isec Engenharia

Departamento de Engenharia Informática e de Sistemas

Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Capítulo II

Programação Linear inteira

1 - Introdução

A **Programação Linear Inteira** (**PLI**) é uma extensão da programação linear que resulta da inclusão de variáveis inteiras no modelo.

O modelo contempla exclusivamente variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Pura (PLIP)**
O modelo contempla variáveis contínuas e variáveis inteiras	**Programação Linear Inteira Mista (PLIM)**

2 – Resolução de problemas de PLI

Primeira abordagem

- Resolver o problema como se fosse um de programação linear (relaxação do problema de PLI) e arredondar os valores ótimos encontrados para cada uma das variáveis de decisão inteiras.
- No entanto, após o arredondamento, a solução obtida:
  - Pode ser não admissível para o problema de PLI
  - Pode não ser ótima para o problema de PLI

Algoritmos mais frequentemente usados

- Planos de Corte (introduzido por Ralph Gomory)
- Ramificação e Limitação (*Branch-and-Bound*)

3 – Algoritmo de Gomory

- Este algoritmo enquadra-se numa das grandes classes em que é possível classificar os vários métodos de resolução de problemas de PLI – a classe dos **métodos de planos de corte**.

- O procedimento comum a todos estes métodos consiste na adição de novas restrições, designadas por **planos de corte** ou simplesmente cortes, que têm por objetivo restringir a região admissível.

- O **algoritmo de Gomory** foi dos primeiros a ser utilizado na resolução de problemas de PLI.

Algoritmo de Gomory para PLIP

Considere-se o seguinte problema de PLIP:

$$\left.\begin{aligned} &Maximizar\ z = \sum_j c_j x_j \\ &s.a \quad \sum_j a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ &\qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{aligned}\right\}$$

Problema de Programação Linear Associado (Relaxação Linear)

$$x_j \ \text{inteiros} \longleftarrow$$

Restrições de Integralidade

A lógica de funcionamento deste algoritmo é muito simples e resume-se em dois passos:

1º Passo

- Resolver o problema de PL associado:
  - No caso da solução ótima satisfazer as restrições de integralidade, então é também solução ótima do problema de PLIP.
  - Caso contrário, o processo continua.

2º Passo

- **Introduzir uma nova restrição no problema** e resolver de novo o problema de PL associado:

    - Se a solução obtida satisfizer as restrições de integralidade, então também é solução ótima do problema de PLIP.

    - Caso contrário, repetir o procedimento (2º Passo) até obter uma solução inteira, ou concluir pela impossibilidade do problema.

Resumindo:

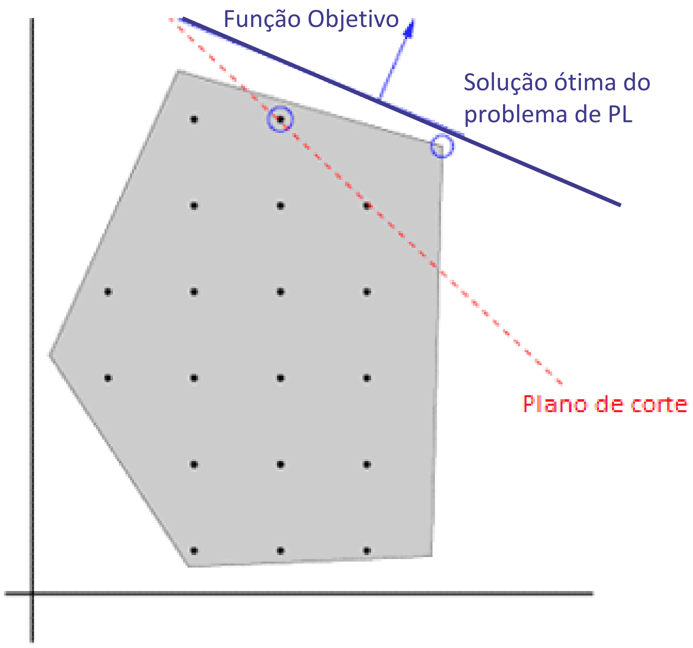
- Este procedimento consiste em **reduzir a região admissível** através da introdução de restrições sucessivas que mais não fazem do que cortar “fatias” do conjunto **X** (região admissível). Daí a designação de **planos de corte**.

