Problemas de minimização

Existem duas alternativas:

1. Maximizar o simétrico da função objetivo:

$$\text{Min } z = \mathbf{c'x} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } z' = -\,\mathbf{c'x}$$

2. Mudar o teste de otimalidade e o critério de entrada na base

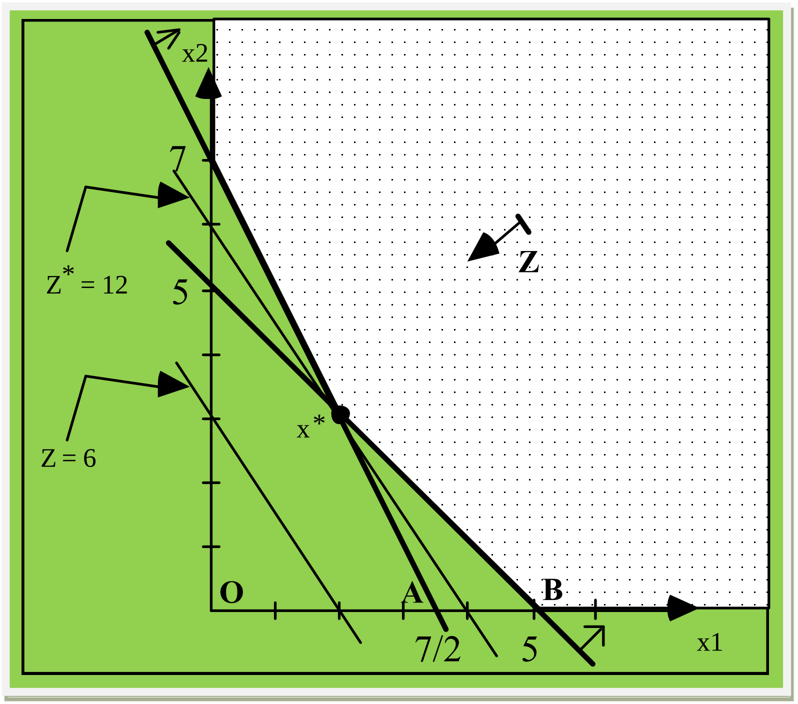
Nesta unidade curricular optou-se por utilizar a **primeira alternativa**

Exemplo

$$\text{Min } z = 3\,x_1 + 2\,x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$2\,x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



Em primeiro lugar transforma-se a função objetivo numa maximização:

$$\text{Min } z = 3\,x_1 + 2\,x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } z' = -3\,x_1 - 2\,x_2$$

Em seguida, aplica-se o método Simplex (usando a técnica das "Duas Fases"):

1ª Fase

$$\text{Max } z1^{a}\text{fase} = -\underbrace{x_5 - x_6}_{\uparrow \;\; \uparrow \;\; \textit{artificiais}}$$

sujeito a

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ 2\,x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 7 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6 \end{array}$$

Quadro Inicial (da 1ª fase)

	c_i	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c'_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	-1	1	1	-1	0	1	0	5
← x_6	-1	<u>2</u> *	1	0	-1	0	1	7
$z_j - c_j$		-3	-2	1	1	0	0	-12
		↑						

PONTO O → não admissível

	Ci	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c'_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
← x_5	-1	0	1/2	-1	<u>1/2</u> *	1	-1/2	3/2
x_1	0	1	1/2	0	-1/2	0	1/2	7/2
$z_j - c_j$		0	-1/2	1	-1/2	0	3/2	-3/2
					↑			

PONTO A → não admissível

x_B	c'_B \ c_i / x_i	0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	-1 x_5	-1 x_6	b
x_4	0	0	1	-2	1	2	-1	3
x_1	0	1	1	-1	0	1	0	5
$z_j - c_j$		0	0	0	0	1	1	0

Quadro ótimo da 1ª fase porque não existem valores negativos na linha z_j-c_j e as variáveis artificiais foram removidas da base e são nulas.

