Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II
- Anexo 1 -
Resolução de problemas de PLIP

EXEMPLO 1

Considere o seguinte problema:

Mensalmente um carpinteiro possui 6 peças de madeira e dispõe de 28 horas livres para construir dois modelos diferentes de bancos. Cada banco do modelo I requer 2 peças de madeira e exige 7 horas de trabalho. Cada banco do modelo II requer 1 peça de madeira e exige 8 horas de trabalho. Os lucros unitários obtidos com a venda dos bancos são de, respetivamente, 12 e 8 Unidades Monetárias (U.M.).

O carpinteiro pretende saber quantos bancos de cada modelo deve fabricar por mês, de forma a maximizar o lucro obtido com a venda dos bancos.

Para responder a esta questão, formule o problema em termos de um modelo de PLIP e resolva-o recorrendo ao algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira pura (PLIP) que temos para resolver é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z = 12\, x_1 + 8\, x_2 & \\ \text{s.a} & \\ \quad 2x_1 + \; x_2 \leq 6 & \textit{(1)} \\ \quad 7x_1 + 8x_2 \leq 28 & \textit{(2)} \\ \quad x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0 & \\ \quad x_1,\; x_2 \text{ inteiros} & \end{array}$$

Adicionando as variáveis *slack* x_3 e x_4 em *(1)* e *(2)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado:

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 12\, x_1 + 8\, x_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 2x_1 + \; x_2 + x_3 \qquad = 6 \\ \quad 7x_1 + 8x_2 \qquad + x_4 = 28 \\ \quad x_i \geq 0,\; i = 1, 2, ..., 4 \end{array}$$

Aplicando o método *simplex*:

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	12	8	0	0	
x_3	0	2*	1	1	0	6 $\Leftarrow$
x_4	0	7	8	0	1	28
$z_j - c_j$		-12	-8	0	0	0
		$\Uparrow$				

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	12	8	0	0	
x_1	12	1	1/2	1/2	0	3
x_4	0	0	9/2*	-7/2	1	7 $\Leftarrow$
$z_j - c_j$		0	-2	6	0	36
			$\Uparrow$			

	$\underline{\mathbf{c}}$	12	8	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}$ \ $\underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{\mathbf{b}}$
x_1	12	1	0	8/9	-1/9	20/9
x_2	8	0	1	-7/9	2/9	14/9
z_j-c_j		0	0	40/9	4/9	352/9

- Quadro ótimo para o problema de PL associado pois não existem valores negativos na linha zj-cj
- No entanto, a solução obtida não satisfaz as restrições de integralidade de x_1 e x_2. Ou seja, não é ótima para o problema de PLIP
- Temos que introduzir uma **restrição de corte**

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$ / $\underline{c}$	0 / x_3	0 / x_4	$\underline{b}$	
x_1				20/9	= 18/9+2/9 = 2+2/9
x_2		-7/9	2/9	14/9 ⇐	= 9/9+5/9 = 1+5/9
z_j-c_j					

- Escolhe-se a linha da variável básica x_2 (a que tem maior parte fracionária)
- Selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_3 e x_4 (VNB)
- A restrição de corte a considerar será:

$$(1 - 7/9)\ x_3 + 2/9\ x_4 \geq 5/9$$
$$\Leftrightarrow \quad 2/9\ x_3 + 2/9\ x_4 \geq 5/9$$

Acrescentando a folga x_5 e transformando-a na forma de igualdade:

$$\Leftrightarrow \quad -2/9\ x_3 \ -2/9\ x_4 \leq -5/9 \Leftrightarrow -2/9\ x_3 \ -2/9\ x_4 + x_5 = -5/9$$

Introduzindo-a no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \setminus \underline{\mathbf{x}}$	12 x_1	8 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	$\underline{\mathbf{b}}$	
x_1	12	1	0	8/9	-1/9	0	20/9	
x_2	8	0	1	-7/9	2/9	0	14/9	
x_5	0	0	0	-2/9	-2/9*	1	-5/9	$\Leftarrow$
$z_j - c_j$		0	0	40/9	4/9	0	352/9	
					$\Uparrow$			

