

Lógica Matemática

Notas de Aula

Luis Vinicius Costa Silva
Ibiotec – DCC
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão
Agosto de 2019

Contents

1	Árvore verdade/Prova Semântica	2
1.1	Introdução	2
1.2	Exemplos	5
1.2.1	Exemplo 1	5
1.2.2	Exemplo 2	6
1.2.3	Exemplo 3	7
1.2.4	Exemplo 4	8
1.2.5	Exemplo 5	9
1.2.6	Exemplo 6	10
2	Equivalências Lógicas	11
2.1	Introdução	11
2.2	Exemplos	13
2.2.1	Exemplo 1	13
2.2.2	Exemplo 2	14
2.2.3	Exemplo 3	14
2.2.4	Exemplo 4	14
2.2.5	Exemplo 5	15
2.2.6	Exemplo 6	15
2.2.7	Exemplo 7	15
2.2.8	Exemplo 8	15
2.2.9	Exemplo 9	16

1 Árvore verdade/Prova Semântica

1.1 Introdução

- É sabido que uma sentença lógica pode ser classificada como tautológica, contraditória, ou em último caso, contingente. A classificação de sentenças lógicas nestas três classes pode ser realizada através da construção da tabela-verdade da mesma, e a posterior checagem de cada linha/interpretação da mesma;
- Visto que a quantidade de linhas de uma tabela-verdade cresce na ordem de 2^n em função da quantidade de variáveis da fórmula, métodos mais eficazes para classificação da sentença lógica fazem-se necessários;
- A árvore verdade/prova semântica é um tipo de prova por absurdo/contradição, esta consiste em mostrar que se a fórmula A é tautológica, logo $\neg A$ é

contraditório. Logo, a raiz da prova semântica é $\neg A$, regras de expansão (apresentadas em seguida neste guia) são aplicadas em cada nó da árvore seguindo uma busca em profundidade na mesma, de tal forma que a árvore verdade seja expandida de tal forma que compreenda para quais subfórmulas de A devam ser tautológicas para que A também a seja;

- A contradição buscada em uma prova semântica é expressa como um ramo fechado na árvore, isto é: um ramo no qual uma proposição atômica B contida em um nó arbitrário corresponde com um nó $\neg B$.
- A primeira vista, a prova semântica parece servir apenas para checar se uma dada fórmula A é tautológica, entretanto seu uso pode ser aplicado em equivalências lógicas, onde busca-se saber se uma fórmula A é equivalente a uma fórmula B , neste caso, constrói-se uma prova semântica de $A \iff B$, no qual a raiz é $\neg(A \iff B)$, buscando-se uma contradição na fórmula negada, ou seja, provando que $A \iff B$ é tautológica e consequentemente que $A \equiv B$.
- Analogamente, a prova semântica pode ser usada para checar se A é contraditório, construindo a árvore semântica para $\neg\neg A$ (ou simplesmente A) e buscando uma contradição, fazendo com que $\neg A$ seja tautológico, e por fim, A seja contraditório;

Abaixo, seguem-se as regras utilizadas na expansão da prova semântica:

$$\begin{array}{c} \sim \sim p \\ p \end{array}$$

(a) Dupla Negação

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array}$$

(b) Disjunção

$$\begin{array}{c} \sim (p \vee q) \\ \sim p \\ \sim q \end{array}$$

(c) Negação da disjunção

$$\begin{array}{c} p \cdot q \\ p \\ q \end{array}$$

(d) Conjunção

$$\begin{array}{c} \sim (p \cdot q) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sim p \quad \sim q \end{array}$$

(e) Negação da conjunção

$$\begin{array}{c} p \supset q \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sim p \quad q \end{array}$$

(f) Implicação

$$\begin{array}{c} \sim (p \supset q) \\ p \\ \sim q \end{array}$$

(g) Negação da implicação

$$\begin{array}{c} p = q \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p & \sim p \\ q & \sim q \end{array} \end{array}$$

(h) Bi-implicação

$$\begin{array}{c} \sim (p = q) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p & \sim p \\ \sim q & q \end{array} \end{array}$$

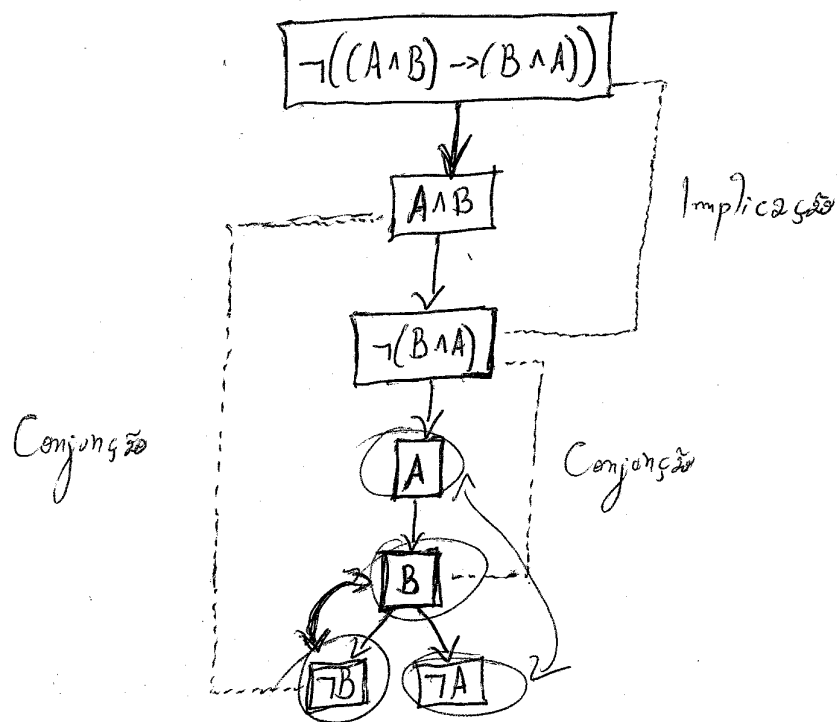
(i) Negação da bi-implicação

Figure 1: Regras da prova semântica

1.2 Exemplos

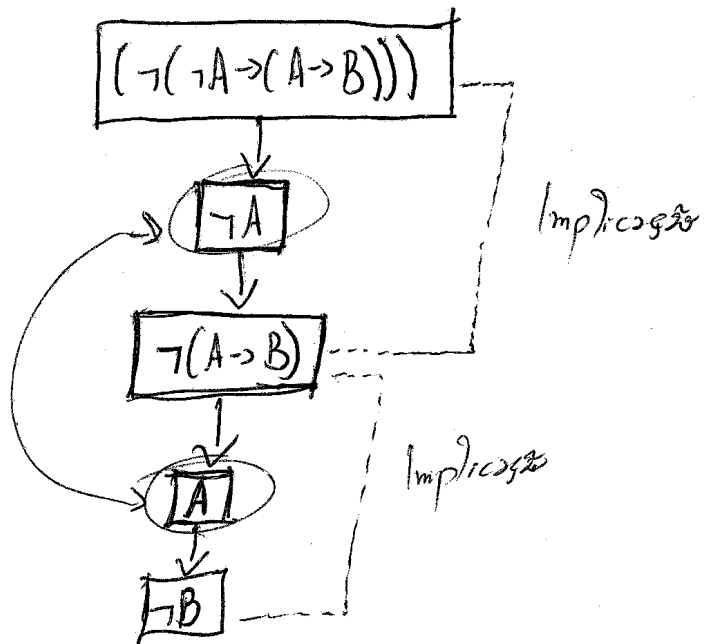
1.2.1 Exemplo 1

$$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$$



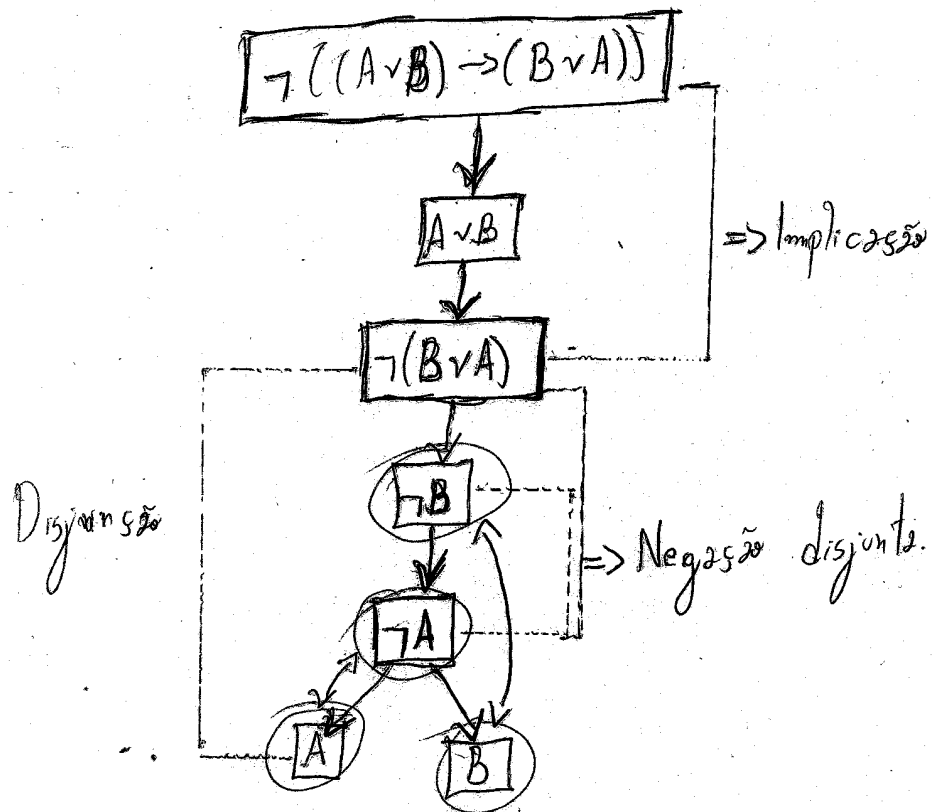
1.2.2 Exemplo 2

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$



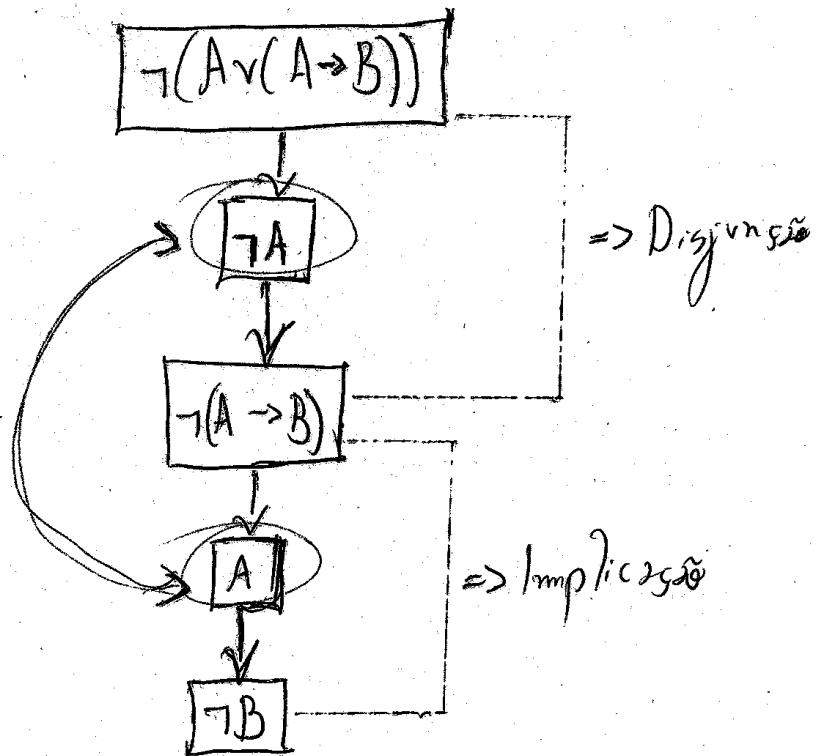
1.2.3 Exemplo 3

$$(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$$



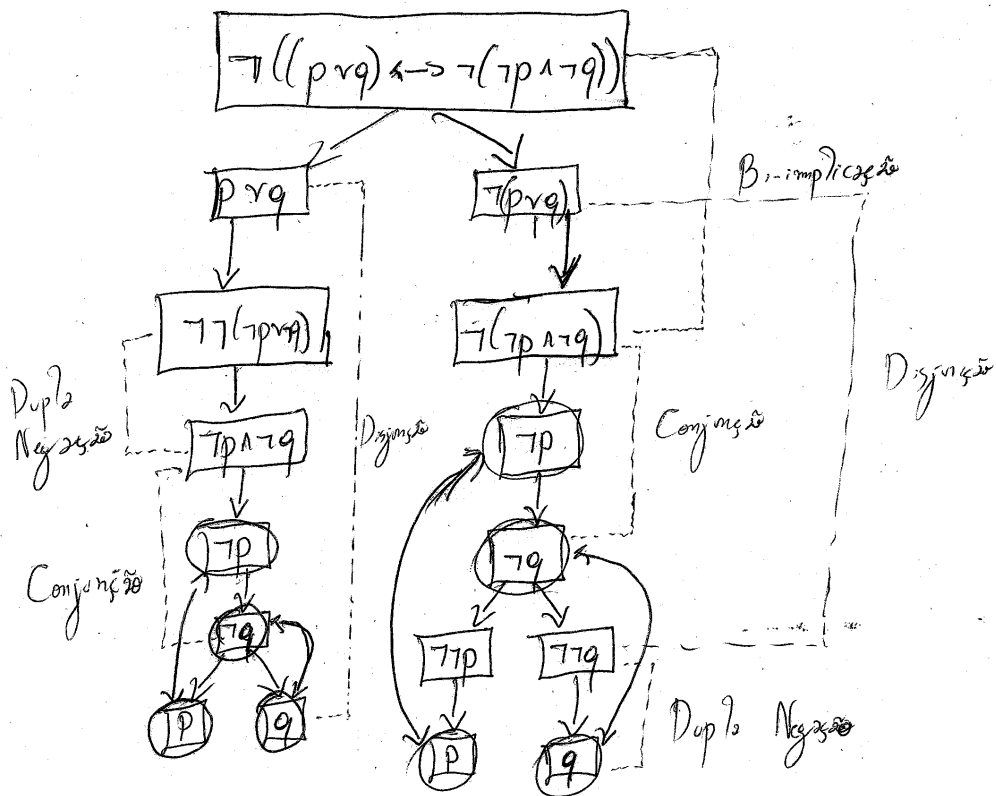
1.2.4 Exemplo 4

$$A \vee (A \rightarrow B)$$



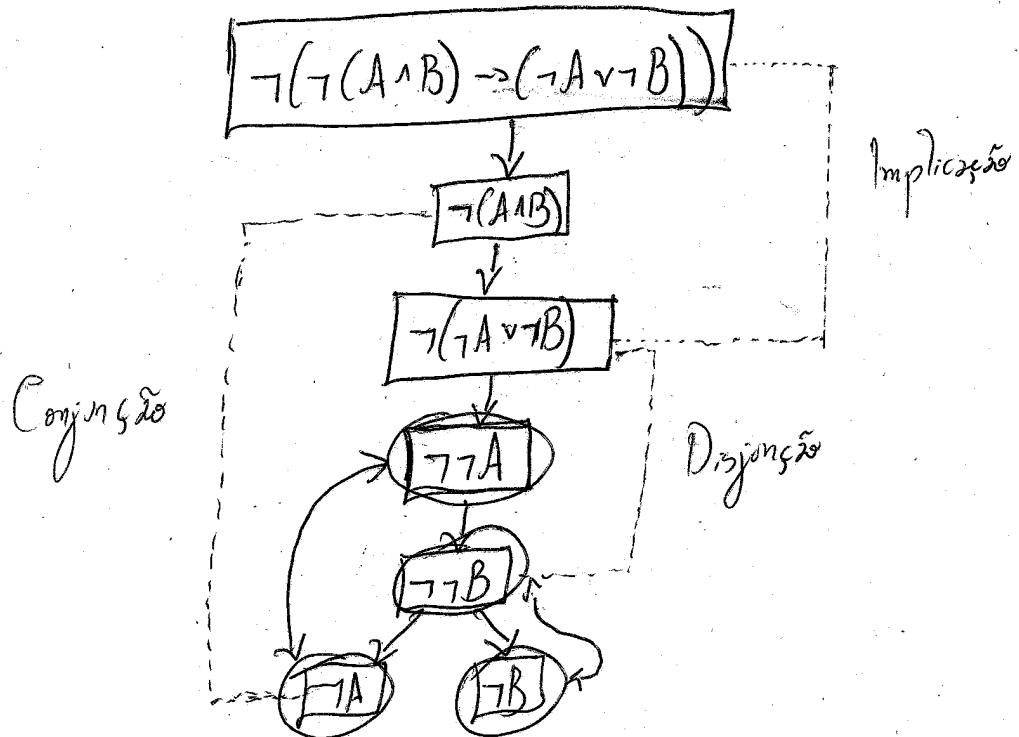
1.2.5 Exemplo 5

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$



1.2.6 Exemplo 6

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$



2 Equivalências Lógicas

2.1 Introdução

- Duas proposições/fórmulas A e B são ditas equivalentes se, somente se, para toda interpretação de A, esta coincide com toda interpretação de B;