- O objetivo final é encontrar uma solução que satisfaça qualquer uma das restrições de integralidade.

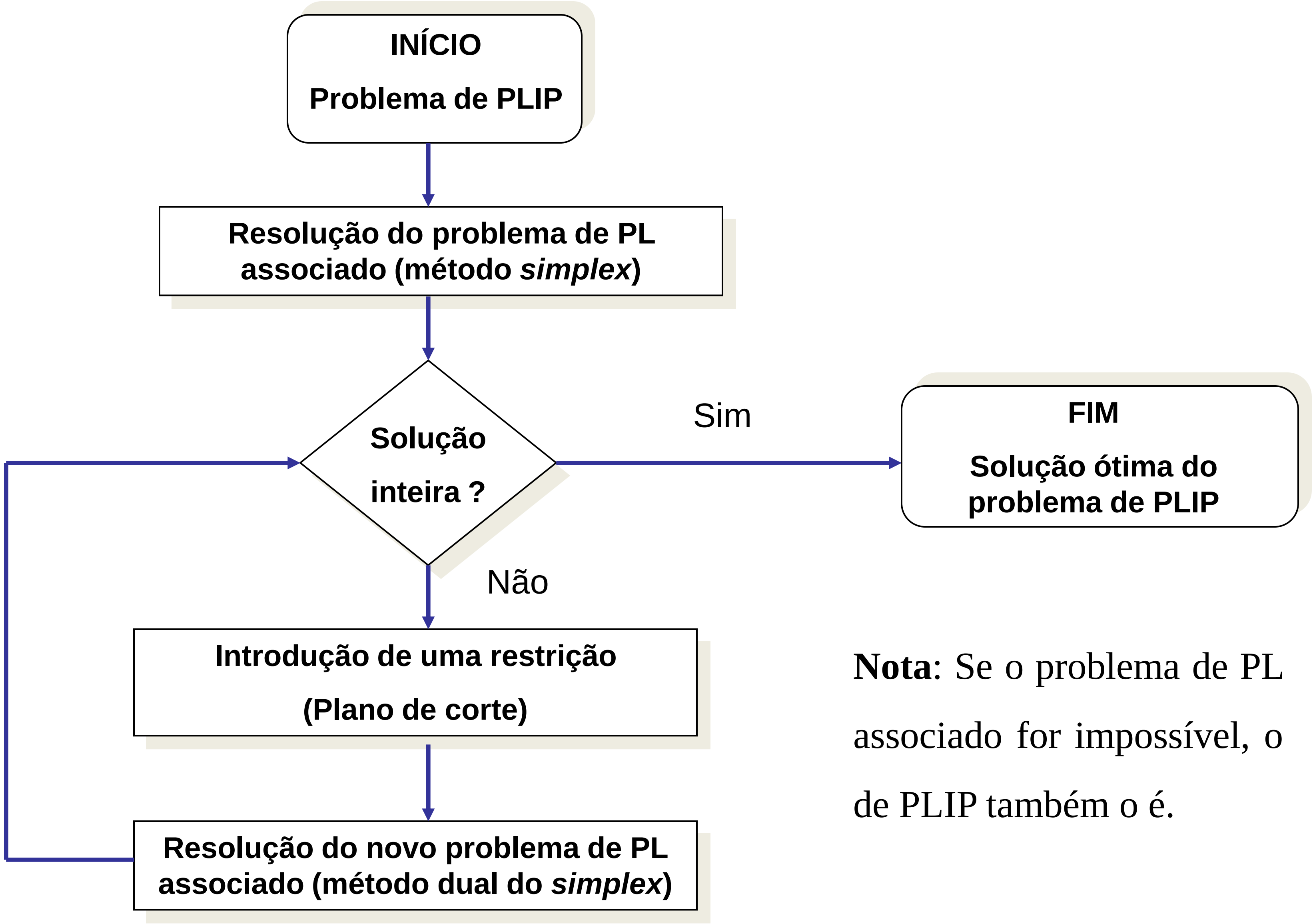
- Em cada iteração do algoritmo a restrição a introduzir deve garantir que:

  - A solução ótima do problema de PL associado da iteração anterior **seja não admissível para o novo problema**.

