isec Engenharia
Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo I

Pós-Otimização e Análise de Sensibilidade

Introdução

Nos modelos de programação linear, os parâmetros envolvidos (coeficientes **c**, **b** e **A**) raramente são conhecidos com exatidão, pelo que muitas vezes são valores aproximados, estando sujeitos a variações ao longo do tempo. Por outro lado, pode tornar-se necessário adicionar uma nova variável ou restrição ao modelo.

Deste modo, é fundamental saber se estas modificações alteram a solução ótima inicialmente obtida e, se for o caso, determinar uma nova solução ótima, sendo também importante perceber quão sensível é uma solução a variações dos dados.

Tradicionalmente, costumam ser realizados dois tipos de estudo:

- *Análise de pós-otimização*, em que é estudado o impacto na solução ótima, de alterações discretas nos parâmetros do modelo;
- *Análise de sensibilidade*, em que o principal objetivo é a determinação de intervalos de variação para os parâmetros, para os quais a solução ótima não é afetada.

Conceitos introdutórios

Considere-se o seguindo exemplo (*Exemplo 1 do Capítulo 2 de Investigação Operacional).*

“*Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho da sua quinta, ou seja, quer saber que áreas deve plantar de arroz e milho de modo a ser máximo o lucro obtido das plantações.*

O lucro por unidade de área plantada de arroz e de milho é de, respetivamente, 5 e 2 unidades monetárias (UM).

As áreas a plantar de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 unidades de área, respetivamente.

O consumo total de mão-de-obra (medido em homens/hora) nas duas plantações não deve ser maior do que 9. Cada unidade de área plantada de arroz necessita de 1 homem/hora e cada unidade de área plantada de milho necessita de 2 homens/hora.”

O modelo matemático de PL que o descreve é:

Determinar

x_1 = *nº de unidades de área a plantar de arroz*

x_2 = *nº de unidades de área a plantar de milho*

de modo a

maximizar o lucro a obter das plantações, ou seja,

$$\max z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

sujeito a

$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

O problema na forma aumentada consiste em:

Determinar

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

de modo a

$\max z = 5 x_1 + 2 x_2$

sujeito a

$$\begin{array}{lllllr}
x_1 & & + x_3 & & = 3 & (1) \\
& x_2 & & + x_4 & = 4 & (2) \\
x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 = 9 & (3)
\end{array}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0$

Considere-se os seguintes quadros, inicial e ótimo, resultantes da resolução do modelo anterior pelo método *simplex*.

<u>Quadro inicial</u>:

x_B	c_B	c_j / x_j	5 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	b
x_3	0		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
x_5	0		1	2	0	0	1	9
$z_j - c_j$			-5	-2	0	0	0	0

A

b

Solução básica admissível inicial:

$$\mathbf{x}_B \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 9 \end{cases} \qquad \text{com } z = 0$$

$$\mathbf{x}_N \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Quadro ótimo:

x_B	c_B	c_j / x_j	5 / x_1	2 / x_2	0 / x_3	0 / x_4	0 / x_5	b
x_1	5		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2	2		0	1	-1/2	0	1/2	3
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21

B^{-1} $\quad$ $\mathbf{x}_B^*$

Solução básica admissível ótima:

$$\mathbf{x}_B^* \begin{cases} x1^* = 3 \\ x4^* = 1 \\ x2^* = 3 \end{cases} \qquad \text{com } z^* = 21$$

$$\mathbf{x}_N^* \begin{cases} x3^* = 0 \\ x5^* = 0 \end{cases}$$

Verifica-se que $\mathbf{x} = [\ \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N\ ]$, ou seja, o vetor das variáveis do problema pode subdividir-se nos vetores $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_N$, o primeiro com as variáveis básicas e o segundo com as variáveis não básicas.

Por outro lado, A = [B, N], ou seja, a matriz A (matriz dos coeficientes das variáveis nas restrições) pode subdividir-se nas matrizes B e N, a primeira com as colunas das variáveis básicas e a segunda com as colunas das variáveis não básicas.

Sendo a matriz B^{-1} a matriz inversa de B, **b** o vetor dos termos independentes das restrições e $\mathbf{c}_B$ o vetor dos coeficientes das variáveis básicas na função objetivo, em qualquer solução básica, verifica-se que:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{com } z = \mathbf{c}_B'\,\mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B'\,B^{-1}\mathbf{b}}$$

A matriz B é sempre obtida no quadro inicial, através das colunas da matriz A correspondentes às variáveis básicas de uma dada iteração.