- As equivalências lógicas podem ser provadas a partir da construção de tabelas-verdade de ambas as fórmulas, e a verificação de que cada interpretação de A coincide com cada interpretação de B, ou checar se $A \iff B$ é tautológico.
- Uma vez confirmadas/aceitas a veracidade das equivalências, estas podem ser usadas para demonstrar a equivalência entre duas fórmulas.

As equivalências lógicas são úteis em situações onde se faz necessário verificar se uma fórmula é equivalente a outra, se esta é tautológica, contraditória ou contingente (i.e: se a fórmula A é equivalente a T , F , ou a nenhum símbolo verdade respectivamente). Outros casos nos quais estas equivalências lógicas se fazem úteis são em casos onde busca-se simplificar decrescer o comprimento de uma fórmula (simplifica-la) ou remover um determinado operador/operando sem a alteração da saída da fórmula.

- Identidade

$$- p \wedge T \equiv p$$

$$- p \vee F \equiv p$$

- Dominação

$$- p \vee T \equiv T$$

$$- p \wedge F \equiv F$$

$$- F \implies p \equiv F$$

$$- p \implies T \equiv T$$

- Idempotência

$$- p \vee p \equiv p$$

$$- p \wedge p \equiv p$$

- Associatividade

$$- (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$- (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

- Dupla Negação

$$- \neg(\neg p)$$

- Comutatividade

$$- p \vee q \equiv q \vee p$$

$$- p \wedge q \equiv q \wedge p$$

- Distributividade

$$- p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$- p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$- p \implies (q \wedge r) \equiv (p \implies q) \wedge (p \implies r)$$

$$- (p \vee q) \implies r \equiv (p \implies r) \wedge (q \implies r)$$

- De Morgan

$$- \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$- \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$- (p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$- (p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

- Absorção

$$- p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$- p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

- Negação

$$- p \vee \neg p \equiv T$$

$$- p \wedge \neg p \equiv F$$

- Implicação

$$- p \implies q \equiv \neg p \vee q$$

$$- p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$$

$$- T \implies p \equiv p$$

- $F \implies p \equiv T$
- $p \implies T \equiv T$
- $p \implies F \equiv \neg p$
- $p \implies q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \implies q) \equiv (p \wedge \neg q)$

• Bi-implicação

- $p \iff q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$

A prova de cada equivalência acima é trivial e é deixada ao leitor como exercício.

