Lógica Matemática

Notas de Aula

Luis Vinicius Costa Silva
Ibiotec – DCC
Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão

Agosto de 2019

Contents

1 Árvore verdade/Prova Semântica

1.1 Introdução

- É sabido que uma sentença lógica pode ser classificada como tautológica, contraditória, ou em último caso, contingente. A classificação de sentenças lógicas nestas três classes pode ser realizada através da construção da tabela-verdade da mesma, e a posterior checagem de cada linha/interpretação da mesma;

- Visto que a quantidade de linhas de uma tabela-verdade cresce na ordem de 2^n em função da quantidade de variáveis da fórmula, métodos mais eficazes para classificação da sentença lógica fazem-se necessários;

- A árvore verdade/prova semântica é um tipo de prova por absurdo/contradição, esta consiste em mostrar que se a fórmula A é tautológica, logo $\neg A$ é contraditório. Logo, a raíz da prova semântica é $\neg A$, regras de expansão (apresentadas em seguida neste guia) são aplicadas em cada nó da árvore seguindo uma busca em profundidade na mesma, de tal forma que a árvore verdade seja expandida de tal forma que compreenda para quais subfórmulas de A devam ser tautológicas para que A também a seja;

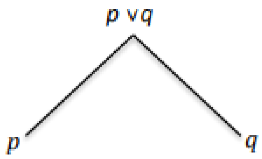
- A contradição buscada em uma prova semântica é expressa como um ramo fechado na árvore, isto é: um ramo no qual uma proposição atômica B contida em um nó arbitrário corresponde com uma folha $\neg B$.

- A primeira vista, a prova semântica parece servir apenas para checar se uma dada fórmula A é tautológica, entretanto seu uso pode ser aplicado em equivalências lógicas, onde busca-se saber se uma fórmula A é equivalente a uma fórmula B, neste caso, constrói-se uma prova semântica de $A \iff B$, no qual a raíz é $\neg(A \iff B)$, buscando-se uma contradição na fórmula negada, ou seja, provando que $A \iff B$ é tautológica e consequentemente que $A \equiv B$.

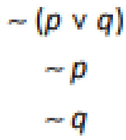
- Analogamente, a prova semântica pode ser usada para checar se A é contraditório, construindo a árvore semântica para $\neg\neg A$ (ou simplesmente A) e buscando uma contradição, fazendo com que $\neg A$ seja tautológico, e por fim, A seja contraditório;

Abaixo, seguem-se as regras utilizadas na expansão da prova semântica:

