Lógica Matemática

Notas de Aula

Luis Vinicius Costa Silva
Ibiotec – DCC
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

Agosto de 2019

Contents

Correção de exercícios da primeira miniavaliação com comentários pertinentes ao leitor.

1 Correção de Exercícios - Miniavaliação 2

1.1 Exercício 1

1.1.1 Item A

Traduza a seguinte declaração para a linguagem da Lógica Proposicional:
"Se $\underbrace{\text{eu tiver dinheiro}}_{p}$, $\underbrace{\text{vou ao cinema}}_{q}$ ou $\underbrace{\text{ao teatro}}_{r}$, mas eu não tenho dinheiro. Logo, eu não vou ao cinema ou eu não vou ao teatro."

- p = "tenho dinheiro";
- q = "vou ao cinema";
- r = "vou ao teatro".

$$(((p \implies (q \vee r) \wedge (\neg p)) \implies (\neg q \vee r)) = H$$

1.1.2 Item B

Construa a tabela verdade da fórmula do item A:

p	q	r	$q \vee r$	$\underbrace{p \implies (q \vee r)}_{\text{X}}$	$\underbrace{X \wedge \neg p}_{\text{Y}} = Y$	$\neg q \vee \neg r = Z$	$H = Y \implies Z$
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

1.1.3 Item C

Construa a árvore sintática da fórmula:

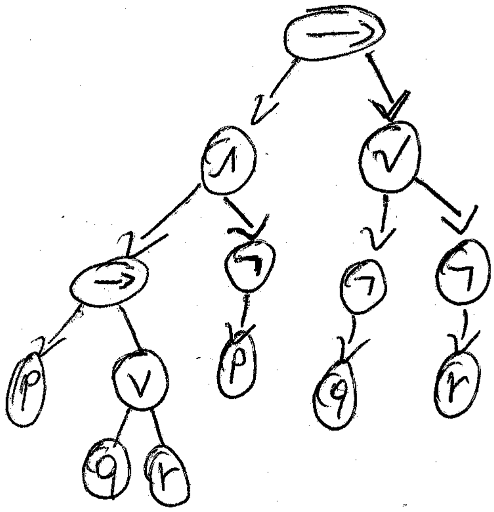

Figure 1: Árvore Sintática – Resposta possível 1

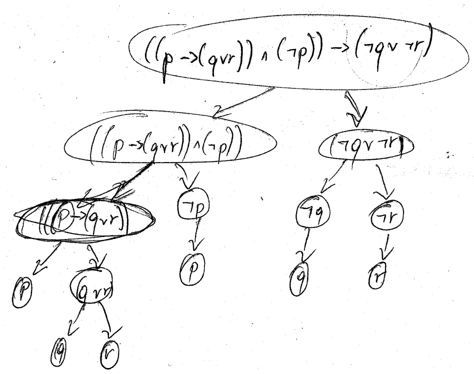

Figure 2: Árvore Sintática – Resposta possível 2

1.2 Exercício 2

Considere a afirmação abaixo:
"João não dorme quando José toca piano ou Joaquim toca violão."

Se João estiver dormindo podemos saber se José está tocando piano? **Justifique usando a tabela verdade**.

Reescrevendo a frase de forma apropriada, temos: *"Se José está tocando piano ou Joaquim está tocando violão, então João não está dormindo."*

Traduzindo para a linguagem de Lógica Proposicional obtém-se:

- p = "José está tocando piano";
- q = "Joaquim está tocando violão";
- r = "João está dormindo".

$$(p \lor q) \implies (\neg r)$$

Construindo a tabela-verdade temos:

p	q	r	$\neg r$	$p \lor q$	$(p \lor q) \implies (\neg r)$
T	T	**T**	F	T	F
T	T	F	T	T	**T**
T	F	**T**	F	T	F
T	F	F	T	T	**T**
F	T	**T**	F	T	F
F	T	F	T	T	**T**
F	F	**T**	F	F	**T**
F	F	F	T	F	**T**

As linhas com valores verdades em negrito destacam os casos nos quais a proposição r é verdadeira (ou seja, quando João está dormindo) e em que $(p \lor q) \implies (\neg r)$ é verdadeiro (ou seja, a proposição é válida). Pelo problema, resta apenas a 7ª linha como a única possível. Logo, concluí-se José não está tocando piano e Joaquim não está tocando violão (visto que p e q são falsos na sétima linha).

1.3 Exercício 3

Construa a CNF (Forma normal conjuntiva) e DNF (Forma normal disjuntiva) das proposições encontradas nas questões 1 e 2 (não é necessário simplificar a fórmula obtida):

A construção da forma normal conjuntiva expandida resume-se a criar uma parcela de conjunções para cada interpretação verdadeira da tabela-verdade, negando as proposições com interpretações falsas, uma vez que todas as parcelas foram computadas, estas são unidas por disjunções (soma de produtos ou maxtermos).

A construção da forma normal disjuntiva expandida resume-se a criar uma parcela de disjunções para cada interpretação falsa da tabela-verdade, negando as proposições verdadeiras, uma vez que todas as parcelas foram computadas, estas são unidas por conjunções (produto das somas ou mintermos).

