Capítulo III

MÉTODO SIMPLEX

Conceitos introdutórios

O método Simplex é um procedimento matemático usado para resolver problemas de programação linear.

É um método algébrico, no qual, em cada iteração, se resolve um sistema de equações de forma a obter uma solução a ser testada:

Considere as seguintes definições:

Um **ponto extremo** (**PE**) é um ponto que resulta do cruzamento de quaisquer duas retas das restrições.

Se pertencer à região admissível é um **PE** admissível, caso contrário é um **PE** não admissível.

Dois **PE**s admissíveis são adjacentes se estiverem ligados por uma única aresta na região admissível.

A essência do método Simplex baseia-se em conceitos geométricos, fundamentando-se em três propriedades:

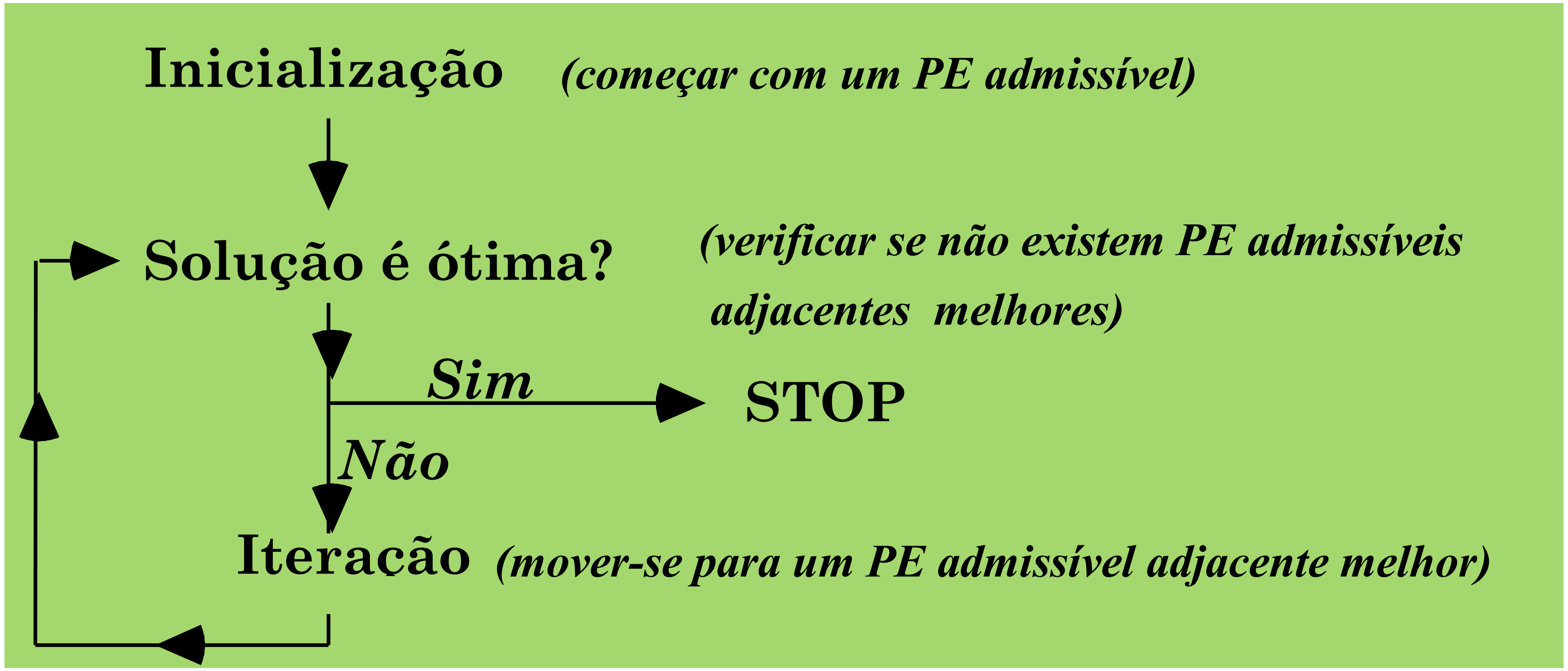
1 **a)** Se houver apenas uma solução ótima, então é um **PE** admissível;

b) Se houver múltiplas soluções ótimas, então pelo menos duas são **PE**s admissíveis adjacentes;

2 Há um número finito de **PE**s admissíveis;

3 Se um **PE** admissível não tiver **PE**s admissíveis adjacentes que sejam melhores (em termos do valor da função objetivo), então esse **PE** admissível é **ótimo**.