2.2 Exemplos

Segue-se exemplos da aplicação de equivalências lógicas na simplificação de fórmulas:

2.2.1 Exemplo 1

$p \vee \neg(\neg p \implies q) \equiv (p \vee \neg q)$	Implicação
$p \vee \neg(\neg\neg p \vee q) \equiv$	Dupla Negação
$p \vee \neg(p \vee q) \equiv$	De Morgan + Distributividade
$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \equiv$	Negação
$T \wedge (p \vee \neg q) \equiv$	Identidade
$(p \vee \neg q) \equiv$	

2.2.2 Exemplo 2

$((p \implies q) \wedge \neg q) \implies \neg p \equiv T$	Implicação
$\neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p \equiv$	Comutatividade
$\neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee \neg p \equiv$	Distributividade
$\neg((\neg q \wedge \neg p)) \vee (\neg q \wedge q) \vee \neg p \equiv$	Negação
$\neg((\neg q \wedge \neg p) \vee F) \vee \neg p \equiv$	Identidade
$\neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \equiv$	De Morgan
$\neg(\neg \neg q \vee \neg \neg p) \vee \neg p \equiv$	Dupla Negação
$q \vee (p \vee \neg p) \equiv$	Associatividade + Negação
$q \vee T \equiv$	Dominação
$T \equiv$	

2.2.3 Exemplo 3

$(p \implies q) \equiv (\neg q \implies \neg p)$	Implicação
$\equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p)$	Dupla Negação
$\equiv q \vee \neg p$	Comutatividade
$\equiv \neg p \vee q$	Implicação
$\equiv p \implies q$	

2.2.4 Exemplo 4

$(p \wedge q) \implies p \equiv T$	Implicação
$\neg(p \wedge q) \vee p \equiv$	De Morgan
$\neg(p \vee \neg q) \vee p \equiv$	Comutatividade
$(\neg q \vee \neg p) \vee p \equiv$	Associatividade
$\neg q \vee (\neg p \vee p) \equiv$	Negação
$\neg q \vee T \equiv$	Dominação
$T \equiv$	

2.2.5 Exemplo 5

$$\begin{aligned}
 (q \implies p) \wedge (r \implies p) &\equiv (q \vee r) \implies p && \text{Implicação} \\
 &\equiv \neg(q \vee r) \vee p && \text{De Morgan} \\
 &\equiv (\neg q \wedge \neg r) \vee p && \text{Distributividade} \\
 &\equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) && \text{Implicação} \\
 &\equiv (q \implies p) \wedge (r \implies p)
 \end{aligned}$$

2.2.6 Exemplo 6

$$\begin{aligned}
 p \implies (q \implies r) &\equiv (p \wedge q) \implies r && \text{Implicação} \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{De Morgan} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{Associatividade} \\
 &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{Implicação} \\
 &\equiv p \implies (q \implies r)
 \end{aligned}$$

2.2.7 Exemplo 7

$$\begin{aligned}
 \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv (\neg p \wedge \neg q) && \text{De Morgan} \\
 \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) &\equiv && \text{De Morgan} \\
 \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) &\equiv && \text{Dupla Negação} \\
 \neg p \wedge (p \vee \neg q) &\equiv && \text{Distributividade} \\
 \neg p \wedge (p \vee \neg q) &\equiv && \text{Negação + Identidade}
 \end{aligned}$$

2.2.8 Exemplo 8

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \implies (p \vee q) &\equiv T && \text{Implicação} \\
 \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) &\equiv && \text{De Morgan} \\
 (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) &\equiv && \text{Associatividade e Comutatividade} \\
 (\neg p \vee p) \vee (q \vee \neg q) &\equiv && \text{Dominação} \\
 T \vee T &\equiv && \text{Dominação} \\
 T &\equiv
 \end{aligned}$$

2.2.9 Exemplo 9

$(p \implies q) \implies q$	$\equiv (p \vee q)$	Implicação
	$\equiv ((\neg(p \implies q)) \vee q)$	Implicação
	$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q)$	Implicação
	$\equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$	Distributividade
	$\equiv (p \vee q) \wedge T$	Negação
	$\equiv (p \vee q)$	