Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Revisões de Investigação Operacional

Formulação do modelo de PL

Considere o seguinte problema:

Uma pequena fábrica de brinquedos de madeira pretende produzir três novos brinquedos: comboios, cavalos e cabanas. A produção destes brinquedos requer mão-de-obra especializada de carpintaria e acabamentos. A produção de um comboio requer **1** hora de carpintaria e **1** hora de acabamentos. A produção de um cavalo requer **3** horas de carpintaria e **2** de acabamentos. A produção de uma cabana requer **2** horas de carpintaria e **1** de acabamentos. A fábrica tem **10** empregados na secção de carpintaria e **7** na secção de acabamentos, sendo o horário semanal de qualquer um dos empregados, de **40** horas.

Com a venda dos comboios, cavalos e cabanas a fábrica tem lucros unitários de **20**€, **50**€ e **25**€, respetivamente.

A fábrica pretende saber quais as quantidades de cada tipo de brinquedo que deve produzir de forma a maximizar o seu lucro semanal. (Assuma que a fábrica vende tudo o que produzir.)

Para ajudar a fábrica a obter resposta pretendida, **formule o problema em termos de um modelo de programação linear**.

O método gráfico

Resolva cada um dos seguintes problemas pelo **método gráfico**:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeito a $2x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1 + 5x_2 \geq 10$ $-x_1 + 3x_2 = 6$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$	*Maximizar* $z = 3x_1 - x_2$ sujeito a $2x_1 + x_2 \geq 2$ $x_1 + 3x_2 \geq 3$ $x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

O método Simplex

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar}\ \ z = -x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
&\quad x_1 - x_2 \leq 1 \\
&\quad x_1 \leq 5 \\
&\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica do “Grande M”**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeito a

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$

$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica das "Duas Fases"**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

- Resolva-o pelo **<u>método Simplex</u>** usando a **<u>técnica das "Duas Fases"</u>**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeito a

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$

$3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 120$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica do "Grande M"**

  (***Sugestão:*** *Resolva este exercício e conclua que se trata de um* ***problema impossível****, sem solução, pois atingirá o quadro ótimo com uma variável artificial na base*)

Dualidade - O método dual do Simplex

Resolva o seguinte problema de programação linear pelo **método dual do Simplex**:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimizar}\ \ z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \geq 10 \\
&\qquad -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
&\qquad x_1 + x_2 \geq 6 \\
&\qquad x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade - Formulação do problema dual

1.

Maximizar $z = 3x_1 - 2x_2$

sujeito a

$x_1 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

2.

Minimizar $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Relações Primal-Dual

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO	PASSAGEM AO DUAL ⟺		PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO
i-ésima restrição	$\leq$ $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 Livre	*i*-ésima variável
j-ésima variável	≥ 0 ≤ 0 livre	$\geq$ $\leq$ $=$	*j*-ésima restrição

Dualidade - Obtenção da solução do dual

Maximizar $z = 2x_1 - x_2$

sujeito a

$2x_1 + 4x_2 \geq 8$ **(1)**
$x_1 + 2x_2 \geq 4$ **(2)**
$2x_1 + 2x_2 \leq 6$ **(3)**
$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis ***surplus*** e **artificial** da restrição funcional **(1)**, $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_6}$ as variáveis ***surplus*** e **artificial** da restrição funcional **(2)**, e $\mathbf{x_7}$ a variável ***slack*** da restrição funcional **(3)**, o quadro ótimo do Simplex é:

	c_i	2	-1	0	0	-M	-M	0	
$\mathbf{x_B}$	c_B /x_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	**b**
$\mathbf{x_2}$	-1	0	1	0	-1	0	1	-1/2	1
$\mathbf{x_3}$	0	0	0	1	-2	-1	2	0	0
$\mathbf{x_1}$	2	1	0	0	1	0	-1	1	2
	zj-cj	0	0	0	3	M	M-3	5/2	3

Dualidade – Exercício completo

Minimizar $z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 3x_3 \geq 4$$
$$x_2 + x_3 \leq 9$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

- Resolva-o pelo método dual do Simplex
- Formule o problema dual que lhe está associado
- A partir dos resultados obtidos na 1ª alínea, indique qual é a solução ótima do problema dual