Lógica Matemática
Notas de Aula

Luis Vinicius Costa Silva
Ibiotec – DCC
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

Agosto de 2019

Contents

1 Semana 1 – Introdução à Lógica

1.1 Introdução à Lógica

Lógica:

- Ciência que estuda as formas de raciocínio válidas aplicadas a demonstração de verdade;
- Ciência normativa, visto que o objeto de estudo da mesma são as normas do pensamento correto.

Raciocínio:

- Coordenar dois ou mais juízos antecedentes, em busca de um juízo novo, denominado conclusão/inferência.

Acerca da Lógica Matemática:

- Interessa-se na forma ao invés do conteúdo do argumento, isto é: **as premissas implicam na conclusão?**
- Estudo de argumentos através de linguagens não ambíguas.

Princípios da lógica:

1. Princípio da identidade;
   - Duas entidades são iguais se somente se compartilham das mesmas propriedades, isto é:
     - $\forall x \forall y[x = y \to \forall P(Px \iff Py)]$ e $\forall y \forall x[\forall P(Py \iff Px) \to y = x]$
2. Princípio da não-contradição;
   - Proposições contrárias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo:
   - $p \land \neg p$ é uma contradição
3. Princípio do terceiro excluído;
   - Uma entidade x possui ou não uma propriedade P.
   - Para qualquer proposição, ou esta proposição é verdadeira, ou sua negação é verdadeira:
   - $p \lor \neg p$ é uma tautologia

1.2 A charada dos dois porteiros

Suponha que você tenha morrido e ido ao além-vida, lá se depara com duas portas e dois porteiros, guardando as portas do céu e do inferno. É sabido que o porteiro do céu sempre fala a verdade enquanto que o porteiro do inferno sempre mente. Diante da situação, cabe a você criar uma única pergunta que possibilite distinguir a porta do céu e do inferno. Qual deve ser a pergunta a ser feita aos porteiros para atingir o objetivo?

- Dica: use o princípio da não-contradição

Resposta:

"O que o outro porteiro dirá se eu perguntar qual é a porta do inferno?"

Ambos os guardas apontarão para a porta do céu.

O que o porteiro do céu responderá:
O porteiro do céu irá repassar a resposta do porteiro do inferno sem alterações, ou seja, o porteiro do inferno não dirá que a sua porta leva ao inferno, logo ele irá apontar para a porta do céu.

O que o porteiro do inferno responderá:
O porteiro do céu irá apontar para a porta do inferno corretamente, mas já que a pergunta foi feita para o porteiro do inferno, este irá inverter a resposta do porteiro do céu, ou seja, o porteiro do céu apontará para a porta do inferno e, o porteiro do inferno, mentindo, irá apontar para a porta do céu.

A resposta faz uso do princípio da não contradição, visto que o objetivo é elaborar uma pergunta de tal forma que ambos os porteiros entrem em consenso independente do valor-verdade deles, eliminando assim a contradição.

1.3 Tipos de Argumento

Argumentos podem ser classificados em:

- Dedutivos: a partir de leis, definições, teoremas, etc., parte-se da premissa até as conclusões de forma progressiva. A verdade das premissas garante a verdade da conclusão.;
- Indutivos: a partir de observações específicas, busca-se uma generalização. A verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Todo homem é mortal}\\ \text{Sócrates é homem}\end{array}\right\}\ \text{Premissas}$$
$$\left.\therefore \text{Sócrates é mortal}\right\}\ \text{Conclusões} \qquad (1)$$

O argumento 1 é um exemplo de silogismo categórico, tais tipos de argumentos são formados por três proposições: duas premissas e uma conclusão.

O silogismo é composto por três termos:

- Termo maior: Termo predicado da conclusão, ocorre uma única vez na premissa maior;
- Termo menor: Termo sujeito da conclusão, ocorre uma vez na premissa menor;
- Termo médio: Termo que surge em ambas as premissas mas nunca na conclusão;

Cada proposição de um silogismo Aristotélico é reduzida a uma das seguintes formas:

- (A)firmação universal: todo S é P;
- Universal n(e)gativa: nenhum S é P;
- Af(i)rmação particular: algum S é P;
- Negaçã(o) Particular: algum S não é P;

Estas formas são relacionadas de acordo com o diagrama abaixo:

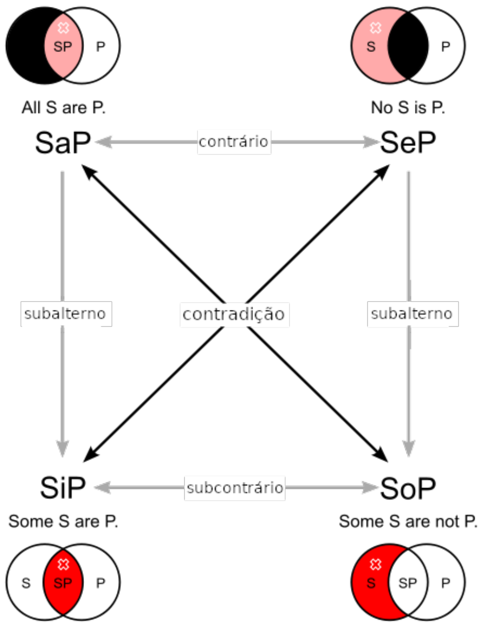


Figure 1: Diagrama do Quadrado das Oposições – Silogismo Aristotélico

São exemplos de argumentos dedutivos:

$$\begin{array}{rl} \text{Todos os diamantes são duros. (verdadeira)} & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Premissas} \\ \text{Alguns diamantes são jóias. (verdadeira)} & \\ \therefore \text{Alguma jóias são duras. (verdadeira)} & \} \text{ Conclusões} \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Todos os gatos tem asas. (falsa)} & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Premissas} \\ \text{Todos os pássaros são gatos. (falsa)} & \\ \therefore \text{Todos os pássaros tem asas. (verdadeira)} & \} \text{ Conclusões} \end{array} \tag{3}$$

Os argumentos logicamente incorretos ou não válidos podem combinar verdade e falsidade das premissas e da conclusão de modo arbitrário. Isto significa que um argumento não válido pode ter premissas verdadeiras e conclusão também verdadeira. O fato de as premissas e a conclusão serem verdadeiras não significa estarem as premissas sustentando a conclusão. Por exemplo:

$$\begin{array}{rl} \text{Todos os mamíferos são mortais. (verdadeira)} & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Premissas} \\ \text{Todos os cães são mortais. (verdadeira)} & \\ \therefore \text{Todos os cães são mamíferos. (verdadeira)} & \} \text{ Conclusões} \end{array} \tag{4}$$

A forma deste argumento é:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Todos os A são B}\\ \text{Todos os C são B}\end{array}\right\}\ \text{Premissas}$$
$$\therefore \text{Todos os C são A}\ \}\ \text{Conclusões} \qquad (5)$$

Para mostrar que este argumento é não válido, ou é um argumento de forma não válida, vamos substituir A por mamíferos, B por mortais e C por cobras.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Todos os mamíferos são mortais. (verdadeira)}\\ \text{Todas as cobras são mortais. (verdadeira)}\end{array}\right\}\ \text{Premissas}$$
$$\therefore \text{Todas as cobras são mamíferos. (falso)}\ \}\ \text{Conclusões} \qquad (6)$$

O argumento acima tem a mesma forma que o primeiro, mas com premissas verdadeiras e conclusão é falsa. Como premissas verdadeiras e conclusão falsa nunca podem ocorrer num argumento de forma válida, este argumento tem forma não válida.

São exemplos de argumentos indutivos:

- A grande maioria dos entrevistados declarou que não votará no candidato da oposição. Logo, a oposição não vai ganhar as eleições.
- Há fumaça saindo do supermercado e vários carros do Corpo de Bombeiros indo naquela direção. Podemos concluir, portanto, que há um incêndio no supermercado.
- A prata é bom condutor de eletricidade, e a platina é bom condutor de eletricidade, e o cobre é bom condutor de eletricidade, logo, todos os metais são bons condutores de eletricidade.

A validade de um argumento dedutivo se baseia nos seguintes critérios:

- Argumento com premissas verdadeiras e uma conclusão verdadeira;
- Argumento com algumas ou todas as premissas falsas e uma conclusão verdadeira;
- Argumento com algumas ou todas as premissas falsas e uma conclusão falsa.

Um argumento dedutivo é inválido quando:

- Argumento com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa, logo:
- a conclusão não é sustentada pelas premissas.

