Problemas com restrições de '≥' e de '='

Até agora assumiu-se que o problema estava na forma *standard*, ou seja, na forma:

$$\max z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

s.a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

e $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Para as outras formas legítimas do modelo de PL (com restrições de ≥ ou de =), têm que ser feitos alguns ajustamentos para que os problemas possam ser resolvidos pelo método Simplex.

O único problema real que estas novas formas colocam, é a identificação de uma **solução básica admissível inicial**.

Até aqui, esta solução era determinada, muito convenientemente, da seguinte forma: inicialmente as variáveis originais eram as **VNB** (valor igual a zero) e as variáveis "slack" eram as **VB** (valor igual ao termo independente da respetiva restrição).

Agora, a abordagem a utilizar será a da técnica da **variável artificial**.

Esta técnica constrói um novo **problema auxiliar**, introduzindo uma variável falsa (chamada variável artificial) em cada restrição onde esta seja necessária. Esta nova variável é adicionada apenas com o objetivo de ser a **VB** inicial para essa restrição.

As restrições de não-negatividade impõem-se igualmente para as variáveis artificiais. A Função Objetivo é alterada pelas mesmas.

Restrições de '='

Qualquer restrição de igualdade:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

é equivalente ao par de restrições:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

No entanto, em vez de se fazer esta substituição, a qual aumenta o número de restrições, usa-se a técnica da **variável artificial**.

Considere-se o seguinte exemplo:

Maximizar $z = 5\ x_1 + 2\ x_2$

s.a

$x_1 \leq 3$
$x_2 \leq 4$
$x_1 + 2\ x_2 = 9$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Depois da introdução das variáveis "slack" (necessárias para as restrições de $\leq$), obtém-se o problema na forma aumentada:

Maximizar $z = 5\ x_1 + 2\ x_2$

s.a.

$x_1 + \mathbf{x_3} = 3$
$x_2 + \mathbf{x_4} = 4$
$x_1 + 2\ x_2 = 9$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Verifica-se que estas equações não têm uma solução básica admissível inicial óbvia, porque não existe uma variável "slack" que se possa usar como **VB** inicial na 3ª equação.

A técnica da variável artificial ultrapassa esta dificuldade, introduzindo uma variável artificial não negativa (x_5) nesta equação, como se fosse uma "slack".

Assim a 3ª equação transforma-se em:

$$x_1 + 2\,x_2 + \mathbf{x_5} = 9$$

com a restrição de não-negatividade, $x_5 \geq 0$.

Procedendo da forma habitual, tem-se agora uma solução básica admissível para o **problema auxiliar** (mas **não admissível** para o problema inicial):

$$\mathbf{x} = (0, 0 , 3 , 4 , 9)$$

Restrições de '≥'

A direção de uma desigualdade é sempre invertida quando ambos os lados são multiplicados por –1.

Como resultado, qualquer restrição funcional do tipo '≥' pode ser convertida numa restrição equivalente do tipo '≤', multiplicando-a por –1.

Considere-se o seguinte exemplo:

Maximizar $z = 5\ x_1 + 2\ x_2$

s.a

$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2\ x_2 \geq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

A 3ª restrição pode transformar-se numa do tipo ≤, desta forma:

$$x_1 + 2\ x_2 \geq 9 \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -\ x_1 - 2\ x_2 \leq -9$$

O problema na forma aumentada, com as variáveis “slack” x_3, x_4 e x_5, é então:

Maximizar $z = 5\ x_1 + 2\ x_2$

s.a

$x_1 + \mathbf{x_3} = 3$

$x_2 + \mathbf{x_4} = 4$

$-x_1 - 2\ x_2 + \mathbf{x_5} = -9$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

No entanto, relembre-se o facto de que o método Simplex parte do pressuposto que todos os termos independentes são não negativos ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$).

É este pressuposto que permite selecionar as variáveis “slack” para serem as **VB** iniciais (com valor igual ao termo independente da respetiva restrição) e assim obter uma solução básica admissível inicial.

No entanto, um termo independente negativo como o da 3ª restrição, origina um valor negativo para a variável “slack” x_5, na solução inicial: $\mathbf{x} = (0\ ,\ 0\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ -9)$. Ou seja, esta solução não respeita a restrição de não-negatividade de x_5.

Multiplicando a 3ª restrição por –1 converte-se o termo independente num valor positivo, mas altera-se o coeficiente de x_5 para –1: $x_1 + 2\, x_2 - \mathbf{x_5} = 9$. Ou seja, o valor desta variável continua a ser negativo na solução inicial.

