isec Engenharia
Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II

- Anexo 2 -

Resolução de problemas de PLIM

EXEMPLO 1

Considere o seguinte problema:

Determinada vendedora ambulante vende dois tipos de morangos: embalados (em caixas de 1 kg) e também ao peso. Os morangos embalados (tipo A) são de cultura biológica e originam um lucro de 8 UM/Kg (⇔ 8 UM/caixa). Os morangos vendidos a peso (tipo B) provêm de grandes armazéns e dão um lucro de 5 UM/Kg. Dado que a vendedora se desloca a pé, ela não consegue transportar, diariamente, mais do que 6 kg de morangos. Por outro lado, o cesto onde os transporta tem uma capacidade de armazenamento correspondente a 45 unidades de área (UA). Verifica-se que cada embalagem de morangos do tipo A ocupa cerca de 9 UA e cada kg de morangos do tipo B ocupa cerca de 5 UA. Deste modo, a vendedora pretende saber quantas caixas de morangos do tipo A e quantos Kg de morangos do tipo B deve transportar por dia, de forma a maximizar o lucro diário (pressupondo-se que vende tudo o que transporta).

Formule o problema em termos de um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e resolva-o usando o algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira mista (PLIM) que temos para resolver é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 8\,x_1 + 5\,x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \qquad\qquad \textit{(1)} \\
&\quad 9x_1 + 5\,x_2 \le 45 \qquad \textit{(2)} \\
&\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\
&\quad x_1 \text{ inteiro}
\end{aligned}
$$

Adicionando as variáveis "slack" x_3 e x_4 em *(1)* e *(2)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 8\,x_1 + 5\,x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
&\quad 9x_1 + 5\,x_2 + x_4 = 45 \\
&\quad x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

O quadro inicial do *simplex* é:

	c	8	5	0	0		
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \backslash \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$	
x_3	0	1	1	1	0	6	6/1
x_4	0	9*	5	0	1	45 $\Leftarrow$	45/9
z_j-c_j		-8	-5	0	0	0	
		$\Uparrow$					

x_3	0	0	4/9*	1	-1/9	1 $\Leftarrow$	1/4/9
x_1	8	1	5/9	0	1/9	5	5/5/9
z_j-c_j		0	-5/9	0	8/9	40	
			$\Uparrow$				

	$\underline{c}$	8	5	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
x_2	5	0	1	9/4	-1/4	9/4
x_1	8	1	0	-5/4	1/4	15/4
$z_j - c_j$		0	0	5/4	3/4	165/4

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos na linha zj-cj

=> $\underline{x}^*=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(15/4, 9/4, 0, 0)$ com $z^* = 165/4$

Mas não ótimo para o problema de PLIM

=> Na solução obtida $x_1 = 15/4$ (não inteiro)

Vamos introduzir uma restrição de corte.

x_2	5					
x_1	8			-5/4	1/4	$15/4 \Leftarrow =3+3/4$
$z_j - c_j$						

=> Escolhe-se a linha da variável básica, x_1 (s=2)

$x_{20} = 15/4 \quad \Leftrightarrow \quad x_{20} = [x_{20}] + f_{20} = 3 + 3/4$

$f_{20} = 3/4$

=> $x_{23} = -5/4$ ($j=3 \in N^C_-$)

=> $x_{24} = 1/4$ ($j=4 \in N^C_+$)

A equação de corte a considerar será:

$$\left(\left(3/4 \Big/ (1 - 3/4)\right) * |-5/4|\right) \; x_3 + 1/4 \, x_4 \geq 3/4$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(3/4 \Big/ (1/4)\right) * |-5/4|\right) \; x_3 + 1/4 \, x_4 \geq 3/4$$

$$\Leftrightarrow \quad 15/4 \; x_3 + 1/4 \, x_4 \geq 3/4$$

Multiplicando por -1, acrescentando a folga x_5 e transformando na forma de igualdade obtemos:

$$\Leftrightarrow \quad -15/4 \, x_3 - 1/4 \, x_4 \leq -3/4 \quad \Leftrightarrow \quad -15/4 \, x_3 - 1/4 \, x_4 + x_5 = -3/4$$

Introduzindo no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	c	8	5	0	0	0	
$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\underline{\mathbf{c}}_B \setminus \underline{\mathbf{x}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	5	0	1	9/4	-1/4	0	9/4
x_1	8	1	0	-5/4	1/4	0	15/4
x_5	0	0	0	-15/4*	-1/4	1	-3/4 $\Leftarrow$
$z_j - c_j$		0	0	5/4	3/4	0	165/4
				$\Uparrow$			

x_2	5	0	1	0	-2/5	3/5	9/5
x_1	8	1	0	0	1/3	-1/3	4
x_3	0	0	0	1	1/15	-4/15	1/5
$z_j - c_j$		0	0	0	2/3	1/3	41

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> não existem valores negativos em zj-cj

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIM!

