IV – Dualidade

A cada modelo de Programação Linear, com coeficientes $\mathbf{a_{ij}}$, $\mathbf{b_i}$ e $\mathbf{c_j}$, corresponde um outro modelo, denominado **dual**, formado por esses mesmos coeficientes, mas dispostos de maneira diferente.

Na relação com o problema **dual**, o problema inicial designa-se por problema **primal**.

A existência de um dos problemas sustenta a existência do outro, tratando-se de uma relação recíproca de **dualidade**. Nestas condições, os dois problemas são conhecidos como um **par de problemas duais**.

Embora os dois problemas sejam diferentes, são suportados pelo mesmo sistema de parâmetros ($\mathbf{a_{ij}}$, $\mathbf{b_i}$ e $\mathbf{c_j}$). A resolução de um deles permite a resolução simultânea do outro, sendo a solução de um completamente determinada pela do outro.

Um par de problemas duais é afinal **um par de representações do mesmo problema real**.

Considere-se o seguinte problema **primal** na forma típica:

Determinar

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = [\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou seja,

Determinar

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

sujeito a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

Associando a cada **restrição i** do problema **primal** a **variável u_i** do **dual**, e a cada **variável x_j** do problema **primal** a **restrição j** do **dual**, o problema dual consistirá em:

Determinar

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ : \\ : \\ u_m \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\text{minimizar } z_d = [\ b_1\ b_2 \cdots b_m\ ] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ : \\ : \\ u_m \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ou seja,

Determinar

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

de modo a

minimizar $z_d = \mathbf{b'u}$

sujeito a

$$\mathbf{A'u} \geq \mathbf{c}$$

Note-se que:

- nº de variáveis do **dual** = nº de restrições do **primal**
- nº de restrições do **dual** = nº de variáveis do **primal**
- função objetivo do **primal** a maximizar

  ➔ função objetivo do **dual** a minimizar
- restrições do **primal** do tipo $\leq$

  ➔ variáveis do **dual** não negativas
- variáveis do **primal** não negativas

  ➔ restrições do **dual** do tipo $\geq$
- coeficientes da função objetivo do **dual**

  = termos independentes das restrições do **primal**
- termos independentes das restrições do **dual**

  = coeficientes da função objetivo do **primal**
- matriz dos coeficientes tecnológicos do **dual**

  = transposta da matriz dos coeficientes tecnológicos do **primal**

O dual do dual é o primal

Exemplo

Considere-se o exemplo 1 do capítulo II.

O problema **primal** é, nesse exemplo:

$$\text{maximizar } z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad & \le 3 \\ x_2 & \le 4 \\ x_1 + 2x_2 & \le 9 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 & \end{aligned}$$

O problema **dual** correspondente será:

$$\text{minimizar } z_d = 3\,u_1 + 4\,u_2 + 9\,u_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} u_1 + \qquad\qquad u_3 & \ge 5 \\ u_2 + \ 2\,u_3 & \ge 2 \\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0 & \end{aligned}$$

<u>Relações Primal-Dual</u>

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO		PASSAGEM AO DUAL ⟺	PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO
i-ésima restrição	$\leq$ $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 livre	*i*-ésima variável
j-ésima variável	≥ 0 ≤ 0 livre	$\geq$ $\leq$ $=$	*j*-ésima restrição
Matriz dos coef. técnicos *A*		Matriz dos coef. técnicos *A*’	
Coeficientes da FO		Termos independentes	
Termos independentes		Coeficientes da FO	

Propriedades fundamentais da dualidade

- Se $\mathbf{x}^*$ for a solução ótima do problema **primal** e $\mathbf{u}^*$ a solução ótima do problema **dual**, então $z^*=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ é igual a $z_d^*=\mathbf{b}'\mathbf{u}^*$. Ou seja, $z^* = z_d^*$.
- Um problema de programação linear tem solução ótima (finita) se e só se existirem soluções admissíveis para os problemas **primal** e **dual**.
- Se um dos problemas tiver solução ótima não limitada, então o outro não possui soluções admissíveis (é impossível).
- Se um dos problemas não tiver soluções admissíveis (for impossível), então o outro ou também não tem soluções admissíveis (é igualmente impossível) ou tem solução ótima não limitada.

Exemplo

Consideremos novamente o exemplo da página IV-7.

O problema **primal** é:

$$\max z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\le 3 \\ x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2\,x_2 &\le 9 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

O **dual** correspondente é:

$$\min z_d = 3\,u_1 + 4\,u_2 + 9\,u_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} u_1 \quad + \quad u_3 &\ge 5 \\ u_2 + 2\,u_3 &\ge 2 \end{aligned}$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0$$

Acrescentando as variáveis folga (***slack***) x_3, x_4 e x_5 ao **primal** e as variáveis folga (***surplus***) u_4 e u_5 ao **dual**, obtém-se

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + \mathbf{x_3} \quad\quad &= 3 \\ x_2 \quad + \mathbf{x_4} \quad &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + \mathbf{x_5} &= 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

$$\min z_d = 3u_1 + 4u_2 + 9u_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} u_1 \quad + u_3 - \mathbf{u_4} \quad &= 5 \\ u_2 + 2u_3 \quad - \mathbf{u_5} &= 2 \\ u_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

Resolvendo o problema **primal** pelo método Simplex tem-se:

x_B	c'_B	c_j / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
← x_3	0		$\underline{1}$ *	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
x_5	0		1	2	0	0	1	9
$Z_j - c_j$			*-5*	*-2*	*0*	*0*	*0*	*0*
			↑ u_4	↑ u_5	↑ u_1	↑ u_2	↑ u_3	

x_B	c'_B	c_j / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_1	5		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
← x_5	0		0	$\underline{2}$ *	-1	0	1	6
$Z_j - c_j$			*0*	*-2*	*5*	*0*	*0*	*15*
			↑ u_4	↑ u_5	↑ u_1	↑ u_2	↑ u_3	

		c_j	5	2	0	0	0		
x_B	c'_B	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_1	5		1	0	1	0	0	3	
x_4	0		0	0	1/2	1	-1/2	1	
x_2	2		0	1	-1/2	0	1/2	3	
$Z_j - c_j$			*0*	*0*	*4*	*0*	*1*	*21*	← Z^*
			↑	↑	↑	↑	↑	↑	
			u_4^*	u_5^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	Z_d^*	

Solução ótima do problema primal: $x^* = (3, 3, 0, 1, 0) \longrightarrow z^* = 21$

A partir da linha "zj-cj" do quadro ótimo do problema **primal**, conseguimos obter a solução ótima do problema **dual**: $u^* = (4, 0, 1, 0, 0) \longrightarrow z_d^* = z^* = 21$

Com efeito, verifica-se que em qualquer iteração:

- O valor da variável original u_i do **dual** é igual ao coeficiente da linha "zj-cj" da variável folga x_{n+i} do **primal**;
- O valor da variável folga u_{m+j} do **dual** é igual ao coeficiente da linha "zj-cj" da variável x_j do **primal**.

Propriedade das soluções básicas complementares

Cada solução básica do problema **primal** tem uma solução básica complementar no **dual**, em que os valores das suas funções objetivo (**z** e $\mathbf{z_d}$) são iguais.

- Do 1º quadro do exemplo anterior, retiram-se as seguintes soluções básicas complementares: **x = (0, 0, 3, 4, 9) e u= (0, 0, 0, -5, -2)**, com $\mathbf{z}=\mathbf{z_d}=0$.

- Do 2º quadro retiram-se as seguintes soluções básicas complementares: **x = (3, 0, 0, 4, 6)** e **u = (5, 0, 0, 0, -2)**, com $\mathbf{z}=\mathbf{z_d}=15$.

- Do 3º quadro, que é o ótimo, retiram-se as seguintes soluções básicas complementares: **x* = (3, 3, 0, 1, 0)** e **u* = (4, 0, 1, 0, 0)**, com $\mathbf{z^*}=\mathbf{z_d}^*=21$.

Como se pode verificar, **só no ótimo é que ambas as soluções são admissíveis**.

De facto, no 1º quadro a solução do **primal** é admissível, mas a do **dual** é não admissível. No 2º quadro a solução do **primal** continua a ser admissível e a do **dual** não admissível. Finalmente, no 3º quadro, que é o ótimo, as soluções do **primal** e do **dual** são ambas admissíveis.