No entanto, neste formato a restrição pode ser visualizada como uma restrição de igualdade com um termo independente não negativo. Assim, pode aplicar-se a técnica da variável artificial como se fez anteriormente, construindo um **problema auxiliar**.

Se x6 for a variável artificial não negativa para esta restrição, a sua forma final é

$$x_1 + 2\, x_2 - \mathbf{x_5} + \mathbf{x_6} = 9$$

sendo a variável x_6 usada como **VB** inicial e x_5 como **VNB**.

Assim, a **SBA** inicial para este problema auxiliar (**SBNA** para o problema inicial) seria:

$$\mathbf{x} = (0\ ,\ 0\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 0\ ,\ 9)$$

A variável x_5 é designada por "surplus" (excedente), porque subtrai o excedente do lado esquerdo da restrição em relação ao lado direito, para converter a desigualdade numa equação equivalente.

Conclusão

As variáveis artificiais são adicionadas às restrições de '=' e de '≥' com o objetivo de servirem como VB iniciais para essas mesmas restrições.

No entanto, são variáveis sem qualquer significado físico, apenas usadas como um artifício matemático. Por este motivo, não devem figurar na solução ótima dos problemas com um valor diferente de zero. Para que tal seja garantido, podem utilizar-se duas técnicas:

- Técnica do "**Grande M**"
- Técnica das "**Duas Fases**"

Resumindo:

Tipo de restrição	Tipo de variável a adicionar	Características
$\leq$	**slack**	➢ Coeficiente **1** na restrição onde é adicionada ➢ Excesso do valor de **b** relativamente ao lado esquerdo da restrição ➢ Coeficiente **0** na função objetivo
$\geq$	**surplus**	➢ Coeficiente **–1** na restrição onde é adicionada ➢ Excesso do lado esquerdo da restrição relativamente a **b** ➢ Coeficiente **0** na função objetivo
$\geq$ e =	**artificial**	➢ Coeficiente **1** na restrição onde é adicionada ➢ Não tem significado físico por isso **não pode aparecer na solução óptima**: – técnica do "Grande M" – técnica das "Duas Fases" ➢ O coeficiente na função objetivo depende da técnica utilizada ("Grande M" ou "Duas Fases")

Técnica do "Grande M"

Nesta técnica, as variáveis artificiais são fortemente penalizadas na função objetivo de modo a provocar o seu rápido anulamento.

Esta penalização consiste em atribuir-lhes um coeficiente arbitrariamente grande e negativo (**-M**).

O método Simplex, na medida em que procede à melhoria da função objetivo, tenderá naturalmente a eliminar da base as referidas variáveis artificiais.

Técnica das "Duas Fases"

O problema é resolvido em duas fases distintas:

1ª Fase - Consiste em remover da base as variáveis artificiais, de forma a obter uma solução básica admissível apenas com variáveis reais do problema: esta será a 1ª **SBA** do problema inicial e constituirá a solução de partida da segunda fase.

2ª Fase – Parte da **SBA** obtida na fase anterior e aplica normalmente o método Simplex até atingir o ótimo.

Exemplo 1

Considere-se que no Exemplo 1 apresentado no Capítulo II, era imposta a necessidade de cultivar totalmente o terreno de área 4 e era preciso empregar pelo menos 9 pessoas.

O modelo matemático será agora:

Determinar

x_1 = área a plantar de arroz

x_2 = área a plantar de milho

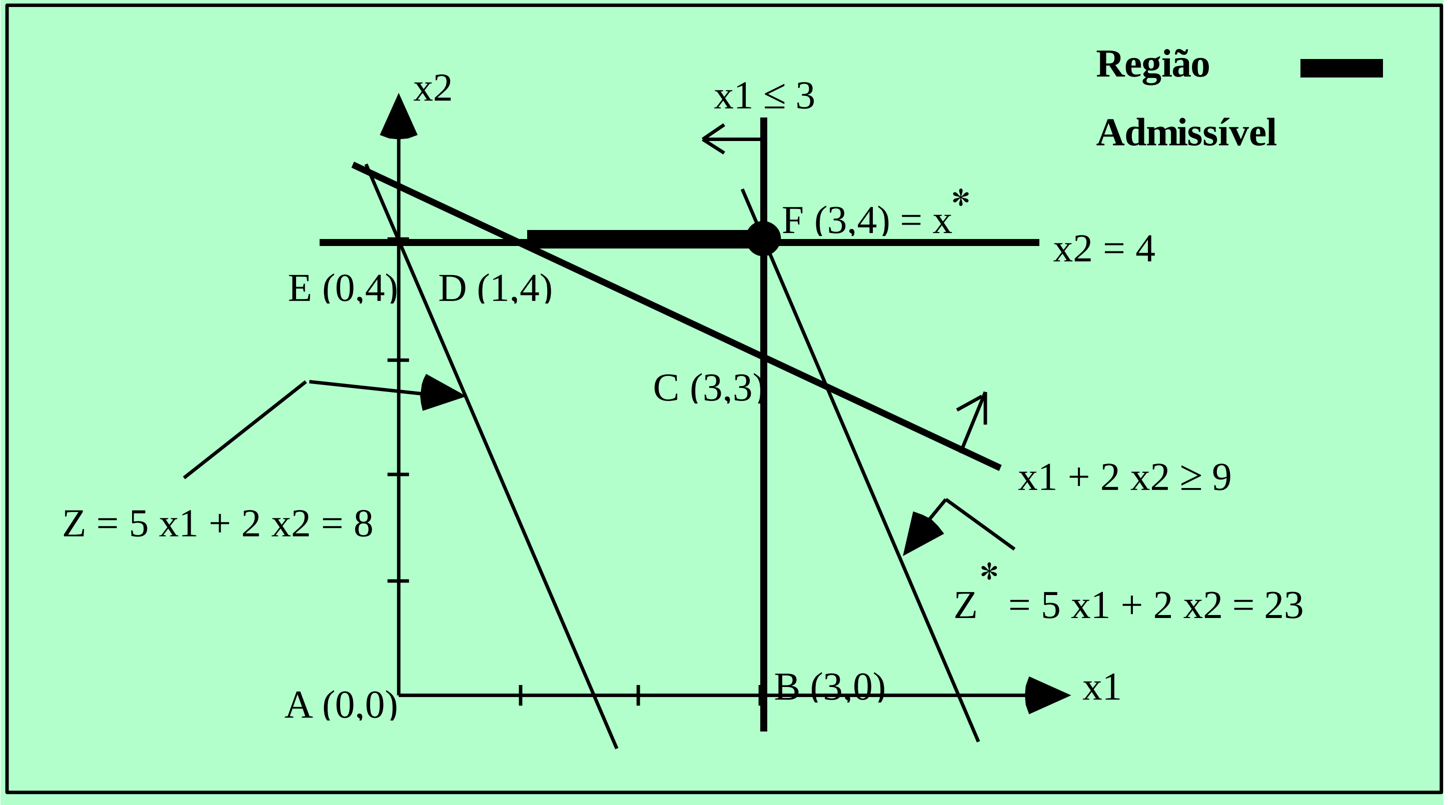
de modo a

maximizar $z = 5\,x_1 + 2\,x_2$

sujeito a

$x_1 \leq 3$	(área a plantar de arroz)
$x_2 = 4$	(área a plantar de milho)
$x_1 + 2\,x_2 \geq 9$	(mão-de-obra)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

Resolução pelo método gráfico



Resolução pelo método Simplex com a técnica do "Grande M"

Determinar

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = 5\,x_1 + 2\,x_2 - M\,x_5 - M\,x_6$$

artificiais

sujeito a

$$x_1 + x_4 = 3 \qquad (1)$$

slack

$$x_2 + x_5 = 4 \qquad (2)$$

surplus *artificiais*

$$x_1 + 2\,x_2 - x_3 + x_6 = 9 \qquad (3)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6$$

Quadro Inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	-M x_5	-M x_6	b
x_4	0	1	0	0	1	0	0	3
$\leftarrow x_5$	-M	0	$\underline{\mathit{1}}$ *	0	0	1	0	4
x_6	-M	1	2	-1	0	0	1	9
$z_j - c_j$		-5 -M	-2 -3M ↑	M	0	0	0	-13M

Solução básica admissível para o problema auxiliar:

VBs	**VNBs**	
$x_4 = 3$	$x_1 = 0$	
$x_5 = 4$	$x_2 = 0$	
$x_6 = 9$	$x_3 = 0$	$z = -13M$

Corresponde ao PONTO **A** ➔ não admissível para o problema inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	-M x_5	-M x_6	b
x_4	0	1	0	0	1	0	0	3
x_2	2	0	1	0	0	1	0	4
$\leftarrow x_6$	-M	***1*** *	0	-1	0	-2	1	1
$z_j - c_j$		-5 -M $\uparrow$	0	M	0	2 3M	0	8 -M

