

$$x^3 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} \wedge \text{mdc}(p, q) = 1$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{p}{q} + 1 = 0$$

$$p^3 + pq^2 + q^3 = 0$$

Caso 1:  $p$  é ímpar e  $q$  é par: ímpar + par + par = ímpar

Caso 2:  $p$  é par e  $q$  é ímpar: par + par + ímpar = ímpar

Caso 3:  $p$  é ímpar e  $q$  é ímpar: ímpar + ímpar + ímpar = ímpar

Caso 4:  $p$  é par e  $q$  é par: par + par + par = par

O caso 4 apresenta  $p$  e  $q$  pares, o que contradiz a suposição que  $p$  e  $q$  não possuem nenhum múltiplo em comum (i.e:  $\text{mdc}(p, q) = 1$ )