Schaum McGraw-Hill

John Nolt
Dennis Rohatyn

LÓGICA

325 Problemas Resolvidos
454 Problemas Suplementares

MAKRON Books

John Nolt
Dennis Rohatyn
LÓGICA
Schaum
McGraw-Hill

Schaum McGraw-Hill

LÓGICA

John Nolt
Dennis Rohatyn

OUTROS LIVROS NA ÁREA

Ayres	–	*Cálculo Diferencial e Integral*
Lipschutz	–	*Álgebra Linear*
Lipschutz	–	*Probabilidade e Estatística*
Lipschutz	–	*Teoria dos Conjuntos*
Mendelson	–	*Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento*
Morettin	–	*Estatística Básica*
Pereira e Tanaka	–	*Estatística: Conceitos Básicos*
Ruggiero	–	*Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*
Siegel	–	*Estatística Não-Paramétrica*
Simmons	–	*Cálculo com Geometria Analítica – 2 volumes*
Spiegel	–	*Análise de Fourier*
Spiegel	–	*Estatística*
Spiegel	–	*Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*
Spiegel	–	*Probabilidade e Estatística*
Spiegel	–	*Transformadas de Laplace*
Steinbruch	–	*Álgebra Linear*
Steinbruch	–	*Geometria Analítica*
Steinbruch	–	*Introdução à Álgebra Linear*
Steinbruch	–	*Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares*
Swokowski	–	*Cálculo com Geometria Analítica – 2 volumes*

MAKRON *Books*

0-07-460872-X

MAKRON Books

LÓGICA

McGraw-Hill

MAKRON
Books

LÓGICA

John Nolt
Dennis Rohatyn

Tradução e Revisão Técnica
Leila Zardo Puga
Professora Associada da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – SP
Mineko Yamashita
Professora Associada da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – SP

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.
Editora McGraw-Hill, Ltda.
São Paulo
Rua Tabapuã, 1105, Itaim-Bibi
CEP 04533
(011)829-8604 e (011)820-8528

Rio de Janeiro • Lisboa • Porto • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madrid • México • New York • Panamá • San Juan • Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris • Singapore • Sydney • Tokio • Toronto

Do original
Schaum's Outline of Theory and Problems of Logic

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

Editor Assistente: Adauto Bertolla
Produtora Editorial: Daisy Pereira Daniel
Produtor Gráfico: José Rodrigues

Editoração Eletrônica e Fotolitos: JAG Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.

Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Nolt, John.

Lógica / John Nolt. Dennis Rohatyn : tradução Mineko Yamashita ; revisão técnica Leila Zardo Puga. – São Paulo : McGraw-Hill, 1991. – (Coleção Schaum).

1. Lógica I. Rohtyn, Dennis. II. Título. III. Série: Schaum.

90-0454 CDD-160

Índice para Catálogo Sistemático

1. Lógica: Filosofia 160.

MAKRON *Books*

SUMÁRIO

PREFÁCIO

As raízes da lógica podem ser atribuídas a Aristóteles, que sistematizou e codificou o assunto de tal modo que não foi significativamente ultrapassado por mais de dois milênios. A lógica moderna provém, em grande parte, do trabalho do filósofo alemão Gottlob Frege no século XIX.

Embora a lógica se desenvolvesse como um ramo da filosofia, o seu progresso explosivo desde Frege tem produzido aplicações em lingüística, matemática e ciência da computação. Atualmente, muitas contribuições são feitas por estudiosos das áreas citadas.

Este livro não pressupõe conhecimento prévio do assunto. Ele pode ser utilizado como texto para um curso introdutório, suplemento para outros textos, referência ou guia de estudo.

Iniciamos, examinando como o raciocíonio ocorre, informalmente, na escrita e na conversação. Assim, introduzimos alguns conceitos centrais da lógica (tais como argumento, validade, verdade, relevância e evidência suposta), evitando os tecnicismos desnecessários. O Capítulo 1 concerne às partes estruturais (sintática) e o Capítulo 2 apresenta alguns conceitos semânticos fundamentais. Os Capítulos 3 e 4 introduzem o sistema mais elementar da lógica formal, o cálculo proposicional, dos pontos de vista sintático e semântico, respectivamente. O Capítulo 5 trata da lógica dos enunciados categóricos, a descendente moderna da lógica original de Aristóteles. No Capítulo 6 consideramos um sistema, o cálculo de predicados, que unifica e estende os sistemas dos três capítulos anteriores. O cálculo de predicados é o cerne da lógica moderna. Nos Capítulos 7 e 8 retornamos a um ponto de vista informal, a fim de considerar falácias usuais no raciocínio e algumas formas de argumento indutivo (probabilístico). O Capítulo 9 trata, formalmente, da probabilidade, expondo os axiomas e os teoremas mais importantes do cálculo de probabilidades. Finalmente, o Capítulo 10 esboça algumas diretrizes nas quais o cálculo de predicados pode ser generalizado.

Aqui, há mais material do que se pode desenvolver num curso simples, e assim, geralmente, serão necessárias algumas omissões. Os últimos capítulos pressupõem os conceitos introduzidos nos Capítulos 1 e 2; esses dois capítulos são indispensáveis. Depois disso, contudo, é possível uma boa flexibilidade. A tabela seguinte indica as dependências que poderão ser levadas em conta ao se planejar um curso:

Capítulo	*Pressupostos Capítulo(s)*
2	1
3	1, 2
4	1, 2, 3
5	1, 2
6	1, 2, 3, 4, 5
7	1, 2
8	1, 2
9	1, 2, 3, 4
10	1, 2, 3, 4, 5, 6

Desejamos agradecer a David Benfield por seus comentários cuidadosos e extremamente úteis.

John Nolt
Dennis Rohatyn

MAKRON
Books

Capítulo 1

A ESTRUTURA DE UM ARGUMENTO

1.1 O que é um argumento?

Lógica é o estudo de argumentos. Um *argumento* é uma seqüência de enunciados na qual um dos enunciados é a *conclusão* e os demais são *premissas,* as quais servem para provar ou, pelo menos, fornecer alguma evidência para a conclusão.

EXEMPLO 1.1 Um dos argumentos mais conhecidos (devido ao seu aspecto ubíquo como um exemplo na lógica elementar) é:

> Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

Os dois primeiros enunciados são premissas que servem para provar a conclusão, Sócrates é mortal.

As premissas e a conclusão de um argumento são sempre *enunciados* ou *proposições*[1] — isto é, significados ou idéias expressáveis por sentenças declarativas — em oposição a interrogações, comandos ou exclamações. Os enunciados são espécies de idéias verdadeiras ou falsas. Os não-enunciados, tais como interrogações, comandos ou exclamações, não são verdadeiros nem falsos. Algumas vezes, eles sugerem premissas ou conclusões, mas eles mesmos não são premissas ou conclusões.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.1 Alguns dos enunciados seguintes são argumentos. Identifique as suas premissas e a sua conclusão:

a) Ele é Leão, pois nasceu na primeira semana de agosto.

b) Como a economia pode ser melhorada? O déficit comercial está crescendo todo dia.

c) Eu não quero ir para cama, mamãe. O filme ainda não acabou.

d) O edifício estava em ruínas, coberto de fuligem marrom, numa região abandonada. A fuga dos ratos ressoava pelos corredores.

e) As pessoas talentosas como você deveriam receber uma educação superior. Vá para a faculdade!

f) Nós estávamos superados em número e em armas pelo inimigo, e suas tropas estavam constantemente sendo refor-

---

1. Algumas vezes os filósofos traçam uma distinção entre enunciados e proposições, mas aqui não é necessário fazê-la. Contudo, ocasionalmente, acharemos importante distinguir entre sentenças (seqüências de palavras) declarativas e enunciados ou proposições (isto é, significados ou idéias) que elas expressam. Essa diferenciação é importante, por exemplo, quando tratamos de sentenças ambíguas, que podem expressar dois ou mais enunciados. Mas, onde não houver perigo de confusão, evitaremos prolixidade, suprimindo a distinção. Freqüentemente utilizaremos o termo 'argumento' para denotar seqüências de enunciados (como na nossa definição) e seqüências de sentenças que os expressem.

çadas enquanto as nossas forças estavam diminuindo. Assim, um ataque direto teria sido suicida.

g) Ele está respirando e, portanto, está vivo.

h) Há alguém, aqui, que entende este documento?

i) Nos Estados Unidos muitas pessoas não sabem se o seu país apóia ou se opõe ao governo da Nicarágua.

j) O triângulo ABC é eqüiângulo. Portanto, cada um de seus ângulos internos mede 60 graus.

Solução

a) Premissa: Ele nasceu na primeira semana de agosto.
Conclusão: Ele é Leão.

b) Tecnicamente, não é um argumento, pois a primeira sentença é uma interrogação, mas a pergunta é meramente retórica, sugerindo o seguinte argumento:

Premissa: O déficit comercial está crescendo todo dia.
Conclusão: A economia não pode ser melhorada.

c) Premissa: O filme ainda não acabou.
Conclusão: Eu não quero ir para cama

d) Não é um argumento; não há como estabelecer uma evidência para a conclusão.

e) Não é um argumento; 'Vá para a faculdade!' expressa um comando, não um enunciado. Todavia, o seguinte argumento é sugerido:

Premissa: As pessoas talentosas como você deveriam receber uma educação superior.
Conclusão: Você deveria ir para a faculdade.

f) Premissa: Nós estávamos superados em número e em armas pelo inimigo.

Premissa: Suas tropas estavam constantemente sendo reforçadas enquanto as nossas forças estavam diminuindo.
Conclusão: Um ataque direto teria sido suicida.

g) Ainda que, gramaticalmente, seja uma única sentença, ela produz dois enunciados distintos, os quais, juntos, constituem o seguinte argumento:

Premissa: Ele está respirando.
Conclusão: Ele está vivo.

h) Não é um argumento.

i) Não é um argumento.

j) Premissa: O triângulo ABC é eqüiângulo.
Conclusão: Cada um de seus ângulos internos mede 60 graus.

Apesar de as premissas de um argumento servirem para provar ou fornecer evidência para a conclusão, elas não precisam *na realidade* fazer isso. Existem maus argumentos bem como bons argumentos. O argumento 1.1 (*c*), por exemplo, pode não ser muito convincente; todavia ele se qualifica como um argumento.[2]

Alguns argumentos se originam por etapas. Uma conclusão é inferida de um conjunto de premissas; então, essa conclusão (talvez em conjunção com alguns outros enunciados) é usada como uma premissa para inferir uma conclusão adicional, a qual, por sua vez, pode funcionar como uma premissa para uma outra conclusão, e assim por diante. Uma

2. Observemos que este argumento está incompleto, requerendo para a sua complementação a premissa implícita 'Eu não quero ir para a cama até que o filme termine'. (Os enunciados implícitos serão discutidos na Seção 1.5.) Ainda assim, na maioria dos contextos, tal premissa seria dúbia o suficiente para privar o argumento de qualquer força persuasiva racionalmente compelida.
Como neste capítulo estamos preocupados com a estrutura e não com a avaliação de argumentos, não comentaremos sobre a qualidade dos argumentos aqui exemplificados. Em nenhum caso tal ausência de comentário se constitui num endosso tácito.

tal estrutura chama-se *argumento complexo*. As premissas que servem como conclusões de premissas anteriores chamam-se *premissas não-básicas* ou *conclusões intermediárias* (os dois nomes refletem o papel dual como conclusões de uma etapa e premissas do próximo). As premissas que não são conclusões de premissas prévias chamam-se *premissas básicas* ou *suposições*.

EXEMPLO 1.2 O seguinte argumento é complexo:

> Todos os números racionais podem ser expressos como quociente de dois inteiros. Contudo, π não pode ser expresso como quociente de dois inteiros. Portanto, π não é um número racional. Evidentemente, π é um número. Logo, existe pelo menos um número não-racional.

A conclusão é que existe pelo menos um número não-racional (a saber, π). Isto está endossado pelas premissas 'π não é um número racional' e 'π é um número'. Porém, a primeira destas premissas é, por sua vez, uma conclusão intermediária das premissas 'todos os números racionais podem ser expressos como quociente de dois inteiros' e 'π não pode ser expresso como quociente de dois inteiros'. Tais premissas, juntamente com o enunciado 'π é um número', são as premissas básicas (suposições) do argumento.

Notemos que a conclusão ocorre no final do argumento, nos exemplos 1.1 e 1.2 e na maioria dos argumentos no problema 1.1, enquanto no argumento 1.1 (*c*) ela ocorre no início. A conclusão pode, ocorrer em qualquer lugar no argumento (no problema 1.3 ela ocorrerá no meio), mas o início e o fim são as posições mais comuns. Entretanto, para efeito de análise, é comum alistar, inicialmente, as premissas, cada uma em linhas separadas, e, depois, a conclusão. A conclusão e as premissas não-básicas são, freqüentemente, marcadas pelo símbolo '∴', que significa "portanto". Esse formato chama-se *forma padrão*. Assim, a forma padrão do argumento do exemplo 1.2 é:

Todos os números racionais podem ser expressos como quocientes de dois inteiros.

π não pode ser expresso como quociente de dois inteiros.

$\therefore$ π não é um número racional.

π é um número.

$\therefore$ Existe pelo menos um número não-racional.

As etapas do raciocínio que formam um argumento complexo são, em si, argumentos. O argumento complexo acima consiste em duas etapas. Os três primeiros enunciados formam a primeira etapa, e os três últimos formam a segunda etapa. O terceiro enunciado é um componente das duas etapas, funcionando como a conclusão da primeira e como uma premissa da segunda. Entretanto, em relação ao argumento complexo como um todo, ele é visto como uma premissa (não-básica).

1.2 Identificando os argumentos

Um argumento ocorre somente quando se pretende sustentar ou provar uma conclusão, a partir de um conjunto de premissas. Esse propósito é freqüentemente expresso pelo uso de *indicadores de inferência*. Indicadores de inferência são palavras ou frases utilizadas para assinalar a presença de um argumento. Eles são de duas espécies: *indicadores de conclusão*, os quais assinalam que a sentença que os contêm ou nos quais eles se prefixam é uma conclusão de premissas previamente estabelecidas; e *indicadores de premissas*, os quais assinalam que a sentença na qual eles se prefixam é uma premissa. A seguir, alistamos alguns exemplos típicos de indicadores (podendo existir outros, não mencionados aqui):

Indicadores de conclusão	*Indicadores de premissa*
portanto	pois
por conseguinte	desde que
assim	como
dessa maneira	porque
neste caso	assumindo que
daí	visto que
logo	admitindo que
de modo que	isto é verdade porque
então	a razão é que
conseqüentemente	em vista de
assim sendo	como conseqüência de
segue-se que	como mostrado pelo fato que
o(a) qual implica que	dado que
o(a) qual acarreta que	sabendo-se que
o(a) qual prova que	supondo que
o(a) qual significa que	
do(da) qual inferimos que	
resulta que	
podemos deduzir que	

Os indicadores de premissa e conclusão são os principais indícios para se indentificar argumentos e para se analisar sua estrutura. Quando colocado entre duas sentenças, um indicador de conclusão assinala que a primeira expressa uma premissa e a segunda, uma conclusão daquela premissa; num mesmo contexto, um indicador de premissa assinala o contrário. Assim, na sentença composta

Ele não está em casa; portanto, ele foi passear.

o indicador de conclusão 'portanto' assinala que 'ele não está em casa' é uma premissa sustentando a conclusão 'ele foi passear'. Mas, na sentença composta

Ele não está em casa pois ele foi passear.

o indicador de premissa 'pois' indica que 'ele não está em casa' é uma conclusão sustentada pela premissa 'ele foi passear'.

Um indicador de conclusão no início de um sentença revela que aquela sentença é uma conclusão de premissas anteriormente dadas. Um indicador de premissa no início de uma sentença composta, consistindo em duas sentenças, como em

Desde que uma frente fria está a caminho, é provável que chova.

denota que a primeira é uma premissa sustentando a segunda. Os indicadores de premissa ocorrem, freqüentemente, no início de uma sentença não-composta; quando isso acontece, eles demonstram que a sentença é uma premissa sustentando uma conclusão previamente estabelecida.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1.2 Utilize os indicadores de inferência do argumento abaixo para determinar a sua estrutura inferencial e escreva-o na forma padrão:

①[O composto ouro-argônio, provavelmente, não é produzido no laboratório, muito menos na natureza] desde que ②[é difícil fazer o argônio reagir com qualquer outra coisa] e desde que ③[o ouro, também, forma poucos compostos.]

Solução

Ciculamos os indicadores de inferência para destacá-los, colocamos colchetes e enumeramos cada enunciado para facilitar a referência. Gramaticalmente, o argumento consiste em uma sentença composta cujas três sentenças componentes são ligadas por duas ocorrências do indicador de premissa 'desde que'. Cada ocorrência de 'desde que' introduz uma premissa. O enunciado 1, ligado aos enunciados 2 e 3 pelas ocorrências de 'desde que', é a conclusão. O argumento na forma padrão é:

É difícil fazer o argônio reagir com qualquer outra coisa.

O ouro, também, forma poucos compostos.

∴ O composto ouro-argônio, provavelmente, não é produzido no laboratório, muito menos na natureza.

1.3 Utilize os indicadores de inferência do argumento abaixo para determinar a sua estrutura inferencial e escreva-o na forma padrão:

> ①[A inflação tem caído consideravelmente, enquanto as taxas de juros têm permanecido altas.] Portanto ②[em termos reais, o empréstimo tornou-se mais caro] desde que ③[nessas condições, o dinheiro emprestado não pode (como quando a inflação era mais alta) ser pago em dólares desvalorizados].

Solução

O indicador de conclusão 'portanto' introduz uma conclusão. Mas, aqui, o que o segue é a sentença composta consistindo nas sentenças 2 e 3 ligadas pelo indicador de premissas 'desde que'. 'Desde que' indica que o enunciado 2 é uma conclusão do enunciado 3. E 'portanto', como prefixa o enunciado 2, indica que 2 é uma conclusão de 1. Então o argumento consiste em duas premissas, os enunciados 1 e 3, sustentando uma só conclusão, o enunciado 2. O argumento na forma padrão é:

A inflação tem caído consideravelmente, enquanto as taxas de juros têm permanecido altas.

Nessas condições, o dinheiro emprestado não pode (como quando a inflação era mais alta) ser pago em dólares desvalorizados.

∴ Em termos reais, o empréstimo tornou-se mais caro.

As expressões que funcionam em alguns contextos como indicadores de inferência têm, geralmente, outras funções em outros contextos. Assim, nem toda ocorrência de uma das expressões da lista acima é um indicador de inferência. Por exemplo, a expressão 'desde que' em

Passaram-se seis anos desde que fomos à França.

revela a duração, não uma inferência, não funcionando como um indicador de premissa. Da mesma forma, a palavra 'assim' em

Ele estava zangado e permaneceu assim por vários dias.

não é um indicador de conclusão; significa "nessa condição" e não "portanto". Explicações de motivos ou causas que usam palavras como 'desde que' ou 'porque' são difíceis de se distinguir nos argumentos. Se, por exemplo, você perguntar a uma pessoa

Por que você roubou o dinheiro?

e ela responder

Eu roubei porque tinha de sustentar meu vício.

esta resposta é meramente uma explicação. Nesse contexto 'porque' não é um indicador de premissa. Nenhum argumento está presente; a pessoa está simplesmente explicando por que ela tomou o dinheiro, não tentando provar por que roubou.

Alguns argumentos não têm indicadores. Em tais casos, devemos confiar em indícios contextuais ou em nossa compreensão das intenções do autor para diferenciar as premissas das conclusões.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1.4 Reescreva o argumento abaixo na forma padrão:

①[Al Capone foi imprudente.] ②[Se ele não fosse imprudente, o IRS jamais teria conseguido condená-lo por sonegar o imposto de renda.]

Solução

É claro que a sentença 2 pretende servir como evidência para a sentença 1, mesmo que o argumento não contenha indicadores, e ainda que a evidência fornecida pela sentença 2 na realidade seja fraca. O argumento é:

Se Al Capone não fosse imprudente, o IRS jamais o teria condenado por sonegar o imposto de renda.

∴ Al Capone foi imprudente.[3]

1.5 Reescreva o argumento abaixo na forma padrão:

①[Os defensores do aborto são hipócritas.] ②[Eles, continuamente, contestam em altos brados a execução de criminosos ou a destruição de nossos inimigos.] Mas ③[eles nada vêem de errado com o assassinato de crianças inocentes].

Solução

A intenção do autor é estabelecer quais proponentes do aborto são hipócritas. Na forma padrão:

3. Tal como o argumento (*c*) do problema 1.1, este argumento pode ser considerado como incompleto, pois o autor obviamente assume que o IRS conseguiu condenar Capone por sonegação ao imposto de renda, apesar de esta suposição não estar explicitamente estabelecida.

Os defensores do aborto continuamente contestam em altos brados a execução de criminosos ou a destruição de nossos inimigos.

Eles nada vêem de errado com o assassinato de crianças inocentes.

∴ Eles são hipócritas.

1.6 Reescreva o argumento abaixo na forma padrão:

①[Você não precisa se preocupar com temperaturas abaixo de zero, em junho, mesmo nos picos mais altos.] ②[Nunca faz frio nos meses de verão] e portanto ③ [provavelmente nunca ocorrerá].

Solução

'Portanto' é um indicador de conclusão, assinalando que o enunciado 3 segue-se do enunciado 2. Mas a conclusão é o enunciado 1. Conseqüentemente, este é um argumento complexo com a seguinte estrutura:

Nunca ocorreu temperatura abaixo de zero, mesmo nos picos mais altos, nos meses de verão.

∴ Provavelmente nunca ocorrerá.

∴ Você não precisa se preocupar com temperaturas abaixo de zero, em junho, mesmo nos picos mais altos.

1.3 Diagramas de argumentos

Os diagramas de argumentos são convenientes para representar as estruturas inferenciais. Para diagramar um argumento, circulamos os indicadores de inferência, colocamos colchetes e enumeramos cada enunciado, tal como nos problemas 1.2 a 1.6. Se várias premissas funcionam numa etapa do raciocínio, escrevemos seus números numa fila horizontal, unidos pelo sinal '+' e traçamos uma linha horizontal sob essa fila de números. Se uma etapa do raciocínio tiver somente uma premissa, escrevemos simplesmente o seu número. Em qualquer caso, desenhamos uma seta para baixo a partir do(s) número(s) que representa(m) uma premissa (ou premissas) para o número que representa a conclusão da etapa. Repetimos esse procedimento se o argumento contiver mais de uma etapa.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.7 Diagrame o argumento abaixo:

①[Hoje é terça-feira ou quarta-feira.] Mas ②[não pode ser quarta-feira], pois ③[o consultório do médico estava aberto, esta manhã], e ④[aquele consultório está sempre fechado às quartas]. Portanto, ⑤[hoje deve ser terça-feira].

Solução

O indicador de premissa 'pois' revela que os enunciados 3 e 4 são premissas que sustentam o enunciado 2. O indicador de conclusão 'portanto' demonstra que o enunciado 5 é uma conclusão de premissas previamente enumeradas. As considerações do contexto e o significado de cada sentença indicam que as premissas 1 e 2 sustentam a 5. Assim, o argumento pode ser diagramado como se segue:

$$\begin{array}{c} \underline{3 + 4} \\ \downarrow \\ \underline{1 + 2} \\ \downarrow \\ 5 \end{array}$$

Os sinais '+' no diagrama significam "junto com" ou "em conjunção com" e as setas significam "é justificativa para". Assim, a evidência do diagrama do problema 1.7 é: "3 junto com 4 é justificativa para 2, o qual junto com 1 é justificativa para 5."

Um diagrama de argumento revela a estrutura do argumento num relance. Cada seta representa uma única etapa do raciocínio. No problema 1.7 existem duas etapas, uma de 3 e 4 para 2 e outra de 1 e 2 para 5. Os números que não estão apontados por setas representam as premissas básicas. Os números que são apontados por setas e apontam outros representam as premissas não-básicas. O número final do diagrama com uma ou mais setas apontando-o mas não apontando outro número representa a conclusão final.[4] No problema 1.7 os enunciados 1, 3 e 4 são premissas básicas, o enunciado 2 é uma premissa não-básica, e o 5 é a conclusão final.

Os diagramas de argumento são convenientes quando um argumento tem mais de uma etapa.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.8 Diagrame o seguinte argumento:

①[Watts está em Los Angeles] e ②[está, portanto, nos Estados Unidos] e logo ③[faz parte de uma nação plenamente industrializada]. Assim, ④[ele não faz parte do Terceiro Mundo], pois ⑤[o Terceiro Mundo é caracterizado por nações em desenvolvimento] e ⑥[nações em desenvolvimento não estão, por definição, plenamente industrializadas].

4. Alguns autores admitem diagramas com mais de uma conclusão final, mas adotaremos a convenção de separar tais diagramas em vários outros com suas conclusões finais (todos estes diagramas podem ter as mesmas premissas).

Solução

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ \underline{3 + 5 + 6} \\ \downarrow \\ 4 \end{array}$$

As palavras 'portanto', 'logo' e 'assim' são indicadores de conclusão, significando que a sentença seguinte ou a que a contém é uma conclusão de premissas previamente estabelecidas. 'Pois' é um indicador de premissa que mostra que os enunciados 5 e 6 pretendem sustentar o enunciado 4. O termo 'assim' no enunciado 4 mostra que 4 é também uma conclusão de 3. Então, 3, 5 e 6 juntos funcionam como premissas para 4. As premissas expressas em 2 e 3 não são sentenças completas. Em cada caso, o termo 'Watts' está omitido. Visto que cada uma delas expressa um enunciado, nós as colocamos entre colchetes. As palavras 'logo' e 'portanto' indicam que cada uma delas (2 e 3) funcionam como uma conclusão intermediária.

Devido à grande variedade da gramática, não há regras simples e rigorosas para a colocação de colchetes. Existem, contudo, alguns princípios gerais. Usualmente, coloca-se o argumento entre colchetes de modo que fique claro a sua estrutura inferencial. Se duas frases forem ligadas por um indicador de inferência, elas serão colocadas entre colchetes separadamente, indiferente se elas são ou não gramaticalmente sentenças completas, pois o indicador assinala que uma expressa uma premissa e, a outra, uma conclusão. Os problemas 1.7 e 1.8 ilustram esse princípio.

Em geral, separamos sentenças ligadas por 'e', como fizemos com os enunciados 3 e 4 no problema 1.7 e com os enunciados 5 e 6 no problema 1.8. Isso é muito importante se uma delas for conclusão de premissas anteriores (como será um dos enunciados 2 e 3 no problema 1.20), embora não seja tão crucial em outra situação. Mais tarde, contudo, encontraremos contextos nos quais é útil tratar sentenças ligadas por 'e' como uma só. 'E' usualmente indica funções paralelas. Assim, se uma das duas sentenças ligadas por 'e' for uma premissa que sustenta uma certa conclusão, a outra, provavelmente, será uma premissa que sustenta aquela conclusão. Porém, em algumas sentenças compostas, os seus componentes nem sempre podem ser colocados entre colchetes, pois desmembrando-os muda-se o seu significado. Duas locuções comuns que formam compostos deste tipo são 'ou ... ou' e 'se ... então'. (Algumas vezes os termos 'ou' e 'então' estão omitidos.) Alguém que afirma, por exemplo, 'Ou pára de chover, ou o rio transbordará' não está dizendo que vai parar de chover nem que o rio transbordará. A pessoa está simplesmente dizendo que uma ou outra coisa ocorrerá. Desmembrando-se esta sentença em seus componentes, altera-se a idéia. Similarmente, dizer 'Se não parar de chover, o rio transbordará' não é equivalente a dizer que não parará de chover e, também, não é equivalente a dizer que o rio transbordará. A sentença significa somente que ocorrerá transbordamento *se* não parar de chover.

Note que se alguém diz '*Desde que* não pare de chover, o rio transbordará', realmente está afirmando que não parará de chover e que o rio transbordará. 'Desde que' é um indicador de premissa neste contexto; assim, as sentenças serão tratadas separadamente na análise do argumento. Locuções como 'ou ... ou' e 'se ... então' não são indicadores de inferência; suas funções serão discutidas nos Capítulos 3 e 4.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.9 Diagrame o argumento abaixo:

①[Ou os UFOs são armas secretas russas, ou eles são naves espaciais extraterrestres.] ②[Se eles são armas russas, então a tecnologia russa é enormemente superior à nossa (contrário ao pensamento corrente).] ③[Se eles são naves espaciais extraterrestres, então eles mostram uma tecnologia muito avançada, além do que podemos imaginar.] Em qualquer caso, portanto, ④[seus construtores são mais sofisticados, tecnologicamente, do que nós].

Solução

$$\frac{1 + 2 + 3}{\ }$$
$$\downarrow$$
$$4$$

Este problema ilustra a colocação correta de colchetes em enunciados que envolvem 'ou ... ou' e 'se ... então'.

Além de 'ou ... ou' e 'se ... então', há outras locuções que ligam duas ou mais sentenças em componentes que podem ser tratados como um só ao se analisar um argumento. Os usuais são:

Somente se

Contanto que

Se e somente se

Nem ... nem

A menos que

Até

Quando

Antes que

'Desde que' e 'porque' também são componentes de formas não-desmembráveis quando não são utilizados como indicadores de premissa.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1.10 Diagrame o seguinte argumento.

①[Eu sabia da sua chegada antes que ela fosse para o Nepal], assim ②[foi bem antes do seu retorno que eu a encontrei]. Como ③[você não a encontrou mesmo após o seu retorno], ④[eu a encontrei antes que você].

Solução

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \underline{2 + 3} \\ \downarrow \\ 4 \end{array}$$

Note que as sentenças compostas formadas por 'antes que' e 'mesmo' são tratadas como sentenças simples.

1.11 Diagrame o seguinte argumento:

①[O cheque perderá a validade a menos que ele seja descontado dentro de 30 dias.] ②[O cheque está datado de 2 de setembro] e ③[hoje é 8 de outubro]. Portanto, ④[o cheque não vale mais]. ⑤[Você não pode descontar um cheque que não vale.] Assim, ⑥[você não pode descontar este cheque].

Solução

$$\begin{array}{c} \underline{1 + 2 + 3} \\ \downarrow \\ \underline{4 + 5} \\ \downarrow \\ 6 \end{array}$$

Note que a premissa 1, uma sentença ligada por 'a menos que', é tratada como uma sentença simples.

Muitas vezes, um argumento está disseminado com materiais estranhos ao argumento. Às vezes, dois ou mais argumentos estão entrelaçados na mesma passagem. Em tais casos, colocamos colchetes e enumeramos todos os enunciados de modo usual, mas somente aqueles números que representam enunciados que são partes de um particular argumento aparecerão no diagrama.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.12 Diagrame o seguinte argumento:

①[Ela não podia saber que o dinheiro estava perdido], visto que ②[ela não tinha meios de resgatá-lo]. ③[Se ela soubesse que o dinheiro estava perdido, não haveria razão para pensar que ela não apresentasse queixas.] Mas como ①[ela não podia saber,] ④[nada havia que ela pudesse fazer]. E ⑤[mesmo se ela pudesse ter feito algo, já era muito tarde para impedir o crime]; ⑥[o dinheiro desapareceu]. Portanto, ⑦[ela não é culpada nesse incidente].

Solução

$$\begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ 1 \\ \downarrow \\ 4 \\ \downarrow \\ 7 \end{array}$$

Note que o enunciado 1 ocorre duas vezes; na segunda vez numa versão ligeiramente abreviada. Para evitar a confusão que pode resultar se a mesma sentença tiver dois números, rotulamos 1 na primeira e segunda ocorrências. Os enunciados 3, 5 e 6 não trazem contribuição direta para o argumento e, portanto, foram omitidos do diagrama. Contudo, 5 e 6 podem ser considerados como um argumento separado, incluído na linha principal do raciocínio, sendo 6 a premissa e 5 a conclusão.

$$\begin{array}{c} 6 \\ \downarrow \\ 5 \end{array}$$

1.4 Argumentos convergentes

O argumento que contém várias etapas de raciocínio, que sustentam a mesma conclusão (final ou intermediária), chama-se *convergente*. Os diagramas de argumentos convergentes contêm pelo menos um número com mais de uma seta apontando em sua direção.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.13 Diagrame o seguinte argumento:

①[Os Benson devem estar em casa.] ②[A porta da frente está aberta], ③ [o carro está na entrada da garagem] e ④[a televisão está ligada], pois ⑤[eu posso ver a sua luminosidade através da janela].

Solução

$$\begin{array}{ccc} & & 5\\ & & \downarrow\\ 2 & 3 & 4\\ \searrow & \downarrow & \swarrow\\ & 1 & \end{array}$$

O argumento é convergente. Os enunciados 2, 3 e 4 funcionam como causas independentes para a conclusão que é o enunciado 1. Cada um deles sustenta, separadamente, o enunciado 1. Não precisamos, por exemplo, assumir 3 ou 4 a fim de entender a etapa de 2 para 1. Assim, em vez de ligar os enunciados 2, 3 e 4 pelo sinal '+' e desenhar uma só seta para o enunciado 1, desenhamos as três setas.

Quando as premissas não funcionam independentemente, isto é, quando cada uma requer ser complementada pelas outras a fim de que o argumento tenha sentido, elas são ligadas pelo sinal '+'.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.14 Diagrame o seguinte argumento:

①[Todos nesta festa são bioquímicos] e ②[todos os bioquímicos são inteligentes]. Portanto, como a ③[Sally está nesta festa], ④[Sally é inteligente].

Solução

$$\begin{array}{c}\underline{1+2+3}\\ \downarrow\\ 4\end{array}$$

O argumento não é convergente; cada premissa requer ser complementada pelas outras. Aceitando-as, nenhuma das premissas faria sentido ao enunciado 4.

Note que o argumento, casualmente, contém um indicador de premissa, 'como', precedido de um indicador de conclusão, 'portanto'. Essa é uma construção relativamente comum. Ela indica que a primeira sentença que segue o indicador de premissa (no caso, a 3) é uma premissa que sustenta a segunda (no caso, a 4), e que a segunda é sustentada por premissas previamente dadas.

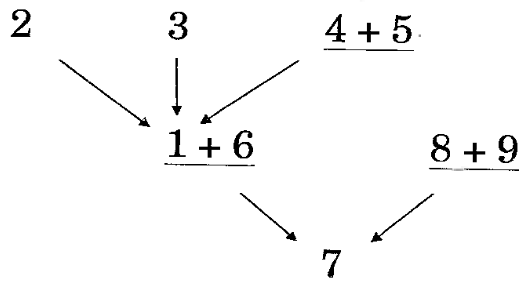
Os argumentos convergentes exibem modelos diferentes. Algumas vezes, eles separam linhas de raciocínio e convergem para conclusões intermediárias, em vez de para a conclusão final. Algumas vezes, eles convergem para ambas.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.15 Diagrame o seguinte argumento:

① [Os Lions provavelmente perderão este último jogo], por três razões: ②[o seu melhor zagueiro está impedido de jogar porque está com o joelho machucado], ③[a moral está baixa após duas derrotas desastrosas] e ④[este é um jogo decisivo] e ⑤[eles têm jogado muito mal em toda a temporada]. ⑥[Se eles perderem este jogo, o treinador será quase certamente queimado.] Mas isto não é a unica razão para pensar que ⑦[seu emprego está em perigo]. Apesar de ⑧[ele ter sido acusado por alguns dos jogadores de fazer vista grossa para o uso de drogas dentro do time] e ⑨[nenhum preparador que permite o uso de drogas deve permanecer em seu posto].

Solução



Este argumento exibe uma estrutura complexa convergente.

1.5 Enunciados implícitos

É útil observar que certos argumentos estão expressos de modo incompleto. O argumento 1.1 (*c*) e o argumento do problema 1.4, por exemplo, assumem suposições não-estabelecidas (veja o rodapé relativo a estes argumentos). Também existem casos nos quais está claro que o autor espera que os leitores percebam uma conclusão não-estabelecida.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.16 Complete e diagrame o seguinte argumento:

①[Estava certo que nenhum dos conselheiros do Presidente tinha vazado a informação] e, no entanto, ②[realmente, ela tinha sido vazada para a imprensa].

Solução

Estes dois enunciados são premissas que sugerem a conclusão implícita:

③[Alguém, além dos conselheiros do Presidente, vazou a informação para a imprensa.]

Então, o diagrama é:

$$\frac{1+2}{\downarrow}$$
$$3$$

Premissas ou conclusões implícitas devem ser "lidas dentro de" um argumento somente se elas completarem o pensamento do argumentador. Nenhum enunciado deve ser acrescentado, a menos que seja aceito pelo argumentador, pois, ao se analisar um argumento, é o pensamento do argumentador que tentamos entender. O principal constrangimento que predomina na interpolação de premissas e conclusões é o *princípio da caridade*: ao formular enunciados implícitos, o argumentador dá margem a dúvidas; tentar tornar o argumento tão forte quanto possível permanecendo-se fiel ao que se sabe sobre o pensamento do argumentador. O objetivo é amenizar a má interpretação, quer deliberada, quer casual. (Ocasionalmente, podemos ter motivos para reestruturar um mau argumento de modo a torná-lo correto e, com isso, nos afastarmos do pensamento do argumentador. Mas neste caso não estamos considerando o argumento original; estamos criando um novo argumento, embora este se relacione com o anterior.)

PROBLEMA RESOLVIDO

1.17 Complete e diagrame o seguinte argumento:

①[Karla é atéia], $\boxed{\text{o que somente mostra que}}$ ②[você não tem de acreditar em Deus para ser uma boa pessoa].

Solução

Primeiro consideremos uma solução incorreta. Suponhamos que alguém responda a este argumento: "Bem, é ridículo dizer: olhe, você está assumindo que todos os ateus são boas pessoas". Esta suposição é um modo de completar o pensamento do autor, mas não é benevolente. Esta suposição é, obviamente, falsa e é, portanto, improvável que o autor a tivesse em mente. Além disso, o argumento não está querendo dizer que se aplica a *todos* os ateus; não há necessidade de assumir algo tão vasto para sustentar a conclusão. O que de fato se assumiu é, algo como:

③[Karla é uma boa pessoa.]

Isso pode ser verdadeiro e fornece um argumento razoavelmente forte, enquanto se permanece fiel ao que se sabe do pensamento do autor. Então, uma interpretação benevolente do argumento é:

$$\begin{array}{c}\underline{1 + 3}\\ \downarrow \\ 2\end{array}$$

Algumas vezes a conclusão e uma ou mais premissas estão implícitas. Na verdade, um argumento completo pode ser expresso por uma única sentença.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1.18 Complete e diagrame o seguinte argumento:

①[Se você fosse meu amigo, não falaria por trás de mim.]

Solução

Esta sentença sugere uma premissa e uma conclusão não-estabelecidas. A premissa é:

②[Você fala por trás de mim.]

E a conclusão é:

③[Você não é meu amigo.]

O diagrama é:

$$\frac{1+2}{\downarrow \atop 3}$$

1.19 Complete e diagrame o seguinte argumento:

①[O líquido que está vazando do seu motor é água]. ②[Existem somente três líquidos no motor: água, gasolina e óleo]. ③[O líquido que está vazando não é óleo], porque ④[ele não é viscoso], e ⑤[não é gasolina], visto que ⑥ [ele não tem odor].

Solução

O indicador de premissa 'porque' indica que o enunciado 4 é uma premissa que sustenta o enunciado 3. Mas essa etapa, obviamente, depende da suposição adicional

⑦[O óleo é viscoso.]

Do mesmo modo, o indicador de premissa 'visto que' mostra que o enunciado 6 sustenta o enunciado 5, outra vez com uma suposição adicional:

⑧[A gasolina tem odor.]

A conclusão do argumento é o enunciado 1. Ainda que nenhum indicador de inferência adicional esteja presente, é claro que os enunciados 2, 3 e 5 pretendem sustentar o enunciado 1. Por causa da completude, podemos também acrescentar a suposição, um tanto óbvia

⑨[Um líquido está vazando do seu motor.]

O diagrama é:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \underline{4+7} & & \underline{6+8}\\
 & \downarrow & & \downarrow\\
\underline{9+2+} & \underline{3} & \underline{+} & \underline{5}\\
 & \downarrow & & \\
 & 1 & &
\end{array}
$$

Naturalmente, muitos argumentos são completos. Os argumentos dos exemplos 1.1 e 1.2 e problemas 1.7 e 1.9, por exemplo, não têm premissas ou conclusões implícitas. Em casos menos claros, a decisão de observar se um argumento tem uma premissa implícita depende do grau de rigor que o contexto exige. Consideremos o argumento do problema 1.3. Se necessitamos ser exigentes — como é o caso quando estamos formalizando argumentos (ver Capítulos 3 e 6) —, devemos observar que o autor faz a suposição:

> Tomar dinheiro emprestado para pagamento de salários com dólares altamente inflacionados é menos caro, em termos reais, do que tomar dinheiro emprestado para pagamento de salários com dólares menos inflacionados.

Contudo, em contextos ordinários e informais, este rigor excessivo nem sempre vale a pena.

Concluímos esta seção com um argumento complexo que admite várias suposições implícitas.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.20 Este argumento é do *De rerum natura* (Sobre a Natureza do Universo), do filósofo romano Lucretius. Diagrame-o e forneça, onde for necessário, as premissas que estão faltando.

> 1[Os átomos que compõem o espírito são obviamente muito menores do que os de água corrente, ou de névoa ou de

fumaça], visto que ②[os excedem em grande parte em mobilidade] e ③[são movidos por um ímpeto muito insignificante]. De fato, ④[eles são, realmente, movidos por imagens da fumaça e névoa]. Assim, por exemplo, ⑤[quando estamos mergulhados no sono, podemos ver altares emitindo nuvens de vapor e fumaça] e não podemos duvidar de que ⑥[estamos lidando com imagens]. Sabemos que ⑦[a água flui em todas as direções de um vaso quebrado, a umidade se dispersa e a névoa e a fumaça se dissipam no ar]. Com certeza, então, ⑧[o espírito, analogamente, se dispersa e se dissipa muito mais rapidamente e se dissolve prontamente em seus átomos componentes sempre que é solto da estrutura humana].

Solução

A fim de compreender a estrutura geral do argumento, primeiramente vamos diagramá-lo, sem acrescentar as suposições implícitas. O indicador de conclusão 'então' assinala que o enunciado 8 é uma conclusão do 7. A posição do enunciado 8 no final do argumento sugere fortemente que ele é uma conclusão final. O indicador de premissa 'visto que' mostra que os enunciados 2 e 3 sustentam o enunciado 1. O resto da estrutura deve ser inferido de indícios sutis.

Note que o 'assim' que precede 5 não funciona, aqui, como um indicador de conclusão. Particularmente, junto com a frase 'por exemplo', ele indica que o enunciado 5 é um exemplo da idéia estabelecida no enunciado 4. Exemplos são freqüentemente usados para sustentar as afirmações que eles exemplificam, e é o que ocorre: o enunciado 5 é uma premissa sustentando o enunciado 4. O enunciado 4 apresenta uma relação similar com o enunciado 3; é um exemplo da idéia no enunciado 3 que pretende sustentá-lo. A palavra 'e' que liga 5 e 6 sugere uma função paralela e, de fato, podemos ver que 6 com 5 sustentam 4.

Isto nos leva à questão de quanto o enunciado 1 se relaciona com a conclusão final, o enunciado 8. A conexão pode não ser vista, facilmente, sem algum conhecimento da teoria de átomos de Lucretius. Ele acreditava que as substâncias são fluidos em proporção ao tamanho e lisura de seus átomos. Tendo isso em mente e recordando que o enunciado 7 sustenta o 8, torna-se evidente que os enunciados 1 e 7 unem-se a fim de sustentar o enunciado 8. Então, sem acrescentar qualquer premissa, podemos diagramar o argumento como se segue:

$$\begin{array}{c} \underline{5 + 6} \\ \downarrow \\ 4 \\ \downarrow \\ \underline{2 + 3} \\ \downarrow \\ \underline{1 + 7} \\ \downarrow \\ 8 \end{array}$$

Consideremos, agora, as premissas implícitas. Uma dessas já foi mencionada. Vimos que na etapa dos enunciados 1 e 7 para 8, Lucretius assumiu algo como:

> ⑨[As substâncias são fluidos (móveis) em proporção ao tamanho de seus átomos componentes.]

(Omitimos a menção à lisura, pois ela não é representativa no argumento.) É evidente que esta mesma suposição é necessária para completar a passagem dos enunciados 2 e 3 para o enunciado 1. A passagem de 4 para 3 depende da suposição

> ⑩[Água, fumaça e névoa não são movidas por imagens de fumaça ou de névoa.]

a fim de estabelecer a comparação em 3 entre o ímpeto necessário para mover o espírito e o ímpeto necessário para mover água, fumaça ou névoa. E, finalmente, a passagem dos enunciados 5 e 6 para 7, pressupõe que

⑪ [Coisas vistas no sono movem o espírito.]

Então o argumento completo é:

$$\begin{array}{c} \underline{5 + 6 + 11} \\ \downarrow \\ \underline{4 + 10} \\ \downarrow \\ \underline{2 + 3 + 9} \\ \downarrow \\ \underline{1 + 7 + 9} \\ \downarrow \\ 8 \end{array}$$

1.6 Uso e menção

Em qualquer assunto que se relacione extensivamente com a linguagem, pode surgir confusão quando uma expressão está sendo *usada* para dizer algo ou *mencionada* como assunto do que está sendo dito. Para evitar essa confusão, quando uma expressão é mencionada em vez de usada, colocamo-la entre aspas. Como é usual em lógica, usaremos aspas simples com essa finalidade. As sentenças seguintes empregam corretamente esta convenção e ambas são verdadeiras:

Sócrates foi um filósofo grego.
'Sócrates' é um nome contendo oito letras.

Na primeira, o nome 'Sócrates' é usado para denotar a pessoa Sócrates. Na segunda, é meramente mencionado, como as aspas indicam. Por outro lado, as sentenças:

> 'Sócrates' foi um filósofo grego.
> Sócrates é um nome contendo oito letras.

são, ambas, falsas. A primeira diz do nome 'Sócrates' que ele foi um filósofo grego, e a segunda diz da pessoa Sócrates que ele é um nome contendo oito letras.

PROBLEMA RESOLVIDO

1.21 Coloque aspas nas sentenças seguintes a fim de torná-las verdadeiras:

a) O nome de Bill é Bill.

b) O fato que x + y = y + x é expresso pela equação x + y = y + x.

c) Esta sentença é parte do exercício resolvido 1.21.

d) A primeira letra do alfabeto é A.

e) A é o nome da primeira letra do alfabeto.

Solução

a) O nome de Bill é 'Bill'.

b) O fato que x + y = y + x é expresso pela equação 'x + y = y + x'.

c) Esta sentença é parte do exercício resolvido 1.21.

d) A primeira letra do alfabeto é 'A'.

e) "A" é o nome da primeira letra do alfabeto.

Não há aspas no item (*c*). Se escrevêssemos, por exemplo,

Esta sentença é parte do 'exercício resolvido 1.21'.

estaríamos dizendo que esta sentença é parte da expressão 'exercício resolvido 1.21', uma expressão consistindo em duas palavras e um rótulo numérico. Mas isso é absurdo. Para entender os itens (*d*) e (*e*), note que o que está impresso abaixo é a primeira letra do alfabeto:

A

Para formar um nome desta letra, acrescentamos aspas:

'A'

Este é o nome usado no item (*d*) para mencionar a letra.

Para formar um nome deste nome da letra, acrescentamos um segundo conjunto de aspas:

"A"

E este é o que usamos no item (*e*) para mencionar o nome da letra.

Na lógica e na matemática, as próprias letras são, algumas vezes, usadas como nomes ou variáveis, substituindo vários objetos. Em tais usos elas podem permanecer sem aspas. No item (*b*), por exemplo, as ocorrências das letras 'x' e 'y', sem aspas, funcionam como variáveis que designam números.

Um outro ponto a ser observado acerca do item (*b*) (e item (*d*)) é que o ponto final da sentença é colocado após o último sinal de aspas, e não antes, como as regras de pontuação, usualmente, estabelecem. Em textos de lógica, a pontuação que não faz parte da expressão que está sendo mencionada é colocada fora das aspas. Isto ajuda a evitar confusão, pois a expressão que está sendo mencionada é sempre, precisamente, a expressão entre aspas.

O significado ou *sentido* de uma expressão é diferente da própria expressão e do objeto (talvez nenhum) denotado pela expressão. Formaremos nomes para os sentidos de expressões colocando as expressões entre aspas duplas. Assim, por exemplo, podemos dizer que o sentido da expressão 'a capital soviética' é "a cidade que é o centro do governo soviético", denota a cidade de Moscou.

1.7 Lógica formal *versus* lógica informal

A lógica pode ser estudada de dois pontos de vista: a formal e a informal. *Lógica formal* é o estudo das *formas* de argumento, modelos abstratos comuns a muitos argumentos distintos. Uma forma de argumento é, algumas vezes, mais do que a estrutura exibida por um diagrama de argumento, pois ela codifica a composição interna das premissas e da conclusão. Uma forma típica de argumento é exibida abaixo:

Se P, então Q

P

$\therefore Q$

Esta é uma forma de uma só etapa do raciocínio com duas premissas e uma conclusão. As letras 'P' e 'Q' são variáveis que representam proposições (enunciados). Essas duas variáveis podem ser substituídas por qualquer par de sentenças declarativas para produzir um argumento específico. Como o número de pares de sentenças declarativas é infinito, a forma representa muitos argumentos diferentes, todos tendo a mesma estrutura. Estudar a forma em si, em vez dos argumentos específicos que a representam, nos permite fazer importantes generalizações que aplicaremos a todos esses argumentos.

Lógica informal é o estudo de argumentos particulares em linguagem natural e do contexto no qual eles ocorrem. Enquanto a lógica formal realça generalidade e teoria, a lógica informal se concentra numa análise prática de argumentos. Os dois aproches não são opostos, mas um complementa o outro. Neste livro, o tratamento dos Capítulos 1, 2, 7 e 8 é predominantemente informal. Os Capítulos 3, 4, 5, 6, 9 e 10 exemplificam um ponto de vista predominantemente formal.

Problemas suplementares

I. Alguns dos enunciados seguintes são argumentos e outros não são. Para os que são argumentos, circule todos os indicadores de inferência, coloque colchetes e enumere os enunciados, adicione premissas ou conclusões implícitas onde for necessário, e diagrame o argumento.

1) Você terá sucesso, desde que você tenha talento e trabalhe arduamente.

2) Ela prometeu casar com ele e, assim, é o que ela fará. Portanto, se ela faltar ao compromisso, ela estará definitivamente errada.

3) Necessitamos de mais morfina. Temos 32 acidentados e somente 12 doses de morfina.

4) Não posso ajudá-lo se eu não souber o que está errado — e ainda eu não sei o que está errado.

5) Se os pedidos fossem cavalos, então os pedintes cavalgariam.

6) Se um carro passasse em alta velocidade, seria detectado neste radar, mas isso não ocorreu.

7) A Terra está aproximadamente a 93 milhões de milhas do Sol. A Lua está a cerca de 250 000 milhas da Terra. Portanto, a Lua está a cerca de 250 000 milhas mais próxima do Sol do que está a Terra.

8) Ela fugiu da sala e então subitamente ouvimos um grito terrificante.

9) Eu segui a receita que estava na caixa, mas a sobremesa ficou com um gosto horrível. Algum ingrediente devia estar estragado.

10) Hitler subiu ao poder porque os Aliados tinham esmagado a economia germânica após a Primeira Guerra Mundial. Portanto, se os Aliados tivessem ajudado a reconstruir a economia germânica em vez de esmagá-la, eles nunca teriam tido confronto com Hitler.

11) O pai (do apóstolo Paulo) era um fariseu... Ele (Paulo) não recebeu uma educação clássica, pois nenhum fariseu permitiria tal educação helênica ao seu filho, e nenhum homem com formação grega teria escrito as Epístolas em grego tão incorreto. (Will Durant, *A história da Civilização*).

12) Os competidores serão julgados de acordo com quatro critérios: beleza, equilíbrio, inteligência e criatividade artística. O vencedor receberá Cr$ 500.000,00 e uma bolsa para freqüentar a faculdade de sua escolha.

13) O castigo principal não é um dissuasor para o crime. Nos Estados que aboliram a pena de morte, a taxa de incidência de crimes graves é mais baixa do que naqueles que ainda não a aboliram. Além disso, o castigo principal é uma prática bárbara, que não tem lugar em qualquer sociedade que se diz "civilizada".

14) Ainda que ele seja medíocre, existem muitos juízes, pessoas e advogados medíocres. Eles estão em minoria e eles não terão uma pequena chance? Não queremos ter todos os Brandeis, Frankfurt, Cardozo e coisas assim. (Senador Roman Hruska de Nebraska, defendendo a tentativa do Presidente Richard Nixon de nomear G. Harrold Carswell para a Suprema Corte em 1970.)

15) Não foi o mordomo nem a criada. Resta o motorista ou o cozinheiro. O motorista estava no aeroporto quando o assassino agiu. O cozinheiro é o único que não tem um álibi. Além

do mais, a herdeira foi envenenada. É lógico concluir que o cozinheiro é o culpado.

16) A série de números inteiros é infinita. Se não fosse infinita, então existiria um último (ou maior) número. Mas, pelas leis da aritmética, pode-se efetuar a operação de adição com qualquer número arbitrariamente grande; seja n, o tal número, então obtemos $n+1$. Como $n+1$ sempre excede n, não há um último (ou maior) número. Logo, a série de números inteiros é infinita.

17) A escala Richter mede a intensidade de um terremoto em gradações que correspondem a potências de 10. Um tremor que registra 6.0 é dez vezes mais forte do que um que mede 5.0; similarmente, um que mede 7.0 liberta 10 vezes mais energia do que o de 6.0, ou 100 vezes mais do que o de 5.0. Assim, um tremor famoso como o de São Francisco em 1906 (8.6) (ou o do Alasca em 1964 (8.3)) é, na realidade, mais do que mil vezes devastador do que um tremor com um modesto 5.0 na escala.

18) Pode, simplesmente, não existir pecado? Se for assim, por que tememos e nos resguardamos de algo que não existe? Se o nosso temor está infundado, ele em si é um pecado, pois ele apunhala e atormenta nosso coração por nada. De fato, o pecado predomina se estamos amendrotados quando nada há para temer. Portanto, ou existe pecado e nós o tememos, ou o próprio medo é um pecado. (Santo Agostinho, *As Confissões*).

19) O quadrado de qualquer número n é divisível por n. Daí, o quadrado de qualquer número par é par, pois pelo princípio já mencionado ele é divisível por um número par e qualquer número divisível por um número par é par.

20) Se a Síria atacar Israel, Israel irá retaliar. Se Israel retaliar, a União Soviética será atraída para o conflito. Se a União Soviética se envolver, então os Estados Unidos terão de responder na mesma forma. Se as duas superpotências se

confrontarem no Oriente Médio, o resultado poderá ser o último teste nuclear ou um Armagedon.

21) A contagem está 3 a 2 para o batedor. Está um dia formidável para o beisebol. Mais de 33000 pessoas compareceram. O lançador e o rebatedor têm três chances. Está é a décima pegada que Roger Clemens faz neste jogo. Ele colocou fora os batedores e fez lançamentos magistrais. Ele será um candidato ao prêmio Cy Young.

22) Os pais que foram maltratados quando crianças são, freqüentemente, mais violentos com os seus próprios filhos do que os pais que não foram maltratados. Isso prova que as pessoas maltratadas quando criança são levadas, mais tarde, a maltratar a próxima geração. Portanto, o único modo de parar o ciclo de criança maltratada é providenciar um tratamento para crianças maltratadas antes que se tornem pais e perpetuem este problema triste e sério.

23) Suponha uma mesa de bilhar perfeitamente quadrada e admita que uma bola de bilhar seja lançada do meio de um lado, numa trajetória de um ângulo de 45 graus. Então a bola atingirá o meio de um lado adjacente num ângulo de 45 graus. A bola sempre rebaterá num ângulo igual mas na direção oposta do ângulo de chegada. Logo, ela rebaterá num ângulo de 45 graus e baterá no meio do lado oposto de onde partiu. Assim, pelo mesmo princípio, ela baterá no meio do próximo lado num ângulo de 45 graus e daí retornará ao ponto de partida.

II. Coloque aspas na seguintes sentenças de modo a torná-las verdadeiras:

1) A forma maiúscula de x é X.

2) O termo homem pode designar todos os seres humanos ou somente aqueles que são adultos e do sexo masculino.

3) Amor é uma palavra de quatro letras.

4) Roma é conhecida pelo nome de Cidade Eterna. O Vaticano está em Roma. Portanto, o Vaticano está na Cidade Eterna.

5) O Capítulo 1 deste livro refere-se à estrutura de argumento.

6) Na lógica formal, as letras *P* e *Q* são freqüentemente usadas para designar proposições.

7) Se usarmos a letra *P* para designar o enunciado Está nevando e *Q* para designar Está frio, então o argumento Está nevando; portanto, está frio é simbolizado por *P*; portanto, *Q*.

Respostas de alguns problemas suplementares

I. 2) ①[Ela prometeu casar com ele] e, assim ②[é o que ela fará]. Portanto, ③[se ela faltar ao compromisso, ela estará definitivamente errada].

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 3 \end{array}$$

4) ①[Não posso ajudá-lo se eu não souber o que está errado] — e ②[ainda eu não sei o que está errado]. ③[Eu não posso ajudá-lo.]

$$\begin{array}{c} \underline{1 + 2} \\ \downarrow \\ 3 \end{array}$$

5) Não é um argumento.

10) ①[Hitler subiu ao poder porque os Aliados tinham esmagado a economia germânica após a Primeira Guerra Mundial.] Portanto, ②[se os Aliados tivessem ajudado a reconstruir a economia germânica em vez de esmagá-la, eles nunca teriam tido confronto com Hitler.]

$$\begin{array}{c}1\\ \downarrow\\ 2\end{array}$$

11) ①[O pai do apóstolo Paulo era um fariseu.] ②[Paulo não recebeu uma educação clássica], pois ③[nenhum fariseu permitiria tal educação helênica ao seu filho], e ④[nenhum homem com formação grega teria escrito as Epístolas em grego tão incorreto.]

$$\begin{array}{ccc}\underline{1+3} & & 4\\ & \searrow\ \swarrow & \\ & 2 & \end{array}$$

16) ①[A série de números inteiros é infinita.] ②[Se não fosse infinita, então existiria um último (ou maior) número.] Mas, ③[pelas leis da aritmética, pode-se efetuar a operação de adição com qualquer número arbitrariamente grande; seja n, o tal número, então obtemos n+1.] Como ④[n+1 sempre excede n], ⑤[não há um último (ou maior) número]. Logo, ①[a série de número inteiros é infinita].

$$\begin{array}{c}\underline{3+4}\\ \downarrow\\ \underline{2+5}\\ \downarrow\\ 1\end{array}$$

23) Suponha ①[uma mesa de bilhar perfeitamente quadrada] e admita que ②[uma bola de bilhar seja lançada do meio de um lado, numa trajetória de um ângulo de 45 graus]. Então ③[a bola atingirá o meio de um lado adjacente num ângulo de 45 graus]. ④[A bola sempre rebaterá num ângulo igual mas na direção oposta do ângulo de chegada]. Logo, ⑤[ela rebaterá num ângulo de 45 graus e baterá no meio do lado oposto de onde partiu]. Assim, pelo mesmo princípio, ⑥[ela baterá no meio do próximo lado num ângulo de 45 graus] e daí ⑦[ela retornará ao ponto de partida].

$$\underline{1 + 2}$$
$$\downarrow$$
$$\underline{3 + 1 + 4}$$
$$\downarrow$$
$$\underline{5 + 1 + 4}$$
$$\downarrow$$
$$\underline{6 + 1 + 4}$$
$$\downarrow$$
$$7$$

II. 1) A forma maiúscula de 'x' é 'X'.

3) 'Amor' é uma palavra de quatro letras.

5) O Capítulo 1 deste livro refere-se à estrutura de argumento. (sem aspas)

7) Se usarmos a letra '*P*' para designar o enunciado 'Está nevando' e '*Q*' para designar 'Está frio', então o argumento 'Está nevando; portanto, está frio' é simbolizado por 'P; portanto, *Q*'.

MAKRON Books

Capítulo 2

AVALIAÇÃO DE UM ARGUMENTO

2.1 Introdução

Embora um argumento possa ter muitos objetivos, o seu principal propósito é demonstrar que uma conclusão é provável ou verdadeira. Assim, os argumentos podem ser melhores ou piores, na medida em que eles realizam ou falham ao executar esse propósito. Neste capítulo examinamos quatro critérios: 1) Se todas as premissas forem verdadeiras; 2) se, dada a verdade das premissas, a conclusão é ao menos provável; 3) se as premissas são relevantes para a conclusão; e 4) se o argumento é indutivo, não havendo evidência substancial suposta.

Nem todos os quatro critérios são aplicáveis a quaisquer argumentos. Se, por exemplo, um argumento só pretende mostrar que certa conclusão segue de um conjunto de premissas, sendo ou não essas premissas verdadeiras, então o critério 1 é inaplicável; e, dependendo do caso, os critérios 3 e 4 também podem ser inaplicáveis. Aqui, entretanto, preocuparemos com o caso mais típico no qual o propósito de um argumento é estabelecer que a sua conclusão é verdadeira ou é provavelmente verdadeira.

2.2 Verdade das premissas

Se uma das premissas de um argumento for falsa, então não se pode estabelecer a veracidade de sua conclusão, não importando quão bom sejam os motivos.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.1 Avalie o seguinte argumento em relação ao critério 1:

Visto que todos os americanos são, atualmente, individualistas, a história registrará, no final do século XX, que os Estados Unidos fracassaram como defensor da democracia mundial.

Solução

A premissa 'todos os americanos são, atualmente, individualistas' é certamente falsa; logo, o argumento não estabelece que os Estados Unidos fracassarão como um defensor da democracia mundial. Isso não significa que a conclusão é falsa, mas somente que o argumento não é útil para determinar a sua veracidade ou a sua falsidade. (Um modo para produzir um argumento melhor é fazer um estudo cuidadoso das principais forças dirigidas pela polícia americana no exterior e, daí, traçar conclusões esclarecedoras.)

Muitas vezes a veracidade ou a falsidade de uma ou mais premissas é desconhecida; assim, pelo que sabemos, o argumento falha ao estabelecer a sua conclusão. Em tais casos necessitamos de mais informações para aplicar o critério 1, e devemos suspender o julgamento até que informações adicionais sejam fornecidas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

2.2 Avalie o seguinte argumento em relação ao critério 1:

Existem muitas civilizações extraterrestres avançadas em nossa galáxia.

Muitas dessas civilizações produzem sinais eletromagnéticos fortes (e freqüentes) suficientes para serem detectados na Terra.

∴ Nós temos habilidade para detectar sinais gerados por civilizações extraterrestres.

Solução

Não sabemos, ainda, se as premissas deste argumento são verdadeiras. Daí, o melhor a ser feito é suspender o julgamento até podermos determinar a veracidade ou a falsidade das premissas. Este argumento não convenceria sobre a veracidade de sua conclusão — pelo menos por ora.

2.3 Uma vidraça foi quebrada. Uma criança dá o seguinte argumento: "Billy quebrou a vidraça. Eu o vi fazer isso". Na forma padrão:

Eu vi Billy quebrar a vidraça.

∴ Billy quebrou a vidraça.

Suponhamos que temos razão para suspeitar que a criança não viu. Avalie o argumento em relação ao critério 1.

Solução

Mesmo que a criança esteja falando a verdade, seu argumento falha ao estabelecer a sua conclusão, pelo menos enquanto não soubermos se a premissa é verdadeira. O melhor que podemos fazer é suspender o julgamento e procurar evidências adicionais.

O critério 1 requer somente que as premissas *sejam* realmente verdadeiras, mas na prática um argumento transmite com êxito a verdade de sua conclusão só se aquele a quem é endereçada *sabe* que as premissas são verdadeiras. Se um argumentador sabe que as suas premissas são verdadeiras mas outras pessoas não sabem, então, para provar uma conclusão *para essas pessoas* o argumentador deve fornecer argumentos adicionais para estabelecer as premissas.

Portanto, o critério 1 não é, em si, adequado para avaliar este argumento.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.4 Avalie o seguinte argumento em relação ao critério 1:

Todos os atos de um assassino são atos de um matador.

∴ Os soldados que matam numa batalha são assassinos.

Solução

Como a premissa é verdadeira, o argumento satisfaz o critério 1. No entanto, ele falha ao estabelecer a sua conclusão, pois a premissa deixa em aberto a possibilidade de que algum tipo de matador não seja assassino. Talvez o soldado que mata numa batalha seja desse tipo; pelo menos a premissa não fornece uma boa razão para pensar que não seja. Então a premissa, embora verdadeira, não sustenta adequadamente a conclusão; o argumento nada prova.

Este exemplo mostra a necessidade de critérios suplementares para se avaliar argumentos, critérios para avaliar o grau a fim de que as premissas *sustentem* conclusões. A análise do grau para o qual um conjunto de premissas sustenta uma conclusão será desdobrada em duas partes: a probabilidade ou a necessidade da conclusão, dadas as premissas, e a relevância das premissas para a conclusão. Essas partes serão os assuntos das próximas seções.

2.3 Validade e probabilidade indutiva

Os argumentos podem ser classificados em duas categorias — indutiva e dedutiva —, dependendo de suas conclusões seguirem ou não de suas premissas básicas. Um *argumento dedutivo* é um argumento cuja conclusão deve ser verdadeira se suas premissas básicas (suposições) forem verdadeiras. De modo equivalente, um argumento é dedutivo se é impossível que a sua conclusão seja falsa enquanto suas premissas básicas forem verdadeiras. Um *argumento indutivo*, pelo contrário, é aquele cuja conclusão não é necessária, dadas suas premissas básicas. As conclusões de argumentos indutivos são mais ou menos prováveis em relação a suas premissas.[1]

A probabilidade de uma conclusão, dado um conjunto de premissas, chama-se *probabilidade indutiva*. A probabilidade indutiva de um argumento dedutivo é maximal (isto é, igual a 1; a probabilidade é medida numa escala de 0 a 1). A probabilidade indutiva de um argumento indutivo é (talvez sempre) menor do que 1.[2] Tradicionalmente, o termo 'dedutivo' é entendido a fim de incluir qualquer argumento que tenciona ser dedutivo, no sentido definido acima. Então, torna-se necessário distinguir entre os argumentos dedutivos válidos e inválidos. Argumentos dedu-

1. A distinção entre o argumento indutivo e o dedutivo é descrita diferentemente por diversos autores. Muitos definem indução de um modo aproximado ao que no Capítulo 8 chamamos de indução humeana. Outros descrevem a distinção com base no significado ou na intenção da força do raciocínio.
2. Este é um assunto controverso. De acordo com algumas teorias da lógica indutiva, é possível que a conclusão de um argumento seja falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras, mesmo que a probabilidade indutiva do argumento seja 1. Seria o caso, por exemplo, com algumas inferências da forma $Fa \vdash \sim \forall xFx$ na lógica indutiva de Rudolf Carnap (ver R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, 2ª ed., Chicago, University of Chicago Press, 1962.)

tivos *válidos* são aqueles genuinamente dedutivos no sentido definido acima (isto é, suas conclusões não podem ser falsas se suas premissas básicas são verdadeiras). Argumentos dedutivos *inválidos* são argumentos que dão a entender que são dedutivos mas que, de fato, não o são (alguns tipos de argumentos dedutivos inválidos são discutidos na Seção 8.6). A menos que seja especificado de outro modo, usaremos o termo 'dedutivo' num sentido limitado, não-tradicional (isto é, como um sentido para 'válido' ou 'dedutivo válido').[3]

PROBLEMA RESOLVIDO

2.5 Classifique os seguintes argumentos como dedutivos ou indutivos:

a) Nenhum mortal pode parar o tempo.
Você é mortal.
∴ Você não pode parar o tempo.

b) Freqüentemente, quando chove fica nublado.
Está chovendo.
∴ Está nublado.

c) Não há registros de seres humanos com mais de 5m de altura.
∴ Nunca tivemos um ser humano com mais de 5m de altura.

d) Alguns porcos têm asas.
Todas as coisas aladas gorjeiam.
∴ Alguns porcos gorjeiam.

3. Adotaremos isso porque na prática não há resposta à questão de o argumento "dar a entender" ser válido; daí a definição tradicional ser, em ambos os casos, simplesmente inaplicável. Além disso, mesmo onde ele pode ser aplicado é geralmente irrelevante. Nossa principal preocupação ao avaliar argumento é investigar como e em que medida as premissas sustentam a conclusão (isto é, como a probabilidade indutiva e o grau de relevância), não como uma pessoa pretende que seja.

e) Cada um é republicano, ou democrata, ou tolo.
O porta-voz da Casa Branca não é republicano.
O porta-voz da Casa Branca não é tolo.
∴ O porta-voz da Casa Branca é democrata.

f) Se houver uma guerra nuclear, a civilização será destruída.
Haverá uma guerra nuclear.
∴ A civilização será destruída por uma guerra nuclear.

g) O cloreto de potássio é, quimicamente, muito similar ao sal de cozinha (cloreto de sódio).
∴ O cloreto de potássio tem sabor igual ao do sal de cozinha.

Solução

a) Dedutivo

b) Indutivo

c) Indutivo

d) Dedutivo

e) Dedutivo

f) Dedutivo

g) Indutivo

O problema 2.5 ilustra o fato de que os conceitos de argumento dedutivo e indutivo são independentes da real veracidade ou falsidade das premissas e conclusão. Note que cada um dos argumentos dedutivos exibe uma combinação diferente de veracidade e falsidade. As premissas e conclusão do problema 2.5 (*a*) são todas verdadeiras. Todos os enunciados do problema 2.5 (*d*) são falsos. O problema 2.5 (*e*) é uma mistura de veracidade e falsidade; a primeira premissa é, certamente, falsa, mas a veracidade e a falsidade das outras variam com *o* tempo, conforme o porta-voz da Casa Branca. Não se sabe ainda se os enunciados do problema 2.5 (*f*) são verdadeiros ou falsos. Nos itens (*e*) e (*f*) a conclusão pode não ser falsa se as premissas forem verdadeiras. Qualquer combinação de veracidade ou falsidade é possível num argumento indutivo ou dedutivo, exceto que nenhum argumento dedutivo (válido) tem as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

O termo "impossível" deve ser entendido num sentido mais amplo. Ele significa não simplesmente "impossível na prática", mas *impossível logicamente*, isto é, impossível em toda a sua concepção.[4] A distinção é ilustrada a seguir.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.6 O argumento abaixo é dedutivo?

Tommy lê o *The Wall Street Journal.*

∴ Tommy tem mais do que 3 meses de idade.

Solução

Mesmo que seja impossível num sentido prático alguém com menos de 3 meses de idade ler o *The Wall Street Journal*, é coerentemente concebível; a idéia em si não engloba contradição. Assim é logicamente possível (embora não praticamente possível) que a conclusão seja falsa enquanto a premissa é verdadeira. Logo, dada a premissa, a conclusão, embora altamente provável, não é absolutamente necessária. Portanto, o argumento não é dedutivo (inválido).

4. Alguns autores definem a impossibilidade lógica como a violação às leis da lógica, mas isso pressupõe alguns conceitos fixos das leis lógicas. Estes são considerados como verdades lógicas da lógica formal de predicados (ver Capítulo 6). Mas, como queremos discutir a validade em sistemas formais lógicos mais amplos do que a lógica de predicados (ver Capítulo 10) e também a validade em lógica informal, necessitamos de noções menos precisas.

O argumento do problema 2.6 pode, entretanto, ser convertido num argumento dedutivo acrescentando-se uma premissa:

> Todos os leitores do *The Wall Street Journal* têm mais do que 3 meses de idade.
>
> Tommy lê o *The Wall Street Journal.*
>
> ∴ Tommy tem mais do que 3 meses de idade.

Aqui, não é logicamente possível que a conclusão seja falsa enquanto as premissas são verdadeiras; este novo argumento é dedutivo.

Como vimos na Seção 1.5, é muitas vezes útil considerar argumentos como os do problema 2.6 como incompletos e então completá-los com premissas necessárias que os tornem dedutivos.[5] Em todos os casos, contudo, devemos verificar que o argumentador (ou o leitor) aceitaria a premissa adicional como verdadeira. Acrescentando-se uma premissa não pretendida pelo autor, altera-se injustamente o argumento.

É conveniente comparar o argumento do problema 2.6 com os argumentos dedutivos do problema 2.5. Em nenhum contexto essas últimas inferências requereriam premissas adicionais.

Nem sempre é óbvio quando um argumento particular é dedutivo. Nos Capítulos 3 a 6 discutiremos, com clareza e precisão, uma variedade de técnicas formais para detectar o conceito de dedutivo.

Um argumento dedutivo no qual todas as premissas básicas são verdadeiras diz-se *correto.* Um argumento correto estabelece com certeza que a sua conclusão é verdadeira. O argumento 2.5 (*a*), por exemplo, é correto.

5. Há, de fato, uma escola de pensamento conhecida como *dedutivismo,* que considera o que chamamos de "argumentos indutivos" como meros fragmentos que devem ser "completados" da maneira mencionada, a fim de que não existam argumentos indutivos genuínos.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.7 Avalie o seguinte argumento com relação aos critérios 1 e 2:

Todos têm um e um só pai biológico.
Os irmãos têm o mesmo pai biológico.
Ninguém é pai biológico dele mesmo.
∴ Não há pai biológico que seja também seu irmão.

Solução

O argumento é correto. (Suas premissas são verdadeiras e ele é dedutivo.)

Os argumentos dedutivos fornecem maior certeza; contudo, na prática, freqüentemente precisamos dispor de raciocínio indutivo. Diferentemente dos argumentos dedutivos cuja probabilidade indutiva é sempre 1, os argumentos indutivos têm uma escala de probabilidades indutivas e daí variam muito em fidedignidade. Quando a probabilidade indutiva de um argumento indutivo é alta, dizemos que o raciocínio do argumento é *forte* ou *fortemente indutivo*. Quando ela é baixa, dizemos que o raciocínio do argumento é *fraco* ou *fracamente indutivo*.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.8 Dos dois argumentos indutivos abaixo, qual deles tem a maior probabilidade indutiva?

a) Os visitantes da China quase nunca contraem malária na China.
Jan está visitando a China.
∴ Jan não contrairá malária na China.

b) Aproximadamente menos da metade dos visitantes da China contraem desarranjos intestinais na China.
Jan está visitando a China.
∴ Jan não contrairá desarranjo intestinal na China.

Solução

A frase 'quase nunca' na primeira premissa do argumento (*a*) dá uma probabilidade maior para a sua conclusão do que a correspondente frase 'aproximadamente menos da metade' do argumento (*b*). Portanto, o argumento (*a*) tem maior probabilidade indutiva.

Note que este exemplo ilustra mais uma vez que a probabilidade indutiva, tal como a validade dedutiva, é independente da veracidade ou falsidade das premissas. No problema 2.8 reconhecemos as diferenças na probabilidade indutiva sem saber se as premissas são verdadeiras. (Jan é uma pessoa cuja identidade e atividades desconhecemos, e não temos informações sobre a incidência da malária ou problemas intestinais na China.) Se as premissas de um argumento indutivo não são verdadeiras, então o argumento falha para provar a sua conclusão. Mas se todas elas são verdadeiras, então (supondo que não haja evidência relevante suposta — ver Seção 2.5) o argumento estabelece que a sua conclusão tem um grau de probabilidade correspondente à probabilidade indutiva do argumento. (O leitor deve saber que as premissas são verdadeiras a fim de poder ver esse fato.)

PROBLEMA RESOLVIDO

2.9 Avalie o raciocínio do seguinte argumento:

Eu sonho com monstros.

Meu irmão sonha com monstros.

∴ Todas as pessoas sonham com monstros.

Solução

É um argumento indutivo fraco; a sua probabilidade indutiva é menor do que as dos argumentos do problema 2.8. De uma amostra de dois indivíduos, ele generaliza para uma população maior (todas as pessoas). Na ausência de motivo forte para pensar que a amostra é típica (o que não está suposto), a probabilidade da conclusão, dadas as premissas, é bastante baixa.

Não há linha bem delineada entre os raciocínios indutivos forte e fraco, pois o que se considera como forte para algum fim pode não ser forte suficientemente para um outro. Se, por exemplo, a conclusão de que certa válvula não funcionará mais de 5 anos tem probabilidade 0,9, dadas certas premissas, então podemos considerar esse raciocínio como forte. Mas se a válvula faz parte de uma aparelhagem nuclear e as vidas de milhares de pessoas dependem de seu funcionamente correto, então 0,9 não deve ser suficientemente forte para nos satisfazer. Assim, não há resposta à pergunta "Qual é a probabilidade indutiva que um argumento deve ter para que o argumento seja classificado como forte?".

Evidentemente, um argumento é fraco se a sua probabilidade indutiva é menor do que 0,5. Nesse caso, a negação de sua conclusão é mais provável, dadas as premissas, do que a própria conclusão. (Isso é provado no problema 9.25 do Capítulo 9.)

Naturalmente, dada a evidência, algumas vezes é vantajoso atuar com uma conclusão cuja probabilidade seja insignificante. Os salvadores de desastres de minas, por exemplo, freqüentemente procedem como se as vítimas ainda estivessem vivas, apesar de as chances serem pequenas. Mas isso não significa que a conclusão (no caso, de que as vítimas estão vivas) seja provável.

Como a informação contida nas premissas e na conclusão de argumentos indutivos nem sempre é numericamente quantificável, não é possível dar um número preciso para a probabilidade indutiva de um dado argumento. (Os argumentos dedutivos são exceção, pois as suas probabilidades indutivas são precisamente 1.) Geralmente o que podemos dizer sobre um argumento indutivo é que ele é "razoavelmente forte" ou "razoavelmente fraco". Quando as premissas e a conclusão forem numericamente precisas, podemos dar probabilidades numéricas significativas para os argumentos indutivos. (Ver, por exemplo, as formas de argumento discutidas nas Seções 8.2 e 8.3.)

Até aqui, os nossos exemplos têm-se referido somente a argumentos simples, consistindo em uma só etapa de raciocínio. Agora, consideremos as probabilidades indutivas para argumentos complexos com duas ou mais etapas.

Quando lidamos com argumentos complexos, é importante ter em mente que a validade dedutiva e a probabilidade indutiva são relações entre as *premissas básicas* ou *suposições* e a conclusão. Assim, por exemplo, um argumento dedutivo é aquele cuja conclusão não pode ser falsa enquanto as suas premissas básicas são verdadeiras. As premissas não-básicas não são mencionadas nesta definição.

As premissas não-básicas (conclusões intermediárias) de argumentos são, fundamentalmente, concessões para as limitações da mente humana. Não podemos compreender argumentos complexos numa só etapa; assim, os desmembramos em etapas menores, cada uma sendo suficientemente simples para ser inteligível. Contudo, para avaliar os propósitos, estamos interessados em primeiro lugar em toda a amplitude do argumento — isto é, na probabilidade da conclusão, dadas as premissas básicas.

No entanto, cada uma das etapas que compõem um argumento complexo é um argumento e tem a sua própria probabilidade indutiva. Podemos desconfiar então que há um conjunto de regras simples de probabilidades indutivas das etapas componentes para a probabilidade indutiva de todo o argumento complexo. (Uma sugestão óbvia seria calcular a probabilidade indutiva do argumento todo, multiplicando as probabilidades indutivas de todas as suas etapas.) Mas, tal regra não se aplica em todos os casos. A relação entre a probabilidade indutiva de um argumento complexo e as probabilidades indutivas de suas etapas componentes é, em geral, um assunto muito confuso. Entretanto, existem algumas regras úteis:

1) Quanto aos argumentos complexos convergentes (ver Seções 1.4 e 1.5), se uma ou mais etapas forem fracas, então, geralmente, a probabilidade indutiva do argumento como um todo será baixa.

2) Se todas as etapas de um argumento complexo não-convergente forem indutivas ou dedutivas fortemente, então a probabilidade indutiva do argumento todo será, geralmente, bem alta.

3) A probabilidade indutiva de um argumento convergente (Seção 1.4) é, geralmente, pelo menos tão alta quanto a probabilidade indutiva de sua etapa mais forte.

Entretanto, essas regras têm exceções, pois a complexidade nas informações contidas em algumas premissas pode conflitar ou reforçar as informações contidas em outras. As regras 1 a 3 nos permitem fazer julgamentos imediatos que são, *geralmente*, precisos. Mas, o único modo para *garantir* um julgamento preciso da probabilidade indutiva nos casos mencionados, nas regras, é examinar diretamente a probabilidade da conclusão, dadas as premissas básicas, ignorando as etapas intermediárias.

Há uma regra excepcionalmente significativa que relaciona o comprimento do raciocínio de um argumento complexo com o de suas etapas componentes:

4) Se todas as etapas de um argumento complexo forem dedutivas, então o argumento todo será, também, dedutivo.

Não é difícil ver o por quê disso. Se cada etapa é dedutiva, então a veracidade das premissas básicas garante a veracidade de qualquer conclusão intermediária extraída delas, e a veracidade destas conclusões intermediárias garante a veracidade das conclusões intermediárias extraídas destas e assim por diante, até atingir a conclusão final. Assim, se as premissas são verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira; mais precisamente, o argumento complexo como um todo é dedutivo.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

2.10 Diagrame o seguinte argumento e avalie o seu raciocínio:

①[Todas as partículas que não podem ser decompostas por processos químicos são partículas subatômicas ou átomos]. ②[As menores partículas do cobre não podem ser decompostas por processos químicos] e ③[elas não são subatômicas]. daí ④[as menores partículas do cobre são átomos]. ⑤[Qualquer coisa cujas menores partículas são átomos é um elemento.] Assim, ⑥[o cobre é um elemento]. E ⑦[os elementos não são ligas metálicas]. Portanto, ⑧[o cobre não é uma liga metálica].

Solução

O argumento é diagramado do seguinte modo:

$$\begin{array}{c} \underline{1 + 2 + 3} \\ \downarrow D \\ \underline{4 + 5} \\ \downarrow D \\ \underline{6 + 7} \\ \downarrow D \\ 8 \end{array} \qquad \boxed{D}$$

Cada uma das três etapas é dedutiva. Indicamos uma etapa dedutiva do diagrama colocando um 'D' próximo à seta que representa a etapa. Como cada etapa é dedutiva, o argumento como um todo também é dedutivo. Nós denotamos esse fato colocando um 'D' num quadro junto ao diagrama.

2.11 Diagrame o argumento abaixo e avalie o seu raciocínio:

①[As inspeções aleatórias de 50 minas de carvão, nos Estados Unidos, revelaram que 39 delas estavam violando as normas federais de segurança]. Assim, podemos inferir que ②[uma porcentagem substancial de minas de carvão nos Estados Unidos está violando as normas federais de segurança.] visto que ③[todas as normas federais de segurança são leis federais] segue-se que ④[uma porcentagem substancial de minas de carvão nos Estados Unidos está violando uma lei federal].

Solução

O diagrama é:

$$\begin{array}{l}
1 \\
\downarrow \ \mathrm{I}\ \text{(Forte)} \\
\underline{2\ +\ 3} \\
\quad \downarrow \ \mathrm{D} \\
\quad 4
\end{array}
\qquad
\boxed{\text{I (Forte)}}$$

O 'I' próximo à primeira seta indica que a etapa do enunciado 1 para o enunciado 2 é indutiva. O 'D' próximo à segunda seta indica que a etapa dos enunciados 2 e 3 para o enunciado 4 é dedútiva. Isso torna o argumento como um todo indutivo, que indicamos colocando um 'I' num quadro junto ao diagrama. A probabilidade indutiva da primeira etapa e daí do argumento como um todo é razoavelmente alta, isto é, o raciocínio desta etapa e do argumento como um todo é forte. A etapa do enunciado 1 para o enunciado 2 é forte pois, embora uma amostra de 50 possa ser um tanto pequena, o enunciado 2 é uma conclusão muito fraca. Ele diz somente que uma "porcentagem substancial" de minas viola, o que é de fato muito parecido com o enunciado 1. Se dissesse "mais", o raciocínio seria mais fraco; se dissesse "quase todos", o raciocínio seria extremamente fraco. (Para uma discussão mais detalhada da avaliação da primeira espécie de inferência, ver Seção 8.3.)

Pode-se ver que enquanto o raciocínio como um todo é forte observamos que a conclusão, o enunciado 4, é muito provável, dadas as premissas básicas, enunciados 1 e 3. Isso está de acordo com a regra 2.

2.12 Diagrame o argumento abaixo e avalie o seu raciocínio.

①[O jipe MG e o automóvel Austin-Healy são, do ponto de vista mecânico, idênticos em quase todos os itens.] ②[Os automóveis Austin-Healy têm embreagem hidráulica]. Assim parece seguro concluir que ③[os jipes MG atuam bem]. Mas ④[as embreagens hidráulicas são propensas ao mau funcionamento devido ao escapamento.] Portanto ⑤[os automóveis Austin-Healy e os jipes MG são carros deficientemente projetados].

Solução

O diagrama é:

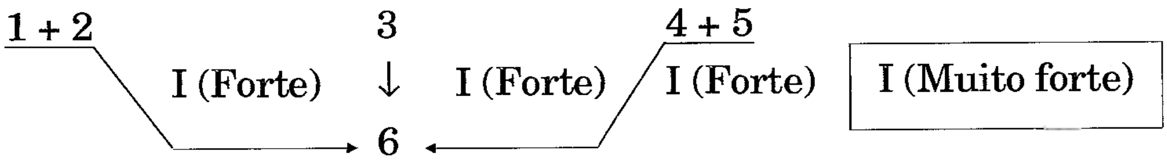
$$\begin{array}{ccccl} \underline{1 + 2} & & & & \\ \downarrow & \mathrm{I} & (\text{Forte}) & & \\ \underline{3 + 4} & & & & \boxed{\mathrm{I}\ (\text{Fraco})} \\ \downarrow & \mathrm{I} & (\text{Fraco}) & & \\ 5 & & & & \end{array}$$

O enunciado 3 é razoavelmente provável, ainda que não certo, dados 1 e 2; assim a primeira etapa é razoavelmente forte. Mas 5 não é muito provável, dados 3 e 4. O enunciado 5 diz que cada carro como um todo é deficientemente projetado, ao passo que os enunciados 3 e 4 nos dizem, quando muito, que uma parte (a embreagem) é deficientemente projetada. Na realidade, eles não nos dizem muito, visto que o fato de as embreagens hidráulicas, em geral, serem propensas a mau funcionamento devido ao escapamento não garante que as embreagens encontradas nesses dois carros são deficientemente projetadas. Assim, a segunda etapa é muito fraca. Pela mesma razão, a probabilidade do enunciado 5, dadas as premissas básicas dos enunciados 1, 2 e 4, é baixa; logo, o raciocínio do argumento como um todo é muito fraco.

2.13 Diagrame o seguinte argumento e avalie o seu raciocínio:

> ①[A Sra. Compson é idosa e fraca] e ②[é improvável que alguém em tais condições físicas possa ter desferido os golpes que mataram o Sr. Smith]. Além disso, ③[duas testemunhas dignas de confiança que viram o criminoso disseram que não foi a Sra. Compson]. E, finalmente, ④[a Sra. Compson não tinha motivos para matar o Sr. Smith] e ⑤[dificilmente ela o teria matado sem motivo]. Assim, ⑥[ela é inocente da morte do Sr. Smith].

Solução



Este argumento é convergente. Cada etapa é fortemente indutiva; e, quando consideradas juntas, as etapas se reforçam entre si. A probabilidade indutiva de todo o argumento é, portanto (de acordo com a regra 3), maior do que a probabilidade indutiva de qualquer uma de suas etapas componentes; o seu raciocínio é muito forte.

Em argumentos convergentes uma etapa fraca, geralmente, não diminui a força do todo. Por exemplo, se acrescentássemos a etapa fraca

A Sra. Compson nega ser a assassina.
∴ Ela é inocente da morte do Sr. Smith.

como uma informação adicional para o argumento, a probabilidade indutiva total desse argumento permaneceria a mesma. Isso ocorre porque *num argumento convergente nenhuma informação simples é crucial para a derivação da conclusão.* Em argumentos não-convergentes, ao contrário, cada etapa é crucial, de modo que (como no problema 2.12) uma etapa fraca enfraquece drasticamente o argumento como um todo. Contudo, existem exceções, como ilustra o seguinte problema.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.14 Diagrame o argumento abaixo e avalie o seu raciocínio:

①[Todos os seus amigos são desajeitados.] Assim, como ②[Jeff é um desajeitado], ③[ele deve ser um dos seus amigos desajeitados]. Mas ④[os desajeitados não podem ser bons amigos]. E, portanto, ⑤[Jeff não é um bom amigo para você].

Solução

$$\begin{array}{c} \underline{1 + 2} \\ \downarrow \; \mathrm{I} \quad \text{(Fraco)} \\ \underline{3 + 4} \\ \downarrow \; \mathrm{D} \\ 5 \end{array} \qquad \boxed{\mathrm{D}}$$

A passagem dos enunciados 1 e 2 para 3 pode parecer dedutiva, mas não é. É perfeitamente possível que todos os amigos de alguém sejam desajeitados, Jeff ser um desajeitado e, ainda, Jeff não ser amigo daquela pessoa, dados os enunciados 1 e 2.

A passagem dos enunciados 3 e 4 para 5 é dedutiva. E, surpreendentemente, todo o argumento é dedutivo; pois, se as premissas básicas 1, 2 e 4 são verdadeiras, então 5 deve também ser verdadeira. Isto é, se Jeff é um desajeitado e os desajeitados não podem ser bons amigos, então (sem levar em conta se todos os seus amigos são desajeitados — uma premissa supérflua) Jeff não é um bom amigo para você. (Ele pode não ser um amigo.)

Apesar de sua total dedutividade, é inaceitável que este argumento seja inválido por causa da falha de sua etapa inicial, e, daí, seria inútil provar a verdade de sua conclusão.

2.4 Relevância

Nem todo argumento com premissas verdadeiras e probabilidade alta é um bom argumento, mesmo que todas as suas etapas componentes tenham probabilidades indutivas altas. Uma conclusão pode ser provável ou indiscutível, dado um conjunto de premissas, ainda que as premissas sejam irrelevantes para a conclusão. Mas qualquer argumento que necessita de relevância (sem levar em conta a sua probabilidade indutiva) para demonstrar a veracidade de sua conclusão é inútil. Por essa razão, diz-se cometer uma *falácia de relevância*.

Tal como a probabilidade indutiva, a relevância também envolve o conceito de graduação. Entre os exemplos de argumentos simples, as premissas dadas são altamente relevantes para a conclusão nos problemas 2.2, 2.3, 2.5 (todos os sete argumentos), 2.7 e 2.8 (os dois argumentos).

PROBLEMA RESOLVIDO

2.15 Avalie o argumento abaixo em relação ao critério 2, a probabilidade indutiva e o grau de relevância:

Eu detesto a idéia de um criador infinitamente poderoso.
∴ Deus não existe.

Solução

Goste ou não, nada há para ser feito quanto à real existência de Deus; daí a premissa é apenas relevante. É difícil determinar a probabilidade indutiva para um argumento como este; mas, certamente, julgamos que ela não é alta.

A relevância e a probabilidade indutiva nem sempre variam juntas. Alguns argumentos exibem probabilidade indutiva alta com baixa relevância ou probabilidade indutiva baixa com alta relevância. Talvez os casos mais simples de probabilidade indutiva alta com baixa relevância ocorram entre os argumentos cujas conclusões são logicamente necessárias. Um enunciado *logicamente necessário* é um enunciado cuja concepção ou sentido requer sua veracidade; sua falsidade, em outras palavras, não é logicamente possível. Os seguintes enunciados são logicamente necessários:

Algo existe ou nada existe.

2 + 2 = 4.

Nenhum fumante é um não-fumante.

Se está chovendo, então está chovendo.

Tudo é idêntico a si mesmo.

(As tautologias, que são uma importante classe de enunciados logicamente necessários, serão estudadas no Capítulo 4.)

Os enunciados logicamente necessários têm a peculiar propriedade de que se um deles ocorre como a conclusão de um argumento, então o argumento é automaticamente dedutivo, sem levar em conta a natureza das premissas. Isso segue da definição de dedução. Um argumento dedutivo é aquele cuja conclusão não pode (isto é, não pode logicamente) ser falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras. Mas os enunciados logicamente necessários não podem ser falsos em quaisquer condições. Daí, trivialmente, se tomarmos um enunciado logicamente necessário como uma conclusão, então, para qualquer conjunto de premissas que fornecermos, a conclusão não pode ser falsa enquanto as premissas são verdadeiras.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.16 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do seguinte argumento:

Alguns carneiros são pretos.

Alguns carneiros são brancos.

∴ Se algo é um gato, então este algo é um gato.

Solução

Este argumento, absurdamente artificial, tem uma conclusão logicamente necessária e é, portanto, dedutivo, embora as suas premissas sejam irrelevantes para a sua conclusão.

É claro que tal argumento não é útil para demonstrar a veracidade de sua conclusão, visto que as premissas, sendo irrelevantes para a conclusão, não fornecem motivos para acreditar nela. Mas como a conclusão é logicamente necessária, nenhuma razão adicional é necessária para se acreditar nela; uma vez entendida, sua veracidade é óbvia.

Intuitivamente, a falta de relevância é percebida por uma certa particularidade ou descontinuidade na inferência das premissas para a conclusão. Onde as premissas são altamente relevantes, ao contrário, a inferência é natural e óbvia.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.17 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Todos os amigos de Fred vão para a universidade A.

Todos os amigos de Frieda vão para a universidade B.

Ninguém vai para a universidade A e B ao mesmo tempo.

∴ Fred e Frieda não têm amigos comuns.

Solução

O argumento é dedutivo e daí a sua probabilidade indutiva é 1. Suas premissas são altamente relevantes para sua conclusão.

Ter conclusão logicamente necessária não é o único meio para que um argumento seja dedutivo, ainda que lhe falte relevância. Isso também ocorre, se um argumento tiver premissas inconsistentes. Um conjunto de enunciados é *inconsistente* se é logicamente impossível que todos os seus enunciados sejam verdadeiros, simultaneamente. Por exemplo, cada um dos seguintes conjuntos de enunciados é inconsistente:

a) Todas as borboletas são insetos.
Algumas borboletas não são insetos.

b) Jim é mais alto do que Bob.
Bob é mais alto do que Sally.
Sally é mais alta do que Jim (o Jim mencionado acima).

c) Este pólo está carregado, positiva ou negativamente.
Ele não está carregado positivamente.
Ele não está carregado negativamente.

d) Hoje é quarta-feira e não é quarta-feira.
Hoje eu jogo golfe.

O caso (*d*) é diferente dos outros casos. Em todos os outros, os enunciados são inconsistentes, pois eles estão em conflito lógico. Não há conflito entre os dois enunciados do caso (*d*). O primeiro destes dois se contradiz. Daí, ele é inconsistente, pois o primeiro enunciado não pode ser verdadeiro sob quaisquer circunstâncias (e daí, não podem ser ambos verdadeiros).

Qualquer argumento com premissas inconsistentes é dedutivo, sem levar em conta o que a conclusão afirma. Isso segue da definição de dedução. Como é impossível (sob quaisquer condições) que premissas inconsistentes sejam todas verdadeiras, é impossível também para essas premissas serem verdadeiras enquanto alguma conclusão é falsa. Daí, *qualquer conclusão segue dedutivamente de premissas inconsistentes.*

PROBLEMA RESOLVIDO

2.18 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Este livro tem mais do que 900 páginas.

Este livro tem menos do que 900 páginas.

∴ Este é um livro muito profundo.

Solução

Como é logicamente impossível que o livro tenha mais do que 900 páginas e menos do que 900 páginas, é impossível que ambos os enunciados sejam verdadeiros enquanto a conclusão é falsa. Portanto, o argumento é dedutivo.[6] As premissas, entretanto,

6. Aqui, gostaríamos de acrescentar "... e daí a sua probabilidade indutiva é 1". Mas infelizmente os assuntos não são tão simples. Sob algumas interpretações de probabilidade, a probabilidade indutiva de um argumento com premissas inconsistentes está indefinida (ver Seção 9.6). Daí, os argumentos com premissas inconsistentes são exceções à regra de que a probabilidade indutiva de um argumento dedutivo é 1. (São as únicas exceções.) Isto, entretanto, é um problema de convenção e conveniência; nada de substancial ocorre. É mais fácil formular as leis de probabilidade quando é feita essa particular exceção.

são altamente irrelevantes para a conclusão. (A primeira é também falsa, se 'este livro' designa o livro que você está lendo agora.)

Note que embora qualquer argumento com premissas inconsistentes seja dedutivo, ele não é correto, pois as premissas inconsistentes não podem ser todas verdadeiras. Daí *nenhuma conclusão pode ser provada deduzindo-a de premissas inconsistentes.*

Como as premissas de alguns argumentos dedutivos são irrelevantes para as suas conclusões, as premissas de alguns argumentos fortemente indutivos exibem pouca relevância. Isso ocorre principalmente quando a conclusão é muito fraca. Um enunciado é fraco se ele é logicamente provável — isto é, provável mesmo na ausência de evidência (ver Seção 8.1). Em conseqüência, também será provável dados mais conjuntos de premissas irrelevantes ou fracamente relevantes.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.19 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Você não provou que existem exatamente 2 000 001 anjos dançando na cabeça deste alfinete.

$\therefore$ Não existem exatamente 2 000 001 anjos dançando na cabeça deste alfinete.

Solução

O fato de que alguém *não provou* uma proposição P é ligeiramente relevante, mas não fortemente relevante,. para a verdade de P. Alguém pode não ser competente para produzir uma tal prova ou talvez nunca se tenha esforçado. Contudo, é altamente provável, num sentido lógico, que não existam exatamente 2 000 001 anjos dançando na cabeça de um alfinete. Conseqüentemente, esta conclusão é altamente provável, *dada a premissa.* Isto é, o argumento é indutivamente forte. Apesar disso, ele é um mau argumento, pois a premissa não é fortemente relevante para a conclusão.

Um bom argumento, então, requer não somente premissas verdadeiras e probabilidade indutiva alta, mas também um alto grau de relevância. Vários tratados de lógica tendem a desprezar a relevância como fator de avaliação do argumento porque é difícil caracterizá-la precisamente. Alguns lógicos têm argüido que a relevância é uma noção puramente subjetiva e por isso não é assunto para a lógica. Evidentemente, qualquer explicação da avaliação do argumento que ignore a relevância é incompleta.

Recentemente, surgiu uma disciplina chamada *lógica relevante*. Lógica relevante é o estudo da relação de *acarretamento*. Um conjunto de premissas *acarreta* uma conclusão se as premissas implicam dedutivamente a conclusão e, além disso, são relevantes para a conclusão. Na lógica relevante, dedutividade e relevância são estudadas como uma relação simples. Aqui, entretanto, seguiremos o método padrão da *lógica clássica*, no qual a probabilidade indutiva e a relevância são consideradas como fatores isolados na avaliação do argumento.[7]

2.5 A exigência de total evidência

Um ponto crucial no qual os argumentos indutivos diferem de argumentos dedutivos está na sua vulnerabilidade à nova evidência. Um argumento dedutivo permanece dedutivo se novas premissas são acrescidas (sem levar em conta a natureza das premissas). Um argumento indutivo, ao contrário, pode ser fortalecido ou enfraquecido pelo acréscimo de novas premissas. Conseqüentemente, a probabilidade de uma conclusão inferida indutivamente de premissas verdadeiras pode alterar-se pela aquisição de nova evidência, porém a certeza de uma

7. Sobre lógica relevante, ver A. R. Anderson e N. Belnap, *Entailment*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1975.

conclusão inferida dedutivamente de premissas verdadeiras permanece inalterada.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.20 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Poucos russos falam bem o inglês.

Sergei é russo.

∴ Sergei não fala bem o inglês.

Solução

Este argumento é fortemente indutivo (isto é, tem uma probabilidade indutiva alta) e suas premissas são muito relevantes para a conclusão.

Note, entretanto, que se soubéssemos mais acerca de Sergei e acrescentássemos essas informações como premissas para o argumento, a probabilidade indutiva poderia mudar substancialmente. Suponhamos, por exemplo, que acrescentamos a informação de que Sergei veio para uma universidade americana como um estudante bolsista e que tais estudantes quase sempre falam bem o inglês. Isso produz um novo argumento.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.21 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Poucos russos falam bem o inglês.

Sergei é russo.

Sergei é um estudante bolsista numa universidade americana.

Os estudantes bolsistas nas universidades americanas quase sempre falam bem o inglês.

∴ Sergei não fala bem o inglês.

Solução

Novamente as premissas são muito relevantes, mas a probabilidade indutiva do argumento é muito baixa. As premissas deste novo argumento estão em conflito. As duas primeiras sustentam a conclusão, as duas seguintes são evidências contra ela. Em conseqüência, a probabilidade indutiva deste argumento é consideravelmente menor do que a do argumento no problema 2.20. De fato, parece mais razoável, dada essa evidência, extrair a conclusão oposta — a saber, que Sergei fala bem o inglês.

O argumento do problema 2.21 não tem métodos eficazes para demonstrar a veracidade de sua conclusão, por causa das premissas conflitantes. Não esperamos encontrar tal argumento, na prática. Ao contrário, pensamos em acrescentar as premissas exibidas no problema 2.21, com uma nova evidência acerca de Sergei. Como a evidência acessível para nós aumenta, então a probabilidade da proposição de que Sergei não fala bem o inglês, relativa à essa evidência, pode flutuar consideravelmente.

O problema 2.21 mostra como essa probabilidade pôde diminuir. O próximo exemplo mostrará como ela pode aumentar. Suponhamos que sabemos que Sergei é um surdo-mudo. Referindo-se a todas as informações disponíveis, a conclusão original está certa e o argumento torna-se dedutivo.

PROBLEMA RESOLVIDO

2.22 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento abaixo:

Poucos russos falam bem o inglês.

Sergei é russo.

Sergei é um estudante bolsista numa universidade americana.

Os estudantes bolsistas nas universidades americanas quase sempre falam bem o inglês.

Sergei é surdo-mudo.

∴ Sergei não fala bem o inglês.

Solução

O argumento é dedutivo e, daí, a sua probabilidade indutiva é 1. Todas as premissas são relevantes para a conclusão, embora as quatro primeiras sejam supérfluas, pois a conclusão segue dedutivamente somente da última premissa, 'Sergei é surdo-mudo'.

Uma vez que se tem um argumento dedutivo, nada que lhe acrescentemos altera a sua probabilidade indutiva; ela permanece fixa em 1. Se todas as premissas são verdadeiras (e permanecem verdadeiras), então a conclusão é certamente verdadeira; nenhuma evidência posterior pode diminuí-lo O argumento permanece dedutivo ainda que acrescentemos a premissa 'Sergei fala perfeitamente o inglês', pois esta premissa é inconsistente com a premissa 'Sergei é surdo-mudo'. Como vimos na Seção 2.4, as premissas dedutivamente inconsistentes implicam qualquer conclusão. (Naturalmente, neste caso, as premissas não podem ser ambas verdadeiras.)

Em suma, os argumentos indutivos podem ser convertidos em argumentos com probabilidade indutiva mais alta ou mais baixa pelo acréscimo de premissas. Assim, no raciocínio indutivo, a escolha de premissa é crucial. Usando evidências disponíveis junto com as premissas podemos obter uma conclusão parecida, extremamente provável, enquanto se usarmos outras, podemos obter uma outra conclusão parecida, extremamente improvável. Selecionando as evidências, somos capazes de tornar uma conclusão provável ou improvável conforme desejarmos, mesmo que todas as suposições feitas sejam verdadeiras.

Suponhamos, por exemplo, que Sergei é um estudante russo bolsista numa universidade americana e fala fluentemente o inglês. Suponhamos, ainda, que nada sabemos acerca de Sergei, exceto que ele é russo. E, finalmente, suponhamos que uma terceira pessoa, X, que conhece Sergei muito bem e sabe que seu inglês é fluente, deseja difamar Sergei. Nós perguntamos a X: "Como é o inglês de Sergei?", e X responde: "Bem, você sabe, ele é russo e poucos russos falam bem o inglês." A resposta de X é um argumento cuja conclusão implicada é que Sergei não fala bem o inglês. Isto é exatamente o argumento do problema 2.20.

Agora, como X sabe que Sergei fala bem o inglês, o seu argumento é, evidentemente, enganador. O argumento tem premissas verdadeiras e relevantes, e a sua probabilidade indutiva é alta. Por isso, ele satisfaz todos os três critérios de avaliação já discutidos. Tal falha obviamente deve estar em outra parte — na manipulação seletiva da evidência. Claramente tal seletividade é ilegítima. Para considerar sua ilegitimidade, precisamos de um quarto critério de avaliação de argumento, um critério que proíba tal seletividade em raciocínio indutivo. Este quarto critério chama-se *exigência de total evidência* ou *condição de total evidência*. Ele estipula que se um argumento é indutivo, suas premissas precisam conter todas as evidências conhecidas que são relevantes para a conclusão. Aos argumentos indutivos que não obedecem a tal exigência, em particular se a evidência omitida afirma algo fortemente contra a conclusão, dizemos que cometemos a *falácia da evidência suprimida*. As falácias de evidências suprimidas podem ser cometidas intencional ou involuntariamente. Se, como no exemplo já discutido, o argumentador omite intencionalmente informações relevantes conhecidas, a falácia é uma fraude deliberada. A omissão de evidências relevantes que o autor conhece pode não ter importância; o autor simplesmente pode ter esquecido de considerar alguns dos fatos relevantes disponíveis. Pode ocorrer, também, que um autor tenha incluído entre as premissas todas as informações relevantes que ele conhece, mas que outros saibam de informações relevantes, as quais o autor ignora. Novamente, o argumento comete uma falácia de evidência suprimida, mas, agora, a falácia é involuntária. O autor deu a informação disponível, da melhor maneira possível.

Deve-se notar que embora um argumento indutivo satisfaça a exigência de total evidência, ele pode nos conduzir de premissas verdadeiras para uma conclusão falsa. Os *argumentos indutivos não fornecem garantias*. É possível, ainda que improvável (esperamos), que todo o assunto da evidência relevante conhecida seja enganador.

Uma evidência suprimida não deve ser confundida com premissas implícitas (Seção 1.5). As premissas implícitas são suposições que o autor de um argumento pretende que os leitores as tomem como certas. As evidências suprimidas, ao contrário, são informações que o autor deliberadamente oculta ou involuntariamente omite. As suposições implícitas fazem parte do argumento do autor. As evidências suprimidas, não.

Alguns lógicos argumentam que a exigência de total evidência é muito rigorosa, que nenhum argumento pode incorporar todas as evidências conhecidas, relevantes para uma dada conclusão. Com relação a argumentos envolvendo várias questões complexas, estas podem muito bem ser verdadeiras. Para tais argumentos, a exigência de total evidência é um ideal teórico, raramente (ou talvez nunca) alcançado na prática. Conseqüentemente, os argumentos indutivos com muitas questões complexas sofrerão alguma variação de grau pela falácia de evidência suprimida. Os melhores argumentos serão aqueles que minimizam a evidência suprimida e não suprimem evidência que drasticamente afeta a probabilidade da conclusão.

Em vários casos simples, contudo, dificilmente se encontra a exigência de total evidência. Suponhamos, por exemplo, o caso de uma emergência médica e que você tem sangue tipo AB. Suponhamos, além disso, que não se conhece o seu tipo sangüíneo (você nunca fez um teste sangüíneo), mas sabemos que o sangue tipo AB é raro. Isto é, toda a evidência relevante que se conhece está contida na premissa do seguinte argumento:

O sangue do tipo AB é raro.
∴ Você não tem sangue do tipo AB.

Este argumento é razoavelmente bom. Sua premissa é verdadeira e relevante, sua probabilidade indutiva é razoavelmente alta e (dada a situação descrita) ele satisfaz a exigência de total evidência.

Naturalmente, numa emergência médica real, gostaríamos de ter mais dados do que esse argumento oferece. Não ficaríamos satisfeitos com uma mera inferência estatística; podemos fazer um teste sangüíneo. Os resultados podem ser usados como premissas a fim de se construir um argumento muito mais confiável. Em geral, se uma pequena evidência está disponível, uma atitude racional é obter outras evidências, antes de se inferir qualquer conclusão. Mas isso nem sempre é possível. Podemos não ter o equipamento ou um especialista para fazer um teste sangüíneo e ainda as necessidades humanas podem nos forçar a inferir, de qualquer modo, uma conclusão. Em tal situação, o argumento acima representaria o que se pôde fazer de melhor e seria lógico considerar a conclusão como provavelmente verdadeira.

Problemas suplementares

I. Aplique o critério 2 para os seguintes argumentos; isto é, para cada argumento, determine se o seu raciocínio é dedutivo ou indutivo, e se for indutivo, se é forte ou fraco (ou seja, se a sua probabilidade indutiva é alta ou baixa):

1) Todos os marcianos são bons beijadores.
Alguns marcianos têm várias bocas.
∴ Algumas coisas com várias bocas são bons beijadores.

2) Todos os fumantes contraem enfisema.
   Todos aqueles que contraem enfisema têm morte dolorida.
   ∴ Todos os fumantes têm morte dolorida.

3) Ninguém me contou que o encontro seria hoje.
   ∴ Eu não tinha meios de saber que o encontro foi hoje.

4) Todos os americanos gostam de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

5) Quase todos os americanos gostam de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

6) A maioria dos americanos gosta de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

7) Muitos americanos gostam de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

8) Alguns americanos gostam de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

9) Nenhum americano gosta de hambúrgueres.
   Joe é americano.
   ∴ Joe gosta de hambúrgueres.

10) A maioria das pessoas tem duas pernas.
    A maioria das pessoas tem dois braços.
    ∴ Algumas pessoas têm dois braços e duas pernas.

11) Se os Estados Unidos ou a União Soviética iniciar um ataque nuclear, isso levará à destruição maciça de ambas as nações.
Nenhum dos lados quer essa destruição.
∴ Nenhum dos lados iniciará um ataque nuclear.

12) Os números não são objetos físicos.
Os números existem.
∴ Não é verdade que todas as coisas que existem são objetos físicos.

13) Todos os argumentos são ou indutivos ou dedutivos.
O que você está lendo agora é um argumento.
Este argumento não é indutivo.
∴ Este argumento é dedutivo.

14) Não sabemos se as máquinas podem pensar como os homens.
∴ Sabemos que as máquinas não podem pensar como os homens.

15) Cheirar pimenta sempre me faz espirrar.
Ontem, eu cheirei pimenta.
∴ Ontem, eu espirrei.

16) Vimos uma águia no parque.
Existem somente duas espécies de águia no parque, a de cabeça branca e a águia real.
A águia real é freqüentemente vista no parque.
A águia de cabeça branca é raramente vista no parque.
∴ A águia que vimos no parque era uma águia real.

17) Os conservadores são sempre fortes proponentes da lei e da ordem.
Adams é um forte proponente da lei e da ordem.
∴ Adams é conservador.

18) Você não está convencido de que eu sou inocente.
∴ Você deve pensar que eu sou culpado.

19) A cartomante disse que Anne seria assassinada mas não por um homem ou um menino.
∴ Anne será assassinada por um mulher ou uma menina.

20) A aspirina não cura artrite.
A droga X é exatamente uma aspirina.
∴ A droga X não cura artrite.

21) Todas as formas de vida observadas até agora na Terra têm DNA.
∴ Todas a formas de vida terrestres têm DNA.

22) Todas as formas de vida observadas até agora na Terra têm DNA.
∴ Todas as formas de vida no universo têm DNA.

23) Olaf era a única pessoa que estava perto da vítima na hora do assassinato.
∴ Olaf é o assassino.

24) Todas as criações humanas finalmente perecerão.
Tudo que perece é, afinal, sem sentido.
∴ Todas as criações humanas são, afinal, sem sentido.

25) Existem mais pessoas no mundo do que cabelos na cabeça de uma pessoa.
∴ Pelo menos duas cabeças têm um número igual de cabelos.

26) Existem mais pessoas no mundo do que cabelos na cabeça de uma pessoa.
Ninguém é careca.
∴ Pelo menos duas cabeças têm um número igual de cabelos.

27) Deus fez o universo.
Deus é perfeitamente bom.
Tudo o que é feito por alguém perfeitamente bom é perfeitamente bom.
Tudo o que é perfeitamente bom não contém pecado.
∴ O universo não contém pecado.

28) Se existisse mais do que um conjunto vazio (conjunto sem elementos), então existiria mais do que um conjunto com, exatamente, os mesmos elementos.
Não existem dois conjuntos com, exatamente, os mesmos elementos.
∴ Existe, no máximo, um conjunto vazio.

29) Jody tem febre alta, manchas purpúreas na sua língua e dor de cabeça forte; mas nenhum outro sintoma.
Jeff tem o mesmo conjunto de sintomas e nenhum outro.
∴ Jody e Jeff têm a mesma doença.

30) Nós avaliamos os capacetes para bicicletas em lojas de revenda.
Nenhum dos que custam menos que Cr$ 500,00 passou nos testes de segurança.
∴ Se você comprar um capacete novo que passou nos testes de segurança de uma loja de revenda, você terá de pagar pelo menos Cr$500,00.

II. Para cada um dos argumentos, circule os indicadores de inferência, coloque colchetes e enumere cada enunciado e diagrame o argumento. Coloque um 'D' ou um 'I' próximo a cada seta do diagrama para indicar se a etapa correspondente do raciocínio é dedutiva ou indutiva. Se for indutiva, indique a sua força. Se o argumento for complexo, coloque um 'D' ou um 'I' num quadro próximo ao diagrama para indicar que o argumento como um todo é dedutivo ou indutivo. Se ele for indutivo, indique a sua força.

1) Não existe o maior número primo. Mas de todos os números primos sempre podemos imaginar que certamente existe um maior. Logo, existem números primos maiores do que qualquer um que possamos imaginar. (Bertrand Russell, *Sobre a Natureza do Conhecimento*.)

2) Você disse que me encontraria no restaurante, e, como não foi, você é um mentiroso. Assim, eu não posso acreditar no que você diz. Então, talvez, eu não possa contar com você.

3) O argumento 2 não está correto por duas razões: 1) eu estava no restaurante mas você se esqueceu de mim, e assim uma das premissas é falsa e 2) seu raciocínio é inválido.

4) O quadrado de qualquer número inteiro n é divisível por n. Logo, o quadrado de qualquer número par é par, pois, pelo princípio já mencionado, ele deve ser divisível por aquele número par, e qualquer número divisível por um número par é par.

5) Quando Chirico tinha 40 anos, ele abandonou sua *metafísica*; ele retrocedeu aos estilos tradicionais, mas seu trabalho foi perdido. Aqui está uma prova certa de que não dá para "voltar à origem" para uma mente criativa cujo inconsciente está envolvido no dilema fundamental de existência. (Aniela Jaffe, *O Simbolismo nas Artes Visuais*.)

6) Como o hábito de comer em excesso contribui para várias doenças, ele pode contribuir para a destruição de sua saúde. Mas a sua saúde é a coisa mais importante para você. Assim, você não deveria, habitualmente, comer em excesso.

7) O boletim meteorológico prevê chuva, as nuvens estão escuras e o barômetro está caindo rapidamente são todos fenômenos fortemente correlacionados com chuva. Portanto, vai chover. Mas, se chover, teremos de cancelar o piquenique. Assim, parece que o piquenique será cancelado.

8) Não há maneira de se saber como a consciência atua após a morte; assim, só podemos concluir que não sabemos. Mas, nada mais temos além da consciência, pois sem a consciência nada experimentamos, nem mesmo a escuridão. Assim, não sobrevivemos à morte. Qualquer sistema moral baseado na certeza de recompensa ou punição na vida futura está, por conseguinte, fundamentalmente errado.

9) Todos os eleitores têm o direito de votar, a menos que eles sejam mentalmente inválidos ou foram condenados por um crime. Jim é um eleitor e além disso ele disse que não tem direito de votar. Ele não é mentalmente inválido. Assim, o que ele diz é falso ou ele foi condenado por um crime. Mas, também, ele me disse que nunca foi preso, e é impossível ser condenado por um crime se você nunca foi preso. Logo, pelo menos uma das afirmações dele é falsa.

10) Exatamente como sem calor não haveria frio, sem escuridão não haveria luz e sem pão não haveria prazer, assim, também, sem morte não haveria vida. Portanto, é claro que as nossas mortes são absolutamente necessárias para a vida do universo como um todo. Por conseguinte, a morte seria um final feliz para a qual vamos voluntariamente, em vez de lutarmos, egoísta e futilmente, contra a morte, com a nossa derradeira energia.

III. Forneça uma estimativa da probabilidade indutiva e o grau de relevância de cada um dos seguintes argumentos:

1) As rosas são vermelhas.
As violetas são azuis.
∴ A próxima rosa que eu vir não terá exatamente 47 pétalas.

2) Todos os meus amigos dizem que rir às gargalhadas, neste momento, faz bem a você.
∴ Rir às gargalhadas, neste momento, faz bem a você.

3) Todos os meus amigos dizem que rir às gargalhadas, neste momento, faz bem a você.
Meus amigos nunca estão errados.
∴ Rir às gargalhadas, neste momento, faz bem a você.

4) O Sr. Plotz tem uma casa de veraneio em New Hampshire.
Ele também tem uma casa em Washington, D.C.
∴ Ele possui, pelo menos, duas casas.

5) Uma vez eu olhei para um sapo e no mesmo dia quebrei meu dedo.
$\therefore$ Olhar um sapo dá azar.

6) Sue é intelectual.
Sara não é intelectual.
$\therefore$ Ninguém é e não é intelectual, ao mesmo tempo.

7) Albert veste roupas de aparência ridícula.
Albert sempre exagera nas roupas.
$\therefore$ Albert é estúpido.

8) Eu te amo e não te amo, ao mesmo tempo.
$\therefore$ Eu te amo.

9) $2 + 2 = 4$
$4 = 2^2$
$\therefore 2 + 2 = 2^2$

10) $2 + 3 = 5$
$3 + 7 = 10$
$\therefore 2 + 2 = 2^2$

IV. Avalie cada um dos seguintes argumentos em relação aos quatro critérios discutidos neste capítulo, respondendo às seguintes questões:

1) As premissas conhecidas são verdadeiras?
2) Qual é a probabilidade indutiva do argumento?
3) Qual é a relevância das premissas para a conclusão?
4) Se o argumento for indutivo, toda evidência estará suposta?

Com base nas respostas às questões (1) a (4), avalie o grau para o qual o argumento cumpre a finalidade de demonstrar a verdade de sua conclusão.

1) Alguns presidentes dos Estados Unidos foram atores de Hollywood.
Ronald Reagan foi presidente dos Estados Unidos.
∴ Ronald Reagan não foi ator de Hollywood.

2) Se Topeka está nos Estados Unidos, então ou ele está no continente (Estados Unidos), ou no Alasca ou no Havaí.
Topeka não está no Alasca.
Topeka não está no Havaí.
Topeka está nos Estados Unidos.
∴ Topeka está no continente dos Estados Unidos.

3) Os seres humanos são enormemente superiores, intelectual e culturalmente, aos atuais macacos.
∴ Os seres humanos e os atuais macacos não evoluíram de ancestrais comuns.

4) A União Soviética possui armas nucleares para muitos anos.
Os soviéticos nunca utilizaram armas nucleares em batalhas.
∴ Os soviéticos logo utilizarão suas armas nucleares em batalhas.

5) Dentre todos os planetas conhecidos, somente um, a Terra, é habitado.
São conhecidos pelo menos nove planetas.
∴ A relação de planetas habitados no universo todo não é alta.

6) Para qualquer número inteiro n, o número de inteiros positivos menores que n é finito.
Para qualquer inteiro n, o número de inteiros positivos maiores do que n é infinito.

Qualquer quantidade infinita é maior do que qualquer quantidade finita.
∴ Para qualquer inteiro n, existem mais inteiros positivos maiores do que n do que existem inteiros positivos menores do que n.

7) Sem exceções, todas as matérias observadas até agora têm massa.
Existem matérias em galáxias fora do alcance de nossa observação.
∴ As matérias nessas galáxias não observadas têm massa.

8) Nem sempre uma promessa é quebrada.
John F. Kennedy prometeu que os Estados Unidos colocariam um homem na Lua até 1970.
∴ Os Estados Unidos colocaram um homen na Lua até 1970.

9) Nenhum ser humano atingiu a idade de 200 anos.
∴ Ninguém que está vivo atingirá a idade de 200 anos.

10) Muitas pessoas acham fascinante a idéia de fantasmas e *poltergeistes*.
∴ Os fantasmas e os *poltergeistes* existem.

Respostas a alguns problemas suplementares

I. 5) Indutivo (forte).

10) Dedutivo. Como 'maioria' significa "mais do que a metade", se as premissas são verdadeiras, os dois grupos de pessoas mencionadas nas premissas não podem deixar de se sobrepor. Portanto, dadas as premissas, deve existir alguém (isto é, pelo menos uma pessoa) com dois braços e duas pernas.

15) Indutivo. As premissas não dizem que o espirro ocorre imediatamente; daí pode ser que o espirro tenha ocorrido antes da meia-noite de ontem, ainda que um espirro possa não ocorrer

logo depois de meia-noite. A força desta inferência é difícil de se avaliar, pois o próprio argumento não fornece diretriz para que possamos imaginar um intervalo de tempo no qual o espirro pode ocorrer. (Poderia alguém ter cheirado pimenta ontem e não espirrar até 300 anos depois? Isso é, pelo menos, logicamente possível.) Mas, se na prática não considerarmos tais possibilidades, então o raciocínio será razoavelmente forte.

20) A palavra 'exatamente' significa "nada mais do que"; daí o argumento é dedutivo.

25) Indutivo. Suponha, por exemplo, que existam somente duas pessoas no mundo, uma totalmente careca e outra com cabelo. Então a premissa seria verdadeira e a conclusão falsa, donde o argumento não é dedutivo. O argumento é, entretanto, razoavelmente forte, pois, sob circunstâncias concebíveis que tornam a premissa verdadeira, a conclusão seria também verdadeira.

30) Indutivo (moderadamente forte).

II. 5) ①[Quando Chirico tinha 40 anos, ele abandonou a sua *metafísica*; ele retrocedeu aos estilos tradicionais, mas seu trabalho foi perdido]. Aqui está uma prova certa de que ②[não dá para "voltar à origem" para uma mente criativa cujo inconsciente está envolvido no dilema fundamental de existência].

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \quad \text{I (Fraco)} \\ 2 \end{array}$$

Comentário: O exemplo de um só artista dificilmente é suficiente para estabelecer uma tese tão geral como o enunciado 2 com qualquer grau substancial de probabilidade. A premissa 1 poderia ser fragmentada em dois ou três enunciados separados ou ser mantida como uma só, tal como fizemos aqui; isso não tem importância.

10) Exatamente como ①[sem calor não haveria frio], ②[sem escuridão não haveria luz] e ③[sem pão não haveria prazer], assim também, ④[sem morte não haveria vida]. Portanto, é claro que ⑤[as nossas mortes são absolutamente necessárias para a vida do universo como um todo]. Por conseguinte, ⑥[a morte seria um final feliz para a qual vamos voluntariamente, em vez de lutarmos, egoísta e futilmente, contra a morte, com a nossa derradeira energia].

$$\begin{array}{c} \underline{1 + 2 + 3} \\ \downarrow \ \mathrm{I} \\ 4 \\ \downarrow \ \mathrm{I} \\ 5 \\ \downarrow \ \mathrm{I} \\ 6 \end{array}$$

Comentário: Todas as três etapas deste argumento carecem de previsão, de maneira que é difícil avaliar corretamente qualquer uma delas. A primeira não é forte, porque não estabelece um paralelo claro e significativo entre os pares de oposições mencionados nas premissas (enunciados 1, 2 e 3) e o par mencionado na conclusão (enunciado 4). (Essa conclusão pode muito bem ser verdadeira, mas não é extremamente provável, dadas as informações contidas nas premissas.) A segunda etapa também não é tão forte quanto a primeira. Em geral, deve ser verdadeiro que sem a morte não haveria a vida, mas isso implica que todas as coisas vivas devem morrer ou que, em particular, nós devemos morrer. Da mesma forma, a terceira inferência é fortemente incontestável. Parece que ela exige uma suposição adicional de que aceitaríamos, felizes e voluntariamente, o que é necessário para a vida do universo como um todo, mas a verdade dessa suposição está longe do óbvio. Com o acréscimo dessa suposição, a inferência final será dedutiva, embora baseada numa premissa dúbia. Considerado exatamente como está, ele não é dedutivo e a sua força indutiva não está claramente determinada.

III.

5) Baixa probabilidade indutiva e baixa relevância.

10) Como a conclusão é logicamente necessária, o argumento é dedutivo e a sua probabilidade indutiva é 1. Mas (ao contrário do problema anterior), as premissas não são diretamente relevantes para a conclusão.

IV.

5) As premissas são verdadeiras e relevantes para a conclusão. O argumento é moderadamente indutivo, pois os nove planetas conhecidos constituem uma pequena (e não fortuita) amostra na qual se baseia uma ampla generalização da conclusão. Não conhecemos nenhuma evidência contrária. Assim, o argumento fornece alguma evidência para a sua conclusão, embora essa evidência esteja longe de ser conclusiva.

10) A premissa é verdadeira, mas falta relevância e a probabilidade indutiva do argumento é baixa. Este é um argumento muito ruim.

MAKRON Books

Capítulo 3

O CÁLCULO PROPOSICIONAL

3.1 Formas de argumento

Este capítulo inicia o estudo da lógica formal. Lógica formal é o estudo de *formas de argumentos,* regras abstratas de raciocínio separadas em vários argumentos diferentes. O estudo de formas de argumentos facilita as generalizações amplas e esclarecedoras acerca de validade e tópicos relacionados. Neste capítulo enfocaremos algumas formas fundamentais de raciocínio de um ponto de vista *sintático* (gramatical). No próximo capítulo introduzimos os princípios semânticos que justificam as formas de raciocínio apresentadas aqui.

Começamos com três argumentos que têm a mesma forma:

1) Hoje é segunda-feira ou terça-feira.
Hoje não é segunda-feira.
∴ Hoje é terça-feira.

2) Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelângelo a pintou.
Não foi Rembrandt quem a pintou.
∴ Michelângelo pintou a Mona Lisa.

3) Ele é menor de 18 anos ou ele é jovem.
   Ele não é menor de 18 anos.
   ∴ Ele é jovem.

A forma comum a esses três argumentos é:

P ou Q.

Não é o caso que P.

∴ Q.

Esta regra é a forma de argumento conhecida como *silogismo disjuntivo*. As letras 'P' e 'Q' funcionam como representantes de sentenças declarativas. Chamamos tais letras de *letras sentenciais*. Cada argumento que tem essa forma pode ser obtido da forma substituindo as letras sentenciais por sentenças, cada ocorrência da mesma letra é substituída pela mesma sentença. Assim, por exemplo, o argumento 1 é obtido da forma substituindo 'P' pela sentença 'Hoje é segunda-feira' e 'Q' pela sentença 'Hoje é terça-feira'. O resultado

Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira.

Não é o caso que hoje é segunda-feira.

∴ Hoje é terça-feira.

é uma simples variante gramatical do argumento 1. Podemos ignorar tais variações gramaticais, embora em alguns contextos lógicos mais sofisticados e filosóficos elas precisem ser consideradas. Um argumento assim obtido, de uma forma de argumento, é chamado uma *instância* da forma.

Esse capítulo faz somente uma incursão modesta no domínio expansivo de formas de argumentos estudadas pelos lógicos. Preocupar-nos-emos somente com formas consistindo em letras sentenciais combinadas com as seguintes expressões: 'não é o caso que', 'e', 'ou', 'se ... então' e 'se e somente se'. Estas cinco expressões são chamadas *operadores lógicos* ou *conectivos lógicos*. Contudo, o início modesto deste capítulo proporciona trabalho suficiente; muitas formas são construídas a partir dessas expressões simples, e algumas delas estão entre as regras de raciocínio mais amplamente usadas.

O operador 'não é o caso que' prefixa uma sentença para formar uma nova sentença, a qual é chamada *negação* da primeira. Assim, a sentença 'Não é o caso que ele é fumante' é a negação da sentença 'Ele é fumante'. Existem muitas variações gramaticais da negação. Por exemplo, as sentenças 'Ele é não-fumante', 'Ele não é fumante' são modos de expressar a negação de 'Ele é fumante'. Existem partículas tais como: im-, a-, ir-, in-, i-, que, usadas como prefixos, para palavras, podem expressar negação, embora possam expressar outros sentidos. Assim, 'Ela ficou imóvel' é um outro modo de dizer 'Não é o caso que ela ficou móvel', e 'É impossível' afirma a mesma coisa que 'Não é o caso que é possível'. Mas 'É imoral' não significa 'Não é o caso que é moral'. 'Imoral' significa "errado" e 'moral' significa "correto", mas essas duas classificações não são exaustivas, pois, para algumas ações (por exemplo, enfiar o dedo no nariz), são amorais – isto é, nem correto nem errado, contudo, moralmente neutro. Essas ações não são morais, mas elas não são imorais; assim, 'não moral' não significa a mesma coisa que 'imoral'. A verdadeira negação não permite essa terceira possibilidade ou uma categoria neutra. Deve-se tomar cuidado ao se utilizar as partículas mencionadas como expressões de negação.

Os outros quatro operadores ligam dois enunciados para formar um enunciado composto. Esses operadores são chamados *operadores binários*.

Uma composição constituindo-se de duas sentenças ligadas por 'e' chama-se *conjunção*, e as suas duas sentenças componentes são chamadas *conjunctos*. A conjunção também pode ser expressa por palavras como 'mas', 'todavia', 'embora', 'contudo', 'no entanto', 'visto que', 'enquanto', 'além disso', as quais compartilham com 'e' a característica de ligar as duas sentenças — embora elas possam diferir na maneira de expressar outras nuanças dos enunciados anteriormente estabelecidos.

Um enunciado composto consistindo em dois enunciados ligados por 'ou' chama-se *disjunção* (daí o nome 'silogismo disjuntivo' para a forma de argumento discutido acima). Os dois enunciados são chamados *disjunctos*. Assim, a primeira premissa do argumento 1, 'Hoje é segunda-feira ou terça-feira' – que para propósitos lógicos é o mesmo que 'Ou hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira' – é uma disjunção cujos disjunctos são 'Hoje é segunda-feira' e 'Hoje é terça-feira'. Costuma-se omitir o 'ou' inicial do enunciado desde que isso não interfira no seu significado.

Os enunciados formados por 'se ... então' chamam-se *condicionais.* O enunciado subseqüente a 'se' é chamado *antecedente*; o enunciado restante, *conseqüente.* Na sentença 'Se você me tocar, eu gritarei', 'Você me tocar' é o antecedente e 'Eu gritarei' é o conseqüente. A palavra 'então' pode ser omitida. Os condicionais também podem ser expressos em ordem inversa; por exemplo, 'Eu gritarei se você me tocar'. Isso é uma simples variante gramatical da sentença anterior e seus antecedentes e conseqüentes são os mesmos.

Os enunciados formados por 'se e somente se' chamam-se *bicondicionais.* Não há nome especial para os seus componentes. Um bicondicional pode ser considerado como uma conjunção de dois condicionais. Para ver isso, consideremos a sentença

> T é um triângulo se e somente se T é um polígono de três lados.

Obviamente, ela é uma variante de

> T é um triângulo se T é um polígono de três lados e T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados.

Que, por sua vez, é uma variante de

> Se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo; e T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados.

Mas o que significa 'T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados'? 'Somente se' é um outro modo de expressar um condicional. Surpreendentemente, enunciados da forma '*P* somente se *Q*' significam "Se *P*, então *Q*". (Num enunciado com 'somente se', o que segue 'se' é o conseqüente e não o antecedente.) Assim, o enunciado 'Existe fogo somente se existir oxigênio' significa "Se existir fogo, então existe oxigênio"; e o enunciado 'T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados' significa "Se T é um triângulo, então T é um polígono de três lados". Portanto, o nosso bicondicional é um outro modo de dizer

> Se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo, e se T é um triângulo, então T é um polígono de três lados.

Como a ordem dos conjunctos não altera o significado, a sentença pode ser reescrita como:

> Se T é um triângulo, então T é um polígono de três lados; e se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo.

Este exemplo ilustra uma regra geral: os enunciados da forma '*P* se e somente *Q*' são equivalentes (isto é, verdadeiros sob as mesmas condições) a enunciados da forma 'Se *P*, então *Q*; e se *Q*, então *P*'; esta é a razão pela qual tais enunciados são chamados de bicondicionais.

Para facilitar o reconhecimento e a comparação de formas de argumento, cada operador lógico é representado por um símbolo especial:[1]

Operador lógico	*Símbolo*
Não é o caso que	~
E	&
Ou	$\vee$
Se ... então	$\rightarrow$
Se e somente se	$\leftrightarrow$

1. Alguns autores usam símbolos diferentes. Algumas alternativas mais comuns são:

Operador lógico	*Símbolo(s) alternativo(s)*
Não é o caso que	– ou $\neg$
E	. ou ^
Ou	nenhum
Se ... então	$\supset$
Se e somente se	$\equiv$

O silogismo disjuntivo é expresso como:

$$P \vee Q$$
$$\sim P$$
$$\therefore Q$$

Ou, é escrito horizontalmente, com as premissas separadas por vírgulas:

$$P \vee Q, \sim P \vdash Q$$

Usamos o símbolo '$\vdash$' em vez dos três pontos ($\therefore$). Este símbolo, chamado *traço de asserção*, afirma que a fórmula à sua direita pode ser deduzida utilizando como premissas somente as fórmulas que estão à sua esquerda.

A linguagem consistindo nesta notação simbólica juntamente com as regras a serem empregadas chama-se *cálculo proposicional.*[2] O termo significa, simplesmente, "o sistema para executar cálculos com proposições". Não há relação com o cálculo diferencial e integral da matemática.

Os "cálculos" que executaremos com este sistema são seqüências de inferências designadas para mostrar a validade de certas formas de argumento. Uma forma de argumento é *válida* se todas as suas instâncias são válidas; uma forma é *inválida* se pelo menos uma de suas instâncias é inválida. (Recordamos que uma instância de uma forma — isto é, um argumento particular — é válida somente quando é impossível que a sua conclusão seja falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras. Em caso contrário, ela é inválida.) O silogismo disjuntivo, por exemplo, é uma forma de argumento válida; todo argumento desta forma é tal que se as suas premissas forem verdadeiras, a sua conclusão deverá ser verdadeira. Naturalmente, nem todas as instâncias do silogismo disjuntivo são corretas; algumas (por exemplo, o argumento 2 no começo deste

2. Muitas vezes também chamada de *cálculo de enunciado* ou *cálculo sentencial*. Os símbolos '$\therefore$' e '$\vdash$' não pertencem a esta linguagem; eles são representações gráficas para expressar problemas nos quais o cálculo proposicional é utilizado.

capítulo) têm uma ou mais premissas falsas. A forma seguinte, ao contrário, é inválida:

Se P, então Q.
Q.
$\therefore P$.

Em símbolos:

$$P \rightarrow Q, Q \vdash P.$$

Esta forma chama-se *afirmando o conseqüente*, pois a sua segunda premissa afirma o conseqüente da primeira. Embora algumas instâncias desta forma sejam argumentos válidos, outras não o são. A seguir, temos uma instância que é válida — e, sem dúvida, correta:

4) Se abril precede maio, então abril precede maio e maio segue abril.
Abril precede maio e maio segue abril.
∴ Abril precede maio.

A conclusão deste argumento segue-se necessariamente de suas premissas, pois ambas são verdadeiras. Contudo, a seguir, temos um argumento da mesma forma que é inválido:

5) Se você está dançando na Lua, então você está vivo.
Você está vivo.
∴ Você está dançando na Lua.

As premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa; daí, o argumento é inválido.

Como qualquer forma que tem uma instância inválida é inválida, a invalidade do argumento 5 prova que *afirmando o conseqüente* é inválida. Embora a forma *afirmando o conseqüente* possa ter instâncias válidas (como o argumento 4), estas não são válidas *em conseqüência* de serem instâncias da forma *afirmando o conseqüente*. A razão para a validade do 4 é que a sua conclusão segue somente da validade da segunda premissa; a primeira premissa é supérflua e poderia ser omitida do argumento.

O cálculo proposicional fornece um modo de provar a validade para qualquer forma de argumento válida, composta somente de letras sentenciais e dos cinco operadores lógicos. O cálculo proposicional, entretanto, não fornece métodos para determinar o aceitamento das premissas, os graus de probabilidade indutiva ou relevância, ou a presença de evidências contrárias. Estes outros aspectos da avaliação do argumento devem ser tratados por outros meios.

3.2 Formalização

As técnicas de prova do cálculo proposicional constituem uma parte do estudo de sua *sintaxe*, isto é, de sua gramática. Inicialmente, examinamos a sintaxe do cálculo proposicional mostrando como as formas de várias sentenças podem ser expressas como fórmulas (isto é, como as sentenças podem ser *formalizadas*) e determinando as regras gramaticais (*regras de formação*) para o cálculo.

O processo de formalização converte uma sentença ou argumento em uma forma sentencial ou uma forma de argumento, uma estrutura composta de letras sentenciais e operadores lógicos. As letras sentenciais em si não têm significado; mas no contexto de um problema, elas podem ser interpretadas como expressando proposições ou enunciados definidos. Essa interpretação, contudo, não é essencial para a forma. Num outro problema, as mesmas letras sentenciais podem ser estabelecidas para enunciados diferentes. Quando falamos acerca do significado de uma letra sentencial, estamos falando do seu significado *sob uma particular interpretação especificada pelo problema*.

A formalização de sentenças simples é fácil. Se interpretamos a letra sentencial '*S*', por exemplo, como 'Hoje é segunda-feira', então a sentença 'Hoje não é segunda-feira' será formalizada como '~*S*'.

Mas, quando as sentenças contêm vários operadores lógicos, a formalização requer cuidados. Suponhamos, por exemplo, que queremos formalizar a sentença 'Hoje não é, ambos, segunda-feira e terça-feira'. Não podemos, simplesmente, escrever '$\sim S$ & T'. O operador '$\sim$', tal como o sinal negativo na álgebra, aplica-se à menor parte possível da fórmula. Na forma algébrica '$-1 + 3$', por exemplo, o sinal '$-$' aplica-se somente a '1'; assim, a fórmula toda denota o número 2. Analogamente, em '$\sim S$ & T', o sinal '$\sim$' se aplica somente a 'S'; assim, '$\sim S$ & T' significa "Hoje não é segunda-feira e hoje é terça-feira", que não é o que queríamos dizer. Podemos, entretanto, estender a parte da fórmula na qual o operador se aplica, acrescentando parênteses. No caso algébrico, isto nos fornece a fórmula '$-(1 + 3)$', que denota o número -4. No caso lógico, fornece '$\sim(S$ & $T)$', que significa "Não é o caso que hoje é (ambos) segunda-feira e terça-feira", que é exatamente o que queríamos dizer.

Suponha que queremos formalizar a sentença 'Ou hoje é segunda-feira, ou hoje é terça-feira e dia da eleição'. Essa sentença é uma disjunção cujo segundo disjuncto é a conjunção 'Hoje é terça-feira e dia da eleição'. Portanto, ela é formalizada como '$S \vee (T$ & $E)$'. Se esquecermos os parênteses e escrevermos '$S \vee T$ & E', o significado não fica claro, pois poderia ser lida como uma conjunção cujo primeiro conjuncto é a disjunção 'Hoje é segunda-feira ou terça-feira'; assim, ela expressaria a sentença 'Hoje é segunda-feira ou terça-feira, e hoje é dia de eleição', que é diferente do enunciado original.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.1 Interprete a letra sentencial 'C' como 'Está chovendo' e a letra 'N' como 'Está nevando', e expresse a forma de cada sentença na notação do cálculo proposicional:

a) Está chovendo.

b) Não está chovendo.

c) Está chovendo ou nevando.

d) Está chovendo e nevando.

e) Está chovendo, mas não está nevando.

f) Não é o caso que está chovendo e nevando.

g) Se não está chovendo, então está nevando.

h) Não é o caso que se está chovendo então está nevando.

i) Não é o caso que se está nevando então está chovendo.

j) Está chovendo se e somente se não está nevando.

k) Não é o caso que está chovendo ou nevando.

l) Se está nevando e chovendo, então está nevando.

m) Se não está chovendo, então não é o caso que está nevando e chovendo.

n) Ou está chovendo, ou está nevando e chovendo.

o) Ou está chovendo e nevando, ou está nevando mas não está chovendo.

Solução

a) C

b) $\sim C$

c) $C \vee N$

d) $C \,\&\, N$

e) $C \,\&\, \sim N$

f) $\sim(C \,\&\, N)$

g) $\sim C \rightarrow N$

h) $\sim(C \rightarrow N)$

i) $\sim(N \rightarrow C)$

j) $C \leftrightarrow \sim N$

k) $\sim(C \vee N)$ ou, $\sim C \,\&\, \sim N$; essas duas formalizações são equivalentes e ambas são corretas.

l) $(N \,\&\, C) \rightarrow N$

m) $\sim C \rightarrow \sim(N \,\&\, C)$

n) $C \vee (N \,\&\, C)$

o) $(C \,\&\, N) \vee (N \,\&\, \sim C)$

Observe que estas fórmulas são construídas a partir de três conjuntos de símbolos:

> *Letras sentenciais:* qualquer letra maiúscula é considerada uma letra sentencial; ocasionalmente, podemos acrescentar subscritos numéricos para obter outras letras sentenciais. Por exemplo, 'S_1', 'S_2', etc., são letras sentenciais diferentes de 'S'.
>
> *Operadores lógicos:* ~, &, ∨, →, ↔.
>
> *Parênteses:* (,).

Esses três conjuntos de símbolos constituem o *vocabulário* do cálculo proposicional. O vocabulário de uma linguagem formal é dividido em símbolos *lógicos* e *não-lógicos*. Os símbolos lógicos do cálculo proposicional são os operadores lógicos e parênteses; os símbolos não-lógicos são as letras sentenciais. Os símbolos não-lógicos têm interpretações diferentes em diferentes contextos; a letra sentencial 'P', por exemplo, pode representar 'Hoje é terça-feira' num problema e 'A princesa oferece um jantar' num outro. A função ou interpretação de símbolos lógicos sempre permanece fixa.

Uma *fórmula* do cálculo proposicional é uma seqüência qualquer de elementos do vocabulário. As respostas do problema 3.1 são todas fórmulas, mas também existem seqüências sem sentido, tal como '((&(P'. Para distinguir essas seqüências sem sentido de fórmulas significativas, introduzimos o conceito de fórmula gramatical ou *fórmula bem formada* (well-formed formula), wff, para abreviar. Este conceito é definido pelas seguintes regras, chamadas *regras de formação,* que constituem a gramática do cálculo proposicional. As regras empregam letras gregas (as quais não pertencem ao vocabulário do cálculo proposicional) para denotar fórmulas.

1) Qualquer letra sentencial é uma wff.

2) Se ϕ é uma wff, então $\sim\phi$ também o é.

3) Se ϕ e ψ são wffs, então $(\phi \,\&\, \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ também o são.

Qualquer coisa não estabelecida como uma wff por estas três regras não é uma wff. As wffs complexas são construídas a partir das simples, por aplicações repetidas das regras de formação.

Por exemplo, pela regra 1 vemos que '*P*' e '*Q*' são wffs. Segue, pela regra 3, que '(*P* & *Q*)' é uma wff. Daí, pela regra 2, '~(*P* & *Q*)' é uma wff.

Ou, ainda, pela regra 1, '*P*' é uma wff, donde segue-se, por 2, que '~*P*' é uma wff, e, novamente por 2, que '~ ~*P*' é uma wff. (Podemos ir acrescentando quantos sinais de negação quisermos; '~ ~ ~ ~ ~ ~ ~*P*' é uma wff!)

Note que a regra 3 estipula que cada vez que, introduzimos um operador binário, introduzimos também um correspondente par de parênteses. Assim, enquanto '(*P* & ~*Q*)' é uma wff, '*P* & ~*Q*' não é. Contudo, o par de parênteses que encerra a fórmula toda não é necessário para tornar claro o significado da fórmula. Adotaremos a convenção informal que o par externo de parênteses pode ser omitido, ainda que oficialmente a fórmula resultante não seja uma wff. Esta convenção foi usada, implicitamente, na solução do problema 3.1. Se tivéssemos de seguir as regras de formação em 3.1 (*c*), teríamos '(*C* ∨ N)' em vez de '*C* ∨ N'. A omissão do par externo de parênteses é a única concessão que permitiremos nas regras de formação.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.2 Utilize as regras de formação para determinar quais das seguintes fórmulas são wffs e quais não são. Justifique a sua resposta.

a) $\sim\sim\sim R$

b) $(\sim R)$

c) PQ

d) $P \rightarrow Q$

e) $(P \rightarrow Q)$

f) $\sim(P \rightarrow Q)$

g) $((P \,\&\, Q) \rightarrow R)$

h) $(P \,\&\, Q) \rightarrow R$

i) $\sim(\sim P \,\&\, \sim Q)$

j) $((P \,\&\, Q) \vee (R \,\&\, S))$

k) $((P) \rightarrow (Q))$

l) $(P \vee Q \vee R)$

m) $(\sim P \leftrightarrow (Q \& R))$

n) $\sim(P \leftrightarrow (Q \& R))$

o) $\sim\sim (P \& P)$

Solução

a) Pela regra 1, 'R' é uma wff; então, '$\sim\sim\sim R$' é uma wff, aplicando três vezes a regra 2.

b) Não é uma wff. Os parênteses são introduzidos somente para operadores binários (regra 3).

c) Não é uma wff. Duas ou mais letras sentenciais produzem uma wff somente quando combinadas com um operador binário (regra 3).

d) Oficialmente não é uma wff, pois faltam os parênteses externos. Mas, com a convenção feita, é uma wff.

e) Pela regra 1, 'P' e 'Q' são wffs; então, '$(P \rightarrow Q)$' é uma wff, pela regra 3. Essa é a versão oficial da fórmula (*d*).

f) É uma wff, pela aplicação da regra 2 à fórmula (*e*).

g) Pela regra 1, 'P', 'Q' e 'R' são wffs. Assim, '$(P \& Q)$' é uma wff, pela regra 3, e, daí, '$((P \& Q) \rightarrow R)$' é uma wff, por uma segunda aplicação da regra 3.

h) Oficialmente não é uma wff. Esse é o resultado de se omitir os parênteses externos da fórmula (*g*).

i) Pela regra 1, 'P' e 'Q' são wffs; daí, '$\sim P$' e '$\sim Q$' são wffs, pela regra 2. Então '$(\sim P \& \sim Q)$' é uma wff, por 3, e, '$\sim(\sim P \& \sim Q)$' é uma wff, por 2.

j) 'P', 'Q', 'R' e 'S' são wffs, pela regra 1.
'$(P \& Q)$' e '$(R \& S)$' são wffs, por 3, e
'$((P \& Q) \vee (R \& S))$' é uma wff, por 3.

k) Não é uma wff. Nenhuma regra permite colocar as letras sentenciais entre parênteses.

l) Não é uma wff. A regra 3 nos permite combinar somente duas letras sentenciais por vez.[3]

m) 'P', 'Q' e 'R' são wffs, por 1. Assim, '$\sim P$' é uma wff por 2, e '$(Q \,\&\, R)$' é uma wff, por 3. Daí, '$(\sim P \leftrightarrow (Q \,\&\, R))$' é uma wff, por 3.

n) Análogo ao item (*m*), 'P' e '$(Q \,\&\, R)$' são wffs. Portanto, '$(P \leftrightarrow (Q \,\&\, R))$' é uma wff, por 3. Assim, '$\sim(P \leftrightarrow (Q \,\&\, R))$' é uma wff, por 2.

o) 'P' é uma wff; daí, '$(P \,\&\, P)$' é uma wff, por 3. Daí, '$\sim\sim(P \,\&\, P)$' é uma wff, por duas aplicações da regra 2.

As letras sentenciais chamam-se *wffs atômicas*; todas as outras wffs são *moleculares* ou *compostas*. Uma *subwff* é uma parte de uma wff que é uma wff. Assim, 'P' é uma subwff de '$\sim(P \,\&\, Q)$', e '$\sim R$' é uma subwff de '$\sim\sim R$'. Cada wff é considerada uma subwff dela mesma.

Uma particular ocorrência de um operador numa wff junto com a parte da wff para a qual o operador se aplica chama-se *escopo* daquela ocorrência do operador. Dizemos que o escopo de uma ocorrência de um operador numa wff é a menor subwff que contém aquela ocorrência. Assim, na fórmula '$(\sim P \,\&\, (Q \rightarrow \sim R))$', o escopo da primeira ocorrência de '$\sim$' é '$\sim P$', o escopo da segunda ocorrência de '$\sim$' é '$\sim R$', o escopo de '$\rightarrow$' é '$(Q \rightarrow \sim R)$' e o escopo de '&' é a fórmula toda. Na fórmula '$\sim(P \,\&\, (Q \vee R))$', o escopo de '$\vee$' é '$(Q \vee R)$', o escopo de '&' é '$(P \,\&\, (Q \vee R))$' e o escopo de '$\sim$' é a fórmula toda.

Cada wff tem exatamente um operador cujo escopo é a fórmula toda. Este é chamado *operador principal* daquela wff. Uma wff cujo operador principal é '&' (sem considerar outros operadores que a wff contém) chama-se *conjunção*; uma wff cujo operador principal é '$\sim$' é uma *negação*; e assim sucessivamente.

3. Alguns sistemas lógicos admitem fórmulas como (*l*) para wffs; mas não faremos isso.

Tendo definido rigorosamente a nossa linguagem formal, podemos utilizá-la para expor as formas de argumentos.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.3 Formalize os seguintes argumentos num formato horizontal, usando as letras sentenciais indicadas. Utilize os indicadores de premissa e conclusão para distinguir as premissas das conclusões (ver Seção 1.2). De acordo com a nossa convenção informal, omita os parênteses externos:

a) Se Deus existe, então a vida tem significado. Deus existe. Portanto, a vida tem significado. (*D*, *V*)

b) Deus não existe. Pois, se Deus existisse, a vida teria significado. Mas a vida não tem significado. (*D*, *V*)

c) Se o avião não tivesse caído, nós teríamos feito contato pelo rádio. Não fizemos contato pelo rádio. Portanto, o avião caiu. (*C*, *R*)

d) Como hoje não é quinta-feira, deve ser sexta-feira. Hoje é quinta-feira ou sexta-feira. (*Q*, *S*)

e) Se hoje é quinta-feira, então amanhã será sexta-feira. Se amanhã for sexta-feira, então depois de amanhã será sábado. Conseqüentemente, se hoje for quinta-feira, então depois de amanhã será sábado. (Q, S_1, S_2)

f) Hoje é um fim de semana se e somente se hoje é sábado ou domingo. Portanto, hoje é um fim de semana, desde de que hoje é sábado. (*F*, *S*, *D*)

g) Hoje é um fim de semana se hoje é sábado ou domingo. Mas, hoje não é um fim de semana. Portanto, hoje não é sábado e hoje não é domingo. (*F*, *S*, *D*) *h*) Hoje é um fim de semana somente se hoje é sábado ou domingo. Hoje não é sábado. Hoje não é domingo. Portanto, hoje não é um fim de semana. (*F, S, D*)

i) A proposta de auxílio está no correio. Se os árbitros a receberem até sexta-feira, eles a analisarão. Portanto, eles a analisarão porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta-feira. (*C, S, A*)

j) Ela não está em casa ou não está atendendo ao telefone. Mas, se ela não está em casa, então ela foi seqüestrada. E se ela não está atendendo ao telefone, ela está correndo algum outro perigo. Portanto, ou ela foi seqüestrada ou ela está correndo um outro perigo. (*C, T, S, P*)

Solução

a) $D \rightarrow V, D \vdash V$

b) $D \rightarrow V, \sim V \vdash \sim D$

c) $\sim C \rightarrow R, \sim R \vdash C$

d) $Q \vee S, \sim Q \vdash S$

e) $Q \rightarrow S_1, S_1 \rightarrow S_2 \vdash Q \rightarrow S_2$

f) $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$

g) $(S \vee D) \rightarrow F, \sim F \vdash \sim S \mathbin{\&} \sim D$

h) $F \leftrightarrow (S \vee D), \sim S, \sim D \vdash \sim F$

i) $C, S \rightarrow A, C \rightarrow S \vdash A$

j) $\sim C \vee \sim T, \sim C \rightarrow S, \sim T \rightarrow P \vdash S \vee P$

3.3 Regras não-hipotéticas de inferência

O cálculo proposicional fornece um sistema de *regras de inferência* que são capazes de gerar todas as formas de argumento válidas expressáveis na linguagem do cálculo proposicional e somente as formas válidas. Como cada forma de argumento tem um número ilimitado de instâncias, cada vez que produzimos uma forma válida, nós estabelecemos a validade de um número imenso de argumentos específicos. Este capítulo explica o uso das regras de inferência; o próximo discute métodos para provar que as formas que elas geram são, de fato, válidas.

As regras de inferência geram as formas de argumento numa série de etapas simples e precisas de raciocínio, chamadas *derivação* ou *prova*. Cada etapa numa derivação é uma instância de uma das regras.

Existem dez regras básicas de inferência: duas — uma regra de introdução e uma regra de eliminação — para cada um dos cinco operadores lógicos. A regra de eliminação para um operador é usada para inferir a partir de premissas nas quais ele é o operador principal. A regra de introdução para um operador é usada para derivar conclusões nas quais ele é o operador principal. Outras abordagens do cálculo proposicional empregam regras diferentes das utilizadas por nós, mas, todos os conjuntos de regras utilizados são equivalentes, no sentido de que elas estabelecem a validade, exatamente, das mesmas formas de argumento.

Nesta seção, introduzimos oito das dez regras básicas de inferência. As outras duas, as regras do condicional e da introdução da negação, são diferentes das outras e serão discutidas na próxima seção.

Para ilustrar o conceito de uma derivação, usaremos a forma de argumento do problema 3.3 (*i*):

$$C, S \rightarrow A, C \rightarrow S \vdash A$$

Esta forma é válida porque ela pode ser derivável pelas regras de inferência. A derivação é a seguinte:

	1	C	P
	2	$S \rightarrow A$	P
	3	$C \rightarrow S$	P
$\therefore$	4	S	1, 3 MP
$\therefore$	5	A	2, 4 MP

Nós alistamos as três suposições nas três primeiras linhas da derivação, enumeramos cada linha e escrevemos 'P' para indicar que cada uma delas é uma premissa. Então, deduzimos a conclusão 'A' em duas etapas de raciocínio. A primeira etapa é das linhas 1 e 3 para a linha 4; a segunda é de 2 e 4 para 5. Os números à direita denotam as linhas das quais 4 e 5 são derivadas. As duas etapas têm a mesma forma; cada uma delas é uma instância da primeira das dez regras de inferência, *modus ponens*, que abreviaremos por 'MP':

> *Modus Ponens* (MP): De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o seu conseqüente.

Modus ponens é a regra de eliminação para condicional, isto é, a regra usada para inferir de premissas que contêm o operador condicional. A validade de *modus ponens* é óbvia; e como um argumento complexo consistindo em etapas válidas deve ser válido (ver Seção 2.3), esta derivação complexa prova a validade da nossa forma de argumento original.

Modus ponens pode ser aplicada a condicionais cujos antecedente e conseqüente são wffs compostas.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.4 Prove:

$$\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$$

Solução

1	$\sim P \to (Q \to R)$	P
2	$\sim P$	P
3	Q	P
4	$Q \to R$	1, 2 MP
5	R	3, 4 MP

(Aqui, omitimos os três pontos na frente das conclusões e em todos os problemas de derivação subseqüentes, pois a citação dos números de linhas à direita é suficiente para indicar que elas são conclusões.) A primeira premissa é um condicional cujo antecedente está negado e cujo conseqüente é um condicional. A linha 2 contém o seu antecedente. Assim, a derivação do seu conseqüente em 4 é uma instância do *modus ponens*, como é a passagem das linhas 3 e 4 para a linha 5.

Note que omitimos os parênteses externos da expressão '$(Q \to R)$' na etapa 4 obtida por *modus ponens* da premissa dada na linha 1. Isto é a convenção de se omitir os parênteses externos, assim escrevemos na linha 1 '$\sim P \to (Q \to R)$' em vez de '$(\sim P \to (Q \to R))$'. Empregaremos essa convenção em todo este capítulo.

A segunda regra de inferência é a regra de eliminação de negação, a qual abreviaremos '~E'. Esta regra nos permite inferir de premissas que são negações de negações.

Eliminação de negação (~E): De uma wff da forma $\sim\sim\phi$, podemos inferir ϕ.

(Usamos a letra grega 'ϕ' para indicar que esta regra é geral, aplicando-se a todas as wffs, quer sejam atômicas ou compostas.) A validade da eliminação de negação pode ser vista notando que a negação de um enunciado falso é verdadeira, e a negação de um enunciado verdadeiro é falsa. Assim, se começarmos com uma sentença verdadeira, duplamente negada (por exemplo, 'Não é o caso que Richard Nixon não foi presidente'), e omitirmos uma das negações ('Richard Nixon não foi presidente'), obteremos uma falsidade. Contudo, se removermos ambas ('Richard Nixon foi presidente'), o resultado será verdadeiro. Assim, qualquer inferência de um enunciado duplamente negado para o resultado de remover ambas as negações é válida. O problema seguinte emprega ~E:

PROBLEMA RESOLVIDO

3.5 Prove:

$$\sim P \rightarrow \sim\sim Q,\ \sim\sim\sim P \vdash Q$$

Solução

1	$\sim P \rightarrow \sim\sim Q$	P
2	$\sim\sim\sim P$	P
3	$\sim P$	2 ~E
4	$\sim\sim Q$	1, 3 MP
5	Q	4 ~E

A premissa na etapa 1 é um condicional com antecedente negado e conseqüente duplamente negado. Derivamos o seu antecedente na linha 3 aplicando ~E à linha 2 ('$\sim\sim\sim P$' é a dupla negação de '$\sim P$'). Isso nos permite deduzir o seu conseqüente na linha 4 por MP. Por uma outra etapa de ~E chega-se à conclusão.

É importante notar que ~E não nos permite inferir da linha 1 para '$\sim P \rightarrow Q$', pois a linha 1 é um condicional, não uma wff duplamente negada (isto é, uma wff da forma $\sim\sim\phi$). Precisamos separar '$\sim\sim Q$' da etapa 1 e, depois, aplicar ~E. A eliminação de negação nos permite remover dois sinais de negação somente se eles são os símbolos externos de uma wff e todo o restante da wff está no seu escopo.

As próximas duas regras, introdução de conjunção e eliminação de conjunção, são simples e obviamente válidas:

Introdução de conjunção (&I): De quaisquer wffs ϕ e ψ, podemos inferir a conjunção ϕ & ψ.

Eliminação de conjunção (&E): De uma conjunção podemos inferir qualquer um dos seus conjunctos.

Alguns autores chamam &I de *conjunção* e &E de *simplificação*. Ambas serão usadas nos seguintes problemas:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.6 Prove:

$$P \rightarrow (Q \,\&\, R), P \vdash P \,\&\, Q$$

Solução

1	$P \rightarrow (Q \,\&\, R)$	P
2	P	P
3	$Q \,\&\, R$	1, 2 MP
4	Q	3 &E
5	$P \,\&\, Q$	2, 4 &I

3.7 Prove:

$$P \,\&\, Q \vdash Q \,\&\, P$$

Solução

1	$P \& Q$	P
2	P	1&E
3	Q	1&E
4	$Q \& P$	2, 3 &I

3.8 Prove:

$(P \& Q) \rightarrow (R \& S), \sim\sim P, Q \vdash S$

Solução

1	$(P \& Q) \rightarrow (R \& S)$	P
2	$\sim\sim P$	P
3	Q	P
4	P	2 ~E
5	$P \& Q$	3, 4 &I
6	$R \& S$	1, 5 MP
7	S	6 &E

O fato de duas letras gregas diferentes, 'ϕ' e 'ψ', serem usadas no enunciado da regra &I não implica que as wffs designadas por essas letras precisem ser distintas. Assim, o uso de &I no problema seguinte, embora incomum, está perfeitamente correto:

PROBLEMA RESOLVIDO

3.9 Prove:

$P \vdash P \& P$

Solução

1	P	P
2	$P \& P$	1, 1 &I

Embora a conjunção de um enunciado com ele mesmo seja redundante (e por isso improvável na prática), ela é gramaticalmente bem formada e, assim, é permissível na teoria. Nesta prova, a linha 1 cumpre duplamente sua função, servindo como fonte de ambos os conjuntos da linha 2; assim, citamos duas vezes a linha 1.

A quinta regra, introdução de disjunção, é usada para provar conclusões disjuntivas:

> *Introdução de disjunção* (∨I): De uma wff ϕ, podemos inferir a disjunção de ϕ com qualquer wff. (ϕ pode ser o primeiro ou o segundo disjuncto desta disjunção.)

A introdução de disjunção é, às vezes, chamada de *adição*. Claramente, ela é válida. Se um dos disjunctos for verdadeiro, então a disjunção será verdadeira. Assim, se o enunciado 'Hoje é terça-feira' é verdadeiro, então a disjunção 'Hoje é terça-feira ou quarta-feira' é também verdadeira (assim como 'Hoje é quarta-feira ou terça feira', na qual 'Hoje é terça-feira' é o segundo disjuncto). Sem dúvida, se hoje é terça-feira, então a disjunção de 'Hoje é terça-feira' com qualquer enunciado (inclusive ele próprio) é verdadeira. A introdução da disjunção é ilustrada nas seguintes provas:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.10 Prove:

$$P \vdash (P \vee Q) \& (P \vee R)$$

Solução

1	P	P
2	$P \vee Q$	1 $\vee$I
3	$P \vee R$	1 $\vee$I
4	$(P \vee Q) \& (P \vee R)$	2, 3 &I

3.11 Prove:

$$P, \sim\sim(P \rightarrow Q) \vdash Q \sim \sim Q$$

Solução

1	P	P
2	$\sim\sim(P \rightarrow Q)$	P
3	$P \rightarrow Q$	2 ~E
4	Q	1, 3 MP
5	$Q \vee \sim Q$	4 $\vee$I

3.12 Prove:

$$P, \sim\sim(P \rightarrow Q) \vdash (R \& S) \vee Q$$

Solução

1	P	P
2	$\sim\sim(P \rightarrow Q)$	P
3	$P \rightarrow Q$	2 ~E
4	Q	1,3 MP
5	$(R \& S) \vee Q$	4 $\vee$I

3.13 Prove:

$P \vdash P \vee P$

Solução

1	P	P
2	$P \vee P$	1 $\vee$I

É instrutivo comparar o problema 3.13 com o problema 3.9. Note que na segunda etapa do problema 3.13 citamos a linha 1 somente uma vez, pois $\vee$I é uma regra que se aplica a uma única premissa.

A regra da eliminação da disjunção é um pouco mais complicada do que $\vee$I, mas, em relação à sua validade, ela é evidente.

Eliminação da disjunção ($\vee$E): De wffs da forma $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \chi$ e $\psi \rightarrow \chi$, podemos inferir a wff χ.[4]

Assim, das premissas de que hoje é sábado ou domingo ($S \vee D$), de que se hoje é sábado então é um fim de semana ($S \rightarrow F$), e de que se hoje é domingo então é um fim de semana ($D \rightarrow F$), segue-se que hoje é um fim de semana, isto é,

$S \vee D, S \rightarrow F, D \rightarrow F \vdash F.$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.14 Forneça uma prova para a forma acima.

4. Alguns textos tratam $\vee$E como uma regra hipotética (veja Seção 3.4). Outros usam a versão dada aqui, mas a chamam *dilema construtivo*.

Solução

1	$S \vee D$	P
2	$S \to F$	P
3	$D \to F$	P
4	F	1, 2, 3 $\vee$E

3.15 Prove:

$$(P \vee Q) \,\&\, (P \vee R), P \to S, Q \to S, P \to T, R \to T \vdash S \,\&\, T$$

Solução

1	$(P \vee Q) \,\&\, (P \vee R)$	P
2	$P \to S$	P
3	$Q \to S$	P
4	$P \to T$	P
5	$R \to T$	P
6	$P \vee Q$	1 &E
7	S	2, 3, 6 $\vee$E
8	$P \vee R$	1 &E
9	T	4, 5, 8 $\vee$E
10	$S \,\&\, T$	7, 9 &I

Comumente, o uso de letras gregas para variáveis no enunciado da regra $\vee$E indica somente que as wffs que elas denotam *podem* ser diferentes, não que elas tenham de ser diferentes. A seguinte prova contém uma aplicação de $\vee$E (linha 3) na qual as variáveis 'ϕ' e 'ψ' representam a mesma fórmula.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.16 Prove:

$$P \vee P, P \rightarrow (Q \,\&\, R) \vdash R$$

Solução

1	$P \vee P$	P
2	$P \rightarrow (Q \,\&\, R)$	P
3	$Q \,\&\, R$	1, 2, 2 $\vee$E
4	R	3 &E

Com relação ao enunciado da regra $\vee$E, ϕ é 'P', ψ é 'P' e χ é '$(Q \,\&\, R)$'. Assim, a fórmula $\phi \vee \psi$ é '$P \vee P$', e as fórmulas $\phi \rightarrow \chi$ e $\psi \rightarrow \chi$ são, ambas, '$P \rightarrow (Q \,\&\, R)$'. Como a linha 2 da prova tem função dupla, servindo ambas como $\phi \rightarrow \chi$ e como $\psi \rightarrow \chi$, nós a citamos duas vezes no lado direito da linha 3.

Na discussão do bicondicional (Seção 3.1), notamos que os enunciados da forma $\phi \leftrightarrow \psi$ são equivalentes aos enunciados da forma $(\phi \rightarrow \psi)$ & $(\psi \rightarrow \phi)$. Em vista dessa equivalência, as regras de introdução e eliminação para o bicondicional funcionam como &I e &E.

Introdução do bicondicional ($\leftrightarrow$I): De quaisquer wffs de formas $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\psi \rightarrow \phi)$, podemos inferir $\phi \leftrightarrow \psi$.

Eliminação do bicondicional ($\leftrightarrow$E): De quaisquer wffs da forma $\phi \leftrightarrow \psi$, podemos inferir $\phi \rightarrow \psi$ ou $\psi \rightarrow \phi$.

As provas seguintes ilustram a aplicação dessas regras:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.17 Prove:

$$F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$$

(Essa é a forma do problema 3.3 (*f*).)

Solução

1	$F \leftrightarrow (S \vee D)$	P
2	S	P
3	$(S \vee D) \rightarrow F$	1 $\leftrightarrow$E
4	$S \vee D$	2 $\vee$I
5	F	3, 4 MP

3.18 Prove:

$$P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$$

Solução

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$	P
3	$Q \rightarrow P$	1, 2 MP
4	$P \leftrightarrow Q$	1, 3 $\leftrightarrow$I

3.19 Prove:

$$P \leftrightarrow Q \vdash Q \leftrightarrow P$$

Solução

1	$P \leftrightarrow Q$	P
2	$P \rightarrow Q$	1 $\leftrightarrow$E
3	$Q \rightarrow P$	1 $\leftrightarrow$E
4	$Q \leftrightarrow P$	2, 3 $\leftrightarrow$I

A analogia entre as regras do bicondicional e da conjunção pode ser vista comparando-se o problema 3.15 com o problema 3.7.

3.4 Regras hipotéticas

Até aqui, introduzimos oito das dez regras de inferência para o cálculo proposicional. As duas restantes, as regras de introdução do condicional e de negação, diferem das outras, pois elas empregam *raciocínio hipotético*. Raciocínio hipotético é um raciocínio baseado em *hipóteses*, uma suposição feita "em consideração ao argumento" a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição. De modo diferente de outras suposições de uma prova, as hipóteses não são declaradas como verdadeiras. Elas são "artifícios lógicos", as quais acolhemos, temporariamente, como um tipo especial de estratégia de prova.

Suponhamos que um corredor machucou o seu tornozelo, uma semana antes de uma grande corrida, e que gostaríamos de persuadi-lo a parar de correr por alguns dias a fim de que o seu tornozelo sare. Nós afirmamos o condicional 'Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida'. Sua resposta: "Prove isso".

A maneira mais geral para provar um condicional é colocar o seu antecedente como hipótese (isto é, admiti-lo, em consideração ao argumento) e então mostrar que o seu conseqüente deve se seguir. Para fazer isso, podemos raciocinar do seguinte modo:

> Olha, suponhamos que você continue correndo. O seu tornozelo está muito inchado. Se ele está muito inchado e você continuar

correndo, ele não sarará em uma semana. Se ele não sarar em uma semana, então você não estará apto para disputar a corrida. Deste modo, você não estará apto para disputar a corrida.

Este é um argumento hipotético. A palavra 'suponhamos' é um indicador de hipótese, assinalando que o enunciado 'você continue correndo' é uma hipótese. Desta hipótese, a conclusão 'você não estará apto para disputar a corrida' é mostrada a seguir. O argumento emprega três suposições:

> Seu tornozelo está muito inchado.
> Se o seu tornozelo está muito inchado e você continuar correndo, então ele não irá sarar em uma semana.
> Se o seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não estará apto para disputar a corrida.

Estas são suposições que nós afirmamos ser verdadeiras — diferentemente da hipótese, que assumimos somente em consideração ao argumento e que nesse caso estamos, de fato, tentando convencer a pessoa a não continuar correndo. Uma vez admitida essas suposições, o argumento hipotético mostra que se a hipótese 'você continuar correndo' é verdadeira, então a conclusão do argumento hipotético, 'você não estará apto para disputar a corrida', deve também ser verdadeira. Assim se mostra que o condicional

> Se você continuar correndo agora, então você não estará apto para disputar a corrida.

é verdadeiro, é exatamente o que queríamos provar. Nós deduzimos este condicional colocando como hipótese o seu antecedente e mostrando que o seu conseqüente segue-se daquela hipótese, juntamente com as suposições.

Naturalmente, a correção do argumento depende da veracidade das suposições — e na vida real a veracidade delas pode ser duvidosa. Mas a novidade aqui é que a correção do argumento não depende da veracidade da hipótese. Dadas as suposições e quer o nosso amigo continue a correr, quer não, deve ainda ser verdadeiro que se ele continuar correndo, ele não estará apto a disputar a corrida. A hipótese é introduzida somente para mostrar que, dadas as suposições, ela implica a conclusão 'Você não estará apto para disputar a corrida'. Uma vez provado isso, a hipótese é descartada ou abandonada, e o condicional da conclusão é estabelecido somente com base nas suposições.

Veremos, agora, como isso pode ser formalizado. As três suposições podem ser expressas, respectivamente, como

$$I$$

$$(I \,\&\, C) \to \sim S$$

$$\sim S \to \sim A$$

e a conclusão é

$$C \to \sim A$$

Assim, a forma do argumento é:

$$I, (I \,\&\, C) \to \sim S, \sim S \to \sim A \vdash C \to \sim A$$

A nossa tarefa é mostrar que essa é uma forma válida, isto é, mostrar que se as suposições são verdadeiras, então o condicional da conclusão '$C \to \sim A$' deve ser verdadeiro. Faremos isso colocando como hipótese o seu antecedente 'C' (como fizemos acima na versão informal do argumento) e deduzindo o seu conseqüente '$\sim A$' dessas hipóteses. A derivação completa é a seguinte:

1	I	*P*
2	(I & *C*) → ~*S*	*P*
3	~*S* → ~*A*	*P*
4	│ *C*	*H*
5	│ I & *C*	1, 4 &I
6	│ ~*S*	2, 5 MP
7	│ ~*A*	3, 6 MP
8	C → ~*A*	4-7 PC

As premissas são, como sempre, relacionadas em primeiro lugar. A hipótese '*C*' é introduzida na linha 4 e designamos '*H*' para indicar que ela é uma hipótese. Do lado esquerdo iniciamos uma linha vertical para indicar a duração do argumento hipotético, isto é, a parte da prova na qual a hipótese é suposta. A hipótese chama-se *hipótese vigente* na para da prova à direita dessa linha. Usando as premissas, derivamos '$\sim A$' da hipótese na linha 7. A derivação hipotética (linhas de 4 a 7) mostra que, dadas as nossas premissas, '$\sim A$' segue-se de '*C*', tal que se '$\sim A$' é verdadeira, então '*C*' também é verdadeira. Ou seja, dadas as premissas, '$C \rightarrow \sim A$' é verdadeira. Assim, na linha 8 podemos descartar a hipótese (e indicamos isso terminando a linha vertical) e afirmar '$C \rightarrow \sim A$' com base somente nas premissas.

Nesta última etapa citamos as linhas 4 a 7 (derivação hipotética) e a regra PC, que significa "prova do condicional". PC é a nossa regra de introdução do condicional. O seu enunciado formal é:

> *Prova do condicional* (PC): Dada uma derivação de uma wff ψ a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir $\phi \rightarrow \psi$.

Em relação ao exemplo acima, ϕ é '*C*' e ψ é '$\sim A$'.

Para provar um condicional, a estratégia usual (a menos que algo mais simples seja evidente) é colocar como hipótese o seu antecedente e então derivar o seu conseqüente, por PC.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.20 Prove:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$$

Solução

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$Q \rightarrow R$	P
3	$\quad\vert\ P$	H
4	$\quad\vert\ Q$	1, 3 MP
5	$\quad\vert\ R$	2, 4 MP
6	$P \rightarrow R$	3-5 PC

A conclusão é o condicional '$P \rightarrow R$'. Colocamos como hipótese o seu antecedente na linha 3, da qual derivamos o seu conseqüente na linha 5. Isso nos permite, na linha 6, descartar a hipótese e inferir o condicional, por PC.

3.21 Prove:

$$P \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$$

Solução

1	P	P
2	$\quad\vert\ P \rightarrow Q$	H
3	$\quad\vert\ Q$	1, 2 MP
4	$(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$	2-3 PC

A conclusão é um condicional cujo antecedente é, ele mesmo, um condicional. Colocamos como hipótese o seu antecedente '$P \rightarrow Q$' na linha 2 e derivamos o seu conseqüente 'Q' na linha 3, que nos permite obter a própria conclusão por PC, na linha 4.

Ocasionalmente, as conclusões que são condicionais têm conseqüentes que são condicionais. Suas provas empregam a mesma estratégia: coloca-se como hipótese o antecedente e deriva-se o conseqüente da hipótese, por PC. Mas, se o conseqüente for um condicional, a fim de derivá-lo do antecedente, pode-se colocar como hipótese o seu antecedente para uma etapa auxiliar de PC. O resultado, como o problema seguinte mostra, é um encaixar de uma estratégia PC dentro de uma outra.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.22 Prove:

$$(P \,\&\, Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Solução

1	$(P \,\&\, Q) \rightarrow R$	P
2	$\quad\vert\ P$	H
3	$\quad\vert\quad\vert\ Q$	H
4	$\quad\vert\quad\vert\ P \,\&\, Q$	2, 3 &I
5	$\quad\vert\quad\vert\ R$	1, 4 MP
6	$\quad\vert\ Q \rightarrow R$	3-5 PC
7	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2-6 PC

Na linha 2 colocamos como hipótese o antecedente 'P' da conclusão. Para derivar '$Q \rightarrow R$' a partir da etapa 2, colocamos como hipótese o seu antecedente 'Q' na linha 3. Como essa é uma nova hipótese, ela requer uma nova linha vertical. Agora, são duas as hipóteses vigentes. Derivamos 'R' de 'Q' na linha 5. Isso nos permite descartar a hipótese 'Q' e inferir '$Q \rightarrow R$' por PC na linha 6. Mostramos que '$Q \rightarrow R$' segue da hipótese original 'P'. Esta hipótese original permanece vigente até ser descartada e ser inferida a conclusão desejada, por PC, na linha 7.

Como PC é a estratégia fundamental para a prova de condicionais e a aplicação de $\vee$E requer duas premissas que sejam condicionais, a regra PC é usada como condição prévia para $\vee$E. Uma estratégia simples quando há uma premissa disjuntiva é provar dois condicionais, cada um ligando um dos dois disjunctos com a conclusão desejada, por duas aplicações separadas de PC. A conclusão é, então, obtida por uma única passagem de $\vee$E.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.23 Prove:

$$P \vee Q \vdash Q \vee P$$

Solução

1	$P \vee Q$	P
2	$\quad\mid P$	H
3	$\quad\mid Q \vee P$	2 $\vee$I
4	$P \rightarrow (Q \vee P)$	2-3 PC
5	$\quad\mid Q$	H
6	$\quad\mid Q \vee P$	5 $\vee$I
7	$Q \rightarrow (Q \vee P)$	5-6 PC
8	$Q \vee P$	1, 4, 7 $\vee$E

Para obter a conclusão '$Q \vee P$', a partir da premissa disjuntiva '$P \vee Q$', necessitamos de dois condicionais '$P \rightarrow (Q \vee P)$' e '$Q \rightarrow (Q \vee P)$'. Esses condicionais são estabelecidos por provas separadas de PC (linhas 2 a 4 e 5 a 7, respectivamente). A conclusão segue-se por $\vee$E.

3.24 Prove:

$$(P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R) \vdash P \,\&\, (Q \vee R)$$

Solução

1	$(P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R)$	P
2	$\quad P \,\&\, Q$	H
3	$\quad P$	2 &E
4	$\quad Q$	2 &E
5	$\quad Q \vee R$	4 $\vee$I
6	$\quad P \,\&\, (Q \vee R)$	3, 5 &I
7	$(P \,\&\, Q) \rightarrow (P \,\&\, (Q \vee R))$	2-6 PC
8	$\quad P \,\&\, R$	H
9	$\quad P$	8 &E
10	$\quad$ R	8 &E
11	$\quad Q \vee R$	10 $\vee$I
12	$\quad P \,\&\, (Q \vee R)$	9, 11 &I
13	$(P \,\&\, R) \rightarrow (P \,\&\, (Q \vee R))$	8-12 PC
14	$P \,\&\, (Q \vee R)$	1, 7, 13 $\vee$E

Aqui, a estratégia é, essencialmente, a mesma do problema anterior. Necessitamos de dois condicionais nas linhas 7 e 13 para obtermos a conclusão da premissa disjuntiva. Esses condicionais são obtidos por provas separadas por PC (linhas 2 a 7 e 8 a 13).

Quando usamos o raciocínio hipotético, várias regras devem ser observadas:

1) *Cada hipótese introduz numa prova o início de uma nova linha vertical.* Essa linha continua até a hipótese ser descartada pela aplicação de PC ou de RAA (a última regra a ser introduzida).

2) *Nenhuma ocorrência de uma fórmula à direita de uma linha vertical pode ser citada em qualquer regra aplicada depois que terminar a linha vertical.* Isso é para garantir que a fórmula derivada da hipótese não seja indevidamente usada depois que a hipótese for descartada. Por exemplo, embora 'P' apareça na linha 3 no problema 3.24, devemos derivá-lo novamente na linha 9, para mostrar que ele segue da segunda hipótese, 'P & R'. Podemos não o usar (ou, de fato, quaisquer das linhas 2 a 6) para provar '$(P \& R) \rightarrow (P \& (Q \vee R))$', pois essas linhas representam um "artifício lógico" baseado na hipótese da linha 2, a qual não é mais vigente depois da linha 6.

3) *Se duas ou mais hipóteses são vigentes simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas são introduzidas.* Assim, no problema 3.22, a hipótese da linha 3 deve ser descartada antes da hipótese da linha 2.

4) *Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas.* As hipóteses que não são descartadas são premissas adicionais introduzidas ilicitamente na prova.

Como a regra PC, a décima e última regra de inferência, *redução ao absurdo* (RAA), (*reductio ad absurdum*) (também conhecida como *prova indireta*), usa o raciocínio hipotético. RAA é a regra de introdução da negação. Para provar uma conclusão negada por RAA, colocamos como hipótese a conclusão sem o sinal de negação e daí derivamos uma "contradição". Isso mostra que a hipótese é falsa: Donde segue-se que a conclusão negada é verdadeira.

Uma *contradição* é qualquer wff da forma ϕ & $\sim\phi$, isto é, uma conjunção cujo segundo conjuncto é a negação do primeiro. A wff ϕ pode ser atômica ou composta. A principal característica das contradições é que elas não são verdadeiras. Como a negação torna verdadeiro um enunciado falso e falso um enunciado verdadeiro, é impossível que os conjunctos de uma contradição sejam ambos verdadeiros. Mas, uma conjunção é verdadeira somente se ambos os seus conjunctos são verdadeiros. Daí, é impossível que uma contradição seja verdadeira.

Suponhamos que, dadas certas suposições, podemos derivar validamente uma contradição a partir de uma hipótese. Como a derivação é válida e, contudo, chega-se a uma conclusão falsa, pelo menos uma de suas suposições deve ser falsa, pois, se todas elas fossem verdadeiras, a conclusão (pela definição de validade) teria de ser verdadeira. Assim, se as suposições dadas são verdadeiras, a hipótese deve ser falsa. Isto é, a falsidade da hipótese segue validamente das suposições dadas. Isso é a base da RAA.

> *Redução ao absurdo* (RAA): Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir $\sim\phi$.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.25 Prove:

$$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$$

Solução

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$\sim Q$	P
3	$\mid P$	H
4	$\mid Q$	1, 3 MP
5	$\mid Q \,\&\, \sim Q$	2, 4 &I
6	$\sim P$	3-5 RAA

A conclusão é a fórmula negada '$\sim P$'; colocamos 'P' como hipótese, na linha 3. Na verdade, a linha 3 diz "suponhamos que 'P' seja verdadeira" (e mostraremos que disso segue-se uma contradição). Conseguimos obter uma contradição na linha 5. Isso nos permite aplicar RAA em 6, descartando a hipótese e inferindo a sua negação.

3.26 Prove:

$$P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim(P \,\&\, Q)$$

Solução

1	$P \leftrightarrow \sim Q$	P
2	$\mid P \,\&\, Q$	H
3	$\mid P$	2 &E
4	$\mid Q$	2 &E
5	$\mid P \rightarrow \sim Q$	1 $\leftrightarrow$E
6	$\mid \sim Q$	3, 5 MP
7	$\mid Q \,\&\, \sim Q$	4, 6 &I
8	$\sim(P \,\&\, Q)$	2-7 RAA

Como a conclusão está negada, colocamos como hipótese a fórmula sem a sua negação e operamos até obter uma contradição. A dedução da contradição na linha 7 nos permite descartar a hipótese e inferir a conclusão.

A regra RAA pode ser usada junto com ~E para derivar conclusões que não estão negadas. A estratégia, nesse caso, é colocar como hipótese a negação da conclusão e derivar uma contradição dessa hipótese. Então, deduzimos a dupla negação da conclusão por RAA e removemos as duas negações por ~E. Esta estratégia é muito potente; freqüentemente, se emprega em problemas nos quais falham as estratégias mais simples. Os dois próximos problemas são exemplos disso.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.27 Prove:

$$\sim P \rightarrow P \vdash P$$

Solução

1	$\sim P \rightarrow P$	P
2	$\quad\vert\ \sim P$	H
3	$\quad\vert\ P$	1, 2 MP
4	$\quad\vert\ P \,\&\, \sim P$	2, 3 & I
5	$\sim\sim P$	2-4 RAA
6	P	5 ~E

3.28 Prove:

$$\sim(\sim P \,\&\, \sim Q), \sim P \vdash Q$$

Solução

1	$\sim(\sim P \,\&\, \sim Q)$	P
2	$\sim P$	P
3	$\mid\ \sim Q$	H
4	$\mid\ \sim P \,\&\, \sim Q$	2, 3 &I
5	$\mid\ (\sim P \,\&\, \sim Q) \,\&\, \sim(\sim P \,\&\, \sim Q)$	1, 4 &I
6	$\sim\sim Q$	3-5 RAA
7	Q	6 ~E

Onde várias hipóteses são vigentes ao mesmo tempo, especialmente se algumas são por RAA e outras por PC, fica a leitura da prova mais fácil se os designamos por '(para RAA)' ou '(para PC)'. Faremos isso em alguns problemas abaixo.

3.29 Prove:

$$\sim P \vee \sim Q \vdash \sim(P \,\&\, Q)$$

Solução

1	$\sim P \vee \sim Q$	P
2	$\mid\ \sim P$	H (para PC)
3	$\mid\ \mid\ P \,\&\, Q$	H (para RAA)
4	$\mid\ \mid\ P$	3 &E
5	$\mid\ \mid\ P \,\&\, \sim P$	2, 4 &I
6	$\mid\ \sim(P \,\&\, Q)$	3-5 RAA

7	$\sim P \to \sim(P \,\&\, Q)$	2-6 PC
8	$\mid \sim Q$	H (para PC)
9	$\mid\ \mid P \,\&\, Q$	H (para RAA)
10	$\mid\ \mid Q$	9 &E
11	$\mid\ \mid Q \,\&\, \sim Q$	8, 10 &I
12	$\mid \sim(P \,\&\, Q)$	9-11 RAA
13	$\sim Q \to \sim(P \,\&\, Q)$	8-12 PC
14	$\sim(P \,\&\, Q)$	1, 7, 13 $\vee$E

Para usar a premissa disjuntiva, empregamos a regra $\vee$E. Mas, para isso, precisamos dos condicionais das linhas 7 e 13. Para obtê-los, colocamos como hipótese os seus antecedentes (linhas 2 e 8) e procuramos em cada caso provar o conseqüente, '$\sim(P \,\&\, Q)$', por PC. Esta fórmula é negada e é, portanto, mais eficiente prová-la por RAA. Assim, depois da introdução da hipótese por PC, também colocamos como hipótese '$P \,\&\, Q$' para RAA (linhas 3 e 9). Isso nos permite provar os condicionais que queremos e, daí, obter a conclusão por $\vee$E na linha 14.

RAA pode ser usada de muitos modos complexos e surpreendentes, como ilustram os seguintes problemas:

3.30 Prove:

$$P \to Q \vdash \sim P \vee Q$$

Solução

1	$P \to Q$	P
2	$\sim(\sim P \vee Q)$	H (para RAA)
3	P	H (para RAA)
4	Q	1, 3 MP
5	$\sim P \vee Q$	4 $\vee$I
6	$(\sim P \vee Q) \,\&\, \sim(\sim P \vee Q)$	2, 5 &I
7	$\sim P$	3-6 RAA
8	$\sim P \vee Q$	7 $\vee$I
9	$(\sim P \vee Q) \,\&\, \sim(\sim P \vee Q)$	2, 8 &I
10	$\sim\sim(\sim P \vee Q)$	2-9 RAA
11	$\sim P \vee Q$	10 ~E

Não há maneira direta de se derivar a conclusão '$\sim P \vee Q$' a partir da premissa '$P \to Q$'; contudo, tentaremos uma prova indireta, colocando como hipótese a negação da conclusão na linha 2 para obter uma contradição. Não é possível derivar uma contradição diretamente de 2, assim o nosso aproche deve ser mais engenhoso. Acrescentamos uma hipótese 'P', esperando obter uma contradição a partir dela. A estratégia é, então, descartar essa hipótese extra o mais rápido possível, por RAA, para obter a sua negação, que será usada para derivar uma contradição a partir de 2. Mostramos que 'P' leva a uma contradição em 6, que nos dá '$\sim P$' por RAA em 7. Uma outra contradição segue em 9, que nos permite descartar a hipótese original e obter '$\sim\sim(\sim P \vee Q)$' em 10. A conclusão segue por uma aplicação de ~E.

3.31 Prove:

$\sim(P \,\&\, Q) \vdash \sim P \vee \sim Q$

Solução

1	$\sim(P \,\&\, Q)$	P
2	$\sim(\sim P \vee \sim Q)$	H (para RAA)
3	$\sim P$	H (para RAA)
4	$\sim P \vee \sim Q$	3 $\vee$I
5	$(\sim P \vee \sim Q) \,\&\, \sim(\sim P \vee \sim Q)$	2, 4 &I
6	$\sim\sim P$	3-5 RAA
7	P	6 ~E
8	$\sim Q$	H (para RAA)
9	$\sim P \vee \sim Q$	8 $\vee$I
10	$(\sim P \vee \sim Q) \,\&\, \sim(\sim P \vee \sim Q)$	2, 9 &I
11	$\sim\sim Q$	8-10 RAA
12	Q	11 ~E
13	$P \,\&\, Q$	7, 12 &I
14	$(P \,\&\, Q) \,\&\, \sim(P \,\&\, Q)$	1, 13 &I
15	$\sim\sim(\sim P \vee \sim Q)$	2-14 RAA
16	$\sim P \vee \sim Q$	15 ~E

Este problema tem uma estratégia análoga à do problema 3.30. Começamos colocando como hipótese a negação da conclusão para RAA. Contudo, como não está evidente um modo direto para se obter uma contradição, acrescentamos uma hipótese extra '$\sim P$', procurando derivar uma contradição a partir dela e assim obter 'P', que será usada para derivar uma contradição a partir de 2. '$\sim P$' fornece uma contradição em 5, que nos permite inferir 'P' por RAA e ~E em 7. Obtemos 'Q' por uma estratégia similarmente engenhosa (linhas 8 a 12). A conjunção de 'P' e 'Q' na linha 13 nos permite derivar uma contradição da nossa hipótese original '$\sim(\sim P \vee \sim Q)$' na linha 14. Então, inferimos a sua negação por RAA em 15 e obtemos a conclusão na linha 16, por ~E.

Não há maneira correta de se construir uma prova. Se uma forma pode ser provada, ela pode ser provada por diferentes trocas de regras. Entretanto, as provas mais curtas, mais simples e mais fáceis são obtidas por uma estratégia baseada na estrutura da conclusão. As sugestões da tabela 3-1 são guias úteis para o planejamento de uma tal estratégia. Geralmente, elas levam a provas razoavelmente eficientes, embora alguns problemas requeiram, ainda, habilidade e engenhosidade.

Tabela 3.1 Estratégias para prova.

Se a condicional for um(a)	*Então faça:*
Fórmula atômica	Se nenhuma estratégia é imediata, coloca-se como hipótese a negação da conclusão para RAA. Se isso for bem-sucedido, então a conclusão pode ser obtida depois de RAA, por ~E.
Fórmula negada	Coloca-se como hipótese a conclusão, sem o símbolo da negação, para RAA. Se resultar uma contradição, a conclusão pode ser obtida por RAA.
Conjunção	Prove cada um dos conjunctos, separadamente, e então faça a conjunção deles com &I.
Disjunção	Se uma premissa disjuntiva está presente, tenta-se provar os condicionais necessários para obter a conclusão por ∨E. Caso contrário, coloca-se como hipótese a negação da conclusão e tenta-se RAA. Algumas vezes, uma conclusão disjuntiva pode ser provada diretamente, provando-se um de seus disjunctos e aplicando-se ∨I.
Condicional	Coloca-se como hipótese o seu antecedente e deriva-se o seu conseqüente por PC.
Bicondicional	Use PC, duas vezes, para provar os dois condicionais necessários para obter a conclusão por ↔I.

Se a estratégia da tabela 3-1 falhar, tente o seguinte. Se uma premissa for disjuntiva, tente provar os condicionais necessários para obter a conclusão por $\vee$E. Se não, acrescente uma hipótese extra cuja negação será útil como uma premissa adicional e descarte essa hipótese extra o mais rápido possível, por RAA, para obter a sua negação. Se isso também falhar, tente a mesma coisa com uma hipótese diferente. Eventualmente (se a forma que está sendo provada é, de fato, válida), deve-se encontrar uma hipótese ou série de hipóteses que sirva para a prova.

Se a conclusão for mais complexa, diversas subestratégias precisam ser desenvolvidas. Por exemplo, se a conclusão for '$\sim P \; \& \sim Q$', a estratégia é provar cada um dos seus conjunctos, separadamente, e então uni-los por &I. Como cada conjuncto é negado, a subestratégia para provar cada um deles é colocá-los como hipótese sem o sinal de negação e usar RAA. Assim, a prova consiste em duas derivações hipotéticas para RAA seguida de uma etapa de &I, como no seguinte problema:

PROBLEMA RESOLVIDO

3.32 Prove:

$$\sim(P \vee Q) \vdash \sim P \; \& \sim Q$$

Solução

1	$\sim(P \vee Q)$	P
2	$\quad P$	H (para RAA)
3	$\quad P \vee Q$	2 $\vee$I
4	$\quad (P \vee Q) \; \& \sim \sim(P \vee Q)$	1, 3 &I
5	$\sim P$	2-4 RAA
6	$\quad Q$	H (para RAA)
7	$\quad P \vee Q$	6 $\vee$ I
8	$\quad (P \vee Q) \; \& \sim(P \vee Q)$	1, 7 &I
9	$\sim Q$	6-8 RAA
10	$\sim P \; \& \sim Q$	5, 9 &I

As dez regras básicas de inferência apresentadas são *completas* no sentido de que elas geram uma prova para cada uma das muitas formas válidas expressas na linguagem da lógica proposicional. Elas também são *válidas* no sentido de que quando aplicadas elas geram somente formas válidas — nunca inválidas. Esses fatos são provados, mas as suas provas estão além do escopo deste livro.

Apesar da completude destas dez regras básicas, é útil ter outras; essas novas regras, assunto da próxima seção, não nos habilita a provar algo novo que não possa ser provado somente pelas dez regras básicas, mas elas nos ajudam a simplificar as provas.

3.5 Regras derivadas

Toda instância de um argumento válido é uma forma válida. Assim, na prova da forma '$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$' (problema 3.25), estabelecemos a validade de qualquer argumento que resulta daquela forma substituindo 'P' e 'Q' por sentenças (não importa quão complexas sejam essas sentenças). Por exemplo:

Se está garoando ou nevando, então o céu não está claro.

Não é o caso que o céu não está claro.

∴ Não é o caso que está garoando ou nevando.

(Neste caso 'P' representa 'Está chovendo ou nevando' e 'Q', 'O céu não está claro'.) Note que se formalizarmos este argumento a fim de revelar toda a sua estrutura, não obteremos a forma original, mas

$$(G \vee N) \rightarrow \sim C, \sim\sim C \vdash \sim(G \vee N)$$

a qual chama-se uma *instância substitutiva* da forma original. Uma instância substitutiva de uma wff ou uma forma de argumento é o resultado de substituir algumas, ou mesmo nenhuma, de suas letras sentenciais por wffs, sendo que cada ocorrência de uma mesma letra sentencial é substituída pela mesma wff. (Dissemos "nenhuma" em vez de "uma" para permitir que cada forma seja considerada como uma instância substitutiva dela mesma.) A segunda forma acima é uma instância substitutiva da primeira, da qual resulta pela substituição de cada ocorrência de 'P' por '$G \vee N$' e de cada ocorrência de 'Q' por '$\sim C$'. Ao provar a validade de uma forma, provamos a validade de todas as suas instâncias substitutivas. Assim, tendo provado o problema 3.25, se encontrarmos premissas '$(G \vee N) \rightarrow \sim C$' e '$\sim\sim C$' numa prova, saberemos que '$\sim(G \vee N)$' segue-se validamente (e analogamente para qualquer outra instância substitutiva do problema 3.25). Isso significa que podemos considerar o enunciado do problema 3.25 (e, na verdade, qualquer forma de argumento anteriormente provada) como uma regra de inferência válida. Para cada forma anteriormente provada, a *regra de inferência associada* é:

> De premissas de qualquer instância substitutiva da forma, podemos inferir, validamente, a conclusão da instância substitutiva.

As regras de inferência que são obtidas dessa maneira, de formas anteriormente provadas, chamam-se *regras derivadas*.[5] Muitas regras derivadas têm nomes. A regra associada ao problema 3.25 chama-se *modus tollens* (MT). Ela é usada na seguinte prova:

PROBLEMA RESOLVIDO

3.33 Prove:

$$(G \vee N) \rightarrow \sim C \vdash \sim\sim C \rightarrow \sim(G \vee N)$$

5. É uma questão de convenção tratar as regras como derivadas e como básicas. Alguns textos tratam todas as regras mencionadas neste capítulo como básicas e, assim, não há necessidade de fazer distinção entre as regras básicas e as derivadas. Outros textos consideram um número pequeno de regras básicas e, daí, derivam outras.

Solução

1	$(G \vee N) \to {\sim}C$	P
2	$\quad {\sim}{\sim}C$	H (para PC)
3	$\quad {\sim}(G \vee N)$	1, 2 MT
4	${\sim}{\sim}C \to {\sim}(G \vee N)$	2-3 PC

Embora as regras derivadas não nos permitam provar qualquer coisa não-provável pelas dez regras básicas dadas, elas dão flexibilidade na estratégia da prova e simplificam as provas. Comparando as provas da mesma forma de argumento (problemas 3.33 e 3.34), nota-se que a prova do problema 3.33 é mais simples do que a que não emprega regras derivadas.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.34 Prove a forma de argumento do problema 3.33 usando somente as dez regras básicas.

Solução

1	$(G \vee N) \to {\sim}C$	P
2	$\quad {\sim}{\sim}C$	H (para PC)
3	$\quad\quad G \vee N$	H (para RAA)
4	$\quad\quad {\sim}C$	1, 3 MP
5	$\quad\quad {\sim}C \,\&\, {\sim}{\sim}C$	2, 4 &I
6	$\quad {\sim}(G \vee N)$	3-5 RAA
7	${\sim}{\sim}C \to {\sim}(G \vee N)$	2-6 PC

Daqui em diante, numa prova pode-se usar qualquer fórmula anteriormente provada como uma regra derivada. Como justificativa, citamos as linhas usadas como premissas e o nome (se houver) da regra derivada; senão, o número do problema no qual a forma foi provada. Dentre as regras derivadas já provadas, uma das mais úteis é o *silogismo hipotético* (SH), a regra associada com a forma '$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \ \vdash P \rightarrow R$' (problema 3.20). Também são úteis as regras de *absorção* (ABS) e *dilema construtivo* (DC). Essas se associam, respectivamente, às formas '$P \rightarrow Q \ \vdash P \rightarrow (P \,\&\, Q)$' e '$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \ \vdash R \vee S$'. As provas de ABS e DC são deixadas para o leitor, como exercício.

Consideremos duas regras derivadas peculiares. A primeira, *repetição* (RE), permite repetir uma wff que ocorreu anteriormente numa prova, desde que essa wff não seja parte de uma derivação hipotética cuja hipótese foi descartada. A segunda, *contradição* (CONTRAD), permite inferir qualquer wff de uma wff e sua negação. As premissas desta forma são inconsistentes; daí, apesar de válida, a forma não tem instâncias corretas (ver Seção 2.4).

RE associa-se com a forma '$P \ \vdash P$'.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.35 Prove:

$P \vdash P$

Solução

1	P	P

A "prova" é a mais simples que você pode imaginar. A única etapa, linha 1, serve como premissa e conclusão. Não precisamos aplicar regras de inferência. Isso é perfeitamente legítimo, pois qualquer enunciado válido segue-se a partir dele.

RE deve ser usada com cautela. Como todas as regras de inferência, RE está sujeita a restrições pois ela não se aplica em wffs pertencentes a uma derivação hipotética cuja hipótese tenha sido descartada. O problema seguinte ilustra o uso correto de RE.

3.36 Prove:

$$P \vdash Q \rightarrow P$$

Solução

1	P	P
2	$\mid Q$	H (para PC)
3	$\mid P$	1 RE
4	$Q \rightarrow P$	2-3 PC

É interessante provar esta forma usando somente as dez regras básicas.

3.37 Prove a regra derivada CONTRAD, isto é:

$$P, \sim P \vdash Q$$

Solução

1	P	P
2	$\sim P$	P
3	$\mid \sim Q$	H (para RAA)
4	$\mid P \mathbin{\&} \sim P$	1, 2 &I
5	$\sim\sim Q$	3-4 RAA
6	Q	5 ~E

A prova está correta, mesmo que na realidade não inferimos a partir de '$\sim Q$', a contradição na linha 4.[6] A idéia é: como 'P & $\sim P$' segue validamente de 1 e 2, ele também segue validamente de 1 e 2 juntamente com a hipótese '$\sim Q$'. (Isso é o que se estabeleceu na linha 4.) Como esta contradição é necessariamente falsa, ou a hipótese ou uma de suas premissas devem ser falsas. Assim, uma vez que as premissas são verdadeiras, a hipótese deve ser falsa (é o que se conclui na linha 5). Naturalmente, sabemos que pelo menos uma das premissas deve ser falsa, pois as premissas são inconsistentes. Mas, isso só mostra que qualquer argumento desta forma não é correto. Contudo, esta prova mostra que tais argumentos são todos válidos.

CONTRAD é útil na prova de uma regra, o *silogismo disjuntivo* (SD), que discutimos na Seção 3.1.

3.38 Prove a regra derivada, silogismo disjuntivo, isto é:

$$P \vee Q, \sim P \vdash Q$$

Solução

1	$P \vee Q$	P
2	$\sim P$	P
3	$\quad\vert\ P$	H (para PC)
4	$\quad\vert\ Q$	2, 3 CONTRAD
5	$P \rightarrow Q$	3-4 PC
6	$\quad\vert\ Q$	H (para PC)
7	$Q \rightarrow Q$	6-6 PC
8	Q	1, 5, 7 $\vee$E

6. Esse tipo de inferência pode ser evitada por um critério de derivação mais estrito, utilizado na lógica relevante (ver Seção 2.4).

A estratégia é provar os condicionais necessários para obter a conclusão a partir da premissa disjuntiva '$P \vee Q$' por $\vee$E. Isso envolve duas provas condicionais (linhas 3 a 5 e 6 a 7). A primeira emprega CONTRAD. Na segunda, a linha 6 serve como a verdadeira derivação hipotética, da qual é hipótese e também é conclusão. É interessante provar SD usando apenas as dez regras básicas.

Os seguintes problemas ilustram casos típicos de algumas regras derivadas.

3.39 Prove:

$$\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$$

Solução

1	$\sim P \rightarrow Q$	P
2	$R \rightarrow$ S	P
3	$\sim P \vee R$	P
4	$\sim Q$	P
5	$Q \vee$ S	1, 2, 3 DC
6	S	4, 5 SD

3.40 Prove:

$$P \rightarrow Q, (P \,\&\, Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$$

Solução

1	$P \to Q$	P
2	$(P \& Q) \to R$	P
3	$\sim R$	P
4	$P \to (P \& Q)$	1 ABS
5	$P \to R$	2, 4 SH
6	$\sim P$	3, 5 MT

3.6 Teoremas

Algumas wffs são prováveis sem quaisquer suposições não-hipotéticas. São os *teoremas* ou *leis* do cálculo proposicional. (Os teoremas são wffs cujas instâncias são, todas, logicamente necessárias.) Para indicar que uma wff é teorema, escrevemos o símbolo '$\vdash$' diante da wff. Esse símbolo afirma que a fórmula à sua direita é provável usando somente as fórmulas à sua esquerda como premissas; logo, quando não há fórmulas à sua esquerda, ele afirma que a fórmula à sua direita é um teorema. A prova de um teorema se inicia com uma ou mais hipóteses que serão descartadas por PC ou RAA.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.41 Prove o teorema:

$$\vdash \sim(P \& \sim P)$$

Solução

1	$\quad P \,\&\, {\sim}P$	H
2	${\sim}(P \,\&\, {\sim}P)$	1-1 RAA

Essa é a prova mais simples por RAA. A linha 1 serve como uma derivação hipotética, da qual 'P & ${\sim}P$' é a hipótese e também é a conclusão.

