Metodologias de otimização e Apoio à Decisão

- Folhas de Consulta -

Pós-otimização

1º Caso: Alteração do coeficiente de uma variável na função objetivo

⇨ Substitui-se diretamente no quadro ótimo o coeficiente alterado.

Se a variável em causa **não estiver na base**, o único valor afetado e a ter que ser recalculado é o zj-cj correspondente.

- Se este for ≥ 0, o quadro mantém-se ótimo, a base ótima mantém-se, os valores de x* e de z* também.
- Se for < 0, o quadro deixa de ser ótimo e tem que se usar o método *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.

Se a variável em causa **estiver na base**, toda a linha zj-cj e o valor de z têm que ser recalculados.

- Se todos os valores da linha zj-cj forem ≥ 0, o quadro mantém-se ótimo, a base ótima mantém-se e os valores de x* também. O valor de z* altera-se para o valor recalculado.
- Se algum dos valores for menor que 0, o quadro deixa de ser ótimo e tem que se usar o método *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.

2º Caso: Alteração dos termos independentes das restrições

⇨ Aplica-se a fórmula: $\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$

Substitui-se a coluna b do quadro ótimo atual pelos valores do vetor $\tilde{\mathbf{x}}_B$ e recalcula-se o valor de z.

- Se os valores da nova coluna b forem todos ≥ 0, o quadro mantém-se ótimo e a base ótima também se mantém. Os valores de x* e de z* alteram-se de acordo com os novos valores da coluna b e de z do quadro alterado. (NOTA: A solução x* pode ser **degenerada** se um dos valores da nova coluna b for zero).
- Se surgir um valor negativo na coluna b, então o quadro já não é ótimo (a solução é agora não admissível). Procedimento: aplica-se o método dual do *simplex* para determinar os novos valores de x* e de z*.

3º Caso: Alteração dos coeficientes de uma variável nas restrições

⇨ Aplica-se a fórmula: $\tilde{\mathbf{X}}_f = B^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_f$

Se a variável em causa **não estiver na base**, substitui-se a coluna dessa variável no quadro ótimo pelos valores do vetor $\tilde{\mathbf{X}}_f$ e recalcula-se o correspondente valor na linha zj-cj.

Depois procede-se como no **1º Caso**:

- Se este valor for ≥ 0, o quadro mantém-se ótimo, a base ótima mantém-se, os valores de x* e de z* também.
- Se for < 0, o quadro deixa de ser ótimo e tem que se usar o método *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.

Pelo contrário, se a variável **estiver na base**, substitui-se a coluna dessa variável no quadro ótimo pelos valores do vetor $\tilde{\mathbf{X}}_f$ e tem que se reconstruir a matriz identidade porque esta vai ser afetada. Só depois de reposta esta matriz, é que se recalcula a linha zj-cj.

No novo quadro obtido 3 situações podem ocorrer:

- A coluna b e a linha zj-cj só contêm valores ≥ 0.
  - O quadro é ótimo, mas a solução ótima x* e o valor de z* alteram-se de acordo com os novos valores da coluna b.
- A coluna b só contêm valores ≥ 0, mas na linha zj-cj surgem valores negativos.
  - Aplica-se o método *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.
- A linha zj-cj só contêm valores ≥ 0, mas na coluna b surgem valores negativos.
  - Aplica-se o método dual do *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.
- A coluna b e a linha zj-cj contêm, ambas, valores < 0.
  - Caso complicado em que se torna necessário retirar $\mathbf{x_f}$ da base.

4º Caso: Introdução de uma nova variável de decisão

⇨ Aplica-se a fórmula: $\mathbf{X}_{nova} = B^{-1}\mathbf{P}_{nova}$

Em seguida acrescenta-se uma coluna no quadro ótimo para a nova variável x_{nova} e preenche-se com os valores do vetor $\mathbf{X}_{nova}$. Depois de inserir no quadro o coeficiente da nova variável na função objetivo, c_{nova}, calcula-se o correspondente valor na linha zj-cj.

Depois procede-se como no **1º Caso**:

- Se este for ≥ 0, o quadro mantém-se ótimo, a base ótima mantém-se, os valores de x* e de z* também.
- Se for < 0, o quadro deixa de ser ótimo e tem que se usar o método *simplex* para calcular o novo quadro ótimo, a nova base ótima, e os novos valores de x* e de z*.

5º Caso: Introdução de uma nova restrição

Em primeiro lugar verifica-se se a solução ótima atual satisfaz a nova restrição.

- Se for verdade, então conclui-se que a solução atual ainda é ótima para o problema com a nova restrição e que o valor de z* também é o ótimo do novo problema.
- Se não for verdade, introduz-se a nova restrição no quadro e reconstrói-se a matriz identidade.
- Se os valores da nova coluna b forem todos ≥ 0, e os valores da linha zj-cj também, o quadro mantém-se ótimo e a base ótima também se mantém. Os valores de x* e de z* alteram-se de acordo com os novos valores da coluna b e de z do quadro alterado.
- Se surgir um valor negativo na coluna b, então o quadro já não é ótimo (a solução é agora não admissível). Procedimento: aplica-se o método dual do *simplex* para determinar os novos valores de x* e de z*.
- Se algum dos valores da linha zj-cj for menor que 0, o quadro deixa de ser ótimo. Procedimento: aplica-se o método *simplex* para determinar os novos valores de x* e de z*.

Casos particulares

Nas diversas situações há que estar atento aos casos particulares. Por exemplo:

- ➪ Se após as alterações aparecer algum valor 0 na linha zj-cj correspondente a uma variável não básica é porque o problema passou a ter uma **solução ótima alternativa** que tem que ser calculada usando o método *simplex*.
- ➪ Se o quadro deixou de ser ótimo por ter surgido um valor negativo na linha zj-cj e houver necessidade de iterar pelo método *simplex*, mas na coluna "pivot" apenas existirem valores ≤0, então conclui-se que, após as alterações, o problema passou a ter **solução ótima no infinito**.

Análise de sensibilidade

Aos termos independentes das restrições:

$$X_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}} = B^{-1} b_{\Delta_{b_k}} \ / \ z^* = c'_B \, X_B{}^*{}_{\Delta_{b_k}}$$

Programação Inteira

Algoritmo de Gomory

Passo 1 - Resolver o problema de PL associado. No caso de a solução ótima satisfazer as restrições de integralidade, então é também solução ótima do problema de PLIP/PLIM; caso contrário o processo continua.

Passo 2 **-** Introduzir uma nova restrição no problema, restrição de corte, e resolver de novo o problema de PL associado. Se a solução obtida satisfizer as restrições de integralidade, então também é solução ótima do problema de PLIP/PLIM. Caso contrário repetir o procedimento até obter uma solução inteira, ou concluir pela impossibilidade do problema.

Restrição de corte para PLIP:

$$\sum_{j \notin I_B} f_{sj} x_j \geq f_{s0}$$

Restrição de corte para PLIM:

$$\sum_{j \notin N} d_{sj} x_j \geq f_{s0}$$

em que,

$$d_{sj} = \begin{cases} x_{sj} & j \in \mathcal{N}_+^C \\ \dfrac{f_{s0}}{1-f_{s0}} \left| x_{sj} \right| & j \in \mathcal{N}_-^C \\ f_{sj} & j \in \mathcal{N}^I \quad se \ \ f_{sj} \leq f_{s0} \\ \dfrac{f_{s0}}{1-f_{s0}} (1-f_{sj}) & j \in \mathcal{N}^I \quad se \ \ f_{sj} > f_{s0} \end{cases}$$