Capítulo 9

A linguagem da Lógica de Predicados

Alfabeto

- **Definição (alfabeto)**

  O alfabeto da Lógica de Predicados é constituído por:

  - *símbolos de pontuação:*

    (,);

  - *símbolo de verdade:*

    false;

  - *um conjunto enumerável de símbolos para variáveis:*

    $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots ;$

Alfabeto

- **Definição (alfabeto)**
  - *um conjunto enumerável de símbolos para funções:*

    $$f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, \ldots ;$$

  - *um conjunto enumerável de símbolos para predicados:*

    $$p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, \ldots ;$$

  - *Conectivos:*

    $$\neg, \vee, \forall, \exists .$$

- *Associado a cada símbolo para função ou predicado, temos um número inteiro não-negativo* k.

  Esse número indica a aridade, ou seja, o número de argumentos da função ou predicado.

- Variáveis.
- Funções e predicados.
- Constantes e símbolos proposicionais.
- Conectivos.

Elementos Básicos da Linguagem

- **Definição (termo)**

  O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:

  - as variáveis são termos;
  - se

    $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e $\breve{f}$ é um símbolo para função n-ária,

    então $\breve{f}(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um termo.

Exemplo (termos)

a) Uma variável x é um termo

b) Uma constante "a" é um termo

c) Se f é uma função binária, então f(x, a) é um termo pois "x" e "a" são termos. Observe que se "f" não for uma função binária, então f(x,a) não é um termo.

d) Sejam g e f funções ternária e binária respectivamente. Neste caso, g(y, f(x,a), c) é um termo.

e) h(x,y,z) é um termo. Neste caso é considerado implicitamente que h é ternária.

- **Definição (átomo)**

  O conjunto dos átomos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:

  - o símbolo de verdade ***false*** é um átomo;
  - se

    $\mathbf{t_1, t_2, ..., t_n}$ são termos e **p** é um símbolo para predicado n-ário,

    então,

    $\mathbf{p(t_1, t_2, ..., t_n)}$ é um átomo.

Exemplo (átomos)

a) O símbolo de verdade *false* é um átomo

b) O símbolo proposicional P é um átomo pois é um predicado zero-ário.

c) Se p é um predicado binário, então p(f(x,a),x) é um átomo.

d) q(x,y,z) é um átomo. Neste caso é considerado implicitamente que q é um ternário.

e) Para simplificar a notação, considera-se que *true* é um átomo. Observe que isto é um abuso de linguagem pois *true* = $\neg$*false*

Definição (fórmula)

O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir.

- Todo átomo é uma fórmula.
- Se

  H é uma fórmula,

  então

  $(\neg H)$ é uma fórmula.
- Se

  H e G são fórmulas,

  então

  $(H \vee G)$ é uma fórmula.

- **Definição (fórmula)**
  - Se

    H é uma fórmula e x uma variável,

    então

    $((\forall x)H)$ e $((\exists x)H)$ são fórmulas.

- **Definição (expressão)**

  Uma expressão da Lógica de Predicados é um termo ou uma fórmula.

Exemplo (construção de fórmulas)

a) Os átomos p(x), R e *false* são fórmulas

b) Como R e p(x) são fórmulas, obtém-se a fórmula $((\neg p(x) \vee R))$

c) Conforme é analisado na primeira parte do livro, esta fórmula equivale a $(p(x) \rightarrow R)$.

d) Como $(p(x) \rightarrow R)$ é uma fórmula, então $((\forall x)\ (p(x) \rightarrow R))$ também é uma fórmula.

- **Definição (subtermo, subfórmula, subexpressão)**

  Os elementos a seguir definem as partes de um termo ou fórmula E.

  - Se

    $E = x$,

    então

    a variável x é um subtermo de E

  - Se

    $E = f(t_1, t_2, ..., t_n)$,

    então

    t_i e $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ são subtermos de E.

  - Se

    t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E,

    então

    t_1 é subtermo de E.

- **Definição (subtermo, subfórmula, subexpressão)**
  - Se

    $E = (\neg H)$

    então

    H e $(\neg H)$ são subfórmulas de E.
  - Se

    E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ ou $(H \leftrightarrow G)$,

    então

    H, G e E são subfórmulas de E.

- **Definição (subtermo, subfórmula, subexpressão)**
- Se

  x é uma variável,

  $\#$ um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$ e

  $E = ((\#x)H)$,

  então

  H e $((\#x)H)$ são subfórmulas de E.
- Se

  H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E,

  então

  H_1 é subfórmula de E.

  - Todo subtermo ou subfórmula é também uma subexpressão.

- **Definição (literal)**

Um literal, na Lógica de Predicados é um átomo ou a negação de um átomo.

Um átomo é um literal positivo.

A negação de um átomo é um literal negativo.

Exemplo (literal): *true* é um literal negativo, pois é igual a negação de *false*

- **Definição (forma normal)**

  Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.

  - H está na forma normal conjuntiva, fnc, se é uma conjunção de disjunções de literais.

  - H está na forma normal disjuntiva, fnd, se é uma disjunção de conjunções de literais.

- **Definição (ordem de precedência)** *Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é a seguinte:*
  - *maior precedência:* $\neg$;
  - *precedência intermediária superior:*

    $\forall$, $\exists$;
  - *precedência intermediária inferior:*

    $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
  - *precedência inferior:*

    $\vee$, $\wedge$.

