isec Engenharia
Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Revisões de Investigação Operacional

Formulação do modelo de PL

Considere o seguinte problema:

Uma pequena fábrica de brinquedos de madeira pretende produzir três novos brinquedos: comboios, cavalos e cabanas. A produção destes brinquedos requer mão-de-obra especializada de carpintaria e acabamentos. A produção de um comboio requer **1** hora de carpintaria e **1** hora de acabamentos. A produção de um cavalo requer **3** horas de carpintaria e **2** de acabamentos. A produção de uma cabana requer **2** horas de carpintaria e **1** de acabamentos. A fábrica tem **10** empregados na secção de carpintaria e **7** na secção de acabamentos, sendo o horário semanal de qualquer um dos empregados, de **40** horas.

Com a venda dos comboios, cavalos e cabanas a fábrica tem lucros unitários de **20€**, **50€** e **25€**, respetivamente.

A fábrica pretende saber quais as quantidades de cada tipo de brinquedo que deve produzir de forma a maximizar o seu lucro semanal. (Assuma que a fábrica vende tudo o que produzir.)

Para ajudar a fábrica a obter resposta pretendida, **formule o problema em termos de um modelo de programação linear**.

O método gráfico

Resolva cada um dos seguintes problemas pelo **método gráfico**:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeito a $2x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1 + 5x_2 \geq 10$ $-x_1 + 3x_2 = 6$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$	*Maximizar* $z = 3x_1 - x_2$ sujeito a $2x_1 + x_2 \geq 2$ $x_1 + 3x_2 \geq 3$ $x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

O método Simplex

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
&\textit{Maximizar}\ \ z = -x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
&\quad x_1 - x_2 \leq 1 \\
&\quad x_1 \leq 5 \\
&\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica do "Grande M"**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeito a

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$

$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica das "Duas Fases"**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
&\textit{Maximizar}\ \ z = x_1 + x_2\\
&\text{sujeito a}\\
&\qquad x_1 + 2x_2 \ \leq 4\\
&\qquad x_1 + x_2 \ = 3\\
&\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica das "Duas Fases"**

Considere agora o seguinte problema de programação linear:

$$\textit{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
sujeito a
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 120$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

- Resolva-o pelo **método Simplex** usando a **técnica do "Grande M"**

  (***Sugestão:*** *Resolva este exercício e conclua que se trata de um* ***problema impossível****, sem solução, pois atingirá o quadro ótimo com uma variável artificial na base*)

Dualidade - O método dual do Simplex

Resolva o seguinte problema de programação linear pelo **método dual do Simplex**:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar}\ \ z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \geq 10 \\
&\qquad -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
&\qquad x_1 + x_2 \geq 6 \\
&\qquad x_1 \geq 0\ ,\ \ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Dualidade - Formulação do problema dual

1.

Maximizar $z = 3x_1 - 2x_2$

sujeito a

$x_1 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$

2.

Minimizar $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Relações Primal-Dual

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO	PASSAGEM AO DUAL ⇔		PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO
i-ésima restrição	$\leq$ $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 Livre	*i*-ésima variável
j-ésima variável	≥ 0 ≤ 0 livre	$\geq$ $\leq$ $=$	*j*-ésima restrição

Dualidade - Obtenção da solução do dual

Maximizar $z = 2x_1 - x_2$

sujeito a

$2x_1 + 4x_2 \geq 8$ **(1)**
$x_1 + 2x_2 \geq 4$ **(2)**
$2x_1 + 2x_2 \leq 6$ **(3)**
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis ***surplus*** e **artificial** da restrição funcional **(1), $\mathbf{x_4}$** e $\mathbf{x_6}$ as variáveis ***surplus*** e **artificial** da restrição funcional **(2),** e $\mathbf{x_7}$ a variável ***slack*** da restrição funcional **(3)**, o quadro ótimo do Simplex é:

	c_i	2	-1	0	0	-M	-M	0	
$\mathbf{x_B}$	c_B /x_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	**b**
$\mathbf{x_2}$	-1	0	1	0	-1	0	1	-1/2	1
$\mathbf{x_3}$	0	0	0	1	-2	-1	2	0	0
$\mathbf{x_1}$	2	1	0	0	1	0	-1	1	2
	zj-cj	0	0	0	3	M	M-3	5/2	3

Dualidade – Exercício completo

Minimizar $z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeito a

$$x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

- Resolva-o pelo método dual do Simplex
- Formule o problema dual que lhe está associado
- A partir dos resultados obtidos na 1ª alínea, indique qual é a solução ótima do problema dual

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo I

Pós-Otimização e Análise de Sensibilidade

Introdução

Nos modelos de programação linear, os parâmetros envolvidos (coeficientes **c**, **b** e **A**) raramente são conhecidos com exatidão, pelo que muitas vezes são valores aproximados, estando sujeitos a variações ao longo do tempo. Por outro lado, pode tornar-se necessário adicionar uma nova variável ou restrição ao modelo.

Deste modo, é fundamental saber se estas modificações alteram a solução ótima inicialmente obtida e, se for o caso, determinar uma nova solução ótima, sendo também importante perceber quão sensível é uma solução a variações dos dados.

Tradicionalmente, costumam ser realizados dois tipos de estudo:

- *Análise de pós-otimização*, em que é estudado o impacto na solução ótima, de alterações discretas nos parâmetros do modelo;

- *Análise de sensibilidade*, em que o principal objetivo é a determinação de intervalos de variação para os parâmetros, para os quais a solução ótima não é afetada.

Conceitos introdutórios

Considere-se o seguindo exemplo (*Exemplo 1 do Capítulo 2 de Investigação Operacional).*

"*Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho da sua quinta, ou seja, quer saber que áreas deve plantar de arroz e milho de modo a ser máximo o lucro obtido das plantações.*

O lucro por unidade de área plantada de arroz e de milho é de, respetivamente, 5 e 2 unidades monetárias (UM).

As áreas a plantar de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 unidades de área, respetivamente.

O consumo total de mão-de-obra (medido em homens/hora) nas duas plantações não deve ser maior do que 9. Cada unidade de área plantada de arroz necessita de 1 homem/hora e cada unidade de área plantada de milho necessita de 2 homens/hora."

O modelo matemático de PL que o descreve é:

Determinar

x_1 = *nº de unidades de área a plantar de arroz*

x_2 = *nº de unidades de área a plantar de milho*

de modo a

maximizar o lucro a obter das plantações, ou seja,

$$\max z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

sujeito a

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

O problema na forma aumentada consiste em:

Determinar

$\mathbf{x} = (x1, x2, x3, x4, x5)$

de modo a

$\max z = 5\, x1 + 2\, x2$

sujeito a

$$\begin{array}{lllllr} x1 & & + x3 & & = 3 & (1) \\ & x2 & & + x4 & = 4 & (2) \\ x1 & + \; 2x2 & & & + x5 = 9 & (3) \end{array}$$

$x1 \geq 0;\ x2 \geq 0;\ x3 \geq 0;\ x4 \geq 0;\ x5 \geq 0$

Considere-se os seguintes quadros, inicial e ótimo, resultantes da resolução do modelo anterior pelo método *simplex*.

Quadro inicial:

A

		c_j	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
x_5	0		1	2	0	0	1	9
	$z_j - c_j$		-5	-2	0	0	0	0

b

Solução básica admissível inicial:

$$\mathbf{x}_B \begin{cases} x3 = 3 \\ x4 = 4 \\ x5 = 9 \end{cases} \qquad \text{com } z = 0$$

$$\mathbf{x}_N \begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = 0 \end{cases}$$

Quadro ótimo:

x_B	c_B	c_j / x_j	5 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	b
x_1	5		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2	2		0	1	-1/2	0	1/2	3
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21

$\mathbf{B^{-1}}$ $\mathbf{x}_B^*$

Solução básica admissível ótima:

$$\mathbf{x}_B^* \begin{cases} x1^* = 3 \\ x4^* = 1 \\ x2^* = 3 \end{cases} \qquad \text{com } z^* = 21$$

$$\mathbf{x}_N^* \begin{cases} x3^* = 0 \\ x5^* = 0 \end{cases}$$

Verifica-se que $\mathbf{x} = [\ \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N\ ]$, ou seja, o vetor das variáveis do problema pode subdividir-se nos vetores $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_N$, o primeiro com as variáveis básicas e o segundo com as variáveis não básicas.

Por outro lado, A = [B, N], ou seja, a matriz A (matriz dos coeficientes das variáveis nas restrições) pode subdividir-se nas matrizes B e N, a primeira com as colunas das variáveis básicas e a segunda com as colunas das variáveis não básicas.

Sendo a matriz B^{-1} a matriz inversa de B, **b** o vetor dos termos independentes das restrições e $\mathbf{c}_B$ o vetor dos coeficientes das variáveis básicas na função objetivo, em qualquer solução básica, verifica-se que:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{com } z = \mathbf{c}_B'\, \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B'\, B^{-1}\mathbf{b}}$$

A matriz B é sempre obtida no quadro inicial, através das colunas da matriz A correspondentes às variáveis básicas de uma dada iteração.

No exemplo anterior, a matriz B da base ótima é:

$$B = \begin{array}{ccc} (x1) & (x4) & (x2) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa B^{-1} da base ótima é pois:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Pode facilmente obter-se esta matriz B^{-1} a partir do quadro ótimo do simplex, selecionando as colunas correspondentes às variáveis básicas do quadro inicial (ou seja, às *<u>slacks</u>* *e às* *<u>artificiais</u>).*

É possível confirmar as fórmulas anteriores, no cálculo da solução ótima e do valor de z*:

$$\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

com $\quad z^* = \mathbf{c}_B' \, \mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 21$

Considere-se novamente os quadros inicial e final da resolução do problema anterior pelo método *simplex*.

<u>Quadro inicial</u>:

			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
		c_j	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
x_5	0		1	2	0	0	1	9
$z_j - c_j$			-5	-2	0	0	0	0

Designa-se por $\mathbf{P_f}$, o vetor dos coeficientes da variável x_f nas restrições funcionais.

<u>Quadro ótimo</u>:

			$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{X_5}$	
		c_j	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	5		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2	2		0	1	-1/2	0	1/2	3
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21

Os vetores $\mathbf{X_f}$ são a representação dos vetores $\mathbf{P_f}$ na base B, verificando-se a seguinte relação:

$$\boxed{\mathbf{X_f} = B^{-1}\mathbf{P_f}}$$

Pós-Otimização

Considere-se o seguinte problema (retirado do Capítulo 2 da unidade curricular de Investigação Operacional), o qual será utilizado como base nos exercícios deste capítulo.

"*Uma empresa de mobiliário de escritório pretende lançar um modelo de secretárias e de estantes.*

Pensa-se que o mercado pode absorver toda a produção de estantes, mas aconselha-se a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Ambos os produtos são processados em duas unidades diferentes: unidade de estampagem (UE) e unidade de montagem e acabamento (UMA). A disponibilidade mensal em cada uma destas unidades é de 720 horas/máquina na UE e de 880 horas/máquina na UMA. Cada secretária necessita de 2 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA; cada estante necessita de 4 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA.

O lucro obtido por cada secretária produzida é de 6 unidades monetárias (UM) e por cada estante produzida é de 3 unidades monetárias (UM).

Pretende-se saber qual o plano de produção mensal de secretárias e de estantes que maximiza o lucro."

Formulando-o em termos de um modelo de programação linear, este problema consiste em:

Determinar

x_1 = número de secretárias a produzir por mês

x_2 = número de estantes a produzir por mês

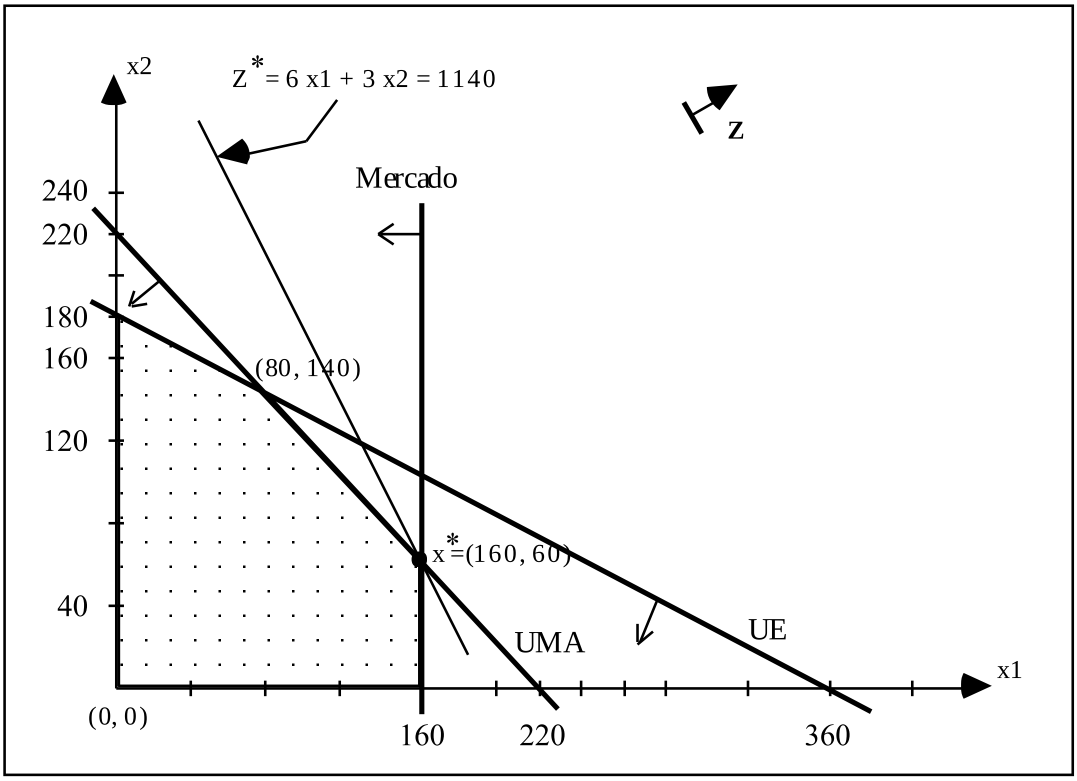
de modo a maximizar o lucro mensal, ou seja,

$$\text{maximizar } z = 6\,x_1 + 3\,x_2$$

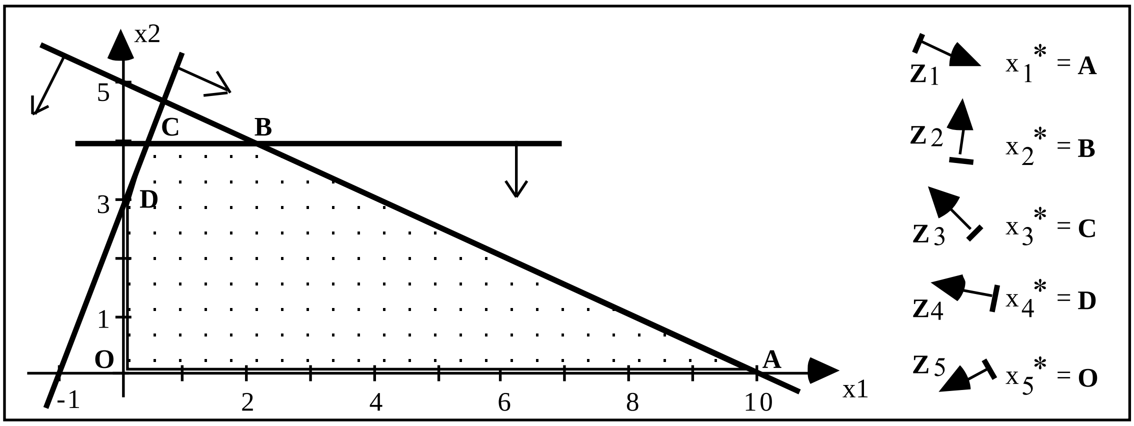
sujeito a

$$2\,x_1 + 4\,x_2 \le 720$$
$$4\,x_1 + 4\,x_2 \le 880$$
$$x_1 \le 160$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Resolvendo pelo método gráfico obtém-se:



a) ***<u>Alteração dos coeficientes da função objetivo</u>*** - c_j



Em termos gráficos, significa uma alteração do declive das retas de nível da função objetivo.

<u>Exemplo</u>

Considerando o exemplo anteriormente apresentado (*pág. I-8*), suponha que o vetor correspondente aos coeficientes da função objetivo foi alterado de [6 3] para [4 5].

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	¼	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

Como **x1 e x2** <u>estão na base</u> tem que se atualizar <u>toda</u> a linha "zj - cj".

	c_j	4	5	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_3	0	0	0	1	-1	<u>2</u> *	160
x_2	5	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	4	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	5/4	-1 ↑	940

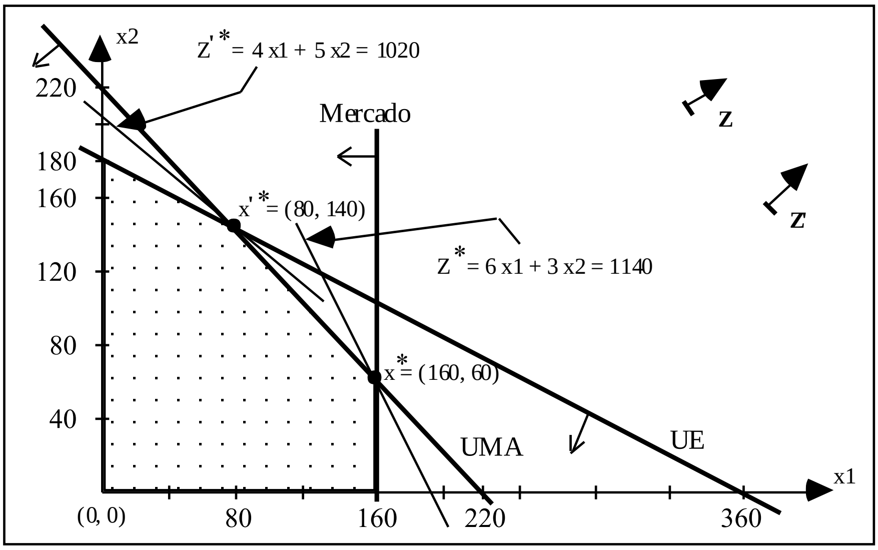
O quadro já não é ótimo => A solução ótima (x*), o valor de z* e a base ótima ({x_3,x_2,x_1}), não se mantêm!

Aplica-se o algoritmo *simplex* até se encontrar novo quadro ótimo.

x_5	0	0	0	1/2	-1/2	1	80
x_2	5	0	1	1/2	-1/4	0	140
x_1	4	1	0	-1/2	1/2	0	80
$z_j - c_j$		0	0	1/2	3/4	0	1020

x_1 = 80
x_2 = 140
x_3 = 0
x_4 = 0
x_5 = 80
Z = 1020

A alteração do declive da função objetivo, levou a que o ótimo fosse atingido num outro ponto extremo: $x^* \to x'^*$.



Ou seja, em termos gráficos, uma alteração dos coeficientes **cj** significa uma alteração do declive das retas de nível da função objetivo

⇩

- A solução ótima encontrada mantém-se admissível

  $\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b}$ é sempre não negativo

- A solução ótima encontrada pode deixar de ser ótima pois há alterações em "$z_j - c_j$"

  (a solução do dual associado pode tornar-se não admissível)

Seja c_f a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δc_f

$$\tilde{c}_f = c_f + \Delta c_f$$

- Se x_f não pertencer à base ótima:

  ⇨ atualizar o valor de cf e calcular o valor "z_j-c_j" correspondente à coluna de x_f

  $$z_f - \tilde{c}_f = z_f - (c_f + \Delta c_f)$$

  - Se ≥ 0, solução ótima mantém-se a);
  - Senão, aplicar algoritmo *simplex* até obter nova solução ótima.

- Se xf pertencer à base ótima:

  ⇨ atualizar toda a linha "z_j - c_j"

  - Se solução ótima se mantiver, calcular novo

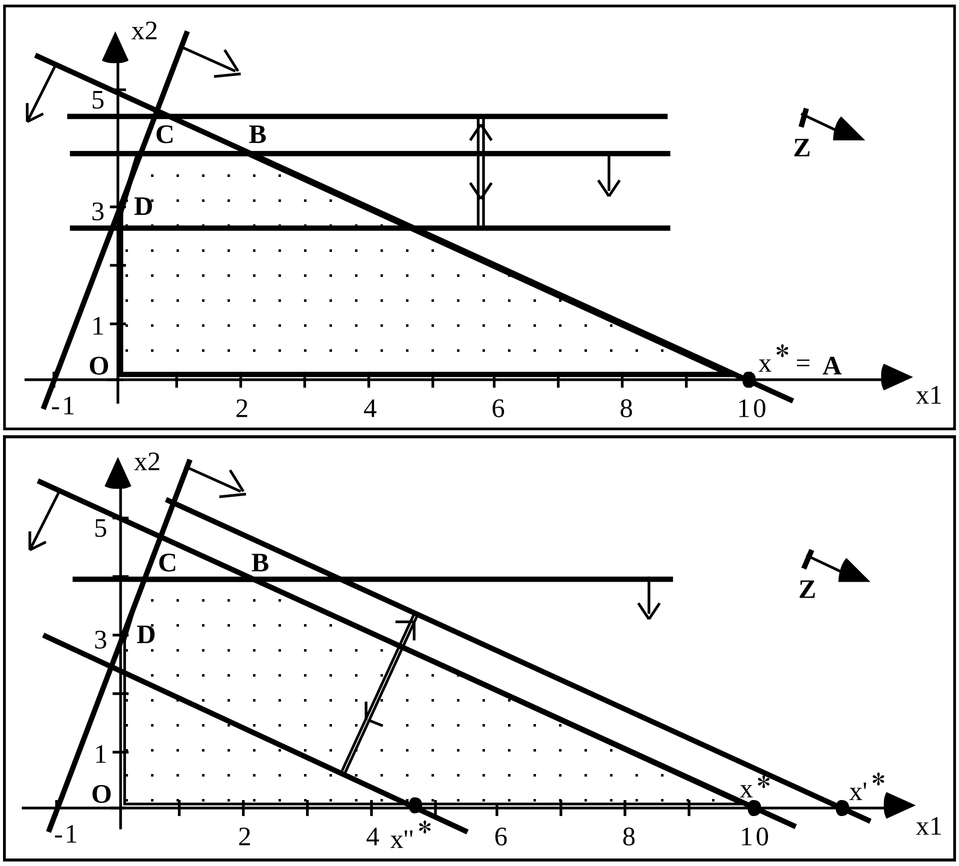
    $$z\{c_f + \Delta c_f\}^* = z\{c_f\}^* + \Delta c_f\, x_f^*;$$

  - Senão, aplicar o algoritmo *simplex* até obter nova solução ótima.

a) *se = 0, a solução ótima mantém-se, mas existem novas soluções ótimas alternativas que têm de ser calculadas!*

b) <u>*Alteração dos termos independentes das restrições*</u> - b_i

Pode estudar-se o problema dual ou usar-se uma abordagem direta.



- A linha "z_j - c_j" não é afetada

  (a solução do dual associado mantém-se)

- A solução correspondente depende da alteração em análise

$$\mathbf{x}^*_B = B^{-1}\mathbf{b}$$

e pode tornar-se <u>não admissível</u>.

Seja b_k a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δb_k

$$\tilde{b}_k = b_k + \Delta b_k$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\mathbf{\Delta b}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = \mathbf{x}_B{}^{*} + B^{-1}\mathbf{\Delta b} \qquad \text{com } \mathbf{\Delta b} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ \Delta b_k \\ : \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Se $\tilde{\mathbf{x}}_B \geq 0$, a solução é ótima e $\tilde{z}^*$ é calculado.
- Senão, a solução é não admissível e aplica-se o algoritmo dual do *simplex* para calcular a nova solução admissível (uma vez que a condição de otimalidade não é violada).

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*.

Suponha que o vetor dos termos independentes das restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 720 \\ 1280 \\ 160 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo:

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

$$\mathbf{x}_B{}^* = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 720 \\ 1280 \\ 160 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A nova solução, resultante das alterações, será:

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -240 \\ 160 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Esta solução é <u>não admissível</u> (relativamente ao problema alterado).

