

# Equação de Langevin e Propriedades Estatísticas do Ruído

## Exercício

(não lembro o que fazer com essa equação)...

A equação de Langevin descreve o movimento de uma partícula sujeita a uma força de atrito proporcional à sua velocidade, uma força externa e uma força aleatória:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\beta\vec{p} + \vec{F}_{\text{ex}}(\vec{r}) + \vec{f}(t) \quad (1)$$

Onde:

- $\vec{p}(t)$  é o momento linear da partícula (derivada da posição vezes massa);
- $\beta$  é o coeficiente de dissipação/viscosidade;
- $\vec{F}_{\text{ex}}(\vec{r})$  é uma força externa (por exemplo, gravidade)
- $\vec{f}(t)$  é uma força aleatória

## Propriedades Estatísticas do Ruído Aleatório $\vec{f}(t)$

O termo estocástico  $\vec{f}(t)$  tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \langle f_x(t) \rangle &= \langle f_y(t) \rangle = \langle f_z(t) \rangle = 0 \\ \langle f_i(t)f_i(t') \rangle &= 0, \quad \text{se } t' \neq t \\ \langle f_i^2(t) \rangle &= F_0^2 \\ \langle f^2(t) \rangle &= 3F^2 \end{aligned}$$

- A força aleatória possui média nula.
- A força aleatória não apresenta correlação temporal (comportamento de ruído branco).
- A força aleatória possui variância finita em cada direção.
- A amplitude total das flutuações é a soma das variâncias das três direções espaciais.

## 1 Média Nula da Força Aleatória

A média de cada componente da força aleatória é nula:

$$\langle f_x(t) \rangle = \langle f_y(t) \rangle = \langle f_z(t) \rangle = 0 \quad (2)$$

Isso implica que não há tendência direcional nas flutuações térmicas. A média vetorial da força é:

$$\langle \vec{f}(t) \rangle = \vec{0} \quad (3)$$

## 2 Ausência de Correlação Temporal (Ruído Branco)

A força aleatória é não correlacionada em tempos distintos:

$$\langle f_i(t) f_i(t') \rangle = 0, \quad \text{se } t \neq t' \quad (4)$$

Esse comportamento caracteriza um processo de ruído branco. Em um modelo idealizado, essa correlação pode ser descrita por uma função delta de Dirac:

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = F_0^2 \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (5)$$

## 3 Variância Finita das Componentes

Cada componente da força tem variância finita, constante no tempo:

$$\langle f_i^2(t) \rangle = F_0^2 \quad (6)$$

Essa expressão define a magnitude típica das flutuações em uma única direção espacial.

## 4 Amplitude Total das Flutuações

A variância total da força vetorial aleatória é a soma das variâncias de suas três componentes ortogonais:

$$\langle f^2(t) \rangle = \langle f_x^2(t) + f_y^2(t) + f_z^2(t) \rangle = 3F_0^2 \quad (7)$$

Essa relação decorre da independência estatística entre as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .