

Capítulo II

PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Formulação do modelo e resolução gráfica

Exemplo 1

Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho da sua quinta, ou seja, quer saber que áreas deve plantar de arroz e milho de modo a ser máximo o lucro obtido das plantações.

O lucro por unidade de área plantada de arroz e de milho é de, respetivamente, 5 e 2 unidades monetárias (UM).

As áreas plantadas de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 unidades de área, respetivamente.

O consumo total de mão-de-obra (medido em homens/hora) nas duas plantações não deve ser maior do que 9. Cada unidade de área plantada de arroz necessita de 1 homem/hora e cada unidade de área plantada de milho necessita de 2 homens/hora.



Variáveis de decisão:

- nº de unidades de área a plantar de arroz;
- nº de unidades de área a plantar de milho.

Função objetivo:

- maximizar o lucro a obter das plantações.

Restrições:

- área dos terrenos;
- mão de obra disponível.



	Arroz	Milho	Disponibilidades
Área 1	x		3
Área 2		x	4
Mão-de-obra	1	2	9
Lucro	5	2	<i>max</i>

Ou seja, o problema consiste em:

Determinar

x_1 = nº de unidades de área a plantar de arroz

x_2 = nº de unidades de área a plantar de milho

de modo a

maximizar o lucro, ou seja,

maximizar $z = 5x_1 + 2x_2$

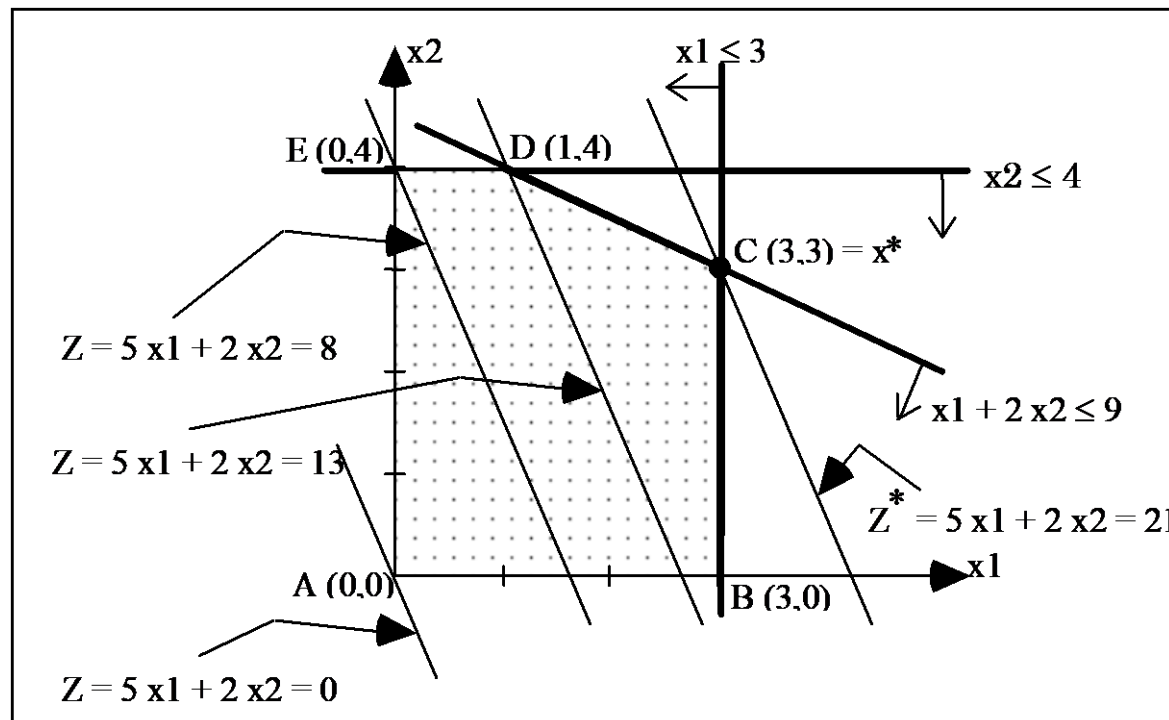
sujeito a

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Exemplo 2

Uma empresa de mobiliário de escritório pretende lançar um modelo de secretárias e de estantes.

Pensa-se que o mercado pode absorver toda a produção de estantes, mas aconselha-se a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Ambos os produtos são processados em duas unidades diferentes: unidade de estampagem (UE) e unidade de montagem e acabamento (UMA). A disponibilidade mensal de cada uma destas unidades é de 720 horas/máquina na UE e de 880 horas/máquina na UMA. Cada secretária necessita de 2 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA; cada estante necessita de 4 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA.

Estima-se que o lucro obtido por cada secretária é de 6 unidades monetárias (UM) e por cada estante é de 3 unidades monetárias (UM).