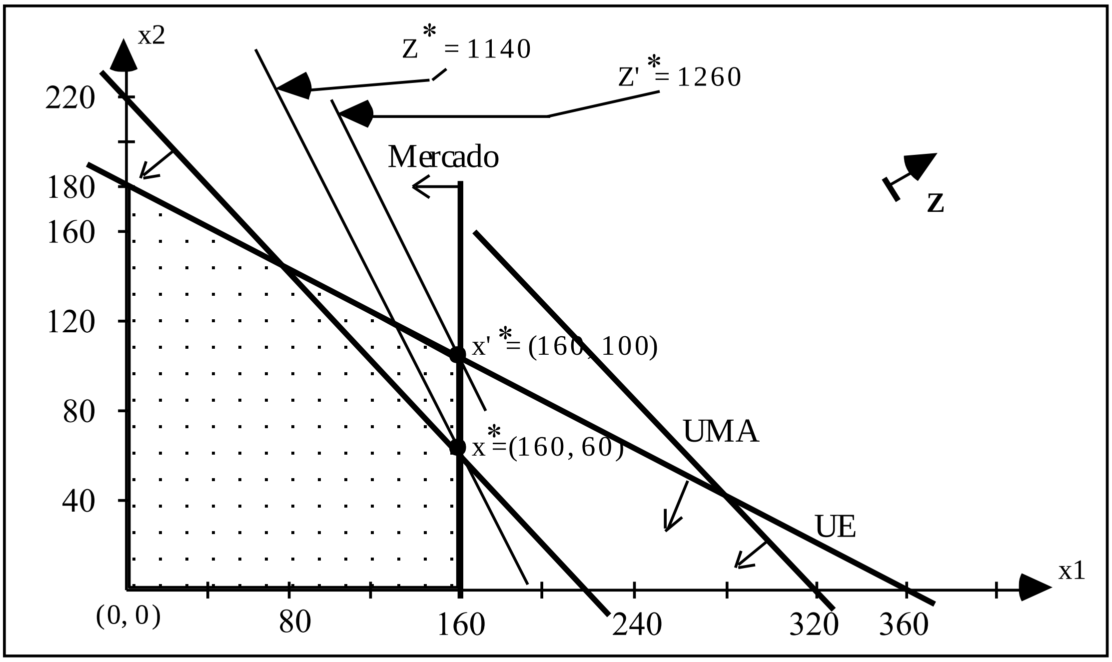
	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
← x_3	0	0	0	1	**<u>*-1*</u>** *	2	-240
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	160
x_1	6	1	0	0	0	1	160
z_j - c_j		0	0	0	3/4	3	1440
					↑		

Neste caso, aplica-se o algoritmo dual do *simplex*, partindo do quadro anterior:

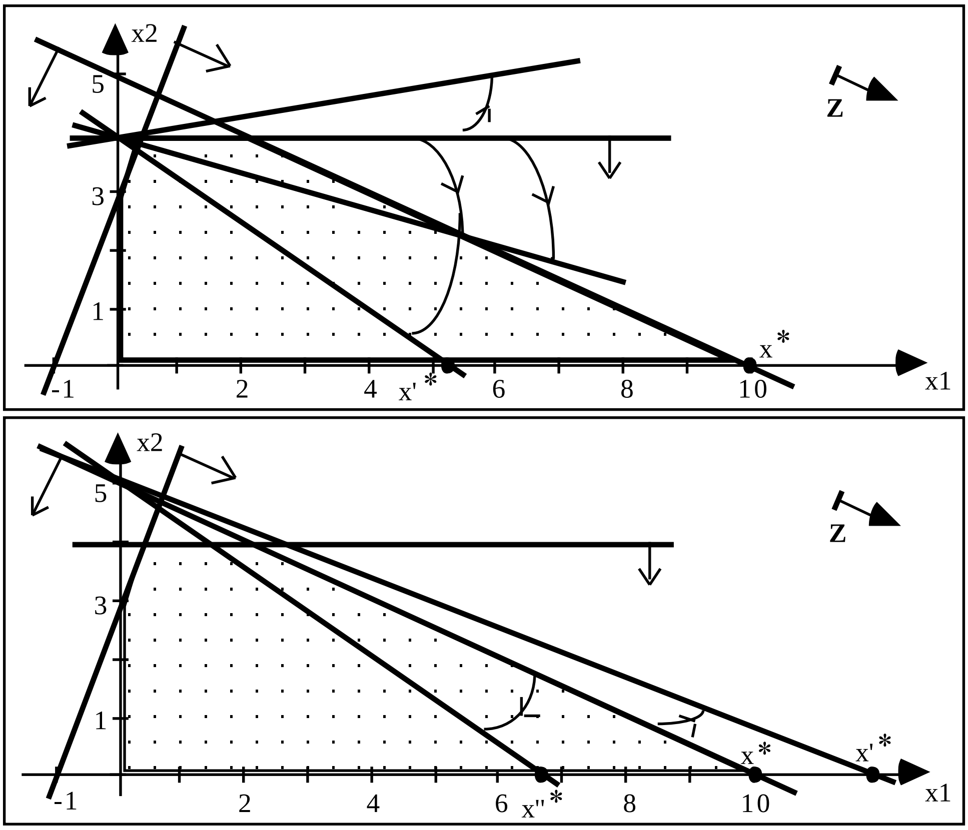
x_4	0	0	0	-1	1	-2	240
x_2	3	0	1	1/4	0	-1/2	l00
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	3/4	0	9/2	1260

$x_1 = 160$
$x_2 = 100$
$x_3 = 0$
$x_4 = 240$
$x_5 = 0$
$Z = 1260$

A nova solução ótima corresponde ao ponto extremo x'*:



c) *Alteração dos coeficientes da matriz A* - a_{ij}



Seja a_{kf} a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δa_{kf}

$$\tilde{a}_{kf} = a_{kf} + \Delta a_{kf}$$

Há duas situações a considerar:

A) a_{kf} é coeficiente de x_f não incluído na base ótima

$$\tilde{\mathbf{X}}_f = B^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_f = B^{-1}(\mathbf{P}_f + \Delta\mathbf{P}_f) = B^{-1}\mathbf{P}_f + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_f$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_f = \mathbf{X}_f + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_f$$

em que $\Delta\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ \Delta a_{kf} \\ : \\ 0 \end{bmatrix}$

e $\mathbf{X}_f$ é a coluna associada a x_f

$$\tilde{z}_f - c_f = z_f + \mathbf{c}'_B B^{-1} \Delta\mathbf{P}_f - c_f$$

- Se ≥ 0, a solução ótima mantém-se;
- Senão, aplica-se o algoritmo *simplex*.

B) a_{kf} é coeficiente de x_f incluído na base ótima (caso mais complexo)

A alteração de uma coluna de A pertencente à <u>matriz identidade</u>, impõe a reconstituição da mesma matriz a qual conduz a um novo quadro *simplex*. Neste novo quadro, podem verificar-se as seguintes situações:

1 - **Soluções básicas admissíveis do primal e do dual**

⇨ quadro mantém-se ótimo;

2 - **Solução básica admissível do primal, mas não admissível do dual**

⇨ aplica-se o algoritmo *simplex* para obter nova solução ótima;

3 - **Solução básica não admissível para o primal mas admissível para o dual**

⇨ aplica-se o algoritmo dual do *simplex* para obter a nova solução ótima;

4 - Soluções básicas não admissíveis para ambos os problemas primal e dual

⇨ resolve-se de novo o problema (?) *ou*

⇨ força-se a saída de x_f da base ótima (do quadro ótimo antes das alterações):

1' - Se existir algum elemento positivo na linha da variável x_f, correspondente a uma variável não básica, tomar como "pivot" o que tiver menor valor "z_j-c_j".

Proceder à iteração respetiva e aplicar **A)** à nova SBA

Caso contrário, o processo continua.

2' - Escolher a variável a entrar na base:

$$\min_j \left\{(z_j-c_j) : (z_j-c_j) \geq 0\right\} = (z_r-c_r)$$

Se $x_{ir} \leq 0$ escolher a variável seguinte em termos do valor de "z_j-c_j".

3' - Escolher a variável a sair da base

$$Q_o = \min_i \left\{\frac{x_{io}}{x_{ir}} \mid x_{ir} > 0\right\} = \frac{x_{so}}{x_{sr}}$$

4' - Substituir x_s por x_r na base e regressar a 1'.

Exemplo

Considere o exemplo anterior *(pág. I-8)*.

Suponha que o vetor dos coeficientes da variável x_1 nas restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 \\ 3.2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

x_B	c_B	c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0		0	0	1	-1	2	160
x_2	3		0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6		1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$			0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

x_1 está na base

$$\tilde{X}_1 = X_1 + B^{-1}\Delta P_1$$

$$\tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_B	c_B	c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0		4/5	0	1	-1	2	160
x_2	3		-1/5	1	0	1/4	-1	60
x_1	6		1	0	0	0	1	160
x_3	0		0	0	1	-1	6/5	32
x_2	3		0	1	0	1/4	-4/5	92
x_1	6		1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$			0	0	0	3/4	18/5	1236

Soluções admissíveis para os problemas primal e dual

⇨ logo mantêm-se ótimas.

Exemplo

Considere novamente o exemplo anterior *(pág. I-8)*.

Suponha que o vetor dos coeficientes da variável x_2 nas restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

x_2 está na base

$$\tilde{X}_2 = X_2 + B^{-1}\Delta P_2$$

$$\tilde{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	1	-1	2	160
x_2	3	0	1/4	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
x_3	0	0	0	1	-2	6	-80 ←
x_2	3	0	1	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3	-6 ←	1680

Soluções não admissíveis para os problemas primal e dual ⇨ Faz-se x2 sair da base do quadro ótimo e em seguida introduz-se a alteração enunciada.

Regressando ao quadro ótimo:

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4 *	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140
					<		

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

- Elementos positivos na linha x2 ⇨ "1/4"
- O menor valor "z_j-c_j" corresponde a x4 ⇨ substituir x2 por x4

No novo quadro obtido, x2 é uma VNB. Por essa razão aplica-se A):

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	4	1	0	-2	400
x_4	0	0	4	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	-3	0	0	+6	1140

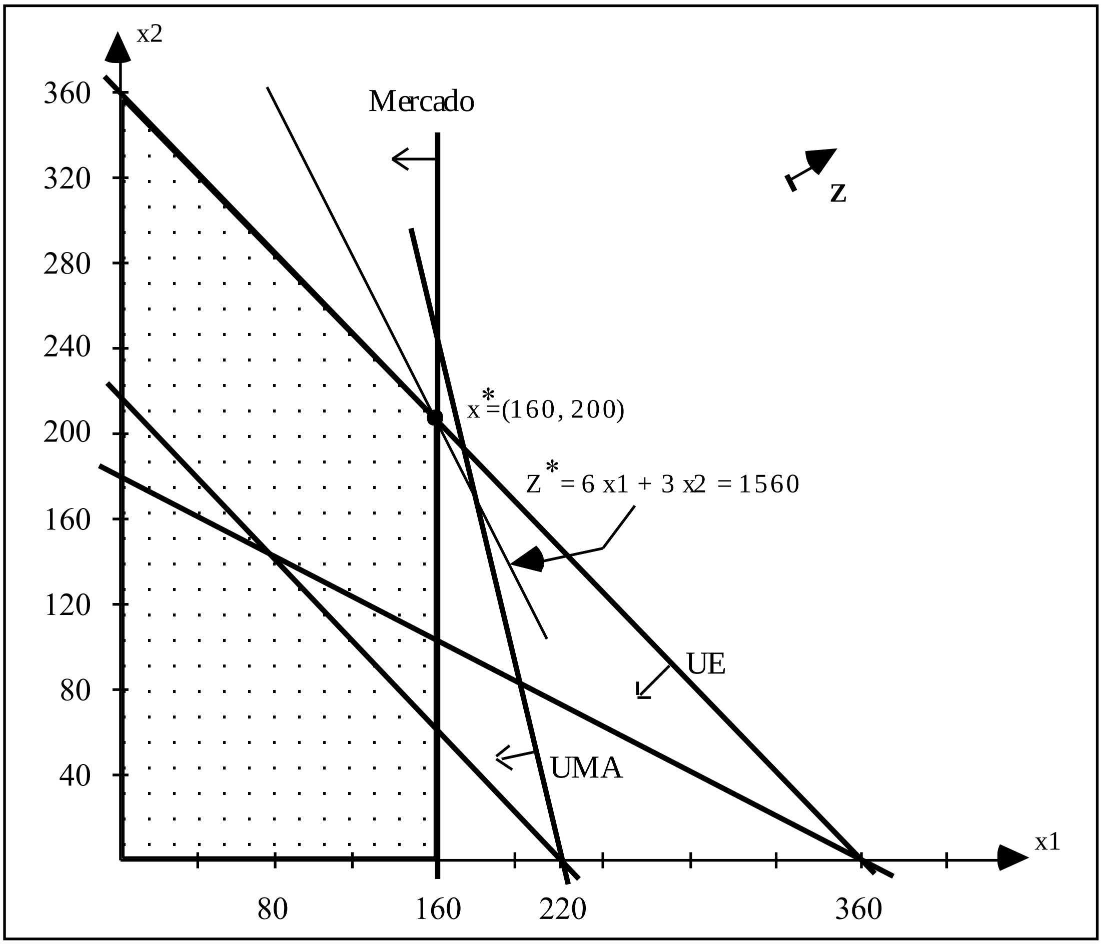
$$\tilde{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_2 + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_2$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_3	0	0	$\underline{2}$ *	1	0	-2	400
x_4	0	0	1	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	-3	0	0	+6	960
			↑				
x_2	3	0	1	1/2	0	-1	200
x_4	0	0	0	-1/2	1	-3	40
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	+3/2	0	+3	1560

Nova solução ótima:

x1* = 160
x2* = 200
x3* = 0
x4* = 40
x5* = 0 com z* = 1560


x2
360
320
280
240
200
160
120
80
40
Mercado
Z
x*=(160, 200)
Z* = 6 x1 + 3 x2 = 1560
UE
UMA
x1
80
160
220
360

d) ***Introdução de uma nova variável de decisão***

O problema original transforma-se em:

$$\max \left\{ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_{n+1} x_{n+1} \right\}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i(n+1)} x_{n+1} \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_{n+1} \geq 0; \; j = 1, 2, ..., n; \; i = 1, 2, ..., m$$

A solução ótima do problema original com $x_{n+1}=0$ (variável não básica) é uma solução admissível.

- Calcula-se $\mathbf{X}_{n+1} = B^{-1}\mathbf{P}_{n+1}$

- Introduz-se esta coluna no quadro

- Calcula-se "$z_{n+1}-c_{n+1}$":
  - Se ≥ 0, solução ótima mantém-se
  - Senão, aplica-se algoritmo *simplex* (colocando x_{n+1} na base) para determinar a nova solução ótima.

Exemplo

Considere novamente o exemplo anterior (*pág. I-8*).

Suponha que a empresa decidiu analisar a implicação da produção de um novo produto: mesas.

Estudos das condições de produção indicam que a produção de uma mesa requer 3 horas/máquina na UE e 2 horas/máquina na UMA, não estando prevista qualquer limitação de mercado.

O lucro unitário estimado para as mesas é de 5 unidades monetárias (UM).

Seja o quadro ótimo *simplex* (antes da introdução das mesas):

	c_i	6	3	0	0	0	
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

A formalização do problema, já incluindo o novo produto e na forma aumentada, é:

$$\text{maximizar } z = 6\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_6$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \quad\quad + 3\,x_6 &= 720 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \quad + 2\,x_6 &= 880 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad + x_5 \quad\quad &= 160 \end{aligned}$$

$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, ..., 6$

$$\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_6 = B^{-1}\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O quadro *simplex*, depois da introdução de x_6, é:

	c_i	6	3	0	0	0	5	
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	1	160
← x_2	3	0	1	0	1/4	-1	1/2 *	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	-7/2	1140
							↑	

A solução anterior deixa de ser ótima, ou seja, é vantajoso produzir mesas.

Aplica-se o algoritmo *simplex* até se encontrar o novo ótimo.

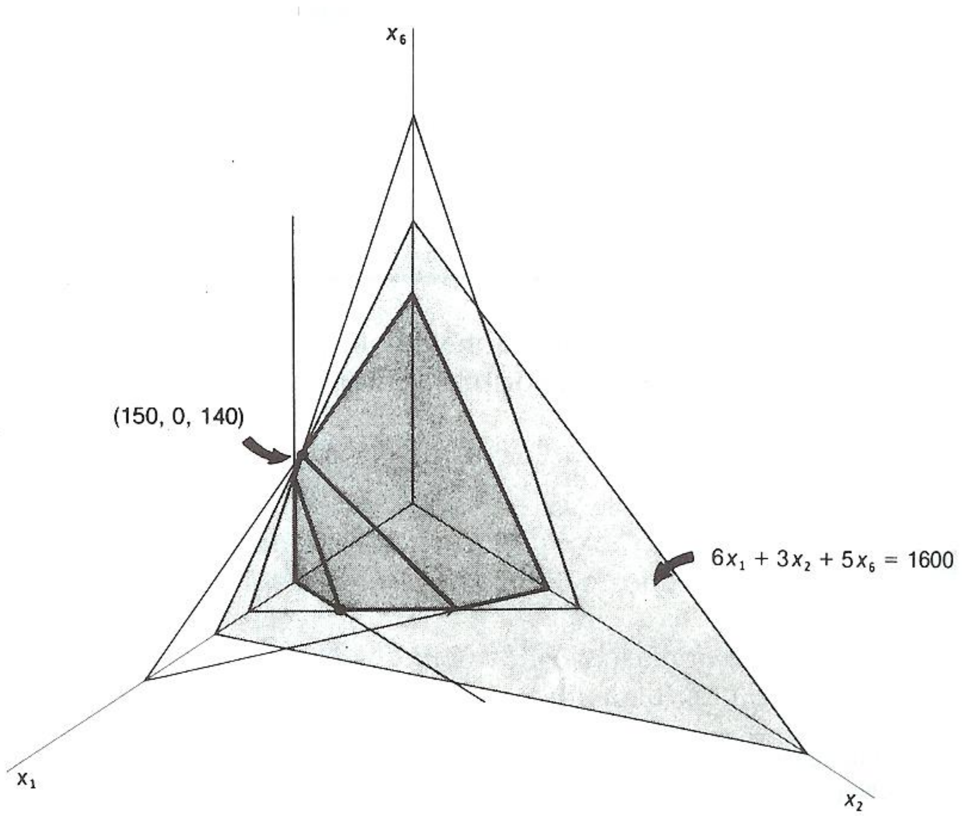
← x_3	0	0	-2	1	-3/2	4 *	0	40
x_6	5	0	2	0	1/2	-2	1	120
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
$z_j - c_j$		0	7	0	5/2	-4	0	1560
						↑		

x_5	0	0	-1/2	1/4	-3/8	1	0	10
x_6	5	0	1	1/2	-1/4	0	1	140
x_1	6	1	1/2	-1/4	3/8	0	0	150
$z_j - c_j$		0	5	1	1	0	0	1600

A solução ótima do problema, depois da introdução da nova variável, é:

$$\mathbf{x}^* = (150, 0, 0, 0, 10, 140) \quad \text{com} \quad z^* = 1600$$

Ou seja, devem produzir-se 150 secretárias e 140 mesas, deixando de se produzir estantes, resultando um lucro total de 1600 UM.



e) ***Introdução de uma nova restrição***

Não altera a função objetivo, mas pode restringir a região admissível.

O primeiro passo é verificar se a solução ótima do problema original satisfaz a restrição adicional

- Se satisfizer, a solução ótima mantém-se
- Senão, surge nova solução ótima que é necessário determinar.
  - Introduzir no quadro ótimo uma linha (correspondente à restrição) e uma coluna (variável folga e/ou artificial)
  - Fazer as operações de condensação necessárias (para reconstruir a matriz identidade). Se a solução obtida for não admissível efetuar nova iteração (pelo método dual do *simplex*) para determinar a nova solução ótima.

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior (*pág. I-8*).

Estudos de mercado mostram que a produção de estantes deve ser pelo menos de 100. Adiciona-se a restrição $x_2 \geq 100$.

Seja o quadro ótimo:

	c_i	6	3	0	0	0		
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	0	0	0	1	-1	2	160	$x_1 = 160$
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60	$x_2 = 60$
x_1	6	1	0	0	0	1	160	$x_3 = 160$
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140	Z = 1140

Esta solução não satisfaz a nova restrição pois $x_2 = 60$.

Transformando $x_2 \geq 100$ em $-x_2 \leq -100$ e adicionando uma "slack", obtém-se:

$$-x_2 + x_6 = -100$$

O novo quadro aumentado será:

x_B	c_B \ c_i / x_i	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	0	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	0	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
x_6	0	0	-1 ⇐	0	0	0	1	-100
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	0	1140

Fazendo as operações de condensação necessárias:

x_3	0	0	0	1	-1	2	0	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	0	60
x_1	6	1	0	0	0	1	0	160
← x_6	0	0	0	0	1/4	<u>*-1*</u> *	1	-40
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3 ↑	0	1140

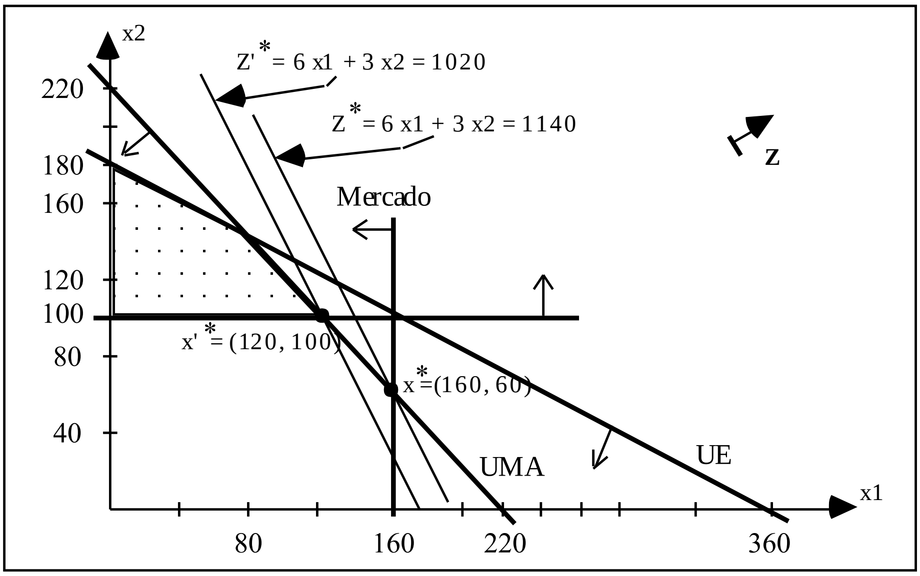
O quadro já não é ótimo devido ao aparecimento de um valor negativo na coluna b. Tem que se aplicar o método dual do *simplex*:

x_3	0	0	0	1	-1/2	0	2	80	
x_2	3	0	1	0	0	0	-1	l00	
x_1	6	1	0	0	1/4	0	1	120	$x_1 = 120$
x_5	0	0	0	0	-1/4	1	-1	40	$x_2 = 100$
$z_j - c_j$		0	0	0	3/2	0	3	1020	$Z = 1020$

A introdução da nova restrição levou a que a anterior solução ótima deixasse de ser admissível e o ótimo passasse a ser atingido num outro ponto:

$x^* \rightarrow x'^* = (120, 100, 80, 0, 40, 0)$

com $z^* = 1020$.



Análise de Sensibilidade:

a) *aos coeficientes da função objetivo* - c_f

Seja Δc_f a variação que se pretende determinar em c_f.

i) c_f é coeficiente da função objetivo duma variável não básica

No ótimo todos os "z_j - c_j" ≥ 0

Como x_f não pertence à base, qualquer variação só tem implicações em "z_f - c_f" logo

$$z_f - (c_f + \Delta c_f) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\infty < \Delta c_f \leq z_f - c_f$$

A base ótima mantém-se desde que o novo c_f ($c_f + \Delta c_f$) não ultrapasse z_f.

ii) c_f é coeficiente da função objetivo duma variável básica

Como x_f pertence à base, toda a linha dos "z_j - c_j" sofre alteração (assim como o valor do z^*)

Recalcular toda a linha dos "z_j - c_j", considerar todos os valores obtidos como ≥ 0 e resolver o sistema de inequações resultante

Alternativamente:

$$\Delta cf^{min} = \begin{cases} \max\limits_{j}\left[\dfrac{-(zj-cj)}{yfj}\right] & \text{para } yfj > 0 \\ -\infty & \text{se todo o } yfj \le 0 \end{cases}$$

$$\Delta cf^{max} = \begin{cases} \min\limits_{j}\left[\dfrac{-(zj-cj)}{yfj}\right] & \text{para } yfj < 0 \\ +\infty & \text{se todo o } yfj \ge 0 \end{cases}$$

$$\Delta cf^{min} \le \Delta cf \le \Delta cf^{max}$$

onde yfj é o elemento da linha f de Xj para todos os j correspondentes a variáveis não básicas.

O coeficiente da variável xf pode assumir qualquer valor de $[cf + \Delta cf^{min}; cf + \Delta cf^{max}]$ sem que a base ótima se altere.

O valor de z^* pertencerá ao intervalo:

$$[z^* + \Delta cf^{min} xf^*; z^* + \Delta cf^{max} xf^*]$$

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*, cujo quadro ótimo *simplex* é:

	c_i	6	3	0	0	0		
x_B	c_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	
x_3	0	0	0	1	-1	2	160	$x_1 = 160$
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60	$x_2 = 60$
x_1	6	1	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	160	$x_3 = 160$
$z_j - c_j$		0	0	0	$\boxed{3/4}$	$\boxed{3}$	1140	$x_4 = 0$
								$x_5 = 0$
								$z = 1140$

Proceda-se à análise de sensibilidade em relação a $c_1 = 6$ (lucro unitário das secretárias).

Como x_1 é variável básica, toda a linha dos "z_j - c_j" sofre alteração, bem como o valor do z^*.

Recalculando toda a linha dos "$z_j – c_j$"

x_B	c_B \ c_i / x_i	$6+\Delta c_1$ / x_1	3 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	B
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	$6+\Delta c_1$	1	0	0	0	1	160
z_j - c_j		0	0	0	3/4	$-3+6+\Delta c_1$ ≥ 0	$1140+160\Delta c_1$

$$-3 + 6 + \Delta c_1 \geq 0$$
$$\Delta c_1 \geq -3$$
$$\Downarrow$$
$$-3 \leq \Delta c_1 \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$3 \leq c_1 \leq +\infty$$

$$z^* = 1140 + 160\Delta c_1$$
$$1140+160*(-3) \leq z^* \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$1140-480 \leq z^* \leq +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$660 \leq z^* \leq +\infty$$

Alternativamente, usando as fórmulas:

$$\Delta c_1^{min} = \max\left[\frac{-3}{1}\right] = -3$$

$$\Delta c_1^{max} = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$-3 \leq \Delta c_1 \leq +\infty \quad \text{ou} \quad 3 \leq c_1 \leq +\infty$$

tal como anteriormente, $660 \leq z^* \leq +\infty$

b) <u>*nos termos independentes das restrições*</u> - b_i

Seja Δb_k a variação que se pretende determinar em b_k.

$$\mathbf{x_B}^* = B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$$
$$\Downarrow$$
para solução admissível

então

$$\mathbf{x_B}^*_{\Delta b_k} = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$$

$$\text{com } \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ \Delta b_k \\ : \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver o sistema de inequações resultante, ou, alternativamente:

$$\Delta b_k^{min} = \begin{cases} \max\limits_i \left[\dfrac{-(x_{Bi}^*)}{\beta_{ik}} \right] & \text{para } \beta_{ik} > 0 \\ -\infty & \text{se todo o } \beta_{ik} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta b_k^{max} = \begin{cases} \min\limits_i \left[\dfrac{-(x_{Bi}^*)}{\beta_{ik}} \right] & \text{para } \beta_{ik} < 0 \\ +\infty & \text{se todo o } \beta_{ik} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta b_k^{min} \leq \Delta b_k \leq \Delta b_k^{max}$$

onde x_{Bi}^* é o elemento da coluna dos termos independentes e linha i do quadro ótimo e β_{ik} é o elemento (i, k) da matriz B^{-1} ótima.