No exemplo anterior, a matriz B da base ótima é:

$$B = \begin{array}{ccc} (x1) & (x4) & (x2) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa B^{-1} da base ótima é pois:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Pode facilmente obter-se esta matriz B^{-1} a partir do quadro ótimo do simplex, selecionando as colunas correspondentes às variáveis básicas do quadro inicial (ou seja, às <u>slacks</u> e às <u>artificiais</u>).

É possível confirmar as fórmulas anteriores, no cálculo da solução ótima e do valor de z*:

$$\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

com $z^* = \mathbf{c}_B' \, \mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 21$

Considere-se novamente os quadros inicial e final da resolução do problema anterior pelo método *simplex*.

Quadro inicial:

x_B	c_B	c_j / x_j	5 x_1 ($\mathbf{P_1}$)	2 x_2 ($\mathbf{P_2}$)	0 x_3 ($\mathbf{P_3}$)	0 x_4 ($\mathbf{P_4}$)	0 x_5 ($\mathbf{P_5}$)	b
x_3	0		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	1	0	1	0	4
x_5	0		1	2	0	0	1	9
$z_j - c_j$			-5	-2	0	0	0	0

Designa-se por $\mathbf{P_f}$, o vetor dos coeficientes da variável x_f nas restrições funcionais.

Quadro ótimo:

x_B	c_B	c_j / x_j	5 x_1 ($\mathbf{X_1}$)	2 x_2 ($\mathbf{X_2}$)	0 x_3 ($\mathbf{X_3}$)	0 x_4 ($\mathbf{X_4}$)	0 x_5 ($\mathbf{X_5}$)	b
x_1	5		1	0	1	0	0	3
x_4	0		0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2	2		0	1	-1/2	0	1/2	3
$z_j - c_j$			0	0	4	0	1	21

Os vetores $\mathbf{X_f}$ são a representação dos vetores $\mathbf{P_f}$ na base B, verificando-se a seguinte relação:

$$\boxed{\mathbf{X_f} = B^{-1}\mathbf{P_f}}$$

<u>Pós-Otimização</u>

Considere-se o seguinte problema (retirado do Capítulo 2 da unidade curricular de Investigação Operacional), o qual será utilizado como base nos exercícios deste capítulo.

"*Uma empresa de mobiliário de escritório pretende lançar um modelo de secretárias e de estantes.*

Pensa-se que o mercado pode absorver toda a produção de estantes, mas aconselha-se a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Ambos os produtos são processados em duas unidades diferentes: unidade de estampagem (UE) e unidade de montagem e acabamento (UMA). A disponibilidade mensal em cada uma destas unidades é de 720 horas/máquina na UE e de 880 horas/máquina na UMA. Cada secretária necessita de 2 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA; cada estante necessita de 4 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA.

O lucro obtido por cada secretária produzida é de 6 unidades monetárias (UM) e por cada estante produzida é de 3 unidades monetárias (UM).

Pretende-se saber qual o plano de produção mensal de secretárias e de estantes que maximiza o lucro."

Formulando-o em termos de um modelo de programação linear, este problema consiste em:

Determinar

x_1 = número de secretárias a produzir por mês

x_2 = número de estantes a produzir por mês

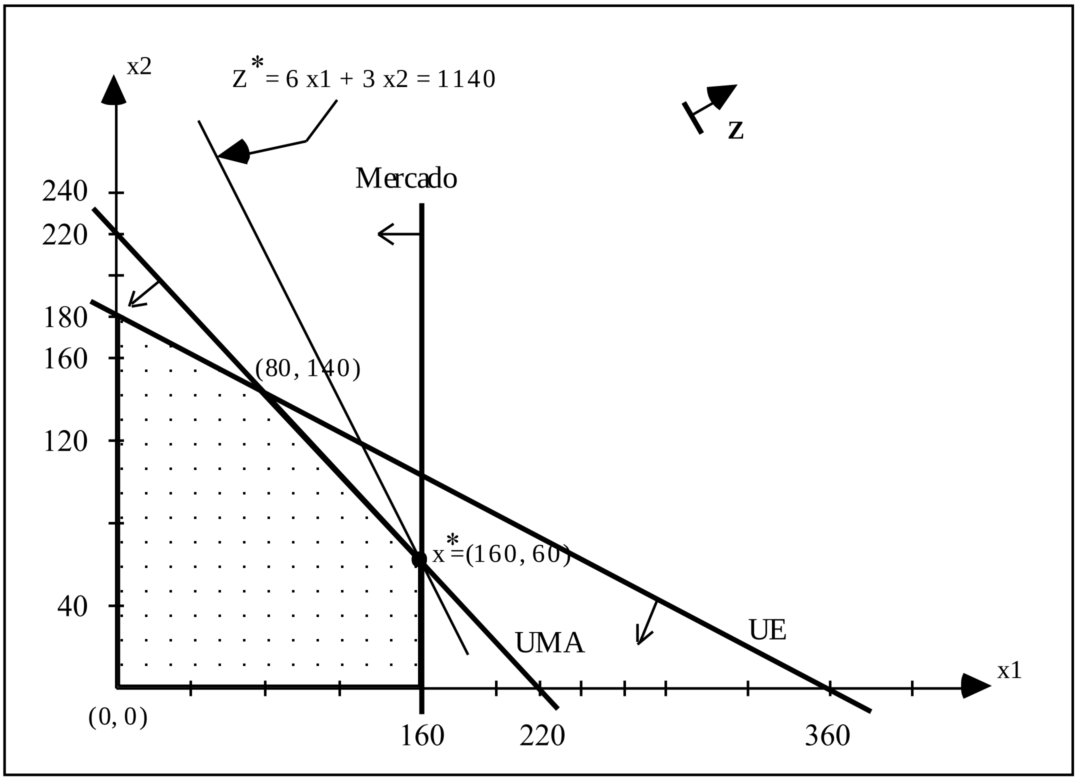
de modo a maximizar o lucro mensal, ou seja,

$$\text{maximizar } z = 6\,x_1 + 3\,x_2$$

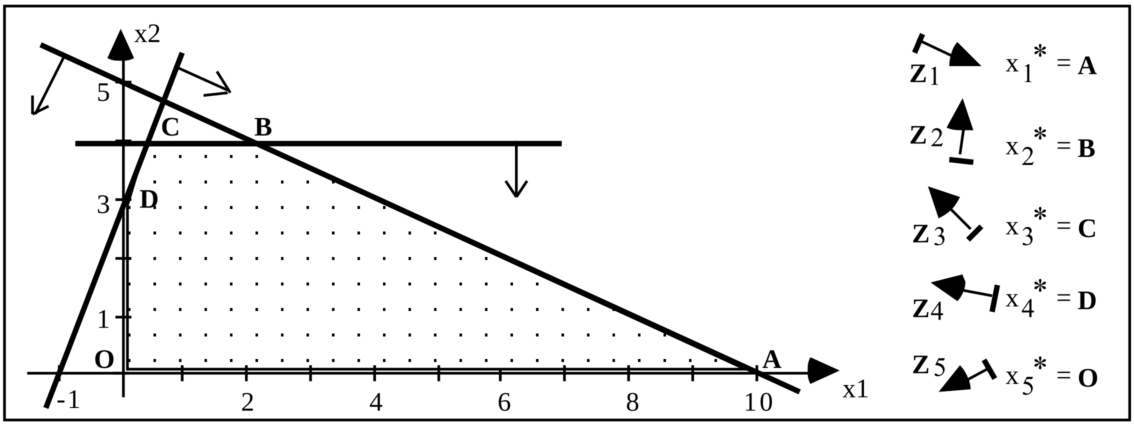
sujeito a

$$2\,x_1 + 4\,x_2 \le 720$$
$$4\,x_1 + 4\,x_2 \le 880$$
$$x_1 \le 160$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Resolvendo pelo método gráfico obtém-se:



a) ***Alteração dos coeficientes da função objetivo*** **- c_j**



Em termos gráficos, significa uma alteração do declive das retas de nível da função objetivo.

Exemplo

Considerando o exemplo anteriormente apresentado (*pág. I-8*), suponha que o vetor correspondente aos coeficientes da função objetivo foi alterado de [6 3] para [4 5].

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	¼	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

Como **x_1 e x_2** <u>estão na base</u> tem que se atualizar <u>toda</u> a linha "zj - cj".

	c_j	4	5	0	0	0	
x_B	$c_B \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_3	0	0	0	1	-1	$\underline{2}$ *	160
x_2	5	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	4	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	5/4	-1 ↑	940