Solução ótima da 1ª fase:

VBs

$x_1 = 5$

$x_4 = 3$

VNBs

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_5 = 0$

$x_6 = 0$

x_5 e x_6 são VNBs ➔ solução básica admissível para o problema inicial ➔ PONTO B

2ª Fase

Max z' = $-3\,x_1 - 2\,x_2$

Quadro Inicial (da 2ª fase)

x_B	c'_B	c_i / x_i	-3 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	b
← x_4	0		0	$\underline{1}$ *	-2	1	3
x_1	-3		1	1	-1	0	5
$z_j - c_j$			0	-1	3	0	-15
				↑			

x_B	c'_B	c_i / x_i	-3 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	b
x_2	-2		0	1	-2	1	3
x_1	-3		1	0	1	-1	2
$z_j - c_j$			0	0	1	1	-12

Quadro ótimo da 2ª fase porque não existem valores negativos na linha z_j-c_j.

Solução ótima do problema:

VBs	**VNBs**
$x_1 = 2$	$x_3 = 0$
$x_2 = 3$	$x_4 = 0$

A solução ótima obtida corresponde ao PONTO **x***.

Como se esteve a maximizar z', o valor ótimo que se obtém do quadro Simplex é **z'***. O valor ótimo de z será obtido da seguinte forma:

$$z'^{*} = -12 \Rightarrow z^{*} = 12$$

Casos particulares do método Simplex

Situações que podem ocorrer:

- Empate na escolha do valor mais negativo da linha $z_j - c_j$

  ➔ ***qualquer um pode ser selecionado***

  (a única diferença reside no "trajeto" seguido até ao ótimo)

- Existe zj - cj negativo, mas apenas existem elementos não positivos na coluna “pivot”

  ➔ ***solução não limitada***

- Variável artificial aparece na solução ótima

  ➔ ***solução inexistente*** ➔ ***problema impossível***

  (não há região admissível)

- Empate nos quocientes, ou seja, na escolha da variável que vai sair da base

  ➔ ***qualquer uma pode sair, mas conduz a solução degenerada***

  (variável básica igual a zero)

