isec Engenharia

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

**Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão**

# Capítulo III

# Programação Linear Multi-objetivo

# 1 – Decisão Multi-objetivo

**Decidir** consiste em **escolher "boas" soluções** entre várias alternativas viáveis ou cursos de ação.

Cada vez mais o decisor é forçado a considerar **grande variedade de critérios/objetivos** para avaliar as diferentes alternativas viáveis.

O decisor é confrontado com a exigência da escolha da **melhor solução de compromisso**, que corresponde a um balanço entre os vários objetivos considerados, geralmente conflituosos.

A **Decisão Multi-objetivo** (DMO) constitui uma área à qual tem sido dada grande atenção, por ter como finalidade auxiliar o decisor na **pesquisa da melhor solução de compromisso** na presença de **múltiplos critérios de otimização**.

Existem vários métodos de DMO, entre os quais:

- **Programação Linear Multi-objectivo (PLMO)** (neste capítulo)
- **Programação por Metas** (capítulo seguinte)

A Decisão Multi-objetivo, abrange os problemas de decisão com pelo menos dois objetivos. O problema geral de DMO pode expressar-se matematicamente da seguinte forma:

Maximizar (Minimizar) Z =

$$= [\, z_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ z_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \dots,\ z_p(x_1, x_2, \dots, x_n)\, ]$$

sujeito a

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\leq, =, \geq\}\ b_1$$
$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\leq, =, \geq\}\ b_2$$
$$\dots$$
$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\leq, =, \geq\}\ b_m$$
$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,n$$

em que $z_1$ , $z_2$,..., $z_p$ designam as *p* funções objetivo.

- Nos problemas de decisão com **um único objetivo**, o que se procura é a **solução ótima**, isto é, a solução admissível que maximiza (minimiza) a função objetivo. Mesmo que existam soluções ótimas alternativas, o valor ótimo da função objetivo (z*) é o mesmo. O conceito chave é o **ótimo**.

- Em problemas de decisão com **múltiplos objetivos**, este conceito não é aplicável pois uma solução admissível que otimiza um dos objetivos, não otimiza, em geral, os restantes objetivos.

- Neste tipo de problemas, o conceito de solução ótima dá lugar ao conceito de **solução eficiente** ou de **solução não dominada** (que é um **subconjunto** do conjunto das soluções admissíveis).

- Uma **solução eficiente** ou **não dominada** (a distinção entre ambas será feita mais à frente) caracteriza-se pelo facto de não existir outra solução admissível que melhore simultaneamente todas as funções objetivo. Ou seja, a melhoria de uma função objetivo só pode ser atingida à custa da deterioração do valor de pelo menos uma das outras funções objetivo do modelo.

- Na resolução de um **problema com um único objetivo** a solução ótima é perfeitamente determinada pelo algoritmo de otimização.

- Num **problema multi-objetivo**, a resolução do modelo matemático permite determinar um **conjunto de soluções eficientes ou não dominadas** que, no entanto, não são comparáveis. Ou seja, o algoritmo de resolução aplicado não as classifica como boas ou como más. Deste modo, torna-se necessário ter em conta as preferências do decisor.

- Então, é necessário fornecer ao decisor informação sobre o domínio no qual este pode exercer a sua escolha quanto ao curso de ação a seguir - **conjunto das soluções eficientes / não dominadas**.

- Esta informação pode ser apresentada sob a **forma gráfica** ou sob a **forma tabular**.

- Tomando por base tal informação e de acordo com as suas preferências, o decisor escolherá então uma solução (normalmente não dominada) que se designa por **melhor solução de compromisso**.

# 2 - Programação Linear Multiobjectivo

Caso particular do problema geral apresentado atrás, é aquele em que as *p* funções objectivo e as *m* restrições são funções lineares.

Tem-se então a seguinte forma típica:

Maximizar $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_p] = \left[\sum_j c_j^1 x_j, \sum_j c_j^2 x_j, \ldots, \sum_j c_j^p x_j\right]$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_j \geq 0, \; j=1,2,\ldots,n&
\end{aligned}
$$

***Nota:*** *A forma típica considerada não implica perda de generalidade, pois mediante operações convenientes, qualquer problema pode tomar esta forma.*

- Em problemas com um único objetivo, as soluções admissíveis do espaço das variáveis de decisão, $\mathbf{x} \in K$ (K = *região admissível*), são mapeadas em $\Re^n$ (assumindo *n* variáveis de decisão).

