Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática (LEI, LEI-PL, LEICE)
1ª Frequência de Métodos Estatísticos

12 de Maio de 2021 **Versão 101** Duração: 1h30min

(2.5) **1.** Uma empresa produz para o mercado A e para o mercado B, sendo a produção para o mercado A um terço da destinada ao mercado B. Com base no controlo de qualidade à produção da empresa, admite-se que 5% dos produtos lançados no mercado A apresentam deficiências, sendo essa percentagem de 3% na produção destinada ao mercado B.

(a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

(b) Determine a probabilidade de um produto produzido por esta empresa ser defeituoso.

(c) Determine a probabilidade de um produto não defeituoso ter sido produzido para o mercado A.

(d) Considerando uma amostra de 10 produtos dessa empresa, explicite todo o processo de definição da variável aleatória bem como a sua lei de probabilidade, que lhe permitará determinar a probabilidade de, nesses 10 produtos, existir quando muito um defeituoso. Calcule uma aproximação para esse valor (utilize 4 casas decimais).

(3.0) **2.** Uma agência de um banco estudou as duas variáveis seguintes com o objetivo de conhecer o comportamento dos titulares de conta corrente num período difícil como o que o país está a atravessar:

X: "Número de meses com a conta corrente a descoberto no ano anterior por um titular de conta"

Y: "Número de moratórias[1] concedidas pelo banco ao titular da conta"

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

X \ Y	0	1	2
0	0	0	0.10
1	0	0.05	0.05
2	0.20	0.10	0.05
3	0.30	0.10	0.05

a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y.

b) Qual o número de médio de meses que um cliente da agência apresentou a conta a descoberto no ano anterior? Com que desvio-padrão?

c) Determine a probabilidade de um titular de conta que nunca teve a conta a descoberto no ano anterior, possuir 2 moratórias.

d) Determine a covariância entre X e Y. O número de meses que um cliente da agência teve a conta a descoberto no ano anterior é independente do número de moratórias que lhe foram concedidas? Justifique.

e) Calcule $\mathrm{P}(Y = y/X = 1), \forall y \in \mathbb{R}$.

[1] moratória - (latim moratoria, feminino de moratorius, -a, -um; *nome feminino*; 1. [Direito] Espera ou prorrogação concedida pelo credor ao devedor; 2. Adiamento de um prazo, geralmente em relação ao vencimento de uma dívida. "moratória", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2021, https://dicionario.priberam.org/morat%C3%B3ria [consultado em 06-05-2021].

(0.75) **3.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, contidos em Ω, tais que $\mathrm{P}(A/B) = 0.45$ e $\mathrm{P}(B) = 0.5\mathrm{P}(A)$. A probabilidade de B não se realizar sabendo que A se realiza é

(A) 0.18 **(B)** 0.775 **(C)** 0.225 **(D)** 0.9

(0.75) **4.** Uma empresa de computadores ofereceu 3 computadores para serem sorteados por 3 dos 12 melhores estudantes, 8 rapazes e 4 raparigas, de Engenharia Informática. Sabendo que qualquer dos estudantes pode ser premiado, a probabilidade de no máximo uma aluna ganhar um dos computadores é

(A) 0.7636 **(B)** 0.7407 **(C)** 0.5091 **(D)** 0.2364

(1.0) **5.** Ao lançar um dardo, a probabilidade de um jogador acertar no alvo é $p \in]0, 1[$. Em média, ao fim de quatro tentativas o jogador acerta 1.4 vezes. Determine a probabilidade de, em quatro tentativas, o jogador acertar uma vez.

(A) 0.3500 **(B)** 0.3845 **(C)** 0.0961 **(D)** 0.0897

(0.5) **6.** A estatística revela que o João falha 10% dos lances livres que executa. Num treino o João vai executar uma série de 8 lances livres. Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade

$$1 - 0.9^8 - {}^8C_7 \times 0.9^7 \times 0.1^1$$

(A) O João concretiza pelo menos 6 lances livres;
(B) O João concretiza pelo menos 7 lances livres;
(C) O João concretiza no máximo 6 lances livres;
(D) O João concretiza no máximo 7 lances livres.

(1.0) **7.** A experiência, de um determinado posto de combustível de Coimbra, revela que o número de clientes, por hora, segue uma distribuição de Poisson, de valor médio 10.

(a) A probabilidade de o posto ter, no máximo, 5 clientes numa determinada hora é

(A) 0.0671 **(B)** 0.0378 **(C)** 0.0293 **(D)** 0.9329

(b) A probabilidade de o posto ter, no período entre as 8h e as 12h de um determinado dia, mais de 40 clientes é

(A) 0.5419 **(B)** 0.4581 **(C)** 0.4790 **(D)** 0.5210

(0.5) **8.** Uma variável aleatória X tem a seguinte função de probabilidade, onde a designa um número real:

x	a	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{a^2}{6}$	$\frac{2}{3}$

O valor médio de X é $\frac{13}{6}$. Qual pode ser o valor de a?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** -1 **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** 1

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)$.