1.4 Técnicas de demonstração

1.4.1 Prova direta – Exemplo 1

Prove que a soma de dois elementos consecutivos é igual a diferença absoluta dos quadrados consecutivos:

$$\begin{gathered} n + (n+1) = (n+1)^2 - n^2 \\ 2n + 1 = 2n + 1 \therefore \\ \text{A afirmação é correta, adicionalmente pode-se afirmar que a soma} \\ \text{de dois elementos consecutivos é sempre ímpar, assim como a diferença} \\ \text{absoluta de dois quadrados consecutivos} \end{gathered} \tag{7}$$

1.4.2 Prova direta – Exemplo 2

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x \ \text{ é par} | \forall x \in \mathbb{R} \\ n \ \text{ é par} \\ m \ \text{ é par} \end{cases} \\ n + m \ &\text{ é par} \\ n = 2r&|r \in \mathbb{R} \\ m = 2s&|s \in \mathbb{R} \\ n + m &= 2r + 2s \\ n + m &= 2(r + s) \\ r + s = 2x&|x \in \mathbb{R} \therefore \\ \text{a soma de dois números pares é par} \end{aligned} \tag{8}$$

1.4.3 Prova por contradição/redução ao absurdo – Exemplo 1

Prove que 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$:

Se 0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$, então 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$. **Por hipótese, suponha** que 0 é elementro neutro da adição em $\mathbb{N}$ e que 0 não é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$, logo existe um número hipotético e que é elementro neutro da adição em $\mathbb{N}|e \neq 0$. Como 0 é elemento neutro, $\forall n \in \mathbb{N}$, têm-se que:

- $n = 0 + n = n = n + 0$

Para $n = e$, temos que:

- $e = 0 + e$
- $e = e + 0$

Como e é elemento neutro de $\mathbb{N}\forall n \in N$, $n = n + e = e + n$, para $n = 0$ têm-se que:

- $0 = 0 + e = e + 0$, logo como $e = 0 + e = e + 0$, temos que $e = 0$, o que é uma contradição, logo concluí-se que o número hipotético e, sendo elemento neutro dos naturais não pode existir, tornando 0 o único elemento neutro da adição.

1.4.4 Prova por contradição/redução ao absurdo – Exemplo 2

Prove que $x^3 + x + 1 = 0$ possui raíz irracional.

A prova por contradição/redução ao absurdo, consiste em **supor, por hipótese, a veracidade da antítese da afirmação apresentada, e durante o desenvolvimento da prova, concluir uma contradição com alguma afirmação feita anteriormente na prova**.
Neste caso, supõe-se que existe um $x \in \mathbb{Q}$ tal que este x torna $x^3+x+1 = 0$. Caso $x \in \mathbb{Q}$, logo x é da forma $\frac{p}{q}|p, q \in \mathbb{Z}$, adicionalmente supõe-se que $mdc(p, q) = 1$, isto é: a fração que representa x está em sua forma irredutível. Substituindo na equação inicial este número hipotético $x = \frac{p}{q}$, temos que:

$$\begin{gathered}\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{p}{q} + 1 = 0 \\ p^3 + pq^2 + q^3 = 0\end{gathered} \tag{9}$$

Logo, temos a seguinte combinação de valores nas variáveis p e q:

$$\begin{cases} \text{Caso 1:} & \text{p =} & \text{ímpar} & \text{q =} & \text{ímpar} & \rightarrow & \text{ímpar} & + \text{ ímpar} & + \text{ ímpar} = \text{ímpar} \\ \text{Caso 2:} & \text{p =} & \text{ímpar} & \text{q =} & \text{par} & \rightarrow & \text{ímpar} & + \text{ par} & + \text{ par} = \text{ímpar} \\ \text{Caso 3:} & \text{p =} & \text{par} & \text{q =} & \text{ímpar} & \rightarrow & \text{par} & + \text{ par} & + \text{ ímpar} = \text{ímpar} \\ \text{Caso 4:} & \text{p =} & \text{par} & \text{q =} & \text{par} & \rightarrow & \text{par} & + \text{ par} & + \text{ par} = \text{par} \end{cases} \tag{10}$$

Nota-se que o caso 4 descreve um número par, isto é:múltiplo de 2. Este caso fere a afirmação de que $x = \frac{p}{q}|mdc(p, q) = 1$, visto que se o número é par, logo $mdc(p, q) \geq 2$. Logo, prova-se por absurdo que a raíz deste polinômio é irracional.