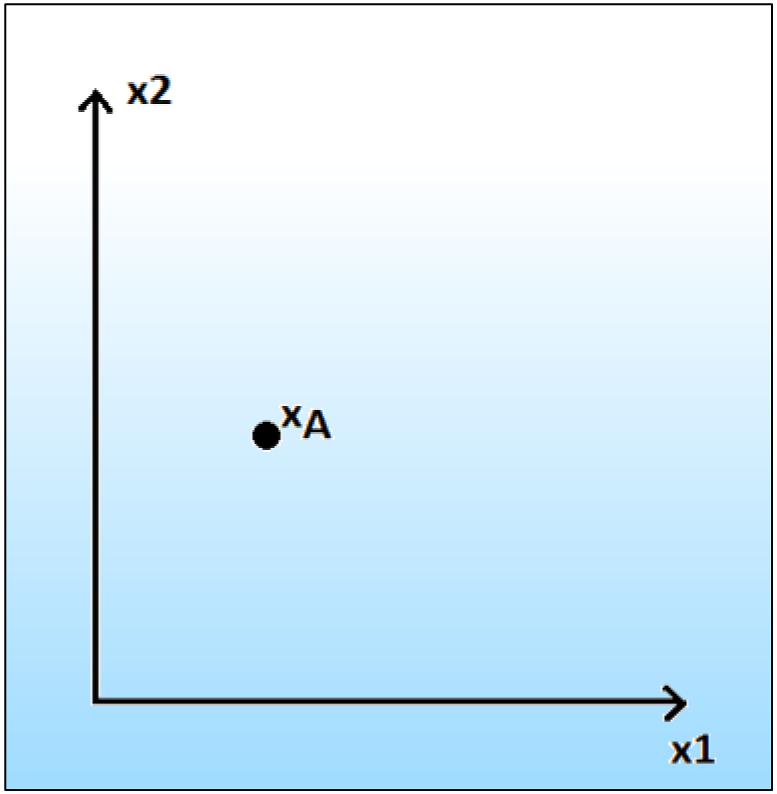
- Em problemas multi-objetivo o espaço de decisão é mapeado num espaço *p*-dimensional denominado **espaço dos objetivos**.

- Neste espaço, uma solução admissível **x** do espaço das variáveis de decisão é representada por um vetor

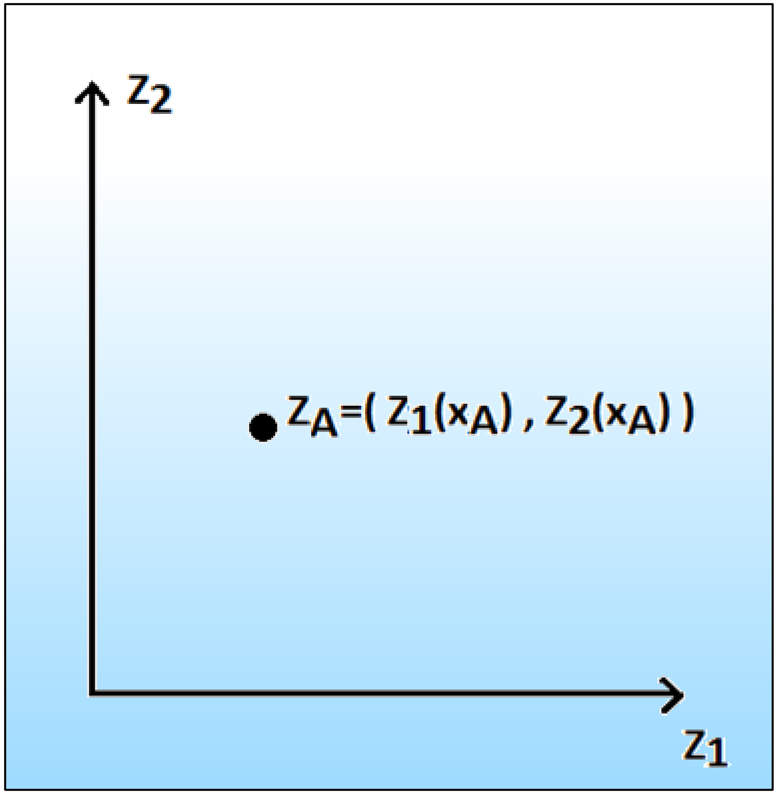
$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \ldots, z_p(\mathbf{x}))$$

Os elementos do vetor são os valores assumidos pelas *p* funções objetivo, no ponto **x** da região admissível.

