Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão

Folha Prática nº1

Pós-otimização e análise de sensibilidade

1. Considere o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 6$ ***(1)***

$5x_1 + 3x_2 \leq 15$ ***(2)***

$-2x_1 + x_2 \leq 2$ ***(3)***

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis *slack* das restrições funcionais ***(1)***, ***(2)*** e ***(3)***, respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é:

	c_j	2	1	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$ **** x_j	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**b**
$\mathbf{x_3}$	0	0	7/5	1	-1/5	0	3
$\mathbf{x_1}$	2	1	3/5	0	1/5	0	3
$\mathbf{x_5}$	0	0	11/5	0	2/5	1	8
z_j-c_j		0	1/5	0	2/5	0	6

Determine as implicações na solução ótima decorrentes das variações referidas nas diferentes alíneas abaixo.

a)

1) Suponha que o vetor dos termos independentes das restrições é alterado de $\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2) Suponha que o vetor dos termos independentes das restrições é alterado de $\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b)

1) Suponha que o coeficiente na função objetivo da variável x_2, é alterado de c_2=1 para c_2=1/2.

2) Suponha que o coeficiente na função objetivo da variável x_1, é alterado de $c_1=2$ para $c_1=4$.

c)

1) Suponha que o vetor dos coeficientes das restrições associado à variável x2 é alterado de $\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$.

2) Suponha que o vetor dos coeficientes das restrições associado à variável x1 é alterado de $\begin{bmatrix}1\\5\\-2\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}1\\6\\-3\end{bmatrix}$.

d) Suponha agora que foi acrescentada ao problema a restrição funcional $x_1 \leq 2$.

e) Determine para que intervalo de c_1 (coeficiente na função objetivo da variável x_1), a *solução atrás continuará ótima*.

f) Determine para que *intervalo de* $\boldsymbol{b_3}$ (coeficiente do termo independente da 3ª restrição), *a base ótima apresentada* atrás *se mantém*.

2. Considere agora o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = x_1 + 2x_2$

sujeito a

$-x_1 + x_2 \leq 2$ ***(1)***

$x_1 + 3x_2 \leq 12$ ***(2)***

$-x_1 + 2x_2 \geq 1$ ***(3)***

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

a) Resolva-o pelo método *gráfico*;

Sendo x_3 e x_6 as variáveis *surplus* e *artificial* da restrição funcional ***(3)***, e x_4 e x_5 as variáveis *slack* das restrições funcionais ***(1)*** e ***(2)***, respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* para este problema é o apresentado abaixo.

	c_j	1	2	0	0	0	-M	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$ \ x_j	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	**b**
$\mathbf{x_4}$	0	0	0	4/5	1	1/5	-4/5	18/5
$\mathbf{x_1}$	1	1	0	3/5	0	2/5	-3/5	21/5
$\mathbf{x_2}$	2	0	1	-1/5	0	1/5	1/5	13/5
zj-cj		0	0	1/5	0	4/5	M-1/5	47/5

Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, recorrendo a *análise de pós-otimização*, o que sucede ao quadro ótimo, à solução ótima e ao valor de z*, anteriormente obtidos.

b) Alteração do vetor dos termos independentes das restrições, de $\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Alteração do coeficiente da variável $\mathbf{x_2}$ na função objetivo, de **2** para **-2**.

d) Introdução de uma nova variável x_{Nova} com coeficientes nas restrições iguais a $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e coeficiente na função objetivo igual a **3**.