O segundo membro da k-ésima restrição pode assumir qualquer valor de $[b_k + \Delta b_k^{min}; b_k + \Delta b_k^{max}]$ sem que a base ótima se altere.

Porém, os valores da solução ótima alteram-se em conformidade com o valor concreto assumido por Δb_k:

$$\mathbf{x}_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}} = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

acontecendo o mesmo ao valor de z^*:

$$z^* = \mathbf{c}'_B\, \mathbf{x}_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}} = \mathbf{c}'_B\, B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*, cujo quadro ótimo *simplex* é:

x_B	c_B \ c_i / x_i	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_3	0	0	0	1	-1	2	160	$x_1 = 160$
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60	$x_2 = 60$
x_1	6	1	0	0	0	1	160	$x_3 = 160$
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140	$x_4 = 0$
								$x_5 = 0$
								$z = 1140$

A solução ótima é:

$$\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Proceda-se à análise de sensibilidade em relação a b_2 = 880 (disponibilidade máxima da UMA)

$$\Rightarrow \quad b_2 = 880 + \Delta b_2$$

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 880 + \Delta b_2 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 - \Delta b_2 \\ \Delta b_2/4 + 60 \\ 160 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 160 - \Delta b_2 \geq 0 \\ \Delta b_2/4 + 60 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \leq 160 \\ \Delta b_2 \geq -240 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-240 \leq \Delta b_2 \leq 160$$

$$640 \leq b_2 \leq 1040$$

$$\Downarrow$$

$$960 \leq z^* \leq 1260$$

Alternativamente, usando as fórmulas:

$$\Delta b_2^{min} = \max\left[\frac{-60}{1/4}\right] = -240$$

$$\Delta b_2^{max} = \min\left[\frac{-160}{-1}\right] = 160$$

$$\Downarrow$$

$$-240 \leq \Delta b_2 \leq 160 \quad \text{ou} \quad 640 \leq b_2 \leq 1040$$

tal como anteriormente, $960 \leq z^* \leq 1260$

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II

Programação Linear inteira

1 - Introdução

A **Programação Linear Inteira (PLI)** é uma extensão da programação linear que resulta da inclusão de variáveis inteiras no modelo.

O modelo contempla exclusivamente variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Pura (PLIP)**
O modelo contempla variáveis contínuas e variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Mista (PLIM)**

2 – Resolução de problemas de PLI

Primeira abordagem

- Resolver o problema como se fosse um de programação linear (relaxação do problema de PLI) e arredondar os valores ótimos encontrados para cada uma das variáveis de decisão inteiras.

- No entanto, após o arredondamento, a solução obtida:

  - Pode ser não admissível para o problema de PLI

  - Pode não ser ótima para o problema de PLI

Algoritmos mais frequentemente usados

- Planos de Corte (introduzido por Ralph Gomory)
- Ramificação e Limitação (*Branch-and-Bound*)

3 – Algoritmo de Gomory

- Este algoritmo enquadra-se numa das grandes classes em que é possível classificar os vários métodos de resolução de problemas de PLI – a classe dos **métodos de planos de corte**.

- O procedimento comum a todos estes métodos consiste na adição de novas restrições, designadas por **planos de corte** ou simplesmente cortes, que têm por objetivo restringir a região admissível.

- O **algoritmo de Gomory** foi dos primeiros a ser utilizado na resolução de problemas de PLI.

Algoritmo de Gomory para PLIP

Considere-se o seguinte problema de PLIP:

$$\left.\begin{array}{l} \mathit{Maximizar}\ z = \sum\limits_{j} c_j x_j \\ s.a \ \sum\limits_{j} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ \qquad x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{array}\right\}$$

Problema de Programação Linear Associado (Relaxação Linear)

$$x_j \ \text{inteiros} \longleftarrow$$

Restrições de Integralidade

A lógica de funcionamento deste algoritmo é muito simples e resume-se em dois passos:

1º Passo

- Resolver o problema de PL associado:
  - No caso da solução ótima satisfazer as restrições de integralidade, então é também solução ótima do problema de PLIP.
  - Caso contrário, o processo continua.

2º Passo

- **Introduzir uma nova restrição no problema** e resolver de novo o problema de PL associado:
  - Se a solução obtida satisfizer as restrições de integralidade, então também é solução ótima do problema de PLIP.
  - Caso contrário, repetir o procedimento (2º Passo) até obter uma solução inteira, ou concluir pela impossibilidade do problema.

Resumindo:

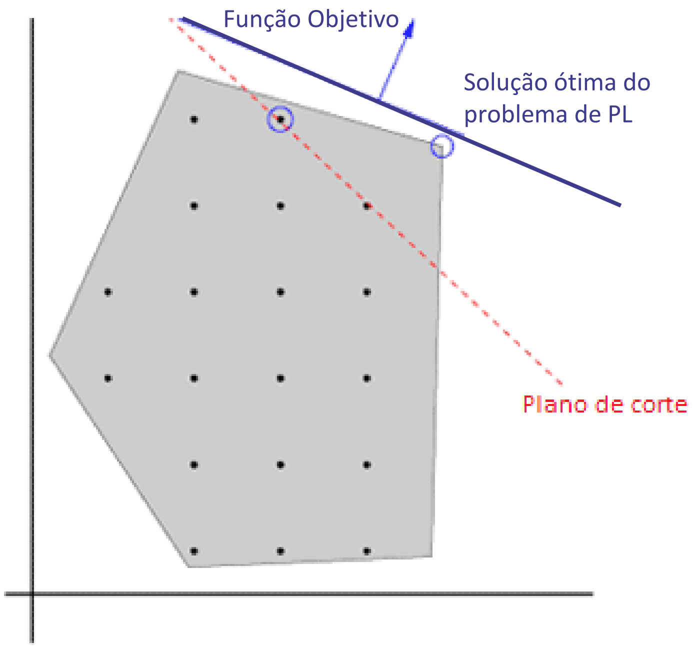
- Este procedimento consiste em **reduzir a região admissível** através da introdução de restrições sucessivas que mais não fazem do que cortar “fatias” do conjunto **X** (região admissível). Daí a designação de **planos de corte**.

- O objetivo final é encontrar uma solução que satisfaça qualquer uma das restrições de integralidade.

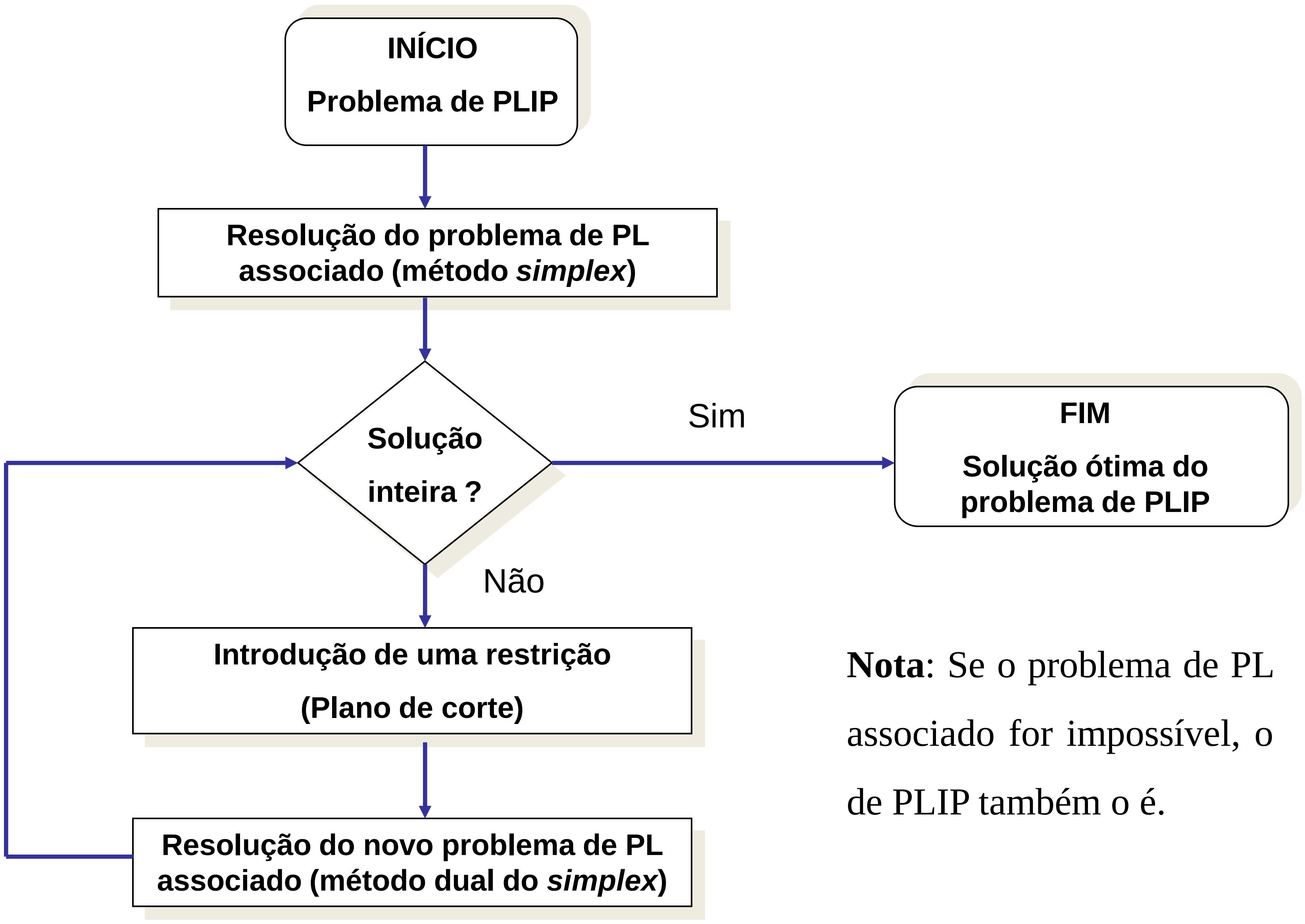
- Em cada iteração do algoritmo a restrição a introduzir deve garantir que:

  - A solução ótima do problema de PL associado da iteração anterior **seja não admissível para o novo problema**.

  - **Nenhuma solução inteira do problema inicial seja excluída** ao restringir a região admissível.



Fluxograma do Algoritmo



Nota: Se o problema de PL associado for impossível, o de PLIP também o é.

A restrição de corte a introduzir no 2º passo do algoritmo tem a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \notin I_B} f_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Em que:

x_{s0} — é o valor da coluna *b* do quadro final do Simplex, correspondente a $s^{\underline{ésima}}$ variável básica (não inteira) que pode decompor-se nas partes inteira e fracionária:

$$x_{s0} = [x_{s0}] + f_{s0}$$

$$[x_{s0}] \geq 0 \quad , 0 \leq f_{s0} < 1$$

x_{sj} — é o elemento da linha ***s*** coluna ***j*** do quadro final do *simplex*, sendo $\boldsymbol{x_j}$ uma variável não pertencente à base.

Este também se pode decompor em:

$$x_{sj} = \left[x_{sj} \right] + f_{sj}$$

$$0 \leq f_{sj} < 1$$

Nota: Há varias restrições de corte possíveis, tantas quantas as variáveis básicas não inteiras. A regra normalmente usada consiste em selecionar para restrição de corte, aquela à qual corresponde um f_{s0} maior.

Algoritmo de Gomory para PLIM

- Na prática são frequentes as situações em que nem todas as variáveis estão sujeitas a uma restrição de integralidade, ou seja, o modelo incorpora simultaneamente variáveis inteiras e contínuas.

- Neste caso, diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Mista, ou abreviadamente, de PLIM.

- A partir do algoritmo apresentado anteriormente para problemas de PLIP, Gomory desenvolveu uma outra versão adaptada a este tipo de problemas.

Considere-se o seguinte problema de PLIM:

$$Maximizar\ \mathrm{z} = \sum_{\mathrm{j}} c_j x_j$$

$$s.a \quad \sum_{\mathrm{j}} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m})$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{j}} \geq 0 \quad (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{j}} \quad \text{inteiro} \qquad \text{para } (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{p}) \qquad (\mathrm{p}<\mathrm{n})$$

- A forma de resolver um problema de PLIM é idêntica à que se usa para a resolução de problemas de PLIP (os 1º e 2º passos do algoritmo são iguais);

- A única diferença reside na **forma da restrição de corte**.

A **restrição de corte** tem agora a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \in N} d_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Sendo:

$$d_{sj} = \begin{cases} x_{sj} & j \in N_+^C \\ \dfrac{f_{s0}}{1-f_{s0}} \left| x_{sj} \right| & j \in N_-^C \\ f_{sj} & j \in N^I \quad se \ f_{sj} \leq f_{s0} \\ \dfrac{f_{s0}}{1-f_{s0}} (1-f_{sj}) & j \in N^I \quad se \ f_{sj} > f_{s0} \end{cases}$$

Em que:

N - é o conjunto dos **índices das variáveis não básicas**;

N^{I} - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **sujeitas à restrição de integralidade**;

N^{C} - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **não sujeitas à restrição de integralidade**, designando-se por:

N_{+}^{C} - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$;

N_{-}^{C} - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} < 0}$.

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II
Programação Linear inteira

1 - Introdução

A **Programação Linear Inteira** (**PLI**) é uma extensão da programação linear que resulta da inclusão de variáveis inteiras no modelo.

O modelo contempla exclusivamente variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Pura (PLIP)**
O modelo contempla variáveis contínuas e variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Mista (PLIM)**

2 – Resolução de problemas de PLI

Primeira abordagem

- Resolver o problema como se fosse um de programação linear (relaxação do problema de PLI) e arredondar os valores ótimos encontrados para cada uma das variáveis de decisão inteiras.
- No entanto, após o arredondamento, a solução obtida:
  - Pode ser não admissível para o problema de PLI
  - Pode não ser ótima para o problema de PLI

Algoritmos mais frequentemente usados

- Planos de Corte (introduzido por Ralph Gomory)
- Ramificação e Limitação (*Branch-and-Bound*)

3 – Algoritmo de Gomory

- Este algoritmo enquadra-se numa das grandes classes em que é possível classificar os vários métodos de resolução de problemas de PLI – a classe dos **métodos de planos de corte**.

- O procedimento comum a todos estes métodos consiste na adição de novas restrições, designadas por **planos de corte** ou simplesmente cortes, que têm por objetivo restringir a região admissível.

- O **algoritmo de Gomory** foi dos primeiros a ser utilizado na resolução de problemas de PLI.

Algoritmo de Gomory para PLIP

Considere-se o seguinte problema de PLIP:

$$
\left.\begin{aligned}
&Maximizar\ z = \sum_{j} c_j x_j \\
&s.a \quad \sum_{j} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\
&\qquad\quad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)
\end{aligned}\right\}
$$

Problema de Programação Linear Associado (Relaxação Linear)

$$x_j \ \text{inteiros}$$

Restrições de Integralidade

A lógica de funcionamento deste algoritmo é muito simples e resume-se em dois passos:

1º Passo

- Resolver o problema de PL associado:
  - No caso da solução ótima satisfazer as restrições de integralidade, então é também solução ótima do problema de PLIP.
  - Caso contrário, o processo continua.

2º Passo

- **Introduzir uma nova restrição no problema** e resolver de novo o problema de PL associado:
  - Se a solução obtida satisfizer as restrições de integralidade, então também é solução ótima do problema de PLIP.
  - Caso contrário, repetir o procedimento (2º Passo) até obter uma solução inteira, ou concluir pela impossibilidade do problema.

Resumindo:

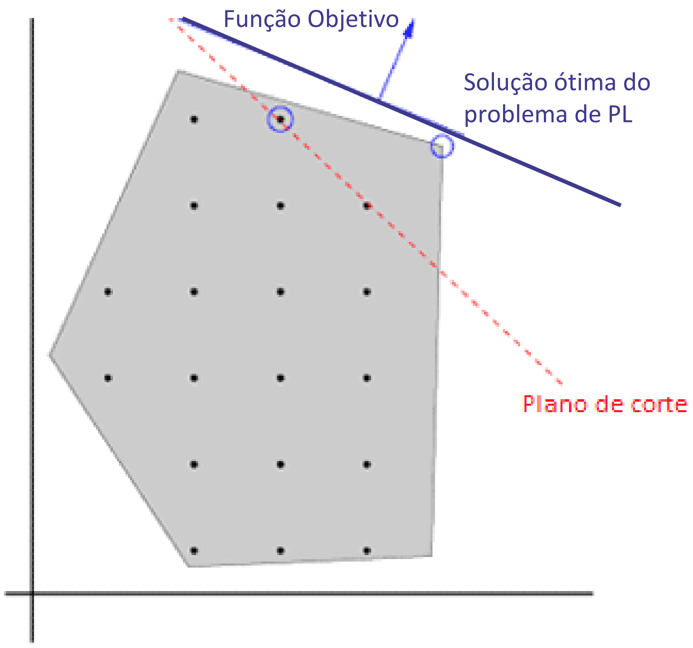
- Este procedimento consiste em **reduzir a região admissível** através da introdução de restrições sucessivas que mais não fazem do que cortar "fatias" do conjunto **X** (região admissível). Daí a designação de **planos de corte**.

- O objetivo final é encontrar uma solução que satisfaça qualquer uma das restrições de integralidade.

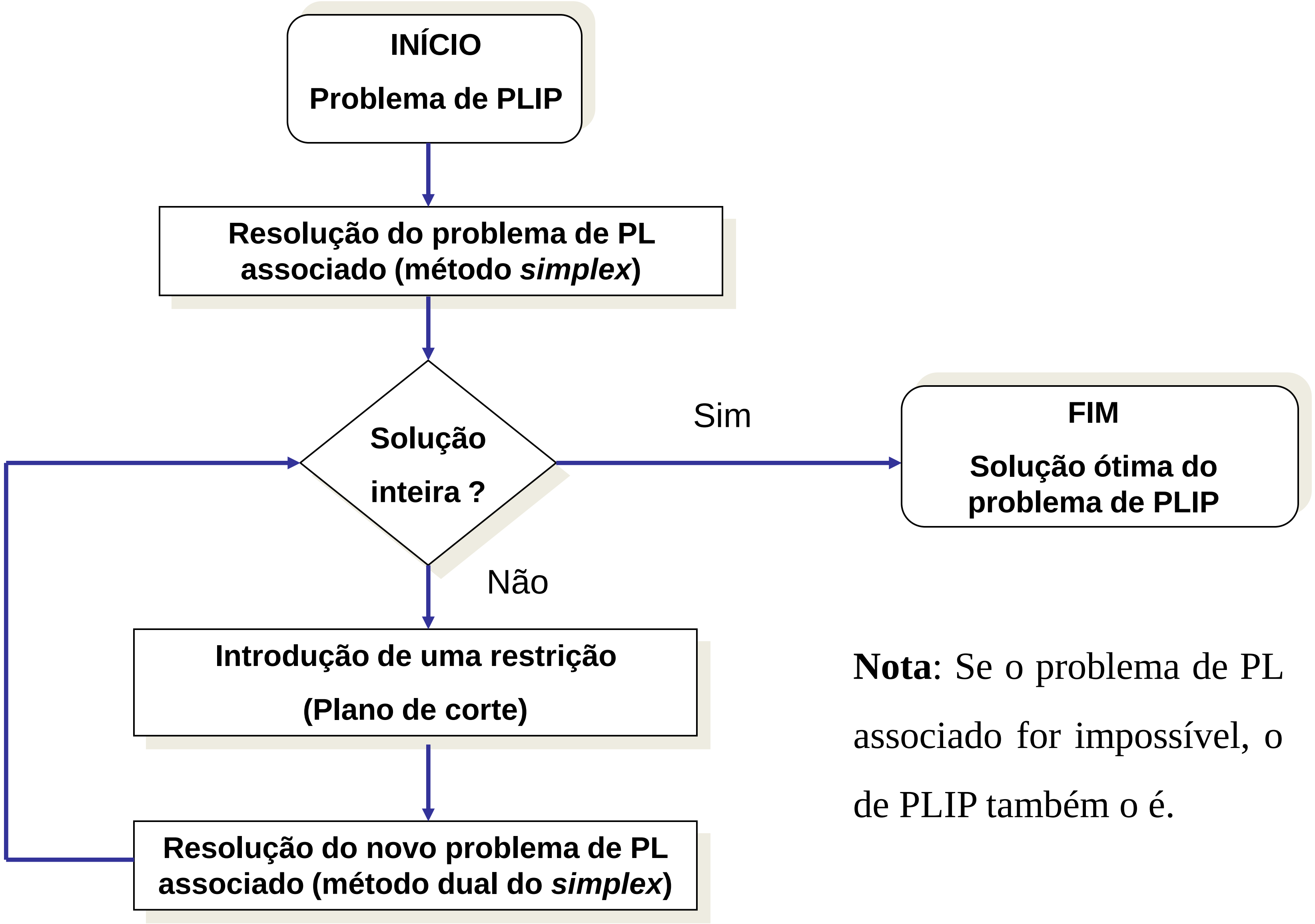
- Em cada iteração do algoritmo a restrição a introduzir deve garantir que:

  - A solução ótima do problema de PL associado da iteração anterior **seja não admissível para o novo problema**.

  - **Nenhuma solução inteira do problema inicial seja excluída** ao restringir a região admissível.



Fluxograma do Algoritmo



Nota: Se o problema de PL associado for impossível, o de PLIP também o é.

A restrição de corte a introduzir no 2º passo do algoritmo tem a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \notin I_B} f_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Em que:

x_{s0} — é o valor da coluna *b* do quadro final do Simplex, correspondente a $s^{\underline{ésima}}$ variável básica (não inteira) que pode decompor-se nas partes inteira e fracionária:

$$x_{s0} = [x_{s0}] + f_{s0}$$

$$[x_{s0}] \geq 0 \quad , 0 \leq f_{s0} < 1$$

x_{sj} — é o elemento da linha ***s*** coluna ***j*** do quadro final do *simplex*, sendo $\boldsymbol{x_j}$ uma variável não pertencente à base.

Este também se pode decompor em:

$$x_{sj} = \left[x_{sj} \right] + f_{sj}$$

$$0 \leq f_{sj} < 1$$

Nota: Há varias restrições de corte possíveis, tantas quantas as variáveis básicas não inteiras. A regra normalmente usada consiste em selecionar para restrição de corte, aquela à qual corresponde um f_{s0} maior.

Algoritmo de Gomory para PLIM

- Na prática são frequentes as situações em que nem todas as variáveis estão sujeitas a uma restrição de integralidade, ou seja, o modelo incorpora simultaneamente variáveis inteiras e contínuas.

- Neste caso, diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Mista, ou abreviadamente, de PLIM.

- A partir do algoritmo apresentado anteriormente para problemas de PLIP, Gomory desenvolveu uma outra versão adaptada a este tipo de problemas.

Considere-se o seguinte problema de PLIM:

$$Maximizar\ z = \sum_{j} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & \sum_{j} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ & x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \\ & x_j \text{ inteiro} \qquad \text{para } (j = 1,2,\ldots,p) \qquad (p < n) \end{aligned}$$

- A forma de resolver um problema de PLIM é idêntica à que se usa para a resolução de problemas de PLIP (os 1º e 2º passos do algoritmo são iguais);

- A única diferença reside na **forma da restrição de corte**.

A **restrição de corte** tem agora a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \in N} d_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Sendo:

$$d_{sj} = \begin{cases} x_{sj} & j \in N_{+}^{C} \\ \dfrac{f_{s0}}{1 - f_{s0}} \left| x_{sj} \right| & j \in N_{-}^{C} \\ f_{sj} & j \in N^{I} \quad se \ f_{sj} \leq f_{s0} \\ \dfrac{f_{s0}}{1 - f_{s0}} (1 - f_{sj}) & j \in N^{I} \quad se \ f_{sj} > f_{s0} \end{cases}$$

Em que:

N - é o conjunto dos **índices das variáveis não básicas**;

N^I - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **sujeitas à restrição de integralidade**;

N^C - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **não sujeitas à restrição de integralidade**, designando-se por:

N_+^C - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$;

N_-^C - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} < 0}$.

isec Engenharia
Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II

- Anexo 1 -

Resolução de problemas de PLIP

EXEMPLO 1

Considere o seguinte problema:

Mensalmente um carpinteiro possui 6 peças de madeira e dispõe de 28 horas livres para construir dois modelos diferentes de bancos. Cada banco do modelo I requer 2 peças de madeira e exige 7 horas de trabalho. Cada banco do modelo II requer 1 peça de madeira e exige 8 horas de trabalho. Os lucros unitários obtidos com a venda dos bancos são de, respetivamente, 12 e 8 Unidades Monetárias (U.M.).

