Lógica Matemática

Aula 2 – Correção de Exercícios e Introdução a Lógica de proposições

- Prof. Dr. Marcos Aurélio Batista;
- Prof. Luis Vinicius.

UFG/RC – Ibiotec/DCC

Princípios da Lógica

- Princípio da identidade:
  - Duas entidades são iguais se somente se compartilham das mesmas propriedades:
    - $\forall x\ \forall y\ [x=y \rightarrow \forall P(Px \leftrightarrow Py)]$ e $\forall x\ \forall y\ [\forall P(Px \leftrightarrow Py) \rightarrow x=y]$

- Princípio da não-contradição:
  - Proposições contrárias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo;
    - $p \wedge \neg p$ é uma contradição

- Princípio do terceiro excluído:
  - Uma entidade x possui ou não uma propriedade P.
  - Para qualquer proposição, ou esta proposição é verdadeira, ou sua negação é verdadeira.
  - $p \vee \neg p$ é uma tautologia

Charada da porta do céu e do inferno

- Suponha que você tenha morrido e ido ao além-vida, lá se depara com duas portas e dois porteiros, guardando as portas do céu e do inferno. É sabido que o porteiro do céu sempre fala a verdade enquanto que o porteiro do inferno sempre mente.
- Diante da situação, cabe a você criar uma única pergunta que possibilite distinguir a porta do céu e do inferno. Qual deve ser a pergunta a ser feita aos porteiros para atingir o objetivo?

- Dica: use o princípio da não-contradição

Charada da porta do céu e do inferno

- Resposta:
- "O que o outro porteiro dirá se eu perguntar qual é a porta do inferno?"
  - Ambos os guardas apontarão para a porta do céu

  - O que o porteiro do céu responderá:

    O porteiro do céu irá repassar a resposta do porteiro do inferno sem alterações, ou seja, o porteiro do inferno não dirá que a sua porta leva ao inferno, logo ele irá apontar para a porta do céu

  - O que o porteiro do inferno responderá:

    O porteiro do céu irá apontar para a porta do inferno corretamente, mas já que a pergunta foi feita para o porteiro do inferno, este irá inverter a resposta do porteiro do céu, ou seja, o porteiro do céu apontará para a porta do inferno e, o porteiro do inferno, mentindo, irá apontar para a porta do céu.

Argumentos dedutivos e indutivos

- Distinguir, entre os argumentos abaixo, os dedutivos dos indutivos. Além disso, posicione-se diante do argumento, dizendo, acerca dos argumentos dedutivos, se são válidos ou não.

1) A grande maioria dos entrevistados declarou que não votará no candidato da oposição. Logo, a oposição não vai ganhar as eleições.
2) João é solteiro. Logo, João não é casado.
3) Há fumaça saindo do supermercado e vários carros do Corpo de Bombeiros indo naquela direção. Podemos concluir, portanto, que há um incêndio no supermercado.
4) Todos os miriápodes são marcianos. Todos os narápodes são miriápodes. Logo, todos os narápodes são marcianos.

Argumentos dedutivos e indutivos

1) A grande maioria dos entrevistados declarou que não votará no candidato da oposição. Logo, a oposição não vai ganhar as eleições.
    - **Argumento indutivo.**
2) João é solteiro. Logo, João não é casado.
    - **Argumento dedutivo e informalmente válido.**
3) Há fumaça saindo do supermercado e vários carros do Corpo de Bombeiros indo naquela direção. Podemos concluir, portanto, que há um incêndio no supermercado.
    - **Argumento indutivo.**
4) Todos os miriápodes são marcianos. Todos os narápodes são miriápodes. Logo, todos os narápodes são marcianos
    - **Argumento dedutivo válido, independentemente do significado desses termos.**

Argumentos dedutivos e indutivos

1) Todos os portugueses são latinos. Luís Figo é latino, portanto Luís Figo é português.

2) Ou uma obra é religiosa, ou é científica, sendo que é impossível que uma obra seja simultaneamente religiosa e científica. A Bíblia é uma obra religiosa. Logo, não é uma obra científica.

3) ABC é um triângulo equilátero. Logo, cada um dos seus ângulos internos tem 60 graus.

Argumentos dedutivos e indutivos

1) Todos os portugueses são latinos. Luís Figo é latino, portanto Luís Figo é português.
   - **Argumento dedutivo inválido (falácia da afirmação do consequente).**

2) Ou uma obra é religiosa, ou é científica, sendo que é impossível que uma obra seja simultaneamente religiosa e científica. A Bíblia é uma obra religiosa. Logo, não é uma obra científica.
   - **Argumento dedutivo e válido.**

3) ABC é um triângulo equilátero. Logo, cada um dos seus ângulos internos tem 60 graus.
   - **Argumento dedutivo e informalmente válido (conceitual ou semântico).**

Exercícios

Utilizando indução, prove que:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Utilizando prova por contradição, prove que $x^3 + x + 1 = 0$ não possui raízes racionais

Exercícios

1) Como chegar na forma fechada a partir do somatório:

$$\begin{array}{l} 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-8) + (3n-5) + (3n-2) = x, \\ (3n-2) + (3n-5) + (3n-8) + \ldots + 7 + 4 + 1 = x. \\ \hline (3n-1) + (3n-1) + (3n-1) + \ldots + (3n-1) + (3n-1) + (3n-1) = 2x \end{array}$$

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Exercícios

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$ O que queremos provar

$$1 = \frac{1(3-1)}{2}$$ Caso base (para n=1)

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$ Hipótese (para k≥1)

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3(k+1) - 2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$ Indução (para k+1)

