Capítulo 11

Propriedades semânticas da Lógica de Predicados

Propriedades Semânticas

- **Definição (propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados)** Sejam

  $$H, G, H_1, H_2, \ldots, H_n$$

  fórmulas da Lógica de Predicados.

  As propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados são definidas a seguir.

  - H é válida

    se, e somente se,

    para toda interpretação I, I[H]= T .

    No caso em que a análise da interpretação de H não requer a interpretação de quantificadores,

    então H é tautologicamente válida.

- **Definição (propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados)**

  - H é satisfatível

    se, e somente se,

    existe pelo menos uma interpretação I,

    tal que I[H]= T .

  - Exemplo: Seja H = p(x,y), I é uma interpretação sobre os naturais N, tal que I[p] = <. Se I[x] = 5 e I[y] = 9. Podemos afirmar que H é satisfatível.

- **Definição (propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados)**

- H é contraditória

  se, e somente se,

  para toda interpretação I, I[H]= F.

- H implica semanticamente G

  se, e somente se,

  para toda interpretação I, se I[H]= T então I[G]= T .

- H equivale semanticamente a G

  se, e somente se,

  para toda interpretação I, I[H]= I[G].

- **Definição (propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados)**
- Uma interpretação I satisfaz H se I[H]= T .
- O conjunto

$$\beta = \{H_1 ,H_2,\ldots,H_n,\ldots\}$$

é satisfatível

se, e somente se,

existe uma interpretação I, tal que

$$I[H_1]= I[H_2]= \ldots = I[H_n]= \ldots = T.$$

Nesse caso, I satisfaz o conjunto de fórmulas, o que é indicado por I[β]= T .

Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação I satisfaz esse conjunto.

- **Definição (propriedades semânticas básicas da Lógica de Predicados)**

- O conjunto

$$\beta = \{H1, H2, ..., Hn, ...\},$$

implica semanticamente uma fórmula H,

se para toda interpretação I;

$$\text{se } I[\beta] = T, \text{ então } I[H] = T.$$

- **Notação.**

Como na Lógica Proposicional, se H é uma consequência lógica semântica de um conjunto de fórmulas β, então tal fato é indicado por

$$\beta \vDash H.$$

- **Notação.**

  Para simplificar, muitas vezes é utilizado no livro da disciplina apenas o termo "implicação" no lugar de "implicação semântica", ou "implicação sintática".

  É o contexto quem determina qual tipo de termo está sendo utilizado.

  De forma análoga, o termo "equivalência" pode representar "equivalência semântica", ou "equivalência sintática".

- **Notação.**

  Se a implicação ou equivalência é uma implicação ou equivalência semântica da Lógica Proposicional ou de Predicados, tal fato também deve estar indicado implicitamente no contexto.

  Além disso, a notação

  $$\models H$$

  também indica que H é tautologia ou é válida.

- **Satisfatibilidade de Fórmulas**
- **Validade de fórmulas**

Implicações e Equivalências entre Fórmulas

- **Proposição (implicação)**

  Dada uma fórmula H e x uma variável qualquer da Lógica de Predicados,

  se

  H é válida,

  então

  $(\forall x)H$ é válida.

- **Lema (interpretação estendida e variável ligada)**

  Seja H *uma fórmula na qual a variável* x *não ocorre livre.*

  Dada uma interpretação I *sobre um domínio* U, *então*

  $$\forall\ d \in U, \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = I[H]$$