=> na solução obtida x1 assume valor inteiro!

$x_1 = 4$ (satisfaz a restrição de integralidade)

=> $\underline{x}'^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 9/5, 1/5, 0, 0)$ com $z'^* = 41$

Interpretação Gráfica:

Maximizar $z = 8\,x_1 + 5\,x_2$

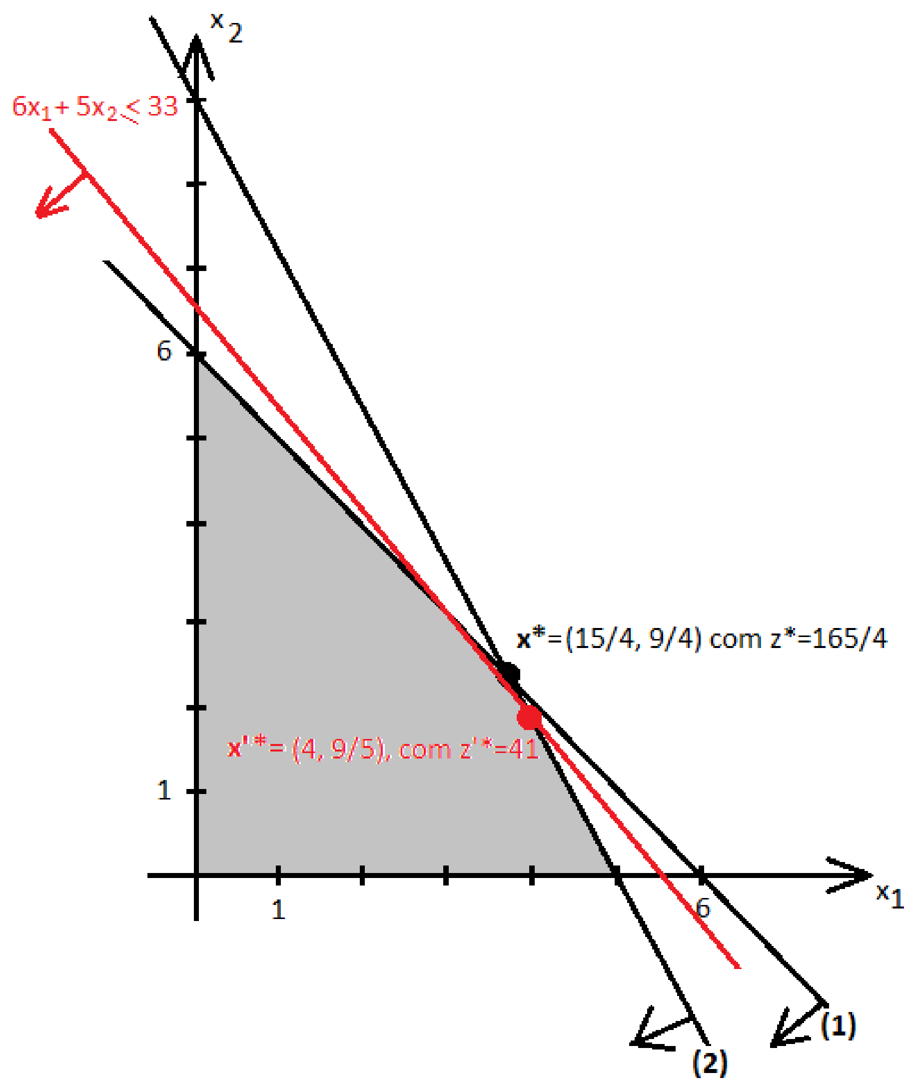
s.a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

x_1 inteiro



Plano de corte:

$$15/4\ x_3 + \ 1/4\ x_4 \ \geq 3/4 \quad \Leftrightarrow \ 15\ x_3 + x_4 \ \geq 3$$

Como

$$x_3 = 6 - x_1 - x_2 \ \text{e} \quad x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2$$

temos

$$15\ (6 - x_1 - x_2) + (45 - 9x_1 - 5x_2) \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 90 - 15x_1 - 15x_2 + 45 - 9x_1 - 5x_2 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -24x_1 - 20x_2 \ \geq -132 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{6x_1 + 5x_2 \leq 33}$$

EXEMPLO 2

Considere o seguinte problema:

Agora que o tempo frio se aproxima, o Sr. Anacleto pretende aquecer a sua casa recorrendo a uma caldeira que pode ser alimentada com carvão ou com briquetes (material ecológico feitos com resíduos de madeira prensados). Apesar de o carvão ser mais barato, os briquetes têm uma duração maior. Na verdade, 1 kg de carvão arde durante cerca de 3 horas, enquanto 1 pack de briquetes (5 briquetes) queima durante aproximadamente 6 horas. O fornecedor habitual do Sr. José pode arranjar-lhe, semanalmente, um máximo de 10 kg de carvão e de 7 packs de briquetes. Para além disso, cada kg de carvão custa 1 UM e cada pack de briquetes custa (preço especial de lançamento) 3.5 UM, sendo que o Sr. Anacleto pode gastar um máximo de 20 UM por semana na compra daqueles produtos. Assim sendo, este senhor pretende saber quantos kg de carvão e/ou quantos packs de briquetes deve comprar semanalmente, de forma a prolongar o mais possível o tempo de aquecimento da sua casa sem exceder o seu orçamento.

Formule o problema em termos de um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e resolva-o usando o algoritmo de Gomory.

O problema de programação linear inteira mista (PLIM) que temos para resolver é o seguinte:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2 & & & \\
\text{s.a} & & & \\
x_1 & & \le 10 & (1) \\
 & x_2 & \le 7 & (2) \\
x_1 + 7/2 & x_2 & \le 20 & (3) \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 & & & \\
x_2 \text{ inteiro} & & &
\end{array}
$$

Adicionando as variáveis "slack" x_3, x_4 e x_5 em *(1)*, *(2)* e *(3)*, respetivamente, vamos resolver o seguinte problema de programação linear associado (método *simplex*):

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & \\
x_1 & & + x_3 & & & = 10 \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 7 \\
x_1 + 7/2 & x_2 & & & + x_5 & = 20 \\
x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5 & & & & &
\end{array}
$$

O quadro inicial do *simplex* é:

	c	3	6	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$
x_3	0	1	0	1	0	0	10
x_4	0	0	1	0	1	0	7
x_5	0	1	7/2*	0	0	1	20 $\Leftarrow$
z_j-c_j		-3	-6	0	0	0	0
			$\Uparrow$				

x_3	0	1*	0	1	0	0	10 $\Leftarrow$
x_4	0	-2/7	0	0	1	-2/7	9/7
x_2	6	2/7	1	0	0	2/7	40/7
z_j-c_j		-9/7	0	0	0	12/7	240/7
		$\Uparrow$					

	$\underline{c}$	3	6	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B$ \ $\underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$
x_1	3	1	0	1	0	0	10
x_4	0	0	0	2/7	1	-2/7	29/7
x_2	6	0	1	-2/7	0	2/7	20/7
	z_j-c_j	0	0	9/7	0	12/7	330/7

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos em zj-cj

=> $\underline{x}$*=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(10, 20/7, 0, 29/7, 0) com z* = 330/7

Mas não ótimo para o problema de PLIM

=> Na solução obtida x_2 = 20/7 (não inteiro)

Vamos introduzir uma restrição de corte

=> Escolhe-se a linha da variável básica, x_2 (s=3)

$x_{30} = 20/7 \quad \Leftrightarrow \quad x_{30} = [x_{30}] + f_{30} = 14/7 + 6/7 = 2 + 6/7$

$f_{30} = 6/7$

=> $x_{33} = -2/7$ ($j=3 \in N^C_-$)

=> $x_{35} = 2/7$ ($j=5 \in N^C_+$)

A restrição de corte a considerar será:

$$\left(\left(6/7 \big/ (1 - 6/7)\right) * |-2/7| \right) x_3 + 2/7\, x_5 \geq 6/7$$

$$\Leftrightarrow \qquad 12/7\, x_3 + 2/7\, x_5 \geq 6/7$$

Multiplicando por -1, acrescentando a folga x_6 e transformando na forma de igualdade obtemos:

$$\Leftrightarrow \quad -12/7\, x_3 - 2/7\, x_5 \leq -6/7 \quad \Leftrightarrow \quad -12/7\, x_3 - 2/7\, x_5 + x_6 = -6/7$$

Introduzindo no quadro anterior e aplicando o método dual do *simplex*:

	$\underline{c}$	3	6	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_1	3	1	0	1	0	0	0	10
x_4	0	0	0	2/7	1	-2/7	0	29/7
x_2	6	0	1	-2/7	0	2/7	0	20/7
X_6	6	0	0	-12/7*	0	-2/7	1	-6/7 $\Leftarrow$
z_j-c_j		0	0	9/7	0	12/7	0	330/7
				$\Uparrow$				

	$\underline{C}$	3	6	0	0	0	0	
$\underline{x}_B$	$\underline{c}_B \setminus \underline{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\underline{b}$
x_1	3	1	0	0	0	-1/6	7/12	19/2
x_4	0	0	0	0	1	-1/3	1/6	4
x_2	6	0	1	0	0	1/3	-1/6	3
x_3	0	0	0	1	0	1/6	-7/12	1/2
z_j-c_j		0	0	0	0	3/2	3/4	93/2

Quadro ótimo para o problema de PL associado

=> Não existem valores negativos em zj-cj

=> $\underline{x}'^*=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(19/2, 3, 1/2, 4, 0, 0)$ com $z'^* = 93/2$

Este quadro é também ótimo para o problema de PLIM!