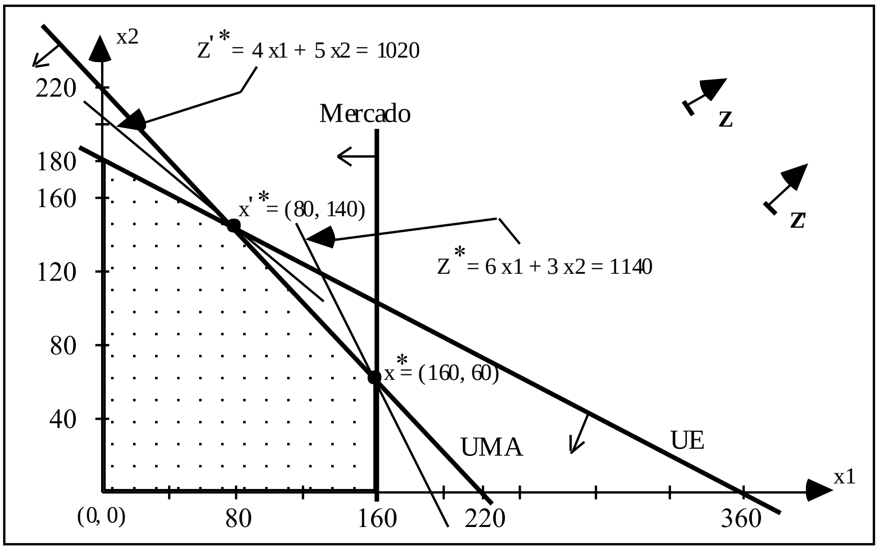
O quadro já não é ótimo => A solução ótima (x^*), o valor de z^* e a base ótima ($\{x_3,x_2,x_1\}$), não se mantêm!

Aplica-se o algoritmo *simplex* até se encontrar novo quadro ótimo.

x_5	0	0	0	1/2	-1/2	1	80
x_2	5	0	1	1/2	-1/4	0	140
x_1	4	1	0	-1/2	1/2	0	80
$z_j - c_j$		0	0	1/2	3/4	0	1020

$x_1 = 80$
$x_2 = 140$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_5 = 80$
$Z = 1020$

A alteração do declive da função objetivo, levou a que o ótimo fosse atingido num outro ponto extremo: $x^* \rightarrow x'^*$.



Ou seja, em termos gráficos, uma alteração dos coeficientes **c_j** significa uma alteração do declive das retas de nível da função objetivo

- A solução ótima encontrada mantém-se admissível

$$\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b} \text{ é sempre não negativo}$$

- A solução ótima encontrada pode deixar de ser ótima pois há alterações em "$z_j - c_j$"

  (a solução do dual associado pode tornar-se não admissível)

Seja c_f a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δc_f

$$\tilde{c}_f = c_f + \Delta c_f$$

- Se x_f não pertencer à base ótima:

  ⇨ atualizar o valor de cf e calcular o valor "z_j-c_j" correspondente à coluna de x_f

$$z_f - \tilde{c}_f = z_f - (c_f + \Delta c_f)$$

  - Se ≥ 0, solução ótima mantém-se *a)*;
  - Senão, aplicar algoritmo *simplex* até obter nova solução ótima.

- Se xf pertencer à base ótima:

  ⇨ atualizar toda a linha "$z_j - c_j$"

  - Se solução ótima se mantiver, calcular novo

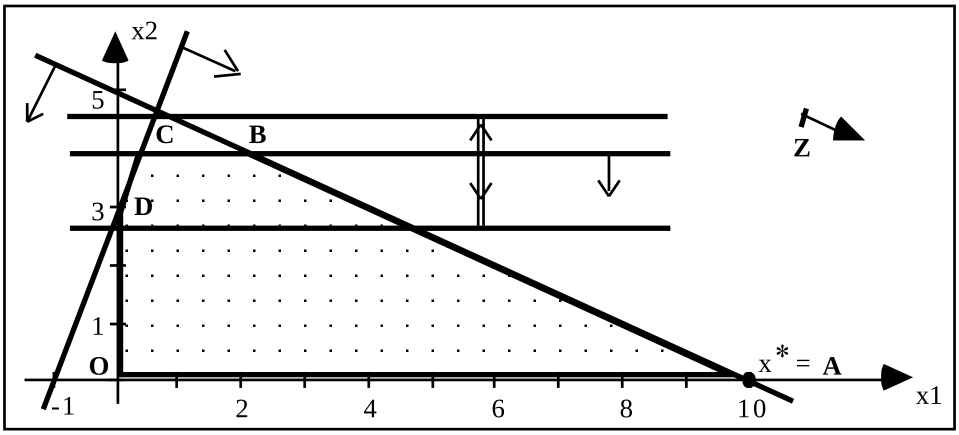
$$z\{c_f + \Delta c_f\}^* = z\{c_f\}^* + \Delta c_f \, x_f^*;$$