- Valor de $z_j - c_j$ nulo sendo x_j uma variável não básica

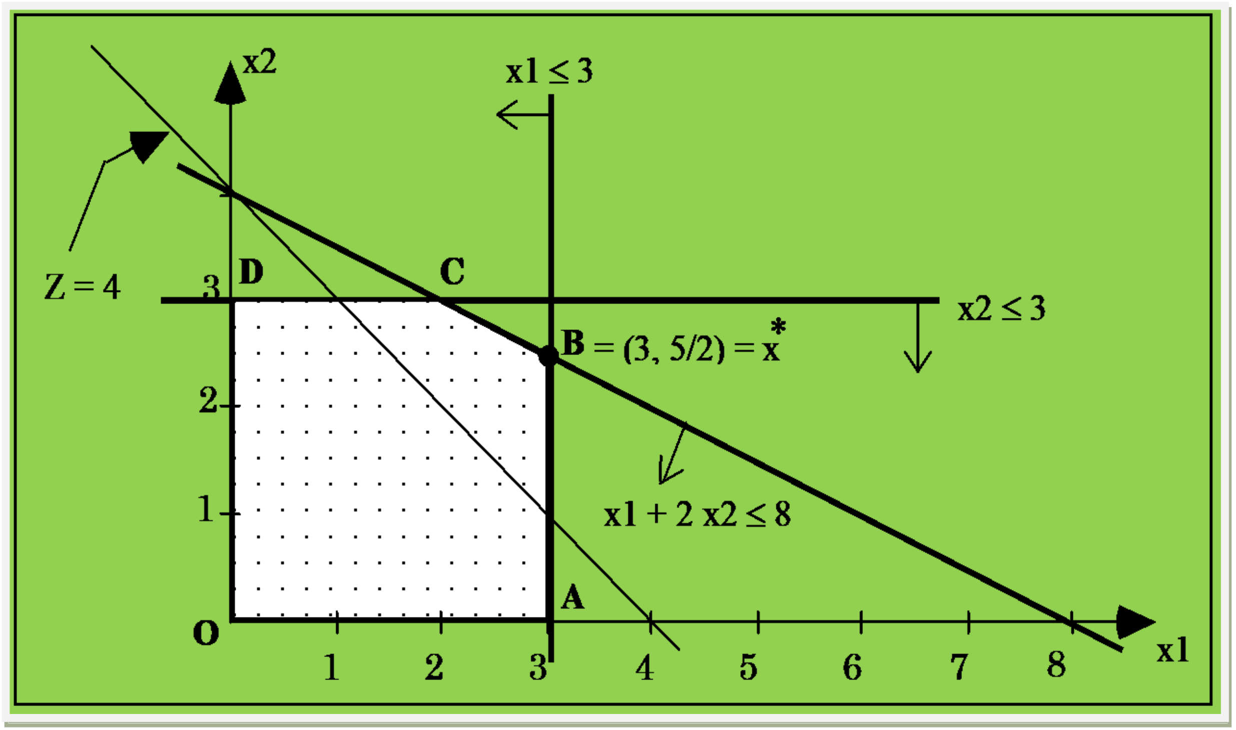
  ➔ ***soluções ótimas alternativas***

Empate na escolha do valor mais negativo da linha zj - cj

Exemplo

Max $z = x_1 + x_2$
sujeito a

$x_1 \leq 3$
$x_2 \leq 3$
$x_1 + 2\,x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



Resolução pelo método Simplex:

Max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & + x_3 & & & = 3 \\ & & x_2 & & + x_4 & & = 3 \\ x_1 & + 2 & x_2 & & & + x_5 & = 8 \end{array}$$

$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, ..., 5$

Quadro Inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	1 x_1	1 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	$x_1 = 0$
x_4	0	0	1	0	1	0	3	$x_2 = 0$
x_5	0	1	2	0	0	1	8	$x_3 = 3$
$z_j - c_j$		*-1*	*-1*	0	0	0	0	$x_4 = 3$
		↑	↑					$x_5 = 8$

Quer x_1, quer x_2, pode entrar na base **z = 0**

PONTO O

- *Se entrar x_1 sai x_3 da base e a próxima solução básica admissível corresponde ao ponto* ***A***
- *Se entrar x_2 sai x_4 da base e a próxima solução básica admissível corresponde ao ponto* ***D***

Colocando x_1 na base (e retirando x_3) obtém-se:

	C_i	1	1	0	0	0	
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_1	1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	3
← x_5	0	0	$\underline{2}$ *	-1	0	1	5
$z_j - c_j$		0	-1	1	0	0	3
			↑				

$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 3$
$x_5 = 5$
$z = 3$

PONTO A

x_B	c'_B \ c_i / x_i	x_1 (1)	x_2 (1)	x_3 (0)	x_4 (0)	x_5 (0)	b	
x_1	1	1	0	1	0	0	3	$x_1 = 3$
x_4	0	0	0	1/2	1	-1/2	1/2	$x_2 = 5/2$
x_2	1	0	1	-1/2	0	½	5/2	$x_3 = 0$
$z_j - c_j$		0	0	1/2	0	½	11/2	$x_4 = 1/2$
								$x_5 = 0$
								$z = 11/2$

Solução ótima ➔ PONTO B

Colocando x_2 na base (e retirando x_4) obtém-se:

x_B	c'_B \ c_i / x_i	x_1 (1)	x_2 (1)	x_3 (0)	x_4 (0)	x_5 (0)	b	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	$x_1 = 0$
x_2	1	0	1	0	1	0	3	$x_2 = 3$
← x_5	0	***1*** *	0	0	-2	1	2	$x_3 = 3$
$z_j - c_j$		-1	0	0	1	0	3	$x_4 = 0$
		↑						$x_5 = 2$
								$z = 3$