Pretende-se saber qual o plano de produção mensal de secretárias e de estantes que maximiza o lucro (assumindo que toda a produção é vendida).



Variáveis de decisão:

- número de secretárias a produzir por mês;
- número de estantes a produzir por mês.

Função objetivo:

- maximizar o lucro mensal.

Restrições:

- disponibilidades das UE e UMA;
- mercado.



Logo, o problema consiste em:

Determinar

x_1 = número de secretárias
a produzir por mês

x_2 = número de estantes
a produzir por mês

de modo a

maximizar $z = 6x_1 + 3x_2$

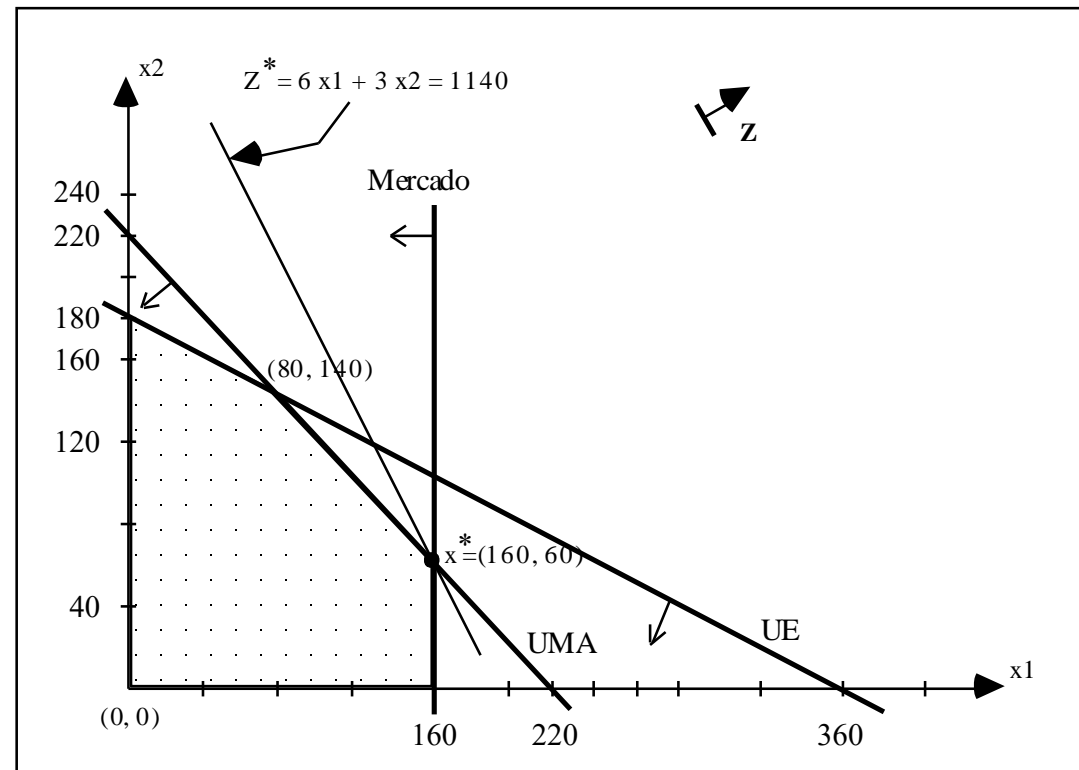
sujeito a

$$2x_1 + 4x_2 \leq 720$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 880$$

$$x_1 \leq 160$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



© Can Stock Photo - csp13331116

Exemplo 3

Uma companhia de navegação possui um navio com três porões de carga: à proa, ao centro e à ré.

Os limites de capacidade dos porões são os da seguinte tabela:



Porão	Tonelagem (toneladas)	Volume (m ³)
Proa	2.000	100.000
Centro	3.200	14.000
Ré	1.800	80.000

À empresa são oferecidas duas cargas (A e B), cada uma das quais pode aceitar total ou parcialmente.

As características das cargas são apresentadas na tabela que se segue:

Carga	Peso (toneladas)	Volume (m ³ /tonelada)	Lucro (UM/tonelada)
A	7.000	60	20
B	4.000	25	16

De modo a preservar-se o equilíbrio do navio, deve manter-se a proporção entre o peso em cada um dos porões e as tonelagens respetivas.

A empresa pretende saber qual é a melhor maneira de carregar o navio de modo a maximizar o lucro.