Solução básica admissível para o problema auxiliar (não admissível para o problema inicial):

VBs	**VNBs**	
$x_4 = 3$	$x_1 = 0$	
$x_2 = 4$	$x_3 = 0$	
$x_6 = 1$	$x_5 = 0$	$z = 8 - M$

Corresponde ao PONTO **E** ➔ não admissível para o problema inicial

		c_i	5	2	0	0	-M	-M	
x_B	c'_B	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
← x_4	0		0	0	$\underline{\mathit{1}}$ *	1	2	-1	2
x_2	2		0	1	0	0	1	0	4
x_1	5		1	0	-1	0	-2	1	1
$z_j - c_j$			0	0	-5	0	8 M	5 M	13
					↑				

Solução básica admissível para o problema inicial (x_5 e x_6 são **VNB**s):

VBs	**VNB**s	
$x_4 = 2$	$x_3 = 0$	
$x_2 = 4$	$x_5 = 0$	
$x_1 = 1$	$x_6 = 0$	$z = 13$

Corresponde ao PONTO **D** ➔ admissível para o problema inicial mas não ótimo

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5	2	0	0	-M	-M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
x_3	0	0	0	1	1	2	-1	2
x_2	2	0	1	0	0	1	0	4
x_1	5	1	0	0	1	0	0	3
$z_j - c_j$		0	0	0	5	2 M	0 M	23

Quadro ótimo, pois já não há valores negativos na linha zj-cj.

Solução ótima:

VBs	**VNB**s
$x_1^* = 3$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 4$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 2$	$x_6^* = 0$

A solução ótima consiste pois em plantar a totalidade dos terrenos e a empregar 11 pessoas, com um lucro máximo de 23 UM.

com $z^* = 23$

Corresponde ao PONTO **F** ➔ admissível e ótimo

Resolução pelo método Simplex com a técnica das "Duas fases"

1ª Fase

Nesta fase os coeficientes da função objetivo são todos nulos exceto os das variáveis artificiais que são **-1**.

Determinar

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq \mathbf{0}$$

de modo a

maximizar $z_{1^a\text{fase}} = - x_5 - x_6$

artificiais

sujeito a

$$x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad\qquad = 3 \qquad (1)$$

slack

$$x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 4 \qquad (2)$$

surplus *artificiais*

$$x_1 + 2\,x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 = 9 \qquad (3)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6$$

Quadro Inicial (da 1ª fase)

		c_i	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c'_B	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	0		1	0	0	1	0	0	3
← x_5	-1		0	***1*** *	0	0	1	0	4
x_6	-1		1	2	-1	0	0	1	9
$z_j - c_j$			-1	-3	1	0	0	0	-13
				↑					

Solução básica admissível para o problema auxiliar (não admissível para o problema inicial):

VBs

$x_4 = 3$

$x_5 = 4$

$x_6 = 9$

VNBs

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$z_{1^a fase} = -13$

Corresponde ao PONTO **A** ➔ não admissível para o problema inicial

		c_i	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c'_B	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	0		1	0	0	1	0	0	3
x_2	0		0	1	0	0	1	0	4
← x_6	-1		***1*** *	0	-1	0	-2	1	1
$z_j - c_j$			-1	0	1	0	3	0	-1
			↑						

Solução básica admissível para o problema auxiliar (não admissível para o problema inicial):

VBs	**VNB**s	
$x_4 = 3$	$x_1 = 0$	
$x_2 = 4$	$x_3 = 0$	
$x_6 = 1$	$x_5 = 0$	$z_{1^a fase} = -1$

Corresponde ao PONTO **E** ➔ não admissível para o problema inicial

x_B	c'_B \ c_i / x_i	0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	-1 x_5	-1 x_6	b
x_4	0	0	0	1	1	2	-1	2
x_2	0	0	1	0	0	1	0	4
x_1	0	1	0	-1	0	-2	1	1
$z_j - c_j$		0	0	0	0	1	1	0

Quadro ótimo da 1ª fase pois já não existem valores negativos na linha zj-cj.