PONTO D

	Ci	1	1	0	0	0		
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
← x_3	0	0	0	1	$\underline{2}$ *	-1	1	$x_1 = 2$
x_2	1	0	1	0	1	0	3	$x_2 = 3$
x_1	1	1	0	0	-2	1	2	$x_3 = 1$
$z_j - c_j$		0	0	0	-1	1	5	$x_4 = 0$
					↑			$x_5 = 0$
								$z = 5$

PONTO C

	Ci	1	1	0	0	0		
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	0	0	0	1/2	1	-1/2	1/2	$x_1 = 3$
x_2	1	0	1	-1/2	0	1/2	5/2	$x_2 = 5/2$
x_1	1	1	0	1	0	0	3	$x_3 = 0$
$z_j - c_j$		0	0	1/2	0	1/2	11/2	$x_4 = 1/2$
								$x_5 = 0$
								$z = 11/2$

Solução ótima → PONTO B

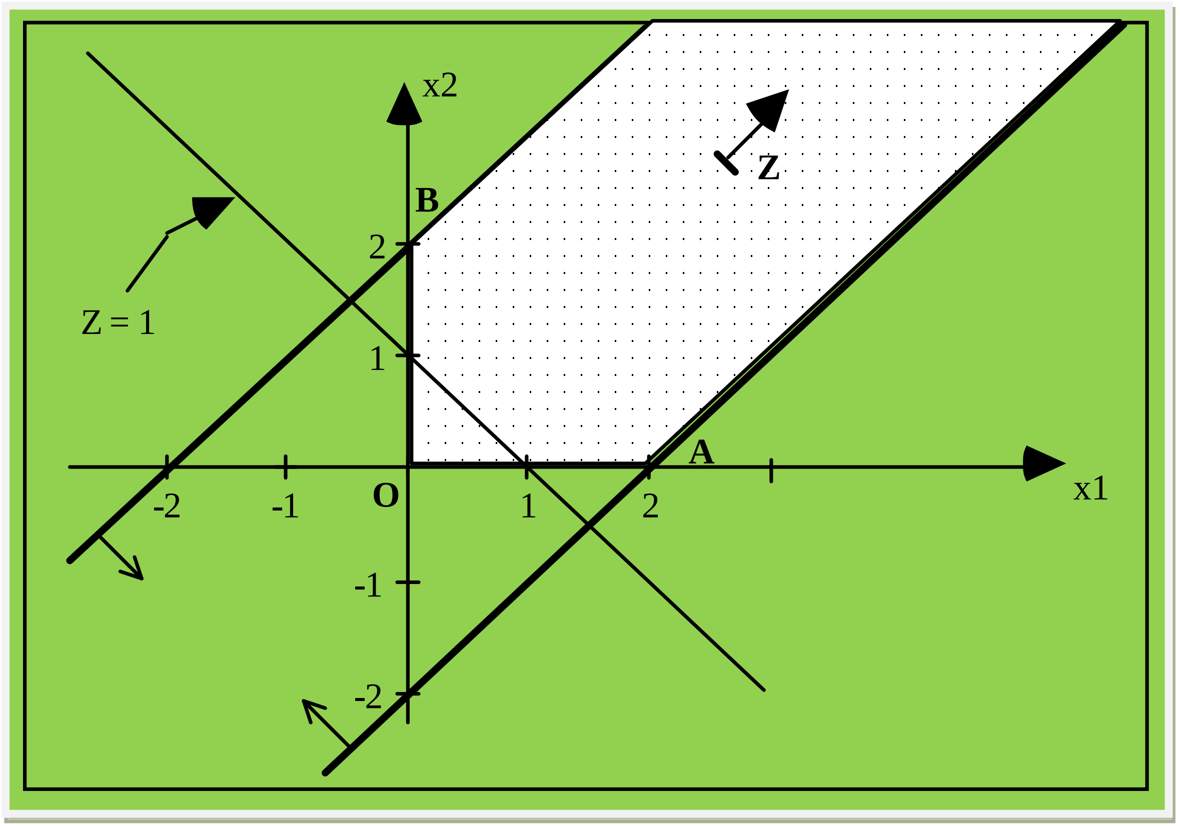
Solução não limitada

Exemplo

Max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



Resolução pelo método Simplex:

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } z = x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \\
\quad x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
\quad -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\
\quad x_i \geq 0;\ i = 1, 2, 3, 4
\end{array}
$$

Quadro Inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	1 x_1	1 x_2	0 x_3	0 x_4	b
← x_3	0	***1*** *	-1	1	0	2
x_4	0	-1	1	0	1	2
$z_j - c_j$		-1	-1	0	0	0
		↑				

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 2$
$x_4 = 2$
$z = 0$

PONTO O

		c_i	1	1	0	0	
x_B	c'_B	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	b
(?) x_1	1		1	-1	1	0	2
(?) x_4	0		0	0	1	1	4
$z_j - c_j$			0	-2	1	0	2
				↑			

$x_1 = 2$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 4$
$z = 2$

PONTO A

Como x_2 é uma variável candidata a entrar na base, mas na coluna pivot só existem valores ≤ 0, pode concluir-se que o problema tem **solução ótima não limitada!**

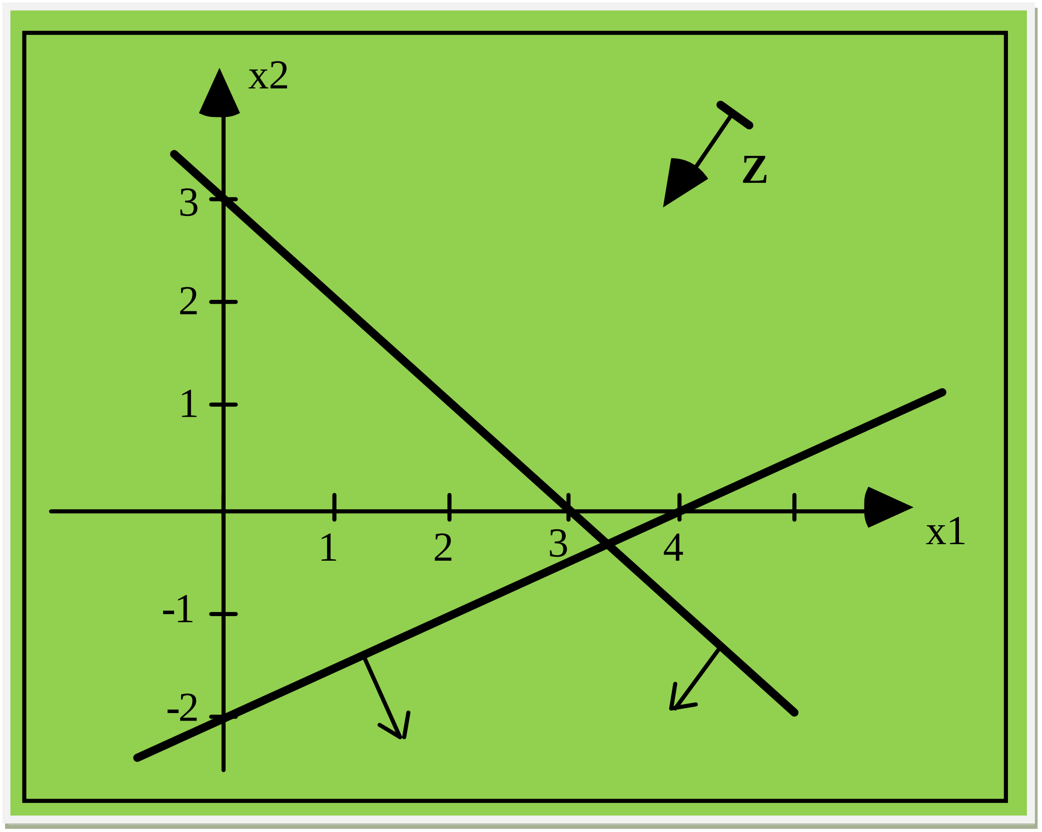
Solução inexistente

Exemplo

Min $z = 3\,x_1 + 4\,x_2$

sujeito a

$x_1 - 2x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



Resolução pelo método Simplex (com técnica das “Duas Fases”):