3.42 Prove o teorema:

$$\vdash P \to (P \vee Q)$$

Solução

1	$\quad P$	H (para PC)
2	$\quad P \vee Q$	1 $\vee$I
3	$P \to (P \vee Q)$	1-2 PC

3.43 Prove o teorema:

$$\vdash P \to ((P \to Q) \to Q)$$

Solução

1	$\quad P$	H (para PC)
2	$\quad\quad P \to Q$	H (para PC)
3	$\quad\quad Q$	1, 2 MP
4	$\quad (P \to Q) \to Q$	2-3 PC
5	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	1-4 PC

3.44 Prove o teorema:

$$\vdash P \leftrightarrow \sim\sim P$$

Solução

1	P	H (para PC)
2	$\sim P$	H (para RAA)
3	$P \,\&\, \sim P$	1, 2 &I
4	$\sim\sim P$	2-3 RAA
5	$P \rightarrow \sim\sim P$	1-4 PC
6	$\sim\sim P$	H (para PC)
7	P	6 ~E
8	$\sim\sim P \rightarrow P$	6-7 PC
9	$P \leftrightarrow \sim\sim P$	5,8 ↔I

3.45 Prove o teorema:

$$\vdash P \vee \sim P$$

Solução

1	$\sim(P \vee \sim P)$	H (para RAA)
2	P	H (para RAA)
3	$P \vee \sim P$	2 ∨ I
4	$(P \vee \sim P) \,\&\, \sim(P \vee \sim P)$	1, 3 &I
5	$\sim P$	2-4 RAA
6	$P \vee \sim P$	5 ∨ I
7	$(P \vee \sim P) \,\&\, \sim(P \vee \sim P)$	1, 6 &I
8	$\sim\sim(P \vee \sim P)$	1-7 RAA
9	$P \vee \sim P$	8 ~E

Solução

Toda instância substitutiva de um teorema é provável sob qualquer conjunto de suposições. Portanto, podemos introduzir, legitimamente, um teorema ou quaisquer de suas instâncias substitutivas como uma premissa adicional em qualquer linha da prova. A regra derivada que nos permite fazer isso chama-se *introdução de teorema* (IT). Como as outras regras derivadas, o objetivo de IT é tornar as provas mais curtas e mais eficientes. Quando se usa IT, cita-se o número do problema no qual o teorema foi provado. IT é utilizado, três vezes, na seguinte prova:

PROBLEMA RESOLVIDO

3.46 Prove o teorema:

$$\vdash (P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$$

Solução

1	$P \vee \sim P$	IT 3.45
2	$P \rightarrow (P \vee Q)$	IT 3.42
3	$\sim P \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	IT 3.42
4	$(P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$	1, 2, 3 DC

Note que ao usar IT não citamos a linha anterior, pois a instância do teorema não é inferida de qualquer premissa dada. É interessante provar este teorema sem utilizar IT.

3.7 Equivalências

Uma equivâlencia é um bicondicional que é um teorema. Se $\phi \leftrightarrow \Psi$ é uma equivalência, então ϕ e Ψ são *interderiváveis*. Assim, 'P' e '$\sim\sim P$' são interderiváveis em vista da equivalência provada no problema 3.44. Para provar uma equivalência, seguimos a estratégia usual para provar bicondicionais: prova-se os condicionais necessários para $\leftrightarrow$I, em provas separadas.

PROBLEMA RESOLVIDO

3.47 Prove a equivalência:

$$\vdash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \,\&\, \sim Q)$$

Solução

1	$\quad\mid P \rightarrow Q$	H (para PC)
2	$\quad\mid\quad\mid P \,\&\, \sim Q$	H (para RAA)
3	$\quad\mid\quad\mid P$	2 &E
4	$\quad\mid\quad\mid Q$	1, 3 MP
5	$\quad\mid\quad\mid \sim Q$	2 &E
6	$\quad\mid\quad\mid Q \,\&\, \sim Q$	4, 5 &I
7	$\quad\mid \sim(P \,\&\, \sim Q)$	2-6 RAA
8	$(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \,\&\, \sim Q)$	1-7 PC

9	$\sim(P \,\&\, \sim Q)$	H (para PC)
10	P	H (para PC)
11	$\sim Q$	H (para RAA)
12	$P \,\&\, \sim Q$	10, 11 &I
13	$(P \,\&\, \sim Q) \,\&\, \sim(P \,\&\, \sim Q)$	9, 12 &I
14	$\sim\sim Q$	11-13 RAA
15	Q	14 ~E
16	$P \rightarrow Q$	10-15 PC
17	$\sim(P \,\&\, \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	9-16 PC
18	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \,\&\, \sim Q)$	8, 17 $\leftrightarrow$I

O primeiro condicional está nas linhas 1 a 8. Como o seu conseqüente '$\sim(P \,\&\, \sim Q)$' está negado, a primeira prova, por PC, emprega uma subestratégia de *redução*. O segundo condicional está provado nas linhas 9 a 17. O seu conseqüente '$P \rightarrow Q$' é um condicional; assim, a subestratégia é PC. Colocamos como hipótese o antecedente 'P' na linha 10 e empregamos *redução* (etapas 11 a 14) para obter '$\sim\sim Q$' e, daí, o conseqüente 'Q'. Isso nos permite derivar '$P \rightarrow Q$' por uma etapa de PC na linha 16 e '$\sim(P \,\&\, Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$' por uma etapa de PC na linha 17.

Muitas equivalências têm nomes, como as regras derivadas. A Tabela 3-2 exibe algumas das equivalências mais importantes, juntamente com os números de problemas resolvidos que apresentam algumas subestratégias de suas provas. As provas (exceto para DN, que foi provada no problema 3.44) são deixadas como exercícios para o leitor.

Tabela 3-2 Equivalências.

Equivalência	*Nome*	*Veja problema(s)*
$\sim(P \,\&\, Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	Lei de De Morgan (DM)	3.29, 3.31
$\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \,\&\, \sim Q)$	Lei de De Morgan (DM)	3.32
$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$	Comutação (COM)	3.23
$(P \,\&\, Q) \leftrightarrow (Q \,\&\, P)$	Comutação (COM)	3.7
$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$	Associação (ASSOC)	
$(P \,\&\, (Q \,\&\, R)) \vee ((P \,\&\, Q) \,\&\, R)$	Associação (ASSOC)	
$(P \,\&\, (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R))$	Distribuição (DIST)	3.24
$(P \vee (Q \,\&\, R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \,\&\, (P \vee R))$	Distribuição (DIST)	
$P \leftrightarrow \sim\sim P$	Dupla negação (DN)	3.44
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$	Transposição (TRANS)	
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$	Implicação material (IM)	3.30
$((P \,\&\, Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	Exportação (EXP)	3.22
$P \leftrightarrow (P \,\&\, P)$	Tautologia (TAUT)	3.9
$P \leftrightarrow (P \vee P)$	Tautologia (TAUT)	3.13

As equivalências representam uma regra especial nas provas. Se duas fórmulas são interderiváveis, uma delas pode ser substituída por *qualquer* ocorrência da outra, *numa fórmula toda ou numa subfórmula de uma wff*. Se uma fórmula é obtida de uma outra por substituição, então é possível derivá-la da outra usando somente as dez regras básicas de inferência.[7] Por exemplo, como DN estabelece a interderivabilidade de 'P' e '$\sim\sim P$', também garante que '$(Q \rightarrow \sim\sim P)$' é provável de '$(Q \rightarrow P)$'. Toda equivalência pode ser tratada como uma regra de inferência que nos permite substituir cada uma das wffs interderiváveis por uma outra, ou uma wff toda ou uma subwff de uma wff. Mais precisamente:

7. Isso pode ser provado, porém a prova está fora do escopo deste livro.

> Se ϕ e ψ são interderiváveis e ϕ é uma subwff da wff χ, então de χ podemos inferir o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de ϕ em χ por ψ.

Como justificativa, citamos a linha na qual χ ocorre e o nome da equivalência ou (se não tiver nome) o número do problema no qual essa equivalência foi provada.

A prova de uma equivalência também estabelece a derivabilidade de todas as instâncias substitutivas daquela equivalência. Assim, DN assegura não só a interderivabilidade de 'P' e '$\sim\sim P$', mas também de 'Q' e '$\sim\sim Q$', de 'S & $\sim R$' e '$\sim\sim$ (S & $\sim R$)', e assim por diante. Portanto, DN pode ser usada para justificar a substituição de qualquer membro de um desses pares pelo outro.

Tal como as outras regras derivadas, as equivalências não permitem provar nada além do que as dez regras básicas provam. A vantagem de usá-las é que as provas se simplificam. As dez regras básicas estão relacionadas na Tabela 3-3 e as regras derivadas mais importantes estão resumidas na Tabela 3-4.

Tabela 3-3 As dez regras básicas.

Redução ao absurdo (RAA)	Exibida uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ϕ, descarta-se a hipótese e infere-se $\sim \phi$.
Eliminação de negação ($\sim$E)	De uma wff da forma $\sim\sim\phi$, infere-se ϕ.
Prova condicional (PC)	Exibida uma derivação de uma wff ψ a partir de uma hipótese ϕ, descarta-se a hipótese e infere-se $\phi \rightarrow \psi$.
Modus ponens (MP)	De um condicional e seu antecedente, infere-se o seu conseqüente.
Introdução da conjunção (&I)	De quaisquer wffs ϕ e ψ, infere-se a conjunção ϕ & ψ.
Eliminação da conjunção (&E)	De uma conjunção infere-se cada um de seus conjunctos.

Tabela 3-3 As dez regras básicas (*continuação*).

Introdução da disjunção ($\vee$I)	De uma wff ϕ, infere-se a disjunção de ϕ com qualquer wff.
Eliminação da disjunção ($\vee$E)	De wffs de formas $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \chi$ e $\psi \rightarrow \chi$, infere-se χ.
Introdução do bicondicional ($\leftrightarrow$ I)	De wffs de formas $\phi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \phi$, infere-se $\phi \leftrightarrow \psi$.
Eliminação do bicondicional ($\leftrightarrow$ E)	De wff da forma $\phi \leftrightarrow \psi$, infere-se $\phi \rightarrow \psi$ ou $\psi \rightarrow \phi$.

Tabela 3-4 Regras derivadas importantes.

Modus tollens (MT)	De wffs de formas $\phi \rightarrow \psi$ e $\sim\psi$, infere-se $\sim\phi$.
Silogismo hipotético (SH)	De wffs de formas $\phi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \chi$, infere-se $\phi \rightarrow \chi$.
Absorção (ABS)	De uma wff da forma $\phi \rightarrow \psi$, infere-se $\phi \rightarrow (\phi \ \& \ \psi)$.
Dilema construtivo (DC)	De wffs de forma $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \chi$ e $\psi \rightarrow \omega$, infere-se $\chi \vee \omega$.
Repetição (RE)	De qualquer wff ϕ, infere-se ϕ.
Contradição (CONTRAD)	De wffs de formas ϕ e $\sim \phi$, infere-se qualquer wff.
Silogismo disjuntivo (SD)	De wffs de formas $\phi \vee \psi$ e $\sim \phi$, infere-se ψ.
Introdução de teorema (IT)	Qualquer instância substitutiva de um teorema pode ser introduzida em qualquer linha de uma prova.
Introdução de equivalência (A abreviação usada depende da equivalência utilizada; veja Tabela 3-2.)	Se ϕ e ψ são interderiváveis e ϕ é uma subwff de alguma wff χ, de χ infere-se o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de ϕ em χ por ψ.

Os problemas a seguir ilustram usos de equivalência e algumas de outras regras derivadas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

3.48 Prove:

$$P \vee Q, \sim Q \vdash P$$

Solução

1	$P \vee Q$	P
2	$\sim Q$	P
3	$Q \vee P$	1 COM
4	P	2, 3 SD

Note que esta forma não é SD, pois a segunda premissa é a negação do segundo disjuncto da primeira premissa. Para utilizar SD na prova, devemos, primeiramente, aplicar COM na linha 3.

3.49 Prove:

$$(P \vee Q) \;\&\; (P \vee R) \vdash \sim P \rightarrow (Q \;\&\; R)$$

Solução

1	$(P \vee Q) \;\&\; (P \vee R)$	P
2	$P \vee (Q \;\&\; R)$	1 DIST
3	$\sim\sim P \vee (Q \;\&\; R)$	2 DN
4	$\sim P \rightarrow (Q \;\&\; R)$	3 IM

3.50 Prove:

$$(\sim P \vee Q) \vee R,\ (Q \vee R) \rightarrow S\ \vdash P \rightarrow S$$

Solução

1	$(\sim P \vee Q) \vee R$	P
2	$(Q \vee R) \rightarrow S$	P
3	$\sim P \vee (Q \vee R)$	1 ASSOC
4	$P \rightarrow (Q \vee R)$	3 IM
5	$P \rightarrow S$	2, 4 SH

3.51 Prove:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow \sim R), R\ \vdash \sim P \vee \sim Q$$

Solução

1	$P \rightarrow (Q \rightarrow \sim R)$	P
2	R	P
3	$(P \,\&\, Q) \rightarrow \sim R$	1 EXP
4	$\sim\sim R$	2 DN
5	$\sim(P \,\&\, Q)$	3, 4 MT
6	$\sim P \vee \sim Q$	5 DM

3.52 Prove:

$$\sim P \rightarrow P \ \vdash P$$

Solução

1	$\sim P \rightarrow P$	P
2	$\sim\sim P \vee P$	1 IM
3	$P \vee P$	2 DN
4	P	3 TAUT

3.53 Prove:

$$\sim P \vee \sim Q,\ R \rightarrow P, \sim\sim Q \vee \sim S \ \vdash \sim S \vee \sim R$$

Solução

1	$\sim P \vee \sim Q$	P
2	$R \rightarrow P$	P
3	$\sim\sim Q \vee \sim S$	P
4	$\sim P \rightarrow \sim R$	2 TRANS
5	$\sim Q \rightarrow \sim S$	3 IM
6	$\sim R \vee \sim S$	1, 4, 5 DC
7	$\sim S \vee \sim R$	6 COM

Problemas suplementares

I. Formalize os seguintes enunciados, utilizando a interpretação indicada:

Letra sentencial	*Interpretação*
P	Paula vai.
Q	Quincas vai.
R	Richard vai.
S	Sara vai.

1) Paula não vai.
2) Paula vai, mas Quincas não.
3) Se Paula for, então Quincas também irá.
4) Paula irá, se Quincas for.
5) Paula irá, somente se Quincas for.
6) Paula irá, se e somente se Quincas for.
7) Nem Paula nem Quincas irão.
8) Paula e Quincas não irão.
9) Ou Paula vai ou Quincas não vai.
10) Paula não irá se Quincas for.
11) Ou Paula irá, ou Richard e Quincas irão.
12) Se Paula for, então Richard e Quincas irão.
13) Paula não irá, mas Richard e Quincas irão.
14) Se Richard for, então se Paula não for, Quincas irá.
15) Se nem Richard nem Quincas forem, então Paula irá.

16) Richard irá somente se Paula e Quincas não forem.
17) Richard e Quincas vão, apesar de Paula e Quincas não irem.
18) Se Richard ou Quincas for, então Paula irá e Sara não irá.
19) Richard e Quincas irão se e somente se Paula ou Sara for.
20) Se Sara for, então Richard ou Paula irão, e se Sara não for, então Paula e Quincas irão.

II. Determine quais das seguintes fórmulas são wffs e quais não são. Justifique sua resposta.

1) $\sim(\sim P)$
2) $P \sim Q$
3) $(P \rightarrow P)$
4) $P \rightarrow P$
5) $\sim\sim\sim(\sim P \,\&\, Q)$
6) $((P \rightarrow Q))$
7) $\sim(P \,\&\, Q) \,\&\, \sim R$
8) $(P \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \leftrightarrow P)))$
9) $(P \rightarrow (Q \rightarrow (R \,\&\, \mathrm{S})))$
10) $(P \rightarrow (Q \vee R \vee \mathrm{S}))$

III. Os seguintes argumentos são válidos. Formalize-os, usando a interpretação indicada, e prove a validade da forma resultante utilizando somente as dez regras de introdução e eliminação.

Letras sentenciais	*Interpretação*
C	A conclusão deste argumento é verdadeira.
P	As premissas deste argumento são verdadeiras.
S	Este argumento é correto.
V	Este argumento é válido.

1) Este argumento não é incorreto. Portanto, este argumento é correto.

2) Este argumento é correto. Portanto, este argumento não é incorreto.

3) Se este argumento for correto, então ele será válido. Ele não é válido; portanto, ele não é correto.

4) Se este argumento for correto, então ele não será inválido. Ele é correto. Daí, ele é válido.

5) Se este argumento for correto, então ele não será inválido. Assim, se ele for inválido, então ele será incorreto.

6) Este argumento é correto e válido. Portanto, ele é correto ou ele é inválido.

7) Este argumento não é, ambos, correto e inválido. Ele é correto. Portanto, ele é válido.

8) Este argumento é correto se e somente se todas as suas premissas forem verdadeiras. Mas nem todas as suas premissas são verdadeiras. Portanto, ele é incorreto.

9) Se a conclusão deste argumento for não-verdadeira, então este argumento é incorreto. Assim, não é o caso que este argumento é correto e sua conclusão não-verdadeira.

10) Se este argumento for incorreto e válido, então nem todas as suas premissas são verdadeiras. Todas as suas premissas são verdadeiras. Ele é válido. Portanto, ele é correto.

11) Se este argumento for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras, então ele será correto. Se ele for correto, então a sua conclusão será verdadeira. Todas as suas premissas são verdadeiras. Portanto, se este argumento for válido, então a sua conclusão será verdadeira.

12) Ou este argumento é incorreto ou, caso contrário, ele é válido e todas as suas premissas são verdadeiras. Donde, ele é incorreto ou válido.

13) Este argumento é correto se e somente se ele for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras. Nem todas as suas premissas são verdadeiras. Daí, ele é incorreto.

14) Este argumento é correto se e somente se ele for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras. Daí, se ele for válido, ele será correto se todas as suas premissas forem verdadeiras.

15) Este argumento será incorreto somente se nem todas as suas premissas forem verdadeiras ou se ele for inválido. Mas ele é válido e todas as suas premissas são verdadeiras. Portanto, ele é correto.

IV. Utilizando somente as dez regras de introdução e eliminação, prove as regras ABS, DC, SD e as equivalências relacionadas na Tabela 3-2 (exceto DN, que foi provada no problema 3.44).

V. Utilizando as regras básicas ou derivadas, prove a validade das seguintes formas de argumento:

1) $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$

2) $P \leftrightarrow Q \vdash {\sim} P \leftrightarrow {\sim} Q$

3) ${\sim} P \vee Q \vdash {\sim}(P \ \& \ {\sim} Q)$

4) $P \rightarrow Q, P \rightarrow {\sim} Q \vdash {\sim} P$

5) $(P \rightarrow Q) \ \& \ (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \ \& \ R)$

6) $P \rightarrow Q \vdash (P \ \& \ R) \rightarrow (Q \ \& \ R)$

7) $P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$

8) ${\sim} P \rightarrow P \vdash P$

9) ${\sim} P \vdash P \rightarrow Q$

10) $P \ \& \ Q \vdash P \rightarrow Q$

VI. Utilizando as regras básicas ou derivadas, prove os seguintes teoremas:

1) $\vdash P \rightarrow P$

2) $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow (P \ \& \ Q))$

3) $\vdash {\sim} (P \leftrightarrow {\sim} P)$

4) $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ({\sim} Q \rightarrow {\sim} P)$

5) $\vdash (P \ \& \ Q) \vee ({\sim}P \vee {\sim}Q)$

6) $\vdash Q \rightarrow (P \vee {\sim} P)$

7) $\vdash (P \ \& \ {\sim} P) \rightarrow Q$

8) $\vdash P \vee (P \rightarrow Q)$

9) $\vdash {\sim} P \vee (Q \rightarrow P)$

10) $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

VII. Utilizando as regras básicas ou derivadas, prove as seguintes equivalências:

1) $\vdash (P \,\&\, Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q)$

2) $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \,\&\, \sim Q)$

3) $\vdash (P \,\&\, Q) \leftrightarrow \sim(P \rightarrow \sim Q)$

4) $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow \sim P \rightarrow Q$

5) $\vdash P \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, \sim Q))$

6) $\vdash \sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \,\&\, \sim Q)$

7) $\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \vee (\sim P \,\&\, \sim Q))$

8) $\vdash \sim(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((\sim P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, \sim Q))$

9) $\vdash (P \,\&\, \sim P) \leftrightarrow (Q \,\&\, \sim Q)$

10) $\vdash (P \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee \sim Q)$

Respostas a alguns problemas suplementares

I.

5) $P \rightarrow Q$.

10) $Q \rightarrow \sim P$.

15) $\sim(R \vee Q) \rightarrow P$ ou equivalentemente, $(\sim R \,\&\, \sim Q) \rightarrow P$.

20) $(S \rightarrow (R \vee P)) \,\&\, (\sim S \rightarrow (P \,\&\, Q))$.

II.

5) 'P' e 'Q' são wffs pela regra 1 (Seção 3.2); assim, '$\sim P$' é uma wff pela regra 2. Daí, '$(\sim P \,\&\, Q)$' é uma wff pela regra 3; donde, por três aplicações da regra 2, segue-se que '$\sim\sim\sim(\sim P \,\&\, Q)$' é uma wff.

10) Não é uma wff. Nenhuma regra nos permite fazer a disjunção de enunciados, ao mesmo tempo.

III. 5) $S \rightarrow \sim\sim V \vdash \sim V \rightarrow \sim S$

1	$S \rightarrow \sim\sim V$	P
2	$\sim V$	H (para PC)
3	S	H (para RAA)
4	$\sim\sim V$	1, 3 MP
5	$\sim V \;\&\; \sim\sim V$	2, 4 &I
6	$\sim S$	3-5 RAA
7	$\sim V \rightarrow \sim S$	2-6 PC

10) $(\sim S \;\&\; V) \rightarrow \sim P, P, V \vdash S$

1	$(\sim S \;\&\; V) \rightarrow \sim P$	P
2	P	P
3	V	P
4	$\sim S$	H (para RAA)
5	$\sim S \;\&\; V$	3, 4 &I
6	$\sim P$	1, 5 MP
7	$P \;\&\; \sim P$	2, 6 &I
8	$\sim\sim S$	4-7 RAA
9	S	8~E

15) $\sim S \leftrightarrow (\sim P \vee \sim V), V \;\&\, P \vdash S$

1	$\sim S \leftrightarrow (\sim P \vee \sim V)$	P
2	$V \,\&\, P$	P
3	$\sim S$	H (para RAA)
4	$\sim S \rightarrow (\sim P \vee \sim S)$	1 $\leftrightarrow$ E
5	$\sim P \vee \sim V$	3, 4 MP
6	$\sim P$	H (para PC)
7	$V \,\&\, P$	H (para RAA)
8	P	7 &E
9	$P \,\&\, \sim P$	6, 8 &I
10	$\sim(V \,\&\, P)$	7-9 RAA
11	$\sim P \rightarrow \sim (V \,\&\, P)$	6-10 PC
12	$\sim V$	H (para PC)
13	$V \,\&\, P$	H (para RAA)
14	V	13 &E
15	$V \,\&\, \sim V$	12, 14 &I
16	$\sim(V \,\&\, P)$	13-15 RAA
17	$\sim V \rightarrow \sim (V \,\&\, P)$	12-16 PC
18	$\sim(V \,\&\, P)$	5, 11, 17 $\vee$E
19	$(V \,\&\, P) \,\&\, \sim (V \,\&\, P)$	2, 18 &I
20	$\sim\sim S$	3-19 RAA
21	S	20~E

V. 5) $(P \to Q) \& (P \to R) \vdash P \to (Q \& R)$

1	$(P \to Q) \& (P \to R)$	P
2	$(\sim P \vee Q) \& (P \to R)$	1 IM
3	$(\sim P \vee Q) \& (\sim P \vee R)$	2 IM
4	$\sim P \vee (Q \& R)$	3 DIST
5	$P \to (Q \& R)$	4 IM

10) $P \& Q \vdash P \to Q$

1	$P \& Q$	P
2	$\mid P$	H (para PC)
3	$\mid Q$	I &E
4	$P \to Q$	2-3 PC

VI. 5) $(P \& Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$

1	$(P \& Q) \vee \sim (P \& Q)$	IT 3.45
2	$(P \& Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$	1 DM

10) $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$

1	$P \vee \sim P$	IT 3.45
2	$(P \vee \sim P) \vee Q$	$1 \vee$ I
3	$P \vee (\sim P \vee Q)$	2 ASSOC
4	$\sim Q \vee (P \vee (\sim P \vee Q))$	$3 \vee$ I
5	$(\sim Q \vee P) \vee (\sim P \vee Q)$	4 ASSOC
6	$(\sim P \vee Q) \vee (\sim Q \vee P)$	5 COM
7	$(P \to Q) \vee (\sim Q \vee P)$	6 IM
8	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$	7 IM

VII. 5) $\vdash P \leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& \sim Q))$

1	$\quad P$	H (para PC)
2	$\quad Q \vee \sim Q$	IT 3.45
3	$\quad P \& (Q \vee \sim Q)$	1,2 &I
4	$\quad (P \& Q) \vee (P \& \sim Q)$	3 DIST
5	$P \rightarrow ((P \& Q) \vee (P \& \sim Q))$	1-4 PC
6	$\quad (P \& Q) \vee (P \& \sim Q)$	H (para PC)
7	$\quad P \& (Q \vee \sim Q)$	6 DIST
8	$\quad P$	7 &E
9	$((P \& Q) \vee (P \& \sim Q)) \rightarrow P$	6-8 PC
10	$P \leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& \sim P))$	5, 9 $\leftrightarrow$I

10) $\vdash (P \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee \sim Q)$

1	$\quad P \vee \sim P$	H (para PC)
2	$\quad Q \vee \sim Q$	IT 3.45
3	$(P \vee \sim P) \rightarrow (Q \vee \sim Q)$	1-2 CP
4	$\quad Q \vee \sim Q$	H (para PC)
5	$\quad P \vee \sim P$	IT 3.45
6	$(Q \vee \sim Q) \rightarrow (P \vee \sim P)$	4-5 PC
7	$(P \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee \sim Q)$	3, 6 $\leftrightarrow$ I

Capítulo 4

TABELAS-VERDADE E ÁRVORES DE REFUTAÇÃO

4.1 Semântica dos operadores lógicos

O Capítulo 3 tratou a lógica proposicional, do ponto de vista sintático, usando técnicas de inferência baseadas nas estruturas formais dos argumentos. Apesar de as formas de argumento geradas por essas técnicas serem válidas de acordo com a interpretação (*semântica*) pretendida dos operadores lógicos, somente caracterizamos esta interpretação de modo aproximado, igualando cada um dos operadores lógicos a um conjunto de expressões equivalentes. Além disso, pouco dissemos acerca da validade em si e não desenvolvemos um teste sistemático para a invalidade de formas de argumento. Neste capítulo apresentamos uma formulação rigorosa da interpretação pretendida dos operadores da lógica proposicional. A semântica de uma expressão é o seu significado; e o seu significado lógico é a sua contribuição para a verdade ou falsidade de sentenças nas quais ela ocorre. Caracterizando os significados (nesse sentido) dos operadores lógicos, desenvolvemos uma visão mais profunda da validade e testes sistemáticos para a invalidade de formas de argumento.

O conceito central na semântica da lógica proposicional é o *valor-verdade*. Os enunciados verdadeiros têm o valor-verdade *verdadeiro,* e os enunciados falsos têm o valor-verdade *falso*. Nenhum enunciado tem mais que um valor-verdade.

A semântica para a lógica proposicional se baseia no *princípio de bivalência*, a suposição que verdadeiro e falso são os únicos valores-verdade e que em toda situação possível cada enunciado assume um deles.

Freqüentemente, os filósofos argumentam que certos tipos de enunciados (por exemplo, enunciados vagos, enunciados a respeito do futuro, enunciados acerca de processos infinitos e enunciados paradoxais, tais como 'Esta sentença é falsa') podem ter valores-verdade além de verdadeiro e falso ou nenhum valor-verdade e, daí, não serem bivalentes. Esses argumentos não serão analisados aqui. A *lógica clássica*, apresentada neste livro, não se aplica a enunciados não-bivalentes ou a argumentos que contêm tais enunciados.

A razão para adotar a lógica clássica é a sua simplicidade. Lógicas não-clássicas têm sido desenvolvidas para várias classes de enunciados não-bivalentes, mas elas são mais complicadas do que a lógica clássica. Além disso, elas são menos compreensíveis do que a lógica clássica. Por essa razão, os estudantes devem dominar a lógica clássica antes de iniciar o estudo de lógicas não-clássicas.

A seguir, apresentaremos a semântica de cada operador lógico de acordo com o princípio da bivalência.

A função semântica da negação é simples. A negação de um enunciado ϕ é verdadeira se ϕ for falso e é falsa se ϕ for verdadeiro. (Isso é verdadeiro, sem levar em conta se ϕ é atômico ou composto.) Utilizando as abreviações 'V' para "verdadeiro" e 'F' para "falso", podemos resumir:

ϕ	$\sim\phi$
V	F
F	V

Esta tabela chama-se *tabela-verdade*. Abaixo de 'ϕ', são alistadas duas possibilidades: ou ϕ é verdadeiro ou ϕ é falso. Os registros abaixo de '$\sim\phi$'

indicam o valor-verdade de $\sim\phi$ em cada caso. Cada linha horizontal de valor-verdade representa uma classe de situação possível. A primeira linha representa a situação na qual ϕ é verdadeiro. Nessa situação, $\sim\phi$ é falso. A segunda linha representa a situação na qual ϕ é falso. Nessa, $\sim\phi$ é verdadeiro. Devido à bivalência, essas são as únicas possibilidades; daí, a tabela descreve completamente o valor-verdade de $\sim\phi$ em cada situação possível.

A tabela-verdade para conjunção é, igualmente, simples. Uma conjunção é verdadeira se ambos os seus conjunctos forem verdadeiros; senão, ela é falsa. Assim, a tabela é:

ϕ	ψ	$\phi \,\&\, \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Existem quatro situações possíveis a serem consideradas: ϕ e ψ são ambos verdadeiros, ϕ é verdadeiro e ψ é falso, ϕ é falso e ψ é verdadeiro e ϕ e ψ são falsos. Estas situações são representadas, respectivamente, pelas quatro linhas horizontais de valores-verdade. A coluna sob '$\phi \,\&\, \psi$' alista o valor-verdade de $\phi \,\&\, \psi$ em cada situação.

Uma disjunção é verdadeira se pelo menos um dos disjunctos for verdadeiro; senão, ela é falsa:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Há também uma acepção da disjunção na qual 'P ou Q' significa 'P ou Q, *mas não ambos*'. Essa é a acepção da disjunção *exclusiva*, ao contrário da *inclusiva*, que é caracterizada pela tabela-verdade acima. O operador '$\vee$' simboliza a acepção inclusiva de 'ou'. Se utilizarmos '$\vee$' para a acepção exclusiva de 'ou', escrevemos a sua tabela-verdade como:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Na lógica, a acepção inclusiva de 'ou' é a usual. Os enunciados da forma '$P \vee Q$', onde '$\vee$' é 'ou' exclusivo, podem ser formalizados como '$(P \vee Q)$ & $\sim(P$ & $Q)$', onde '$\vee$' é a disjunção inclusiva (ver problema 4.3). Assim, por exemplo, se o chefe diz: "Você pode viajar na quinta-feira ou na sexta-feira", significa evidentemente a disjunção exclusiva "Você pode viajar na quinta-feira ou na sexta-feira, *mas não em ambos*". A melhor formalização é, portanto, '$(Q \vee S)$ & $\sim(Q$ & $S)$'. Mas, o enunciado "Mary deve ser inteligente ou rica" não exclui a possibilidade de Mary ser inteligente e rica, e então será melhor formalizado como a disjunção inclusiva '$I \vee R$'. Trataremos as disjunções como inclusivas, a menos que se estabeleça o contrário.

De todos os operadores lógicos, o '$\rightarrow$' é o que tem significado mais variante, pois existem vários tipos de condicionais que fornecem diferentes relações entre o antecedente e o conseqüente. O condicional expresso pelo símbolo '$\rightarrow$' chama-se *condicional material*. '$P \rightarrow Q$' assegura que: não é o caso que P e não Q. Assim, se alguém diz "Se Paula for, então Quincas irá", está dizendo que não é o caso que Paula irá e Quincas não. Esse enunciado tem a forma '$\sim(P$ & $\sim Q)$', e, como ele tem o mesmo significado que '$P \rightarrow Q$', ele é verdadeiro precisamente sob as mesmas circunstâncias. Portanto, podemos obter a tabela-verdade para '$P \rightarrow Q$' construindo a tabela-verdade para '$\sim(P$ & $\sim Q)$'. Podemos fazer isso utilizando as tabelas para '$\sim$' e '&'.

Para construir uma tabela-verdade para uma wff complexa, determinam-se os valores-verdade para as suas subwffs e então utilizam-se as tabelas-verdade para os operadores lógicos, a fim de calcular os valores para subwffs cada vez maiores, até se obter os valores para a fórmula toda. As menores subwffs de '~(*P* & ~*Q*)' são '*P*' e '*Q*' e, assim, alistam-se as colunas para as letras sentenciais '*P*' e '*Q*' sob as ocorrências dessas letras sentenciais na fórmula:

P	*Q*	~(*P* &	~ *Q*)
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	F

A seguir, a menor subwff da fórmula é '~*Q*'. Os valores-verdade para '~*Q*' são os opostos dos valores para '*Q*'; são escritos abaixo de '~' em '~*Q*':

P	*Q*	~ (*P*	&	~	*Q*)
V	V	V		F	V
V	F	V		V	F
F	V	F		F	V
F	F	F		V	F

Na realidade, pode-se evitar algum trabalho omitindo a primeira etapa no caso de '~*Q*'. Isto é, poderíamos ter escrito o oposto de '*Q*' diretamente na coluna sob o '~' de '~*Q*' sem ter escrito a coluna para '*Q*'. Nos problemas seguintes, muitas vezes, omitiremos a primeira etapa para negar as letras sentenciais.

A fórmula '*P* & ~*Q*', sendo uma conjunção, é verdadeira somente se ambos os conjunctos forem verdadeiros. O único caso no qual isso ocorre é a segunda linha da tabela. Daí, esta fórmula é verdadeira na segunda linha e falsa nas demais, um fato que indicamos escrevendo esses valores-verdade sob '&':

P	Q	~ (P	&	~	Q)
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F

Finalmente, como '~(P & ~Q)' é uma negação de 'P & ~Q', os valores-verdade em cada uma das quatro situações são os opostos daqueles relacionados sob '&'. Escrevemos esses valores-verdade sob a negação inicial e os circundamos para indicar que eles são valores-verdade para a fórmula toda:

P	Q	~	(P	&	~	Q)
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F

Então, a tabela-verdade para o condicional material é:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O condicional material é falso se o seu antecedente for verdadeiro e o seu conseqüente for falso; caso contrário, ele é verdadeiro. Portanto, ele é verdadeiro se o seu antecedente for falso. Também, ele é verdadeiro quando o seu conseqüente for verdadeiro. Em conseqüência, muitas vezes os condicionais materiais têm natureza paradoxal. A sentença 'Se você está morto, então você está vivo', por exemplo, é verdadeira, admitindo 'você' para referir a você e lendo 'se ... então' como no condicional material. Como, de fato, você está vivo (senão você não estaria lendo isso), o antecedente é falso e o conseqüente é verdadeiro, o que torna verdadeiro o condicional. Analogamente, as sentenças 'Se você está vivo, então você está lendo este livro' (o antecedente e o conseqüente são ambos verdadeiros) e 'Se você está morto, então você pode correr na velocidade da luz' (o antecedente e o conseqüente são ambos falsos) são, paradoxalmente, verdadeiras, quando 'se ... então' é entendida no sentido material. Tais particularidades revelam a disparidade entre os condicionais materiais e os condicionais como, usualmente, entendemos.

O condicional material é o tipo mais simples de condicional, e é o único cujo significado pode ser representado numa tabela-verdade. Além disso, a experiência tem mostrado que ele é mais adequado para propósitos lógicos e matemáticos. O condicional material é o único tipo de condicional considerado neste capítulo, embora no final da Seção 10.7 sejam considerados outros tipos.

O enunciado bicondicional '$P \leftrightarrow Q$' significa o mesmo que '$(P \rightarrow Q)$ & $(Q \rightarrow P)$', onde '$\rightarrow$' é o condicional material. Conseqüentemente, '$\leftrightarrow$' chama-se *bicondicional material*. (Os significados de outros tipos de bicondicionais são relacionados aos correspondentes condicionais, mas aqui não discutiremos outros tipos de bicondicionais.) A tabela-verdade para '$P \leftrightarrow Q$' pode ser obtida construindo-se uma tabela-verdade para '$(P \rightarrow Q)$ & $(Q \rightarrow P)$'. Começamos escrevendo as colunas abaixo das letras 'P' e 'Q':

P	Q	$(P \rightarrow$	$Q)$	&	$(Q \rightarrow$	$P)$
V	V	V	V		V	V
V	F	V	F		F	V
F	V	F	V		V	F
F	F	F	F		F	F

Os valores-verdade de '$P \rightarrow Q$' e '$Q \rightarrow P$' são calculados a partir da tabela-verdade para o condicional material. Um condicional material é falso quando o seu antecedente é verdadeiro e o seu conseqüente, falso; caso contrário, ele é verdadeiro. Portanto, '$P \rightarrow Q$' é falso na segunda linha e '$Q \rightarrow P$' é falso na terceira, e ambos são verdadeiros em todas as outras linhas. Registramos isso escrevendo os valores-verdade debaixo das respectivas ocorrências de '$\rightarrow$':

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	&	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
V	V	V	V	V		V	V	V
V	F	V	F	F		F	V	V
F	V	F	V	V		V	F	F
F	F	F	V	F		F	V	F

Note que os valores-verdade para '$Q \rightarrow P$' não são os mesmos para '$P \rightarrow Q$'. Para completar a tabela, calculamos os valores-verdade para a conjunção utilizando os valores para '$P \rightarrow Q$' e '$Q \rightarrow P$'. Esses valores são escritos sob '&' e circundados:

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	&	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	F

Os valores circundados representam a tabela-verdade para o bicondicional. O bicondicional é verdadeiro se os seus dois componentes tiverem o mesmo valor-verdade e falso se os seus valores-verdade forem diferentes:

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4.2 Tabelas-verdade para wffs

Na Seção 4.1 exemplificou-se a construção de tabelas-verdade para wffs complexas. Nesta seção discutiremos esse procedimento mais sistematicamente. O número de linhas numa tabela-verdade é determinado pelo número de letras sentenciais na fórmula ou fórmulas a serem consideradas. Se houver uma só letra sentencial, existirão duas possibilidades: a sentença pode ser verdadeira ou falsa. Assim, a tabela terá duas linhas. Se existirem duas letras sentenciais, teremos quatro combinações possíveis de verdade e falsidade, e a tabela-verdade terá quatro linhas. Em geral, se o número de letras sentenciais for n, o número de linhas será 2^n. Assim, se uma fórmula contém três letras sentenciais, a sua tabela-verdade terá $2^3 = 8$ linhas, e assim por diante.

Para compor uma tabela-verdade para uma fórmula, escreve-se a fórmula do lado direito da tabela e relaciona-se as letras sentenciais que ela contém, em ordem alfabética, à esquerda. Sendo n o número de letras sentenciais, escreve-se abaixo da letra, à extrema direita, uma coluna de 2^n linhas, alternando Vs e Fs, começando com V. A seguir, sob a primeira letra à esquerda, escreve-se uma outra coluna de 2^n Vs e Fs, começando com V, mas alternando cada duas linhas. Repete-se esse procedimento movendo-se para a esquerda e dobrando cada vez os intervalos alternativos, até que sob cada letra sentencial tenha uma coluna de Vs e Fs. Se, por exemplo, a fórmula contém três letras sentenciais, P, Q e R, o lado esquerdo da tabela é o seguinte:

P	Q	R	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Finalmente, utilizando as tabelas-verdade para os operadores lógicos, calcula-se os valores-verdade da fórmula determinando-se primeiramente os valores para as suas menores subwffs, obtendo-se, então, os valores para as subwffs cada vez maiores, até que os valores de toda a fórmula estejam estabelecidos. *A coluna para qualquer wff ou subwff é sempre escrita abaixo de seu operador principal.* Circunda-se a coluna abaixo do operador principal de toda a fórmula para mostrar que essa é a coluna dos valores-verdade da fórmula.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

4.1 Construa a tabela-verdade para a fórmula

$\sim\sim P$

Solução

P	$\sim$	$\sim$	P
V	V	F	V
F	F	V	F

A tabela tem duas linhas, pois só há uma letra sentencial. Escrevemos a coluna para a letra sentencial 'P' debaixo da ocorrência de 'P' na fórmula. O sinal de negação imediatamente à esquerda de 'P' inverte os valores nesta coluna, e o sinal de negação à sua esquerda (que é o operador principal) inverte-os novamente, de modo que '$\sim\sim P$' tem o mesmo valor-verdade de 'P' em cada situação possível.

4.2 Construa a tabela-verdade para a fórmula

$$\sim P \vee Q$$

Solução

P	Q	$\sim P$	$\vee$	Q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

Começamos escrevendo a coluna'Q' sob 'Q' e o oposto da coluna 'P' sob o sinal de negação de '$\sim P$' (omitindo a etapa de escrever a coluna 'P' sob 'P'). A seguir, determinamos os valores-verdade para '$\sim P \vee Q$' a partir dos valores de '$\sim P$' e 'Q', utilizando a tabela da disjunção. Como uma disjunção é falsa se e somente se ambos os disjunctos são falsos, e como '$\sim P$' e 'Q' são falsos somente na linha 2, '$\sim P \vee Q$' é falso na linha 2 e verdadeiro em todas as outras linhas. Circundamos a coluna que contém os valores para '$\sim P \vee Q$'. Note que esses valores são os mesmos de '$P \rightarrow Q$'. Isso mostra que para propósitos lógicos, '$\sim P \vee Q$' e '$P \rightarrow Q$' são sinônimos, assim como '$\sim(P \ \& \sim Q)$' e '$P \rightarrow Q$'. Esta relação é o que explica a validade da equivalência IM (ver Tabela 3-2).

4.3 Construa a tabela-verdade para a fórmula

$$(P \vee Q) \ \& \sim(P \ \& \ Q)$$

Solução

P	Q	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\&$	$\sim$	$(P$	$\&$	$Q)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F

Esta fórmula é a formalização da disjunção exclusiva de P com Q (ver Seção 4.1). Note que a coluna circundada é a tabela-verdade para a disjunção exclusiva. Os valores-verdade para a fórmula são iniciados na seguinte ordem. Primeiro, escrevem-se as colunas para as letras sentenciais 'P' e 'Q' sob as ocorrências dessas letras na fórmula. A seguir, utilizando-se as tabelas-verdade para disjunção e conjunção, determinam-se os valores para as fórmulas '$P \vee Q$' e '$P \ \& \ Q$' e escreve-se sob '$\vee$' e a segunda ocorrência de '&', respectivamente. Os valores-verdade para '$\sim(P \ \& \ Q)$' são os opostos daqueles para '$P \ \& \ Q$'; escreve-se sob '$\sim$'. Finalmente, os valores-verdade para toda a fórmula são determinados a partir dos valores-verdade para '$P \vee Q$' e '$\sim(P \ \& \ Q)$', utilizando-se a tabela da conjunção. Estes valores-verdade são escritos sob o operador principal '&' e circundados.

4.4 Construa a tabela-verdade para a fórmula

$\sim(P \to Q)$

Solução

P	Q	$\sim$	$(P$	$\to$	$Q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Note que este é justamente o oposto da tabela-verdade para '$P \to Q$'.

Os condicionais materiais negados diferem surpreendentemente dos condicionais negados, na linguagem natural. Suponhamos, por exemplo, que interpretemos 'P' como o enunciado 'Darci é mãe' e 'Q' como o enunciado 'Darci é pai'. Então, '$\sim(P \to Q)$' diz 'Não é o caso que se Darci é mãe então Darci é pai'. Na linguagem ordinária, esse enunciado é verdadeiro sem restrição, desde que o enunciado 'Se Darci for mãe, então Darci é pai' é falso, sem restrição. Mas, pelo que foi visto sobre condicional, ele é falso em quaisquer das seguintes circunstâncias, como a tabela-verdade do problema 4.4 revela:

Darci é mãe e pai (de fato, impossível).

Darci é pai e não é mãe.

Darci não é mãe nem pai.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.5 Construa a tabela-verdade para a fórmula

$P \vee \sim P$

Solução

P	P	$\vee$	$\sim P$
V	V	V	F
F	F	V	V

A tabela-verdade mostra que a fórmula '$P \vee \sim P$' é verdadeira em toda situação possível.

As fórmulas, tais como '$P \vee \sim P$', que são verdadeiras em cada linha da tabela-verdade chamam-se *tautologias*, assim como os enunciados que elas representam. As suas tabelas-verdade mostram que as tautologias são verdadeiras em todas as circunstâncias possíveis. Assim, tautologia é uma espécie de necessidade lógica, gerada pela semântica dos operadores da lógica proposicional. Além do mais, pode ser mostrado (apesar da prova estar além do escopo deste livro) que uma wff é uma tautologia se e somente se ela é um teorema (isto é, provável sem suposições) no cálculo proposicional. ('$P \vee \sim P$', por exemplo, foi provado que é um teorema da lógica proposicional, no problema 3.45.)

PROBLEMA RESOLVIDO

4.6 Construa a tabela-verdade para a contradição

$P \;\&\; \sim P$

Solução

P	P	$\&$	$\sim P$
V	V	F	F
F	F	F	V

A coluna sob o operador principal contém somente Fs e isso mostra que '*P* & ~*P*' é falso em toda situação possível.

Qualquer fórmula cuja tabela-verdade contém somente Fs sob o seu operador principal, chama-se *inconsistente funcional-veritativa*, como são todos os enunciados específicos da mesma forma. Um enunciado *inconsistente funcional-veritativo* não pode ser verdadeiro. A inconsistência funcional-veritativa é um tipo de inconsistência, gerada por operadores da lógica proposicional. Como é o único tipo que nos interessa neste capítulo, nos referimos a ele simplesmente como "inconsistência"; mas é preciso ter em mente que nem toda inconsistência é funcional-veritativa. O enunciado 'George não é idêntico a si mesmo', por exemplo, é inconsistente, mas a sua inconsistência é devida à semântica da expressão 'é idêntico a' (ver Seção 6.7) bem como à semântica de 'não'; daí, ele não é simplesmente funcional-veritativo.

As fórmulas que são verdadeiras em alguma linha de sua tabela-verdade e falsas em outras chamam-se *contingentes funcional-veritativas,* como são os enunciados que elas representam. Um enunciado contingente funcional-veritativo é aquele que pode ser verdadeiro ou falso, *no que concerne aos operadores da lógica proposicional*. Entretanto, nem todos os enunciados contingentes funcional-veritativos são genuinamente contingentes, isto é, capazes de serem verdadeiros ou falsos, dependendo dos fatos. O enunciado 'João é solteirão e João (o mesmo João) é casado', por exemplo, tem a forma proposicional '*S* & *C*' e daí é contingente funcional-veritativa, como a sua tabela-verdade revela:

S	C	S	&	C
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	F	F	F

Mas, esse enunciado é inconsistente, não contingente; o que ele afirma é impossível, no sentido lógico ou conceitual. Portanto, a sua inconsistência é não-funcional-veritativa, sendo uma conseqüência da semântica dos termos 'é solteirão' e 'é casado', e do operador 'e'.

Resumindo: se uma wff é tautologia, então qualquer enunciado da mesma forma é logicamente necessário e é sempre verdadeiro. Se uma wff é inconsistente funcional-veritativa, então qualquer enunciado da forma é inconsistente e é sempre falso. Mas, se uma wff é contingente funcional-veritativa, então ela é contingente *somente no que concerne aos operadores representados na wff.* Alguns enunciados específicos da forma serão genuinamente contingentes, enquanto outros serão não-funcional-veritativos necessários ou inconsistentes, resultantes de fatos não representados na wff.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

4.7 Construa a tabela-verdade para determinar se a seguinte wff é tautologia, inconsistente, ou contingente funcional-veritativa:

$$(\sim P \vee \sim Q) \leftrightarrow (P \,\&\, Q)$$

Solução

P	Q	$(\sim P$	$\vee$	$\sim Q)$	$\leftrightarrow$	$(P$	$\&$	$Q)$
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	F

Como a coluna sob o operador principal '$\leftrightarrow$' consiste só em Fs, a wff é inconsistente.

4.8 Construa a tabela-verdade para determinar se a seguinte wff é tautologia, inconsistente, ou contingente funcional-veritativa:

$$P \rightarrow (Q \vee \sim R)$$

Solução

P	Q	R	P	$\rightarrow$	$(Q$	$\vee$	$\sim R)$
V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	V

Essa wff é contingente funcional-veritativa, pois ocorrem Vs e Fs na coluna sob o operador principal '$\rightarrow$'.

4.9 Construa a tabela-verdade para determinar se a seguinte wff é tautologia, inconsistente ou contingente funcional-veritativa:

$$((P \,\&\, Q) \,\&\, (R \,\&\, S)) \rightarrow P$$

Solução

P	Q	R	S	((P	&	Q)	&	(R	&	S))	→	P
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F

A wff é tautologia, pois ocorrem só Vs na coluna sob o conectivo principal '→'.

4.3 Tabelas-verdade para formas de argumento

Uma forma de argumento é válida se e somente se todas as suas instâncias são válidas. Uma instância de uma forma é válida se é impossível que a sua conclusão seja falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras, isto é, se não houver situação possível na qual a sua conclusão é falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras. Uma tabela-verdade é, de fato, uma lista exaustiva de situações possíveis. Daí, se não colocarmos exatamente uma só wff na tabela-verdade mas toda a forma de argumento, poderemos utilizar a tabela para determinar se aquela forma é ou não válida.

Se a forma for válida (pela definição, uma forma válida é aquela em que todas as instâncias são válidas; ver Seção 3.1), então qualquer instância dela deve ser igualmente válida. Daí, podemos utilizar tabelas-verdade para estabelecer a validade não só de formas de argumento, mas também de argumentos específicos. Consideremos, por exemplo, o silogismo disjuntivo:

A princesa ou a rainha comparecerá à cerimônia.

A princesa não comparecerá.

∴ A rainha comparecerá.

Podemos formalizá-lo como:

$P \vee Q, {\sim}P \vdash Q$

que é uma forma que provamos no problema 3.38.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.10 Construa a tabela-verdade para essa forma.

Solução

P	Q	P	$\vee$	$Q,$	${\sim}P$	$\vdash$	Q
V	V	V	V	V	F		V
V	F	V	V	F	F		F
F	V	F	V	V	V		V
F	F	F	F	F	V		F

Construímos uma tabela da mesma maneira que as tabelas para uma só wff, mas ela exibe três wffs separadas, em vez de uma só.

Podemos imaginar as wffs nesta tabela como expressando uma forma de argumento abstrata, uma estrutura com muitas instâncias, ou podemos dar uma interpretação específica, estipulando que '*P*' significa "a princesa comparecerá à cerimônia" e '*Q*', "a rainha comparecerá à cerimônia". Sob essas interpretações, esta seqüência de wffs expressa somente o argumento acima, que é exatamente uma instância da forma abstrata.[1]

Consideremos as wffs sob essa primeira interpretação específica. As quatro linhas da tabela-verdade representam quatro possibilidades: a princesa e a rainha comparecerão, a princesa comparecerá, mas a rainha não, a rainha comparecerá, mas a princesa não, ou ambas não comparecerão. Sob a pressuposição de bivalência, *essas são as únicas situações possíveis*. Somente em uma delas, a terceira, as premissas são verdadeiras; e, também, a conclusão é verdadeira. Assim, não há situação possível na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa; a tabela mostra que o argumento é válido.

Na verdade, isso mostra que todo argumento desta forma é válido. Como tal argumento é composto de sentenças P e Q, as quais são verdadeiras ou falsas (pelo princípio da bivalência), e como a tabela mostra que não importa qual combinação de verdade e falsidade elas exibem, não há situação possível na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, de modo que nenhuma instância da forma pode ser inválida. Logo, a validade da forma, em si, é aparente.

Além disso, se a forma é inválida, a sua tabela-verdade exibe a sua invalidade. Consideremos, por exemplo, a forma inválida conhecida como *afirmação do conseqüente*, que é, muitas vezes, confundida com o *modus ponens*:

$$P \rightarrow Q, Q \vdash P$$

1. Alguns autores usam estilos diferentes de letras sentenciais para distinguir essas duas interpretações.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.11 Construa a tabela-verdade para essa forma e use a tabela para mostrar que a forma é inválida.

Solução

P	Q	P	$\rightarrow$	$Q,$	Q	$\vdash P$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F

A tabela mostra que existem duas situações possíveis nas quais as premissas são verdadeiras, aquelas representadas pelas primeira e terceira linhas. Na primeira linha, a conclusão é verdadeira; mas na terceira linha, ela é falsa. A terceira linha é, de fato, uma prescrição para construir instâncias da forma com premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Para isso, servirá qualquer instância construída de sentenças P e Q, onde P é falsa e Q é verdadeira. Por exemplo, se interpretarmos 'P' como "as baleias são peixes" e 'Q' como "as baleias vivem n'água", obteremos:

Se as baleias são peixes, elas vivem n'água.

As baleias vivem n'água.

∴ As baleias são peixes.

Esta é uma instância da forma com premissas verdadeiras e conclusão falsa (as baleias são mamíferos, não são peixes). Como uma forma que tem essa instância é inválida, esta forma é inválida.

Uma situação na qual as premissas de uma instância de uma forma de argumento são verdadeiras enquanto a conclusão é falsa chama-se um *contra-exemplo*. A existência de um contra-exemplo mostra que a forma é inválida.

Em resumo: para determinar se uma forma de argumento da lógica proposicional é válida, colocamos a forma toda numa tabela-verdade. *Se a tabela não exibir contra-exemplo, então a forma é válida (e, portanto, qualquer instância dela é válida).* Se a tabela exibir pelo menos um contra-exemplo, então a *forma é inválida*. Como as formas inválidas podem ter instâncias válidas tanto quanto inválidas, o teste da tabela-verdade não estabelece a invalidade de argumentos específicos. Se formalizarmos um argumento e mostrarmos que a forma resultante é inválida, não poderemos inferir que o argumento é inválido. Mas, se a tabela-verdade mostra que uma forma é inválida, então ela mostra que nenhuma de suas instâncias é válida somente em virtude de ter essa forma. As instâncias válidas devem derivar a sua validade de alguma característica do argumento que se perdeu no processo de formalização. O argumento 4 da Seção 3.1, por exemplo, é válido apesar de ser uma instância de afirmação do conseqüente, que é inválido pelo teste da tabela-verdade; quando ele é formalizado como afirmação do conseqüente (isto é, como $P \rightarrow Q,\ Q \vdash P$), perde-se a informação de que a conclusão se segue da segunda premissa.

Um argumento particular pode ser uma instância de várias formas, algumas das quais são válidas e outras não. Mas, se for instância de uma forma válida, então ela é válida. Por exemplo, o argumento

Se ela me ama, então ela não me odeia.

Não é verdade que ela não me odeia.

∴ Ela não me ama.

é uma instância de cada uma das seguintes formas, sendo que somente as duas primeiras são válidas:

$$A \rightarrow \sim O, \sim\sim O \vdash \sim A$$

$$A \rightarrow E, \sim E \vdash \sim A$$

$$A \rightarrow E, N \vdash \sim A$$

$$A \rightarrow E, N \vdash S$$

$$I, N \vdash S$$

No terceiro caso, por exemplo, formalizamos 'Ela me ama' por 'A', 'Ela não me odeia' por 'E' e 'Não é verdade que ela não me odeia', por 'N'. Esta lista não é completa. O leitor pode descobrir outras formas para as quais este argumento é uma instância. Ao formalizar um argumento, geralmente, seleciona-se a forma que melhor exibe a estrutura lógica (no caso, a primeira forma), pois, se o argumento for válido em virtude de uma de suas formas, ele será válido em virtude daquela forma selecionada. Porém, se uma forma com menos estrutura for válida (como é a segunda forma da lista), então ela é uma formalização adequada para demonstrar a validade do argumento.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

4.12 Construa a tabela-verdade da seguinte forma e use a tabela para determinar se a forma é válida:

$$P \rightarrow Q, P \rightarrow \sim Q \vdash \sim P$$

Solução

P	Q	P	$\rightarrow$	$Q,$	P	$\rightarrow$	$\sim Q$	$\vdash \sim P$
V	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V

As situações possíveis nas quais as premissas são ambas verdadeiras estão representadas nas linhas 3 e 4 da tabela. Nessas situações, a conclusão também é verdadeira; portanto, a forma é válida.

4.13 Construa a tabela-verdade para a seguinte forma e use a tabela para determinar se a forma é válida:

$$P \to Q \vdash \sim(Q \to P)$$

Solução

P	Q	P	$\to$	$Q \vdash$	$\sim$	$(Q$	$\to$	$P)$
V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F

A tabela exibe dois contra-exemplos; em duas linhas (1 e 4) da tabela, a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa. Portanto, a forma é inválida.

4.14 Construa a tabela-verdade para a seguinte forma e use a tabela para determinar se a forma é válida:

$$P \vee Q, Q \vee R \vdash P \vee R$$

Solução

P	Q	R	P	$\vee$	$Q,$	Q	$\vee$	$R \vdash$	P	$\vee$	R
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

A forma é inválida, pois na situação em que 'P' e 'R' são falsos e 'Q' é verdadeiro (linha 6 da tabela), as premissas são verdadeiras enquanto a conclusão é falsa.

4.15 Construa a tabela-verdade para a seguinte forma e use a tabela para determinar se a forma é válida:

$$P, \sim P \vdash Q$$

Solução

P	Q	P,	$\sim P$	$\vdash Q$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Como as premissas são inconsistentes, não há situação possível nas quais ambas sejam verdadeiras. Portanto, não há contra-exemplo; o argumento é válido. Isso comprova, de um ponto de vista semântico, a regra CONTRAD, que provamos no problema 3.37.

Na verdade, o teste da tabela-verdade pode ser utilizado para verificar a validade das regras de inferência utilizadas no Capítulo 3. Isso nos permite estabelecer a validade da lógica proposicional como um todo, dada a interpretação clássica descrita pelas tabelas-verdade. (Uma lógica é *válida* se ela preserva a verdade sob a sua interpretação (semântica) pretendida — isto é, se a partir de premissas verdadeiras as suas regras nos permitem derivar somente conclusões verdadeiras.) Além disso, pode-se mostrar que a lógica proposicional é *completa* no sentido de que qualquer forma válida pelo teste da tabela-verdade é também provável pelas regras do Capítulo 3. Assim, uma forma é provável na lógica proposicional se e somente se ela é válida pelo teste da tabela-verdade. Entretanto, as provas desses resultados estão fora do escopo deste livro.[2]

4.4 Árvores de refutação

As tabelas-verdade fornecem um teste rigoroso e completo para a validade ou invalidade de formas de argumento da lógica proposicional, bem como para a tautologia, contingência funcional-veritativa e inconsistência de wffs. Na verdade, elas constituem um *algoritmo*, o tipo de teste específico que pode ser executado por um computador e que sempre dá uma resposta após um número finito de operações. Quando existe um algoritmo que determina se as formas de argumento expressáveis num sistema formal são válidas ou não, esse sistema diz-se *decidível*. Assim, as tabelas-verdade garantem a decidibilidade da lógica proposicional. Mas, elas são enfadonhas e ineficazes, especialmente em problemas que envolvem muitas letras sentenciais. As árvores de refutação fornecem um algoritmo mais eficaz para executar as mesmas tarefas.

Dada uma lista de wffs, uma árvore de refutação é uma busca exaustiva de caminhos nos quais todas as wffs da lista podem ser verdadeiras. Para testar a validade de uma forma de argumento utilizando uma árvore de refutação, constrói-se uma lista consistindo em suas premissas e na negação de sua conclusão. A busca é executada desmembrando as wffs da lista em letras sentenciais ou suas negações. Se encontrarmos alguma atribuição de verdade e falsidade para letras sentenciais que torne verdadeiras todas as wffs da lista, então, sob essa atribuição, as premissas da forma são verdadeiras enquanto sua conclusão é falsa. Assim, refuta-se a forma de argumento; ela é inválida. Se na busca não surgir atribuição de verdade e falsidade para letras sentenciais

2. A validade e a completude de um sistema de lógica proposicional análogo ao que apresentamos aqui são demonstradas em E. J. Lemmon, *Beginning Logic*, Indianapolis, Hackett, 1978, p. 75-91.

que torne verdadeiras todas as wffs da lista, então a refutação falha; a forma é válida. Para ilustrar, examinemos alguns exemplos.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

4.16 Construa a árvore de refutação para mostrar que a forma 'P & Q ⊢ ~ ~P' é válida.

Solução

Inicialmente, formamos a lista consistindo na premissa e na negação da conclusão:

P & Q

~ ~ ~P

A premissa é verdadeira se e somente se 'P' e 'Q' forem verdadeiras. Daí, podemos substituir 'P & Q' por essas duas letras sentenciais. Mostramos isso escrevendo 'P' e 'Q' no final da lista e ticamos a fórmula 'P & Q' para indicar que a eliminamos. Uma fórmula ticada está, portanto, eliminada da lista.

√ P & Q

~ ~ ~P

P

Q

Além do mais, '~~ ~P' é verdadeira se e somente se '~P' é verdadeira; logo, podemos ticar '~ ~~P' e substituí-la por '~P':

$\checkmark$ $P \& Q$

$\checkmark$ $\sim\sim\sim P$

P

Q

$\sim P$

Desmembramos a lista original de fórmulas numa lista de letras sentenciais ou negações de letras sentenciais, as quais devem ser verdadeiras se todos os membros da lista original são verdadeiras. Mas, entre essas letras sentenciais e suas negações temos 'P' e '$\sim P$', as quais não podem ser ambas verdadeiras. Logo, é impossível que todas as fórmulas desta última lista sejam verdadeiras. Expressamos isso escrevendo 'X' no final da lista.

$\checkmark$ $P \& Q$

$\checkmark$ $\sim\sim\sim P$

P

Q

$\sim P$

X

Assim, a árvore de refutação está completa. A nossa busca de uma refutação da forma de argumento original falhou; daí, essa forma é válida.

4.17 Construa a árvore de refutação para mostrar que a forma '$P \vee Q, \sim P \vdash Q$' é válida.

Solução

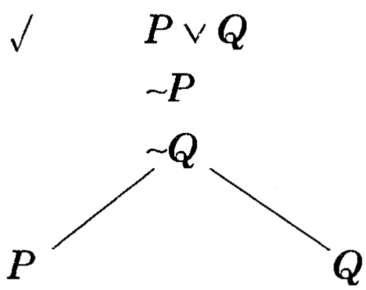
Formamos com uma lista consistindo em premissas seguida pela negação da conclusão:

$P \vee Q$

$\sim P$

$\sim Q$

Como '$\sim P$' e '$\sim Q$' são negações de letras sentenciais, elas não podem ser analisadas além disso; mas '$P \vee Q$' é verdadeira se e somente se 'P' ou 'Q' é verdadeira. Para representar o fato que '$P \vee Q$' pode ser verdadeira em qualquer desses dois casos, nós ticamos '$P \vee Q$' e bifurcamos a árvore, do seguinte modo:



A árvore, agora, contém dois ramos, cada um iniciando-se com a fórmula ticada '$P \vee Q$'. O primeiro ramifica-se para a esquerda e termina com 'P'; o segundo ramifica-se para a direita e termina com 'Q'. As três fórmulas da lista inicial podem ser verdadeiras se e somente se todas as fórmulas de um dos ramos puderem ser verdadeiras. Mas, o primeiro ramo contém 'P' e '$\sim P$' e o segundo contém 'Q' e '$\sim Q$'. Daí, nem todas as fórmulas em qualquer ramo podem ser verdadeiras. Como no problema anterior, indicamos isso terminando cada ramo com um X:

$$\begin{array}{lccc} \checkmark & & P \vee Q & \\ & & \sim P & \\ & & \sim Q & \\ & \swarrow & & \searrow \\ P & & & Q \\ X & & & X \end{array}$$

A árvore está completa. Como a refutação falhou nos dois ramos, o argumento dado é válido. (Compare esta árvore com a tabela-verdade do problema 4.10.)

4.18 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$P \vee Q, P \vdash \sim Q$$

Solução

Alistamos as premissas e a negação da conclusão:

$P \vee Q$

P

$\sim\sim Q$

'$\sim\sim Q$' é equivalente a 'Q'; assim, ticamos '$\sim\sim Q$' e escrevemos 'Q' no final da lista. Como no problema anterior, ticamos '$P \vee Q$' e mostramos as suas possibilidades de verdade bifurcando a árvore:

$$\begin{array}{lccc} \checkmark & & P \vee Q & \\ & & P & \\ \checkmark & & \sim\sim Q & \\ & & Q & \\ & \swarrow & & \searrow \\ P & & & Q \end{array}$$

A árvore está completa. Todas as fórmulas da árvore foram desmembradas em letras sentenciais ou suas negações. Além do mais, os dois ramos mostram as atribuições de possíveis valores-verdade, pois nenhum deles contém uma letra sentencial e a sua negação. Como cada ramo contém 'P' e 'Q', cada um mostra uma atribuição na qual essas letras são verdadeiras. Além disso, a árvore indica que, sob essa atribuição de valor-verdade, todas as três fórmulas da lista original são verdadeiras, isto é, que as premissas da forma '$P \vee Q, P \vdash \sim Q$' são verdadeiras enquanto a sua conclusão é falsa. Portanto, esta forma é inválida.

O leitor pode confirmar os resultados desses três problemas construindo tabelas-verdade para as respectivas formas. Consideremos agora um procedimento mais sistemático para a solução desses problemas.

Uma árvore de refutação é uma análise na qual uma lista de enunciados é desmembrada em letras sentenciais ou suas negações, que mostram as condições nas quais os membros da lista original podem ser verdadeiros. Como as condições para que um enunciado possa ser verdadeiro dependem dos operadores lógicos que ele contém, as fórmulas que contêm diferentes operadores lógicos são desmembradas diferentemente. Todas as fórmulas que contêm operadores lógicos pertencem a uma das dez categorias seguintes:

Negação	Negação negada
Conjunção	Conjunção negada
Disjunção	Disjunção negada
Condicional	Condicional negado
Bicondicional	Bicondicional negado

Para cada categoria temos uma regra correspondente que expande as árvores de refutação. Os problemas 4.16 a 4.18 ilustram quatro dessas regras. Para explicá-las, precisamos, inicialmente, definir o conceito de *ramo aberto*. Um ramo aberto é aquele que não termina com um 'X'. Os ramos que terminam com um 'X' chamam-se *ramos fechados*. As quatro regras podem ser expressas do seguinte modo:

Negação (~): Se um ramo aberto contém uma fórmula e sua negação, coloca-se um '*X*' no final do ramo.

A idéia é que qualquer ramo que contém uma fórmula e sua negação não é um ramo em que todas as fórmulas podem ser verdadeiras, que é o que se investiga ao se construir uma árvore de refutação. Daí, pode-se fechar esse ramo como uma tentativa falha de refutação. A regra da negação foi utilizada nos problemas 4.16 e 4.17.

Negação negada (~~): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim\sim\phi$, tica-se $\sim\sim\phi$ e escreve-se ϕ no final de cada ramo aberto que contém $\sim\sim\phi$ ticada.

Esta regra foi utilizada nos problemas 4.16 e 4.18.

Conjunção (&): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma ϕ & ψ, tica-se ϕ & ψ e escreve-se ϕ e ψ no final de cada ramo aberto que contém ϕ & ψ ticada.

Esta regra foi utilizada no problema 4.16.

Disjunção ($\vee$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \vee \psi$, tica-se $\phi \vee \psi$ e bifurca-se cada ramo aberto que contém $\phi \vee \psi$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se ϕ e no final do segundo ramo escreve-se ψ.

Esta regra foi utilizada nos problemas 4.17 e 4.18.

Um ramo *termina* se ele se fecha ou se as wffs não-ticadas que ele contém são letras sentenciais ou suas negações, tal que mais nenhuma regra se aplica a suas fórmulas. Uma árvore está completa se todos os seus ramos terminam. Se todos os ramos de uma árvore completa estão fechados (como nos problemas 4.16 e 4.17), então as fórmulas originais a partir das quais se construiu a árvore não são simultaneamente verdadeiras; nesse caso, a forma é válida. Se algum ramo de uma árvore completa estiver aberto (como no problema 4.18), então as fórmulas originais a partir das quais a árvore foi construída são simultaneamente verdadeiras; nesse caso, a fórmula é inválida.