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 2$ ***(1)***

$3x_1 + x_2 \geq 3$ ***(2)***

$x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0$

a) Resolva-o pelo método gráfico;

Considere que o mesmo problema foi resolvido pelo método simplex, com $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis *surplus* e artificial da restrição funcional ***(2)*** e $\mathbf{x_4}$ a variável *slack* da restrição funcional ***(1)***, tendo sido obtido o seguinte quadro ótimo do *simplex* é:

	c_j	5	2	0	0	-M	
$\mathbf{x_B}$	$c_B \backslash x_j$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**b**
$\mathbf{x_3}$	0	0	5	1	3	-1	3
$\mathbf{x_1}$	5	1	2	0	1	0	2
zj-cj		0	8	0	5	M	10

Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, recorrendo a <u>análise de pós-otimização</u>, o que sucede ao quadro ótimo, à solução ótima x* e ao valor de z*, anteriormente obtidos.

b) Alteração da função objetivo para ***Minimizar*** $\mathbf{z=2x_1 + 6x_2}$.

c) Introdução de uma nova variável $\mathbf{x_{NOVA}}$, com coeficientes nas restrições iguais a $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$ e coeficiente **1** na função objetivo.

d) Alteração do vetor dos coeficientes da variável $\mathbf{x_1}$ nas restrições, de $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

e) Introdução de uma nova restrição no problema: $\mathbf{x_1 + x_2 \geq 3}$.

4. Considere o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4$
sujeito a

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$ ***(1)***
$2x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 5$ ***(2)***
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_5}$ e $\mathbf{x_6}$ as variáveis *slack* das restrições funcionais ***(1)*** e ***(2)***, respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é:

x_B	c_B \ x_j (c_j)	x_1 (4)	x_2 (5)	x_3 (-2)	x_4 (1)	x_5 (0)	x_6 (0)	**b**
x_2	5	1	1	3/2	0	1/2	0	5
x_4	1	3/2	0	3/4	1	1/4	1/2	5
	z_j-c_j	5/2	0	41/4	0	11/4	1/2	30

a) Suponha que foi *acrescentada* ao problema uma *nova variável* $\mathbf{x_{NOVA}}$, cujo coeficiente na função objetivo é **5** e os coeficientes das restrições funcionais associadas são $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$. *Determine as implicações na solução ótima* decorrentes desta variação.

b) Determine para que *intervalo de* $\boldsymbol{b_1}$ (coeficiente do termo independente da 1ª restrição), *a base ótima apresentada* atrás *se mantém*.

c) Determine para que *intervalos de* $\boldsymbol{c_1}$ *e* $\boldsymbol{c_4}$ (coeficientes de x_1 e x_4 na função objetivo, respetivamente), *a solução atrás continuará ótima*. Faça a análise dos coeficientes separadamente.

5. Considere o seguinte problema de programação linear:

Maximizar z = 3x1 + x2 + 3x3
sujeito a

$x_1 + 2x_3 \leq 3$ ***(1)***
$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 6$ ***(2)***
$5x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 5$ ***(3)***
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_7}$ respetivamente as variáveis ***surplus*** e ***artificial*** da restrição funcional ***(3)*** e $\mathbf{x_5}$ e $\mathbf{x_6}$ as variáveis ***slack*** das restrições funcionais ***(1)*** e ***(2)*** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é o da página seguinte.

	c_i	3	1	3	0	0	0	- M	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$ \ x_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	**b**
x_4	0	0	0	32/3	1	10/3	5/3	-1	15
x_2	1	0	1	1/3	0	-1/3	1/3	0	1
x_1	3	1	0	2	0	1	0	0	3
zj-cj		0	0	10/3	0	8/3	1/3	M	**10**

a) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que **intervalo de** c_2, coeficiente de x_2 na função objetivo, a **solução ótima** apresentada atrás **se mantém**.

b) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que **intervalo de** b_2 (coeficiente do termo independente da 2ª restrição), a **base ótima** apresentada atrás **se mantém**.

Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, efetuando um estudo de *<u>pós-otimização</u>*, **quais as implicações na solução ótima apresentada** (no valor de x*, no valor de z* e na base ótima), **decorrentes da variação**:

c) Alteração dos termos independentes das restrições de $\begin{bmatrix}3\\6\\5\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix}$;

d) Alteração dos coeficientes da variável $\mathbf{x_1}$ nas restrições de $\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}2\\-1\\17\end{bmatrix}$;

e) Introdução de uma nova variável $\mathbf{x_{NOVA}}$ com coeficientes nas restrições funcionais $\mathbf{P_{NOVA}} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$, e coeficiente na função objetivo $\mathbf{c_{NOVA}} = \mathbf{2}$;

f) Alteração do coeficiente da variável $\mathbf{x_1}$ na função objetivo de **3** para **4**.

6. Considere o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $z = x_1 + 3x_2$

sujeito a

$x_1 + 2x_2 \leq 16$ ***(1)***

$x_1 + x_2 \leq 12$ ***(2)***

$x_1 - 2x_2 \leq 8$ ***(3)***

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis ***slack*** das restrições funcionais ***(1)***, ***(2)*** e ***(3)*** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é o que se apresenta na página seguinte.

	c_i	1	3	0	0	0	
x_B	c_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	3	1/2	1	1/2	0	0	8
x_4	0	1/2	0	-1/2	1	0	4
x_5	0	2	0	1	0	1	24
zj-cj		1/2	0	3/2	0	0	24

a) Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, efetuando um estudo de *pós-otimização*, **quais as implicações na solução ótima apresentada** (no valor de x*, no valor de z* e na base ótima), **decorrentes da variação**:

1) Alteração no vetor dos *termos independentes* das restrições de $\begin{bmatrix}16\\12\\8\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}12\\10\\8\end{bmatrix}$;

2) O *coeficiente na função objetivo* da variável $\mathbf{x_2}$, é alterado de c_2=3 para c_2=2;

3) Foi *acrescentada* ao problema inicial *a restrição funcional* $2x_1 + \mathbf{x_2} \leq 10$;

4) Introdução de uma *nova variável* $\mathbf{x_{NOVA}}$ com *coeficientes nas restrições funcionais* iguais a $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ e *coeficiente na função objetivo* igual a 2.

b) Determine, efetuando um estudo de análise de sensibilidade, para que ***intervalo de*** c_1 (coeficiente de x_1 na função objetivo), ***a solução ótima*** atrás apresentada ***continuará ótima***.

7. Considere o seguinte problema de programação linear com um só objetivo:

Maximizar $z = -1x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4$

sujeito a

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 60 \quad \textit{(1)}$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 100 \quad \textit{(2)}$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 20 \quad \textit{(3)}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Considerando $\mathbf{x_5}$, $\mathbf{x_6}$ e $\mathbf{x_7}$ as variáveis ***slack*** das restrições funcionais ***(1)***, ***(2)*** e ***(3)*** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é o que se apresenta na página seguinte.

	c_i	-1	5	2	-1	0	0	0	
x_B	c_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
x_5	0	-1	0	-5	-2	1	0	-1	40
x_6	0	-3	0	-11	-18	0	1	-4	20
x_2	5	2	1	3	5	0	0	1	20
zj-cj		11	0	13	26	0	0	5	100

a) Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, efetuando um estudo de <u>*pós-otimização*</u>, **quais as implicações na solução ótima apresentada** (no valor de x*, no valor de z* e na base ótima), **decorrentes da variação**:

1) Alteração no vetor dos *termos independentes* das restrições de $\begin{bmatrix}60\\100\\20\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}30\\120\\20\end{bmatrix}$;

2) O vetor dos *coeficientes das restrições funcionais* associado à *variável* $\boldsymbol{x_1}$ é alterado de $\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$;

3) Introdução de uma *nova variável* $\mathbf{x_{NOVA}}$ com *coeficientes nas restrições funcionais* iguais a $\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$ e *coeficiente na função objetivo* igual a 3.

b) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que ***intervalo de*** $\boldsymbol{c_2}$ (coeficiente de x_2 na função objetivo), ***a solução ótima*** atrás apresentada ***continuará ótima***.

c) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que ***intervalo de*** $\boldsymbol{c_3}$ (coeficiente de x_3 na função objetivo), ***a solução ótima*** atrás apresentada ***continuará ótima***.