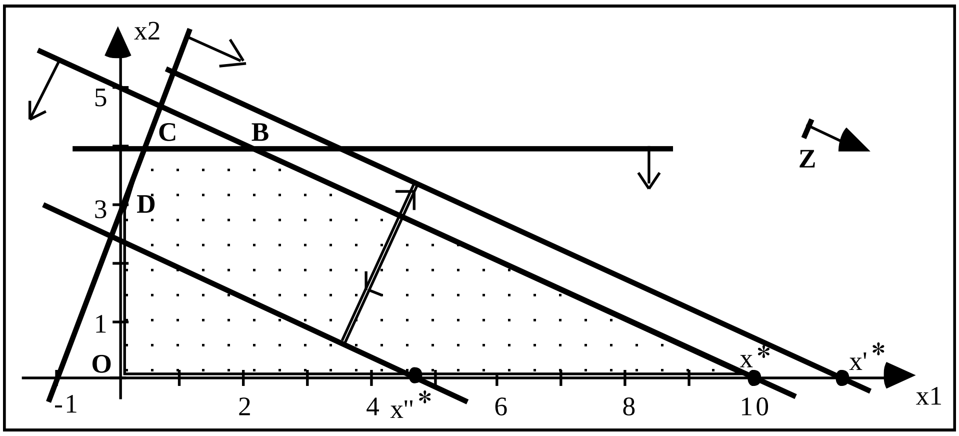
  - Senão, aplicar o algoritmo *simplex* até obter nova solução ótima.

a) *se = 0, a solução ótima mantém-se, mas existem novas soluções ótimas alternativas que têm de ser calculadas!*

b) *Alteração dos termos independentes das restrições* - $\mathbf{b_i}$

Pode estudar-se o problema dual ou usar-se uma abordagem direta.





- A linha "$z_j - c_j$" não é afetada

  (a solução do dual associado mantém-se)

- A solução correspondente depende da alteração em análise

$$\mathbf{x}^*{}_B = B^{-1}\mathbf{b}$$

  e pode tornar-se <u>não admissível</u>.

Seja b_k a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δb_k

$$\tilde{b}_k = b_k + \Delta b_k$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = \mathbf{x}_B{}^* + B^{-1}\Delta\mathbf{b} \qquad \text{com } \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Se $\tilde{\mathbf{x}}_B \geq 0$, a solução é ótima e $\tilde{z}^*$ é calculado.
- Senão, a solução é não admissível e aplica-se o algoritmo dual do *simplex* para calcular a nova solução admissível (uma vez que a condição de otimalidade não é violada).

Exemplo

Retome-se o exemplo anterior *(pág. I-8)*.

Suponha que o vetor dos termos independentes das restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 720 \\ 1280 \\ 160 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo:

$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$ \ $\mathbf{c_j}$ / $\mathbf{x_j}$	**6** $\mathbf{x_1}$	**3** $\mathbf{x_2}$	**0** $\mathbf{x_3}$	**0** $\mathbf{x_4}$	**0** $\mathbf{x_5}$	**b**
$\mathbf{x_3}$	**0**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**2**	**160**
$\mathbf{x_2}$	**3**	**0**	**1**	**0**	**1/4**	**-1**	**60**
$\mathbf{x_1}$	**6**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**160**
$\mathbf{z_j - c_j}$		**0**	**0**	**0**	**3/4**	**3**	**1140**

$\mathbf{x_1 = 160}$
$\mathbf{x_2 = 60}$
$\mathbf{x_3 = 160}$
$\mathbf{x_4 = 0}$
$\mathbf{x_5 = 0}$
$\mathbf{Z = 1140}$

$$\mathbf{x}_B{}^* = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 720 \\ 1280 \\ 160 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A nova solução, resultante das alterações, será:

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} 160 \\ 60 \\ 160 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -240 \\ 160 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Esta solução é <u>não admissível</u> (relativamente ao problema alterado).