Na verdade, a árvore completa exibe muito mais do que validade ou invalidade da forma de argumento. Cada ramo aberto da árvore completa é uma prescrição para construir contra-exemplos. As fórmulas não-ticadas num ramo aberto são as letras sentenciais ou suas negações. Qualquer situação na qual as letras sentenciais não-negadas são verdadeiras e as letras sentenciais negadas são falsas é um contra-exemplo. Por exemplo, a árvore completa do problema 4.18 mostra dois ramos abertos, cada um contendo 'P' e 'Q'; assim, qualquer situação na qual 'P' e 'Q' são verdadeiras é um contra-exemplo para a forma '$P \vee Q, P \vdash \sim Q$'.

Para analisar as árvores, é conveniente enumerar as suas linhas e indicar quais regras e linhas foram utilizadas para construir a árvore. Enumeram-se as linhas numa coluna à esquerda e indicam-se à direita as linhas de onde foram derivadas e as regras usadas. As regras são designadas pelos símbolos dos conectivos que são empregados. Por exemplo, a versão comentada da árvore do problema 4.17 é:

1	√		$P \vee Q$			
2			$\sim P$			
3			$\sim Q$			
4	P	$1\vee$			Q	$1\vee$
5	X	$2, 4\sim$			X	$3, 4\sim$

Formularemos e ilustraremos as seis regras restantes para construir as árvores de refutação. Juntamente com as quatro regras já vistas, elas nos permitem construir uma árvore para quaisquer conjuntos de wffs da lógica proposicional.

<u>Condicional ($\rightarrow$)</u>: Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \rightarrow \psi$, tica-se $\phi \rightarrow \psi$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\phi \rightarrow \psi$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se $\sim\phi$ e no final do segundo escreve-se ψ.

Esta regra baseia-se no fato de que $\phi \rightarrow \psi$ é verdadeira se e somente se ϕ é falsa ou ψ é verdadeira (ver a tabela-verdade para o condicional material).

PROBLEMA RESOLVIDO

4.19 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$$

Solução

1	√			$P \rightarrow Q$					
2	√			$Q \rightarrow R$					
3				P					
4				$\sim R$					
5		$\sim P$	$1 \rightarrow$			Q	$1 \rightarrow$		
6		X	$3, 5 \sim$						
7				$\sim Q$	$2 \rightarrow$			R	$2 \rightarrow$
8				X	$5, 6 \sim$			X	$4, 6 \sim$

Escrevemos as premissas e a negação da conclusão (linhas 1 a 4). A regra do condicional é aplicada à linha 1, para obter a linha 5. O ramo esquerdo fecha-se na linha 6, pela regra da negação, mas o ramo direito permanece aberto, e, assim, aplica-se a regra do condicional na 2 para obter a linha 7. A regra da negação fecha então os dois ramos restantes. Como a árvore completa está fechada, a refutação empreendida falha e a forma é válida.

Bicondicional (↔): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \leftrightarrow \psi$, tica-se $\phi \leftrightarrow \psi$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\phi \leftrightarrow \psi$ ticada, no final do primeiro escreve-se ϕ e ψ e no final do segundo escreve-se $\sim\phi$ e $\sim\psi$.

Esta regra é uma expressão do fato de que $\phi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se e somente se ϕ e ψ são ambas falsas ou verdadeiras.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.20 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$P \leftrightarrow Q, \sim P \vdash \sim Q$$

Solução

1	√ $P \leftrightarrow Q$			
2	$\sim P$			
3	$\sim\sim Q$			
4	P	$1 \leftrightarrow$	$\sim P$	$1 \leftrightarrow$
5	Q	$1 \leftrightarrow$	$\sim Q$	$1 \leftrightarrow$
6	X	$2, 4 \sim$	X	$3, 5 \sim$

Não foi necessário aplicar a regra da negação na linha 3. A árvore termina mesmo sem isso. A forma é válida.

Conjunção negada (~&): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \,\&\, \psi)$, tica-se $\sim(\phi \,\&\, \psi)$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \,\&\, \psi)$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se $\sim\phi$ e no final do segundo ramo escreve-se $\sim\psi$.

Esta regra depende do fato de que $\sim(\phi \ \& \ \psi)$ é verdadeira se e somente se ϕ ou ψ é falsa. Ela se relaciona de maneira óbvia com a versão da lei de De Morgan pela qual $\sim(\phi \ \& \ \psi)$ é equivalente a $\sim\phi \vee \sim\psi$.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.21 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$\sim(P \ \& \ Q) \vdash \sim P \ \& \sim Q$$

Solução

1		$\surd \ \sim(P \ \& \ Q)$		
2		$\surd \ \sim(\sim P \ \& \sim Q)$		
3	$\sim P$ 1 $\sim\&$		$\sim Q$ 1 $\sim\&$	
4	$\sim\sim P$ 2 $\sim\&$	$\surd \ \sim\sim Q$ 2 $\sim\&$	$\surd \ \sim\sim P$ 2 $\sim\&$	$\sim\sim Q$ 2 $\sim\&$
5	X 3, 4 $\sim$	Q 4 $\sim\sim$	P 4 $\sim\sim$	X 3, 4 $\sim$

Alistamos a premissa e a negação da conclusão. Analisâmo-las em duas etapas de conjunção negada (linhas 3 e 4). Dentre os quatro ramos, dois permanecem abertos após as aplicações de negação negada na linha 5. Como não se aplicam mais regras, a árvore está completa. Mas, como existem dois ramos abertos, a forma é inválida. Os ramos abertos são contra-exemplos de situações nas quais 'P' é falsa e 'Q' é verdadeira, ou 'Q' é falsa e 'P' é verdadeira.

<u>*Disjunção negada*</u> ($\sim\vee$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \vee \psi)$, tica-se $\sim(\phi \vee \psi)$ e escreve-se $\sim\phi$ e $\sim\psi$ no final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \vee \psi)$ ticada.

Esta regra é uma expressão do fato de que $\sim(\phi \vee \psi)$ é verdadeira se e somente se ϕ e ψ são falsas. Ela se relaciona de maneira óbvia com a versão da lei de De Morgan pela qual $\sim(\phi \vee \psi)$ e $\sim\phi \;\&\; \sim\psi$ são equivalentes.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.22 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$P \to Q \vdash P \vee Q$$

Solução

1			√	$P \to Q$		
2			√	$\sim(P \vee Q)$		
3				$\sim P$	$2 \sim\vee$	
4				$\sim Q$	$2 \sim\vee$	
5	$\sim P$	$1 \to$			Q	$1 \to$
6					X	$4, 5 \sim$

A regra da disjunção negada é aplicada na linha 2 para se obter as linhas 3 e 4. O ramo aberto indica que a forma é inválida e que qualquer situação na qual '*P*' e '*Q*' são falsas é um contra-exemplo.

<u>*Condicional negado*</u> ($\sim\to$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \to \psi)$, tica-se $\sim(\phi \to \psi)$ e escreve-se ϕ e $\sim\psi$ no final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \to \psi)$ ticada.

Um condicional negado $\sim(\phi \to \psi)$ é verdadeiro se e somente ϕ é verdadeira e ψ é falsa (ver problema 4.4); esta é a justificativa para esta regra.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.23 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$\sim P \to \sim Q \vdash P \to Q$$

Solução

1		$\checkmark$ $\sim P \to \sim Q$		
2		$\checkmark$ $\sim(P \to Q)$		
3		P	$2 \sim\to$	
4		$\sim Q$	$2 \sim\to$	
5	$\checkmark$ $\sim\sim P$	$1 \to$	$\sim Q$	$1 \to$
6	P	$5 \sim\sim$		

A árvore tem dois ramos abertos, cada qual indicando que a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa, quando '*P*' é verdadeira e '*Q*' é falsa. Portanto, a forma é inválida.

<u>*Bicondicional negado* ($\sim\leftrightarrow$)</u>: Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$, tica-se $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se ϕ e $\sim\psi$, e no final do segundo ramo escreve-se $\sim\phi$ e ψ.

Esta regra é uma expressão do fato de que um bicondicional negado $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$ é verdadeiro se e somente se ϕ é verdadeira e ψ é falsa, ou ϕ é falsa e ψ é verdadeira.

PROBLEMA RESOLVIDO

4.24 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte forma é válida:

$$P, P \to Q \vdash P \leftrightarrow Q$$

Solução

1				P						
2	$\surd$			$P \to Q$						
3	$\surd$			$\sim(P \leftrightarrow Q)$						
4		$\sim P$	$2 \to$				Q	$2 \to$		
5		X	$1, 4 \sim$							
6					P	$3 \sim\leftrightarrow$			$\sim P$	$3 \sim\leftrightarrow$
7					$\sim Q$	$3 \sim\leftrightarrow$			Q	$3 \sim\leftrightarrow$
8					X	$4, 7 \sim$			X	$1, 6 \sim$

A forma é válida, pois a árvore completa está fechada.

As árvores de refutação são úteis, além de testar a validade de formas de argumento. Uma lista de wffs é *consistente* (isto é, todos os seus membros são verdadeiros, simultaneamente) se todas as suas árvores contêm pelo menos um ramo aberto. Se uma árvore completa não contém ramos abertos, as fórmulas a partir das quais a árvore foi construída são inconsistentes.

A lista pode conter só uma fórmula. Se a árvore completa para uma só fórmula não tem ramos abertos, então a fórmula é inconsistente funcional-veritativa. Se ela contém algum ramo aberto, então a fórmula é tautologia ou contingente funcional-veritativa.

As árvores de refutação podem ser usadas para justificar as tautologias. *Uma wff é tautologia se e somente se a sua negação é inconsistente funcional-veritativa.* Portanto, para qualquer wff ϕ, ϕ é tautologia se e somente se todos os ramos da árvore completa para $\sim\phi$ são fechados (isto é, se e somente se $\sim\phi$ é inconsistente funcional-veritativa).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

4.25 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte wff é tautologia:

$$(P \to Q) \vee (P \;\&\; \sim Q)$$

Solução

1	$\checkmark$		$\sim((P \to Q) \vee (P \;\&\; \sim Q))$	
2	$\checkmark$		$\sim(P \to Q)$	$1 \sim\vee$
3	$\checkmark$		$\sim(P \;\&\; \sim Q)$	$1 \sim\vee$
4			P	$2 \sim\to$
5			$\sim Q$	$2 \sim\to$
6	$\sim P$	$3 \sim\&$	$\sim\sim Q$	$3 \sim\&$
7	X	$4, 6 \sim$	X	$5, 6 \sim$

Construímos a árvore para a negação da wff dada. Como todos os ramos se fecham, a tentativa de encontrar um modo para tornar sua negação verdadeira falha; portanto, ela é uma tautologia.

4.26 Construa a árvore de refutação para determinar se a seguinte wff é tautologia:

$$\sim(Q \rightarrow (P \,\&\, \sim P))$$

Solução

1	$\surd$			$\sim\sim(Q \rightarrow (P \,\&\, \sim P))$	
2	$\surd$			$Q \rightarrow (P \,\&\, \sim P)$	$1 \sim\sim$
3	$\sim Q$	$2 \rightarrow$		$P \,\&\, \sim P$	$2 \rightarrow$
4				P	$3 \,\&$
5				$\sim P$	$3 \,\&$
6				X	$4, 5 \sim$

O ramo esquerdo permanece aberto, mostrando que '$\sim\sim(Q \rightarrow (P \,\&\, \sim P))$' é verdadeira se '$Q$'é falsa. Daí, '$\sim(Q \rightarrow (P \,\&\, \sim P))$' não é tautologia.

O leitor deverá ter em mente os seguintes pontos ao construir árvores de refutação:

1) *As regras para construir árvores de refutação aplicam-se somente a fórmulas inteiras e não a subfórmulas.* Assim, por exemplo, o uso da negação negada na seguinte árvore não está correto:

1	$\surd$	$P \,\&\, \sim\sim Q$		
2	$\surd$	$P \,\&\, Q$	$1 \sim\sim$	(incorreto)
3		P	$2 \,\&$	
4		Q	$2 \,\&$	

Embora a remoção de duplas negações de subfórmulas não conduza a respostas errôneas, isso não é necessário. Problemas mais sérios podem resultar ao se tentar aplicar, às subfórmulas, algumas das regras para operadores binários, pois não definimos procedimentos para isso.

2) *A ordem na qual as regras são aplicadas é indiferente; mas ela se torna mais eficiente se aplicarmos, primeiramente, as regras que não levam à bifurcação.* Após a aplicação de regras que levam à bifurcação, podemos ter etapas que são requeridas para escrever fórmulas no final de vários ramos (o que poderia ser evitado). Por exemplo, no problema 4.22, se aplicarmos a regra '$\rightarrow$' na etapa 3, obteremos a árvore:

1	$\surd$			$P \rightarrow Q$		
2	$\surd$			$\sim(P \vee Q)$		
3		$\sim P$	$1 \rightarrow$		Q	$1 \rightarrow$
4		$\sim P$	$2 \sim\vee$		$\sim P$	$2 \sim\vee$
5		$\sim Q$	$2 \sim\vee$		$\sim Q$	$2 \sim\vee$
6					X	$4, 5 \sim$

As fórmulas '$\sim P$' e '$\sim Q$' precisam ser escritas duas vezes, enquanto se aplicarmos, primeiro, a regra da disjunção negada, como na resolução do problema 4.22, precisaremos escrever '$\sim P$' e '$\sim Q$' só uma vez.

3) *Todos os contra-exemplos para uma forma de argumento são fornecidos pelos ramos abertos de uma árvore completa.* Isso é verdade mesmo que todas as letras sentenciais da forma estejam entre as fórmulas não-ticadas de algum ramo aberto. Por exemplo, consideremos a forma inválida '$P \rightarrow Q \vdash P$'; sua árvore é:

1	$\surd$			$P \rightarrow Q$		
2				$\sim P$		
3		$\sim P$	$1 \rightarrow$		Q	$1 \rightarrow$

Os dois ramos são abertos. O ramo direito indica situações nas quais '*P*' é falsa enquanto '*Q*' é verdadeira, como contra-exemplos; por outro lado, o ramo esquerdo indica que as situações em que '*P*' é falsa, são contra-exemplos. A letra '*Q*' não ocorre entre as fórmulas não-ticadas nesse ramo. Isso mostra que a falsidade de '*P*' é, por si só, suficiente para um contra-exemplo, isto é, qualquer situação na qual '*P*' é falsa é um contra-exemplo, não dependendo do valor-verdade de '*Q*'. Assim, a árvore indica que existem dois tipos de contra-exemplos para a forma: aqueles em que '*P*' é falsa e '*Q*' é verdadeira, e aqueles em que '*P*' e '*Q*' são falsas.

Tabela 4-1 Regras para árvore de refutação.

Negação (~): Se um ramo aberto contém uma fórmula e sua negação, coloca-se um 'X' no final do ramo.

Negação negada (~ ~): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim\sim\phi$, tica-se $\sim\sim\phi$ e escreve-se ϕ no final de cada ramo aberto que contém $\sim\sim\phi$ ticada.

Conjunção (&): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \,\&\, \psi$, tica-se $\phi \,\&\, \psi$ e escreve-se ϕ e ψ no final de cada ramo aberto que contém $\phi \,\&\, \psi$ ticada.

Conjunção negada (~&): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \,\&\, \psi)$, tica-se $\sim(\phi \,\&\, \psi)$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \,\&\, \psi)$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se $\sim\phi$ e no final do segundo ramo escreve-se $\sim\psi$.

Disjunção (∨): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \vee \psi$, tica-se $\phi \vee \psi$ e bifurca-se cada ramo aberto que contém $\phi \vee \psi$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se ϕ e no final do segundo ramo escreve-se ψ.

Disjunção negada (~∨): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \vee \psi)$, tica-se $\sim(\phi \vee \psi)$, e escreve-se $\sim\phi$ e $\sim\psi$ no final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \vee \psi)$ ticada.

Condicional (→): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \rightarrow \psi$, tica-se $\phi \rightarrow \psi$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\phi \rightarrow \psi$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se $\sim\phi$ e no final do segundo escreve-se ψ.

Tabela 4-1 Regras para árvore de refutação (*continuação*).

<u>*Condicional negado*</u> ($\sim\rightarrow$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \rightarrow \psi)$, tica-se $\sim(\phi \rightarrow \psi)$ e escreve-se ϕ e $\sim\psi$ no final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \rightarrow \psi)$ ticada.

<u>*Bicondicional*</u> ($\leftrightarrow$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\phi \leftrightarrow \psi$, tica-se $\phi \leftrightarrow \psi$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\phi \leftrightarrow \psi$ ticada, no final do primeiro escreve-se ϕ e ψ e no final do segundo escreve-se $\sim\phi$ e $\sim\psi$.

<u>*Bicondicional negado*</u> ($\sim\leftrightarrow$): Se um ramo aberto contém uma wff não-ticada da forma $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$, tica-se $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$ e bifurca-se o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\phi \leftrightarrow \psi)$ ticada, no final do primeiro ramo escreve-se ϕ e $\sim\psi$, e no final do segundo ramo escreve-se $\sim\phi$ e ψ.

Problemas suplementares

I. Determine se as seguintes fórmulas são tautologias, contingentes funcional-veritativa ou inconsistentes, usando tabelas-verdade ou árvores de refutação:

1) $P \rightarrow P$
2) $P \rightarrow \sim P$
3) $\sim(P \rightarrow P)$
4) $P \rightarrow Q$
5) $(P \vee Q) \rightarrow P$
6) $(P \& Q) \rightarrow P$
7) $P \leftrightarrow \sim(P \vee Q)$
8) $\sim((P \& Q) \leftrightarrow (P \vee Q))$
9) $(P \& Q) \& \sim(P \vee R)$
10) $(P \rightarrow (Q \& R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

II. Verifique se as seguintes formas são válidas ou inválidas, utilizando tabelas-verdade ou árvores de refutação:

1) $\sim P \vdash P \rightarrow \sim P$
2) $P \vee Q \vdash P \,\&\, Q$
3) $P \rightarrow \sim Q \vdash \sim(P \,\&\, Q)$
4) $P \vdash (P \rightarrow (Q \,\&\, P)) \rightarrow (P \,\&\, Q)$
5) $P \vee Q, \sim P, \sim Q \vdash R$
6) $(Q \,\&\, R) \rightarrow P, \sim Q, \sim R \vdash \sim P$
7) $\sim(P \vee Q), R \leftrightarrow P \vdash \sim R$
8) $\sim(P \,\&\, Q), R \leftrightarrow P \vdash \sim R$
9) $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$
10) $P \rightarrow (R \vee S), (R \,\&\, S) \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$

III. Formalize os seguintes argumentos utilizando a interpretação indicada e teste a validade de suas formas por meio de tabelas-verdade ou árvores de refutação.

Letra sentencial	*Interpretação*
C	A forma de argumento F tem contra-exemplo.
I	As premissas da forma de argumento F são inconsistentes.
A	A árvore completa da forma de argumento F contém ramo aberto.
V	A forma de argumento F é válida.

1) Se a forma de argumento F é válida, então a sua árvore completa não contém ramos abertos. Portanto, se a árvore completa de F contém ramo aberto, a forma F é inválida.

2) Se as premissas da forma de argumento F são inconsistentes, então F é válida. Portanto, se as premissas da forma F não são inconsistentes, então a forma F é inválida.

3) Se a forma de argumento F tem contra-exemplo, então as suas premissas não são inconsistentes. Daí, não é o caso que a forma F tem contra-exemplo e que suas premissas são consistentes.

4) A forma de argumento F tem contra-exemplo ou é válida, mas não ambas. Portanto a forma F é válida se, e somente se, ela não tem contra-exemplo.

5) As premissas da forma de argumento F são inconsistentes. Se as premissas de F são inconsistentes, então F é válida. F é válida se, e somente se, sua árvore completa não contém ramo aberto. Se a árvore completa de F não contém ramo aberto, então F não tem contra-exemplo. A forma F tem um contra-exemplo. Portanto, a forma F é inconsistente.

Respostas a alguns problemas suplementares

I.

2) Contingente funcional-veritativa.

4) Contingente funcional-veritativa.

6) Tautologia

8) Contingente funcional-veritativa

10) Tautologia

II.

2) Inválida

4) Válida

6) Inválida

8) Inválida

10) Inválida

III.

2) Forma inválida (de fato, o argumento em si é inválido)

4) Forma válida.

Capítulo 5

A LÓGICA DOS ENUNCIADOS CATEGÓRICOS

5.1 Enunciados categóricos

A lógica proposicional dos Capítulos 3 e 4 trata das relações lógicas geradas pelos operadores funcional-veritativos, ou seja, das expressões 'não', 'e', 'ou', 'se ... então' e 'se somente se'. Essas relações são fundamentais, contudo elas dão conta somente de pequena parte do principal assunto da lógica. Este capítulo considera, uma outra parte — as relações lógicas geradas pelas expressões: 'todo', 'nenhum' e 'algum'. No Capítulo 6, combinaremos os assuntos dos Capítulos 3, 4 e 5, e introduziremos alguns elementos novos, atingindo, assim, uma perspectiva ampla que possibilitará ver como todos esses estudos se inter-relacionam.

A validade de alguns argumentos válidos não depende unicamente dos operadores funcional-veritativos. Tais argumentos não podem ser justificados somente com base na lógica proposicional.

EXEMPLO 5.1 O seguinte argumento é válido; porém, sua validade é uma função dos significados das expressões 'todo' e 'algum':

Alguns quadrúpedes são gnus.

Todos os gnus são herbívoros.

∴ Alguns quadrúpedes são herbívoros.

Nenhum dos enunciados desse argumento compõe-se de operadores funcional-veritativos. *Do ponto de vista da lógica proposicional*, esses enunciados carecem de estrutura interna. Se tentamos formalizar esse argumento na lógica proposicional, o melhor que podemos obter é

$$P, Q \vdash R$$

Mas, essa forma é inválida, pois quaisquer enunciados P, Q e R com P e Q verdadeiros e R falso constitui-se num contra-exemplo.

A partir de uma perspectiva mais minuciosa, os enunciados do exemplo 5.1 têm estruturas internas, as quais constituem uma forma válida. Entretanto, essas estruturas não se compõem de relações funcional-veritativas entre os enunciados tal como na lógica proposicional, mas, de relações entre atributos que denotam conjuntos ou classes com os próprios enunciados. Para ver isso representaremos a forma do argumento do seguinte modo:

Algum F é G.

Todo G é H.

∴ Algum F é H.

As letras 'F', 'G' e 'H' não representam sentenças como na lógica proposicional, mas, sim, *classes de atributos*, tais como: 'gnu', 'herbívoro' e 'quadrúpede'. Uma classe de atributos denota um conjunto de objetos. O termo 'gnu' denota o conjunto de todos os gnus, e o termo 'herbívoro', o conjunto de todos os herbívoros. Qualquer substituição de uma classe de atributos por essas letras (substituindo-se cada ocorrência da mesma letra por uma mesma classe de atributos) produz um argumento válido.

Todas as classes de atributos acima mencionadas são *substantivos comuns*; porém, *locuções* nominais, tais como 'coisa azul', 'olho esbugalhado' ou 'meu amigo', também são classes de atributos. Adjetivos e locuções adjetivas também podem funcionar como classes de atributos.

Assim, os adjetivos 'velho', 'circular' e 'viciado', denotam, respectivamente, o conjunto de todas as coisas velhas, circulares e viciadas; e a locução adjetiva 'no Hemisfério Norte' denota o conjunto de todas as coisas localizadas no Hemisfério Norte. Além disso, verbos e locuções verbais podem ser considerados como classes de atributos: 'mover-se', 'ama Bill' e 'teve um carro quebrado' denotam, respectivamente, o conjunto de todas as coisas que se movem, que amam Bill, que tiveram um carro quebrado.

Para facilitar a substituição e a comparação de uma classe de atributos, podemos reescrevê-las como substantivos comuns e locuções nominais, caso não estejam nessa forma. Ou seja, podemos considerar os substantivos e as locuções nominais como sendo a forma padrão para classes de atributos. Uma classe de atributos expressa por um adjetivo, por uma locução adjetiva, por um verbo ou por uma locução verbal pode ser convertida numa locução nominal quando adicionamos a palavra 'coisas'. Desse modo, 'velho' torna-se 'coisas velhas', 'no Hemisfério Norte' torna-se 'coisas no Hemisfério Norte', 'ama Bill' torna-se 'coisas que amam Bill', e assim por diante.

Nos enunciados, as classes de atributos estão, muitas vezes, relacionadas com uma outra por meio das expressões 'todo' e 'algum', denominadas *quantificadores*. Os quantificadores, bem como os operadores funcional-veritativos, são operadores lógicos, mas em vez de indicarem relações entre sentenças, eles expressam relações entre os conjuntos designados pelas classes de atributos. Enunciados da forma 'Todo A é B', afirmam que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B, ou seja, que todos os elementos de A são, também, elementos de B. Por convenção, universalmente empregada em lógica, enunciados da forma 'Algum A é B' estabelecem que o conjunto A tem pelo menos um elemento em comum com o conjunto B.

Essa convenção diverge da usual em que 'Algum A é B' significa que o conjunto A tem mais de um elemento em comum com o conjunto B. Diverge, ainda, de outra maneira. Quando dizemos que *algum* A é B, pressupomos que nem todo A é B. Admitamos, por exemplo, que alguém diz: "Alguns dos meus amigos estão zangados comigo". (Esse enunciado é da forma 'Algum A é B', onde 'A' substitui a locução nominal 'amigos meus' e '*B*' a locução adjetiva 'zangados comigo' — ou, em forma padrão, 'coisas (ou pessoas) que estão zangadas comigo'.) Normalmente, esse enunciado seria entendido como pressupondo, ou sugerindo, que nem todos os amigos daquela pessoa estão zangados com ela. Essa pressuposição está ausente na noção lógica de 'algum'. No sentido lógico de 'algum', está perfeitamente correto dizer que alguns dos meus amigos estão zangados comigo, mesmo que todos eles estejam.

Além dos quantificadores 'todo' e 'algum', também podemos considerar o quantificador negado 'nenhum'. Enunciados da forma 'nenhum A é *B*' afirmam que os conjuntos *A* e *B* são disjuntos, isto é, não têm elementos em comum. A única expressão ocorrendo na forma acima é 'é'. Essa expressão (bem como suas variantes gramaticais 'são', 'está', 'foi', 'eram', etc.) chama-se *elo*, pois ela liga ou une um sujeito e um predicado.

Cada enunciado do argumento no exemplo 5.1 está caracterizado por um quantificador seguido por uma classe de atributos, um elo e, finalmente, uma outra classe de atributos. Enunciados assim construídos chamam-se *enunciados categóricos*. Pode ser útil considerar as negações de enunciados categóricos como enunciados categóricos, embora muitos autores não pensem assim. A primeira e a segunda classe de atributos num enunciado categórico chamam-se, respectivamente, *termo sujeito* e *termo predicado*. Enunciados categóricos não-negados assumem quatro formas distintas. Cada enunciado categórico é tradicionalmente designado por uma letra:

Designação	*Forma*
A	Todo *S* é *P*.
E	Nenhum *S* é *P*.
I	Algum *S* é *P*.
O	Algum *S* não é *P*.

Aqui, '*S*' representa o termo sujeito e '*P*' o termo predicado. Este capítulo descreve, em linhas gerais, a lógica dos enunciados categóricos. Tal lógica é o ramo mais antigo da lógica, tendo sido elaborada e desenvolvida por Aristóteles no século IV a.C. (Ela passou por importantes mudanças no século XIX — algumas das quais serão mencionadas na próxima seção.)

Note que enunciados da forma *O* contêm a expressão 'não'. O 'não' atua nos enunciados categóricos de duas maneiras diferentes. Quando aplicado à sentença toda, ele expressa a negação funcional-veritativa — a operação familiar dos Capítulos 3 e 4, que torna enunciados verdadeiros em falsos e enunciados falsos em verdadeiros. Porém, quando aplicado a uma classe de atributos, tal como nas sentenças da forma *O*, o 'não' tem função diferente. Por exemplo: em 'Algumas árvores não são carvalhos', o 'não' modifica somente a classe de atributos, 'carvalhos', e não a sentença toda. O resultado é uma nova classe de atributos, os 'não carvalhos' (ou, mais claramente, 'não-carvalhos'), que designa o conjunto de todas as coisas que são não-carvalhos. (Tal conjunto é heterogêneo, pois pode conter qualquer coisa mas não os carvalhos.) Em geral, o conjunto de todas as coisas que não são elementos de um dado conjunto *S* chama-se *complemento* de *S*. Quando o 'não' se aplica a uma classe de atributos, ele expressa a *complementação* em vez de negação. Assim, 'Algumas árvores não são carvalhos', onde 'não' expressa complementação, afirma que o conjunto das árvores tem pelo menos um elemento em comum com o complemento do conjunto de carvalhos; isto é, que existem árvores que não são carvalhos. Seu significado não é o mesmo que o de 'Não é o caso que algumas árvores são carvalhos', onde 'Não é o caso que' expressa a negação funcional-veritativa. 'Algumas árvores não são carvalhos' é verdadeira (por exemplo, existem pinheiros, seringueiras). Contudo, 'Não é o caso que algumas árvores são carvalhos' é falsa, pois 'Algumas árvores são carvalhos' é verdadeira.

Por causa dessa dualidade, o 'não' é ambíguo na lógica dos enunciados categóricos e deve ser tratado com cautela. Para amenizar o equívoco, no texto deste capítulo, usaremos 'Não é o caso que' ou o símbolo '~' para expressar a negação e 'não' ou 'não-', exclusivamente, para expressar complementação. Entretanto, nos exercícios, o 'não' é empregado num dos dois sentidos; cabe ao leitor determinar qual é o caso, se está aplicado à sentença toda ou somente a uma classe de atributos da sentença (por exemplo, ver problema resolvido 5.1. (*o*) e (*t*)).

O prefixo 'não-' expressa complementação de modo não-ambíguo nos enunciados categóricos. Outros prefixos tais como 'in-', 'anti -', 'im-', 'i-', etc., podem também expressar complementação; nesses casos, é preciso ter cautela, pois eles podem expressar também outras formas de oposição. Por exemplo, o conjunto das coisas impossíveis é o complemento do conjunto das coisas possíveis. Uma coisa é possível ou impossível; não existe uma terceira opção. Mas o conjunto das coisas infelizes não é o complemento do conjunto das coisas felizes. Muitas coisas (tais como pedras ou pessoas num estado emocional neutro) não estão felizes nem infelizes. O complemento do conjunto das coisas felizes é o conjunto das coisas não-felizes (o qual inclui aquelas coisas que são infelizes, bem como as coisas que não são felizes nem infelizes).

A classe de atributos de um enunciado categórico pode ocorrer com alguns operadores de complementação, ou mesmo sem eles. Assim, 'Todos os invertebrados são não-mamíferos', é um enunciado da forma *A* com termo sujeito e termo predicado complementados. Enunciados da forma 'Algum *S* não é *P*' têm duas formas. Eles são enunciados da forma *O* com o termo predicado '*P*', mas também podem ser considerados como enunciados da forma *I* com o termo predicado complementado 'não-*P*'. (É usual escrever 'Algum *S* não é *P*' quando se quer acentuar a forma *O* e 'Algum *S* é não-*P*' quando é a forma *I* que se quer acentuar. Na verdade, eles são o mesmo enunciado, pois nesses contextos 'não' e 'não-' expressam a complementação.)

Algumas vezes, mais de um operador de complementação aplica-se a uma mesma classe de atributos. Complementação dupla é o mesmo que negação dupla, em que duas negações "se cancelam". Assim, 'Todos os homens são não-imortais' — enunciado da forma *A* com um termo predicado duplamente complementado — é logicamente equivalente ao enunciado da forma *A* 'Todos os homens são mortais'. Na lógica dos enunciados categóricos costuma-se executar o "cancelamento" automaticamente; ou seja, considerar o enunciado que envolve complementação dupla como idêntico ao enunciado do qual removeu-se a dupla complementação.

PROBLEMA RESOLVIDO

5.1 Algumas das seguintes sentenças expressam enunciados categóricos, outras não. Formalize aquelas que são e indique qual das quatro formas (ou suas negações) elas exemplificam.

a) Todo peculatário é repulsivo.

b) Não é o caso que todo peculatário é repulsivo.

c) Todo peculatário é não-repulsivo.

d) Algum peculatário não é repulsivo.

e) Se Jack é um peculatário, então Jack é repulsivo.

f) Ninguém nesta sala está se retirando.

g) Ninguém está nesta sala.

h) Algumas daquelas toalhas estão úmidas e algumas não estão.

i) Diamante é caro.

j) Poucos mineradores não eram fumantes.

k) Sócrates é mortal.

l) Qualquer diversão é ilegal.

m) Não é verdade que qualquer diversão é ilegal.

n) A morte é ubíqua.

o) Todo homem não é racional.

p) Está chovendo.

q) Existem ratos no sótão.

r) Não é verdade que nenhum esqueleto está sepultado na praça.

s) 2 + 2 = 4.

t) Nem todos os não-bêbados são não-fumantes.

Solução

a) Todo P é R (usando 'P' para 'peculatário' e 'R' para 'repulsivo' ou, na forma padrão, 'coisa repulsiva'); forma A.

b) ~(Todo P é R); negação da forma A.

c) Todo P é não-R; forma A com o termo predicado complementado.

d) Algum P não é R; forma O (também podemos considerar como enunciado da forma I 'Algum P é não-R').

e) A sentença é um condicional e não um enunciado categórico.

f) Nenhum P é R (usando 'P' para 'pessoas nesta sala' e 'R' para 'coisas que estão se retirando'); forma E.

g) Nenhum P é S (onde 'P' significa 'pessoas' e 'S' significa 'coisas nesta sala'); forma E.

h) É a conjunção de dois enunciados categóricos, o primeiro é da forma I e o segundo é da forma O; mas a sentença, em si, não é um enunciado categórico.

i) Essa sentença pode ser expressa, com alguma distorção, como um enunciado categórico da forma A 'Todo D é C', onde 'D' significa 'diamante' e 'C' significa 'coisa cara'. Em muitos contextos, entretanto, ela poderia significar não que todo diamante, sem exceção, é caro, porém, mais razoavelmente, que diamante é caro. Assim, a interpretação categórica não é precisa.

j) Essa sentença pode ser expressa, com alguma distorção, como um enunciado da forma *O* 'Algum *M* não é *F*' (que pode também ser visto como um enunciado da forma *I* com termo predicado complementado). A distorção resulta do fato de que a frase 'poucos' indica que o número era menor, uma conotação perdida na formalização.

k) Essa sentença pode ser lida como 'Toda coisa que é Sócrates é coisa mortal', isto é, como um enunciado da forma *A* 'Todo *S* é *M*' contudo, muitos lógicos preferem tratar 'Sócrates' como um nome próprio (ver Seção 6.2).

l) Todo *D* é não-*L* (onde '*D*' significa 'coisa divertida' e '*L*' significa 'coisa legal'); forma *A*.

m) ~(Todo *D* é não-*L*); negação da forma *A*.

n) Não pode ser expressa numa forma categórica sem considerável distorção.

o) Essa sentença é ambígua, pois depende de como o 'não' é lido; como negação ou como complementação. Se é lido como negação, então (usando '*H*' para 'homem' e '*R*' para 'coisa racional') a sentença é '~(todo *H* é *R*)'; enunciado negado da forma *A*, que afirma que nem todo homem é racional, deixando em aberto a possibilidade de que algum é. Se 'não' é lido como complementação, então a sentença é 'Todo *H* é não-*R*'; enunciado da forma *A* com termo predicado complementado. Este último enunciado diz que todo homem é irracional; isto é, que nenhum homem é racional.

p) Não é categórico.

q) Algum *R* é *S* (usando '*R*' para 'rato' e '*S*' para 'coisas no sotão'); forma *I*.

r) ~(Nenhum *E* é *S*) (onde '*E*' significa 'esqueletos' e '*S*', 'coisas que estão sepultadas na praça); negação da forma *E*.

s) Não é categórico.

t) ~(Todos os não-*B* são não-*F*); negação da forma *A* com termos sujeito e predicado complementados.

Observe que, nesse contexto, 'nem' expressa negação; o que está sendo dito é que não é o caso que todos os não-bêbados são não-fumantes.

Muitas vezes, quando se trabalha com as proposições categóricas, é útil visualizar as relações entre os conjuntos. A maneira mais nítida de se fazer isso é através dos *diagramas de Venn* — uma invenção do matemático John Venn do século XIX. Um enunciado categórico é representado num diagrama de Venn por meio de dois círculos que se interceptam, os quais representam os conjuntos designados pelos dois termos do enunciado. A região interna do círculo representa o conteúdo do conjunto; a região externa do círculo representa o conteúdo do seu complemento. A região determinada pela intersecção dos dois círculos representa os elementos (se existirem) que os conjuntos têm em comum. Para mostrar que um conjunto ou uma parte do conjunto não tem elementos, sombreamos a região do diagrama que o representa.

A forma *E*, 'Nenhum *S* é *P*', afirma que os conjuntos *S* e *P* não têm elementos em comum. Portanto, seu diagrama de Venn consiste em dois círculos que se interceptam (um para *S* e um para *P*), sendo que a região correspondente a intersecção está sombreada (ver fig. 5-1). Regiões em branco (não-sombreadas) do diagrama são regiões nas quais não temos informação; *se uma região está em branco, não devemos assumir que os respectivos conjuntos têm elementos*. Desse modo o diagrama indica que pode ou não haver objetos em *S* e que pode ou não haver objetos em *P*, mas, certamente, não há objetos em ambos ao mesmo tempo.

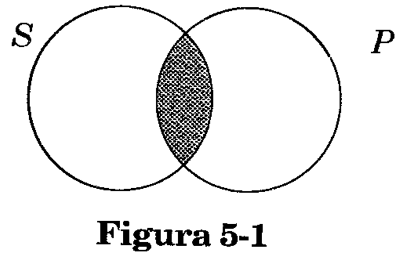


Figura 5-1

A forma A, 'Todo S é P', diz que S é um subconjunto de P, ou que S não tem elementos que não estejam também em P. Assim, no diagrama, a região do círculo de S externa ao círculo P está sombreada (ver fig. 5-2).

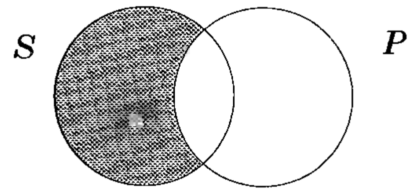


Figura 5-2

Para mostrar que um conjunto ou uma parte do conjunto tem pelo menos um elemento, colocamos um x na região correspondente do diagrama. A forma I, 'Algum S é P', que diz que S e P têm pelo menos um elemento em comum, é representada como mostra a fig. 5-3.

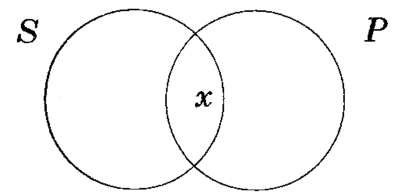


Figura 5-3

A forma O, 'Algum S não é P', que afirma que S tem pelo menos um elemento que não está em P, é representada pela fig. 5-4.

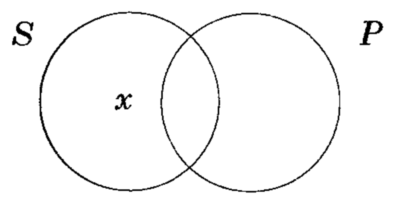


Figura 5-4

Mais uma vez, as regiões do diagrama de um enunciado que não estão sombreadas e que não contêm um x são regiões para as quais o enunciado não dá informação. Elas podem ou não conter elementos; o enunciado nada diz. Para enunciados que envolvem complementação, é útil emoldurar (por meio de um retângulo) o diagrama. A região interna ao retângulo representa o conjunto de todas as coisas — informalmente, o universo. Os elementos do complemento de um conjunto são, então, representados pela região externa ao círculo daquele conjunto, mas interna ao retângulo.

PROBLEMA RESOLVIDO

5.2 Desenhe um diagrama de Venn para 'Todo não-S é P.'

Solução

Essa forma afirma que o complemento do conjunto S é um subconjunto do conjunto P. Isso significa que qualquer parte do complemento de S que está fora de P é vazia. No diagrama, o complemento de S é representado pela região externa ao círculo S, mas interna ao retângulo. Para mostrar que a parte dessa região externa ao círculo P é vazia, nós a sombreamos, como mostra a fig. 5-5. O resultado diagrama 'Todo não-S é P'.

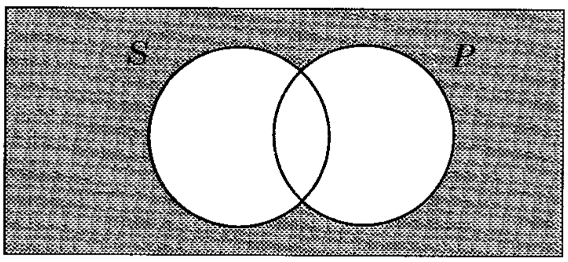


Figura 5-5

5.3 Desenhe um diagrama de Venn para 'Algum não-S não é P'.

Solução

'Algum não-S não é P' diz que alguns elementos do complemento de S são, também, elementos do complemento de P. O complemento de um conjunto é representado pela região externa ao seu círculo, mas interna ao retângulo. Assim, para diagramar essa forma, colocamos um x externo aos dois círculos, mas, interno ao retângulo (ver fig. 5-6).

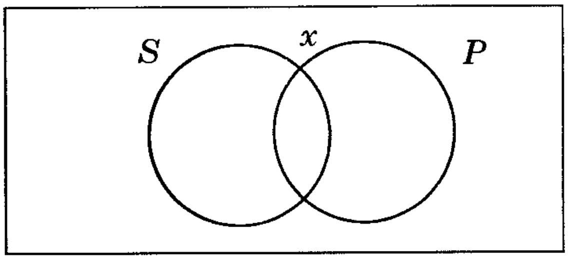


Figura 5-6

5.4 Desenhe um diagrama de Venn para 'Nenhum não-S é P'.

Solução

Essa é a forma E com termo sujeito complementado. Ela afirma que o complemento de S não tem elemento em comum com P, e, assim, no diagrama sombreamos a região em que P e o complemento de S se interceptam (ver fig. 5-7).

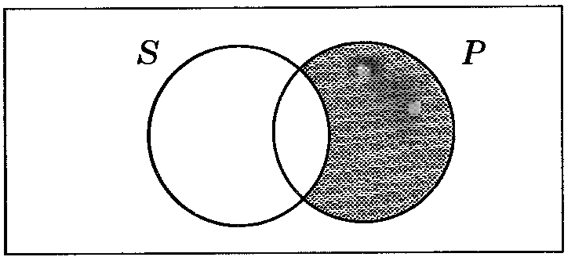


Figura 5-7

A negação de um enunciado categórico é representada num diagrama de Venn a partir do enunciado categórico não-negado e permutando-se as regiões sombreadas com os xs, isto é, sombreamos qualquer região na qual há um x e substituímos qualquer região sombreada por um x.[1]

1. Essa maneira de representar a negação é correta somente para a interpretação moderna (booleana) dos enunciados categóricos. Surge complicação quando ela se aplica à interpretação tradicional (aristotélica), que não será discutida aqui (ver Seção 5.2 para um breve comentário a respeito da diferença entre essas duas interpretações).

5.5 Desenhe um diagrama de Venn para '~(Todo *S* é *P*)'.

Solução

O diagrama para 'Todo *S* é *P*' é dado na fig.5.2. Para diagramar sua negação, apagamos a região sombreada e a substituímos por um *x* (ver fig. 5-8). Note que o resultado é o mesmo que o diagrama para a forma *I*, 'Algum *S* não é *P*' (fig. 5-4). Isso mostra que '~(Todo *S* é *P*)' e 'Algum *S* não é *P*' são maneiras diferentes de se dizer a mesma coisa. Se uma delas é verdadeira, então a outra também é; ou seja, uma segue-se validamente da outra.

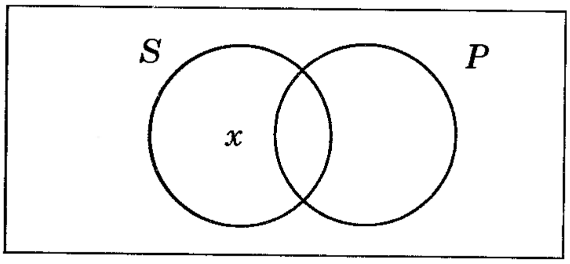


Figura 5-8

5.6 Desenhe um diagrama de Venn para '~(Algum *S* não é *P*)'.

Solução

O diagrama para 'Algum *S* não é *P*' é dado como na fig. 5-4. Para diagramar sua negação, apagamos a região que originalmente continha o *x* e a sombreamos (ver fig. 5-9); que é justamente o diagrama para 'Todo *S* é *P*'. Isso mostra que enunciados da forma '~(Algum *S* não é *P*)' podem ser inferidos validamente de enunciados da forma 'Todo *S* é *P*', e vice-versa.

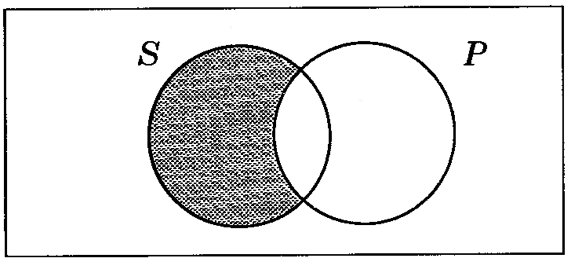


Figura 5-9

5.7 Desenhe um diagrama de Venn para '~(Todo *S* é não-*P*)'.

Solução

'Todo *S* é não-*P*' diz que *S* é um subconjunto do complemento de *P*; isto é, que *S* e *P* não têm elementos em comum. Seu diagrama é o mesmo que o de 'Nenhum *S* é *P*' (ver fig. 5-10). Desse modo, o diagrama para a negação de 'Todo *S* é não-*P*' é como o da fig. 5-10, no qual trocamos a região sombreada por um *x* (ver fig. 5-11). Note que tal diagrama é o mesmo que o diagrama para 'Algum *S* é *P*' e, portanto, os enunciados dessas duas formas dizem a mesma coisa; conseqüentemente um implica validamente o outro.

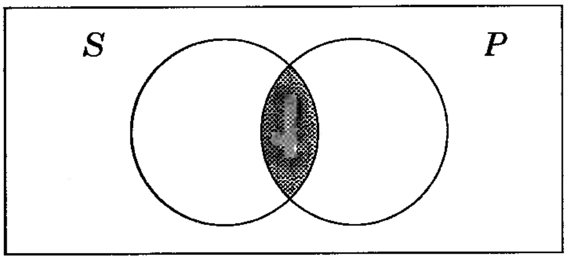


Figura 5-10

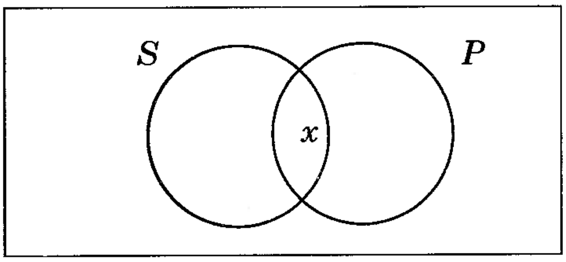


Figura 5-11

5.2 Inferências imediatas

Inferências que partem de um enunciado categórico para outro enunciado categórico chamam-se *inferências imediatas*. Como nos sugerem alguns dos problemas da seção anterior, podemos testar a validade de formas de inferência imediata usando os diagramas de Venn. O teste é simples — para analisar a validade de uma forma de inferência, construímos um diagrama para as suas premissas. Se ao fazermos isso tivermos, também, diagramado a conclusão, então a forma é válida. Caso contrário, ela é inválida. Se duas formas de enunciados têm exatamente o mesmo diagrama, então ao se diagramar uma, automaticamente, diagrama-se a outra. Portanto, elas são logicamente equivalentes; isto é, qualquer instância de uma segue-se validamente de uma instância qualquer da outra. É o caso, por exemplo, dos enunciados '~(Todo S é P)' e 'Algum S não é P', ilustrados no problema 5.5. O mesmo acontece com 'Todo S é P' e '~(Algum S não é P)', como mostrou o problema 5.6. Como conseqüência desses dois resultados temos que: um par qualquer consistindo em um enunciado da forma A e um da forma O, tendo o mesmo termo sujeito e termo predicado, são *contraditórios*; ou seja, cada um implica validamente a negação do outro, e a negação de cada um implica validamente o outro. Quaisquer dois enunciados da forma I e da forma E, com o mesmo termo sujeito e termo predicado, também são contraditórios, como o leitor pode verificar através do diagrama de Venn.

Inferências a partir de um elemento do par de enunciados contraditórios para a negação do outro, ou vice-versa, também são um tipo de inferência imediata; existe uma variedade de outros tipos. Duas formas de enunciados categóricos se dizem *conversas* se uma delas resultar da outra quando permutamos o termo sujeito com o termo predicado. Assim, 'Algum P é S' é o convertido de 'Algum S é P'. 'Todo P é S' é o convertido de 'Todo S é P', e assim por diante. Uma inferência que parte de um enunciado categórico (convertente) para a sua conversa (convertido) chama-se *conversão*. Uma conversão é uma inferência imediata válida para as formas E e I, porém inválida para as formas A e O.[2]

2. Lembramos que formas inválidas podem ter instâncias válidas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

5.8 Utilize um diagrama de Venn para mostrar que a conversão da forma *E* é válida.

Solução

Ao compararmos o diagrama para a forma *E* (fig. 5-1) com o diagrama de sua conversa (fig. 5-12), notamos que eles são iguais; cada um deles estabelece que os conjuntos *S* e *P* não têm elementos em comum. Assim, um enunciado da forma *E* e sua conversa são logicamente equivalentes. Logo, um segue-se validamente do outro.

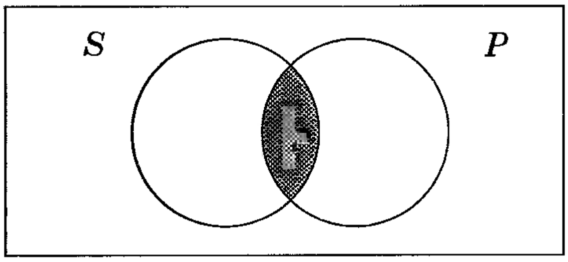


Figura 5-12

5.9 Utilize um diagrama de Venn para mostrar que a conversão da forma *A* é inválida.

Solução

A conversa de 'Todo *S* é *P*' é 'Todo *P* é *S*', cujo diagrama é mostrado na fig. 5-13. O diagrama para 'Todo *S* é *P*' (fig. 5-2) indica que o conjunto das coisas que são *S* e não são *P* é vazio. O diagrama para 'Todo *P* é *S*' indica que o conjunto de todas as coisas que são *P* e não são *S* é vazio. O primeiro conjunto pode ser vazio, enquanto o segundo não, pois 'Todo *S* é *P*' é verdadeiro enquanto 'Todo *P* é *S*' é falso. Por exemplo, seja *S* o conjunto dos vendedores e P o conjunto das pessoas. Então, a premissa 'Todos os vendedores são pessoas' é verdadeira (o conjunto das coisas que são vendedores e não são pessoas é vazio). Mas a conclusão 'Todas as pessoas são vendedores' é falsa (o conjunto de todas as coisas que são pessoas e não são vendedores não é vazio!).

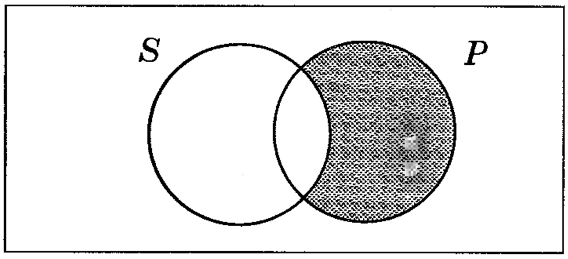


Figura 5-13

Logo, a forma

Todo S é P.
$\therefore$ Todo P é S.

é inválida. Observe que, nesse mesmo exemplo, se 'P' significa 'vendedores' e 'S' significa 'pessoas', então a forma

Todo P é S.
$\therefore$ Todo S é P.

é, também, inválida. (Essa forma é uma notação variante da primeira.) Assim, a conversão é uma forma inválida nas duas direções.

O leitor pode verificar, de modo análogo, que a conversão da forma I é válida e a da forma O é inválida.

Dois enunciados categóricos se dizem *contrapositivos* se um resulta do outro quando substituímos, respectivamente, seus termos sujeito e predicado pelo complemento de seus termos predicado e sujeito.

Por exemplo, 'Todo S é P' e 'Todo não-P é não-S' são contrapositivos. Uma inferência que parte de um elemento do par de enunciados contrapositivos para o outro chama-se *contraposição*. A contraposição para as formas A e O é válida, porém é inválida para as formas E e I. Demonstramos, a seguir, a invalidade para a forma E e deixamos os outros casos para o leitor.

PROBLEMA RESOLVIDO

5.10 Utilize um diagrama de Venn para mostrar que a contraposição para a forma E é inválida.

Solução

O contrapositivo do enunciado da forma E 'Nenhum S é P' é 'Nenhum não-P é não-S', que estabelece que o complemento de P não tem elementos em comum com o complemento de S. Para diagramar esse enunciado, sombreamos a região do diagrama que representa as coisas que são, ao mesmo tempo, não-S e não-P (fig. 5-14). 'Nenhum S é P', como mostra seu diagrama (fig. 5-1), tem uma região vazia, que é um subconjunto do universo totalmente diferente do subconjunto sombreado da fig. 5-14. Somente um desses subconjuntos pode ser vazio; nenhuma premissa diagrama automaticamente a outra; logo nenhum enunciado implica o outro.

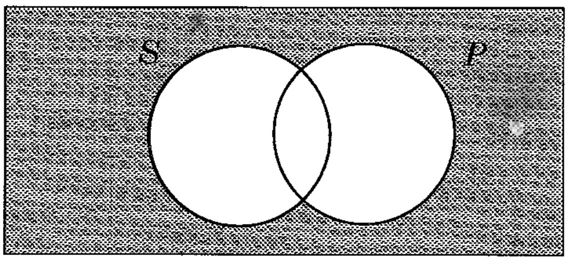


Figura 5-14

Para ilustrar, considere S como sendo o conjunto das cobras e P o conjunto das pessoas. Então, a premissa 'Nenhuma cobra é uma pessoa' é verdadeira, mas sua contrapositiva, 'Nenhuma não-pessoa é uma não-cobra', é falsa; por exemplo, abelha é não-pessoa e é não-cobra. Assim, vemos que a forma

Nenhum S é P.
$\therefore$ Nenhum não-P é não-S.

é inválida. Um exemplo de que a forma

Nenhum não-P é não-S.
$\therefore$ Nenhum S é P.

é inválida é o seguinte: suponha que qualquer coisa que existe é física ou espiritual e que alguma coisa, digamos uma pessoa, é ambos. (Isso é logicamente possível, mesmo que ela não seja realmente.) Então, a premissa 'Nenhuma das coisas não-físicas são coisas não-espirituais' deve ser verdadeira, porém a conclusão 'Nenhuma das coisas espirituais são coisas físicas' deve ser falsa, com exceção das pessoas. Assim, é logicamente possível que a premissa seja verdadeira e a conclusão seja falsa. Contraposição para proposições da forma E é, portanto, inválida nas duas direções.

As quatro formas categóricas básicas podem ser classificadas em relação à *quantidade* e *qualidade*. Há dois tipos de qualidade, *afirmativa* e *negativa*, e dois tipos de quantidade, *universal* e *particular*. Cada uma das quatro formas básicas de enunciados categóricos tem uma combinação característica de qualidade e quantidade, como indica a seguinte tabela:

		QUALIDADE	
		Afirmativa	Negativa
QUANTIDADE	Universal	*A*	*E*
	Particular	*I*	*O*

Um terceiro tipo de inferência imediata é aquele que muda a qualidade de um enunciado categórico (enquanto sua quantidade permanece a mesma) e substitui o termo predicado pelo seu complemento. Esse tipo de inferência chama-se *obversão*; enunciados obtidos de um outro por obversão chamam-se *obversos*.

Por exemplo, o obverso de 'Nenhum *S* é *P*' é 'Todo *S* é não-*P*. O observo de 'Algum *S* não é *P*' é ele próprio (mudando a qualidade obtém-se 'Algum *S* é *P*' e, substituindo-se o termo predicado '*P*' pelo seu complemento 'não-*P*', obtém-se 'Algum *S* não é *P*'). Enunciados categóricos obversos são sempre logicamente equivalentes; seus diagramas de Venn são iguais.

A lógica dos enunciados categóricos desenvolvida originalmente por Aristóteles reconhecia como válida algumas inferências imediatas que não são consideradas como válidas pela lógica moderna. Essa discrepância se justifica, pois a lógica aristotélica pressupunha que todos os termos sujeitos e predicados designavam conjuntos não-vazios; a lógica moderna não assume tal restrição.

Para ver as conseqüências dessa pressuposição, considere os enunciados da forma *I* e da forma *O* com mesmo termo sujeito e termo predicado; isto é, 'Algum *S* é *P*' e 'Algum *S* não é *P*'. Admitamos (tal como na lógica aristotélica) que os termos '*S*' e '*P*' designam conjuntos não-vazios. Desse modo, o conjunto *S* tem elementos; se nenhum desses elementos é *P*, então algum (na verdade, todos eles) deve ser não-*P*, e se nenhum é não-*P*, então algum (na verdade, todos) deve ser *P*. Logo, 'Algum *S* é *P*' e 'Algum *S* não é *P*' não podem ser ambos falsos. Da negação de um deles podemos inferir validamente o outro. Esses dois enunciados, assim relacionados, são chamados *subcontrários* na lógica aristotélica. A relação de subcontrariedade foi considerada a base para as inferências imediatas válidas. Contudo, se eliminarmos a pressuposição de que o termo sujeito é não-vazio, tais inferências tornar-se-ão inválidas. Por exemplo, suponha que '*S*' é o termo 'submarino com mais de 2 km de comprimento'. (Não existe tal coisa, evidentemente.) Então, não importando o que é '*P*', os enunciados 'Algum *S* é *P*' e 'Algum *S* não é *P*' são ambos falsos. É falso, pois, por exemplo, tanto alguns submarinos com mais de 2 km de comprimento são cor-de-rosa como alguns submarinos com mais de 2 km de comprimento não são cor-de-rosa — simplesmente porque não existem submarinos com mais de 2 km de comprimento. Não podemos inferir validamente um desses enunciados a partir da negação do outro.

A pressuposição de não-vazio limitou a aplicabilidade da lógica aristotélica. Quando essa pressuposição foi abandonada, a lógica simplificou-se consideravelmente. Desse modo, uma boa parte da lógica aristotélica foi deixada de lado, e as inferências extras por ela reconhecida (aquelas envolvendo enunciados subcontrários) foram eliminadas dos sistemas lógicos subseqüentes.

Por outro lado, aceitar termos vazios como o faz a lógica moderna cria um problema: Qual é o valor-verdade para os enunciados da forma *A* com termo sujeito vazio? Por exemplo, o enunciado 'Todos os submarinos com mais de 2 km de comprimento são cor-de-rosa' é verdadeiro ou falso? Num certo sentido, isso não importa, já que tais submarinos não existem; mas, do ponto de vista de generabilidade e de completude, requer uma decisão. A lógica moderna foi bem-sucedida, pois estabeleceu que todos os enunciados da forma *A* com termo sujeito vazio são sempre verdadeiros. Assim, o enunciado 'Todos os submarinos com mais de 2 km de comprimento são cor-de-rosa' é verdadeiro — como, surpreendentemente, também o é o enunciado da forma *A* 'Todos os submarinos com mais de 2 km de comprimento não são cor-de-rosa' —, o que nos parece ser uma contradição.

Contudo, essa aparente contradição é ilusória. O 'não' no segundo enunciado expressa complementação e não negação. Quando *S* é vazio, 'Todo *S* é *P*' diz simplesmente que o conjunto vazio é um subconjunto do conjunto *P* e 'Todo *S* não é *P*' diz que o conjunto vazio é um subconjunto do complemento de *P*. Isso não é uma contradição, pois, por uma convenção da matemática moderna, o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto. (A convenção lógica de que todas as proposições da forma *A* com termo sujeito vazio são verdadeiras é, na verdade, do mesmo tipo que a convenção matemática.)

5.3 Silogismos categóricos

Inferências imediatas são argumentos com uma só premissa, em que a premissa e a conclusão são enunciados categóricos. *Silogismos categóricos* são argumentos com duas premissas e uma conclusão, sendo todas enunciados categóricos. Um argumento para ser qualificado como um silogismo categórico deve estar composto exatamente de três classes de atributos: o termo sujeito e o termo predicado da conclusão (que se chamam, respectivamente, *termo menor* e *termo maior* do silogismo) e, ainda, um terceiro termo (denominado *termo médio*) que ocorre nas duas premissas. Além disso, o termo maior e o termo menor devem, cada um, ocorrer numa premissa.

O conceito de silogismo categórico devido a Aristóteles, é a classe de argumentos escolhida nos estudos iniciais. O argumento dado no início deste capítulo

Alguns quadrúpedes são gnus.

Todos os gnus são herbívoros.

$\therefore$ Alguns quadrúpedes são herbívoros.

é um silogismo categórico. Seu termo maior é 'herbívoros', seu termo menor é 'quadrúpedes' e seu termo médio é 'gnus'.

Os diagramas de Venn fornecem um teste rápido e eficaz para a validade das formas de silogismos categóricos. Para diagramar uma forma silogística, desenhamos três círculos que se interceptam, os quais representam os três termos das premissas. Os círculos são rotulados (em qualquer ordem) com letras que representam esses três termos. Para a forma do argumento acima, utilizamos as letras '*Q*', '*G*' e '*H*' para 'quadrúpedes', 'gnus' e 'herbívoros', respectivamente (fig. 5-15). Ao se desenhar é importante que os três círculos se interceptem numa certa região, a qual representa as coisas comuns aos três conjuntos *Q*, *G* e *H*.

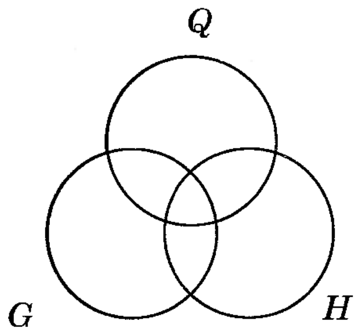


Figura 5-15

Diagramamos uma premissa de cada vez. O diagrama resultante deve ser utilizado para testar a validade da forma, do mesmo modo feito para as inferências imediatas: se ao diagramar as premissas tivermos, automaticamente, diagramado também a conclusão, então a forma é válida; caso contrário, a forma é inválida.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

5.11 Utilize um diagrama de Venn para determinar se o argumento acima é válido.

Solução

A primeira premissa afirma que o conjunto dos quadrúpedes tem pelo menos um elemento em comum com o conjunto dos gnus, portanto colocamos um x na região que é interceptada pelos dois círculos Q e G. Entretanto, essa região está dividida em duas partes pelo círculo H. Em qual dessas duas partes devemos colocar o x? É claro que sabemos que os gnus são herbívoros e, portanto, devemos colocar o x na região compreendida pelos três. Contudo, isso seria um erro. Estamos diagramando somente a informação contida na primeira premissa; introduzir conhecimentos adicionais é "trapacear". A primeira premissa não indica se os gnus de quatro pés são ou não herbívoros. Assim, para levar em conta esse fato, colocamos o x na fronteira entre os herbívoros e os não-herbívoros (fig. 5-16). A segunda premissa diz que o conjunto dos gnus é um subconjunto do conjunto dos herbívoros. Para diagramar isso, sombreamos a região que representa os gnus que não são herbívoros (fig. 5-17). Observe que, ao diagramar a segunda premissa, eliminamos a possibilidade de que o x represente um não-herbívoro. Desse modo, podemos agora ver que o x (que representa pelo menos um gnu de quatro pés) deve estar contido na região comum aos três círculos. Em outras palavras, as premissas requerem que pelo menos um gnu de quatro pés seja um herbívoro. Mas isso é justamente o que a conclusão afirma. Logo, ao diagramar as premissas, temos automaticamente diagramada a conclusão. Isso mostra que se as premissas são verdadeiras, então a conclusão também é verdadeira, isto é, o argumento é válido. Na verdade, mostrou-se que qualquer argumento dessa forma é válido, pois não faz diferença para o diagrama se '*Q*', '*G*' e '*H*' significam 'quadrúpedes', 'gnus' e 'herbívoros', respectivamente, ou qualquer outra classe de atributos.

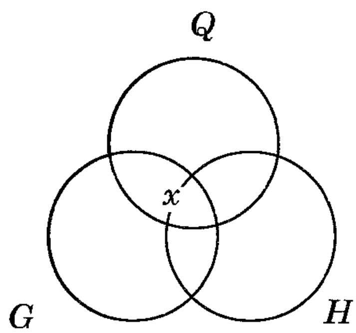


Figura 5-16

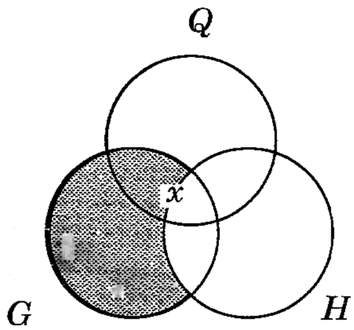


Figura 5-17

5.12 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Nenhum F é G.

Todo G é H.

$\therefore$ Nenhum F é H.

Solução

A primeira premissa afirma que os conjuntos F e G não têm elementos em comum. Assim, devemos sombrear a região compreendida pelos círculos F e G. A segunda premissa diz que G é um subconjunto de H e, portanto, sombreamos a região do círculo G que é externa ao círculo H (fig. 5-18). Isso, ainda, deixa uma região não sombreada entre os círculos F e H sobre a qual não temos informação. Em outras palavras, isso é consistente com as premissas que existem Fs que são Hs mas não são Gs. Mas se existem tais Fs, então a conclusão 'Nenhum F é H' é falsa. Logo, essa conclusão pode ser falsa enquanto suas premissas são verdadeiras. Conseqüentemente, a forma é inválida.

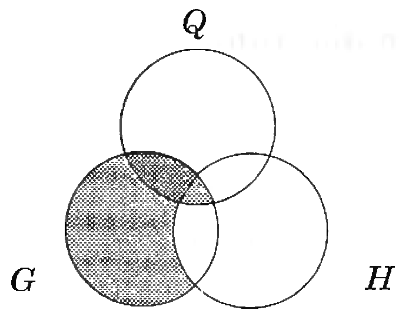


Figura 5-18

5.13 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Todo F é G.
Nenhum G é H.
∴ Nenhum F é H.

Solução

Para diagramar a primeira premissa, sombreamos a região do círculo F que é externa ao círculo G. Para a segunda premissa, sombreamos a região comum compreendida pelos círculos G e H.

Isso, automaticamente, sombreia uma parte da região compreendida pelos círculos F e H. Assim sendo, o diagrama mostra que a conclusão é verdadeira, dadas as premissas. Logo, a forma é válida (fig. 5-19).

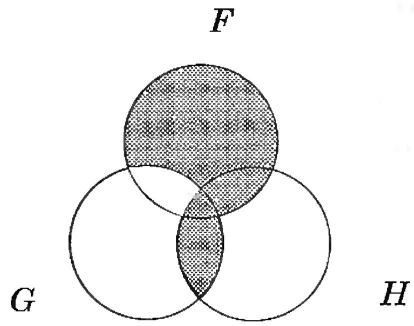


Figura 5-19

5.14 Construa um diagrama de Venn para testar a validade da seguinte forma:

Algum F é G.
Algum G é H.
$\therefore$ Algum F é H.

Solução

As premissas são diagramadas colocando-se xs nas regiões comuns a F e G e, também, aos círculos G e H, respectivamente. Deve-se colocar o x sobre a linha do círculo, pois nenhuma das premissas nos conta a qual parte x pertence. Assim, o diagrama para a forma é como mostra a fig. 5-20. Além disso ele é consistente, pois ambos os xs estão localizados na região comum aos três círculos; nesse caso F e H não precisam ter elementos em comum. Isso significa que a conclusão 'Algum F é H' pode ser falsa. Assim, as premissas não exigem a verdade da conclusão. Portanto, a forma é inválida.