1.4.5 Prova por indução – Exemplo 1

Sabendo que:

$$\begin{cases} S(1) = & 1 \\ S(n) = & 1+2+...+n \end{cases} \tag{11}$$

prove que $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$:

A forma fechada deste somatório pode ser deduzida através do procedimento abaixo:

$$\begin{gathered} \begin{cases} 1 & + & 2 & + & ... & + & (n-1) & + & n = S(n) \\ n & + & (n-1) & + & ... & + & 2 & + & 1 = S(n) \end{cases} \\ \underbrace{(n-1)(n-1),...,(n-1)}_{\text{n vezes}} = \quad 2S(n) \\ S(n) = \frac{n(n-1)}{2} \end{gathered} \tag{12}$$

A prova por indução é dividida em três etapas: a **base da indução**, **o passo da hipótese** e o **passo da indução**.

A base da indução consiste em testar a validade da conjectura para o primeiro elemento da mesma, neste caso, verifica-se que:

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \tag{13}$$

O **passo da hipótese** consiste em conjecturar que o argumento é válido para um $k \geq 1$, uma vez que o caso base foi realizado:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} i = 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N} | k \geq 1 \tag{14}$$

Por fim, **o passo da indução** consiste em provar que se a hipótese é válida para k, esta deve ser válida para seu sucessor (i.e: $k+1$), logo, busca-se mostrar que:

$$
\begin{aligned}
S(k) + (k+1) &= S(k+1) \\
\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
\frac{k^2+3k+2}{2} &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
\frac{(k+1)(k+2)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \therefore \\
\text{pode-se afirmar que} \sum_{i=1}^{k} &= \frac{k(k+1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N} | k \geq 1
\end{aligned} \tag{15}
$$

1.4.6 Prova por indução – Exemplo 2

Sabendo que:

$$
\begin{cases} S(1) = & 1 \\ S(n) = & 1 + 4 + ... + (3n-2) \end{cases} \tag{16}
$$

prove que $S(n) = \sum_{i=1}^{n} 3i - 2 = 1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$:

A forma fechada deste somatório pode ser deduzida através do procedimento abaixo:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} 1 & + & 4 & + & ... & + & (3n-5) & + & (3n-2) = S(n) \\ (3n-2) & + & (3n-5) & + & ... & + & 4 & + & 1 = S(n) \end{cases} \\
&\underbrace{(3n-1)(3n-1), ..., (3n-1)}_{\text{n vezes}} = \quad 2S(n) \\
&S(n) = \frac{n(3n-1)}{2}
\end{aligned} \tag{17}
$$

A prova por indução é dividida em três etapas: a **base da indução**, **o passo da hipótese** e o **passo da indução**.
A base da indução consiste em testar a validade da conjectura para o primeiro elemento da mesma, neste caso, verifica-se que:

$$
S(1) = \sum_{i=1}^{1} 3i - 2 = 1 = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} \tag{18}
$$

O **passo da hipótese** consiste em conjecturar que o argumento é válido para um $k \geq 1$, uma vez que o caso base foi realizado:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} 3i - 2 = 1 + 4 + 7 + ... + 3k - 2 = \frac{k(3k-1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N} | k \geq 1 \quad (19)$$

Por fim, **o passo da indução** consiste em provar que se a hipótese é válida para k, esta deve ser válida para seu sucessor (i.e: $k+1$), logo, busca-se mostrar que:

$$\begin{aligned} S(k) + (k+1) &= S(k+1) \\ \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) &= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} \\ \frac{3k^2+5k+2}{2} &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \\ \frac{(k+1)(3k+2)}{2} &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \\ &\therefore \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{pode-se afirmar que} \sum_{i=1}^{k} 3k - 2 = \frac{k(3k-1)}{2}, \forall k \in \mathbb{N} | k \geq 1$$

2 Semana 2 – Sintaxe e Semântica

Lógica proposicional:

- Operandos são proposições;
- Considera apenas a estrutura da sentença que une as sentenças atômicas;
- Proposições são os blocos átomicos da sentença.

O que é uma proposição:

- Uma construção (sentença, frase, etc.) à qual se pode atribuir um juízo de valores booleanos;
- São sentenças declarativas não paradoxais;
- O valor-verdade de cada proposição é denotado por $V(p)$.