(a) Dupla Negação

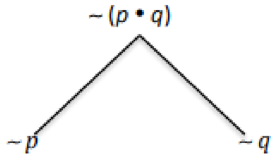


(b) Disjunção

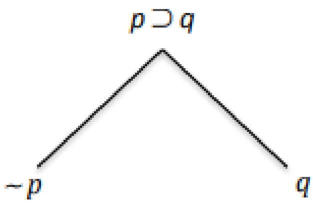


(c) Negação da disjunção

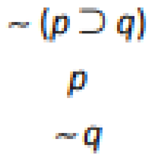
(d) Conjunção



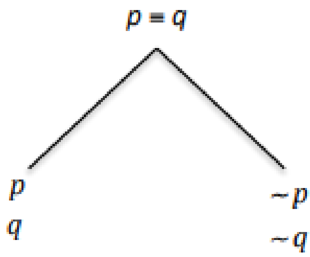
(e) Negação da conjunção



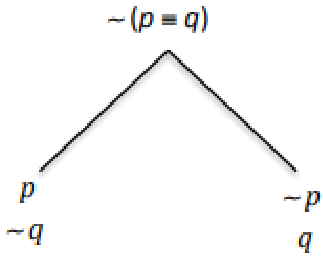
(f) Implicação



(g) Negação da implicação



(h) Bi-implicação



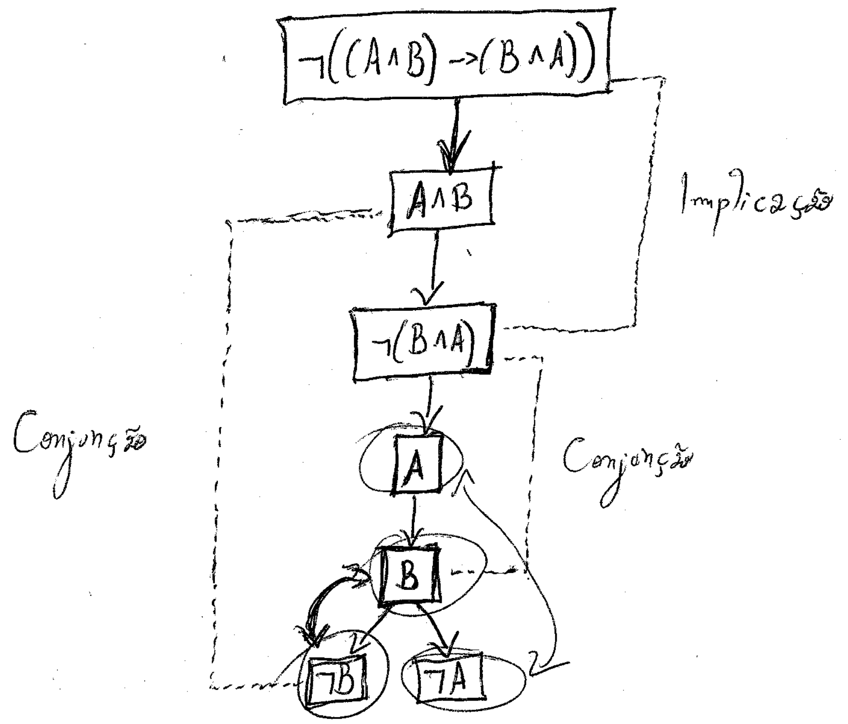
(i) Negação da bi-implicação

Figure 1: Regras da prova semântica

1.2 Exemplos

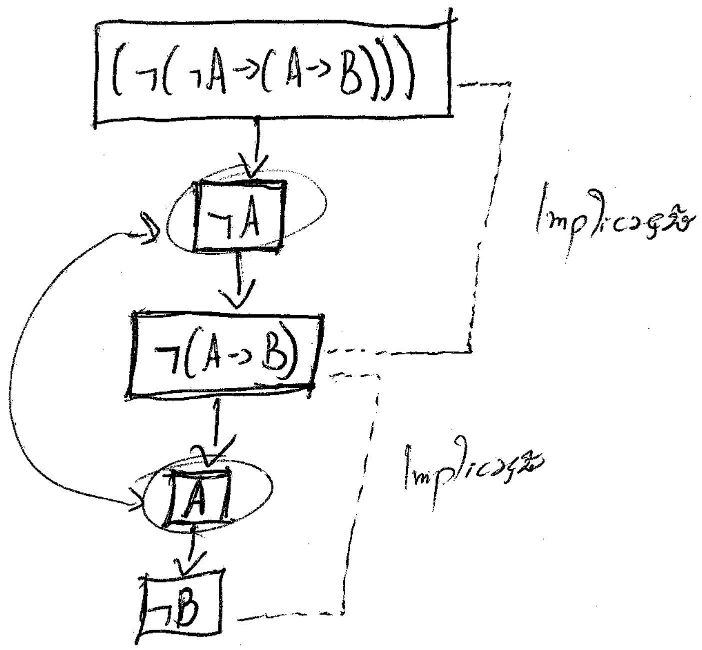
1.2.1 Exemplo 1

$(A \wedge B) \to (B \wedge A)$



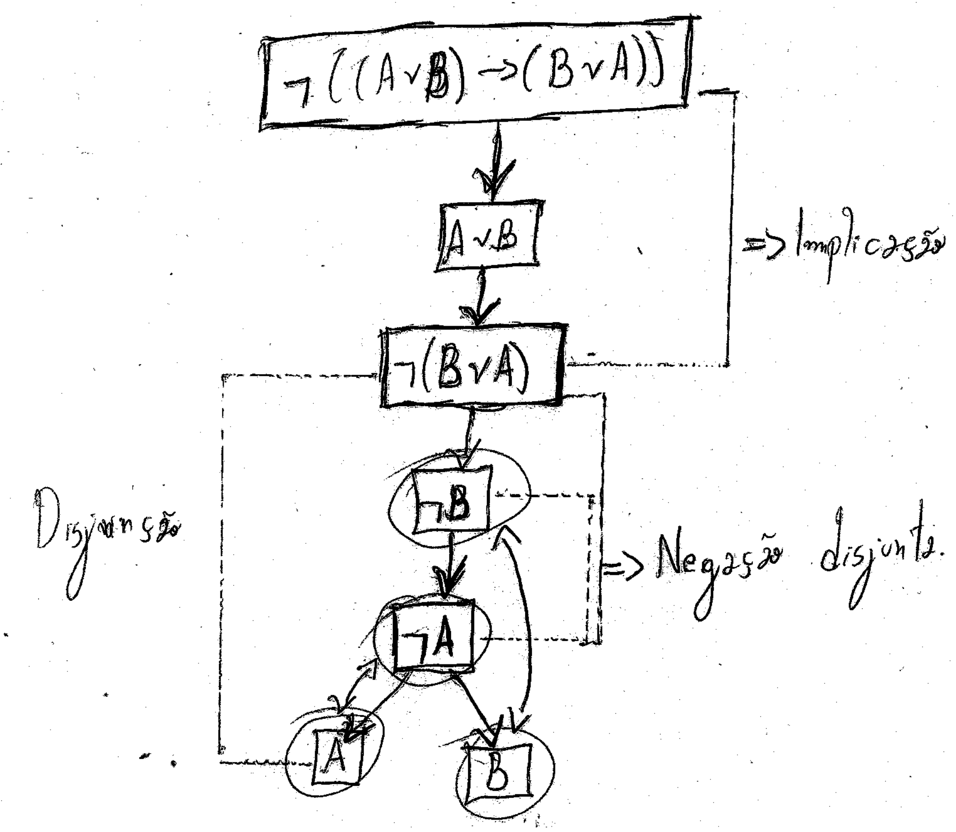
1.2.2 Exemplo 2

$\neg A \to (A \to B)$



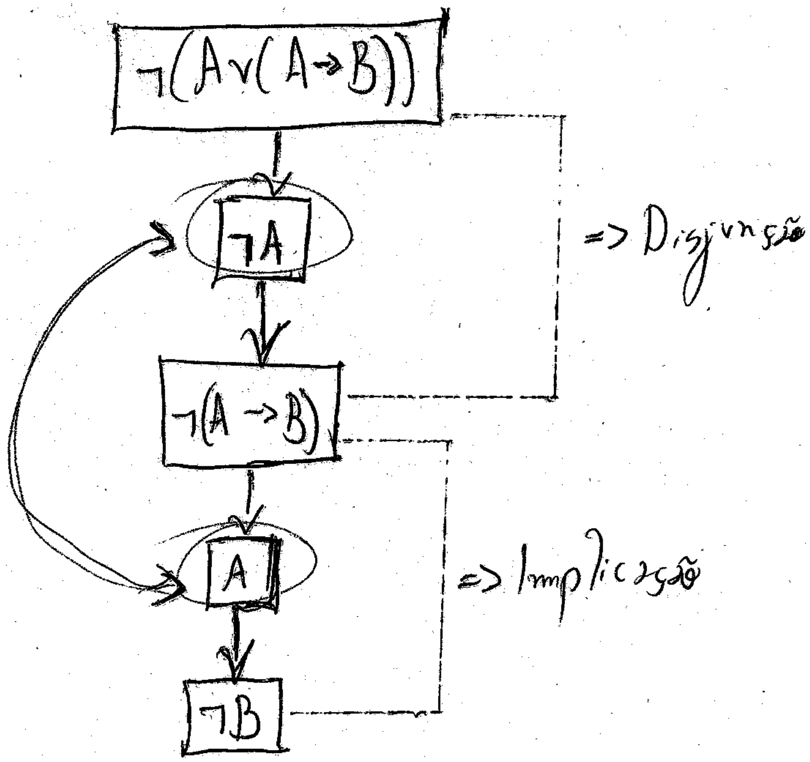
1.2.3 Exemplo 3

$(A \vee B) \to (B \vee A)$

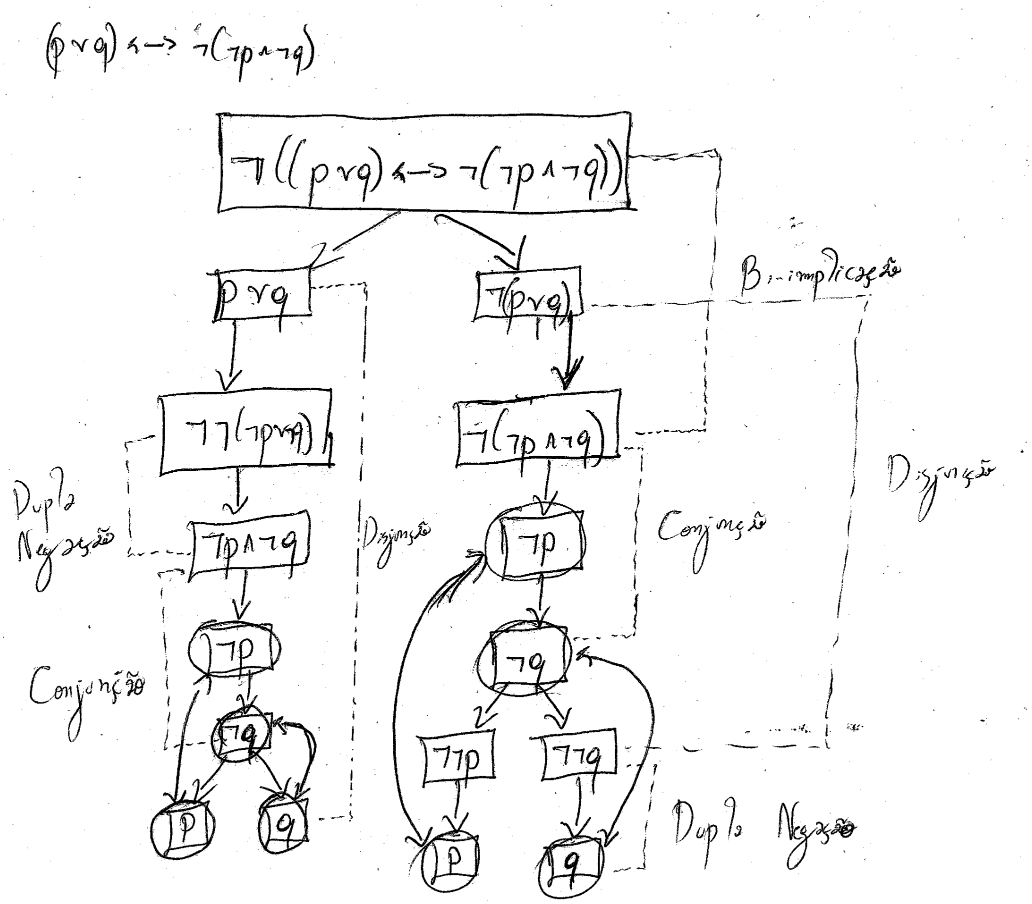


1.2.4 Exemplo 4

$A \vee (A \to B)$

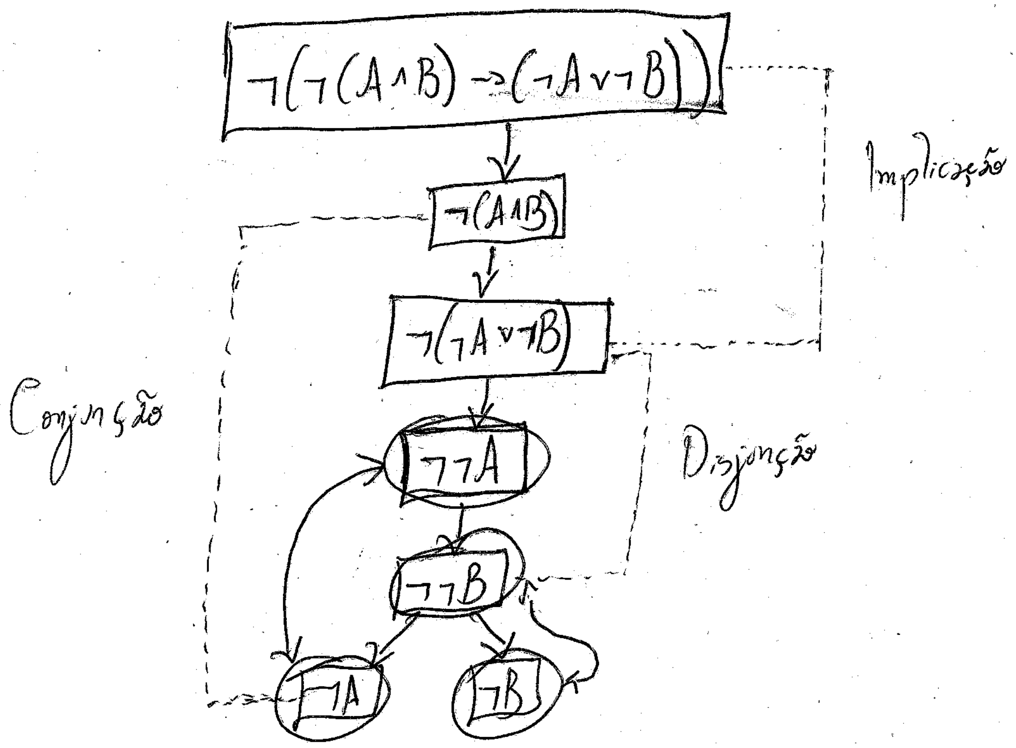


1.2.5 Exemplo 5



1.2.6 Exemplo 6

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$



2 Equivalências Lógicas

2.1 Introdução