1.3.1 Questão 1 – $(((p \implies (q \vee r) \wedge (\neg p)) \implies (\neg q \vee r))$

CNF:$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
DNF:$(p \vee \neg q \vee r)$

1.3.2 Questão 2 – $(p \vee q) \implies (\neg r)$

CNF:$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
DNF:$((p \vee (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((\neg p \vee (q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee (\neg q \vee \neg r))))$

1.4 Exercício 4

Mostre, utilizando equivalências lógicas que:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv (\neg p \wedge \neg q) && \text{De Morgan} \\
\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) &\equiv && \text{De Morgan + Dupla Negação} \\
\neg p \wedge (p \vee \neg q) &\equiv && \text{Distribuitividade} \\
(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) &\equiv && \text{Contradição + Identidade} \\
(\neg p \wedge \neg q) &\equiv && \text{q.e.d}
\end{aligned}
$$

1.5 Exercício 5

Mostre, utilizando equivalências lógicas que:

$$\begin{aligned}
(p \implies q) \implies q \equiv p \vee q & \quad \text{Implicação (2x)} \\
\neg(\neg p \vee q) \vee q \equiv & \quad \text{De Morgan + Dupla Negação} \\
(p \wedge \neg q) \vee q \equiv & \quad \text{Distribuitividade} \\
(p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \equiv & \quad \text{Tautologia e Identidade} \\
(p \vee q) \equiv & \quad \text{q.e.d}
\end{aligned}$$

1.6 Exercício 6

Prove que:

$$\sum_{i=1}^{n} = i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1}$$

A fórmula fechada deste somatório pode ser deduzida através da aplicação do algoritmo de Gregory-Newton para interpolação polinomial por diferenças progressivas, observe abaixo:

n	S(n)	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	1	4	5	2
2	5	9	7	2
3	14	16	9	
4	30	25		
5	55			

Logo, obtém-se o a primeira parcela da forma fechada expandida:

$$2\frac{x^3}{3!} \tag{2}$$

Analogamente, obtem-se o segundo termo da seguinte forma:

n	S(n)	Δ_1	Δ_2
1	$1 - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{3}$
2	$5 - \frac{2^3}{3} = \frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{3}$
3	$14 - \frac{3^3}{3} = 5$	$\frac{11}{3}$	$\frac{3}{3}$
4	$30 - \frac{4^3}{3} = \frac{26}{3}$	$\frac{14}{3}$	
5	$55 - \frac{5^3}{3} = \frac{40}{3}$		

$$1\frac{x^2}{2!} \tag{3}$$

O termo de grau um é obtido de forma análoga:

n	S(n)	Δ_1
1	$\frac{2}{3} - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{7}{3} - \frac{2^2}{2} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	$5 - \frac{3^2}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{26}{3} - \frac{4^2}{2} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{40}{3} - \frac{5^2}{2} = \frac{5}{6}$	

$$\frac{1}{6}\frac{x}{1!} \tag{4}$$

A verificação de que esta é a última parcela do polinômio expandido da forma fechada se dá pela repetição do mesmo procedimento, e a posterior obtenção do termo 0:

n	S(n)
1	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$
2	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} = 0$
3	$\frac{1}{2} - \frac{3}{6} = 0$
4	$\frac{2}{3} - \frac{4}{6} = 0$
5	$\frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$

Logo, a forma fechada expandida do somatório é:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \tag{5}$$

Colocando n em evidência, ambas as parcelas sob o mínimo múltiplo comum e transformando a divisão em produto, temos o nosso somatório original:

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{6}$$

O primeiro passo da prova por indução é o caso base, logo temos:

$$S(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 = 1^2 \tag{7}$$

Uma vez que o caso base foi confirmado, podemos avançar para o caso da hipótese:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) | \forall k \in \mathbb{N} \land k \geq 1 \tag{8}$$

Finalmente testamos a conjectura de que se $S(k)$ é válido $\forall k \in \mathbb{N} \land k \geq 1$, logo, este também deve ser válido para $(k+1)$. Em termos gerais, temos:

$$S(k) + \underbrace{(k+1)}_{\text{próx. elemento}} = S(k+1) \tag{9}$$

Neste caso, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}_{\text{S(k)}} + \underbrace{(k+1)^2}_{\text{(k+1)}} &= \underbrace{\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)}_{\text{S(k+1)}} \\
\frac{1}{6}k(2k^2+3k+1) + (k^2+2k+1) &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
\frac{1}{6}2k^3 + 9k^2 + 13k + 6 &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)
\end{aligned} \tag{10}$$

Resta fatorar o polinômio do lado esquerdo da equação, e conferir se os termos obtidos são os mesmos que se encontram do lado direito da mesma. Para tanto, fazemos uso do teorema das raízes racionais, que afirma que para um polinômio da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + k$ onde k e a_n são inteiros, as raízes deste polinômio são da forma:

$$\pm \frac{\text{múltiplos de k}}{\text{múltiplos de } a_n} \tag{11}$$

Assim temos as seguintes possibilidades:

$$\pm \frac{1, 2, 3, 6}{1, 2} \tag{12}$$

Um dos fatores é $(k + 1)$ já que $-\frac{1}{1}$ satisfaz a equação, logo divide-se o polinômio original por $(k+1)$ e obtém-se $2k^2+7k+6$, fatorando este polinômio de grau 2(através de Bhaskara, soma e produto, teorema das raízes racionais, etc), obtém que este é composto pelos fatores $(2k+3)$ e $(k+2)$, que por sua vez é o lado direito da igualdade. Logo:

$$\frac{1}{6}2k^3 + 9k^2 + 13k + 6 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \qquad (13)$$

q.e.d

Logo podemos afirmar que $\sum_{i=1}^{n} = i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Alternativamente, ambos os lados da equação poderiam ser desenvolvidos (até mesmo simultaneamente), de tal forma que em algum momento uma igualdade fosse atingida, provando a conjectura.

1.7 Exercício 7 - Tarefa de casa

Mostre, utilizando equivalências lógicas que:

$$\begin{aligned}
(p \implies r) \wedge (q \implies r) &\equiv (p \vee q) \implies r && \text{Implicação}\\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee r && \text{De Morgan}\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{Distributividade}\\
&\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{Implicação}\\
&\equiv (p \implies r) \wedge (q \implies r) && \text{q.e.d}
\end{aligned}$$