Exemplo, considerando que existem $n$=2 variáveis de decisão e $p$=2 funções objetivo:




*Espaço de decisão*




*Espaço dos objectivos*

**Definição 1:**

Uma solução $\mathbf{x} \in K$ é **eficiente** se e só se não existir uma outra solução $\mathbf{y} \in K$ tal que $f_k(\mathbf{y}) \geq f_k(\mathbf{x})$ para todo o $k=1, \ldots, p$ , sendo que, para pelo menos um valor de k, $f_k(\mathbf{y}) > f_k(\mathbf{x})$.

A solução **Z** – imagem da solução **x** no espaço das funções objetivo – é **não dominada**, se e só se **x** for uma **solução eficiente**.

O conceito de **eficiência** é relativo ao espaço das variáveis de decisão.

O conceito de **não dominância** é relativo ao espaço das funções objetivo.

A imagem de uma **solução eficiente** é uma **solução não dominada.**

**Definição 2:**

Sejam $\mathbf{x} \in K$ e $\mathbf{y} \in K$ duas soluções admissíveis de um problema de DMO. As duas soluções dizem-se **não comparáveis** se não se verificar a dominância de $Z(\mathbf{x})$ por $Z(\mathbf{y})$ nem a dominância de $Z(\mathbf{y})$ por $Z(\mathbf{x})$ (sendo $Z(\mathbf{x})=[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_p(\mathbf{x})]$ e $Z(\mathbf{y})=[f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}),\ldots,f_p(\mathbf{y})]$ ).

As **soluções eficientes / não dominadas** são **não comparáveis**.

## Exemplo 1 (*)

A Direcção de Marketing de uma empresa de mobiliário de escritório, sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos actuais.

A mesma Direcção não vê dificuldade de colocação no mercado para as estantes, enquanto que aconselha a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as **160** unidades.

(*) *Retirado de* **"Programação Linear", Volume I**
*Ramalhete, M. , Guerreiro, J. , Magalhães A.*

Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, concluiu-se que:

- A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de **720** Horas-Máquina (H-M);
- A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de **880** Horas-Homem (H-H);
- Cada secretária necessita de **2** H-M de Estampagem e de **4** H-H de Montagem e Acabamento;
- Cada estante necessita de **4** H-M de Estampagem e de **4** H-H de Montagem e Acabamento.

Por outro lado, os lucros unitários estimados são de **6000** UM (unidades monetárias) para as secretárias e de **3000** UM para as estantes.

A empresa pretende determinar qual o plano de produção mensal para os novos produtos que maximiza o lucro.

***Modelo matemático:***

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar } z = & 6x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeito a} & 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\
& x_1 \leq 160 \\
& x_1 , x_2 \geq 0
\end{array}
$$

A empresa estabeleceu anteriormente, como objetivo único, **maximizar** o **lucro**.

Admita-se que a empresa pretende criar espaço para no futuro poder vir a lançar outros produtos. Admita-se que, por outro lado, por cada secretária produzida do novo modelo, são economizados **20** minutos do tempo de produção (em relação ao modelo antigo) e que, por cada estante produzida do novo modelo, essa economia é de **30** minutos (também em relação ao modelo antigo). Dada a impossibilidade de expansão da empresa em termos de capacidade de produção nos tempos mais próximos, é natural que esta também pretenda **maximizar as economias de tempo de processamento** que permitirão equacionar a produção de novos produtos.

O problema é agora de **programação linear multi-objetivo** (PLMO):