=> Na solução obtida x_2 assume valor inteiro!

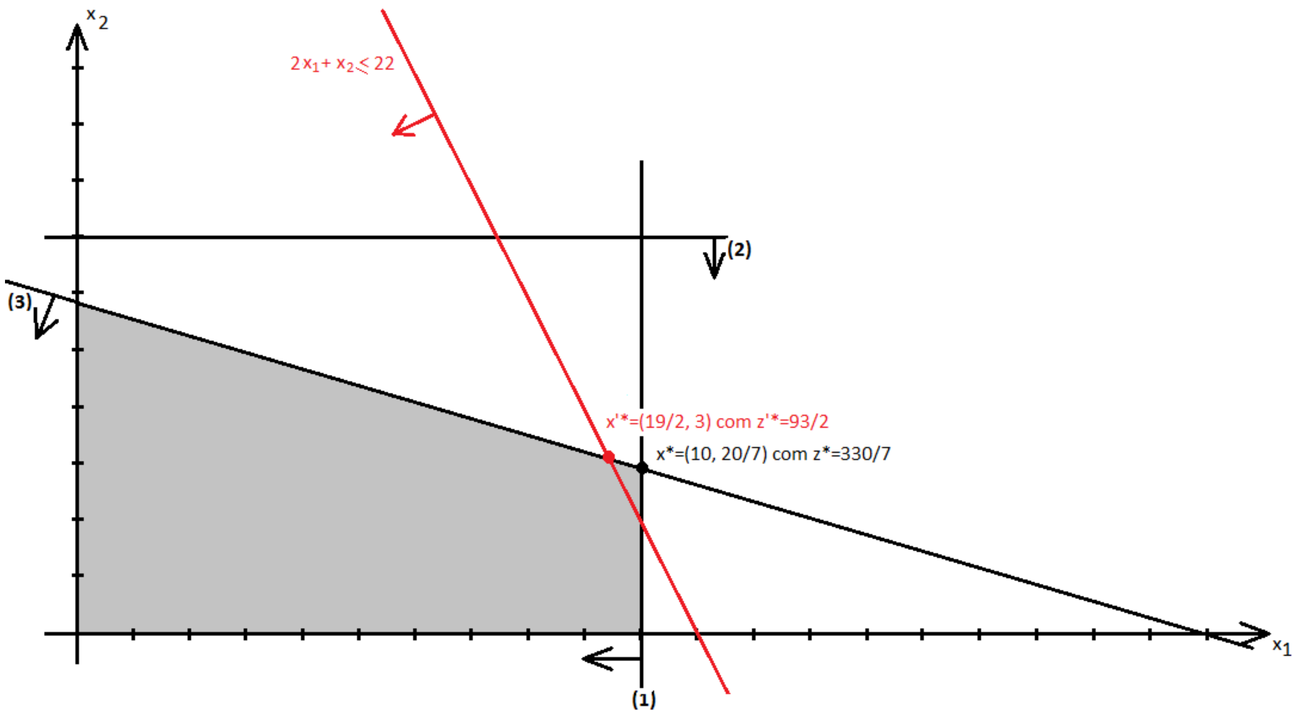
$x_2= 3$ (satisfaz a restrição de integralidade)

Interpretação Gráfica:

Maximizar $z = 3x_1 + 6x_2$

s.a

$$\begin{array}{lll} x_1 & & \leq 10 \\ & x_2 & \leq 7 \\ x_1 + 7/2\, x_2 & & \leq 20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & & \\ x_2 \text{ inteiro} & & \end{array}$$



Plano de corte:

$$12/7\ x_3 + 2/7\ x_5 \geq 6/7 \quad \Leftrightarrow \quad 12\ x_3 + 2\ x_5 \geq 6$$

Como

$$x_3 = 10 - x_1 \quad \text{e} \quad x_5 = 20 - x_1 - 7/2\ x_2$$

temos

$$12\ (10 - x_1) + 2\ (20 - x_1 - 7/2\ x_2) \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 - 12x_1 + 40 - 2x_1 - 7x_2 \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -14x_1 - 7x_2 \geq -154 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{2x_1 + x_2 \leq 22}$$