Exercícios

$$
\begin{aligned}
1+4+7+\cdots+(3(k+1)-2) &= 1+4+7+\cdots+(3(k+1)-2)\\
&= 1+4+7+\cdots+(3k+1)\\
&= 1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)\\
&= \frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)\\
&= \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2}\\
&= \frac{3k^2-k+6k+2)}{2}\\
&= \frac{3k^2+5k+2)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Exercícios

$$x^3 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} \wedge mdc(p,q) = 1$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{p}{q} + 1 = 0$$

$$p^3 + pq^2 + q^3 = 0$$

$$\text{Caso 1: p é ímpar e q é par:} \quad \text{ímpar} + \quad \text{par} + \quad \text{par} = \text{ímpar}$$

$$\text{Caso 2: p é par e q é ímpar:} \quad \text{par} + \quad \text{par} + \quad \text{ímpar} = \text{ímpar}$$

$$\text{Caso 3: p é ímpar e q é ímpar:} \quad \text{ímpar} + \quad \text{ímpar} + \quad \text{ímpar} = \text{ímpar}$$

$$\text{Caso 4: p é par e q é par:} \quad \text{par} + \quad \text{par} + \quad \text{par} = \text{par}$$

O caso 4 apresenta p e q pares, o que contradiz a suposição que p e q não possuem nenhum múltiplo em comum (i.e: $mdc(p,q) = 1$

Introdução a Lógica Proposicional

- Lógica proposicional:
  - Operandos são proposições;
  - Considera apenas a estrutura da sentença que une as proposições;
  - Não considera a veracidade das mesmas;

- O que é uma proposição:
  - Uma construção (sentença, frase, etc.) à qual se pode atribuir um juízo de valores booleanos
  - O valor-verdade de cada proposição é denotado por:

    $V(p)$

- São exemplos de proposições:
  - p = Brasil é um país;
  - q = Buenos Aires é a capital do Brasil;
  - r = 3 + 4 > 5;
  - s = 7 – 1 = 5;

  - O valor de verdade de cada proposição é:
    - V(p) = T
    - V(q) = F
    - V(r) = V
    - V(s) = F

Introdução a Lógica Proposicional

- Considera-se que existe um conjunto enumerável **Vars** de variáveis proposicionais.
  - Já que **Vars** é enumerável, considera-se que as variáveis são indexáveis:
    - $Vars = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$
  - Os nomes das variáveis não posseum nenhuma propriedade particular, embora seja comum utilizarmos p,q, r e s como rótulos de variáveis, outras letras também são permitidas.

Introdução a Lógica Proposicional

Nome	símbolo
Verdadeiro	T ou V
Falso	$\perp$ ou F
Negação	$\neg$
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Implicação	$\Rightarrow$
Equivalência	$\Leftrightarrow$
Ou exclusivo	$\oplus$
Abre parênteses	(
Fecha parênteses	)

Símbolo 0-ário (valor)

Símbolo unário

Símbolo binário

Introdução a Lógica Proposicional

- Tabela verdade da negação:

p	$\neg p$
F	T
T	F

- Tabela verdade da conjunção:

p	q	$(p \wedge q)$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Introdução a Lógica Proposicional

- Tabela verdade da disjunção:

p	q	(p ∨ q)
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

- Tabela verdade da implicação:

p	q	$(p \rightarrow q)$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

- Tabela verdade da equivalência:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

- Tabela verdade do ou exclusivo:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Introdução a Lógica Proposicional

- Crie uma sentença da lógica proposicional a partir da seguinte frase:
  1) Se o catálogo de sementes está correto, então se as sementes são plantadas em abril, as flores florescem em julho. As flores não florescem em julho. Portanto, se as sementes são plantadas em abril, o catálogo de sementes não está correto.

c = o catálogo de sementes está correto

s = sementes são plantadas em Abril

f = as flores florescem em Julho

- Se c então se s então f . Não f .Portanto, se s então não c.
- $((c \Rightarrow (s \Rightarrow f)) \wedge \neg f) \Rightarrow (s \Rightarrow \neg c)$

Introdução a Lógica Proposicional

- Crie uma sentença da lógica proposicional para cada frase abaixo:
  - Se Paola está feliz e pinta um quadro, então Renzo não está feliz;
  - Se Paola está feliz, então ela pinta um quadro;

Introdução a Lógica Proposicional

- P = Paola está feliz;
- Q = Paola pinta um quadro;
- R = Renzo está feliz;

- 1. $p \land q \rightarrow \neg r$
- 2. $p \rightarrow q$

Introdução a Lógica Proposicional

- Crie uma sentença da lógica proposicional a partir da seguinte frase:
  1) Se o catálogo de sementes está correto, então se as sementes são plantadas em abril, as flores florescem em julho. As flores não florescem em julho. Portanto, se as sementes são plantadas em abril, o catálogo de sementes não está correto.

Introdução a Lógica Proposicional

- Utilizando a tabela verdade, cheque se as fórmulas abaixo são equivalentes

  1) $(p \lor q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \land \neg q)$
  2) $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$
  3) $p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$
  4) $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (q \land r)$
  5) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \land q) \Rightarrow r)$

Introdução a Lógica Proposicional

- Utilizando a tabela verdade, cheque se as fórmulas abaixo são equivalentes

  1) $(p \lor q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \land \neg q)$

p	q	(p ∨ q)
F	F	**F**
F	T	**T**
T	F	**T**
T	T	**T**

p	q	¬(¬p ∧ ¬q)
F	F	**F**
F	T	**T**
T	F	**T**
T	T	**T**

- Utilizando a tabela verdade, cheque se as fórmulas abaixo são equivalentes

  2) $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

p	q	¬(p ∨ q)
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

p	q	(¬p ∧ ¬q)
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F