Assim, o problema consiste em:

Determinar

x_{ij} = nº de toneladas da carga i ($i = A, B$) a transportar no porão j ($j = 1$ (\rightarrow proa), 2 (\rightarrow centro), 3 (\rightarrow ré))

de modo a

maximizar $z = 20(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}) + 16(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3})$

sujeito a

$$x_{A1} + x_{B1} \leq 2000$$

$$x_{A2} + x_{B2} \leq 3200$$

$$x_{A3} + x_{B3} \leq 1800$$

$$60 x_{A1} + 25 x_{B1} \leq 100000$$

$$60 x_{A2} + 25 x_{B2} \leq 14000$$

$$60 x_{A3} + 25 x_{B3} \leq 80000$$

$$\frac{x_{A1} + x_{B1}}{2000} = \frac{x_{A2} + x_{B2}}{3200} = \frac{x_{A3} + x_{B3}}{1800}$$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 7000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 4000$$

$x_{ij} \geq 0$ para todo o i e todo o j



Modelo de Programação Linear

Genericamente, pode formular-se um problema de programação linear como se segue:

a) Forma Cartesiana

Determinar

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

b) Forma Matricial

Determinar

\mathbf{x}

de modo a

maximizar $z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Notar que:

- a operação de otimização pode ser uma *minimização*;
- as restrições podem ser do tipo " \geq " ou "=";
- algumas das variáveis de decisão podem não ser *não negativas*.

Sendo:

\mathbf{x} – vetor $n \times 1$

$\mathbf{0}$ – vetor $n \times 1$

z – escalar

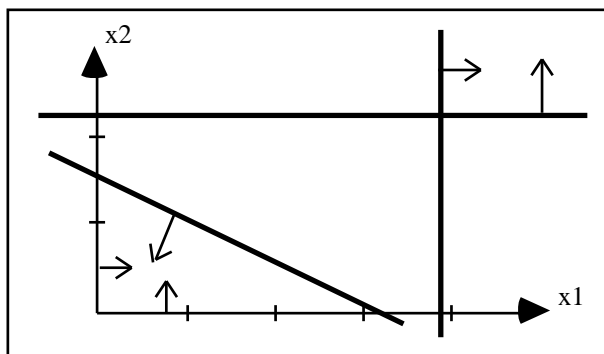
\mathbf{c} – vetor $n \times 1$

\mathbf{A} – matriz $m \times n$

\mathbf{b} – vetor $m \times 1$

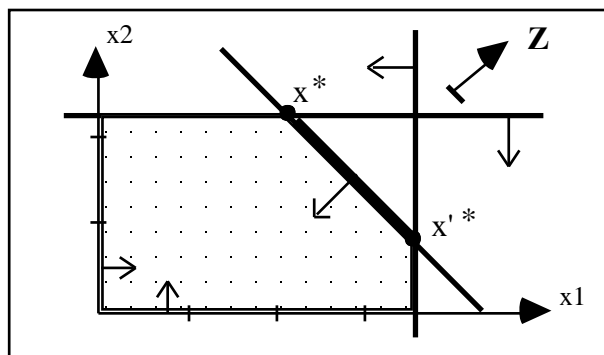
Casos particulares

- **Solução inexistente (problema impossível)**
(não existe região admissível)

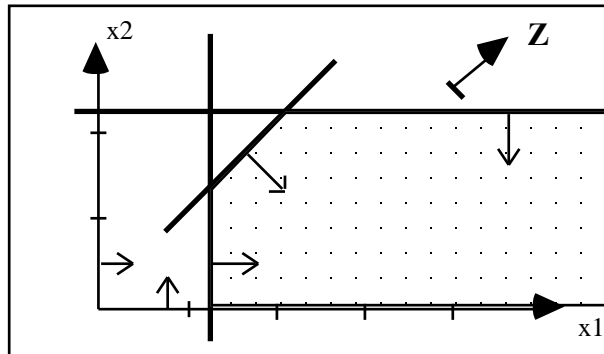


- **Ótimos alternativos**

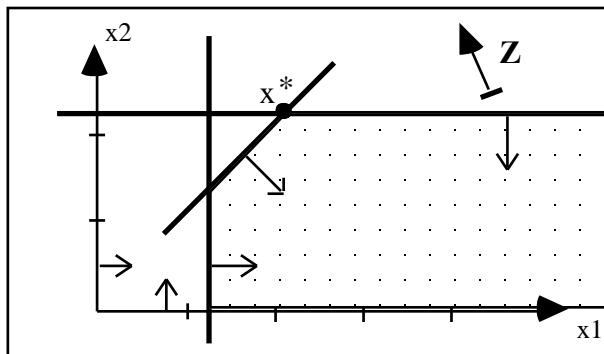
(o valor ótimo da função objetivo pode ser obtido através de múltiplas combinações de valores das variáveis de decisão)



- **Solução não limitada**
(valor ótimo não finito)



- **Solução ótima finita**
(embora região admissível não limitada)



➤ **Solução ótima finita**

(com variáveis a poderem assumir valores arbitrariamente grandes)