São exemplos de proposições:

1. p = "o Brasil é um país";
2. q = "Buenos Aires é a capital do Brasil";
3. r = $3 + 4 > 5$;
4. s = $7 - 1 = 5$

O valor verdade de cada proposição é:

1. V(p) = T
2. V(q) = F
3. V(r) = V
4. V(s) = F

Não são exemplos de proposições:

1. p = "Esta sentença é falsa";
2. q = "Que horas são?";
3. r = "Parabéns!";
4. s = "Vá estudar."

2.1 Variáveis

Considera-se que existe um conjunto enumerável $Vars$ de variáveis proposicionais. Já que $Vars$ é enumerável, considera-se que tais variáveis são indexáveis:

$$Vars = \{p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n, ...\} \tag{21}$$

Os nomes das variáveis não possuem nenhuma propriedade particular, embora seja comum utilizarmos p,q, r e s como rótulos de variáveis, outras letras também são permitidas. Geralmente letras minúsculas são utilizadas para sentenças atômicas e letras maiúsculas para sentenças compostas/subfórmulas. A tabela abaixo lista outros símbolos da lógica proposicionais, são eles: valores-verdade, operadores e delimitadores.

2.2 Símbolos

Nome	Símbolo	Tipo	Prioridade (0 – mais alta)
Verdadeiro	T ou V	Símbolo 0-ário (valor)	1
Falso	F ou $\perp$		1
Negação	$\neg$	Conectivo unário	2
Conjunção	$\wedge$	Conectivo binário	3
Disjunção	$\vee$		3
Implicação	$\rightarrow$		3
Bicondicional	$\leftrightarrow$		3
Disjunção exclusiva	$\oplus$		3
Abre parentêses	(	Delimitador	0
Fecha parentêses	)		0

2.3 Fórmula bem formada

Uma fórmula bem formada (*fbf*) atende a seguinte definição recursiva:

1. Uma proposição atômica é uma *fbf*;
2. Se A é uma *fbf*, então $\neg(A)$ é uma *fbf*;
3. Se A e B são *fbf's*, logo:
   (a) (A) $\vee$ (B)
   (b) (A) $\wedge$ (B)

(c) (A) $\rightarrow$ (B)

(d) (A) $\leftrightarrow$ (B)

(e) (A) $\oplus$ (B)

4. Caso nenhuma dessas regras se aplique, então a sentença não é uma *fbf*.

2.4 Conectivos/operadores Lógicos

Proposições atômicas são aglutinadas através de conectivos lógicos para formar proposições mais complexas.

2.4.1 Negação

Já foi visto que uma dada proposição p pode assumir apenas 2 valores: verdadeira ou é falso. A negação de uma proposição é construída, introduzindo-se a palavra *não* de forma apropriada ou prefixando-se a proposição por "não é fato que" (ou expressão equivalente). A negação inverte o valor-verdade da proposição. Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	$\neg p$
T	F
F	T

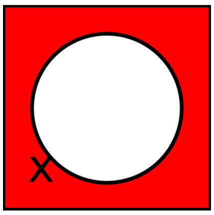


Figure 2: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de negação

2.4.2 Disjunção

A disjunção de duas proposições p e q reflete a noção de que pelo menos uma (eventualmente duas) das proposições componentes deve ocorrer para que a resultante seja verdadeira. Assim a proposição $p \vee q$ é:

- Verdadeira, quando pelo menos uma das proposições é verdadeira;

- Falsa, quando p e q são ambas falsa;

Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

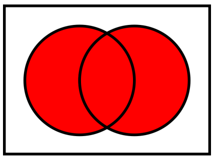


Figure 3: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de disjunção

2.4.3 Conjunção

A conjunção de duas proposições p e q reflete uma noção de simultaneidade para ser verdadeira, assim a proposição $p \wedge q$ é:

- verdadeira, aoenas quando p e q são simultaneamente verdadeiras;
- falsa, em qualquer outro caso;

Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

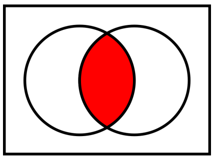


Figure 4: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de conjunção

2.4.4 Implicação

A implicação reflete a noção de que, a partir de uma premissa verdadeira, obrigatoriamente deve-se chegar a uma conclusão verdadeira, para que a proposição $p \to q$ seja verdadeira. Entretanto, partindo de uma premissa falsa, qualquer conclusão pode ser considerada. Assim a proposição $p \to q$ é:

- falsa, quando p é verdadeiro e q é falso;
- verdadeiro, caso contrário.

Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

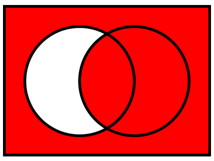


Figure 5: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de implicação

2.4.5 Bi-implicação

A bi-implicação/bicondição, reflete a noção de condição "nos dois sentidos", ou seja considera simultaneamente:

- sentido de "ida": p é premissa e q é conclusão;
- sentido de "volta": q é premissa e p é conclusão.

Logo, a proposição $p \leftrightarrow q$ é:

- Verdadeira, quando p e q são ambas verdadeiras ou falsas;
- Falsa, quando as proposições p e q possuem valores-verdade distintos.

Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

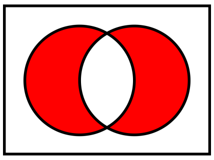


Figure 6: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de bi-implicação

2.4.6 Disjunção exclusiva

A disjunção exclusiva reflete a noção de exclusividade no operador de disjunção (que funciona de maneira inclusiva) visto anteriormente, isto é: a expressão $p \oplus q$ será verdadeira somente quando apenas uma das proposições é verdadeira. Segue-se abaixo a tabela-verdade e diagrama de *Venn* do operador:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

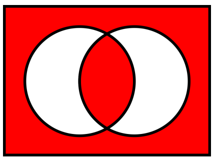


Figure 7: Diagrama de Venn do valor de verdade sob o operador de disjunção exclusiva

2.5 Tabela-Verdade

A tabela verdade computa o valor verdade de uma fórmula para todas as atribuições possíveis a seus símbolos proposicionais. O algoritmo para a criação da tabela-verdade de uma fórmula proposicional segue abaixo:

1. Enumere os n símbolos proposicionais (variáveis);

2. monte uma tabela com 2^n linhas e com m colunas, onde m é a quantidade de subfórmulas da sentença (não é necessário uma coluna para cada subfórmula, isto é apenas uma dica para montar a tabela);

3. Preencha as colunas das proposições atômicos com V ou F alternando de cima para baixo $VFVF$ para a 1ª coluna, $VVFF$, para a 2ª, $VVVVFFFF$ para a 3ª e assim por diante, sempre alternando os valores de V e F na ordem 2^i, onde i é o índice da coluna.

4. Avalie o valor-verdade de cada subfórmula para cada linha/interpretação, prossiga com este procedimento até avaliar a fórmula por completo para toda interpretação possível.

Como exemplo, observe a tabela-verdade abaixo para a fórmula $E = (p \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg(q \wedge \neg r)$

p	q	r	$(p \vee (\neg p \vee q))$	$\neg(q \wedge \neg r)$	E
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

2.6 Linguagem Natural para Linguagem Proposicional

Sentenças escritas em linguagens naturais podem ser representadas em linguagem de Lógica Proposicional. Exemplos:

1. Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1.20m, a não ser que você tenha mais do que 16 anos.

   - q = *"Você pode andar de patins"*

- r = *"Você tem menos do que 1.20m"*
- s = *"Você tem mais do que 16 anos"*
  - $(r \wedge \neg s) \rightarrow (\neg q)$

2. Se José está tocando piano ou Joaquim está tocando violão, então João não está dormindo

   - p = *"José está tocando piano"*
   - q = *"Joaquim está tocando violão"*
   - r = *"João está dormindo"*
     - $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

3. Se o catálogo de sementes está correto, então se as sementes são plantadas em Abril, as flores florescem em Julho. As flores não florescem em julho. Portanto, se as sementes são plantadas em Abril, o catálogo de sementes está correto.

   - c = "o catálogo de sementes está correto"
   - s = "sementes são plantadas em Abril"
   - f = "As flores florescem em Julho"
     - $((c \rightarrow (s \rightarrow f)) \wedge \neg f) \rightarrow (s \rightarrow \neg c)$

4. Os gatos perseguem ratos ou passáros, mas não ambos ao mesmo tempo.

   - m = "os gatos perseguem ratos"
   - b = "os gatos perseguem pássaros"
     - $(m \vee b) \wedge \neg(m \wedge b)$

5. Se chover, a praia estará vazia.

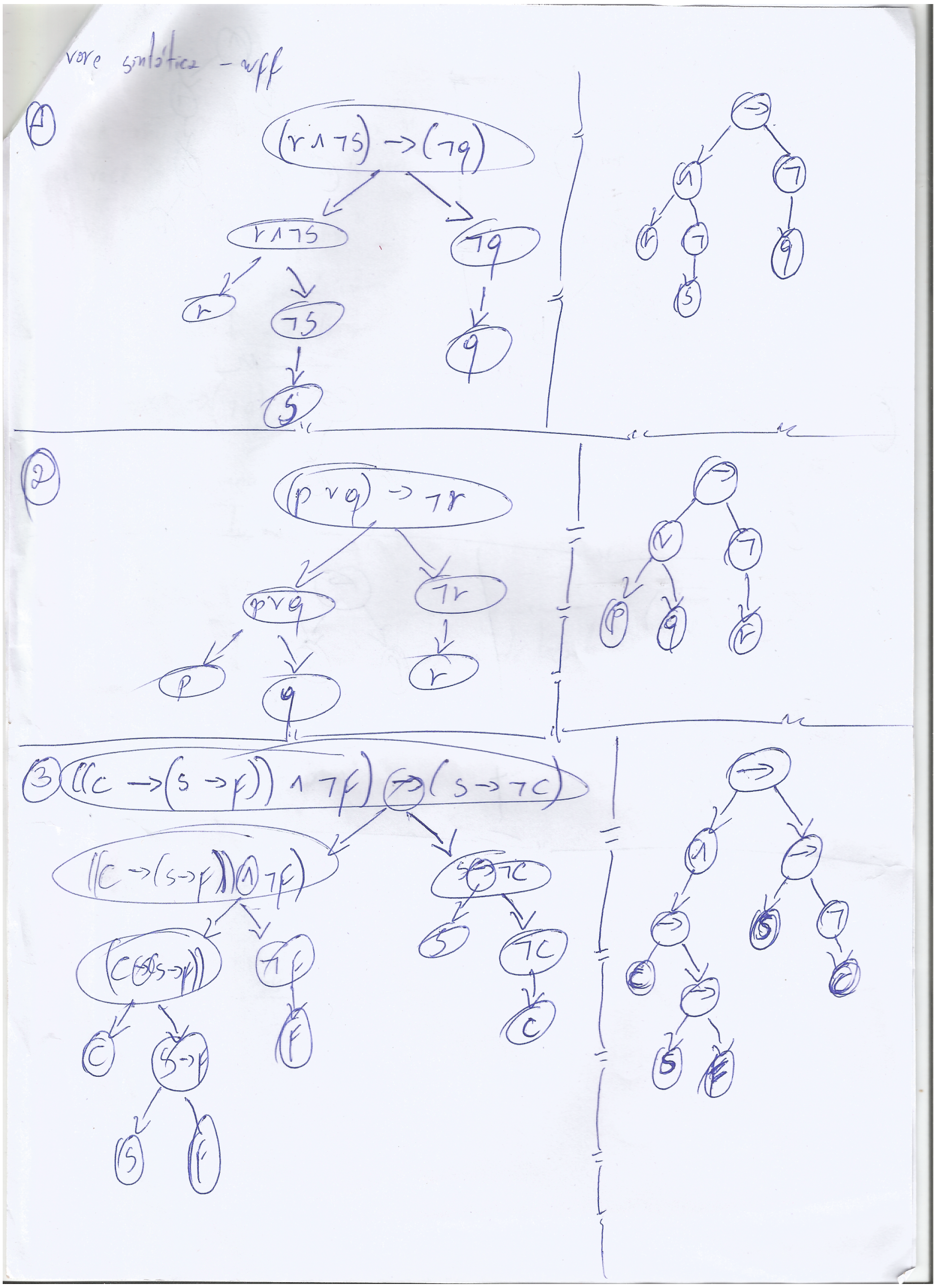
   - r = "chove"
   - s = "a praia estará vazia"
     - $r \rightarrow s$