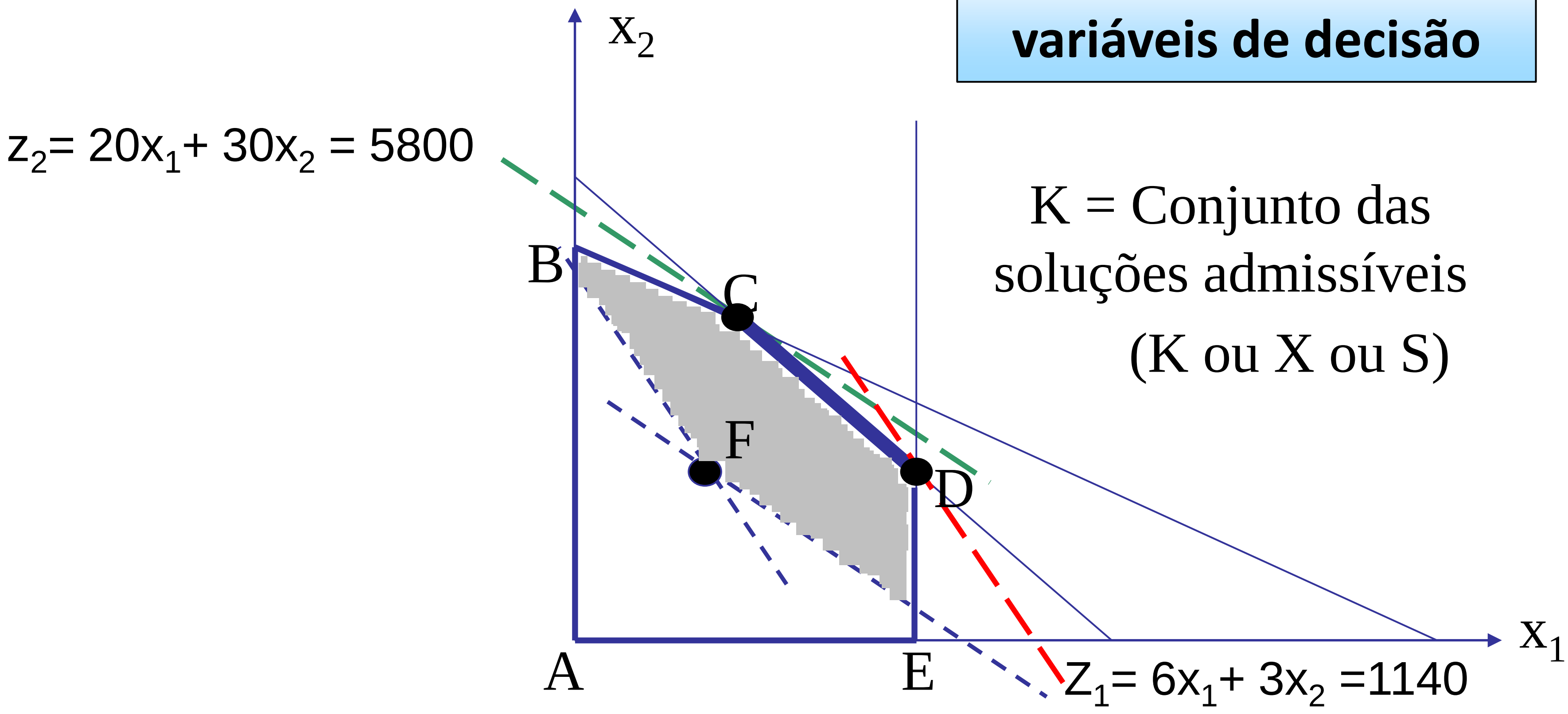
***Modelo matemático:***

$$\text{Maximizar } \mathbf{Z} = [z_1, z_2] = [\, 6x_1 + 3x_2,\, 20x_1 + 30x_2]$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + 4x_2 \le 720 \\ & 4x_1 + 4x_2 \le 880 \\ & x_1 \qquad\quad\; \le 160 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