O carpinteiro pretende saber quantos bancos de cada modelo deve fabricar por mês, de forma a maximizar o lucro obtido com a venda dos bancos.

Para responder a esta questão, formule o problema em termos de um modelo de PLIP e resolva-o recorrendo ao algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira pura (PLIP) que temos para resolver é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = 12\,x_1 + 8\,x_2 \\
\text{s.a} \\
2x_1 + x_2 &\leq 6 && \textit{(1)} \\
7x_1 + 8x_2 &\leq 28 && \textit{(2)} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \\
x_1,\ x_2 &\text{ inteiros}
\end{aligned}
$$

Adicionando as variáveis *slack* x_3 e x_4 em *(1)* e *(2)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = 12\,x_1 + 8\,x_2 \\
\text{s.a} \\
2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\
7x_1 + 8x_2 \quad + x_4 &= 28 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

Aplicando o método *simplex*:

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	12	8	0	0	
x_3	0	2*	1	1	0	6 ⇐
x_4	0	7	8	0	1	28
z_j-c_j		-12	-8	0	0	0
		⇑				

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	12	8	0	0	
x_1	12	1	1/2	1/2	0	3
x_4	0	0	9/2*	-7/2	1	7 ⇐
z_j-c_j		0	-2	6	0	36
			⇑			

	$\underline{c}$	12	8	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
x_1	12	1	0	8/9	-1/9	20/9
x_2	8	0	1	-7/9	2/9	14/9
z_j-c_j		0	0	40/9	4/9	352/9

- Quadro ótimo para o problema de PL associado pois não existem valores negativos na linha zj-cj
- No entanto, a solução obtida não satisfaz as restrições de integralidade de x_1 e x_2. Ou seja, não é ótima para o problema de PLIP
- Temos que introduzir uma **restrição de corte**

$\underline{\mathbf{c}}$	0	0		
$\underline{\mathbf{x}}_B$ $\underline{\mathbf{c}}_B$ \ $\underline{\mathbf{x}}$	x_3	x_4	$\underline{\mathbf{b}}$	
x_1			20/9	= 18/9+2/9 = 2+2/9
x_2	-7/9	2/9	14/9 $\Leftarrow$	= 9/9+5/9 = 1+5/9
z_j-c_j				

- Escolhe-se a linha da variável básica x_2 (a que tem maior parte fracionária)
- Selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_3 e x_4 (VNB)
- A restrição de corte a considerar será:

$$(1 -7/9)\ x_3 + \ 2/9\ x_4 \ \geq 5/9$$
$$\Leftrightarrow \quad 2/9\ x_3 + \ 2/9\ x_4 \ \geq 5/9$$

Acrescentando a folga x_5 e transformando-a na forma de igualdade:

$$\Leftrightarrow \ -2/9\ x_3 \ \ -2/9\ \ x_4 \ \leq -5/9 \Leftrightarrow \ -2/9\ x_3 \ -2/9\ x_4 \ +x_5 \ = -5/9$$

Introduzindo-a no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{c}$	12	8	0	0	0		
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$	
x_1	12	1	0	8/9	-1/9	0	20/9	
x_2	8	0	1	-7/9	2/9	0	14/9	
x_5	0	0	0	-2/9	-2/9*	1	-5/9	$\Leftarrow$
	z_j-c_j	0	0	40/9	4/9	0	352/9	
					$\Uparrow$			

	$\underline{c}$	12	8	0	0	0		
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$	
x_1	12	1	0	1	0	-1/2	5/2	=4/2+1/2
x_2	8	0	1	-1	0	1	1	
x_4	0	0	0	1	1	-9/2	5/2 $\Leftarrow$	= 4/2+1/2 por exemplo
	z_j-c_j	0	0	4	0	2	38	

Novo quadro ótimo (não há valores negativos na coluna *b*)

=> Na solução obtida, $x_2'^*=1$, pelo que satisfaz a restrição de integralidade para x_2

=> O mesmo não se verifica relativamente a x_1, pois $x_1'^*=5/2$

Há que introduzir uma **nova restrição de corte**

Para tal selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_3, que é 0, e a x_5

$$-9/2 = -8/2 -1/2 = -4 -1/2$$

=> A nova restrição de corte a considerar será:

$$\Leftrightarrow \quad (1 -1/2)\, x_5 \geq 1/2 \Leftrightarrow 1/2x_5 \geq 1/2 \Leftrightarrow -1/2\, x_5 \leq -1/2$$

Acrescentando a folga x_6 e transformando-a na forma de igualdade:

$$\Leftrightarrow \quad -1/2x_5 + x_6 = -1/2$$

Introduzindo no quadro ótimo anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{\mathbf{c}}$	12	8	0	0	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \backslash \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{\mathbf{b}}$
x_1	12	1	0	1	0	-1/2	0	5/2
x_2	8	0	1	-1	0	1	0	1
x_4	0	0	0	1	1	-9/2	0	5/2
x_6	0	0	0	0	0	-1/2	1	-1/2 ⇐
z_j-c_j		0	0	4	0	2	0	38
						⇑		

	$\underline{c}$	12	8	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_1	12	1	0	1	0	0	-1	3
x_2	8	0	1	-1	0	0	2	0
x_4	0	0	0	1	1	0	-9	7
x_5	0	0	0	0	0	1	-2	1
z_j-c_j		0	0	4	0	0	4	36

Novo quadro ótimo (não há valores negativos na coluna *b*)

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIP!

=> x_1''*=3 e satisfaz a restrição de integralidade
x_2''*=0 e satisfaz a restrição de integralidade

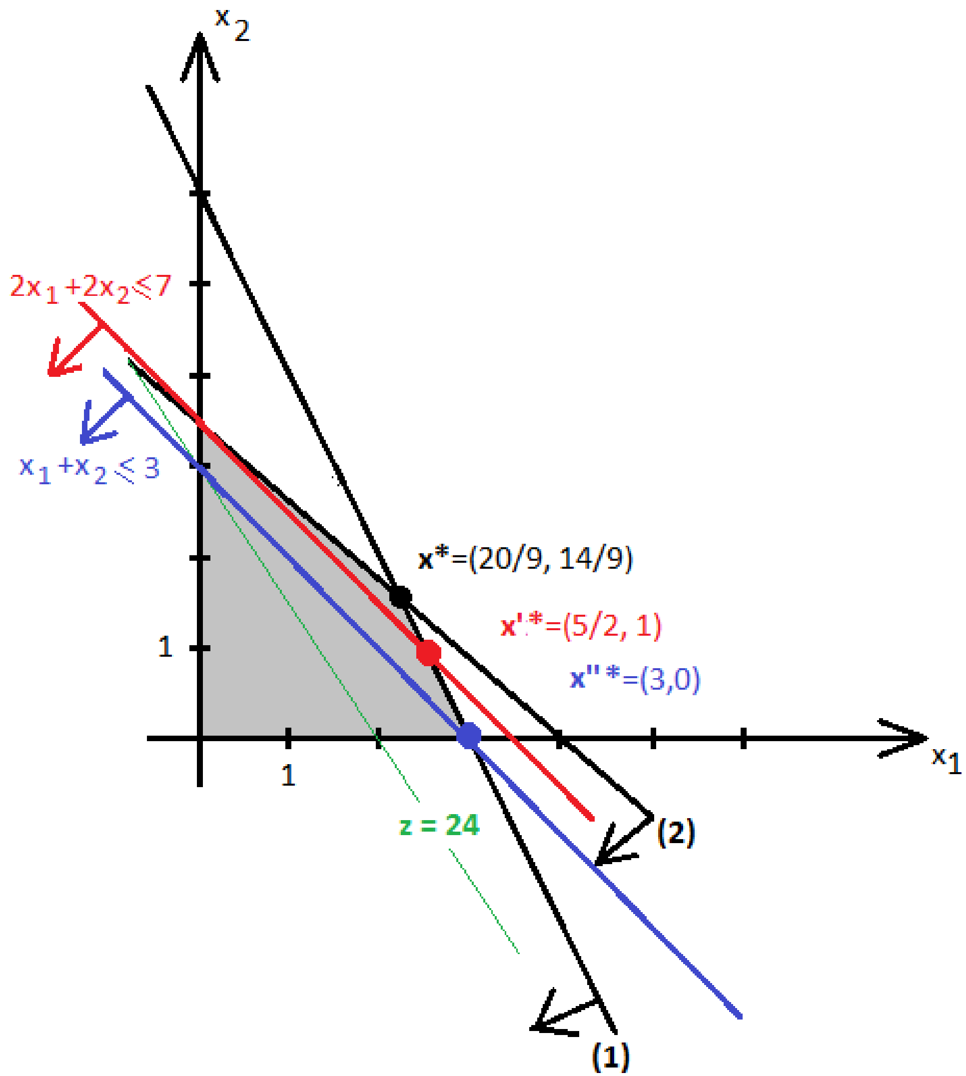
=> $\underline{x}$''*=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(3, 0, 0, 7, 1, 0)
com z''*=36

Interpretação Gráfica:

$$\text{Max } z = 12\,x_1 + 8\,x_2$$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + 8x_2 \leq 28$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
x_1, x_2 inteiros



1º plano de corte:

$$2/9\ x_3 + 2/9\ x_4 \geq 5/9 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_3 + 2\ x_4 \geq 5$$

Como

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2 \quad e \quad x_4 = 28 - 7x_1 - 8x_2$$

temos

$$2\,(6 - 2x_1 - x_2) + 2\,(28 - 7x_1 - 8x_2) \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 4x_1 - 2x_2 + 56 - 14x_1 - 16x_2 \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -18x_1 - 18x_2 \geq -63 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2x_1 + 2x_2 \leq 7}$$

2º plano de corte:

$$1/2\ x_5 \geq 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x_5 \geq 1$$

Como

$$x_5 = -5/9 + 2/9x_3 + 2/9x_4 = -5/9 + 2/9(6 - 2x_1 - x_2) + 2/9(28 - 7x_1 - 8x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_5 = -5/9 + 12/9 - 4/9x_1 - 2/9x_2 + 56/9 - 14/9x_1 - 16/9x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_5 = 63/9 - 18/9x_1 - 18/9x_2 = 7 - 2x_1 - 2x_2$$

temos

$$x_5 \geq 1 \quad \Leftrightarrow 7 - 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 \geq -6 \quad \Leftrightarrow \mathbf{x_1 + x_2 \leq 3}$$

EXEMPLO 2

Considere o seguinte problema:

Uma fábrica de brinquedos produz dois tipos de carros telecomandados (A e B). Cada carro do tipo A requer cerca do triplo do tempo de produção em relação aos do tipo B e sabe-se que se todos os carros fossem do tipo B a fábrica teria capacidade para produzir diariamente um máximo de 400 carros.

Sabe-se que as vendas médias diárias dos carros dos tipos A e B não excedem as 150 e as 200 unidades, respetivamente.

Assumindo que cada carro do tipo A produz um lucro de 4000 U.M. e que cada carro do tipo B produz um lucro de 2500 U.M., a empresa pretende saber quantos carros de cada tipo deve fabricar diariamente de modo a maximizar o lucro.

Para responder a esta questão, formule o problema em termos de um modelo de PLIP e resolva-o recorrendo ao algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira pura (PLIP) que temos para resolver é o seguinte:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max } z = 4000\, x_1 + 2500\, x_2 & & & \\
\text{s.a} & & & \\
x_1 & & \leq 150 & (1) \\
& x_2 & \leq 200 & (2) \\
3x_1 + & x_2 & \leq 400 & (3) \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & & & \\
x_1,\ x_2 \text{ inteiros} & & &
\end{array}
$$

Adicionando as variáveis *slack* x_3, x_4 e x_5 em *(1)*, *(2)* e *(3)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max } z = 4000\, x_1 + 2500\, x_2 & & & & & \\
\text{s.a} & & & & & \\
x_1 & & + x_3 & & & = 150 \\
& x_2 & & + x_4 & & = 200 \\
3x_1 + & x_2 & & & + x_5 & = 400 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5 & & & & &
\end{array}
$$

$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \backslash \underline{\mathbf{x}}$ \ $\underline{\mathbf{c}}$	4000	2500	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{\mathbf{b}}$	
x_3	0	1	0	1	0	0	150	*(1)*
x_4	0	0	1	0	1	0	200	*(2)*
x_5	0	3*	1	0	0	1	400 $\Leftarrow$	*(3)*
z_j-c_j		-4000	-2500	0	0	0	0	
		$\Uparrow$						

$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \backslash \underline{\mathbf{x}}$ \ $\underline{\mathbf{c}}$	4000	2500	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{\mathbf{b}}$
x_3	0	0	-1/3	1	0	-1/3	50/3
x_4	0	0	1*	0	1	0	200 $\Leftarrow$
x_1	4000	1	1/3	0	0	1/3	400/3
z_j-c_j		0	-3500/3	0	0	0	1600000/3
			$\Uparrow$				

	c	4000	2500	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	250/3 =249/3+1/3
x_2	2500	0	1	0	1	0	200
x_1	4000	1	0	0	-1/3	1/3	200/3 =198/3+2/3
z_j-c_j		0	0	0	3500/3	4000/3	2300000/3 = = 766666.66

- Quadro ótimo para o problema PL associado
- Mas não ótimo para o problema de PLIP, pois x_1*=200/3=66.667 na solução obtida (valor não inteiro!)
- Vamos introduzir uma **restrição de corte**:

  Escolhe-se a linha da variável básica x_1, pois é a que tem maior parte fracionária

  Selecionam-se as partes fracionárias correspondentes a x_4 e x_5

  A restrição de corte a considerar será:

$$(1 - 1/3)\, x_4 + \ 1/3\, x_5 \ \geq 2/3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2/3\ x_4 + 1/3\ x_5 \geq 2/3$$

Acrescentando a folga x_6 e transformando-a na forma de igualdade:

$$\Leftrightarrow \quad -2/3\ x_4 \ -1/3\ x_5 \leq -2/3 \Leftrightarrow -2/3\ x_4 \ -1/3\ x_5 + x_6 = -2/3$$

Introduzindo no quadro ótimo anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{c}$	4000	2500	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	0	250/3
x_2	2500	0	1	0	1	0	0	200
x_1	4000	1	0	0	-1/3	1/3	0	200/3
x_6	0	0	0	0	-2/3*	-1/3	1	-2/3 $\Leftarrow$
	z_j-c_j	0	0	0	3500/3	4000/3	0	2300000/3
					$\Uparrow$			

$\underline{x_B}$	$\underline{c}$ / $\underline{c_B}$ \ $\underline{x}$	4000 / x_1	2500 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	0 / x_6	$\underline{b}$
x_3	0	0	0	1	0	-1/2	1/2	83
x_2	2500	0	1	0	0	-1/2	3/2	199
x_1	4000	1	0	0	0	1/2	-1/2	67
x_4	0	0	0	0	1	1/2	-3/2	1
z_j-c_j		0	0	0	0	750	1750	765500

- Quadro ótimo para o problema PL associado
- Este quadro é também ótimo para o problema de PLIP pois satisfaz as restrições de integralidade de x_1 e x_2!

=> $x_1'^* = 67$
$x_2'^* = 199$

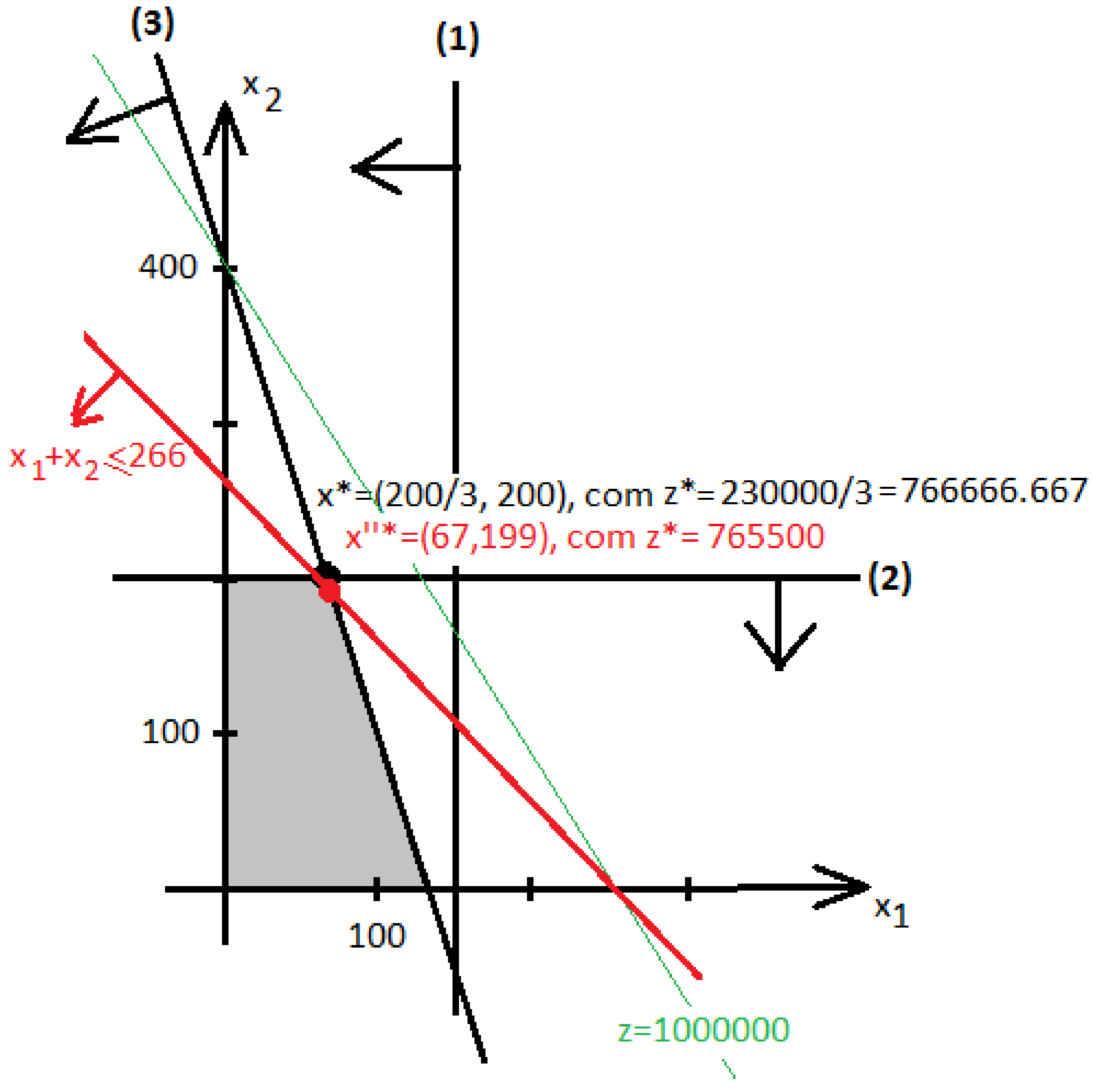
=> $\underline{x}'^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (67, 199, 83, 1, 0, 0)$
com $z'^* = 765500$

Interpretação Gráfica:

$$\text{Max } z = 4000\,x1 + 2500\,x2$$

s.a

$$
\begin{array}{rlr}
x1 & \leq 150 & (1) \\
x2 & \leq 200 & (2) \\
3x1 + x2 & \leq 400 & (3) \\
\multicolumn{2}{l}{x1 \geq 0,\ x2 \geq 0} & \\
\multicolumn{2}{l}{x1,\ x2 \text{ inteiros}} &
\end{array}
$$



Restrição de corte:

$$2/3\ x_4 + 1/3\ x_5 \geq 2/3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_4 + x_5 \geq 2$$

Como

$$x_4 = 200 - x_2 \text{ e } \quad x_5 = 400 - 3x_1 - x_2$$

temos

$$2\,(200 - x_2) + (400 - 3x_1 - x_2) \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 800 - 3x_1 - 3x_2 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x_1 - 3x_2 \geq -798 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x_1 + x_2 \leq 266}$$

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II

- Anexo 2 -

Resolução de problemas de PLIM

EXEMPLO 1

Considere o seguinte problema:

Determinada vendedora ambulante vende dois tipos de morangos: embalados (em caixas de 1 kg) e também ao peso. Os morangos embalados (tipo A) são de cultura biológica e originam um lucro de 8 UM/Kg (⇔ 8 UM/caixa). Os morangos vendidos a peso (tipo B) provêm de grandes armazéns e dão um lucro de 5 UM/Kg. Dado que a vendedora se desloca a pé, ela não consegue transportar, diariamente, mais do que 6 kg de morangos. Por outro lado, o cesto onde os transporta tem uma capacidade de armazenamento correspondente a 45 unidades de área (UA). Verifica-se que cada embalagem de morangos do tipo A ocupa cerca de 9 UA e cada kg de morangos do tipo B ocupa cerca de 5 UA. Deste modo, a vendedora pretende saber quantas caixas de morangos do tipo A e quantos Kg de morangos do tipo B deve transportar por dia, de forma a maximizar o lucro diário (pressupondo-se que vende tudo o que transporta).

Formule o problema em termos de um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e resolva-o usando o algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira mista (PLIM) que temos para resolver é o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 8\,x_1 + 5\,x_2\\
&\text{s.a}\\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \qquad\qquad (1)\\
&\quad 9x_1 + 5\,x_2 \le 45 \qquad (2)\\
&\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\\
&\quad x_1 \text{ inteiro}
\end{aligned}$$

Adicionando as variáveis "slack" x_3 e x_4 em *(1)* e *(2)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 8\,x_1 + 5\,x_2\\
&\text{s.a}\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 6\\
&\quad 9x_1 + 5\,x_2 + x_4 = 45\\
&\quad x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 4
\end{aligned}$$

O quadro inicial do *simplex* é:

	$\underline{c}$	8	5	0	0		
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$	
x_3	0	1	1	1	0	6	6/1
x_4	0	9*	5	0	1	45 $\Leftarrow$	45/9
$z_j - c_j$		-8	-5	0	0	0	
		$\Uparrow$					

x_3	0	0	4/9*	1	-1/9	1 $\Leftarrow$	1/4/9
x_1	8	1	5/9	0	1/9	5	5/5/9
$z_j - c_j$		0	-5/9	0	8/9	40	
			$\Uparrow$				

	$\underline{c}$	8	5	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
x_2	5	0	1	9/4	-1/4	9/4
x_1	8	1	0	-5/4	1/4	15/4
z_j-c_j		0	0	5/4	3/4	165/4

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos na linha zj-cj

=> $\underline{x}^*=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(15/4, 9/4, 0, 0)$ com $z^* = 165/4$

Mas não ótimo para o problema de PLIM

=> Na solução obtida $x_1 = 15/4$ (não inteiro)

Vamos introduzir uma restrição de corte.

x_2	5					
x_1	8			-5/4	1/4	15/4 $\Leftarrow$ =3+3/4
z_j-c_j						

=> Escolhe-se a linha da variável básica, x_1 (s=2)

$x_{20} = 15/4 \quad \Leftrightarrow \quad x_{20} = [x_{20}] + f_{20} = 3 + 3/4$

$f_{20} = 3/4$

=> $x_{23} = -5/4$ ($j=3 \in N^C_-$)

=> $x_{24} = 1/4$ ($j=4 \in N^C_+$)

A equação de corte a considerar será:

$$\left(\left(3/4 \middle/ (1 - 3/4)\right) * |-5/4| \right) \; x_3 + 1/4 \; x_4 \geq 3/4$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(3/4 \middle/ (1/4)\right) * |-5/4| \right) \; x_3 + 1/4 \; x_4 \geq 3/4$$

$$\Leftrightarrow \quad 15/4 \; x_3 + 1/4 \; x_4 \geq 3/4$$

Multiplicando por -1, acrescentando a folga x_5 e transformando na forma de igualdade obtemos:

$$\Leftrightarrow \; -15/4 \; x_3 - 1/4 \; x_4 \leq -3/4 \quad \Leftrightarrow \quad -15/4 \; x_3 - 1/4 \; x_4 + x_5 = -3/4$$

Introduzindo no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$ / $\underline{c}$	8 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	$\underline{b}$
x_2	5	0	1	9/4	-1/4	0	9/4
x_1	8	1	0	-5/4	1/4	0	15/4
x_5	0	0	0	-15/4*	-1/4	1	-3/4 $\Leftarrow$
$z_j - c_j$		0	0	5/4	3/4	0	165/4
				$\Uparrow$			

x_2	5	0	1	0	-2/5	3/5	9/5
x_1	8	1	0	0	1/3	-1/3	4
x_3	0	0	0	1	1/15	-4/15	1/5
$z_j - c_j$		0	0	0	2/3	1/3	41

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> não existem valores negativos em zj-cj

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIM!

=> na solução obtida x1 assume valor inteiro!