1ª Fase

$$\text{Max } z_{1^a fase} = -x_4$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 3 \\ x_i \geq 0;\ i = 1, 2, ..., 5 \end{aligned}$$

Quadro Inicial

x_B	c'_B	c_i / x_i	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x_4	0 x_5	b
x_4	-1		1	-2	-1	1	0	4
← x_5	0		<u>*1*</u> *	1	0	0	1	3
$z_j - c_j$			-1	2	1	0	0	-4
			↑					

x_B	c'_B \ c_i / x_i	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x_4	0 x_5	b
x_4	-1	0	-3	-1	1	-1	1
x_1	0	1	1	0	0	1	3
$z_j - c_j$		0	3	1	0	1	-1

Quadro ótimo da 1ª fase porque todos os valores da linha z_j-c_j são ≥ 0. No entanto, a variável artificial, x_4, está na base (tem valor diferente de zero) e, consequentemente, $z_{1^a fase} = -1 < 0$

Nesta situação pode concluir-se que **o problema não tem solução (é impossível)!**

Se tivesse sido utilizada a técnica do "Grande M", obter-se-ia um quadro ótimo (sem valores negativos na linha zj-cj) com variáveis artificiais na base e a conclusão a retirar seria idêntica à da resolução anterior.

Sugestão: Experimente resolver o mesmo problema utilizando a técnica do "Grande M".

