4 – Algoritmo de *Branch and Bound*

- Está na base de muitas implementações computacionais que resolvem problemas de PLI (incluindo a biblioteca PuLP de Python).

- Consiste na **partição** (ramificação) sucessiva do conjunto de soluções admissíveis do problema de PLI em subconjuntos, e na **limitação** do valor ótimo da função objetivo (limite inferior se for uma maximização, ou superior se for uma minimização), de modo a excluir os subconjuntos que não contenham a solução ótima.

- Para demostrar o funcionamento deste método, considere-se o seguinte exemplo adaptado de:

Alves, Rui & Delgado, Catarina. (1997). Programação Linear Inteira.

Uma empresa de brinquedos, decidiu criar uma nova secção de brinquedos tradicionais de madeira, começando por apenas dois tipos: cavalos de baloiço (lucro unitário de ***2400*** *UM) e comboios antigos (lucro unitário de* ***1500*** *UM). Cada cavalo requer* ***1*** *hora de trabalho e* ***9*** *m^2 de madeira, enquanto cada comboio requer* ***1*** *hora de trabalho e* ***5*** *m^2 de madeira. Supondo que estão disponíveis* ***6*** *horas de trabalho e* ***45*** *m^2 de madeira por dia, que quantidades deve a empresa fabricar diariamente de forma a maximizar o lucro (assumindo que todos os brinquedos fabricados serão vendidos).*

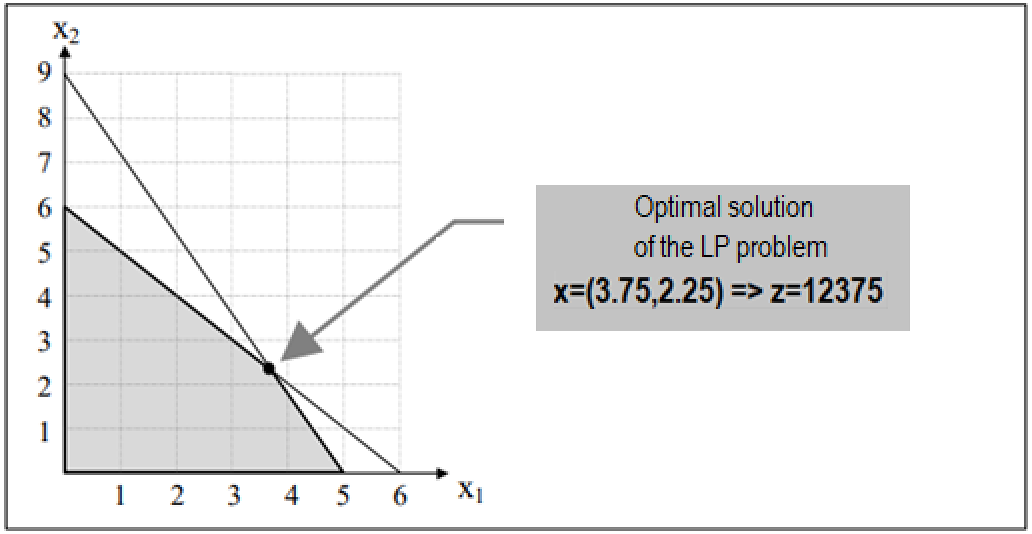
- O modelo de PLI será:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2\\
&\text{sujeito a}\\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)}\\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)}\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0\\
&\quad x_1 \text{ e } x_2 \text{ inteiros}
\end{aligned}$$

- O primeiro passo consiste na resolução do modelo de PL associado (relaxação linear do modelo de PLI), a qual resulta no seguinte quadro do *simplex*:

		2400.0	1500.0	0.0	0.0	
		x1	x2	x3	x4	b
x2	1500.0	0.0	1.0	2.2	-0.2	2.25
x1	2400.0	1.0	0.0	-1.2	0.2	3.75
zj-cj		0.0	0.0	375.0	225.0	12375.00

- O mesmo resultado pode visualizar-se no gráfico seguinte:



- É claro que o valor ótimo da função objetivo não pode exceder **12375**.