Solução ótima da 1ª fase (primeira solução básica admissível do problema inicial uma vez que x_5 e x_6 são **VNB**s):

VBs	**VNB**s	
$x_4 = 2$	$x_3 = 0$	
$x_2 = 4$	$x_5 = 0$	
$x_1 = 1$	$x_6 = 0$	$z_{1^a fase} = 0$

Corresponde ao PONTO **D** ➔ admissível para o problema inicial

2ª Fase

Nesta fase os coeficientes da função objetivo são os coeficientes do vetor **c**' do problema proposto, ou seja

$$\max z_{2^a fase} = \max z = 5\,x_1 + 2\,x_2$$

Quadro Inicial (da 2ª fase)

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	b
← x_4	0	0	0	<u>*1*</u> *	1	2
x_2	2	0	1	0	0	4
x_1	5	1	0	-1	0	1
$z_j - c_j$		0	0	-5	0	13
				↑		

A **SBA** corresponde ao PONTO **D** ➔ admissível mas não ótimo

$Z_{2^a fase} = 13$

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	b
x_3	0	0	0	1	1	2
x_2	2	0	1	0	0	4
x_1	5	1	0	0	1	3
$z_j - c_j$		0	0	0	5	23

A **SBA** corresponde ao PONTO **F** ➔ admissível e ótimo

Solução ótima:

VBs	**VNB**s	
$x_1^* = 3$	$x_4^* = 0$	
$x_2^* = 4$	$x_5^* = 0$	
$x_3^* = 2$	$x_6^* = 0$	$z^*_{2^a fase} = z^* = 23$

Tal como se concluiu na resolução com a técnica do "Grande M", esta solução corresponde a plantar a totalidade dos terrenos e a empregar 11 pessoas, com um lucro máximo de 23 UM.

Exemplo 2

Uma pequena empresa fabrica 3 tipos de *kits* eletrónicos que para facilitar designaremos por *kits* do tipo A, B e C.

O lucro unitário líquido de cada um é de 5 unidades monetárias (UM) para os A, de 10 UM para os B e de 15 UM para os C.

A empresa tem capacidade, em termos de mão-de-obra, para fabricar um total de 500 *kits* por semana.

Estudos de mercado indicam que o número total de *kits* dos tipos A e B deve ser de pelo menos 100 por semana. Por outro lado, existem indicações de que o número de *kits* do tipo A deve exceder exatamente em 120 o número total de *kits* dos tipos B e C.

A empresa pretende então saber quantas unidades de *kits* dos tipos A, B e C deve fabricar semanalmente de modo a maximizar o lucro?

O problema consiste então em:

Determinar

x_1 = nº de *kits* do tipo A a serem fabricados semanalmente

x_2 = nº de *kits* do tipo B a serem fabricados semanalmente

x_3 = nº de *kits* do tipo C a serem fabricados semanalmente

de modo a

maximizar o lucro, ou seja,

$$\text{Max } z = 5\,x_1 + 10\,x_2 + 15\,x_3$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \geq 100$$

$$x_1 = 120 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 120$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \geq \mathbf{0}$$

Resolução pelo método Simplex com a técnica do "Grande M"

Determinar

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\max z = 5\,x_1 + 10\,x_2 + 15\,x_3 - M\,\underset{\uparrow}{x_6} - M\,\underset{\uparrow}{x_7}$$

artificiais

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{slack}}}{x_5} = 500 \qquad \textit{(1)}$$

$$x_1 + x_2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{surplus}}}{x_4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{artificiais}}}{x_6} = 100 \qquad \textit{(2)}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + \overset{\downarrow}{x_7} = 120 \qquad \textit{(3)}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7$$

Quadro Inicial

		c_i	5	10	15	0	0	-M	-M	
x_B	c'_B	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	0		1	1	1	0	1	0	0	500
← x_6	-M		***1*** *	1	0	-1	0	1	0	100
x_7	-M		1	-1	-1	0	0	0	1	120
$z_j - c_j$			-5 -2M ↑	-10	-15 M	M	0	0	0	-220M

VBs

$x_5 = 500$

$x_6 = 100$

$x_7 = 120$

VNBs

$x_1 = 0$ $x_4 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$z = -220M$

x_B	c'_B	c_i / x_i	5 x_1	10 x_2	15 x_3	0 x_4	0 x_5	-M x_6	-M x_7	b
x_5	0		0	0	1	1	1	-1	0	400
x_1	5		1	1	0	-1	0	1	0	100
← x_7	-M		0	-2	-1	***1*** *	0	-1	1	20
$z_j - c_j$			0	-5 2M	-15 M	-5 -M ↑	0	5 2M	0	500 -20M