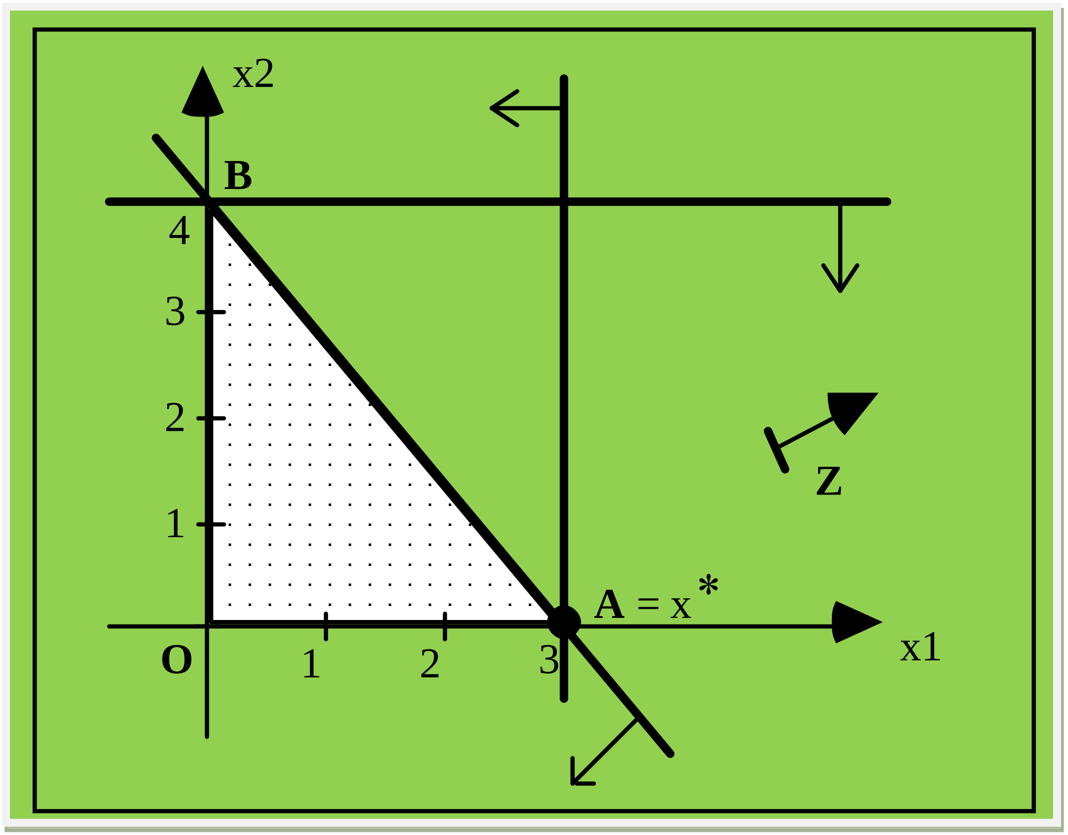
Solução degenerada

Exemplo

Max $z = 5\,x_1 + 2\,x_2$

sujeito a

$x_1 \leq 3$
$x_2 \leq 4$
$4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 12$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



Em termos gráficos, as soluções degeneradas podem ser identificadas pelo facto de o ponto que as traduz ser definido por mais do que duas restrições.

Pelo método Simplex:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & & = 3 \\ & x_2 & & + x_4 & & = 4 \\ 4x_1 & + 3x_2 & & & + x_5 & = 12 \end{array}$$

$$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, ..., 5$$

Quadro Inicial

	c_i	5	2	0	0	0	
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
(?) x_3	0	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	4
(?) x_5	0	4	3	0	0	1	12
$z_j - c_j$		-5	-2	0	0	0	0
		↑					

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 3$
$x_4 = 4$
$x_5 = 12$
$z = 0$

PONTO O

Pode retirar-se x_3 ou x_5 da base:

- Se for retirada x_3 então x_5 vai tornar-se zero
- Se for retirada x_5 então x_3 vai tornar-se zero

➔ em ambas as situações $x_3 = x_5 = 0$

Retirando x_3 da base obtém-se:

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_1	5	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	4
← x_5	0	0	$\underline{3}$ *	-4	0	1	0
$z_j - c_j$		0	-2	5	0	0	15
			↑				

$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 4$
$x_5 = 0$
$z = 15$

PONTO A

Pelo quadro anterior verifica-se que a solução ainda não é a ótima ➔ tem que se colocar x_2 na base. No entanto, pelo gráfico vê-se que a solução já é a ótima (PONTO A).
Colocando x_2 na base obtém-se:

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_1	5	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	0	4/3	1	-1/3	4
x_2	2	0	1	-4/3	0	1/3	0
$z_j - c_j$		0	0	7/3	0	2/3	15

$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 4$
$x_5 = 0$
$z = 15$

Solução ótima ➔PONTO A

Uma das variáveis básicas (x_2) tem valor zero! ➡ **Solução ótima degenerada**

Neste caso particular pode acontecer a situação que se verificou atrás, ou seja, pelo gráfico observar-se que se está no ponto ótimo, mas o quadro Simplex não ser ótimo e haver necessidade de iterar. Além disso, existe a possibilidade de o método entrar em ciclo, sendo necessário usar um método próprio para o evitar.

Retirando x_5 da base obtém-se:

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	0	0	-3/4	1	0	-1/4	0
x_4	0	0	1	0	1	0	4
x_1	5	1	3/4	0	0	1/4	3
$z_j - c_j$		0	7/4	0	0	5/4	15

$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 4$
$x_5 = 0$
$z = 15$

Solução ótima ➔ PONTO A

Uma vez mais se verifica que a **solução é degenerada** já que a variável básica x_3 tem valor zero.