$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \setminus \underline{\mathbf{x}}$	12 x_1	8 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	$\underline{\mathbf{b}}$	
x_1	12	1	0	1	0	-1/2	5/2	=4/2+1/2
x_2	8	0	1	-1	0	1	1	
x_4	0	0	0	1	1	-9/2	5/2 $\Leftarrow$	= 4/2+1/2 por exemplo
$z_j - c_j$		0	0	4	0	2	38	

Novo quadro ótimo (não há valores negativos na coluna *b*)

=> Na solução obtida, x_2'*=1, pelo que satisfaz a restrição de integralidade para x_2

=> O mesmo não se verifica relativamente a x_1, pois x_1'*=5/2

Há que introduzir uma **nova restrição de corte**

Para tal selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_3, que é 0, e a x_5

$$-9/2 = -8/2 -1/2 = -4 -1/2$$

=> A nova restrição de corte a considerar será:

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 1/2)\, x_5 \geq 1/2 \Leftrightarrow 1/2 x_5 \geq 1/2 \Leftrightarrow -1/2\, x_5 \leq -1/2$$

Acrescentando a folga x_6 e transformando-a na forma de igualdade:

$$\Leftrightarrow \quad -1/2 x_5 + x_6 = -1/2$$

Introduzindo no quadro ótimo anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{\mathbf{c}}$	12	8	0	0	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \setminus \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{\mathbf{b}}$
x_1	12	1	0	1	0	-1/2	0	5/2
x_2	8	0	1	-1	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1	-9/2	0	5/2
x_6	0	0	0	0	0	-1/2	1	-1/2 $\Leftarrow$
	z_j-c_j	0	0	4	0	2	0	38
						$\Uparrow$		

	$\underline{c}$	12	8	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_1	12	1	0	1	0	0	-1	3
x_2	8	0	1	-1	0	0	2	0
x_4	0	0	0	1	1	0	-9	7
x_5	0	0	0	0	0	1	-2	1
z_j-c_j		0	0	4	0	0	4	36

Novo quadro ótimo (não há valores negativos na coluna *b*)

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIP!

=> $x_1''^*=3$ e satisfaz a restrição de integralidade
$x_2''^*=0$ e satisfaz a restrição de integralidade

=> $\underline{x}''^*=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(3, 0, 0, 7, 1, 0)$
com $z''^*=36$

Interpretação Gráfica:

Max $z = 12\,x_1 + 8\,x_2$

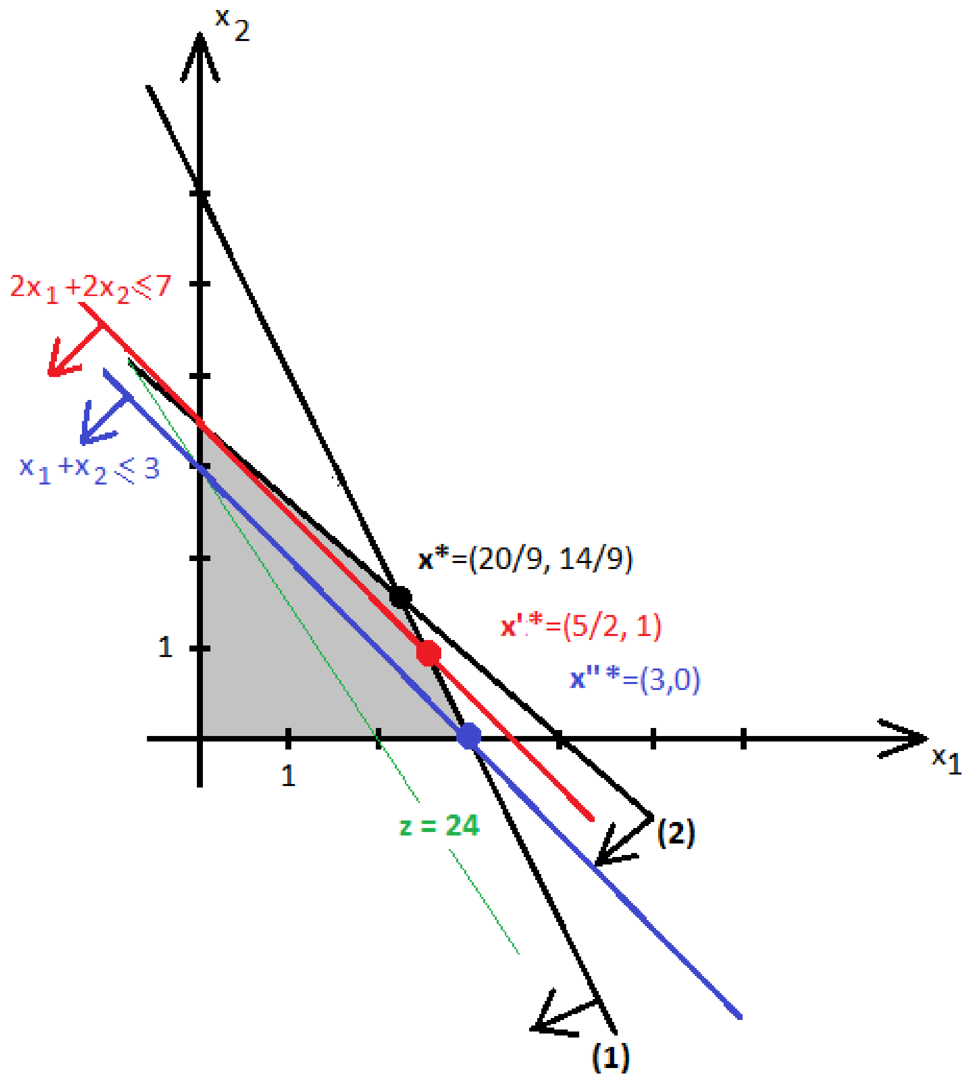
s.a

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$7x_1 + 8x_2 \leq 28$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

x_1, x_2 inteiros



1º plano de corte:

$$2/9\ x_3 + 2/9\ x_4 \geq 5/9 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_3 + 2\ x_4 \geq 5$$

Como

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad x_4 = 28 - 7x_1 - 8x_2$$

temos

$$2\,(6 - 2x_1 - x_2) + 2\,(28 - 7x_1 - 8x_2) \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 4x_1 - 2x_2 + 56 - 14x_1 - 16x_2 \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -18x_1 - 18x_2 \geq -63 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2x_1 + 2x_2 \leq 7}$$

2º plano de corte:

$$1/2\ x_5 \geq 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x_5 \geq 1$$

Como

$$x_5 = -5/9 + 2/9x_3 + 2/9x_4 = -5/9 + 2/9(6 - 2x_1 - x_2) + 2/9(28 - 7x_1 - 8x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_5 = -5/9 + 12/9 - 4/9x_1 - 2/9x_2 + 56/9 - 14/9x_1 - 16/9x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_5 = 63/9 - 18/9x_1 - 18/9x_2 = 7 - 2x_1 - 2x_2$$

temos

$$x_5 \geq 1 \quad \Leftrightarrow 7 - 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 \geq -6 \quad \Leftrightarrow \mathbf{x_1 + x_2 \leq 3}$$

EXEMPLO 2

Considere o seguinte problema:

Uma fábrica de brinquedos produz dois tipos de carros telecomandados (A e B). Cada carro do tipo A requer cerca do triplo do tempo de produção em relação aos do tipo B e sabe-se que se todos os carros fossem do tipo B a fábrica teria capacidade para produzir diariamente um máximo de 400 carros.

Sabe-se que as vendas médias diárias dos carros dos tipos A e B não excedem as 150 e as 200 unidades, respetivamente.

Assumindo que cada carro do tipo A produz um lucro de 4000 U.M. e que cada carro do tipo B produz um lucro de 2500 U.M., a empresa pretende saber quantos carros de cada tipo deve fabricar diariamente de modo a maximizar o lucro.