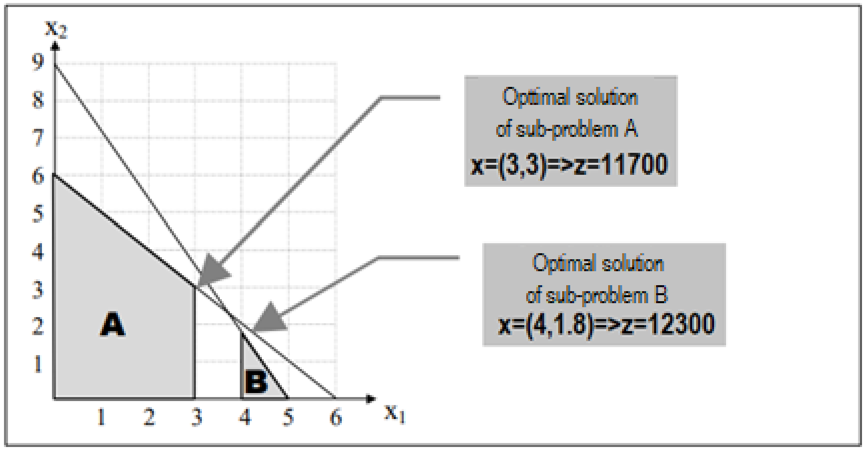
- Como x_1 e x_2 não são inteiras na solução ótima deste problema, é necessário efetuar a sua partição em dois novos sub-problemas (**A** e **B**), através da introdução de novas restrições que eliminam soluções não-inteiras: $\mathbf{x_1 \leq 3}$ e $\mathbf{x_1 \geq 4}$. A partição podia ter sido feita em relação a x_2.

- **A:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \leq 3 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- **B:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\, x_1 + 1500\, x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \geq 4 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



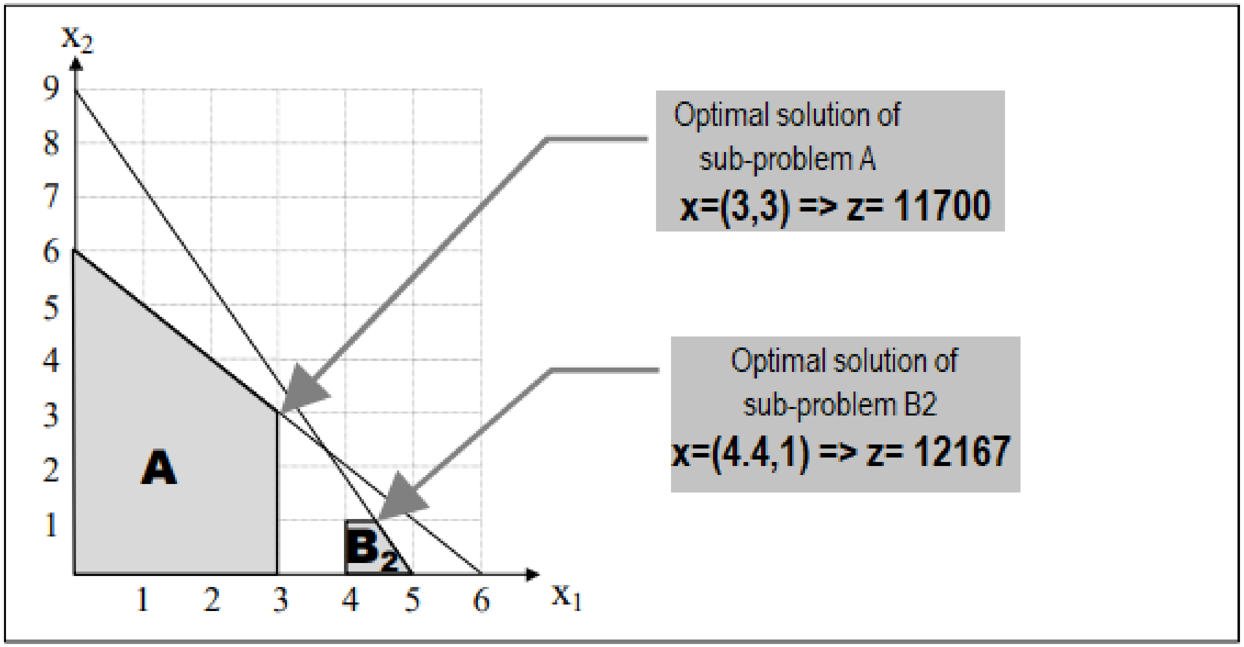
- A solução ótima de **A** é inteira, o que significa que se encontrou uma solução inteira cujo valor da função objetivo é **11700**.
- O valor ótimo da função objetivo estará então compreendido entre dois limites: $\mathbf{11700 \leq z \leq 12375}$.
- A solução ótima de **B** não é inteira e o valor da função objetivo é **12300** (>**11700**) $\Rightarrow$ este sub-problema pode conter uma solução inteira melhor do que a de **A**.
- Há pois que efetuar a sua partição nos sub-problemas **B1** e **B2**, através das restrições: $\mathbf{x_2 \leq 1}$ e $\mathbf{x_2 \geq 2}$.