$x_1 = 4$ (satisfaz a restrição de integralidade)

=> $\underline{x}'^{*} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 9/5, 1/5, 0, 0)$ com $z'^{*} = 41$

Interpretação Gráfica:

Maximizar $z = 8\,x_1 + 5\,x_2$

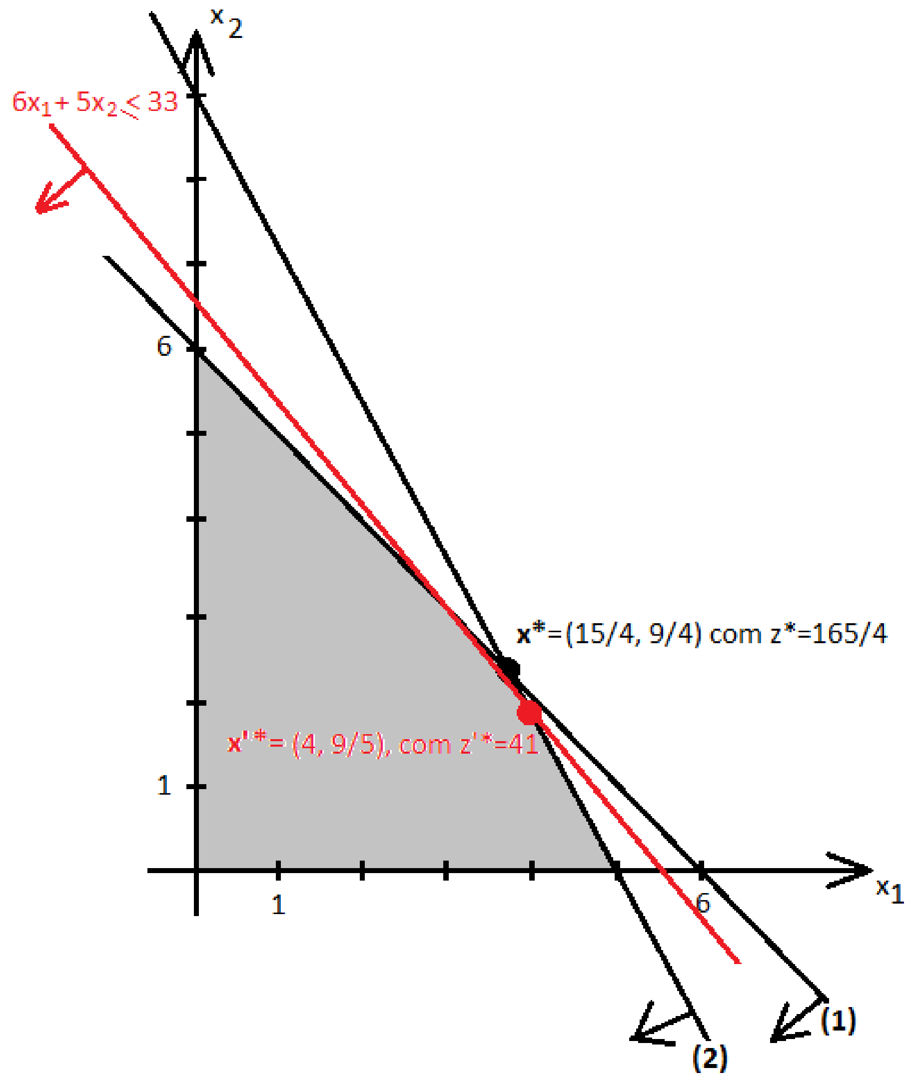
s.a

$x_1 + x_2 \leq 6$

$9\,x_1 + 5\,x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

x_1 inteiro



Plano de corte:

$$15/4\ x_3 + \ 1/4\ x_4 \ \geq 3/4 \quad \Leftrightarrow \ 15\ x_3 + x_4 \ \geq 3$$

Como

$$x_3 = 6 - x_1 - x_2 \ \text{e} \quad x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2$$

temos

$$15\ (6 - x_1 - x_2) + (45 - 9x_1 - 5x_2) \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 90 - 15x_1 - 15x_2 + 45 - 9x_1 - 5x_2 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -24x_1 - 20x_2 \ \geq -132 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathbf{6x_1 + 5x_2 \leq 33}$$

EXEMPLO 2

Considere o seguinte problema:

Agora que o tempo frio se aproxima, o Sr. Anacleto pretende aquecer a sua casa recorrendo a uma caldeira que pode ser alimentada com carvão ou com briquetes (material ecológico feitos com resíduos de madeira prensados). Apesar de o carvão ser mais barato, os briquetes têm uma duração maior. Na verdade, 1 kg de carvão arde durante cerca de 3 horas, enquanto 1 pack de briquetes (5 briquetes) queima durante aproximadamente 6 horas. O fornecedor habitual do Sr. José pode arranjar-lhe, semanalmente, um máximo de 10 kg de carvão e de 7 packs de briquetes. Para além disso, cada kg de carvão custa 1 UM e cada pack de briquetes custa (preço especial de lançamento) 3.5 UM, sendo que o Sr. Anacleto pode gastar um máximo de 20 UM por semana na compra daqueles produtos. Assim sendo, este senhor pretende saber quantos kg de carvão e/ou quantos packs de briquetes deve comprar semanalmente, de forma a prolongar o mais possível o tempo de aquecimento da sua casa sem exceder o seu orçamento.

Formule o problema em termos de um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e resolva-o usando o algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira mista (PLIM) que temos para resolver é o seguinte:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Maximizar } z = 3\,x_1 + 6\,x_2 & & & \\
\text{s.a} & & & \\
x_1 & & \leq 10 & (1) \\
 & x_2 & \leq 7 & (2) \\
x_1 + 7/2 & x_2 & \leq 20 & (3) \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & & & \\
x_2 \text{ inteiro} & & &
\end{array}
$$

Adicionando as variáveis "slack" x_3, x_4 e x_5 em *(1)*, *(2)* e *(3)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Maximizar } z = 3\,x_1 + 6\,x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & \\
x_1 & & + x_3 & & & = 10 \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 7 \\
x_1 + 7/2 & x_2 & & & + x_5 & = 20 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5 & & & & &
\end{array}
$$

O quadro inicial do *simplex* é:

	c	3	6	0	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \setminus \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{\mathbf{b}}$
x_3	0	1	0	1	0	0	10
x_4	0	0	1	0	1	0	7
x_5	0	1	7/2*	0	0	1	20 $\Leftarrow$
$z_j - c_j$		-3	-6	0	0	0	0
			$\Uparrow$				

x_3	0	1*	0	1	0	0	10 $\Leftarrow$
x_4	0	-2/7	0	0	1	-2/7	9/7
x_2	6	2/7	1	0	0	2/7	40/7
$z_j - c_j$		-9/7	0	0	0	12/7	240/7
		$\Uparrow$					

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	3	6	0	0	0	
x_1	3	1	0	1	0	0	10
x_4	0	0	0	2/7	1	-2/7	29/7
x_2	6	0	1	-2/7	0	2/7	20/7
z_j-c_j		0	0	9/7	0	12/7	330/7

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos em zj-cj

=> $\underline{x}^*=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(10, 20/7, 0, 29/7, 0)$ com $z^* = 330/7$

Mas não ótimo para o problema de PLIM

=> Na solução obtida $x_2 = 20/7$ (não inteiro)

Vamos introduzir uma restrição de corte

=> Escolhe-se a linha da variável básica, x_2 (s=3)

$x_{30} = 20/7 \quad \Leftrightarrow \quad x_{30} = [x_{30}] + f_{30} = 14/7 + 6/7 = 2 + 6/7$

$f_{30} = 6/7$

=> $x_{33} = -2/7$ ($j=3 \in N^C_-$)

=> $x_{35} = 2/7$ ($j=5 \in N^C_+$)

A restrição de corte a considerar será:

$$\left(\left(6/7 \Big/ (1 - 6/7)\right) * |-2/7|\right) x_3 + 2/7\, x_5 \geq 6/7$$

$$\Leftrightarrow \quad 12/7\, x_3 + 2/7\, x_5 \geq 6/7$$

Multiplicando por -1, acrescentando a folga x_6 e transformando na forma de igualdade obtemos:

$$\Leftrightarrow \quad -12/7\, x_3 - 2/7\, x_5 \leq -6/7 \quad \Leftrightarrow \quad -12/7\, x_3 - 2/7\, x_5 + x_6 = -6/7$$

Introduzindo no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
	$\underline{c}$	3	6	0	0	0	0	
x_1	3	1	0	1	0	0	0	10
x_4	0	0	0	2/7	1	-2/7	0	29/7
x_2	6	0	1	-2/7	0	2/7	0	20/7
X_6	6	0	0	-12/7*	0	-2/7	1	-6/7 $\Leftarrow$
$z_j - c_j$		0	0	9/7	0	12/7	0	330/7
				$\Uparrow$				

	$\underline{C}$	3	6	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_1	3	1	0	0	0	-1/6	7/12	19/2
x_4	0	0	0	0	1	-1/3	1/6	4
x_2	6	0	1	0	0	1/3	-1/6	3
x_3	0	0	0	1	0	1/6	-7/12	1/2
$z_j - c_j$		0	0	0	0	3/2	3/4	93/2

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos em zj-cj

=> $\underline{x}'^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (19/2, 3, 1/2, 4, 0, 0)$ com $z'^* = 93/2$

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIM!

=> Na solução obtida x_2 assume valor inteiro!

$x_2 = 3$ (satisfaz a restrição de integralidade)

Interpretação Gráfica:

Maximizar $z = 3\,x_1 + 6\,x_2$

s.a

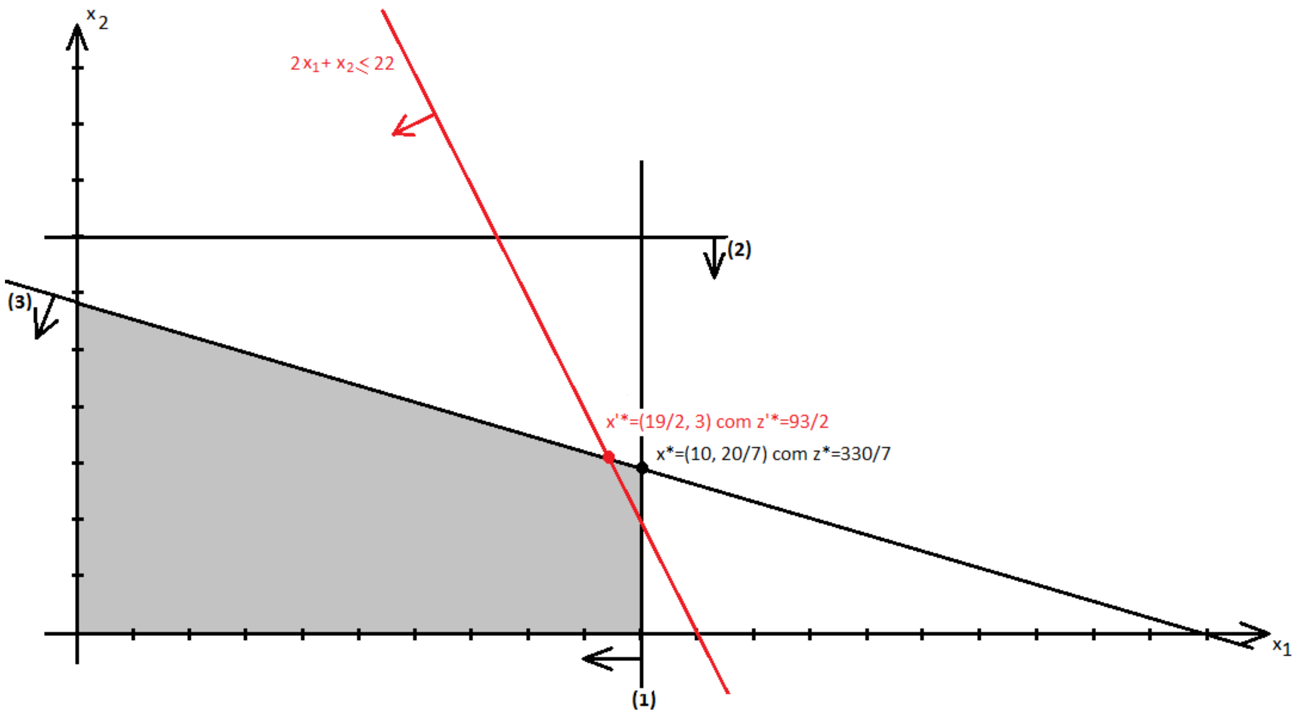
$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1 + 7/2\,x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

x_2 inteiro



Plano de corte:

$$12/7\ x_3 + 2/7\ x_5 \geq 6/7 \quad \Leftrightarrow \quad 12\ x_3 + 2\ x_5 \geq 6$$

Como

$$x_3 = 10 - x_1 \quad \text{e} \quad x_5 = 20 - x_1 - 7/2\ x_2$$

temos

$$12\ (10 - x_1) + 2\ (20 - x_1 - 7/2\ x_2) \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 - 12x_1 + 40 - 2x_1 - 7x_2 \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -14x_1 - 7x_2 \geq -154 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2x_1 + x_2 \leq 22}$$

4 – Algoritmo de *Branch and Bound*

- Está na base de muitas implementações computacionais que resolvem problemas de PLI (incluindo a biblioteca PuLP de Python).

- Consiste na **partição** (ramificação) sucessiva do conjunto de soluções admissíveis do problema de PLI em subconjuntos, e na **limitação** do valor ótimo da função objetivo (limite inferior se for uma maximização, ou superior se for uma minimização), de modo a excluir os subconjuntos que não contenham a solução ótima.

- Para demostrar o funcionamento deste método, considere-se o seguinte exemplo adaptado de:

  Alves, Rui & Delgado, Catarina. (1997). Programação Linear Inteira.

Uma empresa de brinquedos, decidiu criar uma nova secção de brinquedos tradicionais de madeira, começando por apenas dois tipos: cavalos de baloiço (lucro unitário de ***2400*** *UM) e comboios antigos (lucro unitário de* ***1500*** *UM). Cada cavalo requer* ***1*** *hora de trabalho e* ***9*** *m^2 de madeira, enquanto cada comboio requer* ***1*** *hora de trabalho e* ***5*** *m^2 de madeira. Supondo que estão disponíveis* ***6*** *horas de trabalho e* ***45*** *m^2 de madeira por dia, que quantidades deve a empresa fabricar diariamente de forma a maximizar o lucro (assumindo que todos os brinquedos fabricados serão vendidos).*

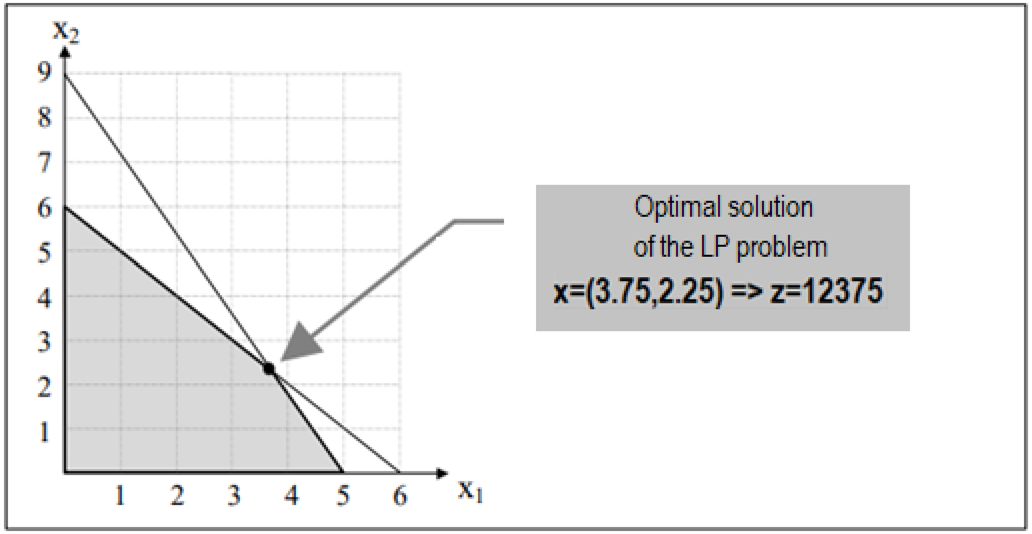
- O modelo de PLI será:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0 \\
&\quad x_1 \text{ e } x_2 \text{ inteiros}
\end{aligned}$$

- O primeiro passo consiste na resolução do modelo de PL associado (relaxação linear do modelo de PLI), a qual resulta no seguinte quadro do *simplex*:

		2400.0	1500.0	0.0	0.0	
		x1	x2	x3	x4	b
x2	1500.0	0.0	1.0	2.2	-0.2	2.25
x1	2400.0	1.0	0.0	-1.2	0.2	3.75
zj-cj		0.0	0.0	375.0	225.0	12375.00

- O mesmo resultado pode visualizar-se no gráfico seguinte:



- É claro que o valor ótimo da função objetivo não pode exceder **12375**.

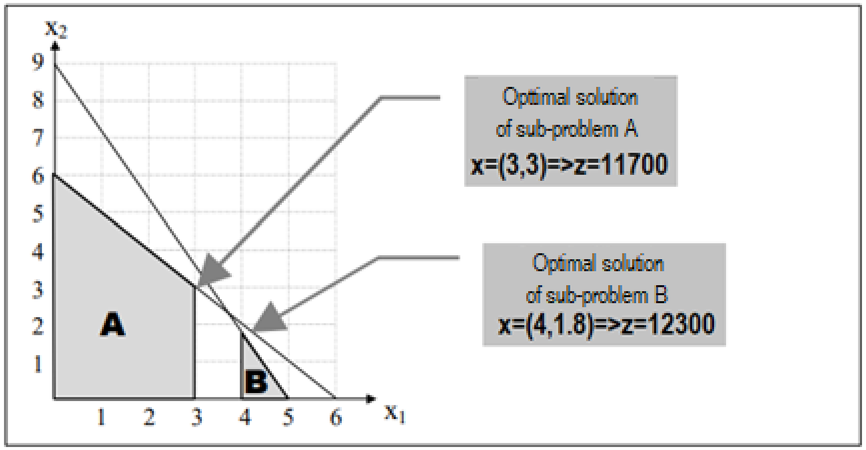
- Como x_1 e x_2 não são inteiras na solução ótima deste problema, é necessário efetuar a sua partição em dois novos sub-problemas (**A** e **B**), através da introdução de novas restrições que eliminam soluções não-inteiras: $\mathbf{x_1 \leq 3}$ e $\mathbf{x_1 \geq 4}$. A partição podia ter sido feita em relação a x_2.

- **A:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + \ \ x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \le 3 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

- **B:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + \ \ x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \ge 4 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$



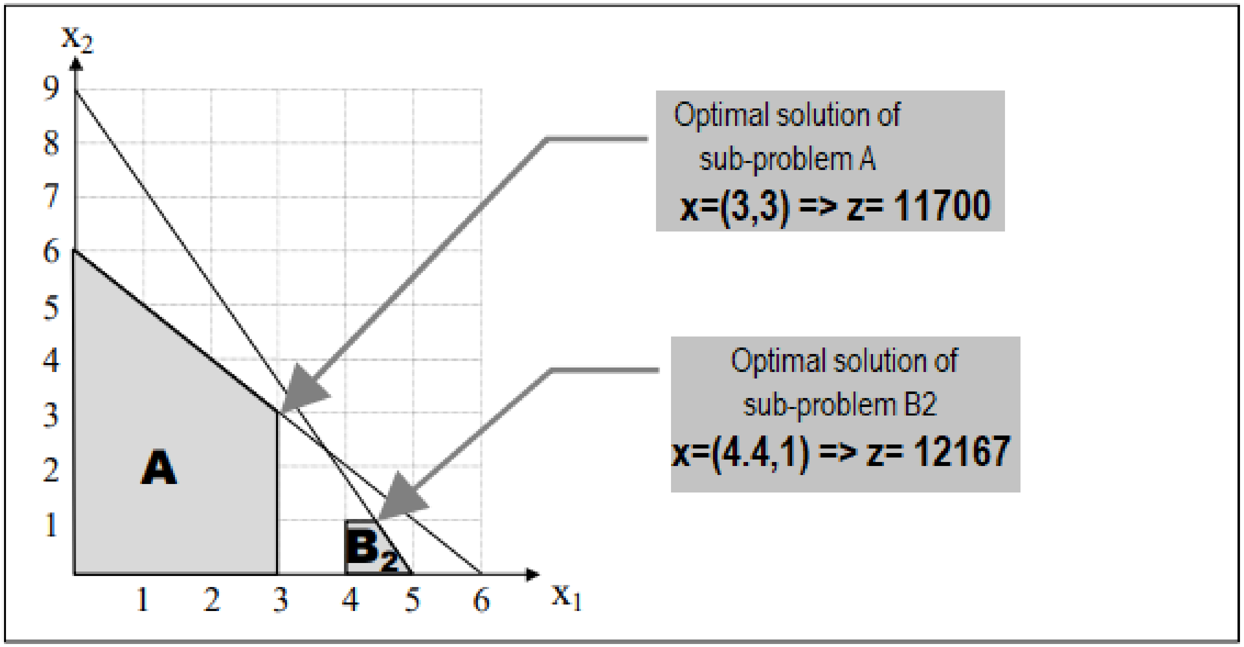
- A solução ótima de **A** é inteira, o que significa que se encontrou uma solução inteira cujo valor da função objetivo é **11700**.
- O valor ótimo da função objetivo estará então compreendido entre dois limites: $\mathbf{11700 \leq z \leq 12375}$.
- A solução ótima de **B** não é inteira e o valor da função objetivo é **12300** (>**11700**) $\Rightarrow$ este sub-problema pode conter uma solução inteira melhor do que a de **A**.
- Há pois que efetuar a sua partição nos sub-problemas **B1** e **B2**, através das restrições: $\mathbf{x_2 \leq 1}$ e $\mathbf{x_2 \geq 2}$.

- **B1:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \ge 4 \\
&\quad x_2 \ge 2 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

- **B2:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \ge 4 \\
&\quad x_2 \le 1 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$



- O sub-problema **B1** é excluído por não ter soluções possíveis.
- O sub-problema **B2** (à semelhança do sub-problema **B**), é particionado nos sub-problemas **B21** e **B22**, através da introdução das restrições: $\mathbf{x1 \leq 4}$ e $\mathbf{x1 \geq 5}$.

- **B21:**

$$\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2$$

sujeito a

$x_1 + x_2 \leq 6$ (Horas de trabalho)

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$ (Madeira)

$x_1 \geq 4$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\boxed{x_1 = 4}$

- **B22:**

$$\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2$$

sujeito a

$x_1 + x_2 \leq 6$ (Horas de trabalho)

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$ (Madeira)

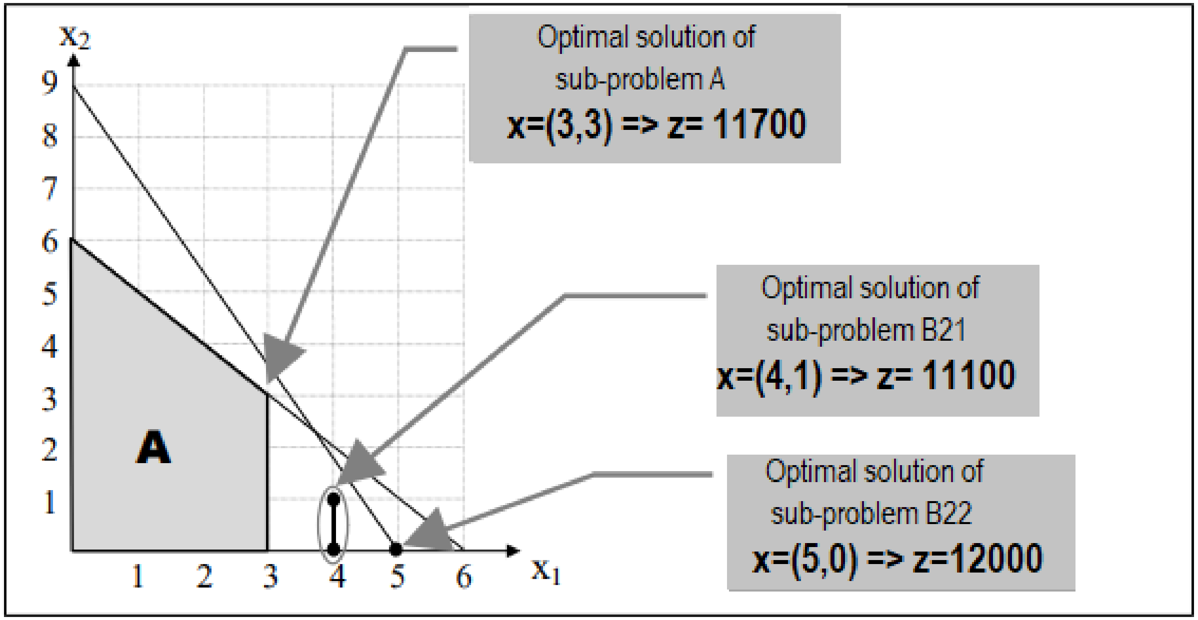
$x_1 \geq 4$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

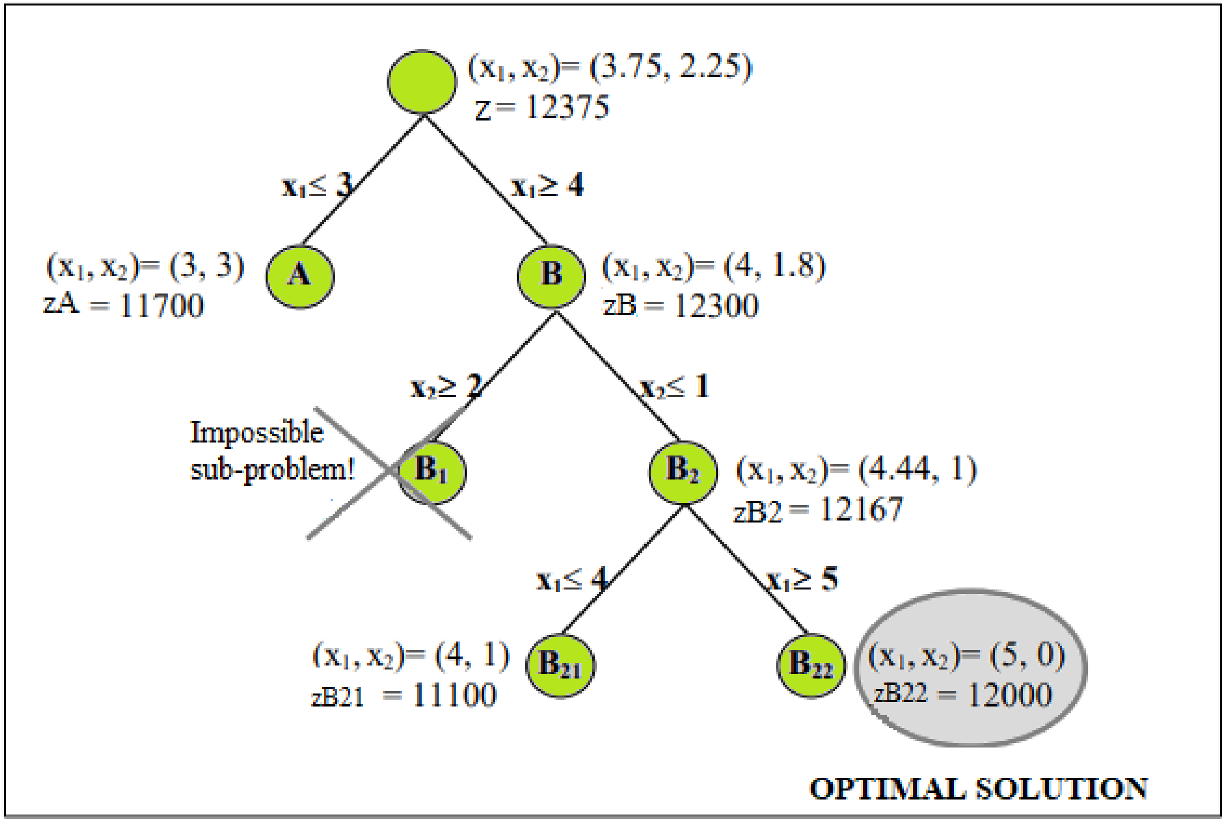
$\boxed{x_1 \geq 5}$



- Os sub-problemas **B21** e **B22** têm ambos soluções inteiras.
- O valor ótimo da função objetivo do sub-problema **B21** é **11100**, menor que **11700**, ou seja, pior do que a solução de que já tínhamos.
- O valor ótimo da função objetivo do sub-problema **B22** é **12000.**
- Atualizando os limites da função objetivo obtemos então:

$$\mathbf{12000 \leq z \leq 12000.}$$

- O seguinte diagrama em árvore, ilustra a sequência total das partições.



