Análise de Sensibilidade:

a) *aos coeficientes da função objetivo* - c_f

Seja Δc_f a variação que se pretende determinar em c_f.

i) c_f é coeficiente da função objetivo duma variável não básica

No ótimo todos os "z_j - c_j" ≥ 0

Como x_f não pertence à base, qualquer variação só tem implicações em "z_f - c_f" logo

$$z_f - (c_f + \Delta c_f) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\infty < \Delta c_f \leq z_f - c_f$$

A base ótima mantém-se desde que o novo c_f ($c_f + \Delta c_f$) não ultrapasse z_f.

ii) c_f é coeficiente da função objetivo duma variável básica

Como x_f pertence à base, toda a linha dos "z_j - c_j" sofre alteração (assim como o valor do z^*)

Recalcular toda a linha dos "z_j - c_j", considerar todos os valores obtidos como ≥ 0 e resolver o sistema de inequações resultante

Alternativamente:

$$\Delta c_f^{min} = \begin{cases} \max\limits_j \left[\dfrac{-(z_j-c_j)}{y_{fj}}\right] & \text{para } y_{fj} > 0 \\ -\infty & \text{se todo o } y_{fj} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta c_f^{max} = \begin{cases} \min\limits_j \left[\dfrac{-(z_j-c_j)}{y_{fj}}\right] & \text{para } y_{fj} < 0 \\ +\infty & \text{se todo o } y_{fj} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta c_f^{min} \leq \Delta c_f \leq \Delta c_f^{max}$$

onde y_{fj} é o elemento da linha f de X_j para todos os j correspondentes a variáveis não básicas.

O coeficiente da variável x_f pode assumir qualquer valor de $[c_f + \Delta c_f^{min}; c_f + \Delta c_f^{max}]$ sem que a base ótima se altere.

O valor de z^* pertencerá ao intervalo:

$$[z^* + \Delta c_f^{min} x_f^*; z^* + \Delta c_f^{max} x_f^*]$$

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*, cujo quadro ótimo *simplex* é:

x_B	c_B \ c_i / x_i	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	160
$z_j - c_j$		0	0	0	$\boxed{3/4}$	$\boxed{3}$	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$z = 1140$

Proceda-se à análise de sensibilidade em relação a $c_1 = 6$ (lucro unitário das secretárias).

Como x_1 é variável básica, toda a linha dos "z_j - c_j" sofre alteração, bem como o valor do z^*.

Recalculando toda a linha dos "$z_j - c_j$"

	c_i	$6+\Delta c_1$	3	0	0	0	
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	$6+\Delta c_1$	1	0	0	0	1	160
z_j - c_j		0	0	0	3/4	$-3+6+\Delta c_1$ ≥ 0	$1140+160\Delta c_1$

$$-3 + 6 + \Delta c_1 \geq 0$$
$$\Delta c_1 \geq -3$$
$$\Downarrow$$
$$-3 \leq \Delta c_1 \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$3 \leq c_1 \leq +\infty$$

$$z^* = 1140 + 160\Delta c_1$$
$$1140+160*(-3) \leq z^* \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$1140-480 \leq z^* \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$660 \leq z^* \leq +\infty$$

Alternativamente, usando as fórmulas:

$$\Delta c_1^{min} = \max\left[\frac{-3}{1}\right] = -3$$

$$\Delta c_1^{max} = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$-3 \leq \Delta c_1 \leq +\infty \quad \text{ou} \quad 3 \leq c_1 \leq +\infty$$

tal como anteriormente, $660 \leq z^* \leq +\infty$

b) <u>*nos termos independentes das restrições*</u> - b_i

Seja Δb_k a variação que se pretende determinar em b_k.

$$\mathbf{x}_B{}^* = B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

para solução admissível

então

$$\mathbf{x}_B{}^*{}_{\Delta b_k} = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$$

$$\text{com } \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ \Delta b_k \\ : \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver o sistema de inequações resultante, ou, alternativamente:

$$\Delta b_k^{min} = \begin{cases} \max\limits_i \left[\dfrac{-(x_{Bi}{}^*)}{\beta_{ik}} \right] & \text{para } \beta_{ik} > 0 \\ -\infty & \text{se todo o } \beta_{ik} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta b_k^{max} = \begin{cases} \min\limits_i \left[\dfrac{-(x_{Bi}{}^*)}{\beta_{ik}} \right] & \text{para } \beta_{ik} < 0 \\ +\infty & \text{se todo o } \beta_{ik} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta b_k^{min} \leq \Delta b_k \leq \Delta b_k^{max}$$

onde x_{Bi}^* é o elemento da coluna dos termos independentes e linha i do quadro ótimo e β_{ik} é o elemento (i, k) da matriz B^{-1} ótima.

O segundo membro da k-ésima restrição pode assumir qualquer valor de $[b_k + \Delta b_k^{min}; b_k + \Delta b_k^{max}]$ sem que a base ótima se altere.

Porém, os valores da solução ótima alteram-se em conformidade com o valor concreto assumido por Δb_k:

$$\mathbf{x}_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}} = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

acontecendo o mesmo ao valor de z^*:

$$z^* = \mathbf{c}'_B\, \mathbf{x}_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}} = \mathbf{c}'_B\, B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*, cujo quadro ótimo *simplex* é:

$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$ \ $\mathbf{c_i}$ / $\mathbf{x_i}$	**6** $\mathbf{x_1}$	**3** $\mathbf{x_2}$	**0** $\mathbf{x_3}$	**0** $\mathbf{x_4}$	**0** $\mathbf{x_5}$	**b**
$\mathbf{x_3}$	**0**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**2**	**160**
$\mathbf{x_2}$	**3**	**0**	**1**	**0**	**1/4**	**-1**	**60**
$\mathbf{x_1}$	**6**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**160**
$\mathbf{z_j - c_j}$		**0**	**0**	**0**	**3/4**	**3**	**1140**

$\mathbf{x_1 = 160}$
$\mathbf{x_2 = 60}$
$\mathbf{x_3 = 160}$
$\mathbf{x_4 = 0}$
$\mathbf{x_5 = 0}$
$\mathbf{z = 1140}$

A solução ótima é:

$$\mathbf{x_B}^* = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Proceda-se à análise de sensibilidade em relação a b_2 = 880 (disponibilidade máxima da UMA)

$$\Rightarrow \quad b_2 = 880 + \Delta b_2$$

$$\mathbf{x_B}^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 880 + \Delta b_2 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B}^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 - \Delta b_2 \\ \Delta b_2/4 + 60 \\ 160 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 160 - \Delta b_2 \geq 0 \\ \Delta b_2/4 + 60 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \leq 160 \\ \Delta b_2 \geq -240 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-240 \leq \Delta b_2 \leq 160$$

$$640 \leq b_2 \leq 1040$$

$$\Downarrow$$

$$960 \leq z^* \leq 1260$$

Alternativamente, usando as fórmulas:

$$\Delta b_2^{min} = \max\left[\frac{-60}{1/4}\right] = -240$$

$$\Delta b_2^{max} = \min\left[\frac{-160}{-1}\right] = 160$$

$$\Downarrow$$

$$-240 \leq \Delta b_2 \leq 160 \quad \text{ou} \quad 640 \leq b_2 \leq 1040$$

tal como anteriormente, $960 \leq z^* \leq 1260$