- Duas proposições/fórmulas A e B são ditas equivalentes se, somente se, para toda interpretação de A, esta coincide com toda interpretação de B;
- As equivalências lógicas podem ser provadas a partir da construção de tabelas-verdade de ambas as fórmulas, e a verificação de que cada interpretação de A coincide com cada interpretação de B, ou checar se $A \iff B$ é tautológico.
- Uma vez confirmadas/aceitas a veracidade das equivalências, estas podem ser usadas para demonstrar a equivalência entre duas fórmulas.

As equivalências lógicas são uteís em situações onde se faz necessário verificar se uma fórmula é equivalente a outra, se esta é tautológica, contraditória ou contigente (i.e: se a fórmula A é equivalente a T, F, ou a nenhum símbolo verdade respectivamente). Outros casos nos quais estas equivalências lógicas se fazem úteis são em casos onde busca-se simplificar decrescer o comprimento de uma fórmula (simplifica-la) ou remover um determinado operador/operando sem a alteração da saída da fórmula.

- Identidade
  - $p \wedge T \equiv p$
  - $p \vee F \equiv p$
- Dominação
  - $p \vee T \equiv T$
  - $p \wedge F \equiv F$
  - $F \implies p \equiv T$
  - $p \implies T \equiv T$
- Idempotência
  - $p \vee p \equiv p$
  - $p \wedge p \equiv p$
- Associatividade

- $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
- $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

- Dupla Negação
  - $\neg(\neg p)$
- Comutatividade
  - $p \lor q \equiv q \lor p$
  - $p \land q \equiv q \land p$
- Distribuitividade
  - $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
  - $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$
  - $p \implies (q \land r) \equiv (p \implies q) \land (p \implies r)$
  - $(p \lor q) \implies r \equiv (p \implies r) \land (q \implies r)$
- De Morgan
  - $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
  - $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
  - $(p \land q) \equiv \neg(\neg p \lor \neg q)$
  - $(p \lor q) \equiv \neg(\neg p \land \neg q)$
- Absorção
  - $p \lor (p \land q) \equiv p$
  - $p \land (p \lor q) \equiv p$
- Negação
  - $p \lor \neg p \equiv T$
  - $p \land \neg p \equiv F$
- Implicação
  - $p \implies q \equiv \neg p \lor q$
  - $p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$
  - $T \implies p \equiv p$

- $F \implies p \equiv T$
- $p \implies T \equiv T$
- $p \implies F \equiv \neg p$
- $p \implies q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \implies q) \equiv (p \wedge \neg q)$

- Bi-implicação
  - $p \iff q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  - $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$

A prova de cada equivalência acima é trivial e é deixada ao leitor como exercício.

2.2 Exemplos

Segue-se exemplos da aplicação de equivalências lógicas na simplificação de fórmulas:

2.2.1 Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
p \vee \neg(\neg p \implies q) &\equiv (p \vee \neg q) && \text{Implicação} \\
p \vee \neg(\neg\neg p \vee q) &\equiv && \text{Dupla Negação} \\
p \vee \neg(p \vee q) &\equiv && \text{De Morgan + Distribuitividade} \\
(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) &\equiv && \text{Negação} \\
T \wedge (p \vee \neg q) &\equiv && \text{Identidade} \\
(p \vee \neg q) &\equiv
\end{aligned}
$$

