Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo IV

Programação por Metas

(Goal Programming)

Programação por Metas (Goal Programming)

Na generalidade dos problemas reais de decisão é necessário incorporar **múltiplos objectivos**

Na **programação por metas (*goal programming*)**, o agente de decisão **especifica** as **<u>metas</u>** que pretende atingir para cada um dos objetivos (bem como, **eventualmente**, as respetivas **<u>prioridades</u>)**

Meta = valor desejável

Podem ser consideradas **metas** em que se pretende:

- **Atingir tanto quanto possível** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado);

- **Igualar ou ultrapassar** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado);

- **Ficar aquém ou igualar** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado).

Solução de um problema de Programação por Metas

- ***Solução ótima***
  - Quando satisfaz TODAS as metas.

- ***Melhor solução de compromisso***
  - Quando ***minimiza*** <u>os desvios (ou folgas) dos objetivos</u> em relação às metas estabelecidas;
  - Corresponde a um balanço entre os vários objetivos considerados, os quais são geralmente conflituosos.

Com vista a uma melhor compreensão deste tipo de problemas, começa-se pela apresentação de alguns exemplos simples e formulação matemática dos modelos correspondentes.

Seguidamente, esses exemplos serão resolvidos pelo método gráfico.

Formalização de problemas de Programação por Metas

A formalização de um problema de acordo com o modelo de Programação por Metas tem várias etapas:

1ª. Definição das **variáveis de decisão** e especificação das **metas**:

Esta tarefa consiste em definir as variáveis que o decisor pode controlar e também as metas que se pretende atingir.

2ª. Formalização das **restrições**:

É a tarefa de expressar as relações existentes entre as variáveis de decisão, e entre estas e as metas a atingir.

3ª. Formalização da **função objetivo**:

Esta deve traduzir o posicionamento do decisor face às diferentes metas, quer em termos de graus prioridade associados a cada meta, quer em termos de ponderação relativa das metas com igual prioridade.

Exemplo 1

A Direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário de escritório, sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos atuais.

A mesma Direcção não vê dificuldade de colocação das estantes no mercado, mas aconselha a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

(*) *Retirado de* **"Programação Linear", I Volume**
Ramalhete, M. , Guerreiro, J. , Magalhães A.

Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, concluiu-se que:

- ☞ A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 Horas-Máquina (H-M);
- ☞ A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 H-M;
- ☞ Cada secretária necessita de 2 H-M de Estampagem e de 4 H-M de Montagem e Acabamento;
- ☞ Cada estante necessita de 4 H-M de Estampagem e de 4 H-M de Montagem e Acabamento.

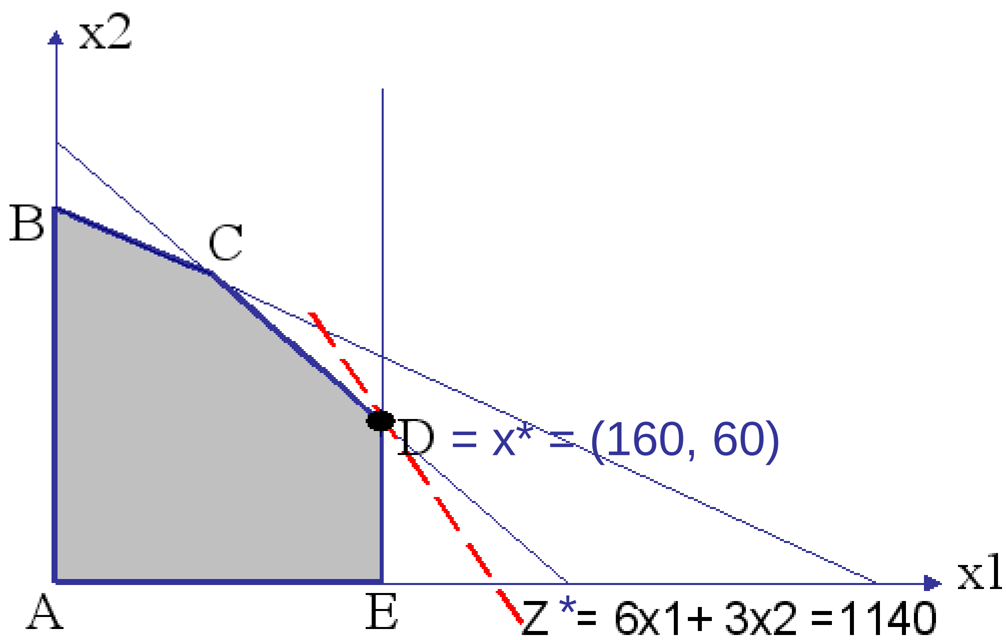
Por outro lado, os lucros unitários estimados são de 6 UM (unidades monetárias) para as secretárias e 3 UM para as estantes.

A empresa pretende determinar qual o plano de produção mensal dos novos produtos que maximiza o lucro.

Sejam x_1 e x_2 o nº de secretárias e de estantes a produzir mensalmente.

Modelo matemático:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 \\
&\text{sujeito a} \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\
&\qquad\qquad\quad 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\
&\qquad\qquad\quad x_1 \qquad\quad\; \leq 160 \\
&\qquad\qquad\quad x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



A solução ótima x_1*=160 e x_2 *= 60, indica o nº de secretárias e de estantes a produzir por mês, respetivamente.

Esta produção resulta para a empresa num lucro mensal de 1140 UM.

No exemplo anterior, a empresa estabeleceu como objetivo a maximização do lucro, o que conduziu a um problema de Programação Linear mono-objetivo. Contudo, neste momento a empresa enfrenta alguns problemas a nível de reorganização, pelo que não é realista o objetivo de maximização do lucro. A Administração entende que é preferível a fixação da **meta de 900 UM para o valor do lucro mensal** enquanto decorre a reorganização da empresa.