Para responder a esta questão, formule o problema em termos de um modelo de PLIP e resolva-o recorrendo ao algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira pura (PLIP) que temos para resolver é o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 4000\, x_1 + 2500\, x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 \qquad\qquad\quad \leq 150 \qquad\qquad (1) \\
&\quad \qquad\qquad x_2 \;\; \leq 200 \qquad\qquad (2) \\
&\quad 3x_1 + \quad x_2 \;\; \leq 400 \qquad\qquad (3) \\
&\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\
&\quad x_1,\ x_2 \text{ inteiros}
\end{aligned}$$

Adicionando as variáveis *slack* x_3, x_4 e x_5 em *(1)*, *(2)* e *(3)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 4000\, x_1 + 2500\, x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad\quad = 150 \\
&\quad \qquad\qquad x_2 \qquad + x_4 \qquad = 200 \\
&\quad 3x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 = 400 \\
&\quad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}$$

	$\underline{\mathbf{c}}$	4000	2500	0	0	0		
$\underline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \setminus \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{\mathbf{b}}$	
x_3	0	1	0	1	0	0	150	*(1)*
x_4	0	0	1	0	1	0	200	*(2)*
x_5	0	3*	1	0	0	1	400 $\Leftarrow$	*(3)*
z_j-c_j		-4000	-2500	0	0	0	0	
		$\Uparrow$						

	$\underline{\mathbf{c}}$	4000	2500	0	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \setminus \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{\mathbf{b}}$
x_3	0	0	-1/3	1	0	-1/3	50/3
x_4	0	0	1*	0	1	0	200 $\Leftarrow$
x_1	4000	1	1/3	0	0	1/3	400/3
z_j-c_j		0	-3500/3	0	0	0	1600000/3
			$\Uparrow$				

x_B	$c_B \backslash x$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	c	4000	2500	0	0	0	
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	250/3 =249/3+1/3
x_2	2500	0	1	0	1	0	200
x_1	4000	1	0	0	-1/3	1/3	200/3 =198/3+2/3
$z_j - c_j$		0	0	0	3500/3	4000/3	2300000/3 = = 766666.66

- Quadro ótimo para o problema PL associado
- Mas não ótimo para o problema de PLIP, pois x_1*****=200/3=66.667 na solução obtida (valor não inteiro!)
- Vamos introduzir uma **restrição de corte**:

  Escolhe-se a linha da variável básica x_1, pois é a que tem maior parte fracionária

  Selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_4 e x_5

  A restrição de corte a considerar será:

$$(1 - 1/3)\, x_4 + \ 1/3\, x_5 \ \geq 2/3$$

$\Leftrightarrow \quad 2/3\ x_4 + 1/3\ x_5 \geq 2/3$

Acrescentando a folga x_6 e transformando-a na forma de igualdade:

$\Leftrightarrow \ -2/3\ x_4 \ -1/3\ x_5 \leq -2/3 \Leftrightarrow -2/3\ x_4 \ -1/3\ x_5 + x_6 = -2/3$

Introduzindo no quadro ótimo anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{c}$	4000	2500	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	0	250/3
x_2	2500	0	1	0	1	0	0	200
x_1	4000	1	0	0	-1/3	1/3	0	200/3
x_6	0	0	0	0	-2/3*	-1/3	1	-2/3 ⇐
z_j-c_j		0	0	0	3500/3	4000/3	0	2300000/3
					⇑			

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	$\underline{c}$: 4000	2500	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_3	0	0	0	1	0	-1/2	1/2	83
x_2	2500	0	1	0	0	-1/2	3/2	199
x_1	4000	1	0	0	0	1/2	-1/2	67
x_4	0	0	0	0	1	1/2	-3/2	1
z_j-c_j		0	0	0	0	750	1750	765500

- Quadro ótimo para o problema PL associado
- Este quadro é também ótimo para o problema de PLIP pois satisfaz as restrições de integralidade de x_1 e x_2!

$$\Rightarrow \quad x_1'^* = 67$$
$$x_2'^* = 199$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}'^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (67, 199, 83, 1, 0, 0)$$
$$\text{com } z'^* = 765500$$

Interpretação Gráfica:

Max $z = 4000\,x1 + 2500\,x2$

s.a

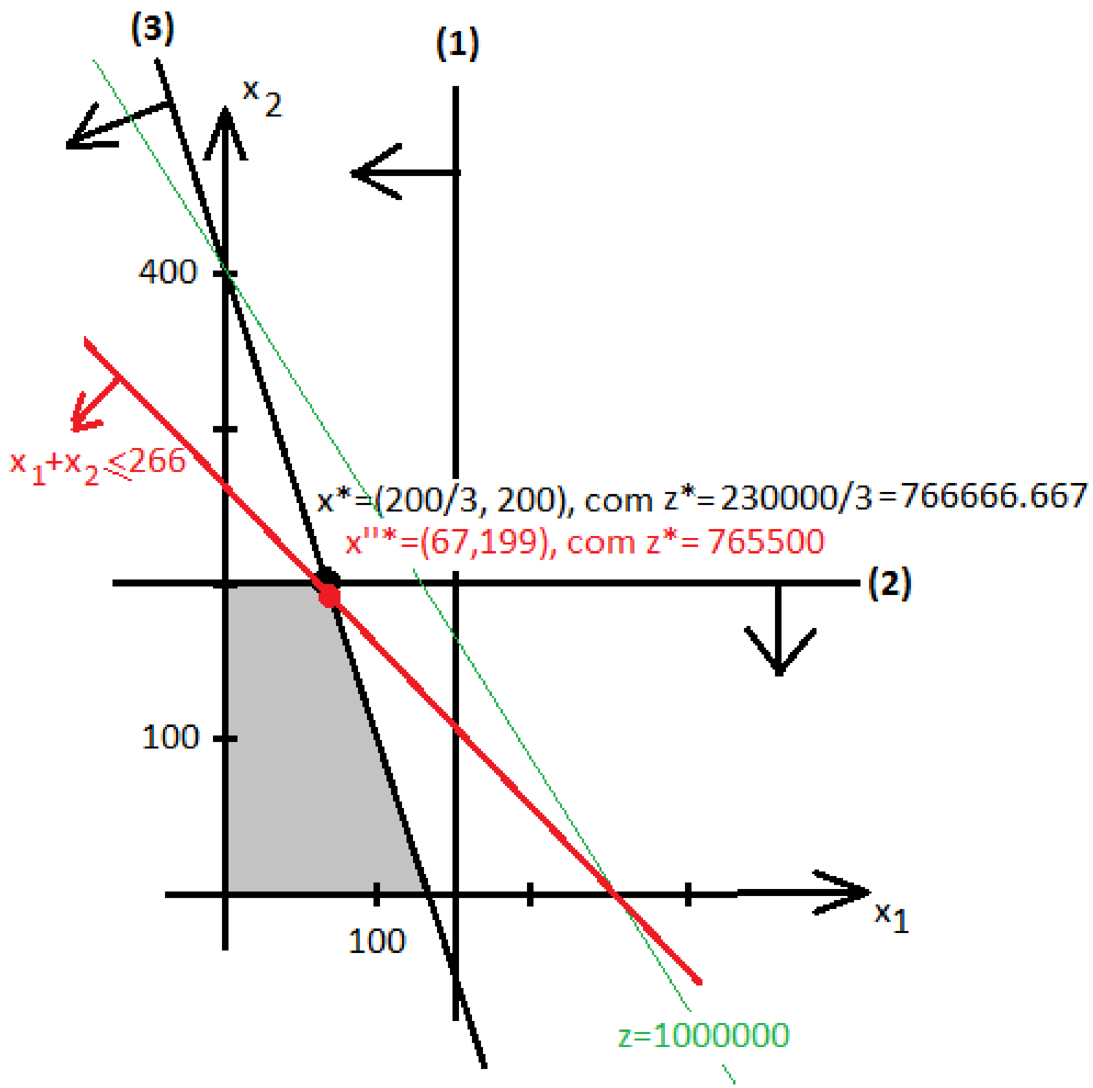
$x1 \leq 150$ *(1)*

$x2 \leq 200$ *(2)*

$3x1 + x2 \leq 400$ *(3)*

$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0$

x1, x2 inteiros



Restrição de corte:

$$\frac{2}{3}\, x_4 + \frac{1}{3}\, x_5 \geq \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2\, x_4 + x_5 \geq 2$$

Como

$$x_4 = 200 - x_2 \text{ e } \quad x_5 = 400 - 3x_1 - x_2$$

temos

$$2\,(200 - x_2) + (400 - 3x_1 - x_2) \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 800 - 3x_1 - 3x_2 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x_1 - 3x_2 \geq -798 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x_1 + x_2 \leq 266}$$