  - **Nenhuma solução inteira do problema inicial seja excluída** ao restringir a região admissível.



Fluxograma do Algoritmo



Nota: Se o problema de PL associado for impossível, o de PLIP também o é.

A restrição de corte a introduzir no 2º passo do algoritmo tem a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \notin I_B} f_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Em que:

x_{s0} — é o valor da coluna *b* do quadro final do Simplex, correspondente a $s^{\underline{ésima}}$ variável básica (não inteira) que pode decompor-se nas partes inteira e fracionária:

$$x_{s0} = [x_{s0}] + f_{s0}$$

$$[x_{s0}] \geq 0 \;\; , 0 \;\; \leq f_{s0} < 1$$

x_{sj} — é o elemento da linha ***s*** coluna ***j*** do quadro final do *simplex*, sendo $\boldsymbol{x_j}$ uma variável não pertencente à base.

Este também se pode decompor em:

$$x_{sj} = \left[x_{sj} \right] + f_{sj}$$

$$0 \leq f_{sj} < 1$$

Nota: Há varias restrições de corte possíveis, tantas quantas as variáveis básicas não inteiras. A regra normalmente usada consiste em selecionar para restrição de corte, aquela à qual corresponde um f_{s0} maior.

Algoritmo de Gomory para PLIM

- Na prática são frequentes as situações em que nem todas as variáveis estão sujeitas a uma restrição de integralidade, ou seja, o modelo incorpora simultaneamente variáveis inteiras e contínuas.

- Neste caso, diz-se que o problema é de Programação Linear Inteira Mista, ou abreviadamente, de PLIM.

- A partir do algoritmo apresentado anteriormente para problemas de PLIP, Gomory desenvolveu uma outra versão adaptada a este tipo de problemas.

Considere-se o seguinte problema de PLIM:

$$Maximizar\ z = \sum_{j} c_j x_j$$

$$
\begin{aligned}
s.a \quad & \sum_{j} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\
& x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \\
& x_j \ \text{ inteiro} \qquad \text{para } (j = 1,2,\ldots,p) \qquad (p < n)
\end{aligned}
$$

- A forma de resolver um problema de PLIM é idêntica à que se usa para a resolução de problemas de PLIP (os 1º e 2º passos do algoritmo são iguais);
- A única diferença reside na **forma da restrição de corte**.

A **restrição de corte** tem agora a seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{j \in N} d_{sj} x_j \geq f_{s0}}$$

Sendo:

$$d_{sj} = \begin{cases} x_{sj} & \mathrm{j} \in \mathrm{N}_{+}^{\mathrm{C}} \\ \dfrac{f_{s0}}{1 - f_{s0}} \left| x_{sj} \right| & \mathrm{j} \in \mathrm{N}_{-}^{\mathrm{C}} \\ f_{sj} & \mathrm{j} \in \mathrm{N}^{\mathrm{I}} \quad se \;\; f_{sj} \leq f_{s0} \\ \dfrac{f_{s0}}{1 - f_{s0}} (1 - f_{sj}) & \mathrm{j} \in \mathrm{N}^{\mathrm{I}} \quad se \;\; f_{sj} > f_{s0} \end{cases}$$

Em que:

N - é o conjunto dos **índices das variáveis não básicas**;

N^{I} - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **sujeitas à restrição de integralidade**;

N^{C} - é o conjunto dos índices das variáveis não básicas **não sujeitas à restrição de integralidade**, designando-se por:

N_{+}^{C} - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$;

N_{-}^{C} - se para essas variáveis $\mathbf{x_{ij} < 0}$.