Está-se agora em presença de um problema de Programação por Metas. A questão é:

Como incorporar a meta fixada pela Administração no modelo matemático?

Definam-se as seguintes variáveis:

d_1^- - a folga por defeito (desvio negativo) relativamente à meta fixada, isto é, em quanto é que o lucro obtido fica aquém do valor especificado como meta

d_1^+ - a folga por excesso (desvio positivo) relativamente à meta fixada, isto é, em quanto é que o lucro obtido excede o valor especificado como meta

Então, a meta estabelecida para o lucro mensal pode ser expressa por:

$$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$$

Agora, esta equação pode ser incorporada como restrição no modelo.

As variáveis d_1^- e d_1^+ em qualquer solução, e particularmente na solução ótima, verificarão sempre o seguinte:

Se uma delas for positiva a outra é nula, podendo verificar-se a situação de ambas serem nulas.

Então:

- se d_1^- for positiva (e d_1^+ nula), a meta não foi atingida;
- se por outro lado d_1^+ for positiva (e d_1^- nula), a meta foi ultrapassada;
- se forem ambas nulas, a meta foi atingida.

A Administração, ao fixar aquela meta, pretende afinal que o lucro mensal se encontre **tão próximo quanto possível de 900 UM**.

Matematicamente, tal pode ser expresso por:

Minimizar z = $d_1^- + d_1^+$

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$ (***meta***)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- = 720$

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- = 880$

$x_1 + d_4^- = 160$

$x_1 , x_2 , d_1^- , d_1^+ , d_2^- , d_3^- , d_4^- \geq 0$

As variáveis d_2^- , d_3^- e d_4^- são as variáveis folga (do tipo *slack*) necessárias à passagem do problema para a forma *standard*, pelo que não são incluídas na função objetivo.

Pelo contrário, as variáveis folga d_1^- e d_1^+ encontram-se incluídas nessa função, o que significa que a restrição respetiva representa uma meta do problema.

Exemplo 2

Vamos agora considerar que a Administração da empresa de mobiliário decidiu estabelecer mais do que uma meta. Vamos ainda supor que a mesma Administração é capaz de ordenar as várias metas por ordem de importância e que a meta mais importante tem prioridade absoluta sobre a meta seguinte, e assim sucessivamente. Assim, além da meta estabelecida no exemplo anterior correspondente à primeira prioridade, pretende-se ainda que **a capacidade do Departamento de Montagem e Acabamento seja utilizada em pleno**.

A formalização de acordo com o modelo de Programação por Metas é a seguinte:

Minimizar z = { ($d_1^- + d_1^+$) , d_3^- }

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$ (**meta**)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- = 720$

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 880$ (**meta**)

$x_1 + d_4^- = 160$

$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_3^-, d_3^+, d_4^- \geq 0$

No modelo, x_1 , x_2 , d_1^-, d_1^+, d_2^- e d_4^- têm o significado já conhecido. Por outro lado, d_3^- e d_3^+, representam o *tempo de inatividade mensal* e o *tempo de trabalho extraordinário*(*) *mensal* do Departamento de Montagem e Acabamento.

A meta com prioridade absoluta inclui as variáveis d_1^- e d_1^+ , uma vez que a Administração pretende um lucro mensal tão próximo quanto possível de 900 UM, o que só poderá ser atingido minimizando ambas as folgas.

(*) *Admite-se que a disponibilidade do Departamento diz respeito a horário normal.*

Contudo, a meta secundária não inclui a variável d_3^+ , uma vez que a preocupação expressa foi apenas de reduzir ao mínimo o tempo de inatividade do departamento em questão.

Note-se que, na construção da função objetivo, começa-se pela meta com maior prioridade, depois pela meta com a segunda maior prioridade, e assim sucessivamente.

Exemplo 3

Considere que entretanto foi concluída a reorganização da empresa em causa. Neste momento, e dada a boa aceitação do novo modelo de secretária, a Direcção de Marketing da empresa aconselha que a **produção mensal deste artigo seja de 160 unidades**. Por outro lado, a Administração fixou em **1500 UM**, **a nova meta quanto ao lucro mensal**, admitindo o **recurso a trabalho extraordinário nos Departamentos de Estampagem** (DE) **e de Montagem e Acabamento** (DMA). Contudo, o funcionamento em horário extraordinário do DMA, custa à empresa o dobro do trabalho extraordinário do DE, em regime idêntico.

A administração da empresa estabeleceu os seguintes graus de prioridade:

Prioridade 1 -	Obter um lucro mensal de 1500 UM
Prioridade 2 -	Produzir mensalmente 160 secretárias
Prioridade 3 -	Reduzir ao mínimo o trabalho extraordinário no Departamento de Estampagem e no Departamento de Montagem e Acabamento

A formalização deste problema em termos de Programação por Metas

é a seguinte:

Minimizar z = {($d_1^- + d_1^+$) , ($d_4^- + d_4^+$) , ($d_2^+ + 2d_3^+$) }

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1500$ (**meta**)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 720$ (**meta**)

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 880$ (**meta**)

$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 160$ (**meta**)

$x_1 , x_2 , d_i^- , d_i^+ \geq 0$ (i=1,2,3,4)

Relativamente ao modelo anterior, note-se que a relação de custos em regime extraordinário dos dois departamentos, foi incluída na função objetivo, usando pesos diferentes para as metas com igual prioridade.

Assim, o modelo dará preferência ao trabalho extraordinário no Departamento de Estampagem, desde que tal não comprometa as metas com prioridade mais elevada.

