isec Engenharia
Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

1º Teste de Avaliação

Data: **19 de novembro de 2021** Duração: **1h 30m**

Nota: Apresente todos os cálculos que efetuar, assim como todos os comentários, justificações ou conclusões que achar convenientes.

1.

Considere o seguinte problema de **programação linear com um só objetivo**:

Maximizar $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

sujeito a

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$ **(1)**

$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$ **(2)**

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis *slack* das restrições funcionais **(1)** e **(2)** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é:

	c_i	2	1	4	0	0	
$\mathbf{x_B}$	c_B \ $\mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**b**
$\mathbf{x_4}$	0	1	8/3	0	1	-1/3	8/3
$\mathbf{x_3}$	4	1	1/3	1	0	1/3	10/3
zj-cj		2	1/3	0	0	4/3	40/3

a) Determine, efetuando um estudo de pós-otimização, quais as implicações na solução ótima apresentada (no valor de x* e no valor de z*), decorrentes das seguintes alterações:

i) Introdução de uma nova variável $\mathbf{x_{NOVA}}$, com coeficientes nas restrições iguais a $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e coeficiente **3** na função objetivo;

ii) Alteração dos coeficientes da variável x_3 nas restrições de $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Determine, efetuando um estudo de análise de sensibilidade, para que **intervalo de $\mathbf{b_2}$** (termo independente da 2ª restrição) a base ótima apresentada atrás continuará ótima.

c) Suponha que $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ representam o nº de toneladas de ração do **tipo 1**, do **tipo 2** e do **tipo 3**, respetivamente, a produzir mensalmente por uma dada fábrica de rações para animais. Suponha ainda que **z** representa o lucro mensal, expresso em milhares de euros, que resulta da venda dessas rações (sendo que tudo o que a fábrica produz, vende). Assumindo que os parâmetros das restrições não são passíveis de alteração, indique em que condições é que seria vantajoso para a fábrica, produzir ração do **tipo 2**.

2.

Considere agora o seguinte problema de **programação linear inteira pura**:

Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$3x_1 + x_2 \leq 8$ **(1)**

$x_1 + 2x_2 \leq 9$ **(2)**

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

x_1 e x_2 inteiros

Considerando $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ as variáveis *slack* das restrições funcionais **(1)** e **(2)** respetivamente, suponha que se aplicou o algoritmo de Gomory a este mesmo problema e que no final do 1º passo se obteve o seguinte quadro ótimo:

	c_i	1	1	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$c_B \setminus \mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	**b**
$\mathbf{x_1}$	1	1	0	2/5	-1/5	7/5
$\mathbf{x_2}$	1	0	1	-1/5	3/5	19/5
zj-cj		0	0	1/5	2/5	26/5

a) Retire as suas conclusões e, se achar necessário, prossiga com o 2º passo do referido algoritmo, para resolver o problema acima apresentado;

b) Interprete graficamente a resolução da alínea anterior.

Fórmulas

- Pós-otimização e análise de sensibilidade

$$X_B^* = B^{-1}b$$

$$\tilde{X}_B = B^{-1}\tilde{b}$$

$$\tilde{X}_f = B^{-1}\tilde{P}_f$$

$$\tilde{X}_f = B^{-1}\tilde{P}\, f$$

$$X_B{}^*_{\Delta_{b_k}} = B^{-1}b_{\Delta_{b_k}} \ /\ z^* = c'_B\, X_B{}^*_{\Delta_{b_k}}$$

- Programação linear inteira pura

$$\sum_{j \notin I_B} f_{sj} x_j \geq f_{s0}$$