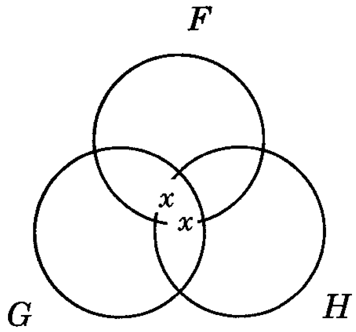


Figura 5-20

Problemas suplementares

Alguns dos seguintes argumentos podem ser formalizados como inferências que envolvem um par de enunciados categóricos ou como silogismos categóricos; outros não podem. Formalize aqueles que podem e teste a validade das formas resultantes por meio de diagramas de Venn.

1) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, não é verdade que alguém conquistou o mundo.

2) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, todo mundo não é um conquistador do mundo.

3) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, não é o caso que todo mundo conquistou o mundo.

4) Ninguém conquistou o mundo. Portanto, alguém não conquistou o mundo.

5) Toda verdade autocontraditória é surpreendente. Portanto, existem verdades autocontraditórias surpreendentes.

6) Todos os números quadrados são não-primos. Assim, todos os números primos são não-quadrados.

7) Milagres são impossíveis. Portanto, não é o caso que alguns milagres são possíveis.

8) Ou toda coisa é palpável ou nada é. Essa rocha é palpável. Logo, toda coisa é palpável.

9) Nenhum pacto sobre os controles de armas será feito agora. Assim, nenhum pacto sobre os controles de armas será feito em qualquer época.

   (*sugestão*: considere 'feito em qualquer época' como o complemento de 'feito agora'.)

10) Todo incompetente fracassa. Portanto, não é verdade que alguns que são bem-sucedidos são incompetentes.

11) Todos os que são incompetentes fracassam. Todos os que são cuidadosos são bem-sucedidos. Portanto, nenhum dos que são incompetentes são cuidadosos.

12) Tudo o que ele fala é tolice. Toda tolice é desprezível. Tudo o que ele fala é desprezível.

13) Se Jane está doente, ela não virá trabalhar. Se ela não vier trabalhar, nenhum de nós terá algo para fazer. Assim, se Jane está doente, nenhum de nós terá algo para fazer.

14) Algumas pessoas são não-fumantes. Algumas são não-bêbadas. Portanto, alguns não-fumantes são não-bêbados.

15) Qualquer material adequado é capaz de resistir àquela pressão. Nenhum metal é suficientemente forte para resistir àquela pressão. Assim, nenhum material adequado é um metal.

16) Nenhum dos jogadores foi ferido. Alguns dos jogadores erraram os exercícios. Assim, ninguém que errou os exercícios ficou ferido.

17) Todas as coisas boas devem ser aceitas. Nenhuma ditadura é uma coisa boa. Conseqüentemente, algumas ditaduras não devem ser aceitas.

18) Todo elétron tem uma carga negativa. Nenhum pósitron tem uma carga negativa. Portanto, nenhum pósitron é um elétron.

19) Todo elétron tem uma carga negativa. Nenhum pósitron tem uma carga negativa. Portanto, alguns pósitrons não são elétrons.

20) Todo alimento gorduroso que ele come é algo que apressa a morte dele. Alguma coisa que apressa a morte dele o está matando. Segue-se que um daqueles alimentos gordurosos que ele come o está matando.

Respostas a alguns problemas suplementares

1) Nenhum P é C.
$\therefore$ ~(Algum P é C).

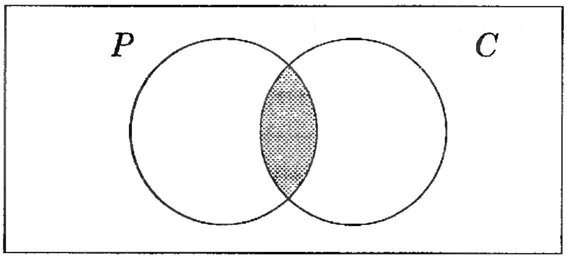


Figura 5-21

('*P*' significa 'pessoas' e '*C*' significa 'coisa que conquistou o mundo'.) Diagramamos a premissa (fig. 5-21), que afirma que os conjuntos P e C não têm elementos em comum. Ao fazer isso, também diagramamos a conclusão. O diagrama para 'Algum P é C' é o mesmo da fig. 5-3. Para diagramar sua negação, substituímos o x da fig. 5-3 e sombreamos a região que o continha. O resultado é o diagrama para 'Nenhum P é C'. Assim, a premissa e a conclusão são logicamente equivalentes; portanto, a inferência é uma forma válida.

4) Nenhum P é C.
   $\therefore$ Algum P não é C.

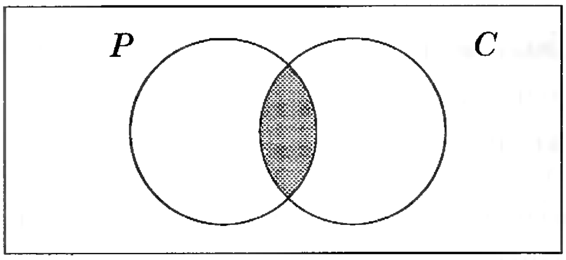


Figura 5-22

(Os símbolos utilizados são os mesmos do problema 1.) Diagramamos a premissa (fig. 5-22) e, com isso, não diagramamos a conclusão. Logo, essa forma é inválida, o que pode parecer surpreendente. Isso se justifica, pois a premissa não garante que qualquer pessoa exista. Uma parte da região interna ao círculo P está em branco, indicando que a premissa não fornece informação sobre esta região. O 'não' da conclusão expressa complementação, porém ele pode ser considerado como expressando a negação. Nesse caso, a conclusão torna-se

~(Algum P é C.)

a qual significa "não é o caso que algumas pessoas são coisas que conquistaram o mundo". Essa forma é a mesma do problema 1; portanto, é válida.

7) Todo M é não-P.
   $\therefore$ ~(Algum M é P.)

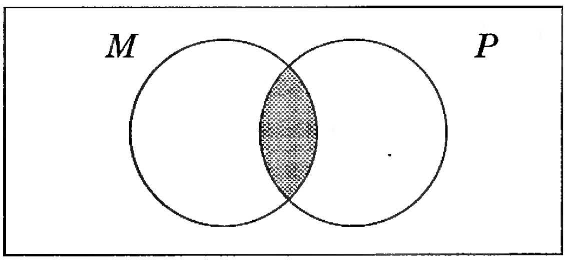


Figura 5-23

(Usamos 'M' para 'milagres' e 'P' para 'possível' ou, na forma padrão, 'coisas possíveis'.) A premissa afirma que o conjunto M é um subconjunto do complemento do conjunto P, e, assim, a região interna comum aos dois círculos é vazia. A conclusão tem a mesma forma que a conclusão do problema 1; daí, seu diagrama é aquela região sombreada (fig. 5-23). Como os diagramas para a premissa e para a conclusão são iguais, segue-se que a inferência é válida.

8) Os enunciados desse argumento (que é válido) não são categóricos.

12) Todo F é T.
Todo T é D. Válido
∴ Todo F é D.

(Usamos 'F' para 'coisas que ele fala', 'T' para 'coisas que são tolas' e 'D' para 'coisas desprezíveis'.) (Ver fig. 5-24.)

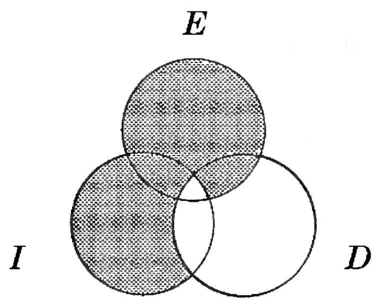


Figura 5-24

13) Os enunciados desse argumento não são categóricos, porém o argumento é válido, pois é uma instância do silogismo hipotético (Seção 3.5).

16) Nenhum J é F.
Algum J é E. Inválido
∴ Nenhum E é F.

(Usamos '*J*' para 'jogadores', '*F*' para 'coisas (ou pessoas) feridas' e '*E*' para 'coisas (ou pessoas) que erram os exercícios'.) (Ver fig. 5-25.)

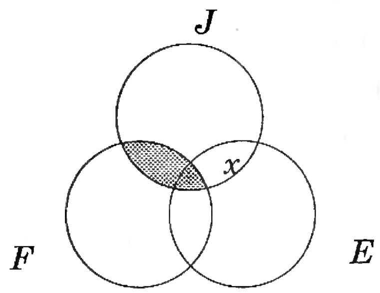


Figura 5-25

20) Todo G é A.
Algum A é M. Inválido
$\therefore$ Algum G é M.

(Usamos '*G*' para 'alimentos gordurosos que ele come', '*A*' para 'apressa a morte dele' e '*M*' para 'coisas que o estão matando'.) A formalização introduz uma distorção, pois o termo 'um' na conclusão do argumento pode significar "exatamente um", enquanto o termo 'algum', com o qual formalizamos a conclusão, significa (no sentido lógico) "pelo menos um". (Ver fig. 5-26.)

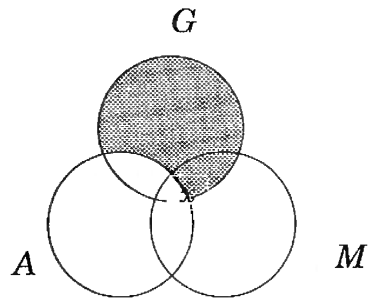


Figura 5-26

MAKRON Books

Capítulo 6

O CÁLCULO DE PREDICADOS

6.1 Quantificadores e variáveis

O Capítulo 5 introduziu os predicados e os conceitos de 'todo' e 'algum' num contexto limitado da lógica de enunciados categóricos. Neste capítulo, combinamos esses conceitos com os da lógica proposicional — nomes próprios e uma classe mais ampla de predicados — para obter um sistema lógico mais amplo, o cálculo de predicados. Num primeiro passo, notamos que a reformulação dos enunciados categóricos revela a presença de alguns dos operadores lógicos dos Capítulos 3 e 4. Considere, por exemplo, o enunciado da forma A

Todo S é P.

Usando a letra 'x' como uma variável para representar objetos individuais, expressamos tal enunciado por:

Qualquer que seja x, se x é S, então x é P.

Essa reformulação contém um condicional. Adotamos o símbolo '$\forall$', para significar "qualquer que seja" ou "para todo". Esse símbolo chama-se *quantificador universal*. Em vez de escrever 'x é S', escrevemos 'Sx' — e, de modo análogo, escrevemos 'Px'. Usando '$\rightarrow$' para o condicional, o enunciado se torna:

$$\forall x(Sx \rightarrow Px)$$

Esta é uma fórmula do cálculo de predicados.

O enunciado da forma E,

Nenhum S é P.

pode, também, ser expresso nessa notação. Ele significa

Qualquer que seja x, se x é S, então, x não é P. Isto é,

$$\forall x(Sx \rightarrow {\sim}Px)$$

Para expressar as proposições I e O, é necessário um segundo tipo de quantificador. A proposição I,

Algum S é P.

pode ser expressa como

Para pelo menos um x, x é S e x é P.

a qual contém uma conjunção. Adotamos o símbolo '$\exists$' para significar "para pelo menos um", ou, abreviadamente, "para algum". Reescrevemos a proposição I como

$$\exists x(Sx \,\&\, Px)$$

Uma maneira equivalente de expressar o significado de '$\exists$' é "existe .... tal que". Assim, a fórmula acima pode, também, ser lida como

Existe um x, tal que x é S e x é P.

Em conseqüência, '$\exists$' chama-se *quantificador existencial*.

A proposição O,

Algum S não é P.

nessa notação fica

$$\exists x(Sx \,\&\, \sim Px)$$

que significa "para pelo menos um x, x é S e x não é P", ou equivalentemente,

Existe um x tal que x é S e x não é P.

Observe que é errado traduzir a proposição I, 'Algum S é P', como

$$\exists x(Sx \rightarrow Px)$$

a qual contém um condicional, em vez de uma conjunção. Esta fórmula significa "para pelo menos um x, se x é S, então x é P". Ela pode, portanto, ser verdadeira mesmo que S não o seja. É verdadeira, por exemplo, para pelo menos um x (seja x uma pessoa que você gosta), se x tem sete cabeças, então x é esquisito. Contudo, é falso que alguma pessoa de sete cabeças é esquisita, pois não há pessoa de sete cabeças; assim, esses dois enunciados não são equivalentes. Analogamente, é incorreto usar um condicional na simbolização de uma proposição O.

Proposições A e E, por outro lado, devem sempre ser formalizadas por condicionais, e não por conjunções. É errado, por exemplo, formalizar a proposição A, 'Todo S é P', como

$$\forall x(Sx \,\&\, Px)$$

Isso significa "para todo x, x é ambos S e P". O enunciado 'Todos os tubarões são predadores' não é equivalente a 'Para todo x, x é ambos um tubarão e um predador', que significa que qualquer coisa é um tubarão predatório.

Essa nova notação revela uma estrutura, previamente desconhecida, nas proposições categóricas. Sua principal vantagem é a de combinar os conceitos da lógica categórica e proposicional para expressar uma rica variedade de estruturas lógicas.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.1 Interpretando pela letra '*C*' a sentença 'Está chovendo' e pelas letras '*R*', '*V*', '*S*' e '*T*' os predicados 'é uma rã', 'é verde', 'é saltitante' e 'é iridescente', respectivamente, formalize as seguintes sentenças:

a) Todas as rãs são verdes.

b) Nenhuma rã é verde.

c) Algumas rãs são verdes.

d) Algumas rãs não são verdes.

e) Toda coisa é uma rã.

f) Alguma coisa é uma rã.

g) Nem toda coisa é uma rã.

h) Nada é uma rã.

i) Existem rãs verdes.

j) Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente.

k) Qualquer coisa é uma rã verde.

l) Está chovendo e algumas rãs estão saltitando.

m) Se está chovendo, então todas as rãs estão saltitando.

n) Algumas coisas são verdes e algumas não são.

o) Algumas coisas são verdes e iridescentes simultaneamente.

p) Ou qualquer coisa é uma rã ou nada é uma rã.

q) Qualquer coisa ou é uma rã ou não é uma rã.

r) Todas as rãs são rãs.

s) Somente rãs são verdes.

t) Não existem rãs iridescentes.

u) Todas as rãs verdes estão saltitando.

v) Algumas rãs verdes não estão saltitando.

w) Não é verdade que algumas rãs verdes estão saltitando.

x) Se nada é verde, então não existem rãs verdes.

y) Rãs verdes saltam se e somente se não está chovendo.

Solução

a) $\forall x\,(Rx \rightarrow Vx)$

b) $\forall x\,(Rx \rightarrow \sim Vx)$

c) $\exists x(Rx\ \&\ Vx)$

d) $\exists x(Rx\ \&\ \sim Vx)$

e) $\forall xRx$

f) $\exists xRx$

g) $\sim\forall xRx$

h) $\forall x \sim Rx$ (Pode ser expresso como '$\sim\exists xRx$'.)

i) $\exists x(Vx\ \&\ Rx)$

j) $\forall x\,(Vx \vee Ix)$

k) $\forall x\,(Vx\ \&\ Rx)$

l) $\mathrm{C}\ \&\ \exists x(Rx\ \&\ Sx)$

m) $\mathrm{C} \rightarrow \forall x(Rx \rightarrow Sx)$

n) $\exists xVx\ \&\ \exists x \sim Vx$

o) $\exists x(Vx\ \&\ Ix)$

p) $\forall xRx \vee \forall x \sim Rx$

q) $\forall x\,(Rx \vee \sim Rx)$

r) $\forall x\,(Rx \rightarrow Rx)$

s) $\forall x\,(Vx \rightarrow Rx)$

t) $\sim\exists x(Ix\ \&\ Rx)$

u) $\forall x\,((Vx\ \&\ Rx) \rightarrow Sx)$

v) $\exists x((Vx\ \&\ Rx)\ \&\ \sim Sx)$

w) $\sim\exists x((Vx\ \&\ Rx)\ \&\ Sx)$

x) $\forall x \sim Vx \rightarrow \sim\exists x(Vx\ \&\ Rx)$

y) $\forall x\,((Vx\ \&\ Rx) \rightarrow (Sx \leftrightarrow \sim \mathrm{C}))$

6.2 Predicados e nomes próprios

Nem todos os enunciados contêm quantificadores. Existem, por exemplo, enunciados do tipo sujeito-predicado, os quais atribuem uma propriedade a uma pessoa ou coisa. Podemos interpretar as letras minúsculas do início e do meio de nosso alfabeto como nomes próprios para indivíduos, e adotamos a convenção, usual em lógica, de escrever o sujeito depois do predicado. Assim, a sentença

Jones é um ladrão.

é formalizada por:

Lj

onde 'j' é interpretada como o nome próprio 'Jones' e 'L' como o predicado 'é ladrão'.

Alguns predicados podem ser combinados com dois ou mais nomes próprios para formar uma sentença. Isso é verdade, por exemplo, para os verbos transitivos como 'bater', 'amar' ou 'diferir', os quais exigem um sujeito e um objeto. Eles são, usualmente, escritos em notação lógica, na ordem predicado-sujeito-objeto.[1] O enunciado

Bob ama Cathy.

é formalizado por

Abc

e a sentença

Cathy ama Bob.

é formalizada por

Acb

1. Alguns autores usam a ordem sujeito-predicado-objeto.

Verbos transitivos são uma subclasse da classe geral de *predicados de relação,* predicados que combinam dois ou mais nomes próprios para formar uma sentença. A seguir, temos alguns exemplos de predicados de relação: 'é perto de', 'é mais alto do que', 'é menos que', 'é um subconjunto de'. Alguns predicados de relação exigem três ou mais nomes. A expressão '... dá .... para ...', exige três. Na formalização de sentenças que envolvem esses predicados, as letras que representam nomes são escritas depois da letra de predicado e na ordem em que ocorrem na sentença, a não ser que se especifique outra ordem. O enunciado

Cathy deu Lulu para Bob.

é formalizado por

Dclb

Um predicado que exige somente um nome é chamado de *predicado unário* ou *predicado de grau um*. Um predicado de relação que exige dois nomes é chamado *predicado binário* ou *predicado de grau dois;* um predicado que exige três nomes é um *predicado ternário* ou *predicado de grau três* e assim por diante.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.2 Formalize os seguintes enunciados interpretando as letras '*b*' e '*c*' como os nomes próprios 'Bob' e 'Cathy'; '*M*', '*E*' e '*A*' como os predicados unários 'é mecânico', 'é enfermeira' e 'é anel'; '*L*' e '*T*' como os predicados binários 'ama' e 'é mais alto do que'; '*D*' como o predicado ternário '... dá ... para ...'.

a) Cathy é mecânica.

b) Bob é mecânico.

c) Cathy e Bob são mecânicos.

d) Ou Cathy ou Bob são mecânicos.

e) Cathy é mecânica ou enfermeira (ou ambos).

f) Se Cathy é mecânica, então ela não é enfermeira.

g) Cathy é mais alta do que Bob.

h) Bob ama Cathy.

i) Bob ama a si próprio.

j) Bob ama a qualquer pessoa.

k) Qualquer pessoa ama Bob.

l) Qualquer pessoa ama a si mesma.

m) Alguma pessoa ama a si mesma.

n) Existe alguém que Cathy não ama.

o) Existe alguém que tanto Bob como Cathy amam.

p) Existe alguém que Bob ama e alguém que Cathy ama.

q) Cathy deu alguma coisa para Bob.

r) Bob deu um anel para Cathy.

s) Todo mundo ama todo mundo.

t) Alguém ama alguém.

u) Existe alguém que ama todo mundo.

v) Todo mundo é amado por alguém (não necessariamente a mesma pessoa em cada caso).

w) Se Bob ama a si próprio, então ele ama alguma pessoa.

x) Se Bob não ama a si próprio, então ele ama ninguém.

y) Para quaisquer três objetos, se o primeiro é mais alto que o segundo e o segundo é mais alto do que o terceiro, então o primeiro é mais alto que o terceiro.

Solução

a) Mc

b) Mb

c) $Mc \,\&\, Mb$

d) $Mc \vee Mb$

e) $Mc \vee Ec$

f) $Mc \rightarrow \sim Ec$

g) Tcb

h) Lbc

i) Lbb

j) $\forall xLbx$

k) $\forall xLxb$

l) $\forall xLxx$

m) $\exists xLxx$

n) $\exists x\sim Lcx$

o) $\exists x(Lbx \,\&\, Lcx)$

p) $\exists xLbx \,\&\, \exists xLcx$

q) $\exists xDcxb$

r) $\exists x(Ax \,\&\, Dbxc)$

s) $\forall x\forall yLxy$

t) $\exists x\exists yLxy$

u) $\exists x\forall yLxy$

v) $\forall y\exists xLxy$ ou, de modo equivalente, $\forall x\exists yLyx$

w) $Lbb \rightarrow \exists xLbx$

x) $\sim Lbb \rightarrow \forall x\sim Lbx$

y) $\forall x\forall y\forall z\,((Txy \,\&\, Tyz) \rightarrow Txz)$

Ao se formalizar enunciados, deve-se ter em mente os seguintes pontos:

1) *Variáveis diferentes não designam, necessariamente, objetos diferentes*. A fórmula '$\forall x\forall yLxy$' (problema 6.2 (*s*)) afirma que para qualquer x e qualquer y (não necessariamente distintos), x ama y. Afirma, em outras palavras, não somente que qualquer pessoa ama uma outra pessoa, como também que qualquer pessoa ama a si própria.

2) *Escolha de variáveis não faz diferença para o significado*. No Problema 6.2 (*m*), por exemplo, as simbolizações '$\exists yLyy$' ou

'$\exists zLzz$' ou '$\exists xLxx$' estão corretas. Entretanto, quando dois ou mais quantificadores justapõem-se numa mesma parte da fórmula, como no problema 6.2 (*v*), uma variável diferente deve ser usada para cada quantificador. Essa fórmula pode ser escrita, equivalentemente, como '$\forall x\exists yLyx$' ou '$\forall z\exists xLxz$', mas não como '$\forall x\exists xLxx$'. Neste último caso não podemos distinguir qual quantificador governa as duas últimas ocorrências de 'x'. Devemos considerar essas fórmulas como malformadas, isto é, não-gramaticais.[2]

3) *A mesma variável usada com vários quantificadores não designa, necessariamente, o mesmo objeto, em cada caso.* Assim, $\exists xLbx$ & $\exists xLcx$' é uma formalização correta de 'Existe alguém que Bob ama e existe alguém que Cathy ama' (problema 6.2 (*p*)); um enunciado que nem afirma nem nega que cada um ama a mesma pessoa. Mas, algumas pessoas acham mais natural escrever '$\exists xLbx$ & $\exists yLcy$' uma formalização equivalente, e igualmente correta, do mesmo enunciado. Ela é legítima pois usa uma mesma variável em cada quantificador, os quais não sobrepõem-se numa mesma parte da fórmula (cada um é aplicado para o conjunto do qual é uma parte).

4) *As sentenças que misturam quantificadores universal e existencial são, geralmente, ambíguas.* À primeira vista, a sentença 'Alguém ama todo mundo' significa tanto

6.2 (*u*) Existe alguém que ama todo mundo.

como

6.2 (*v*) Todo mundo é amado por alguém (não necessariamente a mesma pessoa em cada caso).

2. Em algumas versões do cálculo de predicados, essas fórmulas são consideradas como wffs sob a convenção de que se uma variável ocorre dentro do escopo de dois ou mais quantificadores, a variável mais próxima da variável do quantificador é a que a governa.

Essas sentenças mais prolixas, mas menos ambíguas, têm formalizações não-equivalentes; como vimos na solução do problema 6.2. A diferença no significado é revelada, formalmente, pela ordem diferente dos quantificadores. As formalizações dessas sentenças não são ambíguas.

5) *A ordem dos quantificadores consecutivos afeta o significado somente quando quantificadores universal e existencial são misturados.* Ocorrências consecutivas de quantificadores universal podem ser permutadas, sem contudo, mudar o significado; o mesmo acontece com ocorrências consecutivas de quantificadores existencial. Por exemplo, '$\exists x \forall y Lxy$' (problema 6.2 (u)) e '$\forall y \exists x Lxy$' (Problema 6.2 (v)) têm significados diferentes, ao passo que '$\exists x \exists y Lxy$' e '$\exists y \exists x Lxy$' significam, ambas, simplesmente e não ambiguamente, "alguém ama alguém".

6.3 Regras de formação

A seguir, definimos, de modo mais preciso, a linguagem formal, exemplificada nas seções anteriores. Tal como no cálculo proporsicional, dividimos o vocabulário dessa linguagem em duas partes: os *símbolos lógicos* (cuja interpretação permanece fixa em todos os contextos) e os *símbolos não-lógicos* (cuja interpretação varia de problema para problema).

Símbolos lógicos

Operadores lógicos: '$\sim$', '&', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'

Quantificadores:[3] '$\forall$', '$\exists$'

Parênteses: '(', ')'

---

3. Alguns autores omitem o símbolo para o quantificador universal e escrevem 'para todo x' como '(x)'. O quantificador existencial é, então, escrito '($\exists x$)'. Algumas vezes, ambos os símbolos quantificacionais e parênteses são usados. Ocasionalmente, o símbolo '$\wedge$' é usado em vez de '$\forall$', e '$\vee$' em vez de '$\exists$'.

Símbolos não-lógicos

Letras nominais: letras minúsculas de '*a*' a '*t*'

Variáveis: letras minúsculas de '*u*' a '*z*'

Letras predicativas: letras maiúsculas

Para garantir que temos símbolos não-lógicos suficientes para qualquer formalização, permitimos a adição de subscritos numéricos aos símbolos dados. Assim, 'a_3' considera-se como uma letra nominal e 'P_{147}' como uma letra predicativa. Símbolos não-lógicos com subscritos raramente são necessários.

Definimos *fórmula* da linguagem como sendo qualquer seqüência finita de elementos do vocabulário (símbolos lógicos ou não-lógicos).

Uma *fórmula atômica* é uma letra predicativa seguida por zero ou mais letras nominais. Fórmulas atômicas com uma só letra predicativa seguida por zero letras nominais são, exatamente, as letras sentenciais (fórmulas atômicas) do cálculo proposicional. Elas são usadas para simbolizar sentenças, quando não há necessidade de se representar suas estruturas internas. Se o número de letras nominais que vêm em seguida de uma letra predicativa, numa fórmula atômica, é *n*, então essa letra representa um predicado *n*-ário. (Letras sentenciais podem ser pensadas como predicados zero-ário.)

O conceito de *fórmula bem formada* (wff) do cálculo de predicados é definido pelas seguintes regras de formação (usamos letras gregas para representar expressões):

1) Toda fórmula atômica é uma wff.

2) Se ϕ é uma wff, então $\sim\phi$ é uma wff.

3) Se ϕ e ψ são wffs, então $(\phi \& \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são wffs.

4) Se ϕ é uma wff contendo uma letra nominal α, então qualquer fórmula da forma $\forall\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$ ou $\exists\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$ é uma wff, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorre em ϕ.[4]

Somente fórmulas obtidas por aplicações dessas regras são wffs.

As regras 2 e 3 são as mesmas que as do cálculo proposicional (veja Seção 3.2). A regra 1 é mais ampla; ela nos permite mais tipos de fórmulas atômicas. A regra 4 é nova; ela gera fórmulas quantificadas a partir de uma fórmula dada, ϕ, não-quantificada. Seja ϕ a fórmula '*(Fa & Gab)*'. (Podemos dizer que ϕ é uma wff, pois '*Fa*' e '*Gab*' são wffs, pela regra 1; assim, '*(Fa & Gab)*' é uma wff, pela regra 3.) ϕ contém duas letras nominais, '*a*' e '*b*'. Ambas satisfazem, igualmente, o que a regra chama de α. Consideremos 'a'. A regra permite escolher uma variável β que não ocorre em ϕ. Qualquer variável serve, pois ϕ não contém variáveis; aseja β a variável '*x*'. Então, existem três fórmulas da forma $\phi\ \beta/\alpha$ que resultam da substituição de uma ou mais ocorrências de α (que é '*a*') em ϕ (que é '*Fa & Gab*') por β (que é '*x*'):

(Fx & Gxb) (ambas ocorrências de '*a*' substituídas por '*x*')

(Fx & Gab) (somente a primeira ocorrência de '*a*' sustituída)

(Fa & Gxb) (somente a segunda ocorrência de '*a*' substituída)

Estas fórmulas, em si, não são wffs, mas a regra 4 estabelece que o resultado de prefixá-las com um quantificador universal seguido por '*x*', que é $\forall\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$, é uma wff. Assim,

$\forall x(Fx \,\&\, Gxb)$

$\forall x(Fx \,\&\, Gab)$

$\forall x(Fa \,\&\, Gxb)$

4. Alguns autores usam outras regras de formação (alguns pontos em comum são mencionados nas notas 2 e 3..) Os leitores devem comparar as regras de formação, cuidadosamente, quando forem usadas em contextos diferentes.

são wffs, pela regra 4. A regra também permite prefixá-las com um quantificador existencial, seguido por 'x', que é $\exists\beta\phi^{\beta}/\alpha$. Portanto,

$\exists x(Fx \;\&\; Gxb)$

$\exists x(Fx \;\&\; Gab)$

$\exists x(Fa \;\&\; Gxb)$

são também, wffs. Assim, temos seis wffs quantificadas geradas a partir da wff não-quantificada, '$(Fa \;\&\; Gab)$', pela aplicação da regra 4. Podemos gerar outras usando o nome 'b' para α ou outras variáveis, que não seja 'x', para β. A regra 4 pode ser reaplicada. Por exemplo, como '$\forall x(Fx \;\&\; Gxb)$' é uma wff, podemos aplicar, pela segunda vez, a regra 4, usando 'b' para α e 'y' para β a fim de obter '$\forall y\forall x(Fx \;\&\; Gxy)$' ou '$\exists y\forall x(Fx \;\&\; Gxy)$'.

Observe que a regra 4 é a única que permite introduzir variáveis numa wff. Podemos introduzir só uma variável por vez prefixando a fórmula com um quantificador para essa variável. Assim, qualquer fórmula contendo uma variável sem um quantificador correspondente (por exemplo, 'Fx') não é uma wff. Analogamente, qualquer fórmula contendo um quantificador seguido de uma variável, sem ocorrência adicional dessa variável (por exemplo, '$\exists xP$'), não é uma wff.

Na regra 4, a restrição 'por alguma variável β que não ocorre em ϕ', assegura que os quantificadores usando a mesma variável não se sobrepõem numa mesma parte da fórmula. Por exemplo, embora '$\exists xLxa$' seja uma wff pelas regras 1 e 4, esta cláusula não permite adicionarmos um outro quantificador em x para obter, por exemplo, '$\forall x\exists xLxx$', que, como mencionamos anteriormente (comentário 2, Seção 6.2), é mal formada. Observe que essa cláusula ainda evita que uma fórmula, como '$\forall x(Fx \;\&\; \exists xGx)$', seja bem formada. Pela regra 4, ela poderia ser obtida somente de uma outra, tal como a wff '$(Fa \;\&\; \exists xGx)$', que já contém 'x'. Contudo, não são proibidas fórmulas tais como '$(\exists xFx \;\&\; \exists xGx)$', onde os quantificadores não se sobrepõem, na mesma parte da fórmula. Essa fórmula é uma wff, pois ela é obtida, pela regra 3, de '$\exists xFx$' e '$\exists xGx$', que são wffs, pelas regras 1 e 4 (veja comentário 3, Seção 6.2).

Em geral, para mostrar que uma fórmula é uma wff, mostramos que ela pode ser construída estritamente a partir das regras de formação.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.3 Mostre que '~∃*x*(~*Fx* & ∀*zGzx*)' é uma wff.

Solução

Pela regra 1, '*Fa*' e '*Gba*' são wffs. Pelas regras 2 e 4, respectivamente, '~*Fa*' e '∀*zGza*' são wffs. Aplicando a regra 3 para essas duas fórmulas, temos que '(~*Fa* & ∀*zGza*)' é uma wff. Pela regra 4, '∃*x*(*Fx* & ∀*zGzx*)' é uma wff. Portanto, pela regra 2, '~∃ *x*(*Fx* & ∀*zGzx*)' é uma wff.

As seguintes fórmulas não são wffs pelas razões dadas à direita:

∀*xLzx*	A variável '*z*' necessita de um quantificador.
(*Fa*)	Fórmulas atômicas não estão entre parênteses (veja regra 1).
(∃*xFz* & *Gx*)	A ocorrência final de '*x*' não está quantificada. Note, entretanto, que '∃*x*(*Fx* & *Gx*)' é uma wff.
∀*x*(*Fx*)	Parênteses desnecessários.
(∀*xFx*)	Parênteses desnecessários.
∃*x*∀*yFx*	'∀*y*' requer uma segunda ocorrência de '*y*' (veja regra 4).
∃*x*∃ *x*(*Fx* & ~*Gx*)	Quantificadores usando a mesma variável sobrepondo-se na mesma parte da fórmula.
∃*xFx* & ∃*xGx*	Ausência de parênteses (veja regra 3).

Tal como no cálculo proposicional, convencionamos suprimir os parênteses externos da fórmula. Assim, embora a última fórmula na lista acima não seja oficialmente uma wff, permitiremos o uso de tais fórmulas como abreviações de wffs. Por outro lado, não podemos desprezar os parênteses de '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$'.

6.4 Regras de inferência para o quantificador universal

O cálculo de predicados usa as mesmas dez regras do cálculo proposicional (e, portanto, as mesmas regras derivadas; um sumário das regras básicas e derivadas é dado no final do Capítulo 3). Temos, ainda, as regras de introdução e de eliminação para os quantificadores. Do mesmo modo que no cálculo proposicional, as regras de inferências não podem ser aplicadas para uma fórmula qualquer, em uma derivação hipotética, depois de concluída a derivação. Antes de introduzirmos as regras quantificacionais, consideremos uma demonstração no cálculo de predicados que usa, somente, regras da lógica proposicional.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.4 Prove:

$$\sim Fa \vee \exists xFx, \exists xFx \rightarrow P \vdash Fa \rightarrow P$$

Solução

1	$\sim Fa \lor \exists xFx$	P
2	$\exists xFx \rightarrow P$	P
3	Fa	H (para PC)
4	$\sim\sim Fa$	3 DN
5	$\exists xFx$	1, 4 SD
6	P	2, 5 MP
7	$Fa \rightarrow P$	3-6 PC

Apesar da complexidade interna, as fórmulas da lógica de predicados são tratadas exatamente como as fórmulas da lógica proposicional o são pelas regras do cálculo proposicional.

Introduzimos, a seguir, a primeira regra nova; a regra de eliminação do quantificador universal, EU. Eliminação universal estabelece que o que é verdadeiro para qualquer coisa deve ser verdadeiro, também, para um indivíduo particular.

Eliminação universal (EU): De uma wff quantificada universalmente, $\forall\beta\phi$, podemos inferir uma wff, da forma ϕ^{α}/β, a qual resulta substituindo-se cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α.

Esta regra é, algumas vezes, chamada *instanciação universal.* Ela é usada, por exemplo, para provar a validade de:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem.

∴ Sócrates é mortal.

Usando '*H*' para 'é um homem', '*M*' para 'é mortal' e '*s*' para 'Sócrates', formalizamos esse argumento por:

$\forall x(Hx \rightarrow Mx), Hs \vdash Ms$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.5 Prove a validade dessa forma.

Solução

1	$\forall x(Hx \rightarrow Mx)$	P
2	Hs	P
3	$Hs \rightarrow Ms$	1 EU
4	Ms	2, 3 MP

Na aplicação de EU, na linha 3, derivamos a forma da proposição 'Se Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal' da forma 'Todos os homens são mortais'. Com relação à regra EU, β é 'x', α é 's', ϕ é '$(Hx \rightarrow Mx)$' e ϕ^{α}/β é '$(Hs \rightarrow Ms)$', na qual omitimos os parênteses externos, de acordo com a convenção feita.

A seguir, algumas provas envolvendo EU.

6.6 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall xFx \vdash Ga$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	P
2	$\forall xFx$	P
3	$Fa \rightarrow Ga$	1 EU
4	Fa	2 EU
5	Ga	3, 4 MP

Como a conclusão contém a letra nominal '*a*', obviamente esta letra é usada para executar as duas passagens de EU.

6.7 Prove:

$\sim Fa \vdash \sim\forall xFx$

Solução

1	Fa	P
2	│ $\forall xFx$	H (para RAA)
3	│ Fa	2 EU
4	│ $Fa \,\&\, \sim Fa$	1, 3 & I
5	$\sim\forall\, xFx$	2-4 RAA

A conclusão é uma negação; assim, a estratégia é usar *redução*. Colocamos a conclusão como hipótese adicional, mas sem o sinal de negação, na linha 2, e mostramos que isso leva a uma contradição, na linha 4. Este fato nos permite descartar a hipótese e inferir a conclusão, na linha 5.

6.8 Prove:

$\forall x\forall yFxy \vdash Faa$

Solução

1	$\forall x\forall yFxy$	P
2	$\forall yFay$	1 EU
3	Faa	2 EU

Note que duas passagens de EU são necessárias para se remover os dois quantificadores. Essa derivação ilustra a observação 1, no final da Seção 6.2.

A regra da introdução universal IU para o quantificador universal é um pouco mais complicada. A idéia fundamental é a seguinte: se pudermos provar algo a respeito de um indivíduo *b* sem, contudo, fazer alguma suposição que distinga *b* de um outro indivíduo, então o que tivermos provado para *b* estará provado, também, para qualquer coisa. Desse modo, podemos concluir que vale para qualquer coisa.

Introdução universal é usada em demonstrações de conclusões quantificadas universalmente. Considere o argumento válido (porém incorreto):

Todos os peixes são ciprinídeos.
Todos os ciprinídeos são vistosos.
∴ Todos os peixes são vistosos.

Esse argumento é um silogismo categórico e, portanto, podemos mostrar sua validade por um diagrama de Venn, elucidado no Capítulo 5. Todavia, usaremos a técnica mais poderosa do cálculo de predicados. O argumento é formalizado por:

$$\forall x\,(Px \rightarrow Cx),\ \forall x\,(Cx \rightarrow Vx) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Vx)$$

PROBLEMA RESOLVIDO

6.9 Construa uma prova para essa forma.

Solução

1	$\forall x\,(Px \to Cx)$	P
2	$\forall x\,(Cx \to Vx)$	P
3	$Pa \to Ca$	1 EU
4	$Ca \to Va$	2 EU
5	$Pa \to Va$	3, 4 SH
6	$\forall x\,(Px \to Vx)$	5 IU

A letra nominal '*a*', que é introduzida por EU, nas linhas 3 e 4, designa um indivíduo sobre o qual não fizemos suposições ('*a*' não ocorre nas premissas 1 e 2).[5] Isso permite ao indivíduo '*a*' funcionar, na prova, como um representante de todos os indivíduos. Para a demonstração não importa quem é *a*. O que importa é que não fizemos suposições sobre *a*. Assim, tudo que provarmos sobre *a* permanecerá provado também para qualquer indivíduo. Na linha 5, provamos que, se *a* é um peixe, então *a* é vistoso. Como não fizemos suposições acerca de *a*, nossa prova é perfeitamente geral. Podemos substituir cada ocorrência da letra nominal '*a*' na demonstração por qualquer outra letra nominal, sem destruir a validade da demonstração até a linha 5. Suponhamos que trocamos '*a*' com '*b*'. Então, na linha 5, teríamos provado que se *b* é um peixe, então *b* é vistoso. Podemos provar a mesma coisa para o indivíduo *c*, o indivíduo *d* — e, em geral, para qualquer indivíduo. Assim, como não fizemos suposições especiais sobre *a*, as linhas de 1 a 5 funcionam como uma demonstração que para qualquer objeto *x*, se *x* é um peixe, então *x* é vistoso. Isso é o que IU nos permite concluir na linha 6.

Formalmente, a regra IU é estabelecida do seguinte modo:

Introdução universal (IU): Para uma wff ϕ contendo uma letra nominal α que não ocorre em qualquer uma das premissas ou

5. Algumas versões do cálculo de predicados empregam nomes especiais, chamados "nomes arbitrários" para esse propósito. Outras usam variáveis não-quantificadas.

em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre, podemos inferir uma wff da forma $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Na aplicação de IU, na linha 6 do problema 6.9, a wff ϕ é '$Pa \to Va$', a letra nominal α é 'a', a variável β é 'x' e a fórmula ϕ^{β}/α é '$(Px \to Vx)$'.

IU é, algumas vezes, chamada *generalização universal*. A exigência de que α não ocorra em qualquer premissa ou em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre assegura que nada assumimos que distinga o indivíduo designado por α de qualquer outro indivíduo. A exigência de que a variável β não ocorra em ϕ assegura que $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$ será bem formada (veja regra de formação 4).

IU deve ser aplicada estritamente como o estabelecido. Em particular, as seguintes restrições são cruciais:

1) *A letra nominal α não pode ocorrer em qualquer premissa.* A seguinte derivação ignora essa restrição e, conseqüentemente, é inválida:

1	Pa	P
2	$\forall xPx$	1 IU (incorreta)

Da suposição, digamos, que Albert é peixe, não se segue que qualquer coisa é peixe.

2) *A letra nominal α não deve ocorrer em qualquer hipótese vigente numa linha em que ϕ ocorre.* (Relembramos que uma hipótese é vigente numa linha se ela foi introduzida antes dessa linha e ainda não descartada naquela linha; em outras palavras, ela é vigente se a linha vertical começando com a hipótese estende-se para baixo até aquela linha.) Isso impede o tipo de invalidade exibida acima.

A seguinte derivação é inválida porque ela infringe essa cláusula:

1	$\forall x(Px \to Cx)$	P
2	$Pa \to Ca$	I E U
3	$\vert\ Pa$	H (para PC)
4	$\vert\ Ca$	2, 3 MP
5	$\vert\ \forall xCx$	4 IU (incorreta)
6	$Pa \to \forall xCx$	3-5 PC

(Aqui, ϕ é '*Ca*'e α é 'a'.) Da premissa de que todos os peixes são ciprinídeos não se segue que, se Albert é peixe, então tudo é ciprinídeo. O erro está na linha 5, onde IU está aplicada para '*Ca*' e 'a' ocorre na hipótese '*Pa*', que ainda está vigente.

3) ϕ^{β}/α *é o resultado de substituir todas as ocorrências de* α *em* ϕ *por uma variável* β. A ênfase, aqui, está na palavra 'todas'. Esta cláusula previne o seguinte tipo de erro:

1	$\forall xLxx$	P
2	Laa	1 EU
3	$\forall zLza$	2 IU (incorreta)

(Aqui, ϕ é '*Laa*', β é '*x*' e α é '*a*'.) Da premissa que todo mundo ama a si mesmo, não se segue que todo mundo ama Albert. ϕ^{β}/α deveria ser '*Lzz*' e não '*Lza*'. IU estaria sendo usada corretamente se em vez de '$\forall zLza$' concluíssemos '$\forall zLzz$'.

As seguintes demonstrações ilustram o uso da regra do quantificador universal.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.10 Prove:

$$\forall x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall xFx \,\&\, \forall xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$	P
2	$Fa \,\&\, Ga$	1 EU
3	Fa	2 &E
4	Ga	2 &E
5	$\forall xFx$	3 IU
6	$\forall xGx$	4 IU
7	$\forall xFx \,\&\, \forall xGx$	5, 6 &I

Para utilizar a premissa '$\forall x(Fx \,\&\, Gx)$', instanciâmo-la, na linha 2, usando 'a' para designar um indivíduo representativo. Como não fizemos suposições acerca de a, as aplicações de IU, nas linhas 5 e 6, são legítimas.

6.11 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \forall x{\sim}Gx \vdash \forall xFx \rightarrow \forall xHx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to (Gx \to \lor Hx))$	P
2	$\forall x \sim Gx$	P
3	$Fa \to (Ga \lor Ha)$	1 EU
4	$\sim Ga$	2 EU
5	$\quad\vert\ \forall xFx$	H (para PC)
6	$\quad\vert\ Fa$	5 EU
7	$\quad\vert\ Ga \lor Ha$	3, 6 MP
8	$\quad\vert\ Ha$	4, 7 SD
9	$\quad\vert\ \forall xHx$	8 IU
10	$\forall xFx \to \forall xHx$	5-9 PC

A letra nominal 'a' é introduzida para designar um indivíduo representativo. Como a conclusão é um condicional, assumimos seu antecedente, em 5, a fim de derivar seu conseqüente, em 9, e, então, aplicar PC em 10. O uso de IU, na linha 9, obedece à regra, pois nenhuma das premissas ou hipóteses contém 'a'.

Note que uma estratégia diferente é requisitada se, em vez da conclusão condicional '$\forall xFx \to \forall xHx$', queremos provar a conclusão quantificada universalmente '$\forall x(Fx \to Hx)$'.

6.12 Prove:

$$\forall x(Fx \to (Gx \lor Hx)), \forall x \sim Gx \vdash \forall x(Fx \to Hx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to (Gx \lor Hx))$	P
2	$\forall x \sim Gx$	P
3	$Fa \to (Ga \lor Ha)$	1 EU
4	$\sim Ga$	2 EU
5	$\mid\ Fa$	H (para PC)
6	$\mid\ Ga \lor Ha$	3, 5 MP
7	$\mid\ Ha$	4, 6 SD
8	$Fa \to Ha$	5-7 PC
9	$\forall x(Fx \to Hx)$	8 IU

Aqui necessitamos do condicional '$Fa \to Ha$', a fim de obter '$\forall x(Fx \to Hx)$' por IU. Assumimos 'Fa' na linha 5 para concluir '$Fa \to Ha$' na linha 8, por PC.

6.13 Prove:

$$\forall xFax, \forall x\forall y\,(Fxy \to Gyx) \vdash \forall xGxa$$

Solução

1	$\forall xFax$	P
2	$\forall x\forall y\,(Fxy \to Gyx)$	P
3	Fab	1 EU
4	$\forall y\,(Fay \to Gya)$	2 EU
5	$Fab \to Gba$	4 EU
6	Gba	3, 5 MP
7	$\forall xGxa$	6 IU

Na passagem 3, introduzimos '*b*' para designar um indivíduo representativo. Qualquer outra letra nominal deverá fazer o mesmo, exceto '*a*'. Podemos inferir, legitimamente, '*Faa*', por EU, da linha 1 na linha 3, mas isso será obstáculo para usarmos IU com '*a*', pois '*a*' ocorre na premissa em 1. O uso de IU com '*b*' na linha 7 é legítimo, pois não fizemos suposições ou hipóteses contendo '*b*'. Note que duas passagens de EU (linhas 4 e 5) são necessárias para se remover os quantificadores de '$\forall x \forall y\,(Fxy \rightarrow Gyx)$'.

6.14 Prove:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx\ ,\ \sim Ga\ \vdash\ \sim\forall xFx$$

Solução

1	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	*P*
2	$\sim Ga$	*P*
3	│ $\forall xFx$	*H* (para RAA)
4	│ $\forall xGx$	1, 3 MP
5	│ Ga	4 EU
6	│ $Ga\ \&\ \sim Ga$	2, 5 &I
7	$\sim\forall xFx$	3-6 RAA

Como a conclusão é uma fórmula negada, a estratégia de *redução* é utilizada. Assim, supomos '$\forall xFx$' na linha 3. Observe que EU não pode ser aplicada, diretamente, em '$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$', pois é um condicional e não uma wff quantificada universalmente. (É mais fácil ver isso se relembramos que sua verdadeira forma é '$(\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$'; recolocando-se os parênteses externos, omitidos por convenção.)

6.5 Regras de inferência para o quantificador existencial

Tal como o quantificador universal, o quantificador existencial tem duas regras: de introdução e de eliminação. A regra de introdução existencial, IE, é direta: da premissa que um indivíduo tem uma certa propriedade (simples ou complexa), segue-se que alguém (o indivíduo em questão, se nada mais) tem aquela propriedade. Em termos formais:

> *Introdução existencial* (IE): Dada uma wff ϕ contendo uma letra nominal α, podemos inferir uma wff da forma $\exists\beta\ \phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β, que não ocorra em ϕ.

Por exemplo, dada a premissa '*Fa* & *Ga*' (a suposição de que o indivíduo *a* tem a propriedade complexa de ser, ambos, *F* e *G*), podemos inferir '$\exists x$(*Fx* & *Gx*)'. A demonstração é feita em duas passagens:

1	*Fa* & *Ga*	*P*
2	$\exists x$(*Fx* & *Gx*)	1 IE

Com relação ao enunciado formal da regra, ϕ nesse caso é '*Fa* & *Ga*', α é '*a*', β é '*x*' e ϕ^{β}/α é '(*Fx* & *Gx*)'. Há muitos aspectos para se observar nessa regra:

1) *De modo diferente de IU, IE não coloca restrições em ocorrências prévias da letra nominal* α; α pode ocorrer em uma hipótese, não utilizada ainda, ou em uma premissa, tal como na passagem 1 acima.

2) *Em contraste com o caso para IU a variável* β *não precisa substituir todas as ocorrências de* α *em* ϕ*; é preciso substituir somente uma, ou mais.* Assim, as duas demonstrações a seguir estão corretas.

1	$Fa \,\&\, Ga$	P
2	$\exists x(Fx \,\&\, Ga)$	1 IE

1	$Fa \,\&\, Ga$	P
2	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1 IE

Da premissa de que Alf é um sapo e Alf é verde, segue-se que algo é tal que é sapo e Alf é verde e, também, que algo é tal que Alf é um sapo e ele é verde.

3) *Tal como IU, IE nos permite introduzir somente um quantificador por vez e somente do lado esquerdo da fórmula.* A seguinte inferência é incorreta:

1	$Fa \rightarrow Ga$	P
2	$\exists xFx \rightarrow Ga$	1 IE (incorreta)

Para ver claramente o erro, note que '$\exists xFx \rightarrow Ga$' não é, oficialmente, uma wff; ela é uma abreviação convencional da wff '$(\exists xFx \rightarrow Ga)$', da qual omitiu-se os parênteses externos. O quantificador não ocupa a posição à esquerda, o que deveríamos ter para a correta aplicação de IE; o símbolo da esquerda é um parêntese. A inferência é inválida; da premissa de que se Alf é um sapo então Alf é verde não se segue, que se algo é um sapo então Alf é verde.

A regra IE estabelece duas importantes pressuposições:

1) Todos os nomes próprios referem-se a indivíduos existentes.

2) Existe pelo menos um indivíduo.

A primeira pressuposição é resultado do fato de que IE pode ser aplicada para qualquer letra nominal. Como o quantificador existencial afirma existência, podemos sempre interpretar letras nominais como referindo-se a indivíduos existentes, e com isso garantirmos que todas as aplicações de IE são válidas. A invalidade surge quando ignoramos essa pressuposição. Suponha que interpretamos '*a*' como o nome de um indivíduo inexistente, digamos o deus grego Apolo, e 'M' como o predicado 'é mitológico'. Então, por IE, obtemos a seguinte derivação, inválida:

1	Ma	P
2	$\exists xMx$	1 IE

A premissa é verdadeira, presumivelmente (Apolo é mitológico); mas a conclusão é falsa, pois seres mitológicos não existem, de fato. Seguimos, aqui, a regra IE, estritamente; nosso erro consiste não em fazer mau uso da regra mas, em usar o nome de uma coisa inexistente. O cálculo de predicados usual não está equipado para lidar com tais nomes; é importante que a pessoa que estuda o cálculo de predicados esteja ciente dessa limitação. Várias modificações esteja têm sido desenvolvidas a fim de lidar com nomes de coisas inexistentes; contudo, não vamos discuti-las aqui.

A segunda pressuposição é uma conseqüência da primeira. Como as letras nominais são interpretadas como referindo-se a coisas existentes, o uso do cálculo, em qualquer interpretação, pressupõe a existência de pelo menos uma coisa. Contudo, não pressupõe a existência de mais de uma coisa (não-lingüística), ainda que (pensando nos subscritos) possua um potencial infinito de letras nominais. Dois ou mais (ou mesmo infinitos) nomes podem referir-se ao mesmo indivíduo. Não se presumiu que nomes diferentes devam referir-se a coisas diferentes.

As seguintes demonstrações ilustram o uso de IE.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.15 Prove:

$$\forall x\,(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \vee Gx)$	P
2	$Fa \vee Ga$	1 EU
3	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2 IE

Introduzimos 'a', na linha 2, para designar um indivíduo representativo. (Podemos presumir que um tal indivíduo existe, pois o cálculo de predicados pressupõe a existência de pelo menos um.) Como assumimos que toda coisa é ou F ou G, segue-se que a é ou F ou G e, daí, que algo é ou F ou G.

6.16 Prove:

$$\forall x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \vee Gx)$	P
2	$Fa \vee Ga$	1 EU
3	$\quad \vert\ Fa$	H (para PC)
4	$\quad \vert\ \exists xFx$	3 IE
5	$\quad \vert\ \exists xFx \vee \exists xGx$	4 $\vee$I
6	$Fa \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	3-5 PC
7	$\quad \vert\ Ga$	H (para PC)
8	$\quad \vert\ \exists xGx$	7 IE
9	$\quad \vert\ \exists xFx \vee \exists xGx$	8 $\vee$I
10	$Ga \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	7-9 PC
11	$\exists xFx \vee \exists xGx$	2, 6, 10 $\vee$E

A conclusão do problema 6.15 é uma disjunção quantificada existencialmente. Aqui, a conclusão é uma disjunção de dois enunciados quantificados existencialmente; assim, uma estratégia diferente de demonstração é requerida. Tendo instanciado '$\forall x\ (Fx \vee Gx)$', na linha 2, procedemos com duas provas de PC (linhas 3-6 e 7-10) para deduzir o condicional necessário, a fim de provar a conclusão por $\vee$E.

6.17 Prove:

$$\sim\exists xFx \vdash \forall x \sim Fx$$

Solução

1	$\sim\exists xFx$	*P*
2	$\quad Fa$	*H* (para RAA)
3	$\quad \exists xFx$	2 IE
4	$\quad \exists xFx\ \&\ \sim\exists xFx$	1, 3 &I
5	$\sim Fa$	2-4 RAA
6	$\forall x \sim Fx$	5 IU

Para obter a conclusão quantificada universalmente, '$\forall x{\sim}Fx$', precisamos obter '$\sim Fa$' e, então, aplicar IU. Como '$\sim Fa$' está negada, a estratégia da *redução* é indicada. Assumimos 'Fa', na linha 2, a fim de derivar uma contradição, em 4, a qual nos permite obter '$\sim Fa$' na linha 5. Nossa hipótese contém uma letra nominal 'a', mas como ela não está mais vigente na linha 5 e 'a' não ocorre na premissa, a aplicação de IU, em 6, está correta.

6.18 Prove:

$$\sim\exists x\,(Fx \,\&\, \sim Gx) \vdash \forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$$

Solução

1	$\sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	P
2	$\quad Fa$	H (para PC)
3	$\qquad \sim Ga$	H (para RAA)
4	$\qquad Fa \,\&\, \sim Ga$	2, 3 &I
5	$\qquad \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	4 IE
6	$\qquad \exists x(Fx \,\&\, \sim Gx) \,\&\, \sim\exists x(Fx \,\&\, \sim Gx)$	1, 5 &I
7	$\quad \sim\sim Ga$	3-6 RAA
8	$\quad Ga$	7 ~E
9	$Fa \rightarrow Ga$	2-8 PC
10	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	9 IU

Como no problema 6.17, a conclusão está quantificada universalmente; assim, seguimos uma estratégia similar. A estratégia é obter, primeiro, '$Fa \rightarrow Ga$', e então aplicar IU. Como '$Fa \rightarrow Ga$' é um condicional, procedemos por PC, assumindo seu antecedente 'Fa' na linha 2. Não há maneira simples de derivar 'Ga' de 'Fa' e, portanto, tentaremos uma *redução*, assumindo '$\sim Ga$' na esperança de obter uma contradição. Obtemos a contradição na linha 6, que nos permite obter 'Ga' na linha 8 e então completar com PC, em 9. As duas hipóteses contêm 'a', mas, como nenhuma está vigente, na linha 9, e como a premissa não contém 'a', o uso de IU, na linha 10, é legítimo.

Para raciocinar a partir de premissas existenciais, é necessário uma segunda regra para o quantificador existencial, a eliminação existencial (EE).[6] Tal como PC e RAA, EE usa raciocínio hipotético. Uma premissa existencial afirma que pelo menos uma coisa tem uma propriedade (simples ou complexa). Para raciocinar a partir dessa premissa, colocamos, como hipótese, um indivíduo que representa uma dessas coisas que tem essa propriedade. Então, sem fazer suposições adicionais acerca deste indivíduo, derivamos da hipótese a conclusão que queremos provar. Como não fizemos suposições sobre o indivíduo representativo, exceto a propriedade que a premissa existencial atribui a alguma coisa, a derivação da conclusão desejada mostra que, não importa que indivíduo tem essa propriedade, a conclusão deve ser verdadeira. Portanto, descartamos a hipótese e asseguramos a conclusão com base na premissa existencial. Eliminação existencial é a que nos permite fazer isso.

Por exemplo, para provar a conclusão '$\exists xFx$' da premissa existencial '$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$', procedemos como se segue:

1	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	P
2	$\quad\vert\ Fa \,\&\, Ga$	H (para EE)
3	$\quad\vert\ Fa$	2 &E
4	$\quad\vert\ \exists xFx$	3 IE
5	$\exists xFx$	1, 2-4 EE

A premissa existencial '$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$' afirma que, pelo menos uma coisa tem a propriedade complexa de ser tanto F como G, mas não nos diz quem ela é. Escolhemos um indivíduo a para representar uma dessas coisas e assumimos, na linha 2, que a tem essa propriedade. (Isso é meramente uma hipótese: o indivíduo a, quem quer que seja, não precisa,

6. Algumas versões da lógica de predicados têm uma regra chamada instanciação existencial, a qual serve ao mesmo propósito que EE, mas que opera diferentemente. As duas não devem ser confundidas. A confusão pode surgir pelo fato de que instanciação existencial é, freqüentemente, abreviada por 'IE', embora isso seja oposto, de fato, à nossa regra de introdução existencial (IE).

de fato, ter essa propriedade.) A linha 2 diz que: "Suponha que a é uma das coisas que é tanto F como G e veja o que se segue". Na derivação hipotética (linhas 2 a 4), mostramos que a conclusão desejada '$\exists xFx$' segue-se. Como não fizemos suposições sobre a, exceto a hipótese de que é F e G, a derivação hipotética é genérica: poderíamos ter usado qualquer outra letra nominal na hipótese e ainda ter derivado a mesma conclusão. Essa generalidade é a chave da demonstração, pois garante que, não importa o que é isso, que é tanto F como G (já que alguma coisa é), a conclusão '$\exists xFx$' é verdadeira. Desse modo, temos que '$\exists xFx$' se segue validamente de '$\exists x(Fx$ & $Gx)$'. A regra EE nos permite tal afirmação, descartando a hipótese e confirmando a conclusão baseada somente em '$\exists x(Fx$ & $Gx)$'. Justificamos isso ao assumir a premissa existencial na linha 1, e as linhas de 2 a 4, contendo a derivação hipotética.

Podemos estabelecer a regra EE:

Eliminação existencial (EE): Dada uma wff quantificada existencialmente $\exists\beta\ \phi$ e uma derivação de alguma conclusão ψ de uma hipótese da forma ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α que não ocorra em ϕ), podemos descartar ϕ^{α}/β e reafirmar ψ. *Restrição*: A letra nominal α não pode ocorrer em ψ, nem em qualquer premissa, nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE é aplicada.

Na derivação acima, $\exists\beta\phi$ é '$\exists x(Fx$ & $Gx)$', β é 'x', α é 'a', ϕ^{α}/β é 'Fa & Ga' e ψ é '$\exists xFx$'. Podemos chamar ϕ^{α}/β de uma *instância representativa* de $\exists\beta\phi$, já que, em EE, α representa uma das coisas que tem a propriedade indicada por ϕ.

Vários aspectos dessa regra requerem cuidados:

1) *A letra nominal* α *não pode ocorrer em* ϕ. Isso é para prevenir erros como o seguinte:

1	$\forall x \exists y Fyx$	*P*
2	$\exists y Fya$	1 EU
3	$\quad$ Faa	*H* (para EE)
4	$\quad$ $\exists x Fxx$	3 IE
5	$\exists x Fxx$	2, 3-4 EE (incorreta)

Aqui, $\exists\beta\phi$ é '$\exists yFya$', β é '*y*', α é '*a*', ϕ^{α}/β é '*Faa*' e ψ é '$\exists xFxx$'. Essa derivação é inválida; da premissa de que todos têm um pai ($\forall x\exists yFyx$) não se segue que alguém é pai de si mesmo ($\exists xFxx$). O erro está na aplicação de EE na linha 5. Como '*a*' já ocorre em '$\exists yFya$', a introdução de '*a*' na linha 3 para representar o indivíduo ou os indivíduos designados pela variável '*y*' nessa fórmula destitui a derivação hipotética (linhas 3 e 4) de generalidade e, assim, invalida a aplicação de EE em 5. Se '*y*' fosse substituída por outra letra nominal, criando a hipótese na linha 3, não poderíamos derivar '$\exists xFxx$' em 4. Assim, a derivação hipotética não mostra que '$\exists xFxx$' (alguém é pai de si mesmo) é verdadeira, não importando que indivíduo supomos ser pai de *a*. (Na verdade, isso só pode ser deduzido sob a hipótese especial '*Faa*'.) Portanto, não mostramos que o fato de que *a* tem um pai ($\exists yFya$) implica que alguém é pai de si mesmo ($\exists xFxx$), que é conseqüência de aplicar EE de modo incorreto.

2) *A letra nominal* α *não deve ocorrer em* ψ *(a conclusão de uma derivação hipotética).* Se essa restrição é violada, resulta o seguinte erro:

1	$\exists xHxx$	*P*
2	│ Haa	*H* (para EE)
3	│ $\exists xHax$	2 IE
4	$\exists xHax$	1, 2-3 EE (incorreta)

Isso é inválido; da premissa de que alguém bateu em si próprio ($\exists xHxx$) não se segue que Alice bateu em alguém ($\exists xHax$). O erro está na aplicação de EE. A fórmula ψ (nesse caso, $\exists xHax$) contém a letra nominal α (nesse caso, '*a*'), a qual destitui a derivação hipotética de generabilidade. Se tivéssemos introduzido alguma outra letra nominal, digamos '*b*', para designar o indivíduo representativo na linha 2, não teríamos ter derivado a conclusão de que Alice bateu em alguém ($\exists xHax$) na linha 3; teríamos somente '$\exists xHbx$'. A derivação hipotética não mostra que não importa qual indivíduo bateu em si próprio, Alice pode ter batido em alguém e, assim, o uso de EE está incorreto.

3) α *não pode ocorrer em qualquer premissa.* A seguir, temos um exemplo do que acontece se violamos essa cláusula:

1	$\exists xGx$	*P*
2	Fa	*P*
3	│ Ga	*H* (para EE)
4	│ $Fa \,\&\, Ga$	2, 3 &I
5	│ $\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	4 IE
6	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	1, 3-5 EE (incorreta)

Mais uma vez, a derivação é inválida. Dadas as premissas de que algo é uma girafa ($\exists xGx$) e Amos é uma rã (Fa), não teríamos deduzido que algo é uma rã e uma girafa simultaneamente ($\exists x(Fx \ \& \ Gx)$). O erro é que a letra nominal α (nesse caso 'a') ocorre na premissa 'Fa'. Isso destrói a generalidade da derivação hipotética e invalida o uso de EE, na linha 6. Se tivéssemos usado qualquer outra letra nominal, que não fosse 'a' para designar o indivíduo representativo, em 2, não teríamos meios de obter '$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$', na linha 5. Portanto, a derivação hipotética não mostrou que, não importa que indivíduo é uma girafa, algo deve ser ambos, uma rã e uma girafa.

4) *α não pode ocorrer em qualquer hipótese vigente na linha em que EE será aplicada.* (Relembramos que uma hipótese é vigente numa linha se ela foi introduzida antes daquela linha e ainda não foi descartada.) Isso é, essencialmente, a mesma cláusula da condição 3, mas aplicada para hipóteses em vez de premissas. Para ver a analogia com a condição 3, consideremos a seguinte derivação:

1	$\exists xGx$	P
2	$\quad \mid Fa$	H (para PC)
3	$\quad \mid \quad \mid Ga$	H (para EE)
4	$\quad \mid \quad \mid Fa \ \& \ Ga$	2, 3 &I
5	$\quad \mid \exists x(Fx \ \& \ Gx)$	4 IE
6	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	1, 3-5 EE (incorreta)
7	$Fa \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Gx)$	2-6 PC

Como no exemplo anterior, ela é inválida; dada a premissa de que algo é uma girafa ($\exists xGx$), não pode se seguir que, se Amos é uma rã, então algo é uma rã e uma girafa, simultaneamente ($Fa \rightarrow \exists x(Fx \ \& \ Gx)$). O erro está no fato de que a letra nominal α (nesse caso '*a*') ocorre na hipótese da linha 2, que ainda está vigente, quando EE foi aplicada na linha 6. Isso destrói a generalidade da derivação hipotética, do mesmo modo que a premissa de '*Fa*' destruiu no exemplo anterior — e, conseqüentemente, torna o uso de EE em 6 incorreto.

Consideremos, agora, algumas demonstrações que ilustram a aplicação de EE.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.19 Prove:

$$\forall x\,(Fx \to Gx), \exists xFx \vdash \exists xGx$$

Solução

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	*P*
2	$\exists xFx$	*P*
3	$\mid\ Fa$	*H* (para EE)
4	$\mid\ Fa \to Ga$	1 EU
5	$\mid\ Ga$	3, 4 MP
6	$\mid\ \exists xGx$	5 IE
7	$\exists xGx$	2, 3-6 EE

A premissa na linha 2 afirma que algo tem a propriedade F. Em 3, admitimos que *a* é esse algo. Derivamos a conclusão dessa hipótese na linha 6. Essa derivação hipotética obedece a todas as observações feitas sobre a regra EE e, em conseqüência, é perfeitamente geral. Poderíamos ter derivado a mesma conclusão da hipótese de que qualquer outro indivíduo tem a propriedade F. Assim, a passagem final de EE é legítima. Note que devemos aplicar IE na linha 6 *antes* de aplicar EE. Se invertêssemos a ordem dessas duas passagens, a conclusão da derivação hipotética seria 'Ga', que contém 'a', e, portanto, impediria a aplicação de EE (veja condição 2).

6.20 Prove:

$$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists xFx \vee \exists xGx$$

Solução

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	P
2	$Fa \vee Ga$	H (para EE)
3	Fa	H (para PC)
4	$\exists xFx$	3 IE
5	$\exists xFx \vee \exists xGx$	4 $\vee$I
6	$Fa \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	3-5 PC
7	Ga	H (para PC)
8	$\exists xGx$	7 IE
9	$\exists xFx \vee \exists xGx$	8 $\vee$I
10	$Ga \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	7-9 PC
11	$\exists xFx \vee \exists xGx$	2, 6, 10 $\vee$E
12	$\exists xFx \vee \exists xGx$	1, 2-11 EE

A premissa é uma disjunção quantificada existencialmente. Para usá-la, assumimos uma instância representativa por EE em 2. Essa instância representativa é a disjunção '$Fa \vee Ga$'. Quando temos uma disjunção, a estratégia é usar $\vee$E. Isso requer os dois condicionais alistados nas linhas 6 e 10, e obtemos esses condicionais por PC. Obtemos assim a conclusão, por $\vee$E, em 11. Completamos a prova descartando a hipótese e afirmando a conclusão por EE, na linha 12. O leitor deverá verificar que a passagem 12 obedece à regra EE.

6.21 Prove:

$$\exists x Fx \vee \exists x Gx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\exists x Fx \vee \exists x Gx$	P
2	$\exists x Fx$	H (para PC)
3	Fa	H (para EE)
4	$Fa \vee Ga$	3 $\vee$I
5	$\exists x(Fx \vee Gx)$	4 IE
6	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2, 3-5 EE
7	$\exists x Fx \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$	2-6 PC
8	$\exists x Gx$	H (para PC)
9	Ga	H (para EE)
10	$Fa \vee Ga$	9 $\vee$I
11	$\exists x(Fx \vee Gx)$	10 IE
12	$\exists x(Fx \vee Gx)$	8, 9-11 EE
13	$\exists x Gx \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$	8-12 PC
14	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1, 7, 13 $\vee$E

Esta é a recíproca do problema 6.20. Aqui, estamos provando uma conclusão existencial, a partir de uma disjunção; logo, a estratégia dominante é $\vee$E, é não EE. Isso requer que obtenhamos dois condicionais (linhas 7 e 13), por PC. Cada prova por PC engloba uma estratégia, por EE. Os dois usos de EE são legítimos, mesmo que a letra nominal '*a*' ocorra nas hipóteses das linhas 3 e 9, pois elas não estão vigentes nas linhas em que EE foi aplicada (veja condição 4, acima).