Teorema [Bayes] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)}$, $i = 2, ..., n$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática (LEI, LEI-PL, LEICE)
$1^{\underline{a}}$ Frequência de Métodos Estatísticos

12 de Maio de 2021 **Versão 102** Duração: 1h30min

(2.5) **1.** Uma empresa produz para o mercado A e para o mercado B, sendo a produção para o mercado A dois terços da destinada ao mercado B. Com base no controlo de qualidade à produção da empresa, admite-se que 5% dos produtos lançados no mercado A apresentam deficiências, sendo essa percentagem de 3% na produção destinada ao mercado B.

(a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

(b) Determine a probabilidade de um produto produzido por esta empresa ser defeituoso.

(c) Determine a probabilidade de um produto não defeituoso ter sido produzido para o mercado B.

(d) Considerando uma amostra de 10 produtos dessa empresa, explicite todo o processo de definição da variável aleatória bem como a sua lei de probabilidade, que lhe permitará determinar a probabilidade de, nesses 10 produtos, existir quando muito um defeituoso. Calcule uma aproximação para esse valor (utilize 4 casas decimais).

(3.0) **2.** Uma agência de um banco estudou as duas variáveis seguintes com o objetivo de conhecer o comportamento dos titulares de conta corrente num período difícil como o que o país está a atravessar:

X: "Número de meses com a conta corrente a descoberto no ano anterior por um titular de conta"

Y: "Número de moratórias[1] concedidas pelo banco ao titular da conta"

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

Y / X	0	1	2
0	0	0	0.10
1	0	0.05	0.05
2	0.20	0.10	0.05
3	0.30	0.10	0.05

a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y.

b) Qual o número de médio de moratórias que um cliente da agência tem? Com que desvio-padrão?

c) Determine a probabilidade de um titular de conta que possui 2 moratórias nunca ter tido a conta a descoberto no ano anterior.

d) Determine a covariância entre X e Y. O número de meses que um cliente da agência teve a conta a descoberto no ano anterior é independente do número de moratórias que lhe foram concedidas? Justifique.

e) Calcule $\mathrm{P}(X = x/Y = 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

---

[1]moratória - (latim moratoria, feminino de moratorius, -a, -um; *nome feminino*; 1. [Direito] Espera ou prorrogação concedida pelo credor ao devedor; 2. Adiamento de um prazo, geralmente em relação ao vencimento de uma dívida. "moratória", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2021, https://dicionario.priberam.org/morat%C3%B3ria [consultado em 06-05-2021].

(0.75) **3.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, contidos em Ω, tais que $\mathrm{P}(A/B) = 0.45$ e $\mathrm{P}(B) = 0.5\mathrm{P}(A)$. A probabilidade de B se realizar sabendo que A se realiza é

(A) 0.18 **(B)** 0.775 **(C)** 0.225 **(D)** 0.9

(0.75) **4.** Uma empresa de computadores ofereceu 3 computadores para serem sorteados por 3 dos 12 melhores estudantes, 8 rapazes e 4 raparigas, de Engenharia Informática. Sabendo que qualquer dos estudantes pode ser premiado, a probabilidade de mais de uma aluna ganhar um dos computadores é

(A) 0.7636 **(B)** 0.7407 **(C)** 0.5091 **(D)** 0.2364

(1.0) **5.** Ao lançar um dardo, a probabilidade de um jogador acertar no alvo é $p \in]0, 1[$. Em média, ao fim de quatro tentativas o jogador acerta 1.4 vezes. Determine a probabilidade de, em quatro tentativas, o jogador acertar uma vez.

(A) 0.0897 **(B)** 0.0961 **(C)** 0.3845 **(D)** 0.3500

(0.5) **6.** A estatística revela que o João falha 10% dos lances livres que executa. Num treino o João vai executar uma série de 8 lances livres. Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade

$$1 - 0.9^8 - {}^8C_7 \times 0.9^7 \times 0.1^1$$

(A) O João concretiza pelo menos 7 lances livres;
(B) O João concretiza pelo menos 6 lances livres;
(C) O João concretiza no máximo 7 lances livres;
(D) O João concretiza no máximo 6 lances livres.

(1.0) **7.** A experiência, de um determinado posto de combustível de Coimbra, revela que o número de clientes, por hora, segue uma distribuição de Poisson, de valor médio 10.

(a) A probabilidade de o posto ter, no mínimo, 5 clientes numa determinada hora é

(A) 0.0671 **(B)** 0.9707 **(C)** 0.0293 **(D)** 0.9329

(b) A probabilidade de o posto ter, no período entre as 8h e as 12h de um determinado dia, mais de 40 clientes é

(A) 0.5419 **(B)** 0.5210 **(C)** 0.4790 **(D)** 0.4581

(0.5) **8.** Uma variável aleatória X tem a seguinte função de probabilidade, onde a designa um número real:

x	a	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{a^2}{6}$	$\frac{2}{3}$

O valor médio de X é $\frac{13}{6}$. Qual pode ser o valor de a?

(A) -1 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** 1

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)$.

Teorema [Bayes] Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}$, $i = 2, ..., n$.