Propriedade dos desvios complementares

As soluções básicas complementares dos problemas **primal** e **dual**, satisfazem sempre a **propriedade dos desvios complementares**, ou seja, as suas variáveis satisfazem as relações:

variável primal		***variável dual associada***
básica (valor $\neq$ 0)	➔	não básica (valor = 0)
não básica (valor = 0)	➔	básica (valor $\neq$ 0)

Esta propriedade é facilmente verificada nos quadros Simplex do exemplo anterior. Considere-se o 3º quadro: $\mathbf{x_1}$ é uma variável **básica** ($\mathbf{x_1=3}$) e corresponde à variável do dual $\mathbf{u_4}$ que é **não básica** ($\mathbf{u_4=0}$); já $\mathbf{x_3}$ é uma variável **não básica** ($\mathbf{x_3=0}$) e corresponde à variável do dual $\mathbf{u_1}$ que é **básica** ($\mathbf{u_1=4}$).

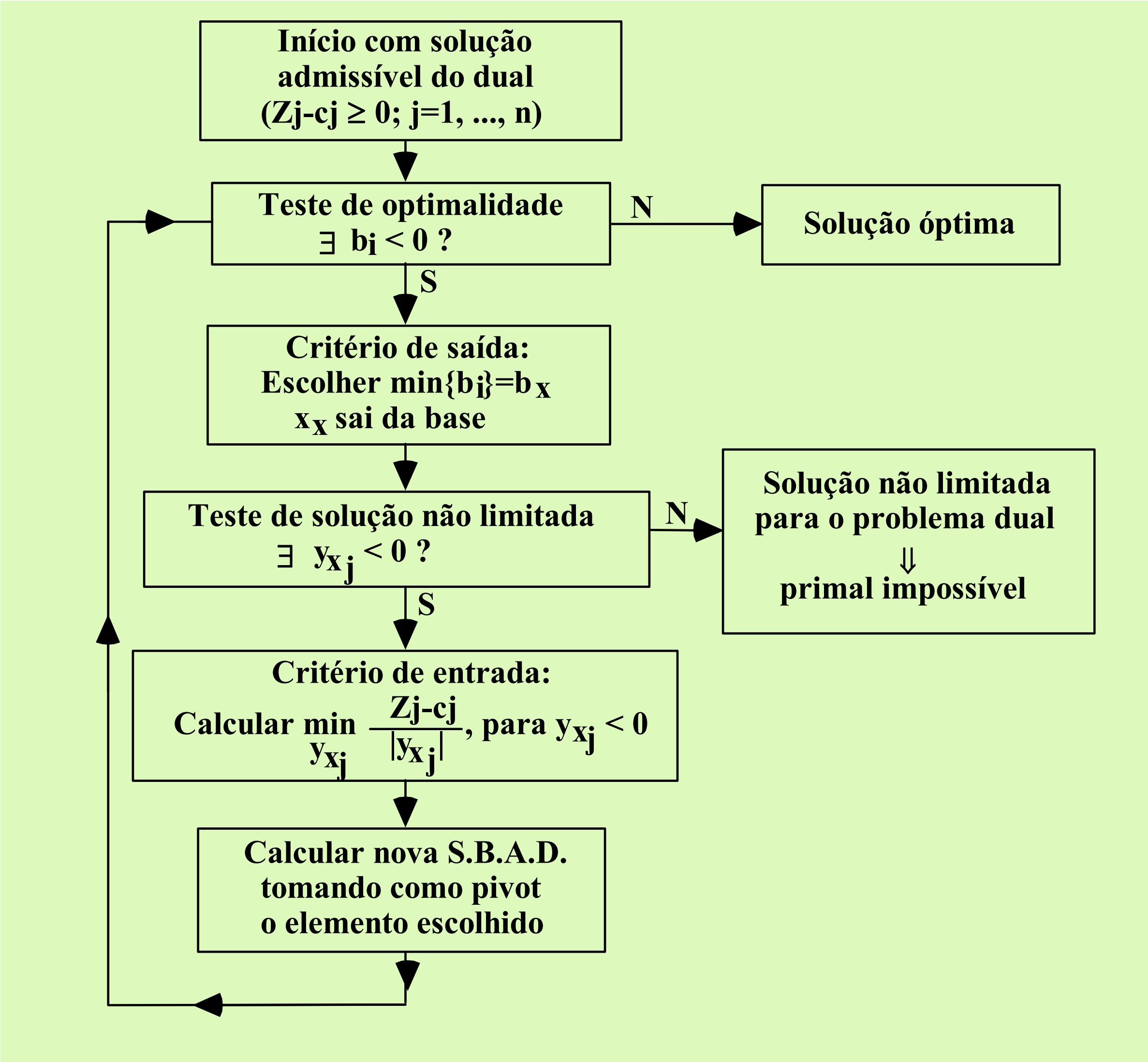
Método dual do Simplex

O **método Simplex** move-se de solução admissível em solução admissível do **primal** (e, correspondentemente, de solução não admissível em solução não admissível do **dual**) até encontrar um par de soluções admissíveis para os problemas **primal** e **dual**, soluções essas que otimizam as funções objetivo.

O **método dual do Simplex** parte de uma solução admissível do **dual** (e, correspondentemente, não admissível do **primal**) e prossegue iterativamente até encontrar um par de soluções admissíveis para os problemas **primal** e **dual**, ou concluir que o problema **dual** apresenta solução não limitada (e o problema **primal** não tem solução, é impossível).

Ou seja, enquanto que o **método Simplex** mantém a admissibilidade da solução do **primal**, o **método dual do Simplex** mantém a admissibilidade da solução do **dual**. Por este motivo, diz-se que este último método constitui a "imagem dual" do primeiro.

Fluxograma do método dual do Simplex



Exemplo

Considere os seguintes problemas **primal** e **dual** associado:

$$\min z = 3x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

sujeito a

$$\begin{array}{llll} x_1 & & + x_3 & \geq 5 \\ & x_2 & + 2x_3 & \geq 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$\max z_d = 5u_1 + 2u_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{lll} u_1 & & \leq 3 \\ & u_2 & \leq 4 \\ u_1 + 2 & u_2 & \leq 9 \end{array}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$$

Fazendo as transformações necessárias ao **primal** de forma a criar valores negativos nos termos independentes obtém-se:

$$\max z' = -z = -3x_1 - 4x_2 - 9x_3$$

sujeito a

$$\begin{array}{llllll} -x_1 & & -x_3 & +x_4 & & = -5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & +x_5 & = -2 \end{array}$$

$$x_i \geq 0;\ i = 1, \dots 5.$$

Resolvendo o problema **primal** pelo método dual do Simplex obtém-se:

{acompanhe esta resolução com as páginas III-12 e III-13}

	C_i	-3	-4	-9	0	0		
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
← x_4	0	***<u>-1</u>*** *	0	-1	1	0	-5	← x_4
x_5	0	0	-1	-2	0	1	-2	← x_5
$Z_j - c_j$		***3***	***4***	***9***	***0***	***0***	0	← - z
		↑ u_3	↑ u_4	↑ u_5	↑ u_1	↑ u_2		

SBNAP ➔ **x** = (0, 0, 0, -5, -2)
SBAD ➔ **u** = (0, 0, 3, 4, 9)

	c_i	-3	-4	-9	0	0		
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_1	-3	1	0	1	-1	0	5	← x_1
← x_5	0	0	-1	***<u>-2</u>*** *	0	1	-2	← x_5
$Z_j - c_j$		***0***	***4***	***6***	***3***	***0***	-15	← -z
		↑ u_3	↑ u_4	↑ u_5	↑ u_1	↑ u_2		

SBNAP ➔ **x** = (5, 0, 0, 0, -2)
SBAD ➔ **u** = (3, 0, 0, 4, 6)

x_B	c'_B	ci / x_i	x_1 (-3)	x_2 (-4)	x_3 (-9)	x_4 (0)	x_5 (0)	b	
x_1	-3		1	-1/2	0	-1	1/2	4	← x_1^*
x_3	-9		0	1/2	1	0	-1/2	1	← x_3^*
$z_j - c_j$			***0***	***1***	***0***	***3***	***3***	***-21***	← $-z^*$
			↑ u_3^*	↑ u_4^*	↑ u_5^*	↑ u_1^*	↑ u_2^*	↑ $-z_d^*$	

Quadro ótimo uma vez que já não existem valores negativos na coluna b.

Soluções ótimas dos problemas primal e dual:

SBAP ➔ **x*** = (4, 0, 1, 0, 0)
SBAD ➔ **u*** = (3, 3, 0, 1, 0)