6.22 Prove:

$$\exists x\forall yLxy \vdash \forall x\exists yLyx$$

Solução

1	$\exists x\forall yLxy$	*P*
2	$\quad\vert\ \forall yLay$	*H* (para EE)
3	$\quad\vert\ Lab$	2 EU
4	$\quad\vert\ \exists yLyb$	3 IE
5	$\quad\vert\ \forall x\exists yLyx$	4 IU
6	$\forall x\exists yLyx$	1, 2-5 EE

A premissa e a conclusão não são equivalentes. Lendo '*L*' como 'ama', a premissa diz: "Pelo menos alguém é tal que este alguém ama todo mundo", enquanto a conclusão diz: "Todo mundo é amado por alguém" (não, necessariamente, a mesma pessoa, em cada caso). Como a premissa está quantificada existencialmente, assumimos uma instância representativa dela, na linha 2. O uso de IU, em 5, está correto, pois a letra nominal '*b*' não ocorre em qualquer premissa ou hipótese. Do mesmo modo (o leitor deve confirmar), a passagem 6 respeita todos os requisitos da regra

EE. As duas últimas passagens da prova poderiam ter sido intercambiadas tal como:

5	$\exists yLyb$	1, 2-4 EE
6	$\forall x\exists yLyx$	5 IU

A prova ainda estaria correta.

6.23 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow \exists yLxy), \exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \exists x\exists y\,(Gx \,\&\, Lxy)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow \exists yLxy)$	P
2	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	P
3	│ $Fa \,\&\, Ga$	H (para EE)
4	│ $Fa \rightarrow \exists yLay$	1 EU
5	│ Fa	3 &E
6	│ $\exists yLay$	4, 5 MP
7	│ │ Lab	H (para EE)
8	│ │ Ga	3 & E
9	│ │ $Ga \,\&\, Lab$	7, 8 &I
10	│ │ $\exists y(Ga \,\&\, Lay)$	9 IE
11	│ │ $\exists x\exists y(Gx \,\&\, Lxy)$	10 IE
12	│ $\exists x\exists y(Gx \,\&\, Lxy)$	6, 7-11 EE
13	$\exists x\exists y(Gx \,\&\, Lxy)$	2, 3-12 EE

Essa prova requer dois usos de EE, um para cada quantificador existencial nas premissas. Começamos, em 3, assumindo uma instância representativa de '$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$'. Instanciando '$\forall x(Fx \rightarrow \exists yLxy)$' com '$a$', na linha 4, derivamos '$\exists yLay$', em 6.

Para usar essa fórmula existencial, assumimos uma instância representativa dela, na linha 7, introduzindo uma nova letra nominal, '*b*'. (Não podemos usar '*Laa*' como uma instância representativa da fórmula, em 6, pois isso poderia impedir a aplicação correta de EE.) Da hipótese, em 7, derivamos a conclusão, na linha 11, e então descartamos as duas hipóteses por duas passagens de EE nas linhas 12 e 13. Embora a letra nominal '*b*' ocorra na hipótese, em 7, a passagem de EE, em 12, é legítima, pois essa hipótese não é mais vigente em 12. Analogamente, embora '*a*' ocorra nas hipóteses das linhas 3 e 7, a passagem de EE, em 13, é legítima, pois essas hipóteses não são mais vigentes, em 13. Não precisamos considerar as ocorrências de '*a*' ao checar a linha 12, pois a letra nominal relevante a, nessa linha, é '*b*' e não '*a*'; também não precisamos considerar as ocorrências de '*b*' ao checar a linha 13, pois α é '*a*' (veja o enunciado formal da regra EE).

6.24 Prove:

$$\forall x\,(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \vdash {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	*P*
2	$\mid\; \exists x(Fx \,\&\, Gx)$	*H* (para RAA)
3	$\mid\;\mid\; Fa \,\&\, Ga$	*H* (para EE)
4	$\mid\;\mid\; Fa \rightarrow {\sim}Ga$	1 EU
5	$\mid\;\mid\; Fa$	3 &E
6	$\mid\;\mid\; {\sim}Ga$	4, 5 MP
7	$\mid\;\mid\; Ga$	3 &E
8	$\mid\;\mid\; P \,\&\, {\sim}P$	6,7 CONTRAD
9	$\mid\; P \,\&\, {\sim}P$	2, 3-8 EE
10	${\sim}\exists\, x(Fx \,\&\, Gx)$	2-9 RAA

Como a conclusão está negada, adotamos a estratégia de *redução*; assumimos '$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$', em 2, e operamos a fim de obter uma contradição. Como '$\exists x(Fx \;\&\; Gx)$' está quantificada existencialmente, assumimos uma instância representativa dela, em 3. A contradição '$Ga \;\&\; {\sim}Ga$' teria sido obtida na linha 8, mas isso impediria a aplicação de EE em 9, pois '$Ga \;\&\; {\sim}Ga$' contém o nome 'a' (veja condição 2 para a regra EE). Para utilizar RAA é preciso, primeiro, descartar a hipótese da linha 3 por EE. Relembramos que a regra derivada CONTRAD nos permite inferir qualquer wff de uma wff junto com sua negação. Usamos essa regra, em 8, para inferir a contradição, '$P \;\&\; {\sim}P$', a qual não contém 'a' (qualquer outra contradição serviria, desde que nela não ocorresse 'a'). Isso possibilita o uso correto de EE, na linha 9. Completamos a estratégia de *redução*, na linha 10.

Concluímos esta seção com alguns pontos importantes que devemos considerar quando formos fazer demonstrações:

1) *Todas as quatro regras quantificacionais operam somente na posição esquerda de uma fórmula, isto é, somente num quantificador cujo escopo é a fórmula toda.* Introdução existencial e introdução universal nos permitem introduzir um quantificador como um símbolo, no lado esquerdo. Analogamente, EU nos permite remover um quantificador somente se ele é o primeiro símbolo do lado esquerdo, e uma hipótese EE pode ser construída somente pela remoção do quantificador esquerdo de uma wff quantificada existencialmente (nesse caso a variável governada pelo quantificador é substituída por uma letra nominal). Deve-se ter um cuidado especial quando '&', '$\vee$', '$\rightarrow$' ou '$\leftrightarrow$' é o operador principal de uma fórmula, pois a fórmula "oficialmente" tem parênteses externos (veja regra de formação 3, página 250), ainda que eles estejam omitidos, por convenção. Seu símbolo esquerdo é, oficialmente, o parênteses esquerdo externo; por isso, quando um quantificador é introduzido, ele deve ir para o lado esquerdo desse parênteses. Nesse caso, ambos os parênteses, o do lado esquerdo

e do lado direito, devem aparecer explicitamente (compare com a condição 3 para a regra IE).

2) *Para provar uma conclusão quantificada existencial ou universalmente, a estratégia é, primeiro, provar uma fórmula a partir da qual essa conclusão pode ser obtida por IE ou IU.* Por exemplo,

Para provar:	*Prove primeiro:*
$\exists xFx$	Fa
$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$Fa \rightarrow Ga$
$\forall x \sim Fx$	$\sim Fa$
$\forall x \exists yFxy$	$\exists y Fay$
$\exists yFay$	Fab
$\exists xFxx$	Faa

Adote, então, uma subestratégia baseada na forma da conclusão necessária para IU ou IE. Por exemplo, para provar '$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$', primeiro prove '$Fa \rightarrow Ga$', e, para provar esta última, utilize PC como uma subestratégia (veja problemas 6.9 e 6.12). Analogamente, para provar '$\forall x \sim Fx$', primeiro prove '$\sim Fa$' — e como ela é uma fórmula negada, assuma 'Fa' por *redução*.

3) *Se a conclusão é uma negação, conjunção, disjunção, condicional ou bicondicional, então é melhor empregar a estratégia do cálculo proposicional para provar tais conclusões (veja tabela 3-1, Seção 3.4).* Por exemplo, para provar a fórmula negada '$\sim\forall xFx$', usa-se a estratégia de *redução*: assume-se '$\forall xFx$' e deriva uma contradição (veja problemas 6.7 e 6.14). Note que isso é feito não para derivar '$\sim Fa$' e então aplicar IU, pois mesmo que isso seja possível o resultado será '$\forall x \sim Fx$', que não é a conclusão desejada. Similarmente, para

provar o condicional '$\forall xFx \to \forall xGx$', assumimos seu antecedente e usamos PC (veja problema 6.11). Isso é feito não para derivar '$Fa \to Ga$' e então aplicar IU, pois mesmo que possível, isso resultará somente em '$\forall x(Fx \to Gx)$'.

6.6 Teoremas e regras de equivalência do quantificador

No cálculo de predicados é possível provar algumas wffs sem fazer uso de premissas. Tais wffs são os *teoremas* do cálculo de predicados. Elas são verdades lógicas, fórmulas cuja verdade é necessária, indiferentes aos significados atribuídos a seus símbolos não-lógicos. Como o cálculo de predicados engloba o cálculo proposicional, todos os teoremas do cálculo proposicional são, também, teoremas do cálculo de predicados. Mas, o cálculo de predicados tem outros teoremas que pertencem somente a ele.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.25 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x(Fx \to Fx)$$

Solução

1	$\mid Fa$	H (para PC)
2	$Fa \to Fa$	1-1 PC
3	$\forall x(Fx \to Fx)$	2 IU

Na linha 2, aplicamos PC para a linha, que é simultaneamente o antecedente e o conseqüente do condicional '$Fa \rightarrow Fa$', que estamos tentando provar. A aplicação de IU é legítima, pois embora 'a' ocorra na hipótese 'Fa', esta hipótese foi descartada na linha 2. Esse teorema pode ser provado usando a regra derivada IT (ver Seção 3.6):

1	$Fa \rightarrow Fa$	IT Cap. 3, prob. supl. VI (1)
2	$\forall x(Fx \rightarrow Fx)$	1 IU

O teorema usado é '$P \rightarrow P$', do qual '$Fa \rightarrow Fa$' é uma instância substitutiva. Note que a linha 1 não é uma hipótese nem tampouco uma premissa; ainda que ela contenha 'a', a aplicação de IU na linha 2 é legítima. Isso fica claro se notamos que '$Fb \rightarrow Fb$', '$Fc \rightarrow Fc$', e assim por diante, são todas instâncias substitutivas desse teorema; na verdade, não importa que nome colocamos no lugar de 'a' para obter uma instância substitutiva. Logo, o teorema implica que, para qualquer x, $(Fx \rightarrow Fx)$.

6.26 Prove o teorema:

$$\vdash \forall xFx \rightarrow Fa$$

Solução

1	$\vert$ $\forall xFx$	H (para PC)
2	$\vert$ Fa	1 EU
3	$\forall xFx \rightarrow Fa$	1, 2 PC

O teorema é um enunciado condicional; assim, usamos a estratégia da prova condicional.

6.27 Prove o teorema:

$\vdash \sim(\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx)$

Solução

1	$\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$	*H* (para RAA)
2	$\forall xFx$	1 &E
3	$\exists x{\sim}Fx$	1 &E
4	${\sim}Fa$	*H* (para EE)
5	Fa	2 EU
6	$P \ \& \ {\sim}P$	4, 5 CONTRAD
7	$P \ \& \ {\sim}P$	3, 4-6 EE
8	${\sim}(\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$	1-7 RAA

O teorema é uma negação; assim, assumimos '$\forall xFx \ \& \ \exists x{\sim}Fx$' por *redução* e separamos em seus conjunctos, nas linhas 2 e 3. Para usar '$\exists x{\sim}Fx$', devemos proceder por EE; assumimos uma instância de '$\exists x{\sim}Fx$', na linha 4. A contradição '$Fa \ \& \ {\sim}Fa$' poderia ser obtida em 6, mas ainda não descartamos a hipótese da linha 4, pois '$Fa \ \& \ {\sim}Fa$' contém 'a'. Para vencer essa dificuldade, obtemos uma nova contradição, não contendo 'a', por CONTRAD (compare com o problema 6.24). Isso nos permite descartar a hipótese, por EE, da passagem 4, na linha 7, e completar a *redução*, em 8.

6.28 Prove o teorema:

$\vdash \forall xFx \lor \exists x{\sim}Fx$

Solução

1	$\sim\forall Fx \sim Fx$	H (para PC)
2	$\sim\exists x \sim Fx$	H (para RAA)
3	$\sim Fa$	H (para RAA)
4	$\exists x \sim Fx$	3 IE
5	$\exists x \sim Fx \;\&\; \sim\exists x \sim Fx$	2, 4 &I
6	$\sim\sim Fa$	3-5 RAA
7	Fa	6 ~E
8	$\forall x Fx$	7 IU
9	$\forall x Fx \;\&\; \sim\forall x Fx$	1, 8 &I
10	$\sim\sim\exists x \sim Fx$	2-9 RAA
11	$\exists x \sim Fx$	10 ~E
12	$\sim\forall x Fx \rightarrow \exists x \sim Fx$	1-11 PC
13	$\sim\sim\forall x Fx \vee \exists x \sim Fx$	12 IM
14	$\forall x Fx \vee \exists x \sim Fx$	13 DN

Aqui, a estratégia é indireta. O teorema é uma disjunção. Em geral, provamos disjunções por $\vee$E, mas isso requer uma premissa disjuntiva, que nos falta, nesse caso. Entretanto, pelas equivalências IM e DN o teorema é o mesmo que '$\sim\forall\ xFx \rightarrow \exists x \sim Fx$'. Assim, podemos provar o teorema por meio desse condicional (linha 12) e então aplicar IM e DN. Começamos a prova assumindo o antecedente do condicional, '$\sim\forall\ xFx$'. Para provar seu conseqüente, '$\exists x \sim Fx$', procedemos por *redução*, assumimos a negação do conseqüente, em 2, e introduzimos uma hipótese por *redução*, na linha 3, para obter as contradições necessárias. O uso de IU, em 8, é permissível, pois embora 'a' apareça na hipótese em 3, ela não é mais vigente na linha 8.

Muitas equivalências são provadas no cálculo de predicados. A primeira delas mostra a equivalência lógica das fórmulas '$\forall x\ (Fx \rightarrow \sim Gx)$' e '$\sim\exists x\ (Fx\ \&\ Gx)$', que são maneiras de expressar a proposição da forma *E* 'Nenhum F é G'.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.29 Prove a equivalência:

$$\vdash \forall x\ (Fx \rightarrow \sim Gx) \leftrightarrow \sim\exists\, x\ (Fx\ \&\ Gx)$$

Solução

1	$\mid\ \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	*H* (para PC)
2	$\mid\ \sim\exists x(Fx\ \&\ Gx)$	1 prob. 6.24
3	$\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \rightarrow \sim\exists\, x(Fx\ \&\ Gx)$	1-2 PC
4	$\mid\ \sim\exists x(Fx\ \&\ Gx)$	*H* (para PC)
5	$\mid\ \mid\ Fa$	*H* (para PC)
6	$\mid\ \mid\ \mid\ Ga$	*H* (para RAA)
7	$\mid\ \mid\ \mid\ Fa\ \&\ Ga$	5, 6 &I
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists x(Fx\ \&\ Gx)$	7 IE
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists x(Fx\ \&\ Gx)\ \&\ \sim\exists\, x\ (Fx\ \&\ Gx)$	4, 8 &I
10	$\mid\ \mid\ \sim Ga$	6-9 RAA
11	$\mid\ Fa \rightarrow \sim Ga$	5-10 PC
12	$\mid\ \forall x\ (Fx \rightarrow \sim Gx)$	11 IU
13	$\sim\exists x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$	4-12 PC
14	$\forall x\ (Fx \rightarrow \sim Gx) \leftrightarrow \sim\exists\, x(Fx\ \&\ Gx)$	3,13 $\leftrightarrow$I

A tabela 6.1 alista quatro equivalências que expressam relações entre os quantificadores universal e existencial. As duas primeiras equivalências serão provadas, a seguir. A terceira e a quarta são deixadas como exercício para o leitor.

Tabela 6-1 Equivalências quantificacionais.

$\vdash \sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists x Fx$
$\vdash \sim\forall x Fx \leftrightarrow \exists x \sim Fx$
$\vdash \forall x \sim Fx \leftrightarrow \sim\exists x Fx$
$\vdash \forall x Fx \leftrightarrow \sim\exists x \sim Fx$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.30 Prove a equivalência:

$$\vdash \sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists x Fx$$

Solução

1	$\sim\forall x \sim Fx$	H (para PC)
2	$\quad \sim\exists x Fx$	H (para RAA)
3	$\quad\quad Fa$	H (para RAA)
4	$\quad\quad \exists x Fx$	3 IE
5	$\quad\quad \exists x Fx \,\&\, \sim\exists x Fx$	2, 4 &I
6	$\quad \sim Fa$	3-5 RAA
7	$\quad \forall x \sim Fx$	6 IU
8	$\quad \forall x \sim Fx \,\&\, \sim\forall x \sim Fx$	1, 7 &I
9	$\sim\sim\exists x Fx$	2-8 RAA
10	$\exists x Fx$	9 ~E
11	$\sim\forall x \sim Fx \rightarrow \exists x Fx$	1-10 PC

12	$\exists xFx$	H (para PC)
13	Fa	H (para EE)
14	$\forall x \sim Fx$	H (para RAA)
15	$\sim Fa$	14 EU
16	$Fa \ \& \sim Fa$	13, 15 &I
17	$\sim\forall x \sim Fx$	14-16 RAA
18	$\sim\forall x \sim Fx$	12, 13-17 EE
19	$\exists xFx \rightarrow \sim\forall x \sim Fx$	12-18 PC
20	$\sim\forall x \sim Fx \leftrightarrow \exists xFx$	11, 19 $\leftrightarrow$ I

6.31 Prove a equivalência:

$$\vdash \sim\forall xFx \leftrightarrow \exists x\sim Fx$$

Solução

1	$\sim\forall xFx$	H (para PC)
2	$\sim\exists x\sim Fx$	H (para RAA)
3	$\sim Fa$	H (para RAA)
4	$\exists x\sim Fx$	3 IE
5	$\exists x\sim Fx \ \& \sim\exists x\sim Fx$	2, 4 &I
6	$\sim\sim Fa$	3-5 RAA
7	Fa	6 ~E
8	$\forall xFx$	7 IU
9	$\forall xFx \ \& \sim\forall xFx$	1, 8 &I
10	$\sim\sim\exists x\sim Fx$	2-9 RAA
11	$\exists x\sim Fx$	10 ~E
12	$\sim\forall xFx \rightarrow \exists x\sim Fx$	1-11 PC

13	$\exists x{\sim}Fx$	H (para PC)
14	$\sim Fa$	H (para EE)
15	$\forall xFx$	H (para RAA)
16	Fa	15 EU
17	$Fa\ \&\ {\sim}Fa$	14, 16 &I
18	$\sim\forall xFx$	15-17 RAA
19	$\sim\forall xFx$	13,14-18 EE
20	$\exists x{\sim}Fx \rightarrow {\sim}\forall xFx$	13-19 PC
21	$\sim\forall xFx \leftrightarrow \exists x{\sim}Fx$	12, 20 $\leftrightarrow$I

As quatro equivalências quantificacionais são base para as regras derivadas do cálculo de predicados. Para enunciar essas regras, necessitamos de algumas terminologias. Uma fórmula que resulta de uma wff quando se remove um quantificador inicial, junto com a variável, chama-se uma *fórmula aberta na variável*. Por exemplo, se removemos '$\exists x$' de '$\exists x(Fx\ \&\ Gx)$', o resultado '$(Fx\ \&\ Gx)$' é uma fórmula aberta em 'x'. Se removemos '$\forall z$' de '$\forall z\forall x(Fxz \rightarrow Gzx)$', o resultado, '$\forall x(Fxz \rightarrow Gzx)$', é uma fórmula aberta em 'z'. Uma fórmula aberta não é uma wff, pois nossas regras de formação não permitem variáveis não-quantificadas.

Observe que nas provas dos problemas 6.30 e 6.31 todas as ocorrências da fórmula 'Fx' poderiam ter sido substituídas por ocorrências de uma outra fórmula aberta em 'x' e, ainda assim, o resultado continuaria sendo uma prova válida. Assim, pelo raciocínio usado no problema 6.30, poderíamos ter provado não somente '$\vdash \forall xFx \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}Fx$', mas, também, '$\vdash \forall x(Fx\ \&\ Gx) \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}(Fx\ \&\ Gx)$', '$\vdash \forall x\exists yLxy \leftrightarrow {\sim}\exists x{\sim}\exists yLxy$' e assim por diante. Ou seja, poderíamos ter provado que qualquer wff consistindo em uma fórmula aberta em 'x' prefixada por '$\forall x$' é logicamente equivalente a uma wff consistindo na mesma fórmula aberta prefixada por '${\sim}\exists x{\sim}$'. Como 'F' é uma propriedade qualquer, ela pode ser considerada como sendo qualquer propriedade expressa por uma fórmula aberta em 'x'. Daí, o problema 6.30 é, de fato, uma prova de todas essas equivalências.

Além disso, é claro que a variável 'x' pode ser substituída, uniformemente, nos problemas 6.30 e 6.31, por uma outra variável, sem, contudo, afetar a validade da prova. Assim, o problema 6.30 prova também as equivalências '$\vdash \forall zFz \leftrightarrow \sim\exists z \sim Fz$', '$\vdash \forall y\ (Fy\ \&\ Gy) \leftrightarrow \sim\exists y \sim(Fy\ \&\ Gy)$', etc.

De modo geral, o problema 6.30 mostra que qualquer wff da forma $\forall\beta\phi$, onde β é uma variável e ϕ uma fórmula aberta nessa variável, é logicamente equivalente a $\sim\exists\ \beta\sim\phi$.

As outras equivalências estabelecidas na tabela têm a mesma generalidade. Como fórmulas logicamente equivalentes podem ser substituídas validamente por outra, em qualquer contexto, essas quatro equivalências dão origem à seguinte regra derivada:

<ins>*Intercâmbio de quantificadores* (IQ)</ins>: Seja ϕ uma fórmula aberta na variável β. Então, se um dos seguintes pares é uma subwff de alguma wff ψ, podemos validamente inferir de ψ o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de um deles pelo outro:

$\sim\forall\beta\sim\phi,\ \exists\beta\phi$

$\sim\forall\beta\phi,\ \exists\beta\sim\phi$

$\forall\beta\sim\phi,\ \sim\exists\beta\phi$

$\forall\beta\phi,\ \sim\exists\beta\sim\phi$

Tal como as regras derivadas do cálculo proposicional, IQ simplifica as provas; contudo, ela não permite provar algo novo. Qualquer coisa provável por IQ é provada por uma das quatro regras quantificadas de introdução e eliminação, e as dez regras básicas do cálculo proposicional. Para ilustrar como IQ simplifica as provas, provamos novamente a forma do problema 6.24:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.32 Prove:

$$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx) \vdash {\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	$\forall x(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$	P
2	$Fa \rightarrow {\sim}Ga$	1 EU
3	${\sim}(Fa \,\&\, {\sim}{\sim}Ga)$	2 prob. 4.47
4	${\sim}(Fa \,\&\, Ga)$	3 DN
5	$\forall x\, {\sim}(Fx \,\&\, Gx)$	4 IU
6	${\sim}\exists x(Fx \,\&\, Gx)$	5 IQ

Compare essa prova com a do problema 6.24.

A seguir, alguns problemas utilizando IQ.

6.33 Prove o teorema:

$$\vdash \forall xFx \vee \exists x{\sim}Fx$$

Solução

1	$\forall xFx \vee {\sim}\forall xFx$	IT 4.45
2	$\forall xFx \vee \exists x{\sim}Fx$	1 IQ

6.34 Prove:

$$\forall x \sim Fx \rightarrow \forall x \sim Gx \vdash \exists xGx \rightarrow \exists xFx$$

Solução

1	$\forall x \sim Fx \rightarrow \forall x \sim Gx$	P
2	$\sim\exists xFx \rightarrow \forall x \sim Gx$	1 IQ
3	$\sim\exists xFx \rightarrow \sim\exists xGx$	2 IQ
4	$\exists xGx \rightarrow \exists xFx$	4 TRANS

6.35 Prove:

$$\sim\exists xFx, \sim\exists xGx \vdash \sim\exists x(Fx \vee Gx)$$

Solução

1	$\sim\exists xFx$	P
2	$\sim\exists xGx$	P
3	$\forall x \sim Fx$	1 IQ
4	$\forall x \sim Gx$	2 IQ
5	$\sim Fa$	3 EU
6	$\sim Ga$	4 EU
7	$\sim Fa \& \sim Ga$	5, 6 &I
8	$\sim(Fa \vee Ga)$	7 DM
9	$\forall x \sim(Fx \& Gx)$	8 IU
10	$\sim\exists x(Fx \& Gx)$	9 IQ

Neste contexto as regras IQ têm restrições. Elas permitem intercambiar quantificadores somente quando um quantificador junto com a variável prefixa uma fórmula aberta nessa variável. Não permitem, por exemplo, a inferência

1	$\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y \sim Lxy)$	*P*
2	$\forall x\, (Fx \rightarrow \sim\forall y Lxy$	1 IQ

pois 'Lxy' contém 'y', além de 'x', e por isso não é uma fórmula aberta 'x'. Essa inferência, contudo, é válida, como o é qualquer inferência na qual '$\exists y\sim$' é substituída por '$\sim\forall y$' em qualquer parte de uma wff. (O mesmo é verdade para as outras regras IQ.) Alguns autores usam as regras IQ, sem restrições, as quais permitem inferências como as acima. Outros as restringem ainda mais, permitindo o seu uso somente em quantificadores iniciais. Por outro lado, outros não permitem IQ de modo algum.

Essas variações não afetam o que se pode provar em lógica, pois o que é provável por qualquer versão de IQ é provável pelas quatro regras de introdução e eliminação.

6.7 Identidade

Pode-se adicionar certos símbolos ao cálculo de predicados com propósitos específicos. Um deles é o predicado da identidade, '=', que significa "é idêntico a" ou "é a mesma coisa que". Esse predicado é muito utilizado em matemática, principalmente em relação a números. Em lógica, sua aplicação é mais geral; as letras nominais 'a' e 'b' na fórmula '$a = b$' podem denotar qualquer tipo de objeto. Podemos interpretar 'a', por exemplo, como "Mark Twain" e 'b' como "Samuel Clemens"; assim, '$a = b$' significa que "Mark Twaim é idêntico a (isto é, é o mesmo indivíduo que) Samuel Clemens". Podemos ainda interpretar 'a' como "a Guerra da Secessão" e 'b' como "a Guerra Civil"; assim, '$a = b$' significa que "A Guerra da Secessão é idêntica à Guerra Civil".

O predicado da identidade é especial, pois, tal como os símbolos lógicos e ao contrário das letras predicativas, sua interpretação está fixada. Ele sempre significa "é idêntico a". É também peculiar, sintaticamente, pois, ao contrário dos predicados binários, ele é escrito entre as letras nominais às quais se aplica, e não antes delas.[7] Tais peculiaridades necessitam de regras adicionais de formação e de inferência.

A regra adicional de formação é:

O resultado de escrever '=' entre um par de letras nominais é uma wff atômica.

Essa regra junto com as outras quatro regras de formação fornece uma rica variedade de novas expressões.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.36 Formalize as seguintes sentenças no cálculo de predicados com identidade usando a interpretação dada a seguir:

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
c	Samuel Clemens
h	*Huckleberry Finn* (o livro)
t	Mark Twain
Predicado unário	
A	é um autor americano
M	é um mercenário
Predicado binário	
B	é melhor que (como autor)
E	escreveu

7. Alguns autores cercam as fórmulas com identidade com parênteses, especialmente se elas são negações o que salienta mais a diferença entre '=' e os outros predicados binários.

a) Mark Twain não é Samuel Clemens.

b) Existe Mark Twain.

c) Se Mark Twain é Samuel Clemens, então Samuel Clemens escreveu *Huckleberry Finn*.

d) Somente Mark Twain escreveu *Huckleberry Finn*.

e) Todos os autores americanos, exceto Mark Twain, são mercenários.

f) Mark Twain é o melhor autor americano.

g) Existe algo.

h) Existem, pelo menos, duas coisas.

i) Existe, no máximo, uma coisa.

j) Existe, exatamente, uma coisa.

k) Existem, exatamente, duas coisas.

l) Existe exatamente, um escritor de Huckleberry Finn.

m) Existem pelo menos, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

n) Existem, no máximo, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

o) Existem, exatamente, dois escritores de *Huckleberry Finn*.

Solução

a) $\sim t = c$. É freqüente escrevê-la como '$t \neq c$'. Notemos que, de acordo com as regras de formação, não há parênteses para a wff atômica '$t = c$'; mas o sinal de negação se aplica a toda wff, e não somente para 't'.

b) $\exists x x = t$.

c) $t = c \rightarrow Ech$. Parênteses externos foram omitidos dessa fórmula.

d) $\forall x(Exh \rightarrow x = \mathrm{t})$.

e) $\forall x\ ((Ax\ \&\ {\sim}x = t) \rightarrow Mx)$. Poderíamos escrevê-la equivalentemente como '$\forall x\ (Ax \rightarrow ({\sim}x = t \rightarrow Mx))$'. A formalização da sentença dada é relativamente a mais fraca, pois não afirma que Twain foi um mercenário ou que não foi; simplesmente, diz que todos os autores americanos, exceto Twain, são mercenários. Se queremos que a formalização afirme que Twain não foi um mercenário, devemos unir uma das versões acima com '${\sim}Mt$' ou então reescrever a fórmula toda do seguinte modo: '$\forall x\ (Ax \rightarrow (Mx \leftrightarrow {\sim}x = t))$'.

f) $At\ \&\ \forall x((Ax\ \&\ {\sim}x = t) \rightarrow Btx)$. Dizer que Twain é o melhor autor americano é dizer que ele é um autor americano e que é melhor que todos os outros autores americanos. Isso é o que essa wff afirma. Note que, se tivéssemos escrito o segundo conjuncto sem o requisito '${\sim}x = t$', isto é, como '$\forall x(Ax \rightarrow Btx)$', ela afirmaria que Twain é melhor que si próprio; portanto, esse requisito é crucial.

g) $\exists x\ x = x$. Essa fórmula, traduzida literalmente, significa "Existe algo que é idêntico a si próprio".

h) $\exists x \exists y\ {\sim}x = y$. Relembramos que, as variáveis 'x' e 'y' de '$\exists x \exists y\ Axy$' não denotam, necessariamente, objetos diferentes. Lendo 'a' como "ama", essa fórmula é verdadeira mesmo que uma única pessoa ame a si próprio. Assim, para afirmar que pelo menos dois objetos distintos existem, precisamos do requisito '${\sim}x = y$'.

i) $\forall x \forall y\ x = y$. Ela significa, "Para quaisquer objetos x e y, x é idêntico a y", isto é, "Todos os objetos são idênticos", que o universo contém, no máximo, um objeto. Tendo em vista que o cálculo de predicados pressupõe a existência de pelo menos um objeto, essa wff é equivalente ao enunciado (*j*).

j) $\exists x \forall y\ y = x$. Ela diz, literalmente, "Existe um objeto que é idêntico a todos os objetos".

k) $\exists x \exists y\ (\sim x = y\ \&\ \forall z\ (z = x \vee z = y))$. A cláusula '$\sim x = y$' afirma que x e y são dois objetos diferentes. A cláusula '$\forall z\ (z = x \vee z = y)$' diz que, qualquer objeto z, ou z é idêntico a x ou a y, isto é, que não há outros objetos além de x e y.

l) $\exists x(Exh\ \&\ \forall y\ (Eyh \rightarrow y = x))$.

m) $\exists x \exists y\ ((Exh\ \&\ Eyh)\ \&\ \sim x = y)$.

n) $\forall x \forall y \forall z\ (((Exh\ \&\ Eyh)\ \&\ Ezh) \rightarrow ((x = y \vee x = z) \vee y = z))$.

o) $\exists x \exists y\ ((Exh\ \&\ Eyh)\ \&\ \forall z\ (Ezh \rightarrow (z = x \vee z = y)))$.

Os matemáticos estão familiarizados com as regras de introdução e de eliminação para o predicado de identidade. A regra de introdução para identidade é como a regra derivada IT (Seção 3.6), a qual introduz fórmulas nas provas sem, contudo, tê-las derivado em linhas anteriores.

Introdução da identidade (=I): Para qualquer letra nominal α, podemos afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer de uma prova.

Introdução da identidade é usada nas seguintes provas:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.37 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x\ x = x$$

Solução

1	$a = a$	=I
2	$\forall x\ x = x$	1 IU

Note que o uso de IU, na linha 2, é legítimo, pois a prova não usa premissas ou hipóteses contendo 'a'. Esse teorema é conhecido como a *Lei de reflexividade da identidade.*

6.38 Prove o teorema:

$$\vdash \exists x\, a = x$$

Solução

1	$a = a$	=I
2	$\exists xa = x$	1 IE

Esse teorema afirma a existência de um objeto denotado por 'a'. O mesmo raciocínio poderia ser repetido usando qualquer outra letra nominal que não fosse 'a'. Isso é a pressuposição, observada na Seção 6.5, de que os nomes denotam coisas existentes.

A regra de eliminação da identidade (regra que nos permite raciocinar a partir de identidades dadas como premissas) é, simplesmente, a idéia de que se $a = b$, os nomes 'a' e 'b' são intercambiáveis. Essa regra é também chamada *substitutividade da identidade.*

Eliminação da identidade (=E): Se ϕ é uma wff contendo a letra nominal α, então de ϕ e de $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$ podemos inferir ϕ^{β}/α, o resultado de se substituir pelo menos uma ocorrência de α em ϕ por β.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.39 Prove:

$$Fa, a = b \vdash Fb$$

Solução

1	Fa	P
2	$a = b$	P
3	Fb	1, 2 =E

6.40 Prove:

$$Fa, \sim Fb \vdash \sim a = b$$

Solução

1	Fa	P
2	$\sim Fb$	P
3	$\mid\ a = b$	H (para RAA)
4	$\mid\ Fb$	1, 3 =E
5	$\mid\ Fb \,\&\, \sim Fb$	2, 4 &I
6	$\sim a = b$	3-5 RAA

6.41 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$$

Solução

1	$\mid\ a = b$	H (para PC)
2	$\mid\ a = a$	=I
3	$\mid\ b = a$	1, 2 =E
4	$a = b \rightarrow b = a$	1-3 PC
5	$\forall y\, (a = y \rightarrow y = a)$	4 IU
6	$\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$	5 IU

Na linha 3, usamos a identidade '$a = b$' (linha 1) para substituir a primeira ocorrência de 'a' em '$a = a$' (linha 2) por 'b'. Com relação ao enunciado de =E, '$a = a$' é ϕ e '$b = a$' é ϕ^{β}/α. Esse teorema é chamado *Lei de simetria da identidade*.

6.42 Prove o teorema:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z\, ((x = y \,\&\, y = z) \rightarrow x = z)$$

Solução

1	$a = b \,\&\, b = c$	*H* (para PC)
2	$a = b$	1 &E
3	$b = c$	1 &E
4	$a = c$	2, 3 =E
5	$(a = b \,\&\, b = c) \rightarrow a = c$	1-4 PC
6	$\forall z\, ((a = b \,\&\, b = z) \rightarrow a = z)$	5 IU
7	$\forall y \forall z\, ((a = y \,\&\, y = z) \rightarrow a = z)$	6 IU
8	$\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \,\&\, y = z) \rightarrow x = z)$	7 IU

Esse teorema é conhecido como *Lei de transitividade da identidade*.

As regras de inferência do cálculo de predicados com identidade são *corretas* (no sentido de que elas geram somente formas válidas de argumentos) e *completas* (no sentido de que elas geram todas as formas de argumentos válidas, em virtude da semântica, dos quantificadores, do predicado de identidade e dos conectivos funcional-veritativos). A correção e a completude das regras podem ser provadas por um tipo de raciocínio conhecido como *metalógico*. Contudo, tal raciocínio está fora do escopo deste livro.[8]

8. Uma excelente obra sobre metalógica é Geoffrey Hunter, *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*, Berkeley, University of California Press, 1971.

Apesar da sua completude, as regras de inferência nem sempre respondem a questão 'Essa forma é válida?'. Se formos incapazes de construir uma prova para uma dada forma, isso poderá significar: a forma é, realmente, inválida, ou ela é válida, mas não temos habilidade suficiente para exibir uma prova. Na verdade, precisamos de um método que decida quais formas são inválidas. Infelizmente, como veremos na próxima seção, esse método não existe.

6.8 Árvores de refutação

O Capítulo 4 mostrou como as tabelas-verdade e as árvores de refutação são empregadas para demonstrar a validade e a invalidade de formas de argumento de cálculo proposicional. O Capítulo 5 mostrou como a validade e a invalidade de silogismos categóricos podem ser verificadas pelos diagramas de Venn. Esses métodos são *algorítmicos*; isto é, são precisos — procedem por regras específicas (do tipo que um computador executa) pelas quais uma resposta é obtida depois de se efetuar várias operações.

Contudo, o método de prova discutido neste capítulo, tal como o do Capítulo 3, gera somente formas de argumentos válidas; não discutimos os meios de se determinar *in*validade de argumentos para o cálculo de predicados. Na verdade, para o cálculo de predicados, exceto os sistemas discutidos anteriormente, não há e não pode haver um procedimento algorítmico que detecta invalidade. Lógica de predicados é, nesse sentido, *indecidível*. (A indecidibilidade da lógica de predicados pode ser provada por raciocínio metalógico, e é conhecida como Tese de Church.[9])
Existem, entretanto, métodos governados por regras que testam a validade e a invalidade somente de algumas formas de argumentos do cálculo de predicados.

9. Uma elegante versão da prova é dada em Richard Jeffrey, *Formal Logic: Its Scope and Limits*, 2ª ed., New York, McGraw-Hill, 1981, Cap. 6.

Nesta seção, discutimos um desses métodos, uma generalização da árvore de refutação do Capítulo 4. Tal como a técnica do Capítulo 4, ele nos possibilita descobrir a validade de um argumento válido num número finito de passos (mesmo que o número de passos seja muito grande e que não sejamos capazes de saber antecipadamente se vamos ou não obter uma resposta). Por outro lado, ele difere da técnica do Capítulo 4, pois algumas vezes não revela a invalidade de formas inválidas.

A técnica de árvores de refutação generalizada incorpora as regras de refutação da lógica proposicional (Capítulo 4). Além dessas, temos seis novas regras para intervir em sentenças que contêm quantificadores e o predicado de identidade. Algumas árvores do cálculo de predicados empregam somente as regras do cálculo proposicional.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.43 Use as regras de árvores de refutação do cálculo proposicional para determinar se a seguinte forma de argumento é válida:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx,\ \sim\forall xGx \vdash \sim\forall xFx$$

Solução

1	✓		$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$		
2			$\sim\forall xGx$		
3			$\sim\forall xFx$		
4	$\sim\forall xFx$	$1 \rightarrow$		$\forall xGx$	$1 \rightarrow$
5	X	$3, 4 \sim$		X	$2, 4 \sim$

Todos os ramos fecham-se e, portanto, a forma é válida. Somente as regras do cálculo proposicional são necessárias, pois a forma é uma instância substitutiva de *modus tollens* (MT), que é válida pela lógica proposicional.

O cálculo de predicados com identidade tem três símbolos lógicos, não incluídos no cálculo proposicional (a saber, '$\forall$', '$\exists$' e '$=$'). Assim precisamos de duas regras para cada um deles (um para lidar com sentenças negadas e outro para as não-negadas, nas quais eles ocorrem). Teremos então seis novas regras para as árvores de refutação no cálculo de predicados. A primeira, a regra de quantificação universal, é, essencialmente, uma versão da árvore de refutação de EU.

<u>*Quantificação universal* ($\forall$)</u>: Se uma wff da forma $\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, e se α é uma letra nominal que ocorre numa wff desse ramo, então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de substituir todas as ocorrências de β em ϕ por α) no final do ramo. Se nenhuma wff contendo uma letra nominal, aparece no ramo, então escolhemos uma letra nominal α, e escrevemos ϕ^{α}/β no final do ramo. Em cada caso, não ticamos $\forall\beta\phi$.

Não ticamos $\forall\beta\phi$ pois agora não importa quantas wffs inferimos por $\forall$. Embora wffs quantificadas universalmente não sejam ticadas, suas árvores podem fechar-se (nesse caso a inferência será válida) ou podem ir até um ponto em que a árvore não se fecha e nenhuma regra mais se aplica (nesse caso, a inferência é inválida).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.44 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall xFx \vdash Ga$$

Solução

1		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$			
2		$\forall xFx$			
3		$\sim Ga$			
4	✓	$Fa \rightarrow Ga$	$1\ \forall$		
5		Fa	$2\ \forall$		
6	$\sim Fa$	$4 \rightarrow$		Ga	$4 \rightarrow$
7	X	$5, 6 \sim$		X	$3, 6 \sim$

Como a letra nominal 'a' ocorre em '$\sim Ga$' (linha 3), ela é utilizada para obter as linhas 4 e 5, pela regra de quantificação universal. A árvore se fecha, depois da aplicação da regra do condicional, em 6. Portanto, a forma é válida.

6.45 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$Fa \rightarrow Gb, \forall x \sim Fx \vdash \sim Gb$$

Solução

1	✓	$Fa \rightarrow Gb$			
2		$\forall x \sim Fx$			
3	✓	$\sim\sim Gb$			
4		Gb	$3 \sim\sim$		
5		$\sim Fa$	$2\ \forall$		
6		$\sim Fb$	$2\ \forall$		
7	$\sim Fa$	$1 \rightarrow$		Gb	$1 \rightarrow$

Aplicando inicialmente as regras não-ramificadas, ticamos a linha 3 e obtemos '*Gb*', em 4, por dupla negação. Em 5 e 6, derivamos '~*Fa*' e '~*Fb*', da linha 2, por duas passagens independentes da regra de quantificação universal. Observe que a linha 2 permanece não-ticada. A partir desse ponto, ∀ não pode mais ser aplicada, pois ela foi usada com as duas letras nominais que ocorrem nas wffs do ramo, e ∀ só pode ser usada para introduzir uma nova letra nominal se letras nominais não aparecem nas wffs do ramo. Assim, o que resta é aplicar a regra do condicional, na linha 7. Isso não fecha a árvore; portanto, a forma é inválida.

Ao contrário das árvores de refutação para a lógica proposicional, as árvores de refutação para a lógica de predicados não produzem uma lista completa de contra-exemplos para um argumento inválido. Cada ramo aberto de uma árvore de refutação concluída, na lógica de predicados pode ser interpretado como um "modelo de universo" que contém, exatamente, os objetos mencionados pelo nome, no ramo. As wffs atômicas ou negações de wffs atômicas no ramo indicam o que é verdade sobre esses objetos nesse modelo.

No problema 6.45, os dois ramos abertos representam um universo contendo exatamente dois objetos, *a* e *b*. Nesse modelo de universo, *b* tem a propriedade *G* e ambos *a* e *b*, não são *F*. (Os ramos não especificam quando, ou não, *a* é *G* isso é irrelevante para o caso.) Como '*Fa*' é falsa nesse modelo, então a premissa '$Fa \rightarrow Ga$' é verdadeira, pois o condicional material é verdadeiro quando seu antecedente é falso (ver Capítulo 5). Além disso, como os únicos objetos nesse universo são *a* e *b* e nenhum deles é *F*, a premissa '$\forall x \sim Fx$' é verdadeira. Mas, a conclusão '~*Gb*' é falsa. Esse modelo mostra que existe pelo menos uma instância da forma cuja conclusão é falsa e as premissas são verdadeiras. Em conseqüência, a forma é inválida.

PROBLEMA RESOLVIDO

6.46 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \to Gx),\ \forall xGx \ \vdash Fa$$

Solução

1		$\forall x(Fx \to Gx)$	
2		$\forall xGx$	
3		$\sim Fa$	
4	✓	$Fa \to Ga$	$1\ \forall$
5		Ga	$2\ \forall$
6	$\sim Fa \quad 4 \to$		$Ga \quad 4 \to$

A forma é inválida. Aplicamos a regra da quantificação universal, em 4 e 5, e a do condicional, em 6; como no problema 6.44, a árvore não se fechou. Nenhuma regra mais se aplica e as linhas 1 e 2 permanecem não-ticadas.

Nesse problema, os dois ramos abertos representam um modelo de universo contendo somente um objeto, *a*, que tem a propriedade *G*, mas não *F*. Nesse modelo, as premissas '$\forall x(Fx \to Gx)$' e '$\forall xGx$' são verdadeiras e a conclusão '*Fa*' é falsa; assim, a forma é inválida. É óbvio que '$\forall xGx$' é vedadeira no modelo, pois este contém somente um objeto, *a*, e *a* é *G*. É também óbvio que '*Fa*' é falsa. Contudo, não é tão óbvio que '$\forall x(Fx \to Gx)$' é verdadeira. '$\forall x(Fx \to Gx)$' significa "para qualquer objeto *x* se *x* é *F*, então *x* é *G*", onde 'se' é para ser lido como o condicional material. Um condicional material é verdadeiro se seu antecedente é falso. Como o único objeto no modelo da universo é *a* e *a* não é *F*, o antecedente desse condicional é falso, e portanto o condicional é verdadeiro para qualquer objeto no universo. Logo, '$\forall x\ (Fx \to Gx)$' é verdadeira nesse modelo. Na verdade, qualquer condicional material quantificado universalmente, cujo antecedente é vazio (isto é, a nada se refere), é verdadeiro. Isso significa que toda proposição da forma *A*, com termo sujeito vazio, é verdadeira (ver o final da Seção 5.2).

Quantificação existencial negada ($\sim\exists$): Se uma wff não-ticada da forma $\sim\exists\ \beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\forall\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

Quantificação universal negada ($\sim\forall$): Se uma wff não-ticada da forma $\sim\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\exists\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.47 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx),\ \sim\exists\, xGx \ \vdash \sim Fa$$

Solução

1		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$			
2	$\surd$	$\sim\exists xGx$			
3		$\sim\sim Fa$			
4	$\surd$	$\forall x \sim Gx$	$2 \sim\exists$		
5		$\sim Ga$	$4\ \forall$		
6	$\surd$	$Fa \rightarrow Ga$	$1\ \forall$		
7	$\sim Fa$	$6 \rightarrow$		Ga	$6 \rightarrow$
8	X	$3, 7 \sim$		X	$5, 7 \sim$

A forma é válida.

6.48 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \sim Fa$$

Solução

1	$\surd$		$\sim\exists x(Fx \,\&\, Gx)$			
2	$\surd$		$\sim\sim Fa$			
3			$\forall x\sim(Fx \,\&\, Gx)$	$1 \sim\exists$		
4			Fa	$2 \sim\sim$		
5	$\surd$		$\sim(Fa \,\&\, Ga)$	$3\,\forall$		
6	$\sim Fa$	$5 \sim\&$			$\sim Ga$	$5 \sim\&$
7	X	$4, 6\sim$				

O ramo aberto mostra que, num universo consistindo em um objeto a que é F mas não é G, a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa. Portanto, a forma é inválida. Note que mais nenhuma regra pode ser aplicada para as wffs não-ticadas do ramo aberto portanto, a árvore está concluída.

6.49 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall xFx \rightarrow \forall xGx, \sim\exists xGx \vdash \exists x\sim Fx$$

Solução

1	✓	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$			
2	✓	$\sim\exists xGx$			
3		$\sim\exists x \sim Fx$			
4		$\forall x \sim Gx$	$2 \sim\exists$		
5	✓	$\sim\forall xFx$	$1 \rightarrow$	$\forall xGx$	$1 \rightarrow$
6		$\exists x \sim Fx$	$5 \sim\forall$	Ga	$5\ \forall$
7		X	$3, 6 \sim$	$\sim Ga$	$4\ \forall$
8				X	$6, 7 \sim$

A forma é válida.

A quarta regra quantificacional é um tanto análoga a EE:

<u>*Quantificação existencial* (∃):</u> Se uma wff não-ticada da forma $\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la. Escolhemos, então, uma letra nominal α que ainda não apareceu naquele ramo e escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência de β em ϕ por α) no final de cada ramo aberto contendo a wff recentemente ticada.

Uma nova letra nominal é escolhida, pois ela representará um dos indivíduos para o qual ϕ é verdadeira e a identidade desses indivíduos pode não ser conhecida, apesar de que pelo menos um tal indivíduo existe se $\exists\beta\phi$ é verdadeira.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.50 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists xFx \vdash \forall xFx$$

Solução

1	✓	$\exists xFx$	
2	✓	$\sim\forall xFx$	
3		Fa	1 $\exists$
4	✓	$\exists x{\sim}Fx$	2 $\sim\forall$
5		$\sim Fb$	4 $\exists$

Introduzimos uma nova letra nominal 'a' por $\exists$, na linha 3; substituímos '$\sim\forall xFx$' por sua equivalente existencial, em 4, e introduzimos uma outra letra nominal 'b' com a segunda aplicação de $\exists$, em 5. (A regra de quantificação existencial exige que esta segunda letra nominal seja diferente da primeira.) Nenhuma regra mais se aplica. A árvore está terminada mesmo contendo um ramo aberto; logo, a forma é inválida. A árvore representa um universo contendo dois objetos, a e b, em que a é F e b não é F. Nesse universo, '$\exists xFx$' é verdadeira, mas '$\forall xFx$' não é.

6.51 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \exists xFx \,\&\, \exists xGx$$

Solução

1	√	$\exists x(Fx \,\&\, Gx)$				
2	√	$\sim(\exists xFx \,\&\, \exists xGx)$				
3	√	$Fa \,\&\, Ga$	$1\ \exists$			
4		Fa	$3\ \&$			
5		Ga	$3\ \&$			
6	√	$\sim\exists xFx$	$2\ {\sim}\&$	√	$\sim\exists xGx$	$2\ {\sim}\&$
7		$\forall x \sim Fx$	$6\ {\sim}\exists$		$\forall x \sim Gx$	$6\ {\sim}\exists$
8		$\sim Fa$	$7\ \forall$		$\sim Ga$	$7\ \forall$
9		X	$4, 8\ \sim$		X	$5, 8\ \sim$

A forma é válida.

6.52 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists xFx, \exists xGx \vdash \exists x(Fx \,\&\, Gx)$$

Solução

1	√	$\exists xFx$	
2	√	$\exists xGx$	
3	√	$\sim\exists x\,(Fx\ \&\ Gx)$	
4		Fa	$1\ \exists$
5		Gb	$2\ \exists$
6		$\forall x\sim(Fx\ \&\ Gx)$	$3\ \sim\exists$
7	√	$\sim(Fa\ \&\ Ga)$	$6\ \forall$
8	√	$\sim(Fb\ \&\ Gb)$	$6\ \forall$

9	$\sim Fa$	$7\ \sim\&$	$\sim Ga$	$7\ \sim\&$		
10	X	$4, 9\ \sim$				
11			$\sim Fb$	$8\ \sim\&$	$\sim Gb$	$8\ \sim\&$
12					X	$5, 11\ \sim$

A forma é inválida. O ramo aberto representa um universo contendo dois objetos, *a* e *b*, em que *a* é *F* mas não é *G*, e *b* é *G* mas não é *F*. Observe que, na aplicação da regra de quantificação existencial, introduzimos uma letra nominal *a*, na linha 4, e outra letra nominal, *b*, na segunda aplicação, na linha 5. Note que a árvore está terminada, pois nenhuma regra mais se aplica para o ramo aberto.

O teste da árvore de refutação para validade de uma forma sem premissas no cálculo de predicados é o mesmo que o do cálculo proposicional: nega-se a conclusão e, então, aplica-se as regras para construir a árvore. A forma é válida se e somente se todos os ramos da árvore concluída estiverem fechados.

Pode-se mostrar, por raciocínio metalógico, que qualquer wff que se segue validamente de um conjunto vazio de premissas é um teorema do cálculo de predicados.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.53 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\vdash \sim(\exists x Fx \ \&\ \forall x \sim Fx)$$

Solução

1	✓	$\sim\sim(\exists x Fx \ \&\ \forall x \sim Fx)$	
2	✓	$\exists x Fx \ \&\ \forall x \sim Fx$	1 ~
3	✓	$\exists x Fx$	2 &
4		$\forall x \sim Fx$	2 &
5		Fa	3 ∃
6		$\sim Fa$	4 ∀
7		X	5, 6 ~

A forma é válida.

As regras para os quantificadores operam do mesmo modo para wffs contendo vários quantificadores como para wffs contendo um só quantificador.

6.54 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x \forall y\ (Fxy \rightarrow \sim Fyx) \ \vdash \sim\exists x Fxx$$

Solução

1		$\forall x\forall y(Fxy \rightarrow {\sim}Fyx)$		
2	$\surd$	${\sim}\exists xFxx$		
3	$\surd$	$\exists xFx\ x$		$2\ {\sim}{\sim}$
4		Faa		$3\ \exists$
5		$\forall y\ (Fay \rightarrow {\sim}Fya)$		$1\ \forall$
6	$\surd$	$Faa \rightarrow {\sim}Faa$		$5\ \forall$
7	${\sim}Faa$	$6 \rightarrow$	${\sim}Faa$	$6 \rightarrow$
8	X	$4, 7\ {\sim}$	X	$4, 7\ {\sim}$

A forma é válida. Observe que aplicamos a regra existencial, em 3, antes de aplicar a regra universal, nas linhas 5 e 6. Assim procedendo como estratégia geral, diminuímos o comprimento das árvores.

6.55 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x\forall yLxy \ \vdash \forall x\exists yLyx$$

Solução

1	√	$\exists x \forall y Lxy$	
2	√	$\sim\forall x \exists y Lyx$	
3		$\forall y Lay$	1 $\exists$
4	√	$\exists x \sim\exists y Lyx$	2 $\sim\forall$
5	√	$\sim\exists y Lyb$	4 $\exists$
6		$\forall y \sim Lyb$	5 $\sim\exists$
7		$\sim Lab$	6 $\forall$
8		Lab	3 $\forall$
9		X	7, 8 $\sim$

A árvore tem somente ramos fechados e, portanto, a forma é válida. (Compare com o problema 6.22.)

6.56 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\exists x \exists y Lxy \vdash \exists x Lxx$$

Solução

1	√	$\exists x \exists y Lxy$	
2	√	$\sim\exists x Lxx$	
3	√	$\exists y Lay$	1 E
4		Lab	3 E
5		$\forall x \sim Lxx$	2 $\sim\exists$
6		$\sim Laa$	5 $\forall$
7		$\sim Lbb$	6 $\forall$

A regra do quantificador existencial foi usada duas vezes (linhas 3 e 4) e, em cada uso, introduzimos uma nova letra nominal. Na linha 7, nenhuma regra mais se aplica e o ramo permanece aberto; logo, a forma é inválida.

6.57 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x\, \exists y Lxy \ \vdash Laa$$

Solução

1		$\forall x \exists y Lxy$	
2		$\sim Laa$	
3	✓	$\exists y Lay$	1 $\forall$
4		Lab	3 $\exists$
5	✓	$\exists y Lby$	1 $\forall$
6		Lbc	5 $\exists$
7	✓	$\exists y Lcy$	1 $\forall$
8		Lcd	7$\exists$

A árvore nunca terminará. Ela é infinita. Aplicamos a regra do quantificador universal para 1 e isso gerou uma nova fórmula quantificada existencialmente, em 3. Aplicando $\exists$ para esta nova fórmula, em 4, introduzimos uma nova letra nominal, '*b*', no ramo. Como a fórmula universal em 1, não está ticada, devemos aplicar novamente $\forall$, em 5, para '*b*'. Isso nos dá uma nova fórmula existencial, a qual, por sua vez, introduz uma nova letra nominal, '*c*', na linha 6. Mas isso requer a aplicação $\forall$, na linha 1, para '*c*' — e assim por diante. A forma é inválida. Interpretando '*F*' como 'é o pai de'; da suposição de que todo mundo tem um pai não se segue que a é seu próprio pai. Como a árvore nunca terminará, jamais obteremos uma resposta.

Esse resultado ilustra a indecidibilidade da lógica de predicados, mencionada no começo desta seção. Na verdade, é impossível produzir um conjunto finito de regras que nos dê uma resposta 'válida' ou 'inválida', para qualquer caso. *Observe, entretanto, que essa árvore não dá uma resposta injusta; ela nada afirma. As respostas que o teste da árvore de refutação dão estão sempre corretas.*

As árvores de refutação podem ser aplicadas às formas contendo o predicado de identidade. Isso requer duas novas regras:

Identidade (=): Se uma wff da forma $\alpha = \beta$ aparece num ramo aberto e se uma outra wff ϕ, contendo ou α ou β, aparece não-ticada naquele ramo, então escrevemos no final do ramo qualquer wff que ainda não esteja no ramo, que é o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de qualquer uma dessas letras nominais pela outra em ϕ. Não ticamos $\alpha = \beta$ nem ϕ.

Identidade negada (~=): Fecha-se qualquer ramo aberto no qual uma wff da forma $\sim\alpha = \alpha$ ocorra.

A regra da identidade é a versão da árvore de refutação para =E. A regra da identidade negada está relacionada com = I.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

6.58 Construa uma árvore de refutação para decidir se seguinte forma é válida:

$$a = b \vdash Fab \rightarrow Fba$$

Solução

1		$a = b$	
2		$\sim(Fab \rightarrow Fba)$	
3	✓	$\sim(Faa \rightarrow Faa)$	1, 2 =
4		Faa	$3 \sim\rightarrow$
5		$\sim Faa$	$3 \sim\rightarrow$
6		X	4, 5 ~

Na linha 3, substituímos as duas ocorrências de '*b*' em '$\sim(Fab \rightarrow Fba)$' por '*a*' usando a regra da identidade. A árvore fecha-se, na linha 6; logo, a forma é válida.

6.59 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$Fa, Fb \vdash a = b$$

Solução

1	Fa
2	Fb
3	$\sim a = b$

Nenhuma regra se aplica aqui. Em particular, nenhuma regra da identidade opera sobre fórmulas do tipo $\sim\alpha = \beta$, onde α e β são distintas. A árvore está concluída; a forma é inválida. O ramo aberto representa um universo contendo dois objetos distintos que são *F*.

6.60 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\sim a = b, \sim b = c \ \vdash \sim a = c$$

Solução

1		$\sim a = b$	
2		$\sim b = c$	
3	✓	$\sim\sim a = c$	
4		$a = c$	$3 \sim\sim$
5		$\sim c = b$	$1, 4 =$
6		$\sim b = a$	$2, 4 =$

Aplicamos a regra da identidade para as linhas 1 e 4 e também, 2 e 4. Contudo, a árvore não se fecha. Portanto, a forma é inválida. A árvore nos mostra que as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão pode ser falsa, num universo em que existem objetos a, b e c, de modo que a e c são idênticos, mas distintos de b.[10]

6.61 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$a = b \ \vdash b = a$$

10. Alguns autores permitem que a regra da identidade seja aplicada para uma identidade e para si própria; assim, a linha 4 gera mais três fórmulas, '$a = a$', '$c = c$' e '$c = a$'. De acordo com esta regra da identidade, a árvore acima não estaria terminada até que essas três fórmulas fossem adicionadas. Mas essas fórmulas não fecham necessariamente a árvore. O enunciado de nossa regra estipula que ϕ é uma fórmula distinta de $\alpha = \beta$, e portanto impede a produção dessas fórmulas supérfluas.

Solução

1	$a = b$	
2	$\sim b = a$	
3	$\sim a = a$	1, 2 =
4	X	3 ~=

A forma é válida. Na linha 3, substituímos a ocorrência de 'b' em '$\sim b = a$' por 'a', para obter '$\sim a = a$', Daí a árvore se fecha pela regra da identidade negada.

6.62 Construa uma árvore de refutação para decidir se a seguinte forma é válida:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$$

Solução

1	✓	$\sim\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$	
2	✓	$\exists x \sim\forall y\ \forall z\ ((x = y \ \&\ y = z) \rightarrow x = z)$	1 ~∀
3	✓	$\sim\forall y\ \forall z\ ((a = y \ \&\ y = z) \rightarrow a = z)$	2 ∃
4	✓	$\exists y \forall z\ ((a = y \ \&\ y = z) \rightarrow a = z)$	3 ~∀
5	✓	$\sim\forall z\ ((a = b \ \&\ b = z) \rightarrow a = z)$	4 ∃
6	✓	$\exists z \sim((a = b \ \&\ b = z) \rightarrow a = z)$	5 ~∀
7	✓	$\sim((a = b \ \&\ b = c) \rightarrow a = c)$	6 ∃
8	✓	$a = b \ \&\ b = c$	7 ~→
9		$\sim a = c$	7 ~→
10		$a = b$	8 &
11		$b = c$	8 &
12		$a = c$	10, 11 =
13		X	9, 12 ~

A forma é válida. Na verdade, ela é a lei de transitividade da identidade, provada no problema 6.42.

As tabelas 6-2 até 6-4 resumem as regras de inferência, as regras derivadas e as regras para árvores de refutação, para a lógica de predicados com identidade:

Tabela 6-2 Regras básicas de inferência para a lógica de predicados com identidade.*

Eliminação universal (EU): De uma wff quantificada universalmente, $\forall\beta\phi$, infere-se qualquer wff da forma ϕ^{α}/β, a qual resulta de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α.

Introdução universal (IU): De uma wff ϕ contendo uma letra nominal α, que não ocorre em qualquer premissa ou em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre, infere-se uma wff da forma $\forall\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Introdução existencial (IE): Dada uma wff contendo uma letra nominal α, infere-se qualquer wff da forma $\exists\beta\phi^{\beta}/\alpha$, onde ϕ^{β}/α é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β que não ocorra em ϕ.

Eliminação existencial (EE): Dada uma wff quantificada existencialmente, $\exists\beta\phi$ e uma derivação de uma conclusão ψ a partir da hipótese do tipo ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α que não ocorra em ϕ), descarta-se ϕ^{α}/β e afirma-se ψ.
Restrição: A letra nominal α não pode ocorrer em ψ, nem em qualquer premissa nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE está aplicada.

Introdução da identidade (=I): Para qualquer letra nominal α, pode-se afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer da prova.

Eliminação da identidade (=E): Se ϕ é uma wff contendo uma letra nominal α, então de ϕ e de $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$ pode-se inferir ϕ^{β}/α, que é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por β.

* Somente regras específicas para o cálculo de predicados estão relacionadas. Para uma lista das regras do cálculo proposicional, básicas e derivadas, ver tabelas 3-3 e 3-4, no final do Capítulo 3.

Tabela 6-3 Regras derivadas para a lógica de predicados.

<u>*Intercâmbio de quantificadores* (IQ)</u>: Seja ϕ uma fórmula aberta na variável β. Se um dos seguintes pares é uma subwff de uma wff ψ, infere-se, a partir de ψ, o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de um deles pelo outro que lhe é correspondente.

$\sim\forall\beta\sim\phi$, $\exists\beta\phi$
$\sim\forall\beta\phi$, $\exists\beta\sim\phi$
$\forall\beta\sim\phi$, $\sim\exists\beta\phi$
$\forall\beta\phi$, $\sim\exists\beta\sim\phi$

Tabela 6-4 Regras para árvore de refutação para a lógica de predicados com identidade. *

<u>*Quantificação universal* ($\forall$)</u>: Se uma wff do tipo $\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto e se α é uma letra nominal que ocorre uma wff naquele ramo, então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir todas as ocorrências de β em ϕ por α) no final do ramo. Se nenhuma wff contendo uma letra nominal aparece no ramo, então escolhemos uma letra nominal α e escrevemos ϕ^{α}/β no final do ramo. Em cada caso, não ticamos $\forall\beta\phi$.

<u>*Quantificação existencial negada* ($\sim\exists$)</u>: Se uma wff não-ticada da forma $\sim\exists\ \beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\forall\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

<u>*Quantificação universal negada* ($\sim\forall$)</u>: Se uma wff não-ticada da forma $\sim\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la e escrevemos $\exists\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

<u>*Quantificação existencial* ($\exists$)</u>: Se uma wff não-ticada do tipo $\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, ticâmo-la. Escolhemos uma letra nominal α que não apareceu naquele ramo e então escrevemos ϕ^{α}/β (o resultado de se substituir cada ocorrência de β em ϕ por α) no final de cada ramo aberto que contém a wff ticada recentemente.

Identidade (=): Se uma wff do tipo $\alpha = \beta$ aparece no ramo aberto e se uma outra wff ϕ contendo α ou β aparece não-ticada naquele ramo, então escrevemos no final do ramo qualquer wff que não esteja no ramo, que é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de qualquer uma dessas letras nominais pela outra em ϕ. Não se tica $\alpha = \beta$ nem ϕ.

Identidade negada ($\sim=$): Fechamos qualquer ramo aberto no qual uma wff do tipo $\sim\alpha = \alpha$ ocorra.

* Somente regras específicas para o cálculo de predicados estão relacionadas. Para uma lista das regras do cálculo proposicional, ver tabela 4-1.

Problemas suplementares

I. Formalize as seguintes sentenças usando a interpretação dada a seguir. (As últimas cinco requerem o predicado da identidade.)

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
a	Al
b	Beth
f	fama
d	dinheiro
Predicados unários	
F	é famoso
A	é ambicioso
H	é ser humano
Predicado binário	
G	...gosta de...
Predicado ternário	
P	...prefere...do que...

1) Al e Beth gostam de dinheiro.

2) Nem Beth nem Al são famosos.

3) Al gosta de fama e de dinheiro.

4) Beth prefere fama do que dinheiro.

5) Al prefere Beth do que dinheiro e fama.

6) Beth prefere qualquer coisa do que Al.

7) Al prefere nada do que Beth.

8) Alguns humanos são ambiciosos e famosos.

9) Qualquer pessoa ambiciosa gosta de dinheiro.

10) Nem toda pessoa que gosta de dinheiro é ambiciosa.

11) Se Al e Beth são ambiciosos, então existe um ser humano ambicioso.

12) Beth gosta de qualquer ser humano.

13) Alguém não gosta de si mesmo.

14) Alguém não gosta de alguém.

15) Ninguém gosta de todo mundo.

16) Nenhum ser humano gosta de todo mundo.

17) Al gosta de todo ser humano que gosta dele.

18) Alguns famosos gostam de si próprios.

19) Todos os famosos gostam de si próprios.

20) Nem todos gostam de todos que são famosos.

21) Se Al é ambicioso e Beth não é, então Al e Beth não são idênticos.

22) Beth gosta de todo mundo, exceto de Al.

23) Al é o único ser humano que não é ambicioso.

24) Al prefere dinheiro do que qualquer coisa mais.

25) Todo ser humano que prefere dinheiro a qualquer coisa mais é também ambicioso.

