d) ***Introdução de uma nova variável de decisão***

O problema original transforma-se em:

$$\max \left\{ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_{n+1} x_{n+1} \right\}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i(n+1)} x_{n+1} \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_{n+1} \geq 0;\ j = 1, 2, ..., n;\ i = 1, 2, ..., m$$

A solução ótima do problema original com $x_{n+1}=0$ (variável não básica) é uma solução admissível.

- Calcula-se $\mathbf{X}_{n+1} = B^{-1}\mathbf{P}_{n+1}$

- Introduz-se esta coluna no quadro

- Calcula-se "$z_{n+1}-c_{n+1}$":

  - Se ≥ 0, solução ótima mantém-se
  - Senão, aplica-se algoritmo *simplex* (colocando x_{n+1} na base) para determinar a nova solução ótima.

Exemplo

Considere novamente o exemplo anterior (*pág. I-8*).

Suponha que a empresa decidiu analisar a implicação da produção de um novo produto: mesas.

Estudos das condições de produção indicam que a produção de uma mesa requer 3 horas/máquina na UE e 2 horas/máquina na UMA, não estando prevista qualquer limitação de mercado.

O lucro unitário estimado para as mesas é de 5 unidades monetárias (UM).

Seja o quadro ótimo *simplex* (antes da introdução das mesas):

	c_i	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

A formalização do problema, já incluindo o novo produto e na forma aumentada, é:

$$\text{maximizar } z = 6\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_6$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad + 3\,x_6 &= 720\\
4\,x_1 + 4\,x_2 \qquad + x_4 \qquad + 2\,x_6 &= 880\\
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 160\\
x_i \geq 0;\ i = 1, 2, \ldots, 6 &
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_6 = B^{-1}\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O quadro *simplex*, depois da introdução de x_6, é:

	c_i	6	3	0	0	0	$\boxed{5}$	
x_B	c_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boxed{x_6}$	**b**
x_3	0	0	0	1	-1	2	1	160
← x_2	3	0	1	0	1/4	-1	*1/2* *	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	$\boxed{-7/2}$ ↑	1140

A solução anterior deixa de ser ótima, ou seja, é vantajoso produzir mesas.

Aplica-se o algoritmo *simplex* até se encontrar o novo ótimo.

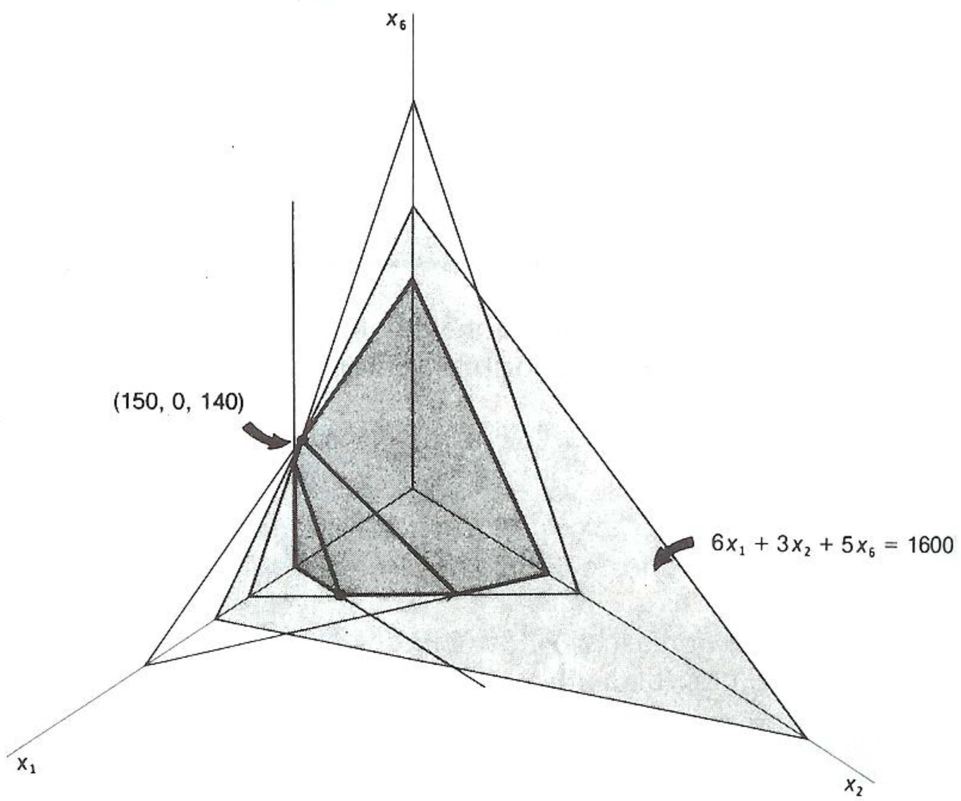
← x_3	0	0	-2	1	-3/2	*4* *	0	40
x_6	5	0	2	0	1/2	-2	1	120
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
$z_j - c_j$		0	7	0	5/2	-4 ↑	0	1560