Formulação Matemática do Modelo de Programação por Metas

Minimizar $Z = \{ h_1(D^-,D^+), h_2(D^-,D^+), ..., h_k(D^-,D^+) \}$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

x_j, d_i^- , d_i^+ ≥ 0 (i = 1,2, ..., m ; j = 1,2, ..., n)

em que $D^- = [d_1^-, d_2^-, ..., d_m^-]'$, $D^+ = [d_1^+, d_2^+, ..., d_m^+]'$ e as *p* metas estabelecidas se agrupam em *k* graus de prioridade ($k \leq p$), de tal forma que cada meta se encontre incluída num e num só grau de prioridade.

As variáveis x_j constituem as variáveis de decisão do problema,

d_i^- e d_i^+ as folgas por defeito e por excesso relativamente a cada meta,

ou então as variáveis folga introduzidas para a passagem do problema

à forma *standard* (quando as restrições não correspondem a metas).

Portanto, o modelo apresentado contém dois tipos de restrições:

- **as que não correspondem a metas** (funcionais);
- **as que correspondem a metas** (especificadas pelo decisor).

A principal diferença entre elas é que, as primeiras **não podem ser violadas**, enquanto que as segundas devem ser **satisfeitas de forma tão aproximada quanto possível** (por excesso ou por defeito).

O objetivo neste modelo é minimizar as folgas entre os resultados obtidos e as metas estabelecidas, tendo em conta as prioridades e as ponderações dentro de cada prioridade.

Qualquer restrição respeitante a uma meta, tem a forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

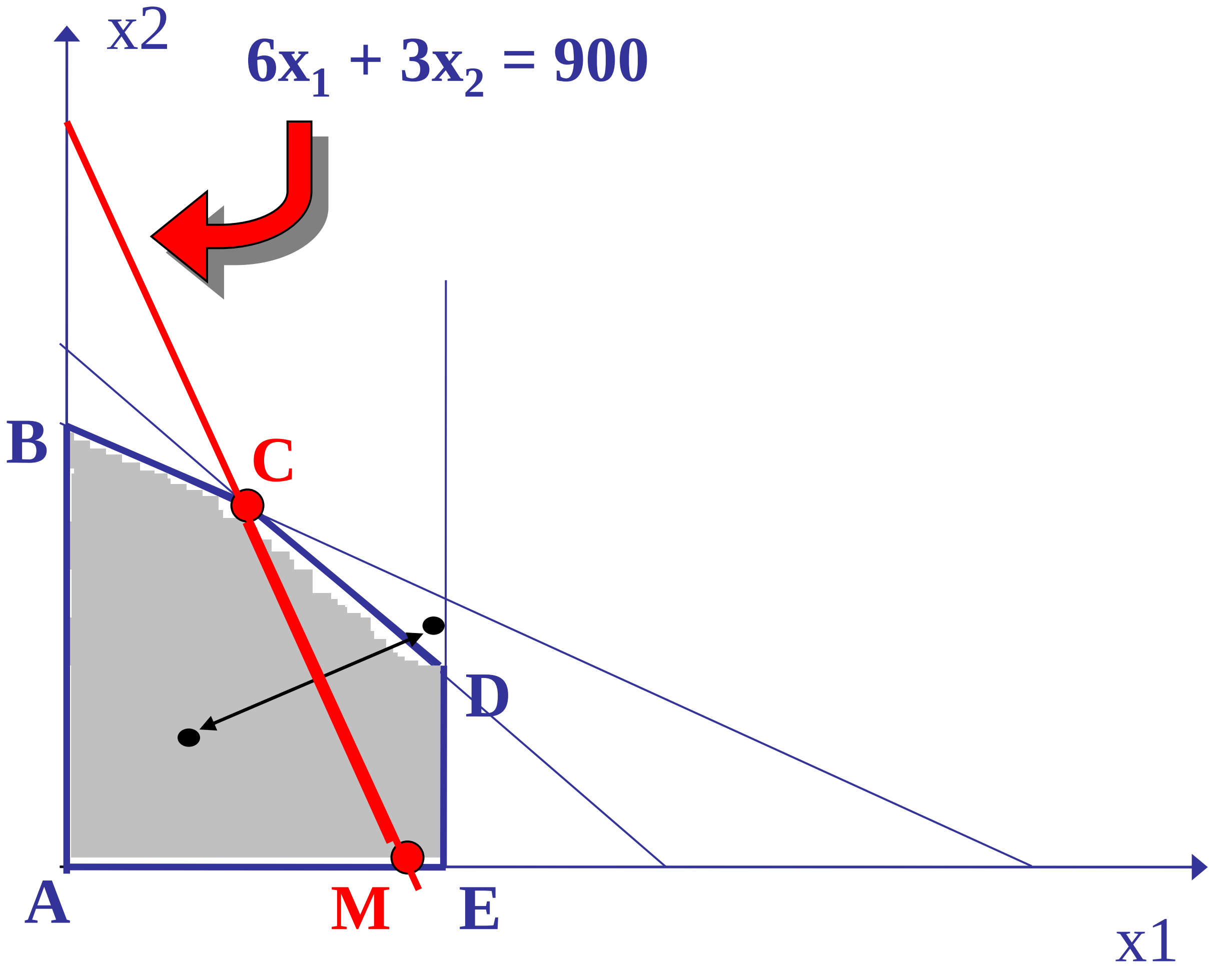
1) Se a meta for **atingir o valor b_i**, então há que proceder à minimização de $d_i^- + d_i^+$;

2) Se a meta for **igualar ou exceder o valor b_i**, então há que proceder à minimização de d_i^- ;

3) Se a meta for **igualar ou ficar aquém do valor b_i**, então há que proceder à minimização de d_i^+ .