- **B1:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2\\
&\text{sujeito a}\\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)}\\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)}\\
&\quad x_1 \ge 4\\
&\quad x_2 \ge 2\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

- **B2:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2\\
&\text{sujeito a}\\
&\quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)}\\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)}\\
&\quad x_1 \ge 4\\
&\quad x_2 \le 1\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$



- O sub-problema **B1** é excluído por não ter soluções possíveis.
- O sub-problema **B2** (à semelhança do sub-problema **B**), é particionado nos sub-problemas **B21** e **B22**, através da introdução das restrições: $\mathbf{x1 \leq 4}$ e $\mathbf{x1 \geq 5}$.

- **B21:**

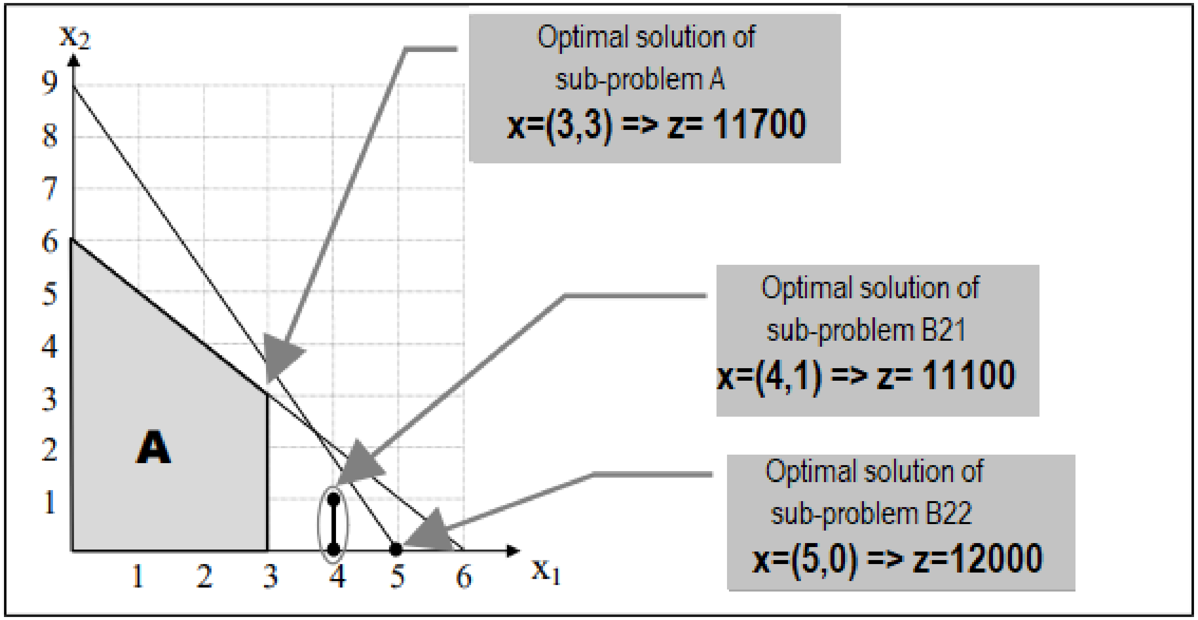
$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \ge 4 \\
&\quad x_2 \le 1 \\
&\quad x_1 \le 4 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$\boxed{x_1 = 4}$

- **B22:**

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2400\,x_1 + 1500\,x_2 \\
&\text{sujeito a} \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \le 6 \quad \text{(Horas de trabalho)} \\
&\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \quad \text{(Madeira)} \\
&\quad x_1 \ge 4 \\
&\quad x_2 \le 1 \\
&\quad x_1 \ge 5 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