O método Simplex avalia repetidamente **PE**s admissíveis (movendo-se de um **PE** admissível para outro **PE** admissível adjacente “melhor”), até que a solução atual não possua **PE**s admissíveis adjacentes “melhores”, ou seja:



Assume-se que:

- O modelo está na forma *standard*

  maximizar $z = \mathbf{c'x}$

  sujeito a

  $$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

  $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- $b_i \geq 0, \ \forall_i$

Inicialmente as desigualdades são convertidas em igualdades pela introdução de variáveis folga designadas por "slacks" (uma por cada restrição):

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \xrightarrow[+\text{"slacks"}]{} A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

As soluções que resultam da resolução do sistema **Ax**=**b** designam-se por **soluções básicas** (**SB**s).

Num problema com **n** variáveis e **m** restrições, uma solução básica é constituída por:

- **m** variáveis básicas (**VB**s) – com valor diferente de zero
- **n** variáveis não básicas (**VNB**s) – com valor igual a zero

Uma **solução básica** é **admissível** se todos os valores das variáveis que a constituem forem $\geq$ **0**. Caso contrário, diz-se **não admissível**.

A cada solução básica corresponde um ponto extremo no gráfico:

PE admissível $\leftrightarrow$ **SB admissível** (ou **SBA**)

PE não admissível $\leftrightarrow$ **SB não admissível** (ou **SBNA**)

Duas **SBA**s são adjacentes se diferirem apenas numa **VNB**

Significa que passar de uma **SBA** para outra **SBA** adjacente, corresponde a trocar uma **VNB** com uma **VB** (e vice-versa)

Algoritmo do método Simplex

a) **Inicialização:** Como selecionar o **PE** admissível inicial?

b) **Teste de otimalidade:** Como determinar se o **PE** admissível atual não tem **PE**s admissíveis adjacentes melhores?

c) **Iteração:** Como mover-se para um melhor **PE** admissível adjacente?

1. Como selecionar a direção do movimento?

2. Onde parar?

3. Como identificar a nova solução?

a) <u>Inicialização:</u>

Qualquer **PE** admissível pode ser adotado como solução inicial:

- antes da introdução das “slacks”: origem;
- após a introdução das “slacks”: variáveis originais são **VNB**s e as “slacks” são **VB**s;
- valor nulo para a função objetivo.

b) <u>Teste de otimalidade</u>:

Em termos genéricos, o **PE** admissível corrente é ótimo se e só se não existir nenhum **PE** admissível adjacente que melhore o valor da função objetivo, ou seja, se a entrada de uma **VNB** na base não se repercutir num aumento do valor da função objetivo.

c) Iteração:

1. As candidatas a entrar na base são as **VNB**
   - Os vetores atividade correspondentes às **VB** são unitários e linearmente independentes;
   - Os vetores atividade correspondentes às **VNB** podem ser escritos como sua combinação linear;
   - A **VNB** que entra na base é a que dá mais lucro, isto é, a que tem associado maior indicador de lucratividade:
   - O indicador de lucratividade de programar uma unidade da **VNB** x_j (torná-la básica) é dado por:

$$c_j - z_j = c_j - \mathbf{c}'_B \, \mathbf{y}_j$$

   - O indicador de lucratividade não diz quantas unidades da **VNB** x_j devem entrar na base.
2. A variável que sai da base é a que primeiro atinge o valor zero à medida que o valor da variável que entra na base aumenta.

Exemplo

Considere-se novamente o **Exemplo 1** (pág. II-2) cujo modelo matemático é:

Determinar

x_1 = nº de unidades de área a plantar de arroz

x_2 = nº de unidades de área a plantar de milho

de modo a

maximizar $z = 5\,x_1 + 2\,x_2$

sujeito a

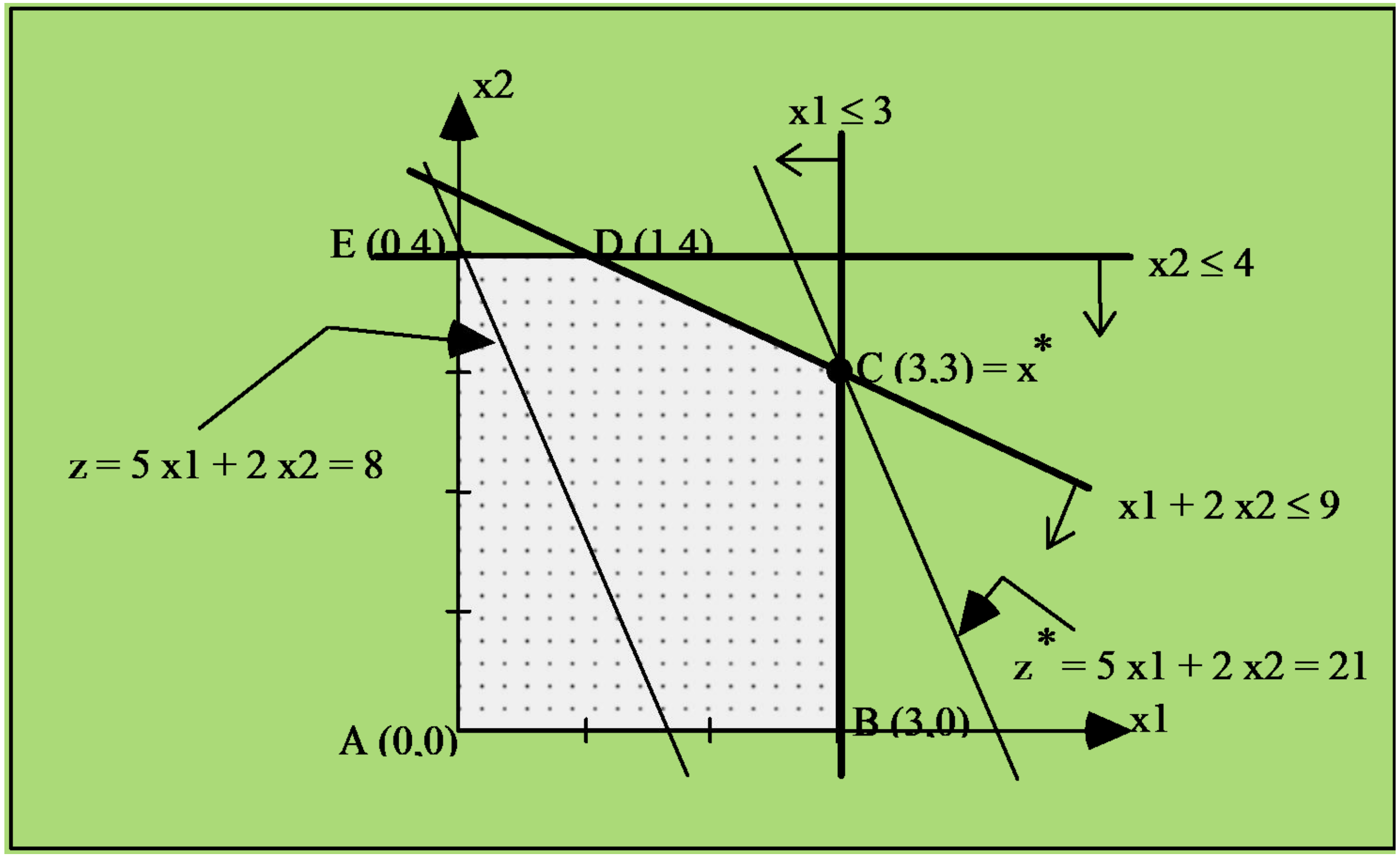
$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 2\,x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Resolução pelo método gráfico



Resolução pelo método Simplex (forma tabular)

x_B	c'_B	c_j / x_j	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_3	0		**1** *	0	1	0	0	3	(3/1)
x_4	0		0	1	0	1	0	4	
x_5	0		1	2	0	0	1	9	(9/1)
$z_j - c_j$			-5	-2	0	0	0	0	

SBA: x=(**0**,**0**,3,4,9) ➔ Ponto extremo **A**
com z=0

x_B	c'_B	c_j / x_j	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_1	5		1	0	1	0	0	3	
x_4	0		0	1	0	1	0	4	(4/1)
x_5	0		0	**2** *	-1	0	1	6	(6/2)
$z_j - c_j$			0	-2	5	0	0	15	

SBA: x=(**3**,**0**,0,4,6) ➔ Ponto extremo **B**
com z=15

x_B	c'_B	c_j / x_j	5 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	b	
x_1	5		1	0	1	0	0	3	x_1^*
x_4	0		0	0	½	1	-1/2	1	x_4^*
x_2	2		0	1	-1/2	0	½	3	x_2^*
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21	z^*

Quadro ótimo pois não há valores negativos na linha zj-cj.

Solução ótima e valor ótimo da função objetivo:

SBA: $x^*=(\mathbf{3},\mathbf{3},0,1,0)$ ➔ Ponto Extremo **C**

$z^* = 21$

Fluxograma do método Simplex