Resolução Gráfica

Exemplo 1



Relativamente ao gráfico anterior, a região das soluções admissíveis é dada pelo interior e pela fronteira de **ABCDE** .

Considerando que a meta (lucro mensal) pode ser inferior, igual ou superior a 900 UM, conforme indicado pelas setas, a região admissível não é alterada. Pretende-se minimizar ambas as “folgas”, d_i^- e d_i^+, o que se indica através de um pequeno círculo preto à frente das setas respetivas.

Conclui-se que o segmento **CM** é o **conjunto das soluções ótimas**, dado que é sobre a reta de $6x_1 + 3x_2 = 900$ ($d_i^- = d_i^+ = 0$) que a FO é minimizada.

A solução extrema **M** corresponde à produção mensal de **150 secretárias** e **0 estantes** (sendo atingida a meta que foi estipulada de **900 UM** de lucro).

A outra solução ótima extrema alternativa **C** corresponde à produção mensal de **80 secretárias** e **140 estantes** conseguindo-se de igual modo atingir a meta de **900 UM** de lucro.

Conclui-se assim, que existe uma infinidade de soluções ótimas (obtidas pela combinação linear convexa das duas determinadas), para as quais se verifica $d_i^- = d_i^+ = 0$.

Exemplo 2

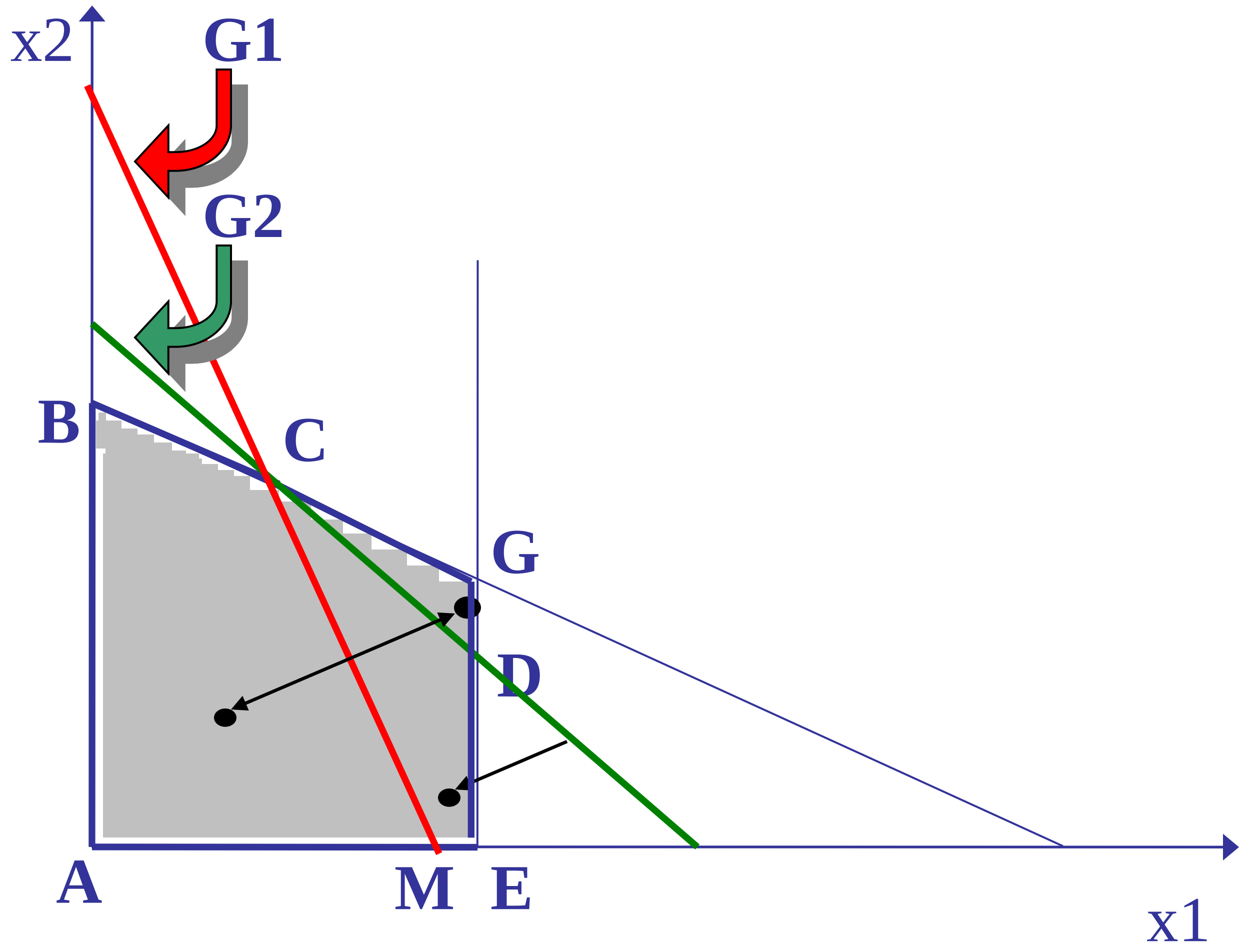


Figura **a)**

No gráfico anterior representaram-se graficamente as restrições do problema.

A região admissível vem ampliada em relação ao **Exemplo 1** uma vez que agora é possível o recurso a trabalho extraordinário no DMA.

As diferentes prioridades das duas metas foram assinaladas por **G1** e **G2** (Prioridade de Grau 1 e de Grau 2, respetivamente) .

Os pequenos círculos pretos colocados à frente das setas dizem respeito às variáveis folga a serem minimizadas.