x_5	0	0	-1/2	1/4	-3/8	1	0	10
x_6	5	0	1	1/2	-1/4	0	1	140
x_1	6	1	1/2	-1/4	3/8	0	0	150
$z_j - c_j$		0	5	1	1	0	0	1600

A solução ótima do problema, depois da introdução da nova variável, é:

$$\mathbf{x}^* = (150, 0, 0, 0, 10, 140) \quad \text{com} \quad z^* = 1600$$

Ou seja, devem produzir-se 150 secretárias e 140 mesas, deixando de se produzir estantes, resultando um lucro total de 1600 UM.



e) ***Introdução de uma nova restrição***

Não altera a função objetivo, mas pode restringir a região admissível.

O primeiro passo é verificar se a solução ótima do problema original satisfaz a restrição adicional

- Se satisfizer, a solução ótima mantém-se
- Senão, surge nova solução ótima que é necessário determinar.
  - Introduzir no quadro ótimo uma linha (correspondente à restrição) e uma coluna (variável folga e/ou artificial)
  - Fazer as operações de condensação necessárias (para reconstruir a matriz identidade). Se a solução obtida for não admissível efetuar nova iteração (pelo método dual do *simplex*) para determinar a nova solução ótima.

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior (*pág. I-8*).

Estudos de mercado mostram que a produção de estantes deve ser pelo menos de 100. Adiciona-se a restrição $x_2 \geq 100$.

Seja o quadro ótimo:

	c_i	6	3	0	0	0		
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	0	1	-1	2	160	$x_1 = 160$
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60	$x_2 = 60$
x_1	6	1	0	0	0	1	160	$x_3 = 160$
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140	$Z = 1140$

Esta solução não satisfaz a nova restrição pois $x_2 = 60$.

Transformando $x_2 \geq 100$ em $-x_2 \leq -100$ e adicionando uma “slack”, obtém-se:

$$-x_2 + x_6 = -100$$

O novo quadro aumentado será:

x_B	c_B \ c_i / x_i	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	0	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	0	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
x_6	0	0	-1 ⇐	0	0	0	1	-100
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	0	1140

Fazendo as operações de condensação necessárias:

x_3	0	0	0	1	-1	2	0	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	0	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
← x_6	0	0	0	0	1/4	***-1*** *	1	-40
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	0	1140
						↑		

O quadro já não é ótimo devido ao aparecimento de um valor negativo na coluna b. Tem que se aplicar o método dual do *simplex*:

x_3	0	0	0	1	-1/2	0	2	80	
x_2	3	0	1	0	0	0	-1	100	
x_1	6	1	0	0	1/4	0	1	120	$x_1 = 120$
x_5	0	0	0	0	-1/4	1	-1	40	$x_2 = 100$
$z_j - c_j$		0	0	0	3/2	0	3	1020	$Z = 1020$

A introdução da nova restrição levou a que a anterior solução ótima deixasse de ser admissível e o ótimo passasse a ser atingido num outro ponto:

$$x^* \rightarrow x'^* = (120, 100, 80, 0, 40, 0)$$

com $z^* = 1020$.