os em termos de um **modelo matemático de PL**
- Este modelo carateriza-se pelo facto de todas as **expressões matemáticas** que o compõem serem **lineares**



PROGRAMAÇÃO LINEAR

Formular um problema em termos de um **modelo de PL** consiste em especificar:

- **Variáveis de decisão** (o que se pretende determinar)
- **Função objetivo** (o que se pretende otimizar)
- **Restrições** (condições que têm de ser respeitadas)

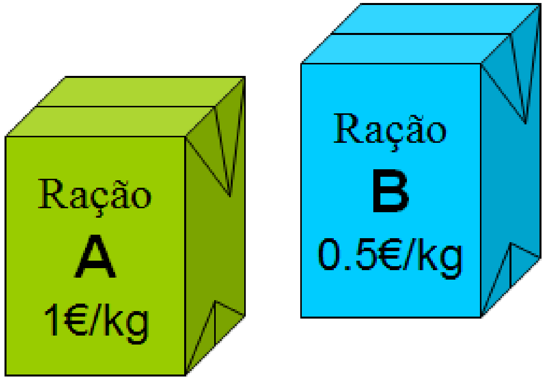
EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE PL

O dilema do Sr. Francisco

O Sr. Francisco dedica-se à criação e venda de cães de determinada raça, com bastante procura no mercado.

Como pretende que os seus animais cresçam saudáveis e bonitos, ele sabe que deve proporcionar-lhes uma alimentação equilibrada.

Na verdade, o Sr. Francisco tem à sua disposição dois tipos de rações, **A** e **B**, com caraterísticas e preços diferentes.



Composição em termos de nutrientes das rações **A** e **B**:

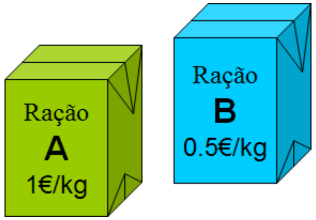
	Rações	
Nutrientes	A	B
	(g/kg)	(g/kg)
Sais minerais	20	50
Vitaminas	50	10
Cálcio	30	30

Quantidades mínimas de nutrientes, por semana, para uma alimentação equilibrada (segundo os veterinários):

Nutrientes	Quantidade mínima requerida (em g)
Sais minerais	200
Vitaminas	150
Cálcio	210

O Sr. Francisco reflete sobre aquilo que pretende:

- Por um lado, quer **respeitar as indicações dadas pelos veterinários** no sentido de proporcionar aos cachorros uma dieta nutritiva adequada



- Mas, por outro lado, quer **minimizar os gastos** com a alimentação de cada animal

Assim, a questão a resolver é a seguinte:

Que quantidade de cada tipo de ração (**A** e **B**) deve o Sr. Francisco dar semanalmente a cada cachorro de forma a

- respeitar as quantidades mínimas de nutrientes aconselhadas e
- minimizar o custo da alimentação de cada animal

Para determinar a resposta a esta questão, torna-se necessário traduzir o problema num **modelo matemático de PL**

Modelo de programação linear

- **Variáveis de decisão:**

x_1 – Quantidade (em Kg) de ração **A** a dar a cada animal por semana

x_2 – Quantidade (em Kg) de ração **B** a dar a cada animal por semana

- **Função objetivo:**

minimizar custo (em €), ou seja,

$$\textbf{min z} = \mathbf{1\ x_1 + 0.5\ x_2}$$

- **Restrições:**

$$20\,x_1 + 50\,x_2 \geq 200 \;\Big\}\; \textbf{Sais minerais}$$

$$50\,x_1 + 10\,x_2 \geq 150 \;\Big\}\; \textbf{Vitaminas}$$

$$30\,x_1 + 30\,x_2 \geq 210 \;\Big\}\; \textbf{Cálcio}$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0$$

Obtenção da solução ótima

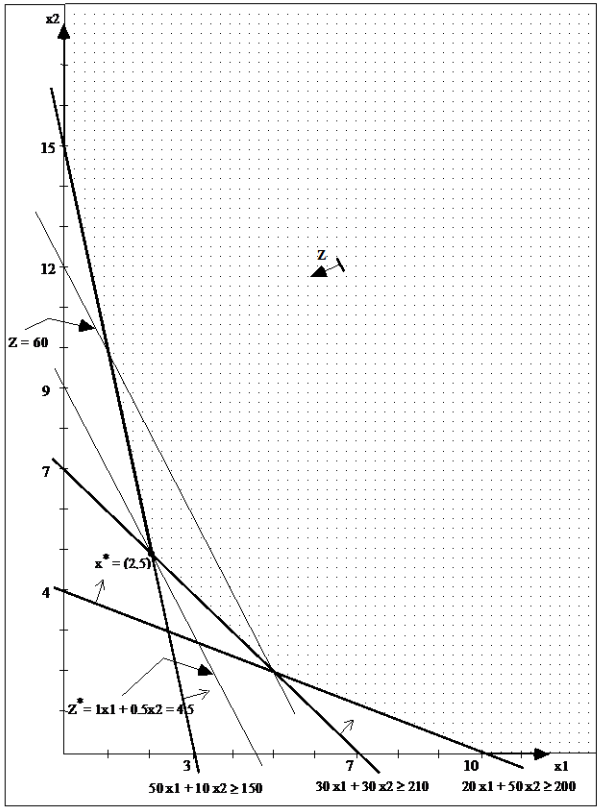
- **Método gráfico**

Utilizado na resolução de problemas simples

- **Método algébrico**

Um dos algoritmos de programação linear, como por exemplo, o **método Simplex**

Método gráfico / Método Simplex



x_B	c'_B	c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_3	0		<u>*1*</u> ←	0	1	0	0	3	(3/1)
x_4	0		0	1	0	1	0	4	
x_5	0		1	2	0	0	1	9	(9/1)
$z_j - c_j$			-5	-2	0	0	0	0	

com z=0

x_B	c'_B	ci / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_1	5		1	0	1	0	0	3	
x_4	0		0	1	0	1	0	4	(4/1)
x_5	0		0	<u>2</u> ←	-1	0	1	6	(6/2)
$z_j - c_j$			0	-2	5	0	0	15	

com z=15

x_B	c'_B	ci / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_1	5		1	0	1	0	0	3	x1 óptimo
x_4	0		0	0	½	1	-1/2	1	x4 óptimo
x_2	2		0	1	-1/2	0	½	3	x2 óptimo
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21	z óptimo

Quadro ótimo pois não há valores negativos na linha zj-cj.

Apresentação da solução

Resolvendo por qualquer dos dois métodos anteriormente referidos, obter-se-ia $\mathbf{x_1=2}$, $\mathbf{x_2=5}$ e $\mathbf{z=4.5}$, pelo que a solução a apresentar ao Sr. Francisco seria a seguinte:

Deverá alimentar cada cachorro com **2 kg** de ração **A** e **5 kg** de ração **B**, por semana, de modo a conseguir fornecer ao animal os nutrientes indispensáveis a um crescimento saudável, gastando um mínimo de **4.5 €** semanais.