# Lógica Matemática

## Notas de Aula

Luis Vinicius Costa Silva
Ibiotec – DCC
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

Agosto de 2019

# Contents

Correção de exercícios da primeira miniavaliação com comentários pertinentes ao leitor.

# 1 Correção de Exercícios - Miniavaliação 1

## 1.1 Exercício 1

Prove que:

$$2 + 4 + ... + 2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \tag{1}$$

A prova por indução consiste em três passos:

- Caso base;
- Caso da hipótese;
- Caso da indução.

Adicionalmente, a fórmula para uma série pode ser deduzida através do seguinte procedimento (nem sempre funciona, além disso existem outros macetes para este fim):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2 & + & 4 & + & ... & + & (2n-2) & + & 2n = S(n) \\ 2n & + & (2n-2) & + & ... & + & 4 & + & 2 = S(n) \end{cases} \\ &\underbrace{(2n+2)(2n+2), ..., (2n+2)}_{\text{n vezes}} = \quad 2S(n) \\ &S(n) = \frac{n(2n+2)}{2} = n(n+1) \end{aligned} \tag{2}$$

Inicialmente, o caso base testa a conjectura para o primeiro elemento da mesma, neste caso, o número 1:

$$S(1) = 1(1+1) = 2 \tag{3}$$

Logo, $S(1)$ satisfaz a conjectura. Em seguida, conjectura-se que a fórmula vale para $S(k), \forall k \geq 1 \land k \in \mathbb{N}$. Isto é:

$$S(k) = k(k+1), \forall k \geq 1 \land k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Finalmente, o caso da indução deseja mostrar que, se a conjectura é válida para $S(k)$, logo esta também deve ser válida para $S(K+1)$. Em termos gerais temos:

$$S(k) + \underbrace{(k+1)}_{\text{próx. elemento}} = S(k+1) \tag{5}$$

Neste caso, obtém-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{k(k+1)}_{\text{S(k)}} + \underbrace{2(k+1)}_{\text{(k+1)}} &= \underbrace{(k+1)(k+2)}_{\text{S(k+1)}} \\ k^2 + 3k + 2 &= (k+1)(k+2) \\ (k+1)(k+2) &= (k+1)(k+2) \\ &\text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{6}$$

Portanto, prova-se que $2 + 4 + ... + 2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$.

## 1.2 Exercício 2

Prove que:

$$\sqrt{2} = x|x \quad \text{é irracional} \tag{7}$$

A prova por contradição/redução ao absurdo é uma aplicação do terceiro princípio dos três princípios fundamentais da lógica, isto é: o princípio do terceiro excluído. O princípio do terceiro excluído afirma que uma declaração não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo. Logo, a prova por contradição supõe a negação da hipótese a ser provada, e se após uma série de operações logicamente corretas, uma contradição for observada concluí-se que a negação da hipótese é falsa, tornando a hipótese original verdadeira.
Partindo deste raciocínio, supõe-se que $\sqrt{2}$ é racional (negação da hipótese), logo, têm-se que:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z} \wedge mdc(a, b) = 1 \\ 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 = a^2 \end{aligned} \tag{8}$$

$2b^2 = a^2$ equivale dizer que $a^2$ é par, consequentemente $a$ também é par. Logo, $mdc(a, b) = 2$, entranto isto entra em contradição direta com a afirmação inicial de que $\sqrt{2}$ era igual a um $\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z} \wedge mdc(a, b) = 1$. Entretanto para tornar esta afirmação mais convincente, substituímos $a$ por $2k|k \in \mathbb{N}$. Logo:

$$\begin{aligned} 2b^2 = (2k)^2 \\ 2b^2 = 4k^2 \\ b^2 = 2k^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Veja que se $b^2 = 2k^2$, temos que $mdc(a, b) \neq 1$, visto que $a$ e $b$ são multíplos de 2, o que entra em contradição com a afirmação inicial (de que $mdc(a, b) = 1$). Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.
q.e.d