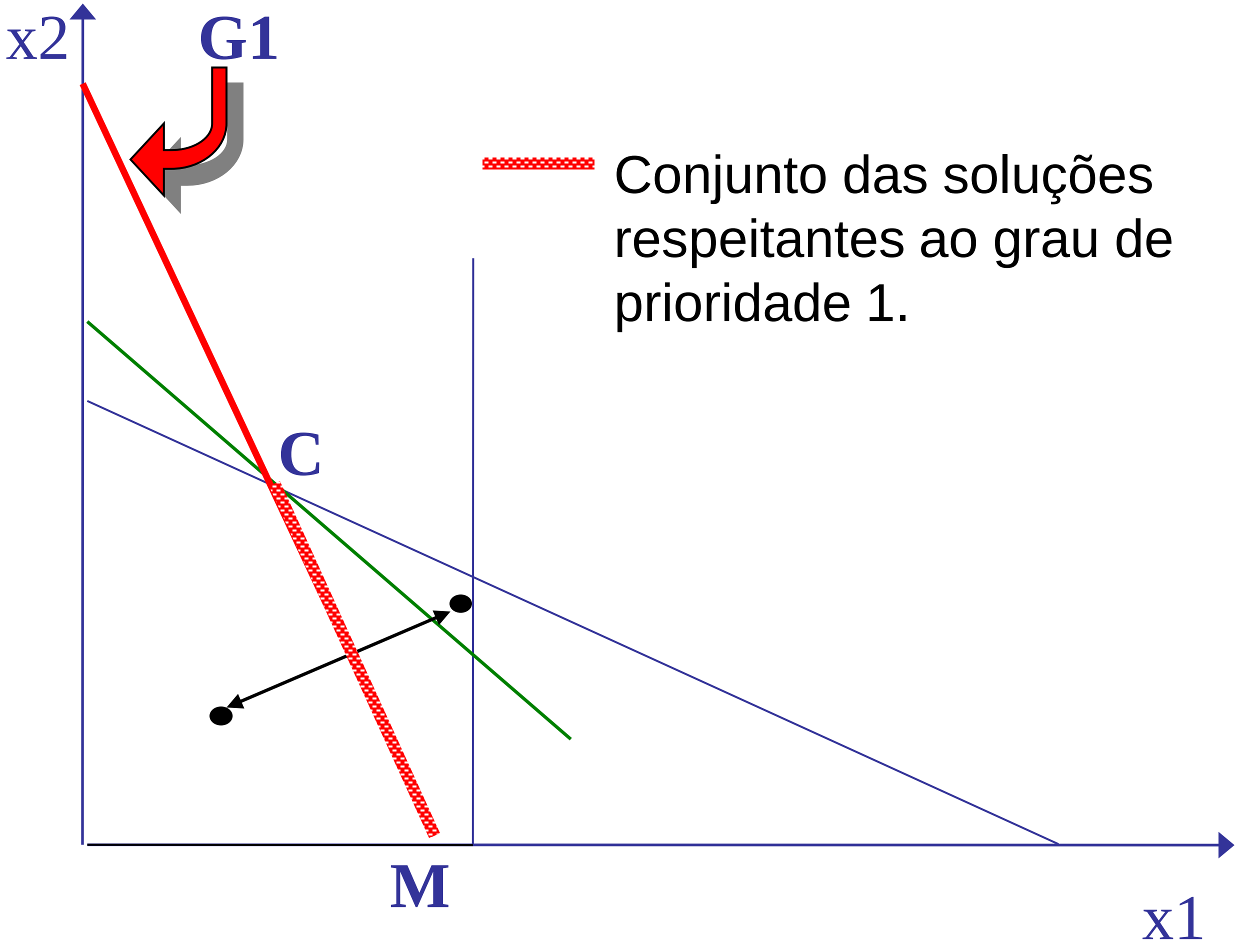

x2
G1
Conjunto das soluções respeitantes ao grau de prioridade 1.
C
M
x1

Figura **b)**

No gráfico anterior iniciou-se a análise à função objectivo.

Como existem dois graus de prioridade, determinaram-se primeiro as soluções que satisfazem a **meta de 900 UM de lucro mensal** (G1). Verificou-se que todas as soluções do segmento de recta CM satisfazem esta meta.

Vai-se **analisar em seguida a meta com prioridade 2** (G2) - esta consiste **em minimizar o tempo de inatividade mensal do DMA**.

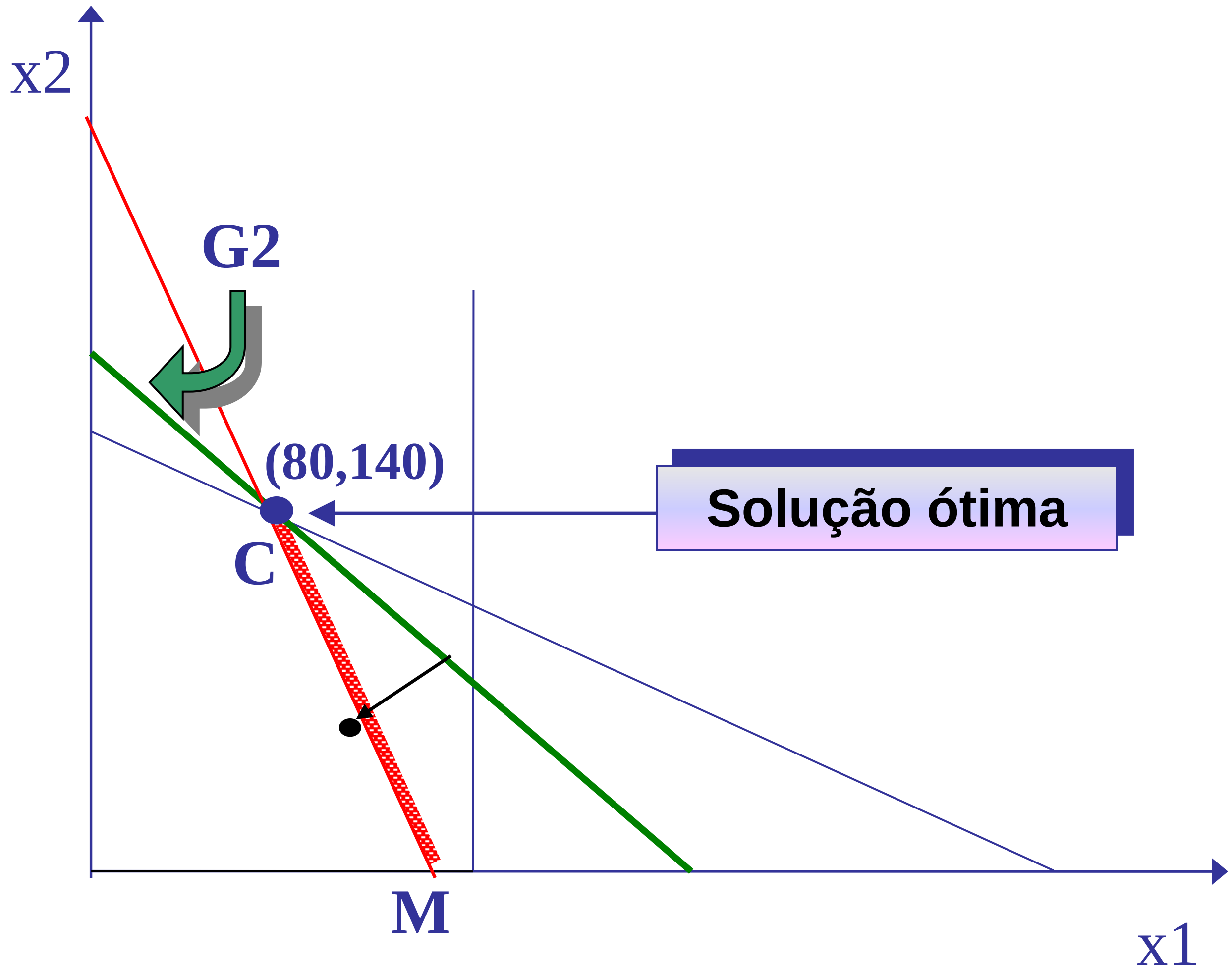


Figura **c)**

Como a solução a determinar não podia comprometer o nível de satisfação atingido relativamente à meta com primeira prioridade, a pesquisa recaiu apenas sobre os pontos do segmento **CM**.

Assim sendo, determinou-se como **solução ótima** a correspondente ao ponto **C**: **(80,140)** - esta **solução proporciona** o **lucro pretendido** (900 UM) e por outro lado a **utilização plena do DMA**. Ou seja, consegue-se atingir o nível máximo de satisfação possível em relação a ambas as metas.