x_B	c'_B	c_i / x_i	5 x_1	10 x_2	15 x_3	0 x_4	0 x_5	-M x_6	-M x_7	b
← x_5	0		0	2	***2*** *	0	1	0	-1	380
x_1	5		1	-1	-1	0	0	0	1	120
x_4	0		0	-2	-1	1	0	-1	1	20
$z_j - c_j$			0	-15	-20 ↑	0	0	M	5 M	600

	c_i	5	10	15	0	0	-M	-M	
x_B	c'_B x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
x_3	**15**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0.5**	**0**	**-0.5**	**190**
x_1	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0.5**	**0**	**0.5**	**310**
x_4	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0.5**	**-1**	**0.5**	**210**
$z_j - c_j$		**0**	**5**	**0**	**0**	**10**	**M**	**-5 M**	**4400**

Quadro ótimo dado que não existem valores negativos na linha zj-cj.

Solução ótima:

VBs	**VNB**s
$x_3 = 190$	$x_2 = 0$
$x_1 = 310$	$x_5 = 0$
$x_4 = 210$	$x_6 = 0$
	$x_7 = 0$

$z^* = 4400$

(A partir do 3º quadro x_6 e x_7 são **VNB**s ➔ as soluções básicas obtidas são admissíveis para o problema inicial)

Resolução pelo método Simplex com a técnica das “Duas Fases”

1ª Fase

Nesta fase os coeficientes da função objetivo são todos nulos exceto os das variáveis artificiais que são **-1**.

Determinar

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\max\ z_{1^a\text{fase}} = -\underset{\text{fl}}{x_6} - \underset{\text{fl}}{x_7}$$

artificiais

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{slack}}}{x_5} = 500 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{surplus}}}{x_4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{artificiais}}}{x_6} = 100 \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + \overset{\downarrow}{x_7} = 120 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7$$

Quadro Inicial (da 1ª fase)

x_B	c'_B \ c_i	0	0	0	0	0	-1	-1	
	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
x_5	0	1	1	1	0	1	0	0	500
← x_6	-1	$\underline{\mathit{1}}$ *	1	0	-1	0	1	0	100
x_7	-1	1	-1	-1	0	0	0	1	120
$z_j - c_j$		-2	0	1	1	0	0	0	-220
		↑							

x_B	c'_B \ c_i	0	0	0	0	0	-1	-1	
	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
x_5	0	0	0	1	1	1	-1	0	400
x_1	0	l	1	0	-1	0	1	0	100
← x_7	-1	0	-2	-1	$\underline{\mathit{1}}$ *	0	-1	1	20
$Z_j - c_j$		0	2	1	-1	0	2	0	-20
					↑				

x_B	c'_B \ ci / x_i	0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	-1 x_6	-1 x_7	b
x_5	0	0	2	2	0	1	0	-1	380
x_1	0	1	-1	-1	0	0	0	1	120
x_4	0	0	-2	-1	1	0	-1	-1	20
$Z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	1	0

Quadro ótimo da 1ª fase

Solução ótima da 1ª fase:

VBs	**VNB**s
$x_5 = 380$	$x_2 = 0$
$x_1 = 120$	$x_3 = 0$
$x_4 = 20$	$x_6 = 0$
	$x_7 = 0$

As variáveis x_6 e x_7 são **VNB**s ➔ solução admissível para o problema inicial

2ª Fase

Nesta fase os coeficientes da função objetivo são os coeficientes do vetor **c** do problema proposto, ou seja

$$\max z_{2^a fase} = \max z = 5\, x_1 + 10\, x_2 + 15\, x_3$$

Quadro Inicial (da 2ª fase)

x_B	c'_B \ c_i / x_i	5 x_1	10 x_2	15 x_3	0 x_4	0 x_5	b
← x_5	0	0	2	$\underline{2}$	0	1	380
x_1	5	1	-1	-1	0	0	120
x_4	0	0	-2	-1	1	0	20
$z_j - c_j$		0	-15	-20 ↑	0	0	600

x_B	c'_B	c_i / x_i	5 x_1	10 x_2	15 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_3	15		0	1	1	0	0.5	190
x_1	5		1	0	0	0	0.5	310
x_4	0		0	-1	0	1	0.5	210
$Z_j - c_j$			0	5	0	0	10	4400

Quadro ótimo da 2ª fase

Solução ótima:

VBs

$x_3 = 190$

$x_1 = 310$

$x_4 = 210$

VNBs

$x_2 = 0$

$x_5 = 0$

$z^* = 4400$