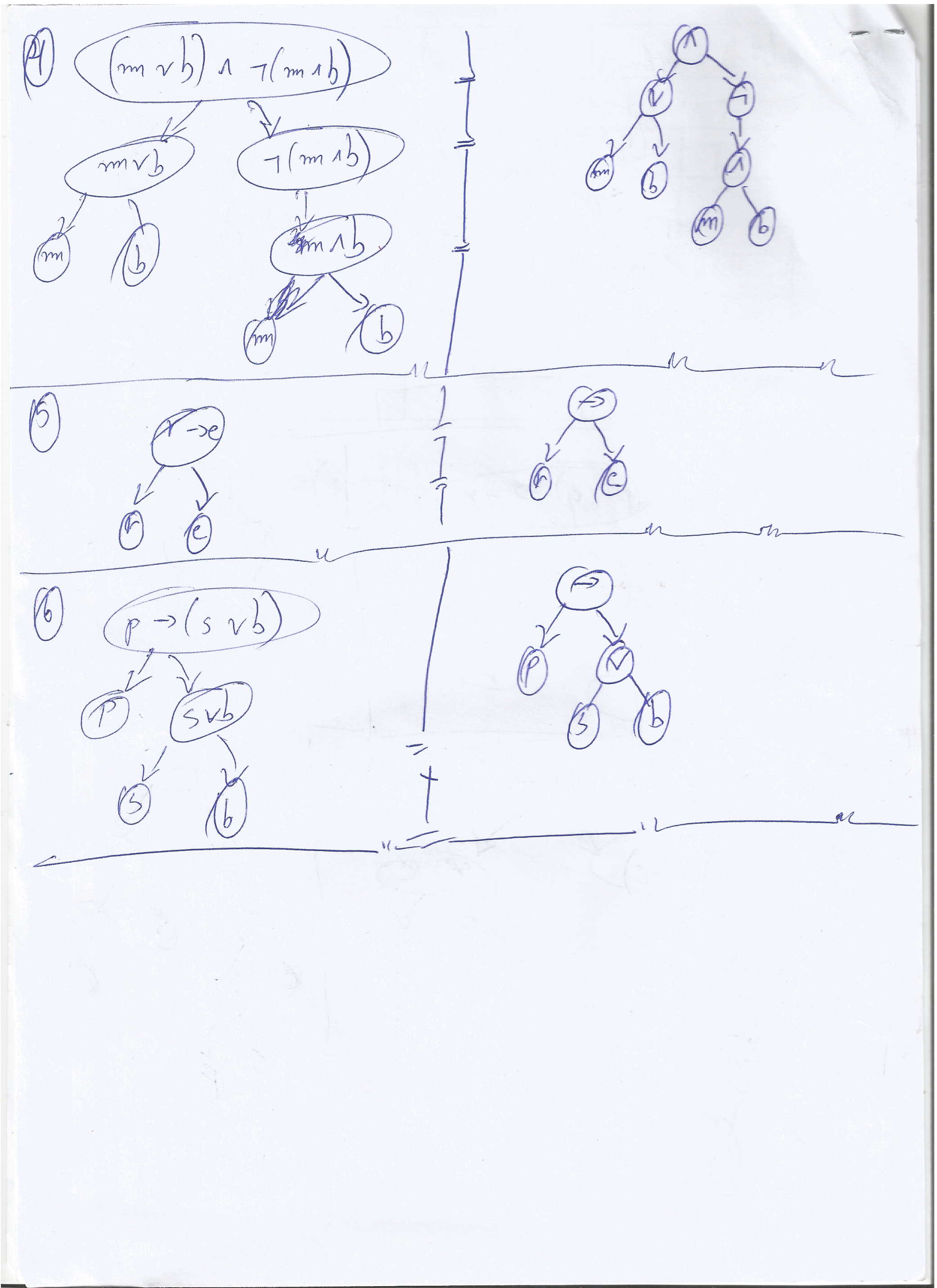
6. Se Jane comprou um piano hoje, ela vendeu o antido ou tirou um empréstimo bancário

   - p = "Jane comprou um pão hoje"
   - s = "Jane vendeu o piano antigo"
   - b = "Jane pegou um empréstimo bancário"
     - $p \rightarrow (s \vee b)$

2.7 Árvore Sintática

A construção de árvores sintáticas de uma fórmula lógica assegura que esta seja bem formada, caso toda folha da árvore seja um símbolo terminal, isto é: uma variável. Além disso a construção de árvores sintáticas denota a sequência correta de interpretação de uma fórmula, tornando-a inambígua. Abaixo, pode-se observar a árvore sintática de cada uma das fórmulas lógicas apresentadas na seção anterior.


vore sintática - wff
1
(r ∧ ¬s) → (¬q)
2
(p ∨ q) → ¬r
3
((c → (s → f)) ∧ ¬f) → (s → ¬c)


4
(m ∨ b) ∧ ¬(m ∧ b)
m ∨ b
¬(m ∧ b)
m ∧ b
5
r → e
6
p → (s ∨ b)
s ∨ b

3 Semana 3