Exemplo 3

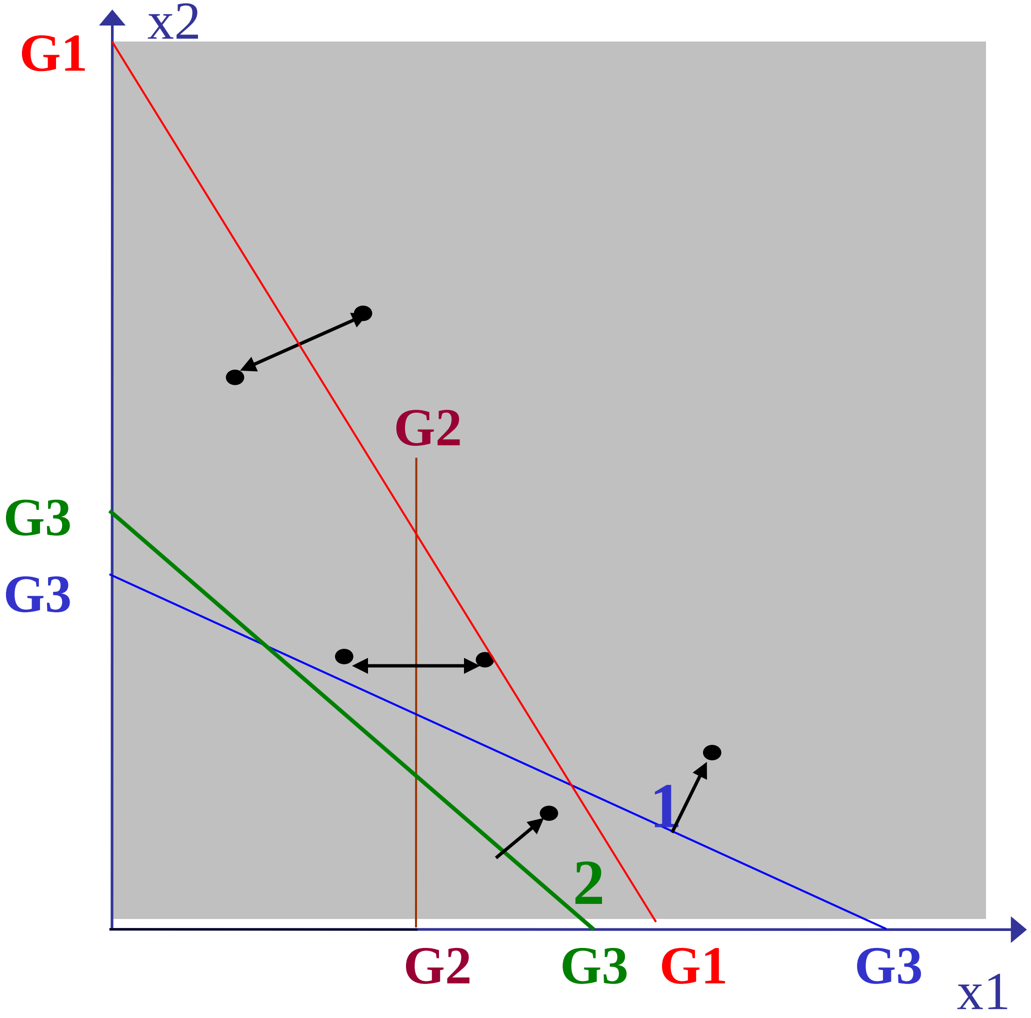


Figura **a)**

No gráfico anterior verifica-se que a região admissível coincide com o 1º quadrante.

Existem três graus de prioridade e as duas metas com grau de prioridade 3 têm diferentes ponderações (assinaladas com **1** e **2**).

A satisfação da meta com prioridade de grau 1, é verificada para as soluções assinaladas no gráfico que se segue (*Figura b)*).

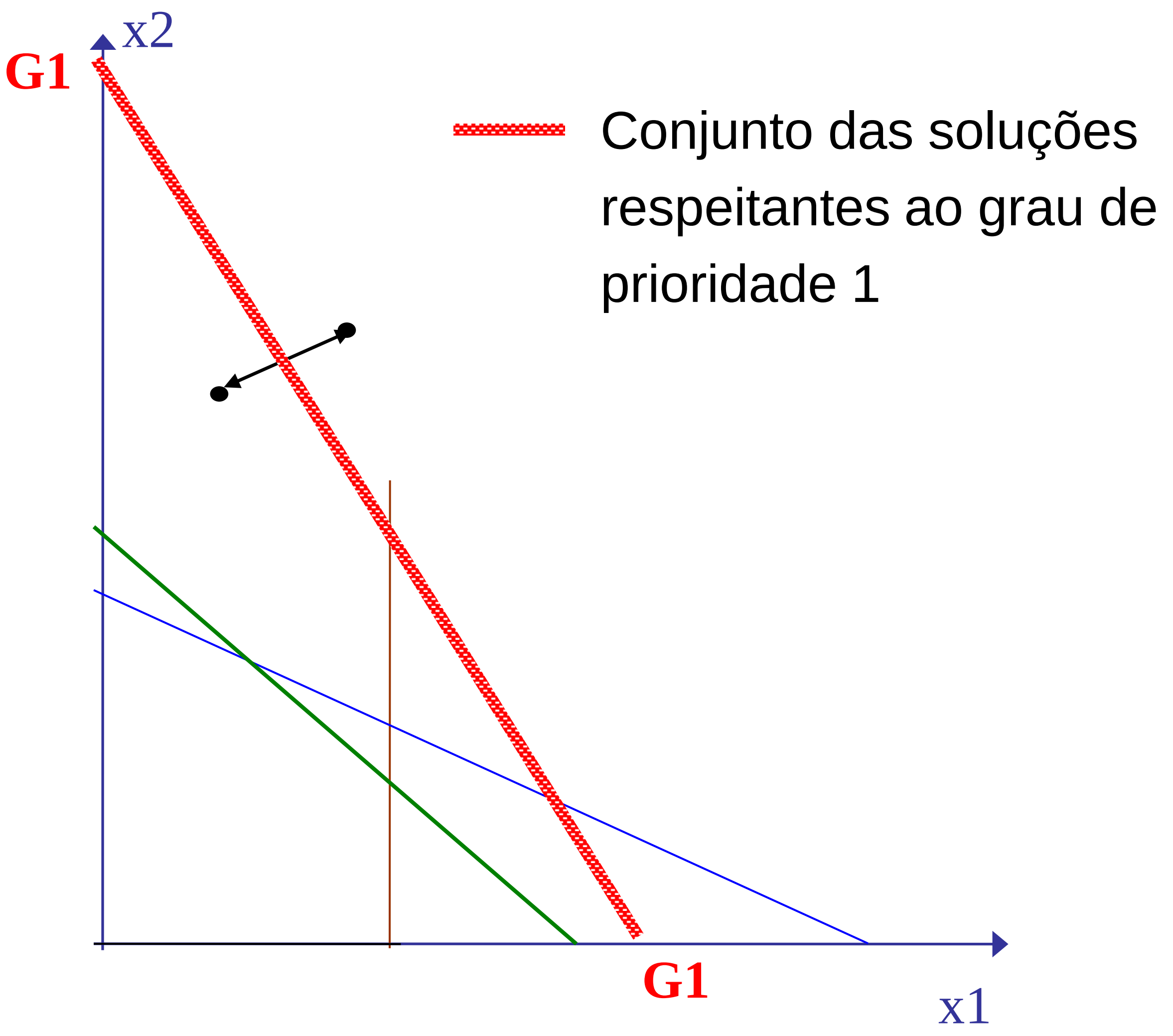

x2
G1
Conjunto das soluções respeitantes ao grau de prioridade 1
G1
x1

Figura **b)**

Quando se tenta satisfazer a meta com grau de prioridade 2, vê-se que existe apenas uma solução nestas condições: **(160,180)**.

A solução encontrada corresponde à produção mensal de **160 secretárias**, originando um **lucro mensal de 1500 UM**.

Ou seja, como referido atrás, as metas dos dois primeiros graus de prioridade foram atingidas.

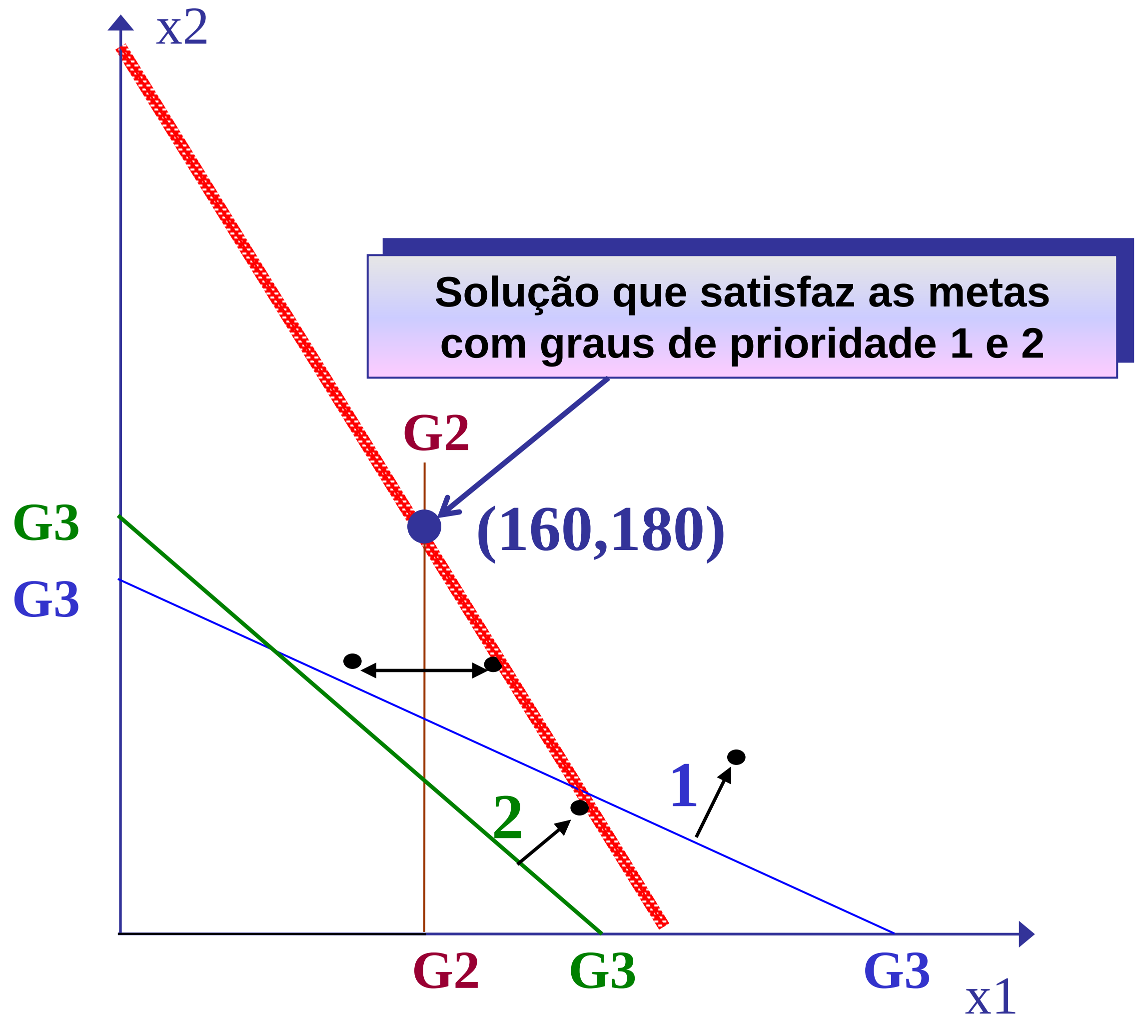

x2
Solução que satisfaz as metas
com graus de prioridade 1 e 2
G2
G3
(160,180)
G3
1
2
G2
G3
G3
x1

Figura **c)**

A satisfação das metas com grau de prioridade 3 já não alterará a solução determinada, pois como já foi referido, a lógica do modelo de Programação por Metas consiste na satisfação sequencial por graus de prioridade das metas em cada grau, sem nunca pôr em causa o nível de satisfação já atingido em relação às metas com precedência de prioridade.

Como se pode verificar pelo gráfico, na solução encontrada **(160,180),** as metas com prioridade de grau 3 não são satisfeitas. É necessário recorrer a **trabalho extraordinário nos DE** e **DMA**, de (2*160 + 4*180 - 720 =) **320 H-M** e (4*160 + 4*180 – 880 =) **480 H-M mensais**, respetivamente.

Então o processo termina e a solução encontrada **(160,180)** é a melhor solução de compromisso para este problema.

Resumindo, a **resolução gráfica de um problema de Programação por Metas** envolve os seguintes passos:

<u>Passo 1</u>

Representar graficamente as restrições que não correspondem a metas e determinar a Região Admissível. Representar graficamente as metas, indicando o grau de prioridade de cada uma bem como as variáveis folga que fazem parte da Função Objetivo.

<u>Passo 2</u>

Determinar o conjunto das soluções que satisfazem as metas com grau de prioridade 1.

Passo 3

Passar ao grau de prioridade seguinte e determinar o conjunto das soluções que satisfazem as metas com esse grau de prioridade, sem comprometer o nível de satisfação já atingido para as prioridades mais elevadas.

Passo 4

(Critério do ótimo). Se foram analisados todos os graus de prioridade, a solução encontrada é a solução ótima (ou a melhor solução de compromisso) para este problema e o processo termina.

Senão, voltar ao *Passo 3*.