Capítulo 10

A semântica da Lógica de Predicados

Interpretação das Variáveis, Funções e Predicados

- **Definição (interpretação de variáveis, funções e predicados)**

  Seja U *um conjunto não vazio.*

  Uma interpretação I *sobre o domínio* U*, na lógica de predicados, é uma função tal que:*

  - *o domínio da função* I *é o conjunto*

    dos símbolos de função,

    de predicados e

    das expressões da Lógica de Predicados.

- **Definição (interpretação de variáveis e funções)**

A interpretação das variáveis e funções é dada por:

- *para toda variável* x,

  se

  $I[x]=x_I$,

  então

  $x_I \in U$;

- *para todo símbolo de função* f, *n-ário,*

  se

  $I[f] = f_I$,

  então

  f_I *é uma função n-ária em* U,

  isto é, $f_I : U^n \rightarrow U$;

- **Definição (interpretação de predicados)**

A interpretação dos predicados é dada por:

- *para todo símbolo de predicado* p,*n-ário,*

  se

  $I[p]= p_I$,

  então

  p_I *é um predicado n-ário em* U*, isto é,*

  $p_I : U^n \rightarrow \{T, F\}$;

- *o caso em que* E *é uma expressão,* I[E] *é definida por um conjunto de regras semânticas consideradas mais adiante.*

Regras Semânticas

- **Definição (regras semânticas para interpretação de expressões)**

  Seja E *uma expressão e* I *uma interpretação sobre o domínio* U.

  A interpretação de E *conforme* I, *indicada por* I[E], *é determinada pelas regras:*

  - *se*

    E = *false,*

    então

    I[E] = I[*false*] = F *;*

  - *se*

    $E = f(t_1, ..., t_n)$

    onde $f(t_1, ..., t_n)$ *é um termo,*

    então

    $I[E] = I[f(t_1, ..., t_n I)] = f_I (t_{1I}, ..., t_{nI})$

    onde $I[f] = f_I$ *e para todo termo* t_i, $I[t_i] = t_{iI}$ *;*

- **Definição (regras semânticas para interpretação de expressões)**
- *se*

  $E = p\ (t_1, \ldots, t_n)$

  onde $p\ (t_1, \ldots, t_n)$ *é um átomo,*

  então

  $I[E]= I[p\ (t_1, \ldots, t_n)] = p_I\ (t_{1I}, \ldots, t_{nI})$

  onde $I[p]= p_I$

  e para todo termo $t_i, I[t_i]= t_{iI}$*;*
- *se*

  $E = \neg H$

  onde H *é uma fórmula,*

  então

  $I[E]= I[\neg H]= T$ *se* $I[H]= F$

  e $I[E]= I[\neg H]= F$ *se* $I[H]= T$ *;*

- **Definição (regras semânticas para interpretação de expressões)**

- *se*

  $E = H \lor G$,

  onde H *e* G *são duas fórmulas,*

  então

  $I[E] = I[H \lor G] = T$ *se* $I[H] = T$ *e/ou* $I[G] = T$

  e $I[E] = I[H \lor G] = F$ *se* $I[H] = I[G] = F$ *;*

  - *os casos em que*

    $E = (\forall x)H$ *e* $E = (\exists x)H$

    são considerados adiante.

- **Exemplo (interpretação de expressões)**. Considere as fórmulas

$H = (\neg p(x,y,a,b)) \text{ -> } r(f(x), g(y))$ e

$G = p(x,y,a,b) \text{ -> } (q(x,y) \wedge r(y,a))$

onde H *é uma fórmula,*

Considere também a interpretação I, sobre o domínio dos números inteiros Z, tal que*:*

$I[x]= 3$, $I[y] = 2$, $I[a] = 0$, $I[b] = 1$,

$I[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I \,.\, y_I > z_I \,.\, w_I$,

$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$,

$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I > y_I$,

$I[f(x)] = (x_I + 1)$ e $I[g(x)] = (x_I – 2)$

Exemplo (interpretação de expressões)

Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F
Sintaxe	x	y	a	b	p(x,y,a,b)	f(x)	g(y)	q(x,y)	r(y,a)	H	G

- **Definição (interpretação estendida)**

  Seja I *uma interpretação sobre um domínio* U. *Considere* x *uma variável da Lógica de Predicados e* d *um elemento de* U.