- À medida que se vai “descendo” na árvore vão-se atualizando os limites inferior e superior do valor ótimo da função objetivo (z*).
    - No nó inicial (raiz da árvore): $0 \leq z^* \leq 12375$.
    - No nível dos sub-problemas **A** e **B**: $11700 \leq z^* \leq 12300$.
    - No terceiro nível: $11700 \leq z^* \leq 12167$.
    - Finalmente, no último nível: $12000 \leq z^* \leq 12000$.
- Podemos então concluir que **x*= (5,0)** com **z* = 12000**, é a **solução ótima do problema**.

- Note-se que:
  - É efetuada a partição de um sub-problema se na sua solução ótima existir pelo menos uma variável com restrição de integralidade que assuma valores não-inteiros, desde que esse sub-problema possa conter uma solução inteira melhor do que a já existente.
  - São excluídos os sub-problemas que não tenham soluções admissíveis ou que não possam conter uma solução admissível melhor do que a já existente.

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo III

Programação Linear Multi-objetivo

1 – Decisão Multi-objetivo

Decidir consiste em **escolher "boas" soluções** entre várias alternativas viáveis ou cursos de ação.

Cada vez mais o decisor é forçado a considerar **grande variedade de critérios/objetivos** para avaliar as diferentes alternativas viáveis.

O decisor é confrontado com a exigência da escolha da **melhor solução de compromisso**, que corresponde a um balanço entre os vários objetivos considerados, geralmente conflituosos.

A **Decisão Multi-objetivo** (DMO) constitui uma área à qual tem sido dada grande atenção, por ter como finalidade auxiliar o decisor na **pesquisa da melhor solução de compromisso** na presença de **múltiplos critérios de otimização**.

Existem vários métodos de DMO, entre os quais:

- **Programação Linear Multi-objectivo (PLMO)** (neste capítulo)
- **Programação por Metas** (capítulo seguinte)

A Decisão Multi-objetivo, abrange os problemas de decisão com pelo menos dois objetivos. O problema geral de DMO pode expressar-se matematicamente da seguinte forma:

Maximizar (Minimizar) Z =

$$= [\ z_1(x_1, x_2, ...,x_n), z_2(x_1, x_2, ...,x_n), ..., z_p(x_1, x_2, ...,x_n)\ ]$$

sujeito a

$$g_1(x_1, x_2, ... ,x_n) \{\leq, =, \geq\}\ b_1$$
$$g_2(x_1, x_2, ... ,x_n) \{\leq, =, \geq\}\ b_2$$
$$...$$
$$g_m(x_1, x_2, ... ,x_n) \{\leq, =, \geq\}\ b_m$$
$$x_j \geq 0, j=1,2,...,n$$

em que z_1, z_2,..., z_p designam as *p* funções objetivo.

- Nos problemas de decisão com **um único objetivo**, o que se procura é a **solução ótima**, isto é, a solução admissível que maximiza (minimiza) a função objetivo. Mesmo que existam soluções ótimas alternativas, o valor ótimo da função objetivo (z*) é o mesmo. O conceito chave é o **ótimo**.

- Em problemas de decisão com **múltiplos objetivos**, este conceito não é aplicável pois uma solução admissível que otimiza um dos objetivos, não otimiza, em geral, os restantes objetivos.

- Neste tipo de problemas, o conceito de solução ótima dá lugar ao conceito de **solução eficiente** ou de **solução não dominada** (que é um **subconjunto** do conjunto das soluções admissíveis).

- Uma **solução eficiente** ou **não dominada** (a distinção entre ambas será feita mais à frente) caracteriza-se pelo facto de não existir outra solução admissível que melhore simultaneamente todas as funções objetivo. Ou seja, a melhoria de uma função objetivo só pode ser atingida à custa da deterioração do valor de pelo menos uma das outras funções objetivo do modelo.

- Na resolução de um **problema com um único objetivo** a solução ótima é perfeitamente determinada pelo algoritmo de otimização.

- Num **problema multi-objetivo**, a resolução do modelo matemático permite determinar um **conjunto de soluções eficientes ou não dominadas** que, no entanto, não são comparáveis. Ou seja, o algoritmo de resolução aplicado não as classifica como boas ou como más. Deste modo, torna-se necessário ter em conta as preferências do decisor.

- Então, é necessário fornecer ao decisor informação sobre o domínio no qual este pode exercer a sua escolha quanto ao curso de ação a seguir - **conjunto das soluções eficientes / não dominadas**.

- Esta informação pode ser apresentada sob a **forma gráfica** ou sob a **forma tabular**.

- Tomando por base tal informação e de acordo com as suas preferências, o decisor escolherá então uma solução (normalmente não dominada) que se designa por **melhor solução de compromisso**.

2 - Programação Linear Multiobjectivo

Caso particular do problema geral apresentado atrás, é aquele em que as *p* funções objectivo e as *m* restrições são funções lineares. Tem-se então a seguinte forma típica:

Maximizar **Z** $=[Z_1, Z_2, \ldots, Z_p] = \left[\sum_j c_j^1 x_j, \sum_j c_j^2 x_j, \ldots, \sum_j c_j^p x_j\right]$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&x_j \geq 0, \ j=1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Nota: *A forma típica considerada não implica perda de generalidade, pois mediante operações convenientes, qualquer problema pode tomar esta forma.*

- Em problemas com um único objetivo, as soluções admissíveis do espaço das variáveis de decisão, $\mathbf{x} \in K$ (K = *região admissível*), são mapeadas em $\Re^n$ (assumindo *n* variáveis de decisão).

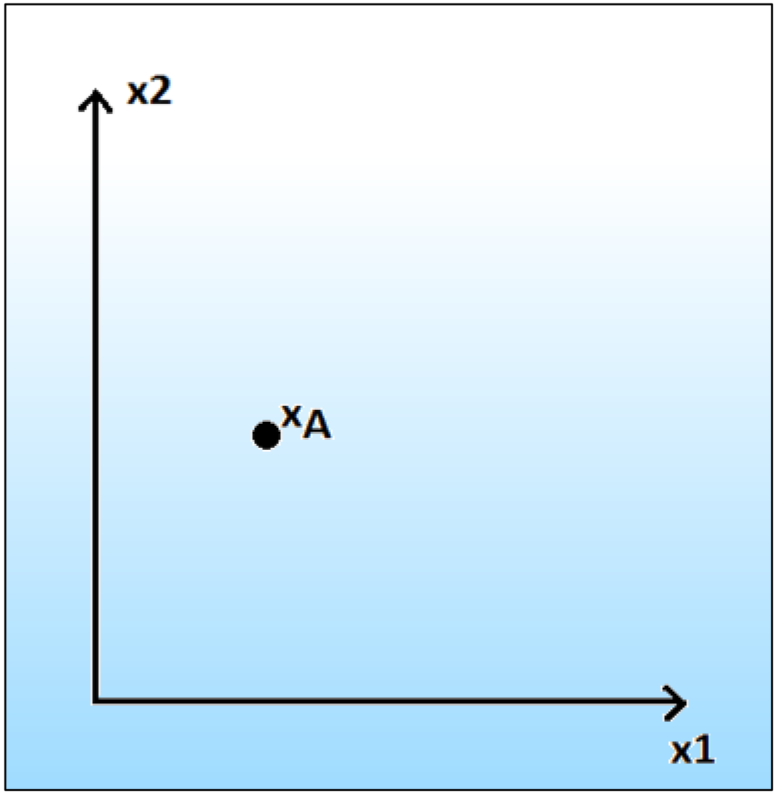
- Em problemas multi-objetivo o espaço de decisão é mapeado num espaço *p*-dimensional denominado **espaço dos objetivos**.

- Neste espaço, uma solução admissível **x** do espaço das variáveis de decisão é representada por um vetor

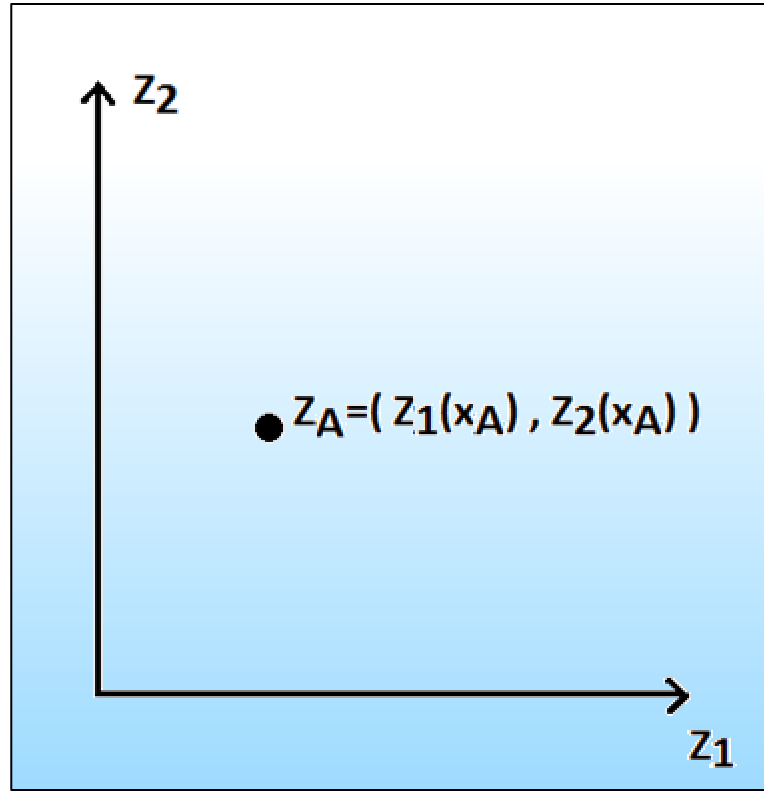
$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \ldots, z_p(\mathbf{x}))$$

Os elementos do vetor são os valores assumidos pelas *p* funções objetivo, no ponto **x** da região admissível.

Exemplo, considerando que existem n=2 variáveis de decisão e p=2 funções objetivo:



Espaço de decisão



Espaço dos objectivos

Definição 1:

Uma solução $\mathbf{x} \in K$ é **eficiente** se e só se não existir uma outra solução $\mathbf{y} \in K$ tal que $f_k(\mathbf{y}) \geq f_k(\mathbf{x})$ para todo o k=1, …, p , sendo que, para pelo menos um valor de k, $f_k(\mathbf{y}) > f_k(\mathbf{x})$.

A solução **Z** – imagem da solução **x** no espaço das funções objetivo – é **não dominada**, se e só se **x** for uma **solução eficiente**.

O conceito de **eficiência** é relativo ao espaço das variáveis de decisão.

O conceito de **não dominância** é relativo ao espaço das funções objetivo.

A imagem de uma **solução eficiente** é uma **solução não dominada.**

Definição 2:

Sejam $\mathbf{x}\in K$ e $\mathbf{y}\in K$ duas soluções admissíveis de um problema de DMO. As duas soluções dizem-se **não comparáveis** se não se verificar a dominância de $Z(\mathbf{x})$ por $Z(\mathbf{y})$ nem a dominância de $Z(\mathbf{y})$ por $Z(\mathbf{x})$ (sendo $Z(\mathbf{x})=[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_p(\mathbf{x})]$ e $Z(\mathbf{y})=[f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}),\ldots,f_p(\mathbf{y})]$).

As **soluções eficientes / não dominadas** são **não comparáveis**.

Exemplo 1 (*)

A Direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário de escritório, sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos actuais.

A mesma Direcção não vê dificuldade de colocação no mercado para as estantes, enquanto que aconselha a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as **160** unidades.

(*) *Retirado de* **"Programação Linear", Volume I**
Ramalhete, M. , Guerreiro, J. , Magalhães A.

Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, concluiu-se que:

- A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de **720** Horas-Máquina (H-M);
- A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de **880** Horas-Homem (H-H);
- Cada secretária necessita de **2** H-M de Estampagem e de **4** H-H de Montagem e Acabamento;
- Cada estante necessita de **4** H-M de Estampagem e de **4** H-H de Montagem e Acabamento.

Por outro lado, os lucros unitários estimados são de **6000** UM (unidades monetárias) para as secretárias e de **3000** UM para as estantes.

A empresa pretende determinar qual o plano de produção mensal para os novos produtos que maximiza o lucro.

Modelo matemático:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } z = \ & 6x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeito a } \ & 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\
& x_1 \qquad\quad\ \ \leq 160 \\
& x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A empresa estabeleceu anteriormente, como objetivo único, **maximizar** o **lucro**.

Admita-se que a empresa pretende criar espaço para no futuro poder vir a lançar outros produtos. Admita-se que, por outro lado, por cada secretária produzida do novo modelo, são economizados **20** minutos do tempo de produção (em relação ao modelo antigo) e que, por cada estante produzida do novo modelo, essa economia é de **30** minutos (também em relação ao modelo antigo). Dada a impossibilidade de expansão da empresa em termos de capacidade de produção nos tempos mais próximos, é natural que esta também pretenda **maximizar as economias de tempo de processamento** que permitirão equacionar a produção de novos produtos.

O problema é agora de **programação linear multi-objetivo** (PLMO):

Modelo matemático:

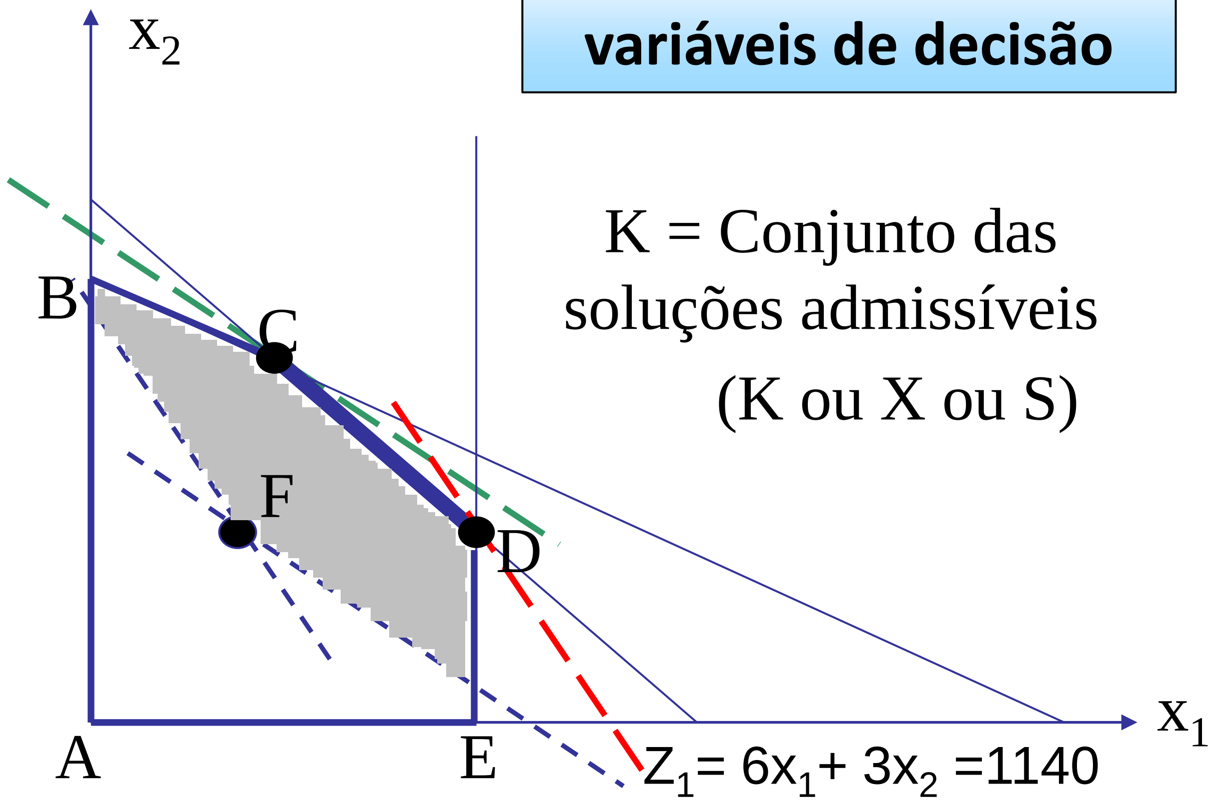
$$\text{Maximizar } \mathbf{Z} = [z_1, z_2] = [\,6x_1 + 3x_2,\ 20x_1 + 30x_2]$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\ & x_1 \qquad\quad \leq 160 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolução gráfica:

Espaço das variáveis de decisão

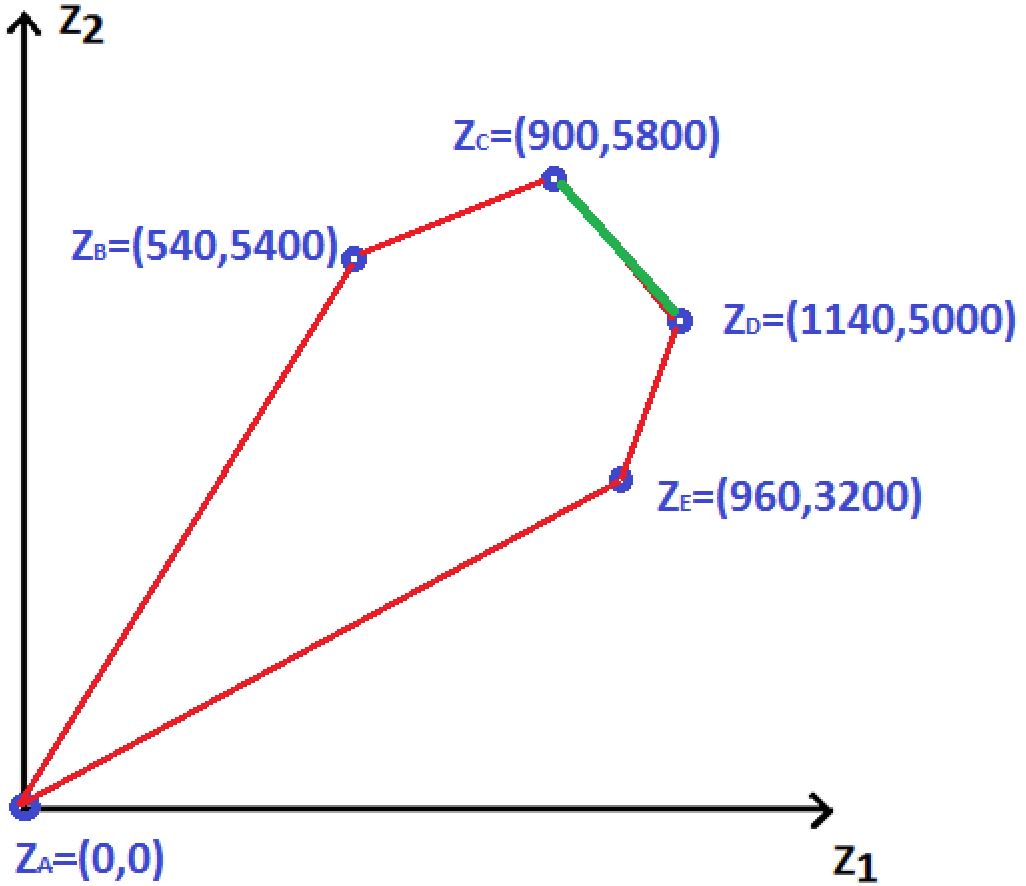
$z_2 = 20x_1 + 30x_2 = 5800$



K_E - Conjunto das soluções eficientes

Resolução gráfica:

Espaço dos objetivos



K_{ND}[1] - Conjunto das soluções não dominadas

[1] Alguns autores denominam K_{ND} apenas por K_D

Através da representação gráfica em ambos os espaços de decisão e dos objetivos, obtém-se:

- O ponto **C** otimiza a função objetivo $\mathbf{z_2}$ e é solução eficiente, pois não existe nenhuma outra solução que otimize a função objetivo $\mathbf{z_1}$ sem piorar $\mathbf{z_2}$.

- O ponto **D** otimiza a função objetivo $\mathbf{z_1}$ e é solução eficiente, pois não existe nenhuma outra solução que otimize a função objetivo $\mathbf{z_2}$ sem piorar $\mathbf{z_1}$.

Para determinar o conjunto das soluções eficientes:

- Considere-se uma determinada solução admissível **F** no espaço das variáveis de decisão (pág.19). Qualquer uma das soluções admissíveis da zona cinzenta dominam a solução **F** (em qualquer dessas soluções da zona cinzenta verifica-se a melhoria de pelo menos uma das funções objetivo relativamente a **F**). Este raciocínio pode estender-se a todos os pontos da região admissível, nomeadamente aos pontos extremos **C** e **D**, e restantes pontos da aresta **CD**.

- Alternativamente, recorre-se aos **cones de dominância.** Sobre qualquer ponto de uma aresta de **K** coloca-se o vértice do cone. Se a interseção do cone com **K** for simplesmente o vértice, esse ponto constitui uma solução eficiente. O mesmo raciocínio aplica-se aos restantes pontos das arestas.

- O conjunto das soluções eficientes - $\mathbf{K_E}$ - é constituído pela aresta **CD**, incluindo os pontos extremos **C** e **D**. (Qualquer ponto da aresta **CD** pode ser obtido como **combinação linear convexa dos pontos C e D**.)
- O conjunto das soluções não dominadas - $\mathbf{K_{ND}}$ - é constituído pela aresta $\mathbf{Z_C Z_D}$ incluindo os extremos $\mathbf{Z_c}$ e $\mathbf{Z_D}$.
- As soluções **C** e **D** são não comparáveis (nenhuma delas domina a outra), assim como quaisquer 2 pontos sobre a aresta **CD**.

Definição 3:

Designa-se por **solução ideal** - $\mathbf{Z}_{ideal}=(Z_1^*, Z_2^*, \ldots, Z_p^*)$ - a solução que otimizaria simultaneamente todas as funções objetivo – é um vetor cujos componentes são o ótimo de cada função objetivo quando otimizadas separadamente.

O vetor com os piores valores assumidos pelas diversas funções objetivo (na região eficiente) designa-se por **solução anti-ideal** - $\mathbf{Z}_{\textbf{anti-ideal}}$.

As soluções **ideal** e **anti-ideal** são muitas vezes usadas pelo decisor na determinação da melhor solução de compromisso (menor distância à solução ideal ou maior distância à solução menos favorável).

Em geral, a **solução ideal** - $\mathbf{Z}_{ideal}$ (=Z*) não pertence à região admissível, embora cada Z_r* seja individualmente alcançável. Além disso, pode não haver solução x* cuja imagem seja o ponto ideal.

A solução anti-ideal corresponde à solução no espaço dos objetivos cujas componentes são os piores valores de cada função objetivo na região eficiente.

Para determinar as soluções ideal e anti-ideal, constrói-se a **tabela de ótimos individuais** (ou tabela de *pay-off*):

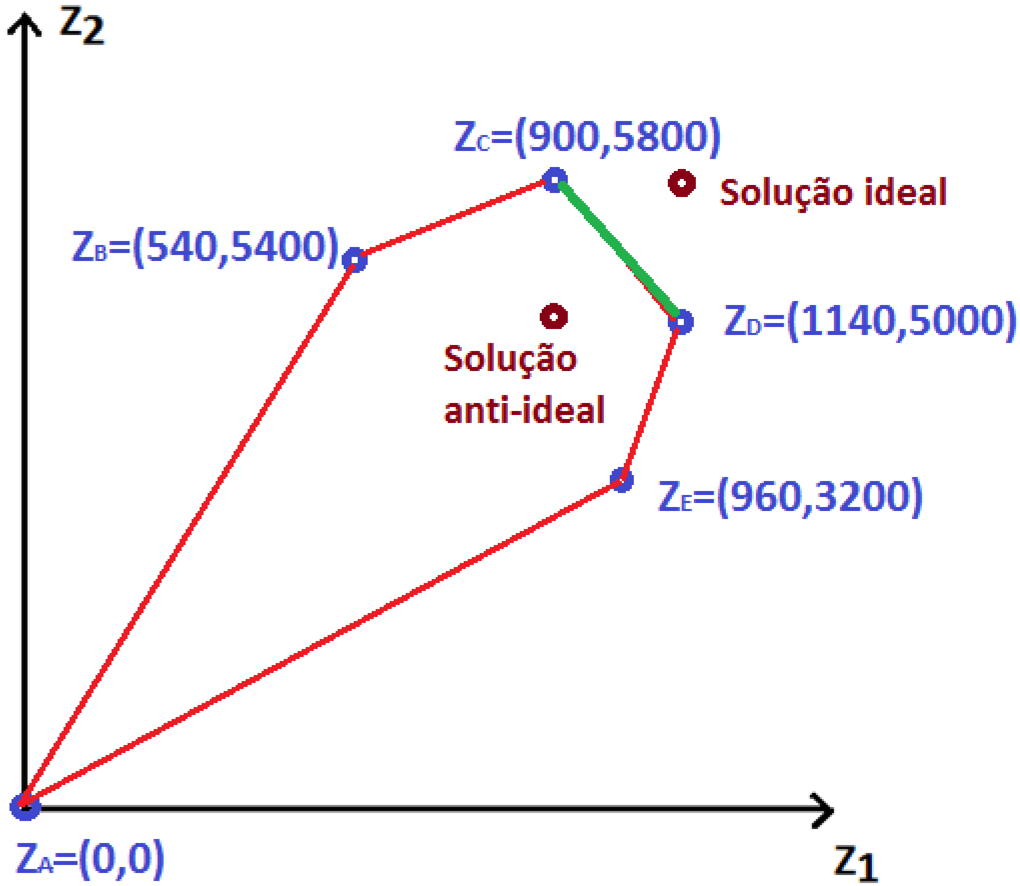
	z_1	z_2
Ótimo de z_1: Ponto D = (x_1,x_2) = (160, 60)	1140	5000
Ótimo de z_2: Ponto C = (x_1,x_2) = (80, 140)	900	5800

$$\mathbf{Z_{ideal} = (z_1, z_2) = (1140, 5800)}$$

$$\mathbf{Z_{anti\text{-}ideal} = (z_1, z_2) = (900, 5000)}$$

Resolução gráfica:

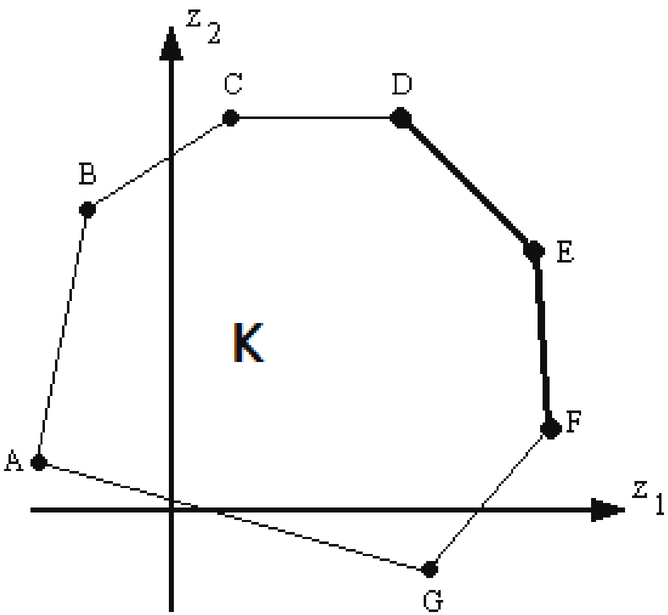
Espaço dos objetivos



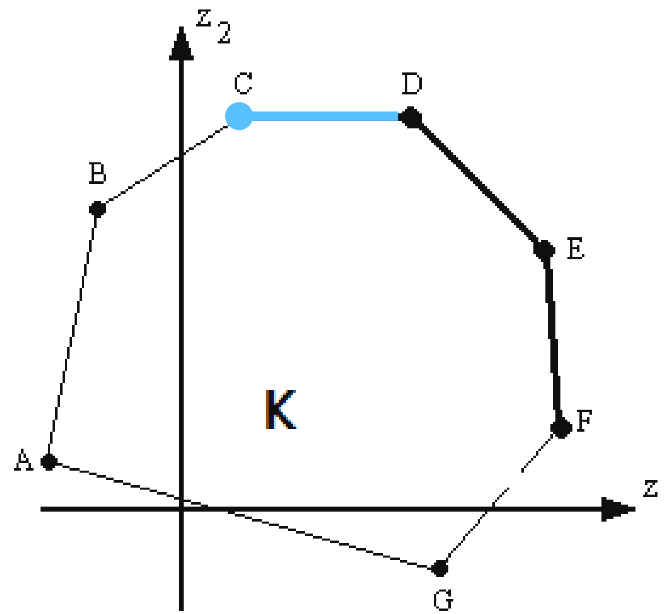
Em situações práticas, mais do que o conhecimento de todas as soluções eficientes, é importante identificar uma **solução de compromisso satisfatória**.

Esta denominação pretende traduzir a ideia de que se trata de uma solução eficiente, à qual se encontra associado um determinado compromisso entre as funções objetivo, assumindo estas funções valores satisfatórios para o decisor, de tal forma que a **solução** é **aceitável como solução final do processo de decisão**.

Solução fracamente eficiente / fracamente não dominada:



K_E = *Soluções eficientes*
K_{ND} = *Soluções não dominadas*



K_{FE} = *Soluções fracamente eficientes*
K_{FND} = *Soluções fracamente não dominadas*

Colocando o vértice de um cone de dominância sobre um determinado ponto de uma aresta de **K**, conclui-se que esse ponto corresponde a uma solução fracamente eficiente quando a interseção do cone com a região **K** não é apenas o vértice do cone, mas também parte da aresta do mesmo.

A uma **solução fracamente eficiente**, corresponde uma **solução fracamente não dominada**.

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo III

- Anexo 2 -

Resolução de problemas de PLMO

Considere o seguinte problema:

“Numa determinada empresa existem dois processos produtivos, ambos fabricando três tipos de *toners* (que designaremos por **T1**, **T2**, **T3**) para impressoras / fotocopiadoras, com grande procura no mercado.

No primeiro processo, cada Kg de matéria-prima dá origem a **20** unidades do *toner* **T1**, **40** unidades do *toner* **T2** e **40** unidades do *toner* **T3**, resultando **50** gramas de um resíduo poluente.

No segundo processo, gastando o mesmo Kg de matéria-prima, obtêm-se **30** unidades do *toner* **T1**, **10** unidades do *toner* **T2**, **20** unidades do *toner* **T3** e são geradas **25** gramas do mesmo resíduo poluente.

A empresa dispõe de **2500** Kg de matéria-prima e deve satisfazer encomendas de **30000** unidades do *toner* **T1**, **40000** unidades do *toner* **T2** e **50000** unidades do *toner* **T3**.”

- **Formule o problema** como um de **programação linear** de modo a **maximizar a quantidade de matéria-prima usada no primeiro processo produtivo** e a **minimizar a quantidade produzida de resíduo poluente**.
- Determine o **conjunto das soluções (estrita ou fracamente) eficientes**, o **conjunto das soluções não dominadas** e as **soluções ideal e anti-ideal**.

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo IV

Programação por Metas

(Goal Programming)

Programação por Metas (Goal Programming)

Na generalidade dos problemas reais de decisão é necessário incorporar **múltiplos objectivos**

Na **programação por metas (*goal programming*)**, o agente de decisão **especifica** as **<u>metas</u>** que pretende atingir para cada um dos objetivos (bem como, **eventualmente**, as respetivas **<u>prioridades</u>)**

Meta = valor desejável

Podem ser consideradas **metas** em que se pretende:

- **Atingir tanto quanto possível** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado);

- **Igualar ou ultrapassar** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado);

- **Ficar aquém ou igualar** um determinado valor ***g*** (em relação ao objetivo considerado).

Solução de um problema de Programação por Metas

➢ *Solução ótima*

- Quando satisfaz TODAS as metas.

➢ *Melhor solução de compromisso*

- Quando ***minimiza*** <u>os desvios (ou folgas) dos objetivos</u> em relação às metas estabelecidas;
- Corresponde a um balanço entre os vários objetivos considerados, os quais são geralmente conflituosos.

Com vista a uma melhor compreensão deste tipo de problemas, começa-se pela apresentação de alguns exemplos simples e formulação matemática dos modelos correspondentes.

Seguidamente, esses exemplos serão resolvidos pelo método gráfico.

Formalização de problemas de Programação por Metas

A formalização de um problema de acordo com o modelo de Programação por Metas tem várias etapas:

1ª. Definição das **variáveis de decisão** e especificação das **metas**:

Esta tarefa consiste em definir as variáveis que o decisor pode controlar e também as metas que se pretende atingir.

2ª. Formalização das **restrições**:

É a tarefa de expressar as relações existentes entre as variáveis de decisão, e entre estas e as metas a atingir.

3ª. Formalização da **função objetivo**:

Esta deve traduzir o posicionamento do decisor face às diferentes metas, quer em termos de graus prioridade associados a cada meta, quer em termos de ponderação relativa das metas com igual prioridade.

Exemplo 1

A Direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário de escritório, sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos atuais.

A mesma Direcção não vê dificuldade de colocação das estantes no mercado, mas aconselha a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

(*) *Retirado de* **“Programação Linear”, I Volume**
Ramalhete, M. , Guerreiro, J. , Magalhães A.

Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, concluiu-se que:

- ☞ A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 Horas-Máquina (H-M);
- ☞ A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 H-M;
- ☞ Cada secretária necessita de 2 H-M de Estampagem e de 4 H-M de Montagem e Acabamento;
- ☞ Cada estante necessita de 4 H-M de Estampagem e de 4 H-M de Montagem e Acabamento.

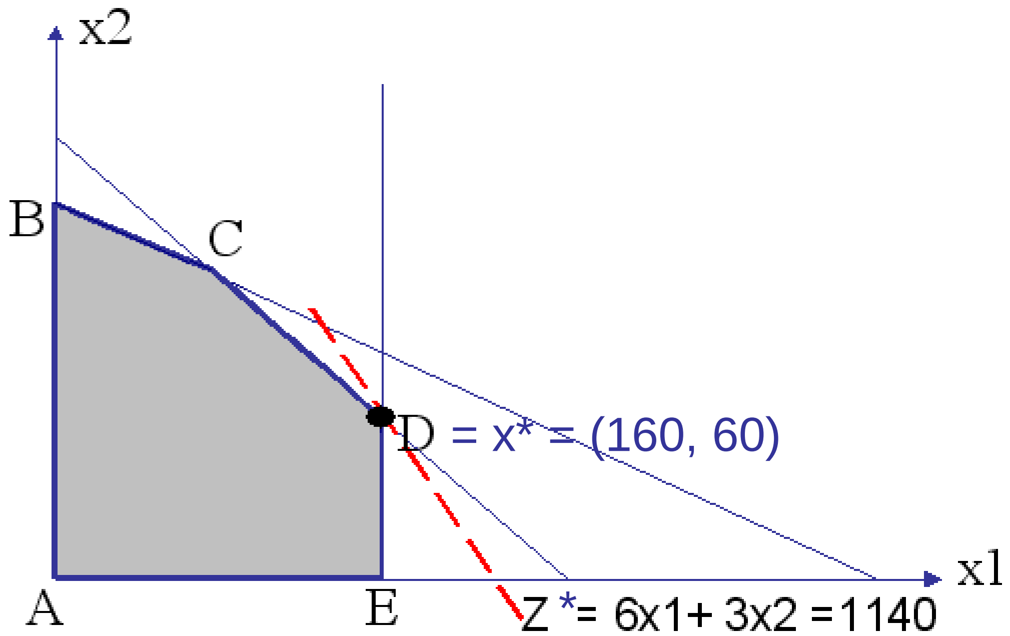
Por outro lado, os lucros unitários estimados são de 6 UM (unidades monetárias) para as secretárias e 3 UM para as estantes.

A empresa pretende determinar qual o plano de produção mensal dos novos produtos que maximiza o lucro.

Sejam x_1 e x_2 o nº de secretárias e de estantes a produzir mensalmente.

Modelo matemático:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 \\
&\text{sujeito a} \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\
&\qquad\qquad\quad 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\
&\qquad\qquad\quad x_1 \qquad\quad\; \leq 160 \\
&\qquad\qquad\quad x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



A solução ótima x_1*=160 e x_2 *= 60, indica o nº de secretárias e de estantes a produzir por mês, respetivamente.

Esta produção resulta para a empresa num lucro mensal de 1140 UM.

No exemplo anterior, a empresa estabeleceu como objetivo a maximização do lucro, o que conduziu a um problema de Programação Linear mono-objetivo. Contudo, neste momento a empresa enfrenta alguns problemas a nível de reorganização, pelo que não é realista o objetivo de maximização do lucro. A Administração entende que é preferível a fixação da **meta de 900 UM para o valor do lucro mensal** enquanto decorre a reorganização da empresa.

Está-se agora em presença de um problema de Programação por Metas. A questão é:

Como incorporar a meta fixada pela Administração no modelo matemático?

Definam-se as seguintes variáveis:

d_1^- - a folga por defeito (desvio negativo) relativamente à meta fixada, isto é, em quanto é que o lucro obtido fica aquém do valor especificado como meta

d_1^+ - a folga por excesso (desvio positivo) relativamente à meta fixada, isto é, em quanto é que o lucro obtido excede o valor especificado como meta

Então, a meta estabelecida para o lucro mensal pode ser expressa por:

$$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$$

Agora, esta equação pode ser incorporada como restrição no modelo.

As variáveis d_1^- e d_1^+ em qualquer solução, e particularmente na solução ótima, verificarão sempre o seguinte:

Se uma delas for positiva a outra é nula, podendo verificar-se a situação de ambas serem nulas.

Então:

- se d_1^- for positiva (e d_1^+ nula), a meta não foi atingida;
- se por outro lado d_1^+ for positiva (e d_1^- nula), a meta foi ultrapassada;
- se forem ambas nulas, a meta foi atingida.

A Administração, ao fixar aquela meta, pretende afinal que o lucro mensal se encontre **tão próximo quanto possível de 900 UM**.

Matematicamente, tal pode ser expresso por:

Minimizar z = $d_1^- + d_1^+$

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$ (***meta***)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- = 720$

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- = 880$

$x_1 + d_4^- = 160$

$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_3^-, d_4^- \geq 0$

As variáveis d_2^- , d_3^- e d_4^- são as variáveis folga (do tipo *slack*) necessárias à passagem do problema para a forma *standard*, pelo que não são incluídas na função objetivo.

Pelo contrário, as variáveis folga d_1^- e d_1^+ encontram-se incluídas nessa função, o que significa que a restrição respetiva representa uma meta do problema.

Exemplo 2

Vamos agora considerar que a Administração da empresa de mobiliário decidiu estabelecer mais do que uma meta. Vamos ainda supor que a mesma Administração é capaz de ordenar as várias metas por ordem de importância e que a meta mais importante tem prioridade absoluta sobre a meta seguinte, e assim sucessivamente. Assim, além da meta estabelecida no exemplo anterior correspondente à primeira prioridade, pretende-se ainda que **a capacidade do Departamento de Montagem e Acabamento seja utilizada em pleno**.

A formalização de acordo com o modelo de Programação por Metas é a seguinte:

Minimizar z = { ($d_1^- + d_1^+$) , d_3^- }

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 900$ (**meta**)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- = 720$

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 880$ (**meta**)

$x_1 + d_4^- = 160$

$x_1 , x_2 , d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_3^-, d_3^+, d_4^- \geq 0$

No modelo, x_1 , x_2 , d_1^-, d_1^+, d_2^- e d_4^- têm o significado já conhecido. Por outro lado, d_3^- e d_3^+, representam o *tempo de inatividade mensal* e o *tempo de trabalho extraordinário*(*) *mensal* do Departamento de Montagem e Acabamento.

A meta com prioridade absoluta inclui as variáveis d_1^- e d_1^+ , uma vez que a Administração pretende um lucro mensal tão próximo quanto possível de 900 UM, o que só poderá ser atingido minimizando ambas as folgas.

(*) *Admite-se que a disponibilidade do Departamento diz respeito a horário normal.*

Contudo, a meta secundária não inclui a variável d_3^+ , uma vez que a preocupação expressa foi apenas de reduzir ao mínimo o tempo de inatividade do departamento em questão.

Note-se que, na construção da função objetivo, começa-se pela meta com maior prioridade, depois pela meta com a segunda maior prioridade, e assim sucessivamente.

Exemplo 3

Considere que entretanto foi concluída a reorganização da empresa em causa. Neste momento, e dada a boa aceitação do novo modelo de secretária, a Direcção de Marketing da empresa aconselha que a **produção mensal deste artigo seja de 160 unidades**. Por outro lado, a Administração fixou em **1500 UM**, **a nova meta quanto ao lucro mensal**, admitindo o **recurso a trabalho extraordinário nos Departamentos de Estampagem** (DE) **e de Montagem e Acabamento** (DMA). Contudo, o funcionamento em horário extraordinário do DMA, custa à empresa o dobro do trabalho extraordinário do DE, em regime idêntico.

A administração da empresa estabeleceu os seguintes graus de prioridade:

Prioridade 1 -	Obter um lucro mensal de 1500 UM
Prioridade 2 -	Produzir mensalmente 160 secretárias
Prioridade 3 -	Reduzir ao mínimo o trabalho extraordinário no Departamento de Estampagem e no Departamento de Montagem e Acabamento

A formalização deste problema em termos de Programação por Metas

é a seguinte:

Minimizar z = $\{(d_1^- + d_1^+),\ (d_4^- + d_4^+),\ (d_2^+ + 2d_3^+)\}$

sujeito a

$6x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1500$ (**meta**)

$2x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 720$ (**meta**)

$4x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 880$ (**meta**)

$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 160$ (**meta**)

$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0$ (i=1,2,3,4)

Relativamente ao modelo anterior, note-se que a relação de custos em regime extraordinário dos dois departamentos, foi incluída na função objetivo, usando pesos diferentes para as metas com igual prioridade.

Assim, o modelo dará preferência ao trabalho extraordinário no Departamento de Estampagem, desde que tal não comprometa as metas com prioridade mais elevada.

Formulação Matemática do Modelo de Programação por Metas

Minimizar $Z = \{ h_1(D^-,D^+), h_2(D^-,D^+), ..., h_k(D^-,D^+) \}$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

$$x_j, \quad d_i^- \; , \; d_i^+ \quad \geq 0 \qquad (i = 1,2, ..., m \; ; \; j = 1,2, ..., n)$$

em que $D^- = [d_1^- , d_2^- , ..., d_m^-]'$, $D^+ = [d_1^+ , d_2^+ , ..., d_m^+]'$ e as *p* metas estabelecidas se agrupam em *k* graus de prioridade ($k \leq p$), de tal forma que cada meta se encontre incluída num e num só grau de prioridade.

As variáveis x_j constituem as variáveis de decisão do problema,

d_i^- e d_i^+ as folgas por defeito e por excesso relativamente a cada meta,

ou então as variáveis folga introduzidas para a passagem do problema

à forma *standard* (quando as restrições não correspondem a metas).

Portanto, o modelo apresentado contém dois tipos de restrições:

- **as que não correspondem a metas** (funcionais);
- **as que correspondem a metas** (especificadas pelo decisor).

A principal diferença entre elas é que, as primeiras **não podem ser violadas**, enquanto que as segundas devem ser **satisfeitas de forma tão aproximada quanto possível** (por excesso ou por defeito).

O objetivo neste modelo é minimizar as folgas entre os resultados obtidos e as metas estabelecidas, tendo em conta as prioridades e as ponderações dentro de cada prioridade.

Qualquer restrição respeitante a uma meta, tem a forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

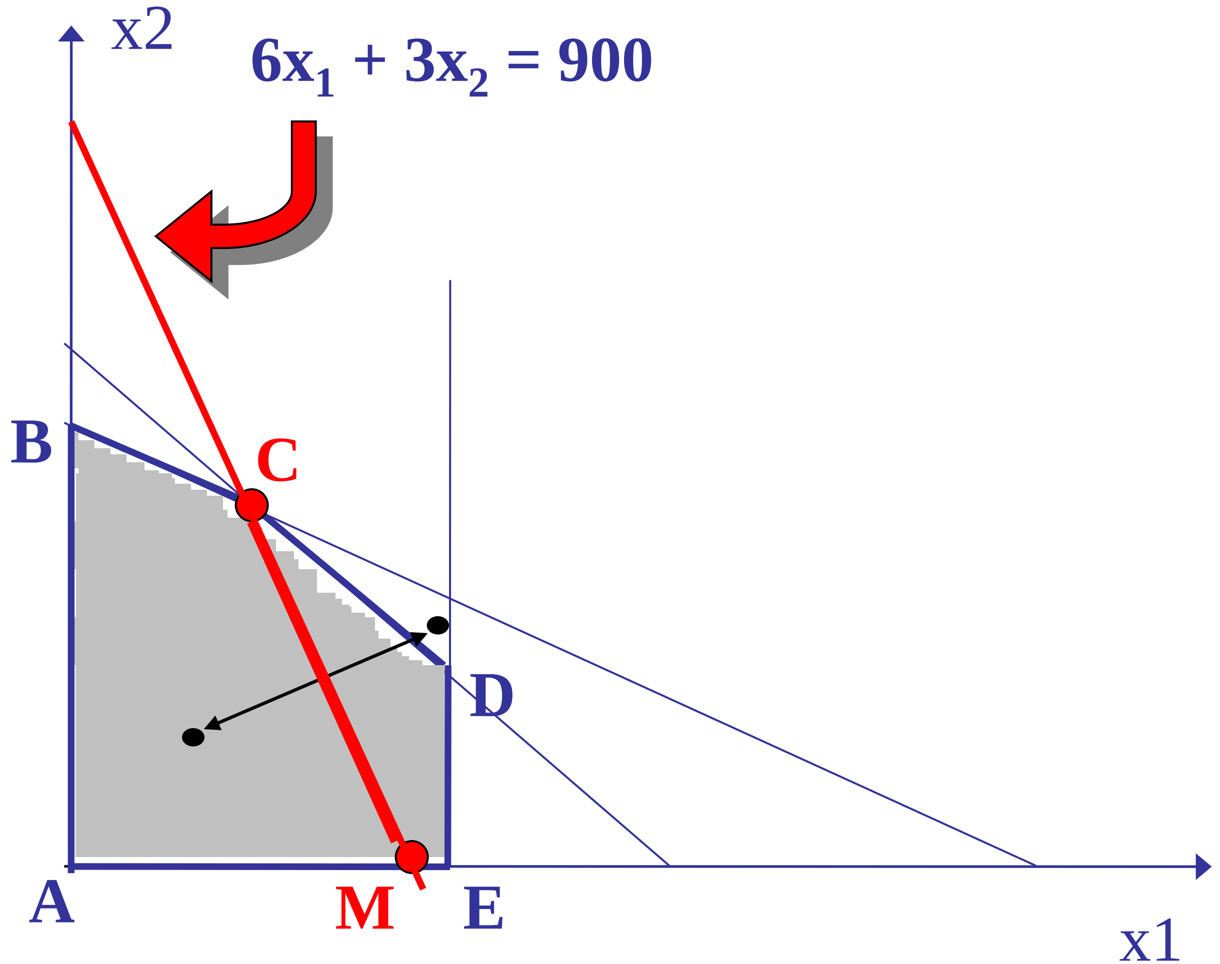
1) Se a meta for **atingir o valor b_i**, então há que proceder à minimização de $d_i^- + d_i^+$;

2) Se a meta for **igualar ou exceder o valor $\mathbf{b_i}$**, então há que proceder à minimização de d_i^- ;

3) Se a meta for **igualar ou ficar aquém do valor $\mathbf{b_i}$**, então há que proceder à minimização de d_i^+ .

Resolução Gráfica

Exemplo 1



Relativamente ao gráfico anterior, a região das soluções admissíveis é dada pelo interior e pela fronteira de **ABCDE** .

Considerando que a meta (lucro mensal) pode ser inferior, igual ou superior a 900 UM, conforme indicado pelas setas, a região admissível não é alterada. Pretende-se minimizar ambas as “folgas”, d_i^- e d_i^+, o que se indica através de um pequeno círculo preto à frente das setas respetivas.

Conclui-se que o segmento **CM** é o **conjunto das soluções ótimas**, dado que é sobre a reta de $6x_1 + 3x_2 = 900$ ($d_i^- = d_i^+ = 0$) que a FO é minimizada.

A solução extrema **M** corresponde à produção mensal de **150 secretárias** e **0 estantes** (sendo atingida a meta que foi estipulada de **900 UM** de lucro).

A outra solução ótima extrema alternativa **C** corresponde à produção mensal de **80 secretárias** e **140 estantes** conseguindo-se de igual modo atingir a meta de **900 UM** de lucro.

Conclui-se assim, que existe uma infinidade de soluções ótimas (obtidas pela combinação linear convexa das duas determinadas), para as quais se verifica $d_i^- = d_i^+ = 0$.