## Resolução gráfica:

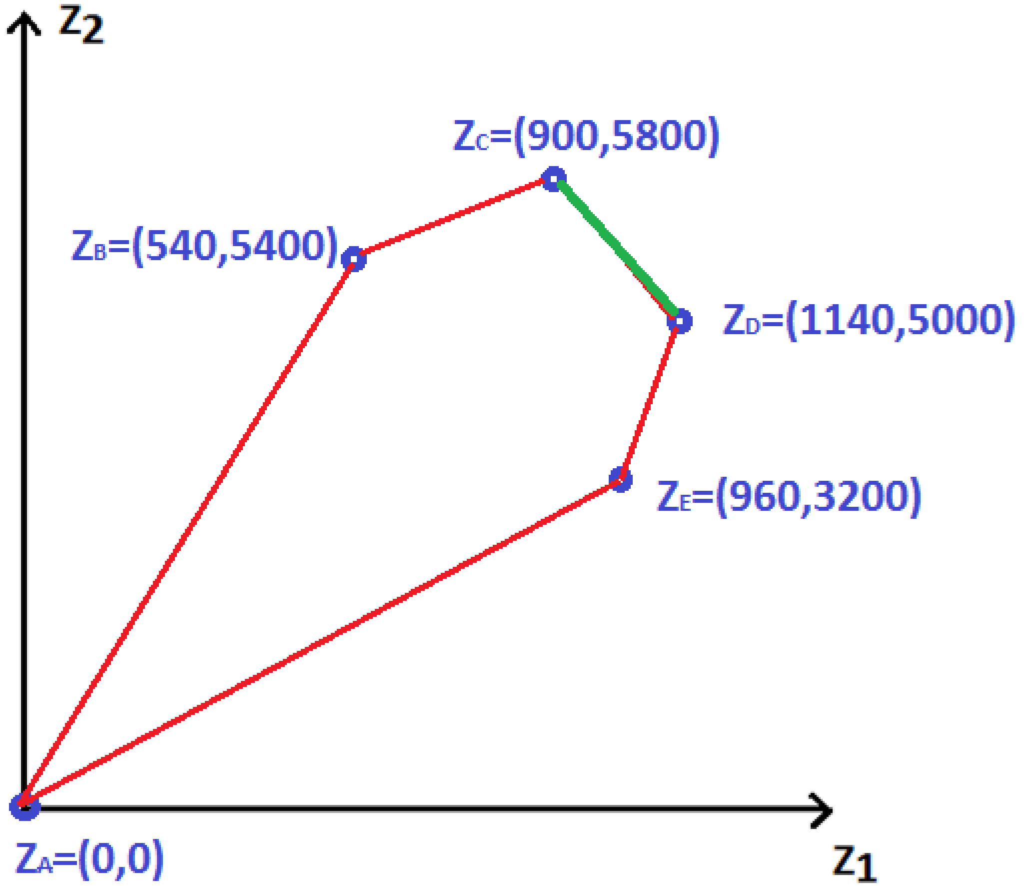
**Espaço das variáveis de decisão**




**$K_E$ - Conjunto das soluções eficientes**

# Resolução gráfica:

**Espaço dos objetivos**




**$K_{ND}$[1] - Conjunto das soluções não dominadas**

[1] Alguns autores denominam $K_{ND}$ apenas por $K_D$

Através da representação gráfica em ambos os espaços de decisão e dos objetivos, obtém-se:

- O ponto **C** otimiza a função objetivo $\mathbf{z_2}$ e é solução eficiente, pois não existe nenhuma outra solução que otimize a função objetivo $\mathbf{z_1}$ sem piorar $\mathbf{z_2}$.

- O ponto **D** otimiza a função objetivo $\mathbf{z_1}$ e é solução eficiente, pois não existe nenhuma outra solução que otimize a função objetivo $\mathbf{z_2}$ sem piorar $\mathbf{z_1}$.

Para determinar o conjunto das soluções eficientes:

- Considere-se uma determinada solução admissível **F** no espaço das variáveis de decisão (pág.19). Qualquer uma das soluções admissíveis da zona cinzenta dominam a solução **F** (em qualquer dessas soluções da zona cinzenta verifica-se a melhoria de pelo menos uma das funções objetivo relativamente a **F**). Este raciocínio pode estender-se a todos os pontos da região admissível, nomeadamente aos pontos extremos **C** e **D**, e restantes pontos da aresta **CD**.

- Alternativamente, recorre-se aos **cones de dominância.** Sobre qualquer ponto de uma aresta de **K** coloca-se o vértice do cone. Se a interseção do cone com **K** for simplesmente o vértice, esse ponto constitui uma solução eficiente. O mesmo raciocínio aplica-se aos restantes pontos das arestas.

- O conjunto das soluções eficientes - $\mathbf{K_E}$ - é constituído pela aresta **CD**, incluindo os pontos extremos **C** e **D**. (Qualquer ponto da aresta **CD** pode ser obtido como **combinação linear convexa dos pontos C e D**.)
- O conjunto das soluções não dominadas - $\mathbf{K_{ND}}$ - é constituído pela aresta $\mathbf{Z_C Z_D}$ incluindo os extremos $\mathbf{Z_c}$ e $\mathbf{Z_D}$.
- As soluções **C** e **D** são não comparáveis (nenhuma delas domina a outra), assim como quaisquer 2 pontos sobre a aresta **CD**.