- **Exemplo (precedência)** Este exemplo considera, a simplificação de uma fórmula pela eliminação de símbolos de pontuação. Considerando a ordem de precedência do conectivos, a concatenação de símbolos

$G = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists z) \neg q(z) \wedge r(y)$

Representa a fórmula

$H = (((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \to (\exists z) (\neg q(z))) \wedge r(y))$

- **Correspondência entre quantificadores.**

$$(\forall\ x) \neg H \text{ equivale a } \neg(\exists\ x)\ H$$

$$(\exists\ x) \neg H \text{ equivale a } \neg(\forall\ x)\ H$$

- **Definição (comprimento de uma fórmula)**

  Dada uma fórmula H, *da Lógica de Predicados, o comprimento de* H, *denotado por* comp[H], *é definido como se segue:*

  - *Se* H *é um átomo, então* comp[H]=1*;*
  - *se* H = ¬G, *então* comp[¬G] = 1+ comp[G]*;*
  - *se* H =(E ♦ G),

    onde ♦ *é um dos conectivos* $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

    então comp[E ♦ G] = 1+ comp[E]+ comp[G]*;*
  - *se* H =(#x)G,

    onde # é um dos quantificadores $\forall$ *ou* $\exists$ *,*

    então comp[(#x)G]=1+ comp[G].

- **Exemplo (comprimento de uma fórmula)**

  1) *Dada uma fórmula* H = (p(x) -> q(y)), *da Lógica de Predicados, o comprimento de* H, *denotado por* comp[H], *é calculado como se segue:*

  comp[H] = comp[p(x)] + comp[p(y)] + 1

  comp[H] = 1 + 1 + 1 = 3

- **Exemplo (comprimento de uma fórmula)**

2) Dada a fórmula G, calcule o seu comprimento.

$G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)\, q(y)$

$comp[G] = comp[(\forall x)p(x)] + comp[(\exists y)\, q(y)] + 1$

$comp[G] = comp[p(x)] + comp[p(y)] + 1 + 1 + 1$

$comp[G] = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

O Princípio da Indução na Lógica de Predicados

- **Proposição 1 (princípio da indução na Lógica de Predicados)** *Seja* B[E] *uma asserção que se refere a uma fórmula* E *da Lógica de Predicados. Se as duas propriedades a) e b) a seguir são verdadeiras, então concluímos que* B[E] *é verdadeira para qualquer fórmula* E.
  - *a) Base da Indução.* B[A] *é verdadeira para todo átomo* A.
  - *b) Passo da indução. Sejam* G *e* H *duas fórmulas. Se* B[G] *e* B[H] *são verdadeiras, então* B[¬H], B[G $\vee$ H] *e* B[($\forall$x)H] *são verdadeiras.*

- **Proposição 2 (comprimento de uma fórmula)**
  Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados.

  Se

  G é uma subfórmula de H,

  então

  comp[G] ≤ comp[H].

Classificações de variáveis.

- **Definição (escopo de um quantificador)**. Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados**.**
  - Se $(\forall x)H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $(\forall x)$ em E é a subfórmula H.
  - Se $(\exists x)H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $(\exists x)$ em E é a subfórmula H.

Classificações de variáveis.

- **Exemplo (escopo de um quantificador)**. Considere a fórmula a seguir.

E = $(\forall x)\,(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

O escopo de:

$(\forall x)$ é??

$\mathbf{(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z1))}$

$(\exists y)$ é??

$\mathbf{((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z1))}$

$(\forall z)$ é??

$\mathbf{p(x, y, w, z)}$

Classificações de variáveis.

- **Definição (ocorrência livre e ligada)**

  Sejam x uma variável e E uma fórmula.

  - Uma ocorrência de x em E é ligada se x está no escopo de um quantificador ($\forall$ x) ou ($\exists$ x) em E.
  - Uma ocorrência de x em E é livre se não for ligada.

Classificações de variáveis.

- **Exemplo (ocorrência livre e ligada)**

E = $(\forall x)\ (\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \rightarrow (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$

- **Definição (variável livre e ligada)**

  Sejam x uma variável e

  E uma fórmula que contém x

  - A variável x é ligada em E se existe pelo menos uma ocorrência ligada de x em E.
  - A variável x é livre em E se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em E.

- **Definição (símbolo livre)**

  Dada uma fórmula E,

  os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E,

  os símbolos de função

  e os símbolos de predicado. Os símbolos livres da fórmula E anterior são $\{w, z, z_1, p, q\}$

- **Definição (fórmula fechada)**

  Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.

- **Definição (fecho de uma fórmula)**

  Seja H *uma fórmula da Lógica de Predicados e*

  $$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

  o conjunto das variáveis livres em H.

  - *O fecho universal de* H*, indicado por* $(\forall *)H$*, é dado pela fórmula*

    $$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H.$$

  - *O fecho existencial de* H*,indicado por* $(\exists *)H$*, é dado pela fórmula*

    $$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)H.$$

Exemplo (fecho de uma fórmula). Considere a fórmula E seguinte.

E = $(\forall x)\,(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

O fecho universal de E é:

$\mathbf{E_1}$**=** $(\forall w)\,(\forall z)\,(\forall z_1)\,(\forall x)\,(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)\,q(z, y, x, z_1))$

O fecho existencial de E é:

$\mathbf{E_2}$**=** $(\exists w)\,(\exists z)\,(\exists z_1)\,(\forall x)\,(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)\,q(z, y, x, z_1))$

Slides baseados na apresentação do Prof. João Nunes – UFU.