2.2.2 Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
((p \implies q) \land \neg q) \implies \neg p \equiv T &\quad \text{Implicação} \\
\neg((\neg p \lor q) \land \neg q) \lor \neg p \equiv &\quad \text{Comutatividade} \\
\neg(\neg q \land (\neg p \lor q)) \lor \neg p \equiv &\quad \text{Distribuitividade} \\
\neg((\neg q \land \neg p)) \lor (\neg q \land q)) \lor \neg p \equiv &\quad \text{Negação} \\
\neg((\neg q \land \neg p) \lor F)) \lor \neg p \equiv &\quad \text{Identidade} \\
\neg(\neg q \land \neg p) \lor \neg p \equiv &\quad \text{De Morgan} \\
\neg(\neg\neg q \lor \neg\neg p) \lor \neg p \equiv &\quad \text{Dupla Negação} \\
q \lor (p \lor \neg p) \equiv &\quad \text{Associatividade + Negação} \\
q \lor T \equiv &\quad \text{Dominação} \\
T \equiv &
\end{aligned}
$$

2.2.3 Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
(p \implies q) &\equiv (\neg q \implies \neg p) &\quad \text{Implicação} \\
&\equiv \neg(\neg q) \lor (\neg p) &\quad \text{Dupla Negação} \\
&\equiv q \lor \neg p &\quad \text{Comutatividade} \\
&\equiv \neg p \lor q &\quad \text{Implicação} \\
&\equiv p \implies q &
\end{aligned}
$$

2.2.4 Exemplo 4

$$
\begin{aligned}
(p \land q) \implies p \equiv T &\quad \text{Implicação} \\
\neg(p \land q) \lor p \equiv &\quad \text{De Morgan} \\
\neg(p \lor \neg q) \lor p \equiv &\quad \text{Comutatividade} \\
(\neg q \lor \neg p) \lor p) \equiv &\quad \text{Associatividade} \\
\neg q \lor (\neg p \lor p) \equiv &\quad \text{Negação} \\
\neg q \lor T \equiv &\quad \text{Dominação} \\
T \equiv &
\end{aligned}
$$

2.2.5 Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
(q \implies p) \land (r \implies p) &\equiv (q \lor r) \implies p && \text{Implicação}\\
&\equiv \neg(q \lor r) \lor p && \text{De Morgan}\\
&\equiv (\neg q \land \neg r) \lor p && \text{Distribuitividade}\\
&\equiv (\neg q \lor p) \land (\neg r \lor p) && \text{Implicação}\\
&\equiv (q \implies p) \land (r \implies p)
\end{aligned}
$$

2.2.6 Exemplo 6

$$
\begin{aligned}
p \implies (q \implies r) &\equiv (p \land q) \implies r && \text{Implicação}\\
&\equiv \neg(p \land q) \lor r && \text{De Morgan}\\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor r && \text{Associatividade}\\
&\equiv \neg p \lor (\neg q \lor r) && \text{Implicação}\\
&\equiv p \implies (q \implies r)
\end{aligned}
$$

2.2.7 Exemplo 7

$$
\begin{aligned}
\neg(p \lor (\neg p \land q)) &\equiv (\neg p \land \neg q) && \text{De Morgan}\\
\neg p \land \neg(\neg p \land q) &\equiv && \text{De Morgan}\\
\neg p \land (\neg(\neg p) \lor \neg q) &\equiv && \text{Dupla Negação}\\
\neg p \land (p \lor \neg q) &\equiv && \text{Distribuitividade}\\
\neg p \land (p \lor \neg q) &\equiv && \text{Negação + Identidade}
\end{aligned}
$$

2.2.8 Exemplo 8

$$
\begin{aligned}
(p \land q) \implies (p \lor q) &\equiv T && \text{Implicação}\\
\neg(p \land q) \lor (p \lor q) &\equiv && \text{De Morgan}\\
(\neg p \lor \neg q) \lor (p \lor q) &\equiv && \text{Associatividade e Comutatividade}\\
(\neg p \lor p) \lor (q \lor \neg q) &\equiv && \text{Dominação}\\
T \lor T &\equiv && \text{Dominação}\\
T &\equiv
\end{aligned}
$$

2.2.9 Exemplo 9

$$
\begin{aligned}
(p \implies q) \implies q \equiv & (p \lor q) && \text{Implicação} \\
\equiv & ((\neg(p \implies q)) \lor q) && \text{Implicação} \\
\equiv & ((p \land \neg q) \lor q) && \text{Implicação} \\
\equiv & (p \lor q) \land (\neg q \lor q) && \text{Distribuitividade} \\
\equiv & (p \lor q) \land T && \text{Negação} \\
\equiv & (p \lor q)
\end{aligned}
$$