  Uma extensão de I, *conforme* x *e* d, *é uma interpretação sobre* U, *denotada por*

$$<x \leftarrow d>I,$$

  tal que:

$$< x \leftarrow d > I[\gamma] = \begin{cases} d & se\ \gamma = x \\ I[\gamma] & se\ \gamma \neq x \end{cases}$$

- *onde γ é uma variável qualquer.*

- **Exemplo (interpretação estendida).** Este exemplo considera a extensão de uma interpretação sobre o domínio dos números naturais N, tal que

$$I[x] = 4,\ I[a] = 5,\ I[y] = 4,\ I[f] = + \text{ e } I[p] = >$$

Neste caso

$$<x \leftarrow 2>I[y] = 4,$$

$$<x \leftarrow 2>I[f] = f,$$

$$<y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[x] = 2,$$

$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[y] = 9,$$

$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[x] = 7 \text{ e}$$

$$<y \leftarrow 1><x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[y] = 1$$

- **Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores)**

Sejam H *uma fórmula,* x *uma variável e* I *uma interpretação sobre o domínio* U.

Os valores semânticos de

$$I[(\forall x)H] \text{ e}$$

$$I[(\exists x)H]$$

são definidos pelas regras:

$$I[(\forall x)H] = T$$

se, e somente se,

$$\forall d \in U, <x \leftarrow d> I[H] = T\ ;$$

- **Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores)**

$$I[(\forall x)H] = F$$

se, e somente se,

$$\exists\, d \in U;\ \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = F\ ;$$

- **Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores)**

$$I[(\exists x)H] = T$$

se, e somente se,

$$\exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = T \, ;$$

- **Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores)**

$$I[(\exists x)H] = F$$

se, e somente se,

$$\forall d \in U, <x \leftarrow d> I[H] = F\ .$$

- **Exemplo (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores).** Seja I uma interpretação sobre o conjunto aluno-CC, que denota os alunos de Ciência da Computação. Suponha que

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é inteligente}$$

Considere $H_1 = (\forall x)p(x)$. Neste caso, $I[H] = T$ significa dizer que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente. Mas,

$$I[H_1] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in \text{aluno-CC}, d \text{ é inteligente}$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in \text{aluno-CC}, p_I(d) = T$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in \text{aluno-CC}, <x \leftarrow d>I[p(x)] = T$$

- **Exemplo (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores).**

Ou seja,

$\forall$ d $\in$ aluno-CC, se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como T

- **Exemplo (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores).**

O caso $I[H_1] = F$ significa dizer que é falso que todo aluno de Ciências da Computação é inteligente. Isto significa que existe algum aluno idiota. Mas,

$$
\begin{aligned}
I[H_1] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = F \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC, d é idiota} \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC}, p_I(d) = F \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC}, \langle x \leftarrow d \rangle I[p(x)] = F
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$\exists d \in$ aluno-CC; se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como F.

- **Exemplo (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores).**

Considere $H_2 = (\exists x)p(x)$. Neste caso, $I[H_2] = T$ significa a dizer que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente. Mas,

$$
\begin{aligned}
I[H_2] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC, } d \text{ é inteligente} \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC, } p_I(d) = T \\
&\Leftrightarrow \exists d \in \text{aluno-CC, } \langle x \leftarrow d \rangle I[p(x)] = T
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$\exists d \in$ aluno-CC; tal que se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como T.

- **Exemplo (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores).**

O caso $I[H_2]$= F significa dizer que é falso que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente. Isto significa que é falso que existe aluno inteligente, ou seja, todo aluno é idiota. Mas,

$I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in$ aluno-CC, d é idiota

$\Leftrightarrow \forall d \in$ aluno-CC, $p_I(d) = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in$ aluno-CC, $<x \leftarrow d>I[p(x)] = F$

Ou seja,

$\forall d \in$ aluno-CC, se x é interpretado como d, x_I é idiota

Representação de sentenças na lógica de predicados

Considere a sentença

Todo homem é mortal.

Definir inicialmente uma interpretação I sobre o domínio dos homens e um predicado p(x) tal que x

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é mortal}$$

Assim, a sentença é representada pela fórmula

$$(\forall x)p(x)$$

Representação de sentenças na lógica de predicados

Para a sentença

Todo homem é mortal.

pode ser representada por outras fórmulas. Considere a interpretação J sobre o domínio de todos os objetos da Terra e os predicados q(x) e p(x) tais que

$$J[p(x)] = T \Leftrightarrow x_J \text{ é mortal}$$

$$J[q(x)] = T <= \ x_J \text{ é homem}$$

Assim, a sentença é representada pela fórmula

$$(\forall x)(q(x) -> p(x))$$

Slides baseados na apresentação do Prof. João Nunes – UFU.