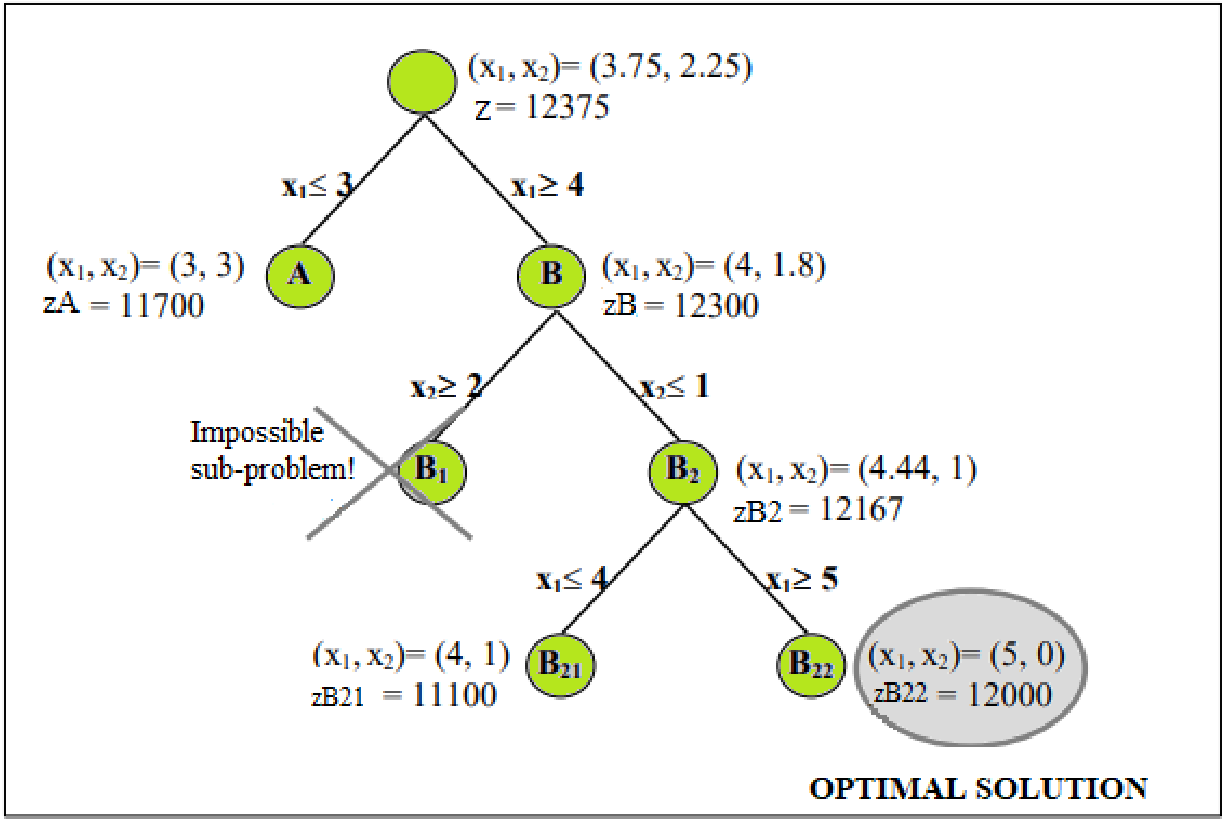
$\boxed{x_1 \ge 5}$



- Os sub-problemas **B21** e **B22** têm ambos soluções inteiras.
- O valor ótimo da função objetivo do sub-problema **B21** é **11100**, menor que **11700**, ou seja, pior do que a solução de que já tínhamos.
- O valor ótimo da função objetivo do sub-problema **B22** é **12000.**
- Atualizando os limites da função objetivo obtemos então:

$$\mathbf{12000 \leq z \leq 12000.}$$

- O seguinte diagrama em árvore, ilustra a sequência total das partições.



- À medida que se vai “descendo” na árvore vão-se atualizando os limites inferior e superior do valor ótimo da função objetivo (z*).
  - No nó inicial (raiz da árvore): $0 \leq z^* \leq 12375$.
  - No nível dos sub-problemas **A** e **B**: $11700 \leq z^* \leq 12300$.
  - No terceiro nível: $11700 \leq z^* \leq 12167$.
  - Finalmente, no último nível: $12000 \leq z^* \leq 12000$.
- Podemos então concluir que **x*= (5,0)** com **z* = 12000**, é a **solução ótima do problema**.

- Note-se que:
  - É efetuada a partição de um sub-problema se na sua solução ótima existir pelo menos uma variável com restrição de integralidade que assuma valores não-inteiros, desde que esse sub-problema possa conter uma solução inteira melhor do que a já existente.
  - São excluídos os sub-problemas que não tenham soluções admissíveis ou que não possam conter uma solução admissível melhor do que a já existente.