**Definição 3:**

Designa-se por **solução ideal** - $\mathbf{Z}_{ideal}=(Z_1^*, Z_2^*, \ldots, Z_p^*)$ - a solução que otimizaria simultaneamente todas as funções objetivo – é um vetor cujos componentes são o ótimo de cada função objetivo quando otimizadas separadamente.

O vetor com os piores valores assumidos pelas diversas funções objetivo (na região eficiente) designa-se por **solução anti-ideal** - $\mathbf{Z}_{\textbf{anti-ideal}}$.

As soluções **ideal** e **anti-ideal** são muitas vezes usadas pelo decisor na determinação da melhor solução de compromisso (menor distância à solução ideal ou maior distância à solução menos favorável).

Em geral, a **solução ideal** - $\mathbf{Z}_{ideal}$ (=Z*) não pertence à região admissível, embora cada $Z_r$* seja individualmente alcançável. Além disso, pode não haver solução x* cuja imagem seja o ponto ideal.

A solução anti-ideal corresponde à solução no espaço dos objetivos cujas componentes são os piores valores de cada função objetivo na região eficiente.

Para determinar as soluções ideal e anti-ideal, constrói-se a **tabela de ótimos individuais** (ou tabela de *pay-off*):

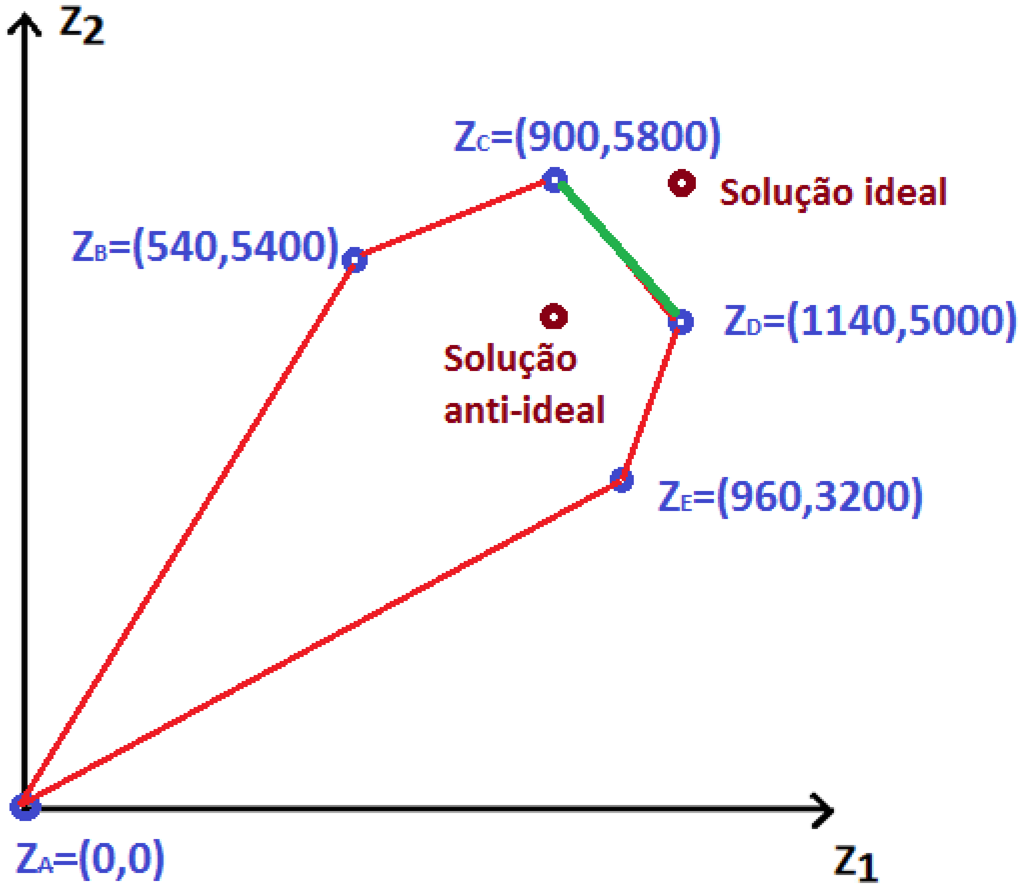
| | **$z_1$** | **$z_2$** |
|---|---|---|
| Ótimo de $z_1$:<br>Ponto D = $(x_1,x_2)$ = (160, 60) | 1140 | 5000 |
| Ótimo de $z_2$:<br>Ponto C = $(x_1,x_2)$ = (80, 140) | 900 | 5800 |

