Estudo Dirigido: Métodos Computacionais para Física 3
(Eletricidade e Eletromagnetismo)

Me. Luis Vinicius Costa Silva

December 11, 2024

1 Campo Eletrostático de Cargas Pontuais

Considere N cargas pontuais Q_i localizadas em posições fixas no plano, definidas por seus vetores posição $\vec{r}_i$, com $i = 1, \ldots, N$. O campo elétrico é dado pela lei de Coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_i, \tag{1}$$

onde $\hat{u}_i = \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r} - \vec{r}_i$. As componentes do campo elétrico são:

$$E_x(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(x - x_i)}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right]^{3/2}}, \tag{2}$$

$$E_y(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(y - y_i)}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right]^{3/2}}. \tag{3}$$

O potencial eletrostático em $\vec{r}$ é dado por:

$$V(\vec{r}) = V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right]^{1/2}}. \tag{4}$$

A relação entre o campo elétrico e o potencial é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}). \tag{5}$$

As linhas de campo elétrico são curvas integrais do campo vetorial $\vec{E}$, ou seja, curvas cujas tangentes em cada ponto são paralelas ao campo elétrico naquele ponto. A densidade das linhas de campo é proporcional à magnitude do campo elétrico. O fluxo elétrico $\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ através de uma superfície S é proporcional ao número de linhas de campo que cruzam a superfície.

As linhas de campo de distribuições de cargas pontuais começam em cargas positivas (fontes), terminam em cargas negativas (sumidouros) ou se estendem até o infinito.

As superfícies equipotenciais são conjuntos de pontos no espaço onde o potencial eletrostático tem valores fixos. Essas superfícies são fechadas e perpendiculares ao campo elétrico em cada ponto. Seções planas das superfícies equipotenciais resultam em curvas equipotenciais.

A direção do campo elétrico é perpendicular às superfícies equipotenciais e aponta na direção de menor potencial. Uma variação espacial acentuada do potencial corresponde a um campo elétrico intenso.

2 Discretização Computacional

O computador não pode resolver problemas no contínuo; portanto, uma linha de campo deve ser discretizada em um número finito de pequenos segmentos de linha. A ideia básica é ilustrada na figura 1.

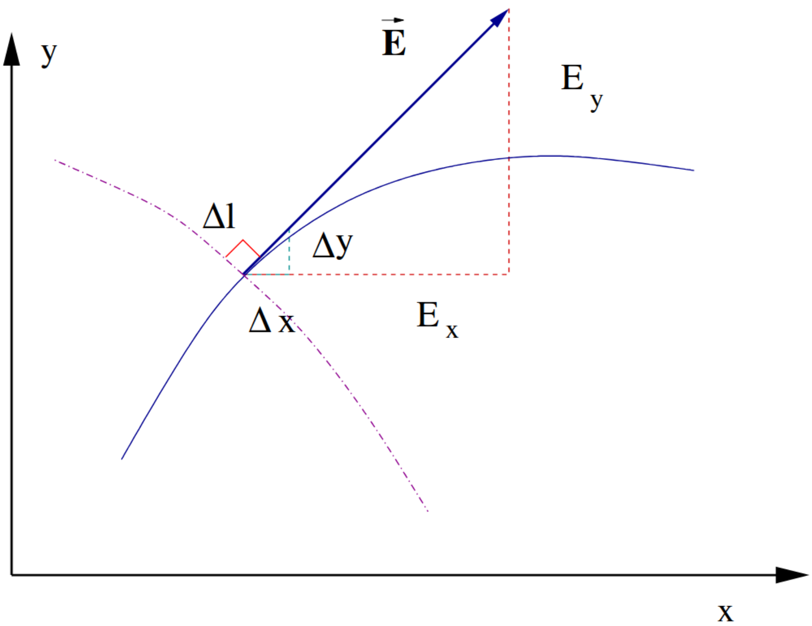

Figure 1: O campo elétrico é tangente em cada ponto de uma linha de campo elétrico e perpendicular a uma linha equipotencial. Aproximando a curva contínua por um segmento de reta Δl, temos que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{E_y}{E_x}$

O segmento infinitesimal Δl é tomado na direção do campo elétrico e calculado como:

$$\Delta x = \Delta l \frac{E_x}{E}, \tag{6}$$

$$\Delta y = \Delta l \frac{E_y}{E}, \tag{7}$$

onde $E = |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$.

Para calcular as linhas equipotenciais, utilizamos a propriedade de que elas são perpendiculares ao campo elétrico. Assim, se $(\Delta x, \Delta y)$ é a direção tangencial a uma linha de campo, então $(\Delta y, \Delta x)$ é a direção perpendicular, pois $(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta y, \Delta x) = 0$. As equações para as linhas equipotenciais são:

$$\Delta x = \Delta l \frac{E_y}{E}, \tag{8}$$
$$\Delta y = \Delta l \frac{E_x}{E}. \tag{9}$$

3 Algoritmo para Linhas de Campo e Equipotenciais

O algoritmo para calcular aproximadamente as linhas de campo e as linhas equipotenciais é o seguinte:

1. Escolha um ponto inicial que pertença à linha desejada.
2. Calcule o campo elétrico com base na distribuição de cargas e nas equações acima.
3. Use um passo pequeno Δl e mova-se na direção $(\Delta x, \Delta y)$ para obter a nova posição
$$x \to x + \Delta x, \tag{10}$$
$$y \to y + \Delta y. \tag{11}$$
4. Repita o procedimento até que o critério de parada seja atingido, como sair da região de interesse ou aproximar-se de uma carga além de uma distância mínima.

4 Estudos sugeridos

Sugere-se os seguintes estudos:

1. Escreva um programa que calcula o campo elétrico $E(x, y)$ para uma distribuição de N cargas pontuais. Use as equações fornecidas no texto;
2. Implemente um algoritmo para calcular e plotar as linhas de campo elétrico em uma região bidimensional. Escolha diferentes distribuições de cargas (e.g., dipolo elétrico, quadrupolo);
3. Desenvolva um algoritmo para traçar linhas equipotenciais. Plote as equipotenciais para um dipolo elétrico e explique os resultados obtidos;
4. Gere gráficos das linhas de campo e equipotenciais para uma única carga pontual. Analise a simetria do campo e das superfícies equipotenciais;
5. Explore o efeito da escolha do passo Δl nos resultados das linhas de campo e equipotenciais. Avalie a precisão e a estabilidade do algoritmo para diferentes valores de Δl;
6. Discuta como o campo elétrico se comporta próximo a uma carga e no infinito. Justifique usando os gráficos gerados;
7. Explique como os erros numéricos no cálculo das linhas de campo podem influenciar os resultados. Proponha métodos para minimizar esses erros;