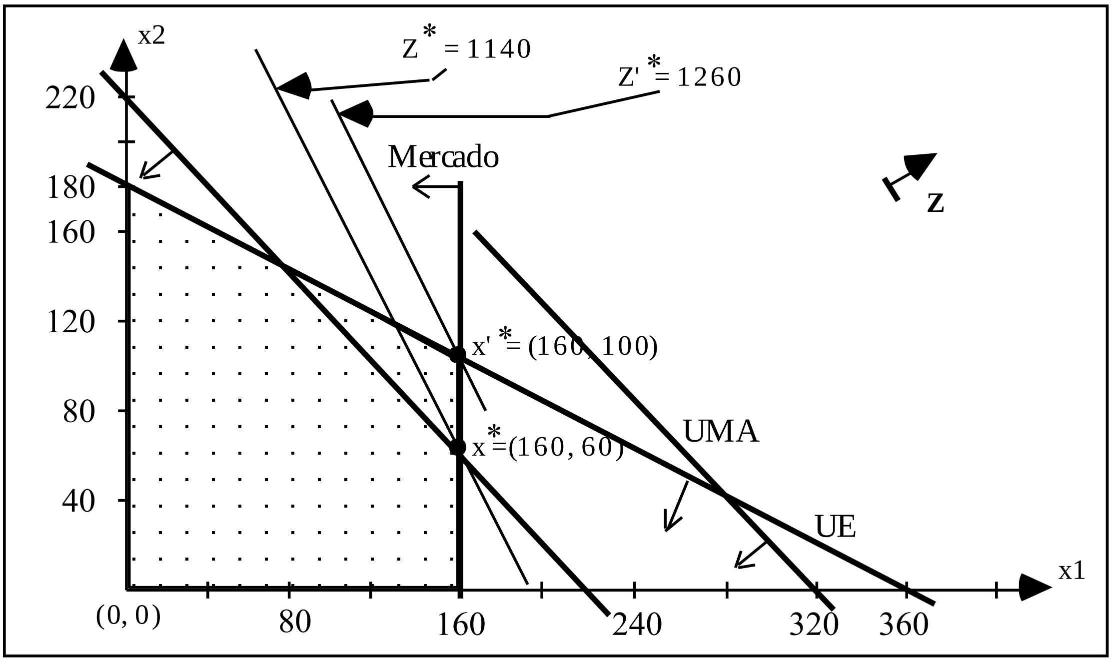
x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
← x_3	0	0	0	1	$\underline{-1}$ *	2	-240
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	160
x_1	6	1	0	0	0	1	160
z_j - c_j		0	0	0	3/4 ↑	3	1440

Neste caso, aplica-se o algoritmo dual do *simplex*, partindo do quadro anterior:

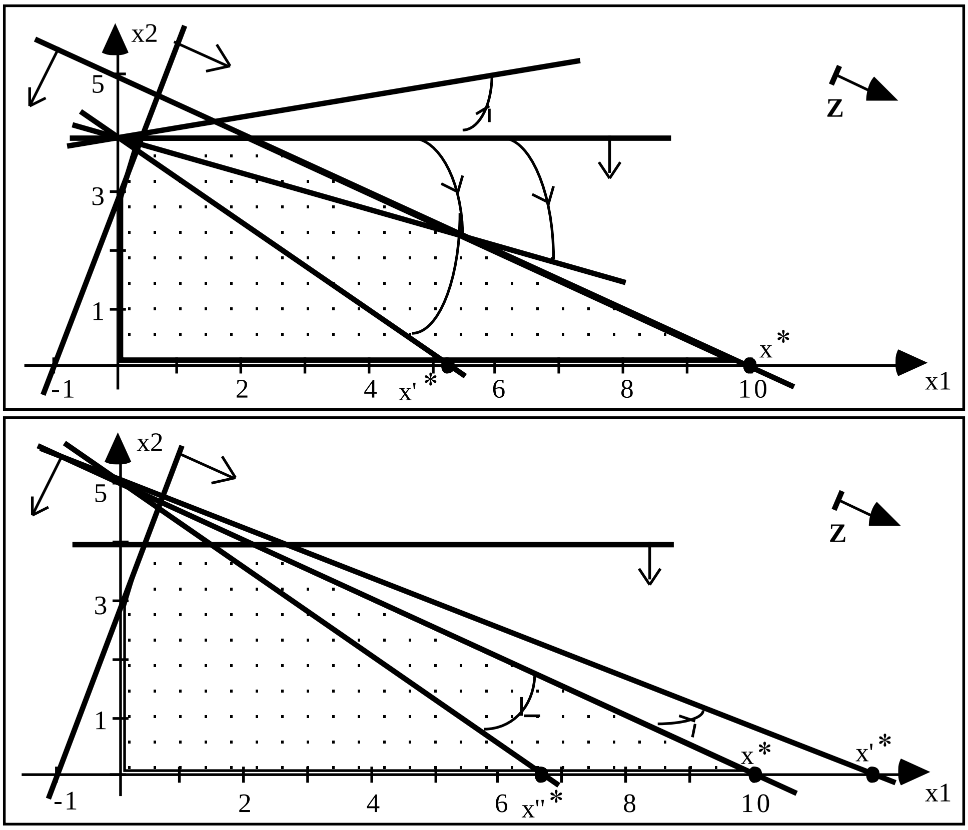
x_4	0	0	0	-1	1	-2	240
x_2	3	0	1	1/4	0	-1/2	l00
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	3/4	0	9/2	1260

$x_1 = 160$
$x_2 = 100$
$x_3 = 0$
$x_4 = 240$
$x_5 = 0$
$Z = 1260$

A nova solução ótima corresponde ao ponto extremo x'*:



c) <u>*Alteração dos coeficientes da matriz A*</u> - a_{ij}



Seja a_{kf} a sofrer um acréscimo (ou decréscimo) Δa_{kf}

$$\tilde{a}_{kf} = a_{kf} + \Delta a_{kf}$$

Há duas situações a considerar:

A) a_{kf} é coeficiente de x_f não incluído na base ótima

$$\tilde{\mathbf{X}}_f = B^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_f = B^{-1}(\mathbf{P}_f + \Delta\mathbf{P}_f) = B^{-1}\mathbf{P}_f + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_f$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_f = \mathbf{X}_f + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_f$$

em que $\Delta\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ \Delta a_{kf} \\ : \\ 0 \end{bmatrix}$

e $\mathbf{X}_f$ é a coluna associada a x_f

$$\tilde{z}_f - c_f = z_f + \mathbf{c}'_B B^{-1} \Delta\mathbf{P}_f - c_f$$

- Se ≥ 0, a solução ótima mantém-se;
- Senão, aplica-se o algoritmo *simplex*.

B) a_{kf} é coeficiente de x_f incluído na base ótima (caso mais complexo)

A alteração de uma coluna de A pertencente à <u>matriz identidade</u>, impõe a reconstituição da mesma matriz a qual conduz a um novo quadro *simplex*. Neste novo quadro, podem verificar-se as seguintes situações:

1 - **Soluções básicas admissíveis do primal e do dual**

⇨ quadro mantém-se ótimo;

2 - **Solução básica admissível do primal, mas não admissível do dual**

⇨ aplica-se o algoritmo *simplex* para obter nova solução ótima;

3 - **Solução básica não admissível para o primal mas admissível para o dual**

⇨ aplica-se o algoritmo dual do *simplex* para obter a nova solução ótima;

4 - **Soluções básicas não admissíveis para ambos os problemas primal e dual**

⇨ resolve-se de novo o problema (?) *ou*

⇨ força-se a saída de x_f da base ótima (do quadro ótimo antes das alterações):

1' - Se existir algum elemento positivo na linha da variável x_f, correspondente a uma variável não básica, tomar como "pivot" o que tiver menor valor "z_j-c_j".

Proceder à iteração respetiva e aplicar **A)** à nova SBA

Caso contrário, o processo continua.

2' - Escolher a variável a entrar na base:

$$\min_j \left\{(z_j-c_j) : (z_j-c_j) \geq 0\right\} = (z_r-c_r)$$

Se $x_{ir} \leq 0$ escolher a variável seguinte em termos do valor de "z_j-c_j".

3' - Escolher a variável a sair da base

$$Q_o = \min_i \left\{\frac{x_{io}}{x_{ir}} \;\middle|\; x_{ir} > 0\right\} = \frac{x_{so}}{x_{sr}}$$

4' - Substituir x_s por x_r na base e regressar a 1'.

Exemplo

Considere o exemplo anterior *(pág. I-8).*

Suponha que o vetor dos coeficientes da variável x_1 nas restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 \\ 3.2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

x_1 está na base

$$\tilde{X}_1 = X_1 + B^{-1}\Delta P_1$$

$$\tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_3	0	4/5	0	1	-1	2	160
x_2	3	-1/5	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
x_3	0	0	0	1	-1	6/5	32
x_2	3	0	1	0	1/4	-4/5	92
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	18/5	1236

Soluções admissíveis para os problemas primal e dual

⇨ logo mantêm-se ótimas.

Exemplo

Considere novamente o exemplo anterior *(pág. I-8)*.

Suponha que o vetor dos coeficientes da variável x_2 nas restrições foi alterado de $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Seja o quadro ótimo do *simplex*:

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

x_2 está na base

$$\tilde{X}_2 = X_2 + B^{-1}\Delta P_2$$

$$\tilde{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_B	c_B \ c_j / x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	1	1	-1	2	160
x_2	3	0	1/4	0	1/4	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
x_3	0	0	0	1	-2	6	-80 ←
x_2	3	0	1	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3	-6 ←	l680

Soluções não admissíveis para os problemas primal e dual ⇨ Faz-se x_2 sair da base do quadro ótimo e em seguida introduz-se a alteração enunciada.

Regressando ao quadro ótimo:

x_B	c_B \ c_j, x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	0	1	-1	2	160
x_2	3	0	1	0	1/4 *	-1	60
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	0	3/4	3	1140
					<		

$x_1 = 160$
$x_2 = 60$
$x_3 = 160$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
$Z = 1140$

- Elementos positivos na linha x_2 ⇨ "1/4"
- O menor valor "z_j-c_j" corresponde a x_4 ⇨ substituir x_2 por x_4

No novo quadro obtido, x2 é uma VNB. Por essa razão aplica-se A):

x_B	c_B \ c_j, x_j	6 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	4	1	0	-2	400
x_4	0	0	4	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	-3	0	0	+6	1140

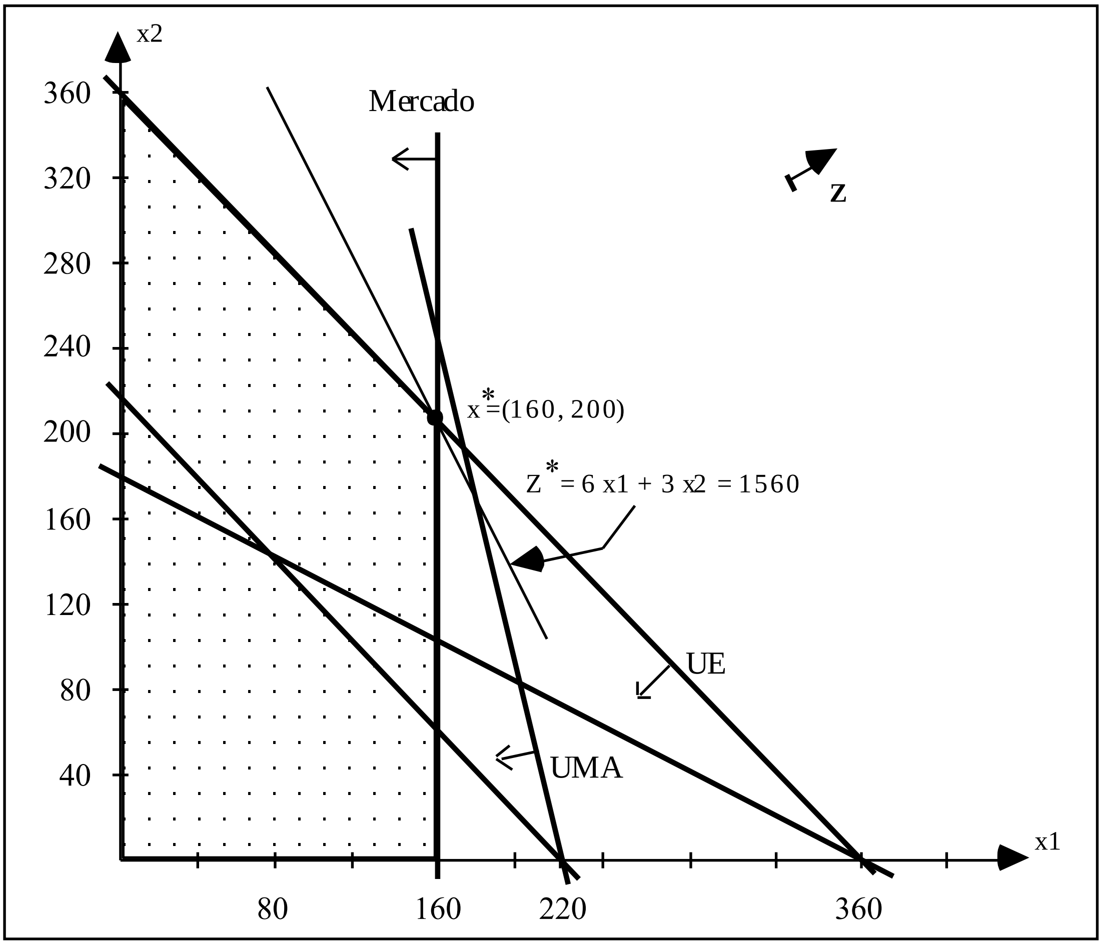
$$\tilde{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_2 + B^{-1}\Delta\mathbf{P}_2$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	c_j	6	3	0	0	0	
x_B	c_B x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
← x_3	0	0	2 *	1	0	-2	400
x_4	0	0	1	0	1	-4	240
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	-3	0	0	+6	960
			↑				
x_2	3	0	1	1/2	0	-1	200
x_4	0	0	0	-1/2	1	-3	40
x_1	6	1	0	0	0	1	160
$z_j - c_j$		0	0	+3/2	0	+3	1560

Nova solução ótima:

$x1^* = 160$
$x2^* = 200$
$x3^* = 0$
$x4^* = 40$
$x5^* = 0$ com $z^* = 1560$


x2
360
320
280
240
200
160
120
80
40
Mercado
z
x*=(160, 200)
Z* = 6 x1 + 3 x2 = 1560
UE
UMA
x1
80
160
220
360