$$\mathbf{Z_{ideal} = (z_1,\ z_2) = (1140,\ 5800)}$$

$$\mathbf{Z_{anti\text{-}ideal} = (z_1,\ z_2) = (900,\ 5000)}$$

## Resolução gráfica:

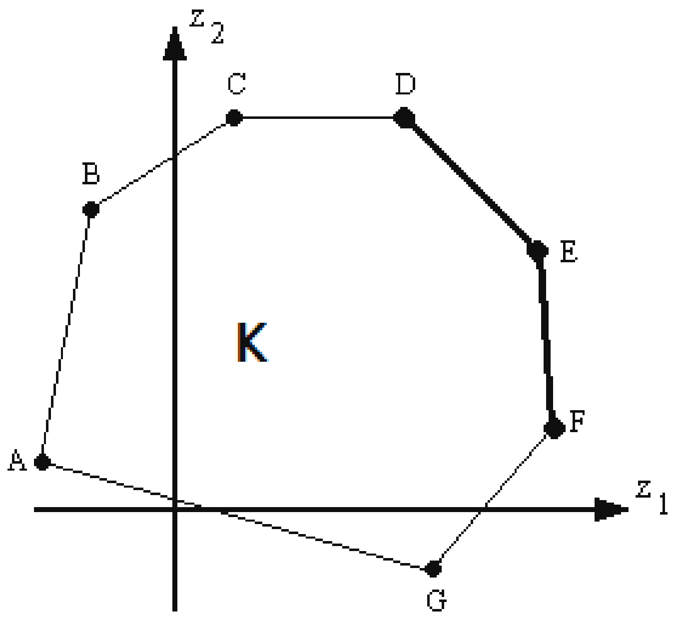
**Espaço dos objetivos**



Em situações práticas, mais do que o conhecimento de todas as soluções eficientes, é importante identificar uma **solução de compromisso satisfatória**.

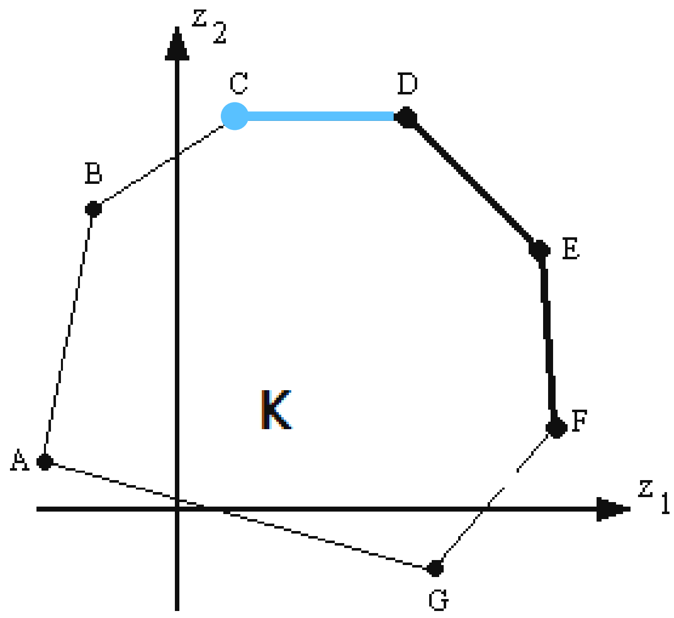
Esta denominação pretende traduzir a ideia de que se trata de uma solução eficiente, à qual se encontra associado um determinado compromisso entre as funções objetivo, assumindo estas funções valores satisfatórios para o decisor, de tal forma que a **solução** é **aceitável como solução final do processo de decisão**.

# Solução fracamente eficiente/ fracamente não dominada:




$K_E$ = *Soluções eficientes*

$K_{ND}$ = *Soluções não dominadas*




$K_{FE}$ = *Soluções fracamente eficientes*

$K_{FND}$ = *Soluções fracamente não dominadas*

Colocando o vértice de um cone de dominância sobre um determinado ponto de uma aresta de **K**, conclui-se que esse ponto corresponde a uma solução fracamente eficiente quando a interseção do cone com a região **K** não é apenas o vértice do cone, mas também parte da aresta do mesmo.

A uma **solução fracamente eficiente**, corresponde uma **solução fracamente não dominada**.