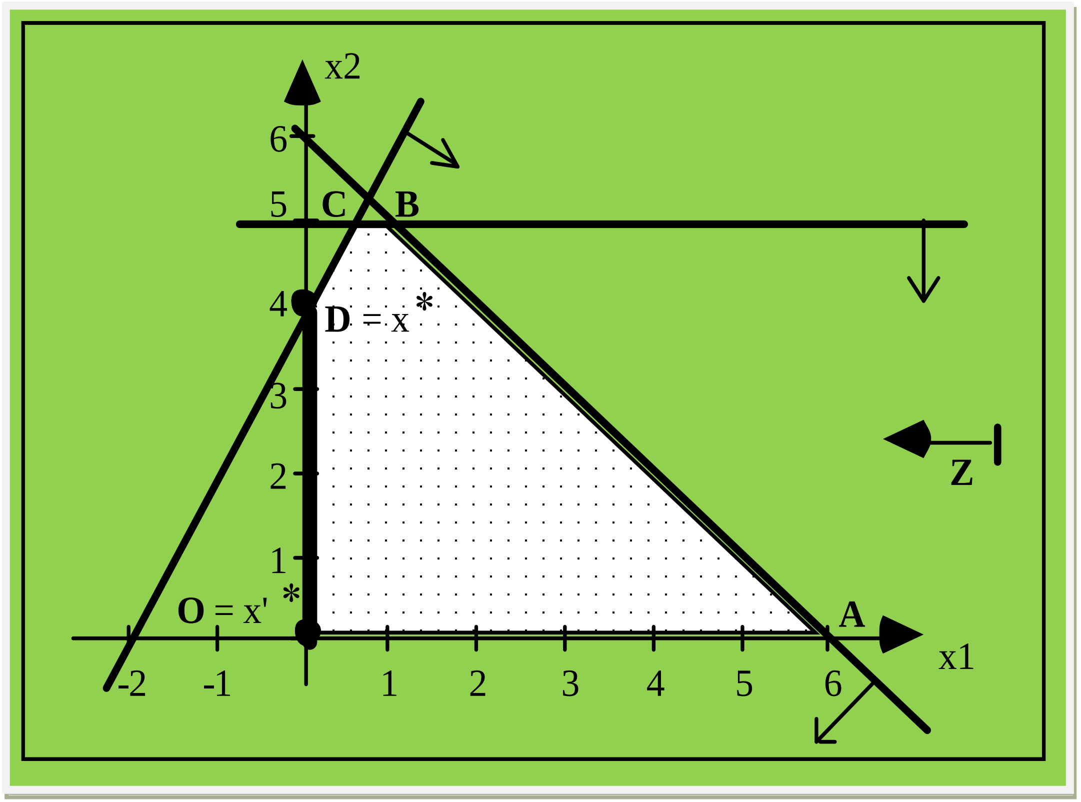
Soluções ótimas alternativas

Exemplo

Min $z = x_1$

sujeito a

$$-2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$



Resolução pelo método Simplex:

max $z' = -x_1$

sujeito a

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-2x_1 + & x_2 & + x_3 & & & = 4 \\
x_1 + & x_2 & & + x_4 & & = 6 \\
& x_2 & & & + x_5 & = 5
\end{array}
$$

$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, ..., 5$

Quadro Inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	-1 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
← x_3	0	-2	***1*** *	1	0	0	4
x_4	0	1	1	0	1	0	6
x_5	0	0	1	0	0	1	5
$z_j - c_j$		1	***0*** ↑	0	0	0	0

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 4$
$x_4 = 6$
$x_5 = 5$
$z' = 0$

Solução ótima ➔ PONTO O

Mas se a variável x_2 entrar na base, o valor de **z** não aumenta nem diminui!

➔ **soluções ótimas alternativas**

Colocando x_2 na base, obtém-se a outra solução ótima alternativa:

x_B	c'_B \ c_i / x_i	-1 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
← x_2	0	-2	1	***1*** *	0	0	4
x_4	0	3	0	-1	1	0	2
x_5	0	2	0	-1	0	1	1
$z_j - c_j$		1	0	***0***	0	0	0

$x_1 = 0$
$x_2 = 4$
$x_3 = 0$
$x_4 = 2$
$x_5 = 1$
$z^* = 0$

Solução ótima ➔ PONTO D

São soluções ótimas do problema os pontos **O** e **D**, e todos os que estão sobre o segmento de reta que os une (os quais são combinação linear convexa desses dois pontos).