Exemplo 2

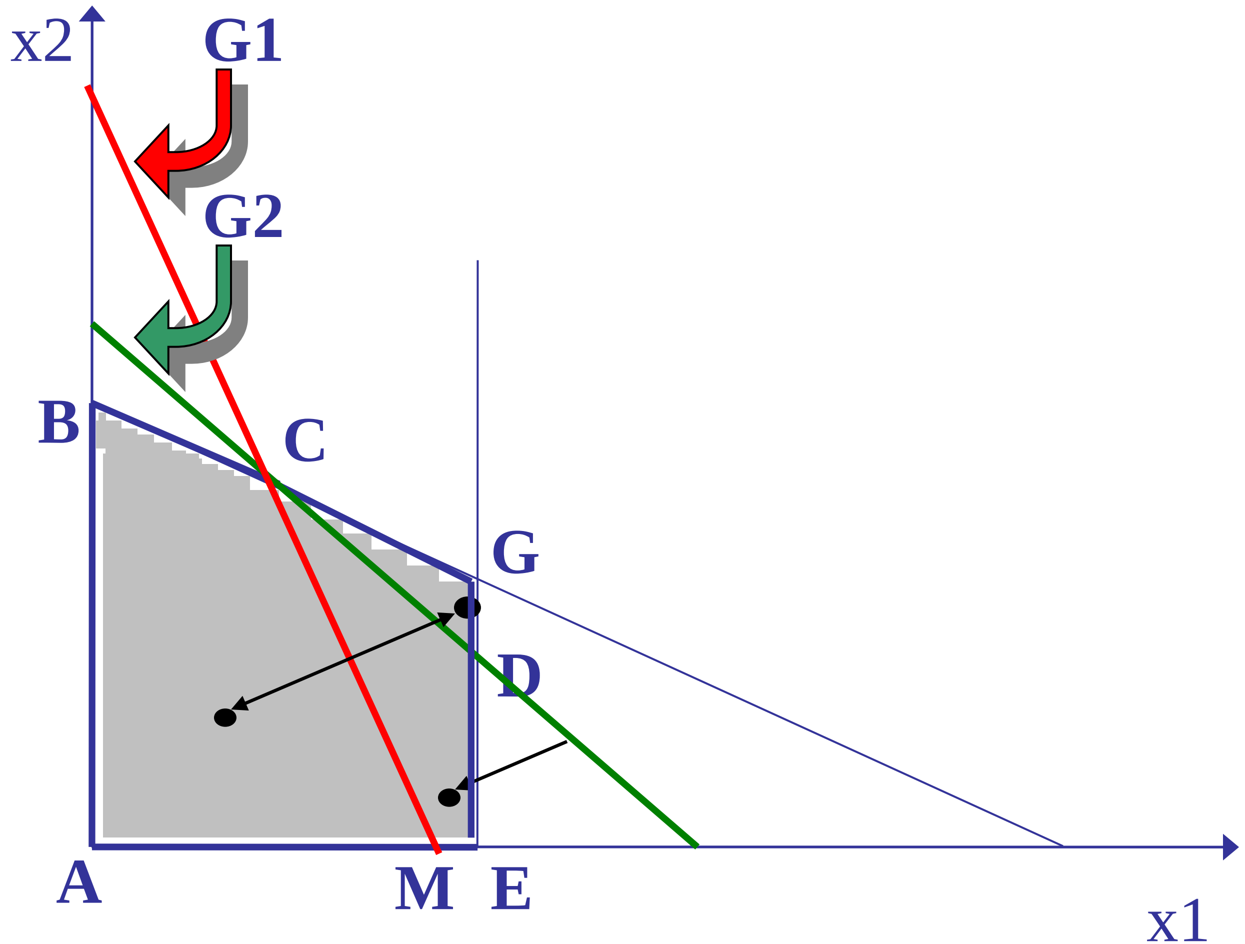


Figura **a)**

No gráfico anterior representaram-se graficamente as restrições do problema.

A região admissível vem ampliada em relação ao **Exemplo 1** uma vez que agora é possível o recurso a trabalho extraordinário no DMA.

As diferentes prioridades das duas metas foram assinaladas por **G1** e **G2** (Prioridade de Grau 1 e de Grau 2, respetivamente) .

Os pequenos círculos pretos colocados à frente das setas dizem respeito às variáveis folga a serem minimizadas.

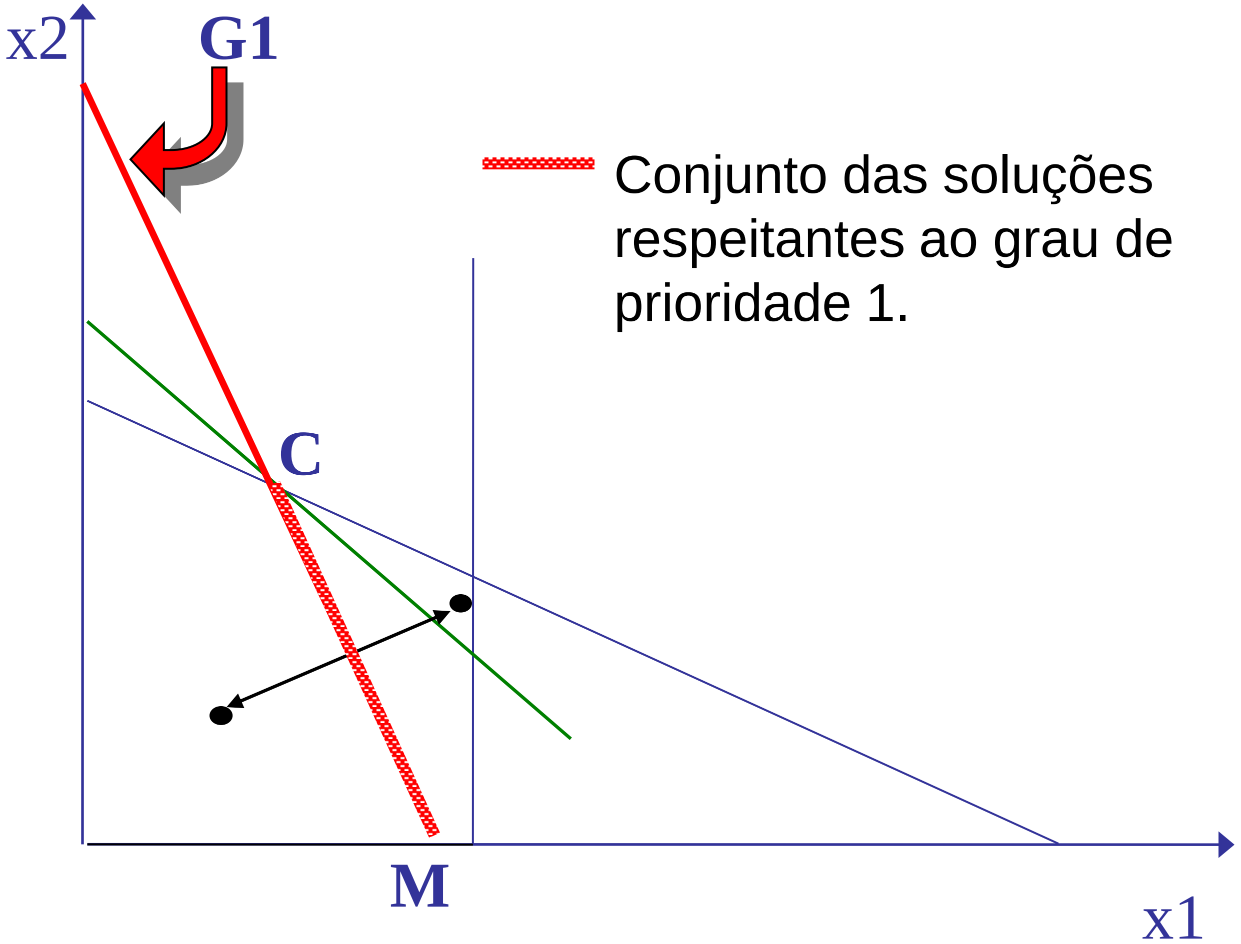

x2
G1
Conjunto das soluções respeitantes ao grau de prioridade 1.
C
M
x1

Figura **b)**

No gráfico anterior iniciou-se a análise à função objectivo.

Como existem dois graus de prioridade, determinaram-se primeiro as soluções que satisfazem a **meta de 900 UM de lucro mensal** (G1). Verificou-se que todas as soluções do segmento de recta CM satisfazem esta meta.

Vai-se **analisar em seguida a meta com prioridade 2** (G2) - esta consiste **em minimizar o tempo de inatividade mensal do DMA**.

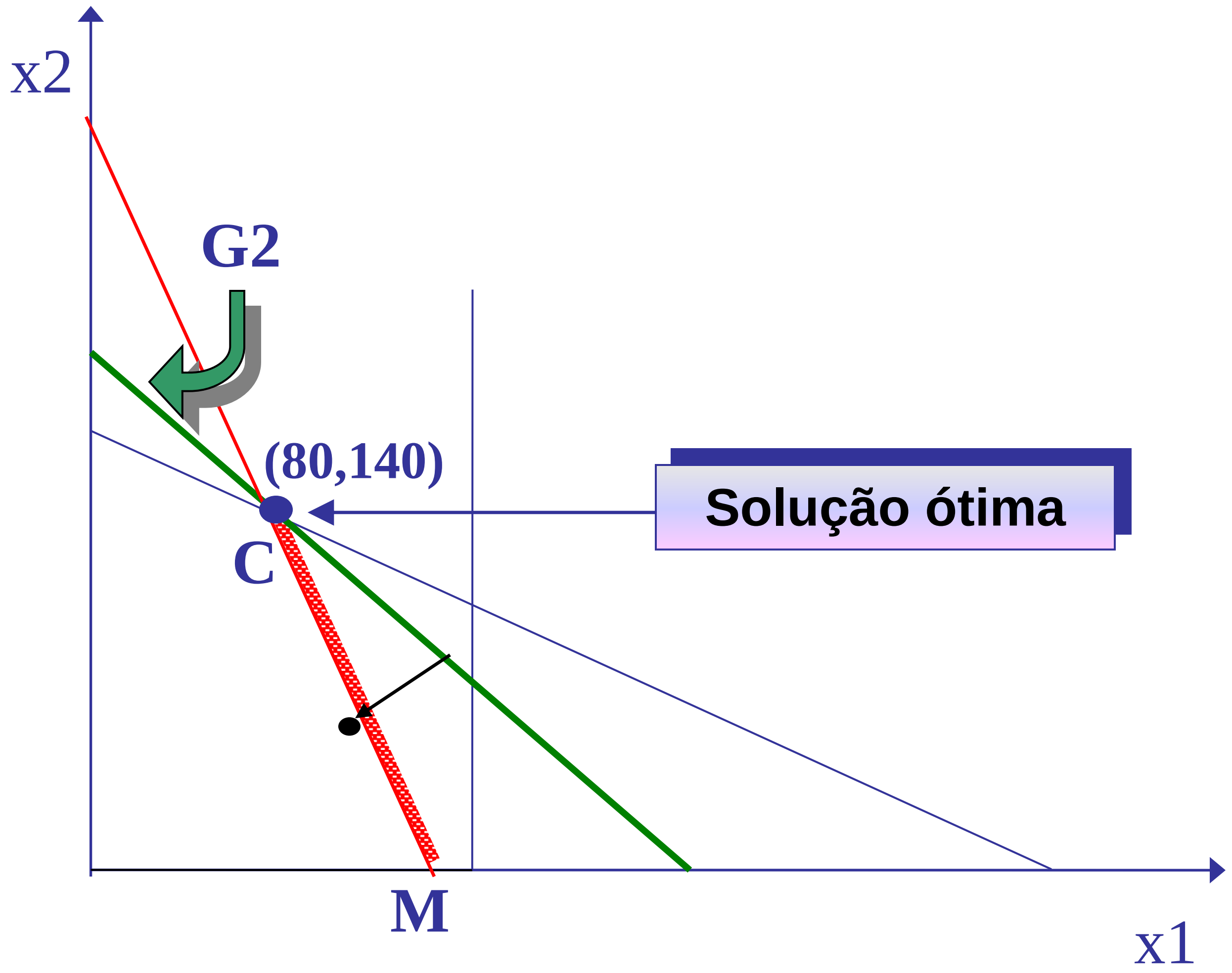


Figura **c)**

Como a solução a determinar não podia comprometer o nível de satisfação atingido relativamente à meta com primeira prioridade, a pesquisa recaiu apenas sobre os pontos do segmento **CM**.

Assim sendo, determinou-se como **solução ótima** a correspondente ao ponto **C**: **(80,140)** - esta **solução proporciona** o **lucro pretendido** (900 UM) e por outro lado a **utilização plena do DMA**. Ou seja, consegue-se atingir o nível máximo de satisfação possível em relação a ambas as metas.

Exemplo 3

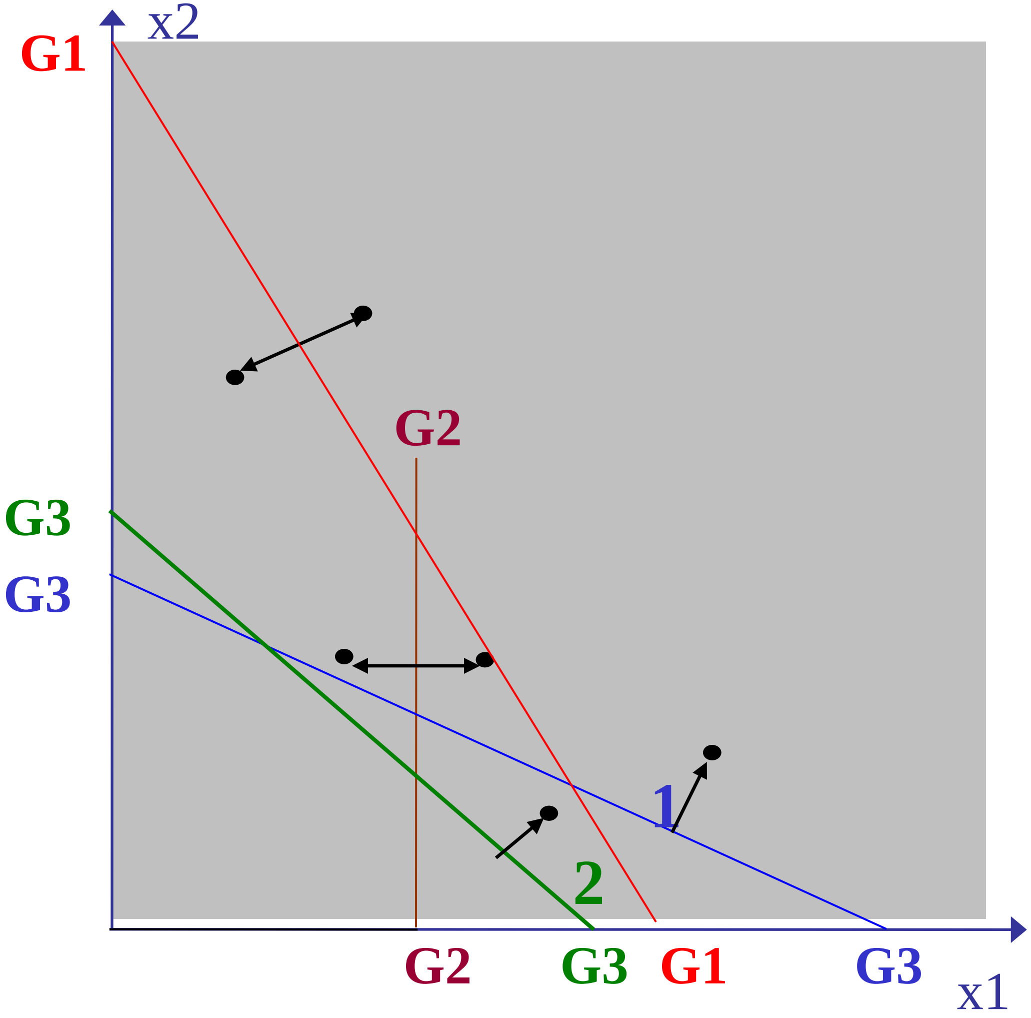


Figura **a)**

No gráfico anterior verifica-se que a região admissível coincide com o 1º quadrante.

Existem três graus de prioridade e as duas metas com grau de prioridade 3 têm diferentes ponderações (assinaladas com **1** e **2**).

A satisfação da meta com prioridade de grau 1, é verificada para as soluções assinaladas no gráfico que se segue (*Figura b)*).

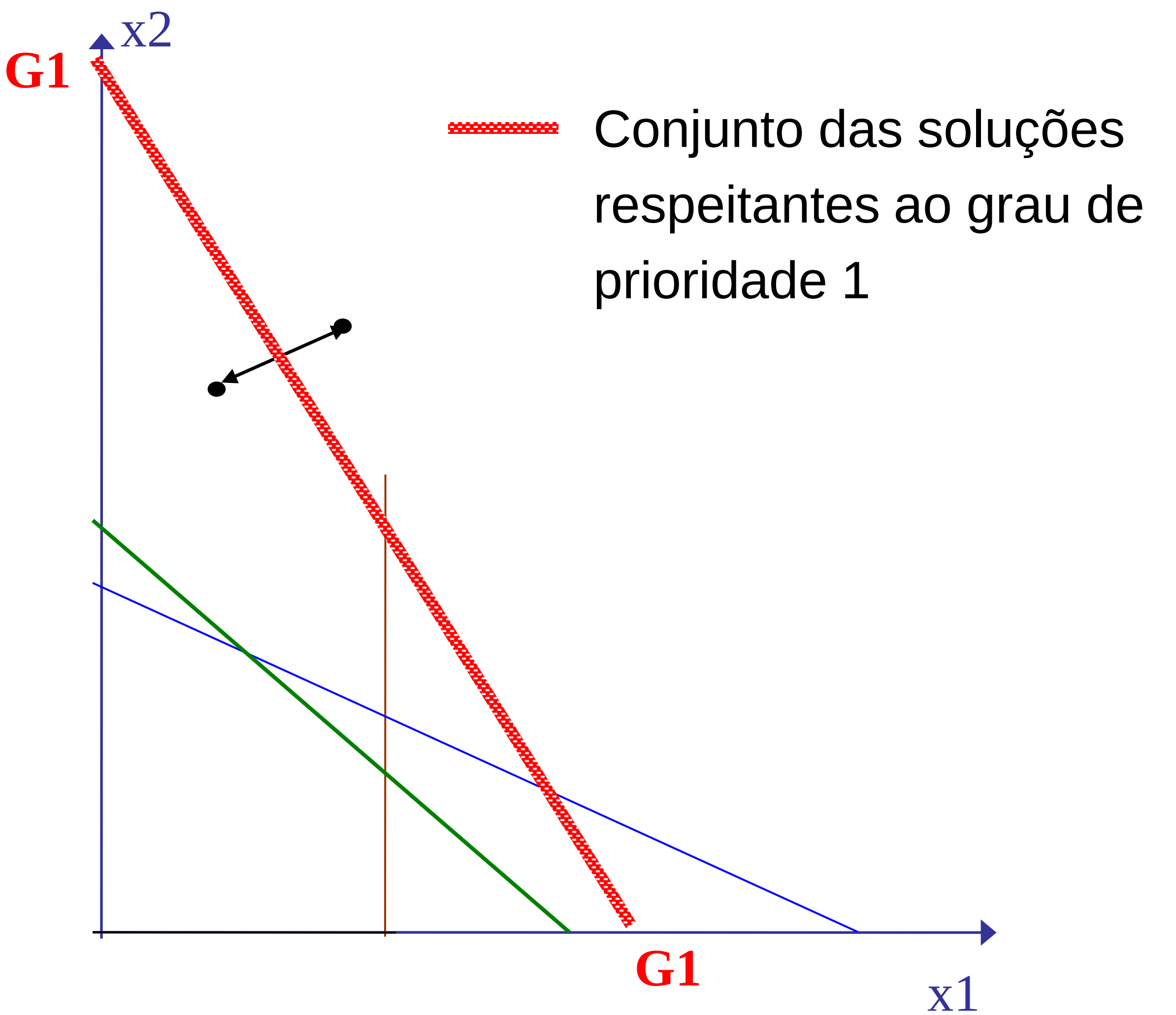

x2
G1
Conjunto das soluções respeitantes ao grau de prioridade 1
G1
x1

Figura **b)**

Quando se tenta satisfazer a meta com grau de prioridade 2, vê-se que existe apenas uma solução nestas condições: **(160,180)**.

A solução encontrada corresponde à produção mensal de **160 secretárias**, originando um **lucro mensal de 1500 UM**.

Ou seja, como referido atrás, as metas dos dois primeiros graus de prioridade foram atingidas.

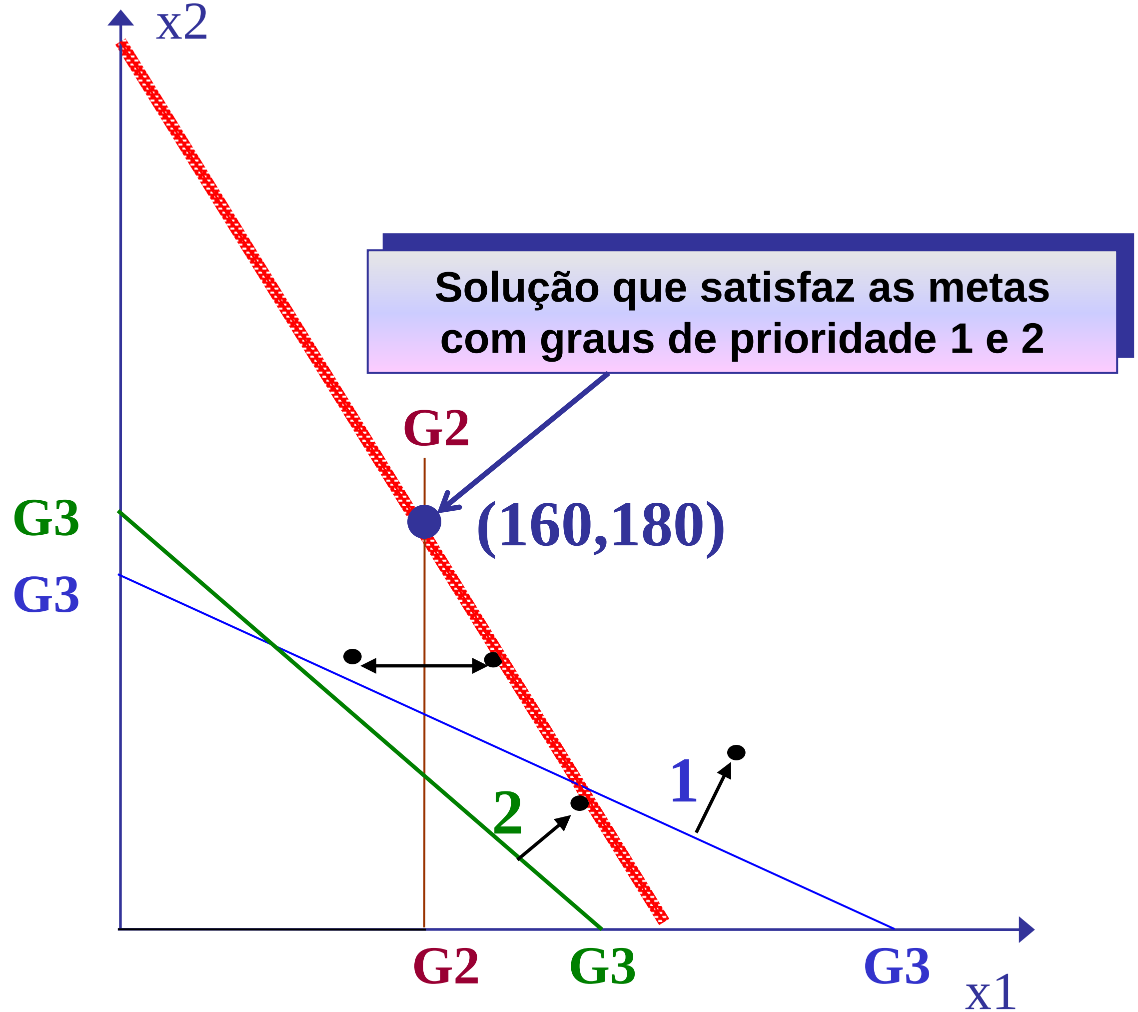

x2
Solução que satisfaz as metas
com graus de prioridade 1 e 2
G2
G3
(160,180)
G3
1
2
G2
G3
G3
x1

Figura **c)**

A satisfação das metas com grau de prioridade 3 já não alterará a solução determinada, pois como já foi referido, a lógica do modelo de Programação por Metas consiste na satisfação sequencial por graus de prioridade das metas em cada grau, sem nunca pôr em causa o nível de satisfação já atingido em relação às metas com precedência de prioridade.

Como se pode verificar pelo gráfico, na solução encontrada **(160,180),** as metas com prioridade de grau 3 não são satisfeitas. É necessário recorrer a **trabalho extraordinário nos DE** e **DMA**, de (2*160 + 4*180 - 720 =) **320 H-M** e (4*160 + 4*180 – 880 =) **480 H-M mensais**, respetivamente.

Então o processo termina e a solução encontrada **(160,180)** é a melhor solução de compromisso para este problema.

Resumindo, a **resolução gráfica de um problema de Programação por Metas** envolve os seguintes passos:

<u>Passo 1</u>

Representar graficamente as restrições que não correspondem a metas e determinar a Região Admissível. Representar graficamente as metas, indicando o grau de prioridade de cada uma bem como as variáveis folga que fazem parte da Função Objetivo.

<u>Passo 2</u>

Determinar o conjunto das soluções que satisfazem as metas com grau de prioridade 1.

Passo 3

Passar ao grau de prioridade seguinte e determinar o conjunto das soluções que satisfazem as metas com esse grau de prioridade, sem comprometer o nível de satisfação já atingido para as prioridades mais elevadas.

Passo 4

(Critério do ótimo). Se foram analisados todos os graus de prioridade, a solução encontrada é a solução ótima (ou a melhor solução de compromisso) para este problema e o processo termina.

Senão, voltar ao *Passo 3*.