8. Considere o seguinte problema de programação linear com um só objetivo:

Maximizar $z = x_1 + 3x_2$
sujeito a

$2x_1 + x_2 \geq 5$ ***(1)***
$x_1 + 2x_2 \leq 20$ ***(2)***
$x_1 \leq 10$ ***(3)***
$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ as variáveis ***surplus*** e ***artificial*** da restrição funcional ***(1)***, e $\mathbf{x_5}$ e $\mathbf{x_6}$ as variáveis ***slack*** das restrições funcionais ***(2)*** e ***(3)*** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é o que se apresenta na página seguinte.

	c_i	1	3	0	-M	0	0	
x_B	$c_B \setminus x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
x_2	3	1/2	1	0	0	½	0	10
x_3	0	-1/2	0	1	-1	½	0	5
x_6	0	1	0	0	0	0	1	10
zj-cj		1/2	0	0	M	3/2	0	30

a) Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, efetuando um estudo de <u>*pós-otimização*</u>, **quais as implicações na solução ótima apresentada** (no valor de x*, no valor de z* e na base ótima), **decorrentes da variação**:

1) Alteração no **vetor dos *termos independentes* das restrições** de $\begin{bmatrix}5\\20\\10\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}6\\10\\8\end{bmatrix}$;

2) Alteração do **coeficiente da variável** x_2 na **função objetivo**, de 3 para 2;

3) Suponha agora que foi **acrescentada** uma **nova restrição** ao problema: $\mathbf{2\,x_1 + x_2 \leq 20}$;

b) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que ***intervalo de b₁*** (coeficiente do termo independente da 1ª restrição), ***a base ótima*** *apresentada* atrás ***continuará ótima***.

c) Determine, efetuando um estudo de <u>análise de sensibilidade</u>, para que ***intervalo de b₂*** (coeficiente do termo independente da 2ª restrição), ***a base ótima*** *apresentada* atrás ***continuará ótima***.

9. Considere o seguinte problema de programação linear com um só objetivo:

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

sujeito a

$x_1 + x_2 \leq 12$ ***(1)***

$2x_1 + x_2 \geq 6$ ***(2)***

$x_2 \leq 9$ ***(3)***

$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

Considerando $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_5}$ as variáveis ***surplus*** e ***artificial*** da restrição funcional ***(2)***, e $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_6}$ as variáveis ***slack*** das restrições funcionais ***(1)*** e ***(3)*** respetivamente, o quadro ótimo do *simplex* é o que se apresenta na página seguinte.

	c_i	2	1	0	0	-M	0	
x_B	c_B \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	1	2	-1	0	18
x_1	2	1	1	0	1	0	0	12
x_6	0	0	1	0	0	0	1	9
zj-cj		0	1	0	2	M	0	24

a) Para cada uma das seguintes alterações no problema inicial determine, efetuando um estudo de *pós-otimização*, **quais as implicações na solução ótima apresentada** (no valor de x*, no valor de z* e na base ótima), **decorrentes da variação**:

1) Alteração do **coeficiente da variável** x_2 **na função objetivo**, de 1 para -2;

2) Suponha agora que foi **acrescentada** ao problema uma **nova variável**, x_{Nova}, com coeficientes nas restrições iguais a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e coeficiente na função objetivo igual a 5;

3) Suponha agora que foi **acrescentada** uma **nova restrição** ao problema: $\boldsymbol{x_1 - 2x_2 \leq 6}$;

b) Determine, efetuando um estudo de análise de sensibilidade, para que ***intervalo de*** c_1 (coeficiente de x_1 na função objetivo), ***a solução ótima*** atrás apresentada ***continuará ótima***.