II. Determine quais das seguintes fórmulas são wffs e quais não são. Explique sua resposta.

1) (Fa)

2) Fab

3) $Fab \rightarrow Ga$

4) $\sim Fxy$

5) $\forall x \sim Fxy$

6) $\exists x \exists y \sim Fxy$

7) $(\exists x \exists y \sim Fxy)$

8) $\forall x Fx \rightarrow Lax$

9) $\forall x\, (Fx \rightarrow \mathrm{a} = x)$

10) $\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow \sim y = x)$

III. Construa uma prova para cada uma das seguintes formas usando as regras básicas e derivadas:

1) $\forall x Fx \vdash Fa \;\&\; (Fb \;\&\; (Fc \;\&\; Fd))$

2) $\forall x(Fx \vee Gx), \sim Fa \vdash \sim Ga$

3) $\sim Fa \vdash \sim \forall x\, (Fx \;\&\; Gx)$

4) $\forall x(Fx \leftrightarrow R), R \vdash Fa$

5) $\forall x(\sim Fx \vee \sim Gx) \vdash \sim (Fa \;\&\; Ga)$

6) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\sim Gx \rightarrow \sim Fx)$

7) $\forall x\, (Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x \sim Gx \rightarrow \forall x \sim Fx$

8) $\forall x \forall y\, Fxy \vdash \forall x Fx\, x$

9) $\forall x Fx \vdash \forall x Gx \rightarrow \forall x\, (Fx \;\&\; Gx)$

10) $\forall x \forall y\, (Fxy \rightarrow \sim Fyx) \vdash \forall x \sim Fxx$

11) $\forall x Fx \vdash \exists x Fx$

12) $\sim \exists x Fx \vdash \sim Fa$

13) $\exists x \sim Fx \vdash \sim \forall x Fx$

14) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x Fx \rightarrow \exists\, x Gx$

15) $\sim\exists x(Fx \ \& \ Gx) \ \vdash \forall x(\sim Fx \lor \sim Gx)$

16) $\sim\forall x(Fx \ \& \ Gx) \ \vdash \exists x(\sim Fx \lor \sim Gx)$

17) $\sim\exists x \ \exists y Lxy \ \vdash \forall x \sim Lxx$

18) $\exists x Fx \ \vdash \exists x \ \exists y(Fx \ \& \ Fy)$

19) $\forall x \sim Fx \ \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

20) $\forall x \sim Fx \ \vdash \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

21) $\forall x \forall y \forall z \ ((Lxy \ \& \ Lyz) \rightarrow \sim Lxz) \ \vdash \forall x \sim Lxx$

22) $\vdash \sim\exists x(Fx \ \& \sim Fx)$

23) $\vdash \exists x Fx \lor \ \exists x \sim Fx$

24) $\vdash \exists x Fx \lor \ \forall x \sim Fx$

25) $\vdash \sim\exists x \ \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$

26) $\vdash \forall x \exists y \ x = y$

27) $\vdash \forall x \forall y(x = y \leftrightarrow y = x)$

28) $Fa, \sim Fa \ \vdash \sim\forall x \ \forall y \ x = y$

29) $\forall x(x = a \lor x = b), \exists x Fx, \sim Fa \ \vdash Fb$

30) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$

IV. Construa uma árvore de refutação para cada uma das seguintes formas para decidir se ela é válida.

1) $\exists x Fx \ \vdash Fa$

2) $\forall x Fx \ \vdash Fa$

3) $Fa \ \vdash \exists x Fx$

4) $Fa \ \vdash \forall x Fx$

5) $\forall x Fx \ \vdash \sim\exists x \sim Fx$

6) $\sim\exists x \sim Fx \ \vdash \forall xFx$

7) $\forall x \sim Fx \ \vdash \sim\forall xFx$

8) $\sim\forall xFx \ \vdash \forall x \sim Fx$

9) $\forall xFx \vee \forall xGx \ \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$

10) $\forall x\,(Fx \vee Gx) \vdash \forall xFx \vee \forall xGx$

11) $\vdash \forall x(Fx \vee \sim Fx)$

12) $\vdash \forall x \sim(Fx \rightarrow \sim Fx)$

13) $\vdash \exists xFx \leftrightarrow \sim\forall x \sim Fx$

14) $\exists x\,(Fx\ \&\ \sim Fx) \ \vdash P$

15) $\exists xFx\ \&\ \exists x \sim Fx \ \vdash P$

16) $\sim\exists xFx \ \vdash \forall x\,(Fx \rightarrow P)$

17) $\forall x\forall y\,(Lxy \rightarrow Lyx), \exists xLax \ \vdash \exists xLxa$

18) $\exists x\exists yLxy \ \vdash \exists xLxx$

19) $\forall x\,(Fx \rightarrow \forall yGy) \ \vdash \forall xGx$

20) $\forall x\,(Fx \rightarrow \exists yGy) \ \vdash Ga$

21) $\vdash \sim\forall x\forall y \sim x = y$

22) $\vdash \forall x\forall y\,(\sim x = y \leftrightarrow \sim y = x)$

23) $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx), \sim Fa \ \vdash \exists x \sim x = a$

24) $\exists x\,\exists yLxy \ \vdash \exists x\exists y\,(Lxy\ \&\ \sim x = y)$

25) $\vdash \forall x\forall y\,((Fxy\ \&\ x = y) \rightarrow Fyx)$

V. Formalize os seguintes argumentos usando a interpretação dada. Construa uma árvore de refutação para determinar se a forma do argumento é válida ou inválida. Se ela é válida, construa uma prova.

Símbolo	*Interpretação*
Nomes	
p	Lógica proposicional
r	Lógica de predicados
i	Lógica de predicados com identidade
Predicados unários	
R	é um conjunto de regras
S	é um sistema formal
Predicados binários	
F	é uma fórmula de
P	é uma parte de
W	é uma wff de

1) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados. Portanto, a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional.

2) A lógica proposicional é uma parte de si mesma. Portanto, alguma coisa é uma parte da lógica proposicional.

3) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, mas a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Conseqüentemente, a lógica de predicados não é uma parte de si própria.

4) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados.

5) Todo sistema formal é um conjunto de regras. Portanto, todo conjunto de regras é um sistema formal.

6) Como todo sistema formal é um conjunto de regras, nada que não é um conjunto de regras não é um sistema formal.

7) Não é verdade que não existem sistemas formais, pois a lógica de predicados é um sistema formal.

8) A lógica de predicados não é um sistema formal. Portanto, sistemas formais não existem.

9) Qualquer sistema formal é uma parte de si mesmo. Portanto, alguma coisa é uma parte de si mesma.

10) Existem fórmulas da lógica de predicados. Portanto, existem wffs da lógica de predicados, pois todas as wffs da lógica de predicados são fórmulas da lógica de predicados.

11) A lógica de predicados é um sistema formal. Portanto, todos os sistemas formais são sistemas formais.

12) Nem toda fórmula da lógica de predicados é uma wff da lógica de predicados. Portanto, algumas fórmulas da lógica de predicados não são wffs da lógica de predicados.

13) Toda wff de um sistema formal é uma fórmula daquele sistema. Portanto, existe um sistema formal em que nem todas as suas wffs são fórmulas daquele sistema.

14) Se um sistema formal é parte de um segundo sistema formal, então toda wff do primeiro é uma wff do segundo. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade e ambas são sistemas formais. Assim, toda wff da lógica de predicados é também uma wff da lógica de predicados com identidade.

15) Se uma coisa é uma parte de uma outra segunda e esta segunda coisa é uma parte de uma terceira, então a primeira é uma parte da terceira. A lógica de predicados é uma parte da lógica de predicados com identidade. Portanto, se a lógica proposicional é parte da lógica de predicados, então a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados com identidade.

16) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, se uma coisa não é uma parte de outra, as duas não são idênticas.

17) A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados. A lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Logo, a lógica de predicados não é idêntica à lógica proposicional.

18) Para quaisquer objetos x e y, se x é uma parte de y e y é uma parte de x, então x é idêntico a y. A lógica de predicados não é idêntica à lógica proposicional. Portanto, a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional.

19) Tudo é uma parte de si mesmo. Logo, se a lógica de predicados é idêntica à lógica proposicional, então a lógica de predicados é uma parte da lógica proposicional e a lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados.

20) A lógica de predicados e a lógica proposicional são sistemas formais. A lógica proposicional é uma parte da lógica de predicados, mas a lógica de predicados não é uma parte da lógica proposicional. Logo, existem pelo menos dois sistemas formais distintos.

Respostas a alguns problemas suplementares

I.

5) $Pabd \,\&\, Pabf$

10) $\sim\forall x(Gxd \rightarrow Ax)$

15) $\sim\exists x\, \forall yGxy$, ou, equivalentemente, $\forall x \sim\forall yGxy$

20) $\sim\forall x(Hx \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow Gxy))$

25) $\forall x((Hx \,\&\, \forall y(\sim y = d \rightarrow Pxdy)) \rightarrow Ax)$

II.

5) Não é uma wff. A variável 'y' ocorre sem quantificador. Entretanto, é uma fórmula aberta em 'y'.

10) 'Fa' é uma wff, pela regra 1; e como '$b = a$' é uma wff pela regra da identidade, '$\sim b = a$' é uma wff, pela regra 2. Assim, '$(Fa \rightarrow \sim b = a)$' é uma wff, pela regra 3. Por duas aplicações da regra 4, segue-se que '$\forall x\forall y(Fx \rightarrow \sim y = x)$' é uma wff.

III.

5)

1	$\forall x(\sim Fx \lor \sim Gx)$	*P*
2	$\sim Fa \lor \sim Ga$	1 EU
3	$\sim(Fa \mathbin{\&} Ga)$	2 DM

10)

1	$\forall x\, \forall y(Fxy \to \sim Fyx)$	*P*
2	$\quad\mid Faa$	*H* (para RAA)
3	$\quad\mid \forall y(Fay \to \sim Fya)$	1 EU
4	$\quad\mid Faa \to \sim Faa$	3 EU
5	$\quad\mid \sim Faa$	2, 4 MP
6	$\quad\mid Faa \mathbin{\&} \sim Faa$	3, 5 &I
7	$\sim Faa$	2-6 RAA
8	$\forall x \sim Fxx$	7 IU

15)

1	$\sim\exists x(Fx \mathbin{\&} Gx)$	*P*
2	$\forall x \sim(Fx \mathbin{\&} Gx)$	1 IQ
3	$\sim(Fa \mathbin{\&} Ga)$	2 EU
4	$\sim Fa \lor \sim Ga$	3 DM
5	$\forall x(\sim Fx \lor \sim Gx)$	4 IU

20)

1	$\forall x \sim Fx$	*P*
2	$\quad\mid Fa$	*H* (para PC)
3	$\quad\mid \sim Fa$	1 EU
4	$\quad\mid Ga$	2, 3 CONTRAD
5	$Fa \to Ga$	2-4 PC
6	$\forall x(Fx \to Gx)$	5 IU

25)	1	$\exists x \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$	*H* (para RAA)
	2	$\forall y\ (Lxa \leftrightarrow \sim Lxx)$	*H* (para EE)
	3	$Laa \leftrightarrow \sim Laa$	2 EU
	4	Laa	*H* (para RAA)
	5	$Laa \rightarrow \sim Laa$	3 $\leftrightarrow$ E
	6	$\sim Laa$	4, 5 MP
	7	$Laa \,\&\, \sim Laa$	4, 6 &I
	8	$\sim Laa$	4-7 RAA
	9	$\sim Laa \rightarrow Laa$	3 $\leftrightarrow$ E
	10	Laa	8, 9 MP
	11	$P \,\&\, \sim P$	8, 10 CONTRAD
	12	$P \,\&\, \sim P$	1, 2-11 EE
	13	$\sim\exists x\ \forall y(Lxy \leftrightarrow \sim Lxx)$	1-12 RAA

Este teorema tem instâncias interessantes. Ele pode ser interpretado, por exemplo, como não existe um x tal que, para todo y, x gosta de y se e somente se x não gosta de si mesmo. Isto, como a derivação mostrou, é necessariamente verdadeiro! ('Lxy' pode ser também interpretada como "y é um atributo de x", pensando em x e y como propriedades, ou como "x é um membro de y", quando x e y são conjuntos. Esse argumento formaliza o raciocínio da antinomia de Russell — veja Seção 10.2.) Para entender intuitivamente a derivação, é mais fácil interpretar 'L' como 'gosta'. Logo, mais uma vez o que está provado é que ninguém gosta de todos e somente daqueles que não gostam de si próprios. Para provar isso, começamos com a hipótese de que alguém gosta de todos e somente aqueles que não gostam de si mesmos e, assumimos ainda que esse indivíduo é a (linhas 1 e 2). Desta última, segue-se por EU (passagem 3) que a gosta dele mesmo se e somente se ele não gosta dele mesmo. Então, a gosta ou não dele mesmo? Suponhamos que ele gosta (linha 4). Então, a contradição é imediata; logo, por *redução*, ele não gosta (linha 8). Mas

isto também leva a uma contradição (passagens 8 e 10); logo, a hipótese original conduz inevitavelmente a uma contradição.
A contradição exibida nas linhas 8 e 10 não pode ser usada por EE para completar a prova, pois ela contém a letra nominal 'a', a qual aparece na hipótese de EE, na linha 2. Assim, podemos usar CONTRAD para converter essa contradição em uma que pode ser usada por EE (escolhemos arbitrariamente 'P & ~P'). Isto nos permite executar a passagem EE, na linha 12, e obter a conclusão, na linha 13, por RAA (ver problemas 6.24 e 6.27).

30)

1	$a = b$	H (para PC)
2	$\quad Fa$	H (para PC)
3	$\quad Fb$	1, 2 = E
4	$Fa \rightarrow Fb$	2-3 PC
5	$\quad Fb$	H (para PC)
6	$\quad Fa$	1, 5 = E
7	$Fb \rightarrow Fa$	5-6 PC
8	$Fa \leftrightarrow Fb$	4, 7 $\leftrightarrow$I
9	$a = b \rightarrow (Fa \leftrightarrow Fb)$	1-8 PC
10	$\forall y(\mathrm{a} = y \rightarrow (Fa \leftrightarrow Fy))$	9 IU
11	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$	10 IU

IV. 5)

1		$\forall x Fx$	
2	✓	$\sim\sim\exists x \sim Fx$	
3	✓	$\exists x \sim Fx$	2 ~~
4		$\sim Fa$	3 $\exists$
5		Fa	1 $\forall$
6		X	4, 5 ~

A forma é válida.

10)	1		$\forall x(Fx \vee Gx)$	
	2	√	$\sim(\forall xFx \vee \forall xGx)$	
	3	√	$\sim\forall xFx$	2 $\sim\vee$
	4	√	$\sim\forall xGx$	2 $\sim\vee$
	5	√	$\exists x \sim Fx$	3 $\sim\forall$
	6	√	$\exists x \sim Gx$	4 $\sim\forall$
	7		$\sim Fa$	5 $\exists$
	8		$\sim Gb$	6 $\exists$
	9	√	$Fa \vee Ga$	1 $\forall$
	10	√	$Fb \vee Gb$	1 $\forall$

11	Fa	9 $\vee$	Ga	9 $\vee$				
12	X	7, 11 $\sim$						
13					Fb	10 $\vee$	Gb	10 $\vee$
14							X	8, 13 $\sim$

A forma é inválida.

15)	1	√	$\exists xFx \;\&\; \exists x \sim Fx$	
	2		$\sim P$	
	3	√	$\exists xFx$	1 &
	4	√	$\exists x \sim Fx$	1 &
	5		Fa	3 $\exists$
	6		$\sim Fb$	4 $\exists$

A forma é inválida.

20)

1			$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists yGy)$								
2			$\sim Ga$								
3		$\surd$	$Fa \rightarrow \exists yGy$	$1\,\forall$							
4	$\sim Fa$	$3 \rightarrow$		$\surd$	$\exists yGy$	$3 \rightarrow$					
5					Gb	$4\,\exists$					
6				$\surd$	$Fb \rightarrow \exists yGy$	$1\,\forall$					
7			$\sim Fb$	$6 \rightarrow$			$\surd$	$\exists yGy$	$6 \rightarrow$		
8								Gc	$7\,\exists$		
9							$\surd$	$Fc \rightarrow \exists yGy$	$1\,\forall$		
10					$\sim Fc$	$9 \rightarrow$			$\surd$	$\exists yGy$	$9 \rightarrow$
										$\vdots$	

A árvore é infinita, pois, a linha 1 nunca é ticada e portanto a fórmula '$\exists yGy$' aparece repetidas vezes (linhas 4, 7, 10, etc.). Em cada uma dessas aparições, ela gera uma nova letra nominal. Todavia, podemos ver que a forma é inválida, porque todos os ramos, exceto o do lado mais à esquerda, termina sem fechar-se, e qualquer árvore concluída com um ramo aberto representa uma forma inválida.

25)	1	√	$\sim\forall x\forall y((Fxy \;\&\; x = y) \to Fyx)$	
	2	√	$\exists x \sim\forall y\,((Fxy \;\&\; x = y) \to Fyx)$	1 $\sim\forall$
	3	√	$\sim\forall y\,((Fay \;\&\; a = y) \to Fya)$	2 $\exists$
	4	√	$\exists y \sim((Fay \;\&\; a = y) \to Fya)$	3 $\sim\forall$
	5	√	$\sim((Fab \;\&\; a = b) \to Fba)$	4 $\exists$
	6	√	$Fab \;\&\; a = b$	5 $\sim\to$
	7		$\sim Fba$	5 $\sim\to$
	8		Fab	6 &
	9		$a = b$	6 &
	10		Fbb	8, 9 =
	11		Fba	9, 10 =
	12		X	7, 11 ~

A forma é válida.

V.

5)	1		$\forall x(Fx \to Rx)$			
	2	√	$\sim\forall x(Rx \to Fx)$			
	3	√	$\exists x \sim(Rx \to Fx)$			2 $\sim\forall$
	4	√	$\sim(Ra \to Fa)$			3 $\exists$
	5		Ra			4 $\sim\to$
	6		$\sim Fa$			4 $\sim\to$
	7	√	$Fa \to Ra$			1 $\forall$
	8	$\sim Fa$	7 $\to$		Ra	7 $\to$

A forma é inválida.

10)	1	✓	$\exists xFxr$	
	2		$\forall x(Wxr \rightarrow Fxr)$	
	3	✓	$\sim\exists xWxr$	
	4		Far	$1\ \exists$
	5		$\forall x \sim Wxr$	$3 \sim\exists$
	6		$\sim War$	$5\ \forall$
	7		$\sim Wrr$	$5\ \forall$
	8	✓	$War \rightarrow Far$	$2\ \forall$
	9	✓	$Wrr \rightarrow Frr$	$2\ \forall$

10 $\quad \sim War \quad 8 \rightarrow \qquad\qquad Far \quad 8 \rightarrow$

11 $\quad \sim Wrr \quad 9 \rightarrow \qquad Frr \quad 9 \rightarrow \qquad \sim Wrr \quad 9 \rightarrow \qquad Frr \quad 9 \rightarrow$

A forma é inválida. Observe que, sob a interpretação dada, alguns dos ramos representam universos envolvendo a possibilidade arcana de que a lógica de predicados é uma fórmula dela mesma. Embora não se considere essa possibilidade como um fato contra a validade do argumento, ela não deve ser ignorada sob um ponto de vista puramente formal. Os outros ramos abertos exibem maneiras mais vulgares, nas quais as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa.

15) 1		$\forall x \forall y \forall z((Pxy \& Pyz) \rightarrow Pxz)$					
2		Pri					
3	√	$\sim(Ppr \rightarrow Ppi)$					
4		Ppr					$3 \sim\rightarrow$
5		$\sim Ppi$					$3 \sim\rightarrow$
6		$\forall y \forall x((Ppy \& Pyz) \rightarrow Ppz)$					1
7		$\forall z((Ppr \& Prz) \rightarrow Ppz)$					6
8	√	$(Ppr \& Pri) \rightarrow Ppi$					7
9	√ $\sim(Ppr \& Pri)$	$8 \rightarrow$				Ppi	$8 \rightarrow$
10						X	$5, 9 \sim$
11	$\sim Ppr$	$9 \sim\&$	$\sim Pri$	$9 \sim\&$			
12	X	$4, 11\sim$	X	$2, 10 \sim$			

A forma é válida. Prova:

1	$\forall x \forall y \forall z((Pxy \& Pyz) \rightarrow Pxz)$	P
2	Pri	P
3	| Ppr	H (Para PC)
4	| $\forall y \forall z((Ppy \& Pyz) \rightarrow Ppz)$	1 EU
5	| $\forall z((Ppr \& Prz) \rightarrow Ppz)$	4 EU
6	| $(Ppr \& Pri) \rightarrow Ppi$	5 EU
7	| $Ppr \& Pri$	2, 3 &I
8	| Ppi	6, 7 MP
9	$Ppr \rightarrow Ppi$	3-8 PC

20)

1	√	$Sr \& Sp$	
2	√	$Ppr \& \sim Prp$	
3	√	$\sim\exists x\, \exists y((Sx \& Sy) \& \sim x = y)$	
4		Sr	1 &
5		Sp	1 &
6		Ppr	2 &
7		$\sim Prp$	2 &
8		$\forall x \sim\exists y((Sx \& Sy) \& \sim x = y)$	3 ~∃
9	√	$\sim\exists y((Sr \& Sy) \& \sim r = y)$	8 ∀
10		$\forall y \sim((Sr \& Sy) \& \sim r = y)$	9 ~∃
11	√	$\sim((Sr \& Sp) \& \sim r = p)$	10 ∀

12	√ $\sim(Sr \& Sp)$		11 ~&		√	$\sim\sim r = p$	11 ~&
13						$r = p$	12 ~~
14	$\sim Sr$	12 ~&	$\sim Sp$	12 ~&		$\sim Ppp$	7, 13 =
15	X	4, 14 ~	X	5, 14 ~		$\sim Ppr$	13, 14 =
16						X	6, 15 ~

A forma é válida. Prova:

1	$Sr \,\&\, Sp$	P
2	$Ppr \,\&\, {\sim}Prp$	P
3	$\quad\mid\ r = p$	H (para RAA)
4	$\quad\mid\ Ppp \,\&\, {\sim}Prp$	2, 3 = E
5	$\quad\mid\ Prp \,\&\, {\sim}Prp$	3, 4 = E
6	${\sim}r = p$	3-5 RAA
7	$(Sr \,\&\, Sp) \,\&\, {\sim}\, r = p$	1, 6 &I
8	$\exists y((Sr \,\&\, Sy) \,\&\, {\sim}r = y)$	7 IE
9	$\exists x\, \exists y((Sx \,\&\, Sy) \,\&\, {\sim}x = y)$	8 IE

MAKRON *Books*

Capítulo 7

FALÁCIAS

7.1 Classificação de falácias

Os métodos empregados para avaliar a maioria dos argumentos foram bem-sucedidos. Contudo, para alguns argumentos esses métodos falham. Tabelas-verdade, árvores e diagramas de Venn estabelecem invalidades somente para formas de argumento e não para argumentos específicos. Esses métodos não possibilitam avaliar um argumento: a real verdade ou a falsidade das premissas, o grau de relevância e o efeito de se suprimir uma evidência relacionada com a conclusão. As técnicas informais de avaliação do Capítulo 2 aplicam-se a argumentos específicos; contudo, eles confiam excessivamente na nossa intuição.

O estudo das falácias é também informal, porém ele aguça a intuição ao elucidar os erros mais comuns do raciocínio usual.

Falácias (num sentido amplo) são erros que ocorrem nos argumentos e que afetam sua irrefutabilidade. Em latim, o verbo *fallere* significa "falir". Argumentos falaciosos são enganosos, pois parecem ser, superficialmente, bons argumentos. Contudo, o engano não é uma condição necessária de uma falácia, da maneira que este termo é aqui empregado. Sempre que raciocinamos inválida ou irrelevantemente, ou seja, aceitamos premissas que não deveríamos, ou não fazemos uso adequado dos fatos relevantes à nossa disposição, cometemos uma falácia.

Não há definição aceita universalmente de 'falácia'. Muitos autores usam definições mais restritas do que a dada aqui e empregam o termo de acordo com sua definição. Além disso, não há uma classificação das falácias universalmente aceita. Dividimos as falácias em seis classes: falácias de relevância, falácias de raciocínio circular, falácias semânticas, falácias indutivas, falácias formais e falácias de premissas falsas. Alguns autores usam outros esquemas classificatórios.

Falácias de relevância ocorrem quando as premissas do argumento não têm relação com a conclusão. Além disso, freqüentemente incluem um elemento para desviar a atenção do real problema.

Falácias de raciocínio circular são as falácias de assumir o que se quer provar.

Falácias semânticas resultam quando a linguagem utilizada na construção dos argumentos tem múltiplos significados ou é excessivamente vaga que interfere na avaliação do argumento.

Falácias indutivas ocorrem quando a probabilidade da conclusão de um argumento, dadas as suas premissas — isto é, sua probabilidade indutiva —, é baixa ou, pelo menos, menor do que o argumentador supõe.

Falácias formais ocorrem quando fazemos mau uso de uma regra de inferência válida ou quando inferimos uma regra que tem sua demonstrabilidade inválida.

Finalmente, há uma classe de erros classificados tradicionalmente como falácias: os argumentos que têm *premissas falsas*.

As próximas seis seções correspondem a cada uma dessas classificações. Não faremos um estudo exaustivo das falácias uma vez que o ser humano pode inventar novas e maneiras de se cometer erros lógicos. Desde que Aristóteles redigiu o primeiro catálogo de falácias, fica evidente que maus hábitos de raciocínio obedecem a padrões precisos.

Muitos textos de lógica ainda empregam expressões do latim na classificação de certas falácias. Fornecemos os termos em latim (e seus equivalentes em português) quando tal uso é habitual.

7.2 Falácias de relevância

Falácias de relevância ocorrem quando as premissas de um argumento não têm relação com a conclusão. Tais argumentos são muitas vezes chamados *non sequiturs* (da frase em latim '*non sequitur*', significando 'não se segue'). Distinguiremos alguns tipos de falácias de relevância, embora o erro genérico seja o mesmo em todos. (Para uma discussão geral do papel da relevância ao se avaliar um argumento, ver Seção 2.4.)

A falta de relevância não é a única coisa errada nos argumentos discutidos nesta seção. A maior parte das falácias de relevância ocorre em argumentos inválidos e que têm probabilidades indutivas baixas. Nesta seção focalizamos exclusivamente o problema da irrelevância.

Argumentos do tipo *ad hominem* tentam refutar uma afirmação ou proposta atacando seu proponente e não fornecem um exame ponderado da proposta. '*Ad hominem*' significa "contra a pessoa". Argumentos do tipo *ad hominem* entram em pelo menos cinco casos:

1) Argumentos do tipo *ad hominem ofensivo* atacam uma pessoa idosa, o caráter, a família, o sexo, a moral, a posição social ou econômica, a personalidade, a aparência, a roupa, o comportamento profissional ou político, ou as filiações religiosas. A dedução é que não há motivo para aceitar seriamente as opiniões da pessoa.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.1 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones defende a adição de flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Jones é um raptor condenado.

∴ Não devemos adicionar flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Solução

Embora Jones seja um raptor condenado, isso não tem relação com o fato de se adicionar flúor à água potável. Rejeitar a opinião de Jones simplesmente porque Jones é repreensível é cometer a falácia *ad hominem* ofensiva.

Na prática, as conclusões desses argumentos freqüentemente ficam indeclaradas ou são transmitidas por insinuações. Alguns argumentos contra a pessoa baseam-se em difamação, calúnia, ou no caráter criminoso. Nesses casos as premissas são falsas, bem como irrelevantes.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.2 O argumento abaixo comete um *ad hominem* ofensivo?

Jones diz que viu meu cliente cometer um crime.

Jones é um bêbado inveterado.

∴ O testemunho de Jones é sem valor.

Solução

Este é um caso limítrofe. Embora Jones seja um bêbado inveterado, o que é relevante para a integridade de seu testemunho, a relevância neste caso não é extremamente forte ou direta. A observação de Jones pode ter sido efetuada quando ele estava sóbrio.

7.3 O seguinte argumento é melhor que o do problema 7.2?

Jones diz que viu meu cliente cometer um crime na noite de 21 de abril.

Jones também tinha bebido na noite de 21 de abril e estava incapacitado de observar exatamente os acontecimentos.

∴ O testemunho de Jones sobre esse acontecimento não merece confiança.

Solução

Sim; se as premissas são verdadeiras, esse argumento apresenta boas razões para descartar o depoimento da testemunha. Aqui, não há falácia do tipo *ad hominem*.

2) A falácia de *culpa por associação* é a tentativa de repudiar uma afirmação atacando não o proponente da afirmação, mas as pessoas de seu relacionamento, ou questionando a reputação daqueles com quem concorda. Isto, também, é conhecido como *envenenando o poço*.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.4 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones defende a adição de flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Jones gasta muito do seu tempo livre vagabundeando com criminosos, toxicômanos e vagabundos.

∴ Não devemos adicionar flúor à água potável para o abastecimento da cidade.

Solução

As premissas são irrelevantes para a conclusão; ainda que Jones tenha amigos indesejáveis, o que ele defende pode muito bem ser verdade. Observe também que contestar meramente a segunda premissa ("Jones na verdade gasta muito de seu tempo livre ajudando os idosos e trabalhando como voluntário nos hospitais") não é o caso. A questão lógica central aqui não é se Jones é vítima de infâmia, mas sim o fracasso em relacionar as premissas com a conclusão.

3) Argumentos do tipo *tu quoque* ("você também") tentam refutar uma afirmação atacando seu proponente alegando que ele é um hipócrita, que tem conduta dupla, ou é selecionador e, portanto inconsistente para impor um princípio. A dedução é que o argumentador está desqualificado para fazer a afirmação e, assim, não há razão para considerar seriamente a afirmação.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.5 Comente o argumento:

Jones acredita que nos deveríamos abster de licor.

Jones é um bêbado inveterado.

$\therefore$ Não nos devemos abster de licor.

Solução

Os atos de Jones não têm relação com a verdade ou falsidade com o que acredita, ainda que seja convicto hipocritamente. O argumento comete a falácia *tu quoque*.

É preciso disciplinar-se ao distinguir entre o que uma pessoa diz e o que ela faz, para reprimir uma queixa contra indivíduos fingidos, oportunistas ou moralmente fracos e para impedir uma defensiva conveniente quando alguém recomenda um curso de ação. Todavia uma pessoa racional pode fazer isso.

4) Argumentos do tipo *interesse revestido* tentam refutar uma afirmação argüindo que seu proponente deseja obter alguma coisa (ou impedir a perda de algo). A dedução é que o proponente da afirmação deveria sustentar uma opinião diferente e daí que deveríamos desprezar seu argumento.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.6 O que há de errado com o seguinte argumento?

Jones apóia o projeto de lei da adição de flúor à água potável, pendente no Congresso.

Ele apóia porque possui uma firma de adição de flúor à água potável que colherá muitos dividendos se o projeto de lei for aprovado.

∴ Não devemos apoiar esse projeto de lei.

Solução

As premissas são irrelevantes para a conclusão. A adição de flúor à água pode muito bem ser justificada independentemente dos motivos supostamente interesseiros de Jones. O argumento comete a falácia de interesse revestido. Quer Jones lucre, quer perca por causa da adição de flúor à água potável não é importante. O que conta é se a adição de flúor à água potável é desejável higienicamente, se o orçamento é viável e assim por diante.

5) Falácias *ad hominem circunstancial* são algumas vezes agrupadas numa categoria de falácias de interesse revestido, porém há uma distinção entre elas. A versão circunstancial da falácia *ad hominem* é a tentativa de refutar uma afirmação argüindo que seu proponente apóia duas ou mais proposições conflitantes. A implicação é que podemos desprezar seguramente uma ou todas essas proposições.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.7 Comente o argumento:

Jones diz que detesta todas as formas de superstição.

Jones também diz que quebrar um espelho dá azar.

∴ Há provavelmente alguém supersticioso.

Solução

É uma falácia do tipo *ad hominem* circunstancial. A afirmação de Jones, consistente ou não, não tem relação com a veracidade da conclusão.

Todos os cinco tipos de argumentos *ad hominem* tentam refutar uma afirmação atacando seu proponente. Argumentos do tipo *homem-de-palha*, ao contrário, tentam refutar uma afirmação confundindo-a com uma afirmação menos plausível e, então, atacam a afirmação menos plausível, em vez de dirigir-se à questão original. O termo vem da esgrima medieval, onde os participantes se aqueciam praticando contra bonecos (homens-de-palha) antes de enfrentarem os adversários.

Um argumento do tipo homem-de-palha pode proporcionar boas razões contra a afirmação menos plausível que a confunde com a questão real, mas essas razões são irrelevantes para a questão real.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.8 Comente o argumento:

Não pode existir verdade se qualquer coisa é relativa.

∴ A teoria da relatividade de Einstein não pode ser verdadeira.

Solução

A premissa é totalmente irrelevante para a conclusão, pois a teoria de Einstein não afirma que qualquer coisa é relativa (qualquer que seja o significado). A afirmação de que qualquer coisa é relativa é um homem-de-palha e o argumento implicitamente ataca esse homem-de-palha em vez de examinar a teoria de Einstein. Assim, mesmo que a premissa seja verdadeira (o que é dúbia; é difícil ver o que essa premissa pode significar), ela não oferece apoio para a conclusão.

Para diagnosticar corretamente um argumento do tipo homem-de-palha, geralmente precisamos saber mais sobre a afirmação em questão. Nesse caso, precisaríamos saber que a teoria de Einstein não afirma que qualquer coisa é relativa.

Argumentos *ad baculum* (também chamados de recurso à força ou apelo à força) tentam estabelecer uma conclusão através de ameaça ou intimidação.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.9 Comente o argumento:

Se você não dormir comigo, Jones, eu atirarei em você.

∴ Você deve dormir comigo.

Solução

A premissa é irrelevante para justificar a conclusão. Coação, ameaças e intimidação podem ser persuasivas em alguns casos, mas não têm lugar numa apreciação racional. Note que não faz diferença como Jones responderá a essa ameaça; o fato dele recusar não altera esse tipo de "raciocínio" que é inaceitável logicamente.

Um argumento *ad baculum* ocorre numa conversa e, com freqüência, fica subentendido. No problema 7.9, por exemplo, a conclusão poderia ficar implícita. Assim, falácias do tipo *ad baculum* são difíceis de distinguir a partir de meras ameaças. A "proposta que você não pode recusar" é imoral, mas ela é ilógica? Considere o seguinte exemplo:

PROBLEMA RESOLVIDO

7.10 Pai: Limpe seu quarto senão...

Criança: Senão o quê?

∴ Pai: Senão você levará uma surra.

Essa falácia é do tipo *ad baculum*?

Solução

Não. Aqui não há argumento, há meramente um ultimato. O pai não está tentando justificar ou sustentar uma conclusão. Onde não há argumento, não pode haver falácia (pelo menos no sentido em que falácia está sendo empregada aqui).

Argumentos *ad verecundiam* (apelo à autoridade) ocorrem quando aceitamos (ou rejeitamos) uma afirmação simplesmente por causa do prestígio, *status* ou respeito que concedemos a seu proponente (ou oponente).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.11 Por que o seguinte apelo à autoridade é inadequado?

Meu professor diz que eu deveria orgulhar-me de ser americano.

∴ Eu devo orgulhar-me de ser americano.

Solução

Sem uma evidência adicional de que o enunciado do professor está correto, a premissa é irrelevante para a conclusão. Não importa quão eloquente seja o locutor ao dizer que algo não é para ser feito desse modo.

A insuficiência do apelo à autoridade fica aparente quando opiniões de autoridades são conflitantes.

7.12 O seguinte argumento é melhor que o do problema 7.11?

O professor dela diz que eu deveria envergonhar-me de ser americano.

∴ Eu deveria envergonhar-me de ser americano.

Solução

Não. É outro apelo à autoridade. O fato é que ele infere uma conclusão diametralmente oposta, que não ajuda absolutamente.

Por outro lado, adicionar uma premissa a cada um desses exemplos é uma estratégia para forjar um elo de relevância, tornando cada um dos argumentos válidos.

7.13 Esses argumentos cometem a falácia de apelo à autoridade?

Meu professor diz que eu deveria orgulhar-me de ser americano.

Tudo o que meu professor diz é verdadeiro.

$\therefore$ Eu deveria orgulhar-me de ser americano.

O professor dela diz que eu deveria envergonhar-me de ser americano.

Tudo o que o professor dela diz é verdadeiro.

$\therefore$ Eu deveria envergonhar-me de ser americano.

Solução

Não. As premissas são totalmente relevantes para as conclusões; e, além disso, cada argumento é dedutivamente válido. Entretanto, a segunda premissa em cada caso dificilmente é verdadeira.

Esses argumentos ainda são falaciosos. O problema fundamental com esses dois argumentos, bem como com os argumentos dos problemas 7.11 e 7.12, é que eles nos solicitam tomar alguma outra palavra para a conclusão, em vez de considerá-la por si só.

Todavia, existem muitas ocasiões em que um apelo à autoridade se justifica. Poucas pessoas conhecem física o suficiente para verificar a equação $E = mc^2$. Sem a matemática requerida e uma base experimental para confirmá-la, é razoável considerar a palavra de Einstein (e, na verdade, a palavra de toda a comunidade de físicos).

Numa sociedade complexa é difícil, senão impossível, para qualquer indivíduo saber o suficiente para tomar decisões sem uma ajuda em assuntos específicos. Mesmo Einstein não dominava a física por si só; ele foi instruído numa universidade e aprendeu as técnicas de seus antecessores.

Assim, muito do nosso conhecimento está baseado inevitavelmente em apelo à autoridade. Esses apelos não são falaciosos, contanto que tenhamos boas evidências de que as opiniões das autoridades têm justificativas adequadas.

Contudo, apelos à autoridade são falaciosos quando aceitam sem críticas os pronunciamentos de autoridades e quando não fornecem evidências da fidedignidade da autoridade (como nos problemas 7.11 e 7.12) ou, ainda, quando sobrestimam a fidedignidade da autoridade (como no problema 7.13.) (Neste último caso, a falácia não é a falácia de apelo à autoridade "de per si", mas simplesmente uma premissa falsa.)

Na América do Norte contemporânea, talvez a forma mais predominante de apelo à autoridade seja o *testemunho*, dado pelas celebridades que aparecem em publicidades e comerciais endossando produtos, serviços ou marcas de consumo. A imagem do ator "estrela", atriz ou atleta circundado pela mercadoria floreada é o necessário. Afirmações patentes não precisam ser feitas, o que é um problema, pois, sem afirmações não há argumento e portanto nenhuma falácia para expor. Além disso, não queremos alterar os anúncios ou colocar palavras nas bocas das pessoas que fazem os comerciais. Contanto que estejamos atentos a essas advertências, podemos revelar a essência dos testemunhos como argumentos, sem entretanto criar homens-de-palha.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.14 Como sabemos, as opiniões de "autoridades" nem sempre coincidem. Mas, o apelo falacioso que elas comunicam é constante. Considere esses dois casos:

Ricardo Montalban nos recomenda comprar um novo Chrysler.

∴ Devemos comprar um novo Chrysler.

Telly Savalas nos recomenda comprar um novo Ford.

∴ Devemos comprar um novo Ford.

O que é questionável em cada caso?

Solução

Os dois argumentos são versões de testemunho da falácia de apelo à autoridade. Em nenhum dos casos a premissa tem relevância para a conclusão.

Note que a falácia permaneceria inalterada ainda que o autor nos recomendasse somente que dirigíssemos o carro. Essa falácia tem a forma:

X diz que P.

$\therefore P$.

Não importa se os resultados são benéficos, nocivos ou nada disso.

Testemunhos geralmente exploram fama ou notoriedade de uma pessoa em vez de seu conhecimento. Suponha que Montalban ou Savalas recomendem a uma pessoa que deseja ser um artista para inscrever-se na escola de atores de Jack Webb. Como Montalban e Savalas são atores bem-sucedidos, essa opinião (tal como a da comunidade física, que endossa que $E = mc^2$) seria relevante. Como regra geral, um apelo à autoridade é relevante (e daí razoável) na proporção da integridade da autoridade no campo em que o apelo é feito.

Argumentos *ad populum* (apelo ao povo) ocorrem quando inferimos uma conclusão pelo fato de que a maioria das pessoas os aceitam. Essa falácia tem a forma:

X diz que P.

$\therefore P$.

que é análoga ao apelo à autoridade. Entretanto, 'X' nesse caso representa a opinião da maioria e não de uma pessoa especializada (ou glamourosa) ou de uma minoria.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.15 Por que esse apelo à crença popular é ilegítimo?

Todos acreditam que sexo pré-nupcial é errado.
∴ Sexo pré-nupcial é errado.

Solução

A questão não é se "todos", de fato, acreditam nisso (pensando que a premissa é falsa), mas o que podemos inferir dessa premissa. O argumento não estabelece conexão relevante entre a premissa e a conclusão e, portanto, ele é falacioso.

Tal como com o apelo à autoridade, existem apelos ao "bom senso" ou "conhecimento comum", que são relevantes desde que acreditemos que esse "conhecimento comum" está bem fundamentado ou é digno de confiança.

A maioria das pessoas espera ter uma aprovação igual, e sempre estão pressionadas a obedecer aos ditames populares, apelo ao povo freqüentemente encoraja o *efeito eleiçoeiro*, o qual nos convida a unir forças aos demais.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.16 O que está errado com o seguinte argumento?

Muitas pessoas dirigem mais os Chevrolet do que qualquer outro carro.
∴ Você não deveria? (Uma questão retórica indicando que você deveria.)

Solução

Essa é uma versão eleiçoeira da falácia *ad populum*. A premissa é irrelevante. Ela não fornece evidência de que os Chevrolet são carros bons ou o carro certo para você dirigir, ou mesmo que você deveria dirigir um. (Talvez fosse melhor andar de bicicleta!) A popularidade dos Chevrolet *deve* resultar de sua qualidade, mas o argumento não dá razão para acreditar nisso. Poderia ainda ser o efeito de uma publicidade ou de outros fatores que não relacionam sua conveniência com as nossas necessidades.

Quanto maior for o número de adeptos "bem informados", melhores serão os comerciais. Se quiser estar bem informado, você deverá fazer como o anúncio recomenda.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.17 Explique a falácia de relevância no seguinte argumento:

Paladares apurados preferem o vinho x.
$\therefore$ Você deve beber o vinho x.

Solução

Nenhuma razão é dada para que você beba o que os "paladares apurados" preferem; assim, a conclusão não se segue. É uma falácia *ad populum* que apela para o cognoscitivo. A premissa desse argumento é também questionável; exatamente quem se considera com um "paladar apurado", e o que faz esses "paladares apurados" preferirem esse vinho? (Diremos mais sobre essa premissa no problema 7.27.)

Argumentos *ad misericordiam* (apelo à piedade) nos pedem para desculpar ou perdoar uma ação devido às circunstâncias atenuantes. Eles pedem clemência ou simpatia pela falta de respeito de alguém a uma regra já estabelecida. Um apelo à piedade pode ser legítimo ou falacioso, dependendo se as circunstâncias atenuantes, segundo se alega, são realmente relevantes para o caso.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.18 Explique a falácia no seguinte argumento:

Ei, funcionário, você vê aqui o meu bebê. Ele estava chorando por um doce e eu o levei à doceira antes de voltar para o meu carro.

∴ Você não deveria me dar um tíquete de estacionamento.

Solução

É uma falácia *ad misericordiam*. O argumentador apela para a piedade do funcionário, mas o apelo é claramente irrelevante. Isso não é motivo para não se dar um tíquete de estacionamento.

7.19 Apesar de eu ter recebido baixa avaliação de ensino, muitos dos meus alunos não tinham conhecimentos anteriores do assunto e sentiam dificuldades para compreender a leitura. Durante o semestre, eu estava sobrecarregado com outros deveres, incluindo uma pesada lista de tarefas da comissão e participação em diversas conferências importantes. Eu não dispunha de um assistente ou auxiliar de ensino e deveria classificar um grande número de artigos toda a semana.

∴ Essas avaliações não deveriam ter um papel significante em minha nomeação.

O professor foi injustiçado?

Solução

Não temos informações suficientes para responder. As premissas são mais relevantes nesse caso do que no problema 7.18; porém a baixa avaliação não está justificada. Para decidir se é uma falácia *ad misericordiam*, precisamos conhecer exatamente quão más foram as avaliações, quão extraordinariamente foram atenuantes as circunstâncias, e por quais normas esses fatores foram ponderados.

Argumentos *ad ignorantiam* (apelo à ignorância) têm uma das seguintes formas:

Não tem sido provado que P.
$\therefore \sim P$.

Não tem sido provado que $\sim P$.
$\therefore P$.

Temos dois exemplos clássicos:

PROBLEMA RESOLVIDO

7.20 Ninguém ainda provou que Deus existe.

∴ Deus não existe.

Ninguém ainda provou que Deus não existe.
∴ Deus existe.

Qual é o erro com esses argumentos?

Solução

Ambos são falácias que apelam à ignorância. Nada sobre a existência de Deus se segue de nossa incapacidade em provar a existência ou não-existência de Deus (isto é, de nossa ignorância sobre o assunto).

Esses argumentos sugerem uma dicotomia falsa: ou a evidência para uma afirmação é conclusiva ou a afirmação em si é falsa. Contudo, a afirmação pode ser verdadeira ainda que a evidência não seja conclusiva. Na ausência de prova, o racional é ficar com a evidência disponível e, se a evidência favorece uma conclusão, esta é aceita *experimentalmente*. Algumas vezes, porém, a evidência disponível não ajuda o suficiente para uma conclusão experimental. Nesse caso, é melhor suspender o julgamento.

Ignoratio elenchi (conclusão irrelevante) ocorre quando as premissas de um argumento levam o uma conclusão diferente daquela que o argumentador infere. Isso pode ser embaraçoso, especialmente se a conclusão que se segue contradiz ou abala a única, inferida. A expressão "conclusão irrelevante" é utilizada, também, para as falácias de relevância. Reservaremos tal expressão somente para o erro mencionado.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.21 Qualquer índice de inflação é ruim para a economia.

A inflação do mês passado foi fixada numa taxa anual de 10%.

Este mês a taxa da inflação é somente de 7%.

∴ A economia está melhorando.

Qual a intenção do argumentador?

Solução

Dadas as premissas, o que se segue é que a taxa da inflação está diminuindo. A inflação ainda está ocorrendo (isto é, as coisas estão piorando), porém mais lentamente do que antes. Isso é muito diferente de afirmar que a economia está melhorando; na verdade, elas sugerem uma conclusão oposta.

Conclusão irrelevante pode ser devastadora, pois mostra que o argumentador não entende o que está dizendo. Nem todos os casos de conclusão irrelevante têm uma conclusão oposta ao que as premissas permitem. Mas todas acabam induzindo numa conclusão errada, uma que as premissas não justifica.

Uma *impertinência* é usada a fim de desviar a atenção da questão proposta num argumento. (A frase deriva-se de um método usado para treinar cães de caça que seguem o cheiro de uma pista.) Uma impertinência em nada contribui num argumento, embora insinua que se reflita sob outros aspectos. Impertinências são estratégias retóricas. Elas disfarçam os outros defeitos e se esquiva da questão real, dificultando assim o argumento.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.22 O que está errado com o argumento?

Alguns membros da polícia podem ser corruptos, mas existem bombeiros corruptos, vendedores corruptos e ainda políticos corruptos.

Existem também muitos policiais honestos.

∴ Colocamos a corrupção policial em perspectiva (a dedução é que a corrupção policial não é tão má quanto pode parecer).

Solução

Grandiloqüência retórica é empregada para nos despistar da questão real; o que faz o policial aceitar suborno. O argumento tenta apaziguar seus leitores na complacência sobre essa questão. Observe que a primeira premissa contém uma sutil insinuação de *tu quoque*. (Por que apontamos o policial para o castigo? Corrupção existe em todas as ocupações da vida.) A segunda premissa nos pede para sentir simpatia por policiais que são funcionários honestos e que estão cercados pela má reputação de seus colegas (uma outra tática diversiva). Além disso, como a real conclusão (que policial corrupto não é tão mau quanto isso pode parecer) não foi estabelecida explicitamente, estamos menos inclinados a observar que as premissas são irrelevantes.

7.3 Raciocínio circular

Raciocínio circular (também chamado de *petitio principii* e *incorrer em petição de princípio*) ocorre quando um argumento assume sua própria conclusão. Esse argumento é sempre válido (pois se as suposições são verdadeiras, então a conclusão, sem dúvida, deve ser verdadeira!) e não há falta de relevância (o que pode ser mais relevante para um enunciado do que seu próprio enunciado?). Contudo, isso é inútil para provar a conclusão. Para verificar tal fato, devemos considerar o contexto do argumento. Ou o argumento é oferecido num contexto no qual a conclusão já é sabida ser verdadeira (em tal caso não há razão para tentar provar isso) ou o argumento é oferecido num contexto no qual a conclusão é dúbia. Mas, se a conclusão é dúbia, então a suposição também o é. Um argumento que usa suposições dúbias (mesmo que ignoremos que elas sejam verdadeiras) não fornece mais credibilidade para a conclusão do que suas premissas já têm (ver Seção 2.2). Em nenhum contexto um argumento do tipo petição de princípio favorece a credibilidade da conclusão.

Alguns autores usam o termo 'petição de princípio' num sentido amplo, para designar qualquer raciocínio baseado em premissas contestadas. Entretanto, devemos insistir que a premissa questionada será a conclusão de si própria — ou pelo menos de um enunciado estreitamente relacionado com ela (ver problema 7.24).

Na prática, argumentos do tipo incorrer em petição de princípio geralmente estão disfarçados ou por reformularem uma de suas premissas em palavras diferentes como a conclusão ou por manterem um dos dois enunciados idênticos implícitos.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.23 Analise o erro no argumento:

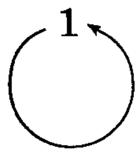
Nudez pública é imoral porque ela é uma ofensa evidente.

Solução

A premissa é 'Nudez pública é uma ofensa evidente' e a conclusão é 'Nudez pública é imoral'. É fácil ver que essas duas sentenças dizem a mesma coisa; a premissa está simplesmente reformulada como conclusão. Portanto, o argumento incorre em petição de princípio. De modo algum a credibilidade da conclusão elevou-se ao afirmá-la como premissa. Podemos verificar a estrutura do argumento através de seu diagrama (ver Capítulo 1). Como a conclusão e a premissa são a mesma proposição, lhes damos o mesmo número (1); logo, o diagrama é o seguinte:

$$
\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array}
$$

ou, ainda:



o qual fornece uma ilustração gráfica da circularidade do argumento.

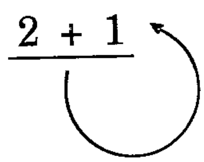
7.24 Analise o erro no argumento:

①[É claro que o testemunho de Bob é verdadeiro.] ②[Ele testemunhou isso], não foi?

Solução

Colocamos colchetes e enumeramos os enunciados da maneira dada no Capítulo 1. A chave para entender este argumento é verificar que ele assume implicitamente que o testemunho de Bob foi verdadeiro, o qual, é claro, é o que está supostamente sendo provado.[1] Portanto, o argumento incorre em petição de princípio. Podemos diagramar o argumento por uma das maneiras indicadas abaixo:

$$\begin{array}{c} \underline{2 + 1} \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$



1. Na verdade, estamos camuflando um pouco as coisas. Para ser exato, a suposição implícita fica melhor construída pelo enunciado: ③[Foi verdadeiro que o testemunho de Bob foi verdadeiro.], que não é exatamente o mesmo que a conclusão expressa no enunciado 1, mas uma parte dele. O princípio, contudo, é o mesmo: se o enunciado 1 é dúbio, então também o é o enunciado 3. Muitos autores concordam que casos como esse se classificam como incorrer em petição de princípio.

Incorrer em petição de princípios epítetos são frases que prejudicam a discussão e assim, de certo modo, assumem o ponto principal na questão. Freqüentemente elas sugerem um ataque *ad hominem* ofensivo: 'comunista ateu', 'liberal impulsivo', 'coração sangrento', 'conservador antiquado', etc. Todavia, essas frases não precisam fazer parte de um argumento do tipo incorrer em petição de princípio. Freqüentemente elas especificam somente uma vocação.

Perguntas complexas são uma manobra retórica semelhante aos argumentos do tipo incorrer em petição de princípio. A pergunta 'Você parou de surrar seu cônjuge?', por exemplo, pressupõe respostas para duas perguntas logicamente prévias: 'Você sempre surrou seu cônjuge' e 'Você ainda faz isso?'. Se a primeira pergunta não for respondida afirmativamente, então a segunda ficará ilegítima, uma armadilha verbal que induz o incauto. Ela torna-se ilegítima, pois pressupõe algo que não ficou estabelecido, a saber, que a pessoa que está sendo questionada tem surrado seu cônjuge. É claro que uma pergunta complexa não interfere num argumento, pois ela não é um enunciado. Mas a sua semelhança com argumentos do tipo incorrer em petição de princípio requer breves comentários.

7.4 Falácias semânticas

Falácias semânticas ocorrem quando a linguagem na qual se expressa um argumento tem múltiplos significados ou é excessivamente vaga no modo em que interfere na avaliação da força lógica do argumento.

Ambigüidade (ou equívoco) é multiplicidade de significado. Muitas palavras e frases têm mais do que um significado literal. Elas só não confundem o nosso entendimento quando o contexto deixa claro o significado que se tenciona. Podemos dizer, 'manga' não para significar o fruto da mangueira, mas sim uma parte do vestuário.

Quando chamamos alguém de manequim, não queremos dizer que a pessoa é um boneco. 'Fantoche' também tem conotações figurativa e literal.

Apesar das insinuações contextuais, a ambigüidade algumas vezes causa transtornos. Termos relativamente abstratos, tais como 'direito' e 'lei', são os principais candidatos para alguns equívocos, pois somos inclinados a unir os seus significados. Um político direito não é o mesmo que um político legal ou um político moral ou, ainda, um político direito (isto é, conservador). Esses sentidos de 'direito' são distintos de 'direito' como sinônimo de correto. Uma lei da física não é uma lei no mesmo sentido que uma lei instituída socialmente.

Ambigüidade gera falácias quando o significado de uma expressão muda durante o curso de um argumento, causando uma aparência enganadora de validade.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.25 Avalie o argumento:

É tolo brigar por meras palavras.

Apartheid é somente uma palavra.

∴ É tolo brigar por *apartheid.*

Solução

Nesse contexto, '*apartheid*' pode significar: 1) o sistema de segregação racial da África do Sul ou 2) a própria palavra '*apartheid*'. (Neste último caso, a palavra deveria estar entre aspas, como foi explanado na Seção 1.6; mas, muitas pessoas ignoram essa convenção.) Se '*apartheid*' significa a palavra nas duas ocorrências, então não há falácia e, portanto, o argumento é válido e talvez mesmo correto. (Porém, parece um pouco estranho brigar por essa palavra.) Por outro lado, se '*apartheid*' significa nas duas ocorrências o sistema de segregação racial, então, embora o argumento seja válido, a segunda premissa é certamente falsa; assim falha o argumento. Contudo, o que parece ser mais provável é que o argumentador utiliza '*apartheid*' para significar a palavra na premissa e o sistema de segregação na conclusão. Nesse caso, as premissas podem ser ambas verdadeiras, mas são irrelevantes para a conclusão e o argumento é inválido. Entretanto, ao se misturar as duas interpretações, dá origem a uma aparência enganosa de relevância e de validade. Na terceira interpretação, o argumentador comete a falácia da ambigüidade.

Na análise nesse exemplo faz referência a várias interpretações e julgam o argumento em cada caso. Raciocínio ambíguo freqüentemente requer tal tratamento. Uma única interpretação não pode atribuir uma afirmação ao argumento, a menos que se tenha uma evidência conclusiva de que o argumentador pretende aquela e não as outras. Na ausência de tal evidência, deve-se analisar cuidadosamente todas as interpretações plausíveis. Na verdade, há ainda uma quarta interpretação possível para o argumento do problema 7.25; a de que '*apartheid*' significa o sistema de segregação na segunda premissa e a palavra na conclusão. Contudo, essa interpretação também não é plausível (pois ela torna a segunda premissa falsa, bem como irrelevante, e assim invalida o raciocínio); logo ela pode ser ignorada.

Anfibologia é ambigüidade no nível da estrutura da sentença, isto é, ambigüidade não-decifrável por uma palavra particular da sentença, mas sim no modo de sua construção gramatical. Uma fonte molesta de ambigüidade é a ocorrência dos dois quantificadores, universal e existencial, numa mesma sentença. Como foi observado na Seção 6.2, essa ambigüidade surge quando se troca os escopos dos quantificadores. Por exemplo, a sentença 'Algum número é maior do que qualquer número' tem dois significados:

1) Para qualquer número x, existe um número (não necessariamente o mesmo) que é maior que x.

2) Existe um número y (presumivelmente bem grande) que é maior do que todos os números.[2]

Observe que essa dualidade de significado não é decifrável por uma palavra ambígua no enunciado original, mas é um resultado da estrutura do enunciado. Sob a interpretação 1, o enunciado é verdadeiro. Para todo número x, existe um número maior: $x + 1$, por exemplo. Porém, sob a interpretação 2 ele é falso. Da interpretação 2 segue-se que y é maior do que si próprio (pois y é maior que todos os números e ele próprio é um número), o que é impossível, evidentemente.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.26 Avalie o argumento:

Algum número é maior do que qualquer número.
$\therefore$ Algum número é maior do que si mesmo.

Solução

A primeira premissa é anfibológica, como já indicamos anteriormente. Sob a interpretação 1, a premissa é verdadeira, mas a inferência é inválida (pois a conclusão é falsa). Sob a interpretação 2, a inferência é válida, mas a premissa é falsa. Logo, sob nenhuma interpretação o argumento é correto.

Vaguidade é indistinção de significado, em oposição à multiplicidade de significado.

---

2. Usando 'N' para 'é um número' e 'M' para 'é maior do que', elas podem ser representadas na lógica de predicados, respectivamente, por:
1) $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \,\&\, Myx))$
2) $\exists y(Nx \,\&\, \forall x(Nx \rightarrow Mys))$
Observe a mudança nas posições dos quantificadores.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.27 O que está errado com o argumento?

Paladares apurados preferem o vinho x.

Eu tenho um paladar apurado.

$\therefore$ Eu devo preferir o vinho x.

Solução

Essa versão (em contraste com a do problema 7.17) é válida, e as premissas são relevantes para a conclusão. Entretanto, os significados das premissas são vagos, de modo que suas veracidades são discutíveis.

Exatamente o que é um "paladar apurado" e quem (exceto o argumentador) tem um paladar apurado? Alguém que gosta do vinho x? O que poderia ser um critério, mas isso seria incorrer em petição de princípio. Em publicidade os significados das palavras são freqüentemente deixados vagos a fim de que os consumidores possam interpretá-los do modo que mais lhe convenham. Mas isso não elimina a vaguidade. Ainda que pudéssemos identificar quem tem um "paladar apurado", quais são as coisas que fazem tais pessoas preferirem o vinho x? A todos os outros vinhos? Aos vinhos mais baratos? À carne estragada? Salvo se essas questões são respondidas, nada definitivo foi afirmado. Nada podemos afirmar sobre a veracidade das premissas e, assim, não devemos aceitar o argumento.

Uma versão extrema da vaguidade é *pensar-duplo*, no qual toda sentença revoga a sua predecessora e contradiz sua sucessora. O romance *1984*, de George Orwell, descreve uma sociedade fictícia (Oceania) cujos legisladores inventaram uma linguagem (Newspeak) que opera nesse princípio autodestrutivo. Newspeak é uma forma sistematizada de mentir na qual toda declaração é inverificável. Não há acesso aos fatos, exceto através de registros distorcidos, todos compostos em Newspeak. O intuito do

Newspeak é tornar impossível o pensamento e, portanto, discordar dele. A fraude subjacente ao Newspeak não pode ser compreendida, mesmo pelas pessoas que a introduzem e a mantêm. As idéias de Orwell têm inspirado descobertas consideráveis no âmbito em que a conversação diária, a gíria científica e militar, o discurso político e burocrático de uma corporação numa sociedade contemporânea incorporam elementos do pensar-duplo orwelliano.

Ênfase se refere às enfatizações que geram interpretações múltiplas (e, freqüentemente, enganadoras). Cabeçalhos de jornais, multas de contratos, comerciais "involuntários" e formulários de inscrições para concursos são fontes costumeiras de falácias de ênfase.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.28 Por que é fraudulento o cabeçalho do jornal?

ESTUDANTES MANIFESTAM
Técnicas Novas de Raio Laser
Usadas para Retirar Dinheiro de Caixas Eletrônicas

Solução

A primeira linha induz o leitor a acreditar que estudantes (universitários?) estão envolvidos em protesto político. A segunda nos faz supor quebra de sigilo científico. A terceira nos força a interpretar novamente toda a mensagem. A confiança na primeira ou nas primeira e segunda linhas nos conduz a conclusões errôneas. Inferir tais conclusões é cometer a falácia de ênfase.

7.5 Falácias indutivas

Falácias indutivas ocorrem quando a probabilidade indutiva de um argumento é baixa, ou pelo menos menor do que o argumentador pensa que é. (Para uma discussão geral de probabilidade indutiva, ver Seção 2.3.)

Generalização apressada significa inferir falaciosamente uma conclusão sobre uma classe toda (com base em conhecimento inadequado), a partir de alguns de seus elementos. Generalizações apressadas são, usualmente, generalizações estatísticas de generalizações indutivas falaciosas (as duas formas indutivas serão discutidas nas Seções 8.3 e 8.4, respectivamente). De vez em quando, o termo é empregado num sentido amplo, para descrever *qualquer* extrapolação falaciosa de dados observados para os não-observados.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.29 Avalie o argumento:

Na segunda-feira passada eu batí meu carro.

Na segunda-feira anterior meu forno quebrou.

∴ Coisas más acontecem comigo sempre às segundas-feiras.

Solução

A probabilidade indutiva desse argumento (isto é, a probabilidade da conclusão, dadas as premissas) é extremamente baixa. Dois eventos ruins em duas segundas-feiras dificilmente são suficientes para garantir uma conclusão sobre todas as segundas-feiras. É uma falácia de generalização apressada.

Muitas vezes, as generalizações estatísticas apressadas originam-se de técnicas de amostragem preconcebidas, não-representativas ou inadequadas. Isso é um problema para os cientistas, peritos e inspetores. Observação insuficiente é uma outra fonte de generalização apressada. O que consideramos como verdadeiro no mundo pode refletir somente nossa limitada experiência.

Analogia defeituosa é uma falácia indutiva associada com um raciocínio analógico (ver Seção 8.5). Num raciocínio analógico afirmamos que um objeto x tem certas similaridades com o(s) objeto(s) y, e que y tem uma propriedade adicional P. Concluímos então que x tem P. Essa forma de raciocínio algumas vezes tem uma probabilidade indutiva alta. Por exemplo, podemos raciocinar que como os ratos têm muitas similaridades fisiológicas com os seres humanos, e como certa substância química causa câncer nos ratos, então essa substância é provavelmente a causa de câncer nos seres humanos. Todavia, a probabilidade indutiva de um raciocínio analógico depende sensivelmente da similaridade do grau e da relevância.[3] Se a similaridade é desprezada ou não é particularmente relevante, então é provável que a falácia proceda.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.30 É bom o argumento analógico?

As colônias americanas lutaram merecidamente por sua independência em 1776.

Hoje, a Aliança de Futebol Americana está lutando por sua independência.

$\therefore$ A causa da Aliança é também merecida.

3. Também depende de outros fatores, tal como da força relativa de suas premissas e conclusão; esses fatores serão discutidos no Capítulo 8.

Solução

Não. As disputas da guerra revolucionária incluíam liberdade religiosa, taxações repressivas, quartel de tropas e soberania nacional, ao passo que a aliança de futebol (imaginada), presumivelmente, busca o direito que compete aos jogadores, torcedores e contratos de televisão. A analogia é muito fraca. As duas causas têm pouco em comum, exceto pela palavra 'independência' e a essência que a mesma promove. Como resultado, o argumento tem baixa probabilidade indutiva (o que não significa dizer que a conclusão é falsa; as causas da aliança podem muito bem ser justas, ainda que o argumento para isso seja fraco). Aquele que pensa que esse argumento oferece mais apoio para a conclusão, comete a falácia da analogia defeituosa.

A *falácia do jogador* é um argumento da forma:

x não tem ocorrido recentemente.

$\therefore$ x provavelmente acontecerá logo.

Se 'x' designa um evento cujas ocorrências são mais ou menos independentes (isto é, a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade dos outros) então o raciocínio é falacioso. Ocorrências separadas de chuva ou de um resultado favorável num jogo de azar, por exemplo, são eventos independentes. (Para uma discussão sobre o conceito de independência, ver Seção 9.6.) A falácia tem esse nome por causa da tendência dos jogadores que, ao terem freqüentemente má sorte, pensam "minha sorte está fadada a mudar logo".

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.31 Explique a falácia do argumento:

Nos dez últimos lançamentos, essa moeda deu cara.

$\therefore$ Se lançada novamente, é quase certo que dê coroa.

Solução

Essa é uma instância da falácia do jogador. Se a moeda em questão não é viciada, então os lances são eventos independentes e a probabilidade de coroa, no próximo lançamento, é 0,5, independentemente do que tenha ocorrido antes. Lograr cara, entretanto, pode fornecer indicação de que a moeda ou o método pelo qual ela é lançada não é imparcial, e sim tendencioso. Nesse caso, a probabilidade de coroa no próximo lançamento é menor que 0,5. Em nenhum dos casos uma série de caras *aumenta* a probabilidade de coroas nos próximos lançamentos.

7.32 Por que esta não é uma instância da falácia do jogador?

Esse relógio toca a cada hora.

Há mais ou menos 57 minutos que ele não toca.

∴ É certo que ele tocará logo.

Solução

As badaladas não são eventos independentes, mas dependem umas das outras do modo indicado na primeira premissa. Esse argumento não comete falácia.

Na vida diária freqüentemente recorremos a "lei da média" para explicar a má sorte ou a expectativa de auxílio. Na verdade não existe tal lei, não como é entendida popularmente. Por outro lado, nem toda invocação da lei da média é uma falácia. Um jogador de beisebol num golpe rápido pode apelar para a lei da média como um apoio psicológico ("Eu estava atrasado para o golpe") — u'a maneira de levantar o ânimo. Uma reflexão desejosa pode estar errada, mas não é, necessariamente, ilógica.

Falsa causa é uma expressão que abrange uma variedade de erros lógicos. Esse termo significa confundir uma causa com um efeito.

Pode ainda significar uma explicação causal para um evento sem considerar as circunstâncias alternativas. Uma outra variante é *post hoc ergo propter hoc* (depois disso, portanto por causa disso — muitas vezes abreviada por *post hoc*), em que uma relação causal é inferida a partir da proximidade temporária de dois ou mais eventos. O que é comum em todas as falácias de falsa causa é que as conclusões são afirmações causais não sustentadas por suas premissas. (Para uma discussão sobre conclusões causais adequadamente sustentadas, ver Seção 8.6.)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.33 O que está errado com o argumento?

Todo profeta ou messias é um líder carismático.

∴ O exercício de liderança é um caminho para uma inspiração religiosa.

Solução

Ainda que a premissa seja verdadeira (o que é dúbio), ela não torna a conclusão provável. A correlação entre liderança e inspiração não significa que liderança causa inspiração. Nesse caso, é mais provável que ocorra o contrário; inspiração religiosa motiva liderança. Todavia, não é uma conclusão inevitável. Existem, ainda, outras possibilidades lógicas. Talvez um terceiro fator independente (genético, social, ou mesmo sobrenatural) seja reponsável por uma dessas duas qualidades. Ou, ainda, a correlação seja uma coincidência. Nada na premissa exclui qualquer uma dessas possibilidades e, assim, a probabilidade da conclusão, dada a premissa, é bastante baixa.

7.34 Avalie esse argumento:

Johnny Touchdown é um grande atleta.

Johnny Touchdown toma regularmente anfetaminas.

∴ Anfetaminas ajudam a fazer Johnny um grande atleta.

Solução

Temos uma relação entre dois fatores, mas nenhuma evidência para indicar que essa relação é causal. A probabilidade da conclusão, dada a premissa, é bastante baixa. Nesse caso, o argumento suprime uma evidência importante (ver Seção 2.5), como é do conhecimento — embora as anfetaminas possam, temporariamente, ajudar a combater a fadiga —, elas não aumentam o desempenho da atividade; na verdade, elas são prejudiciais.

7.35 Avalie o raciocínio:

A paciente sentiu-se muito mal logo depois de almoçar.

Não havia sinais de doença antes de comer, e seu estado de ânimo era bom durante a refeição.

Ela goza de boa saúde e em sua ficha médica não há registro de problemas físicos.

∴ Ela foi vítima de comida envenenada.

Solução

Este é um caso de raciocínio *post hoc*. Embora as premissas nos informem além da doença ocorrida logo após o almoço, a informação que ela contém não é suficiente para tornar a conclusão provável. Precisamos saber mais. A paciente deveria ser cuidadosamente examinada. Analisar a comida que ela comeu poderia ser útil. Poderíamos ainda nos informar se alguém mais que comeu o mesmo alimento (ou tenha usado os mesmos pratos, utensílios, ou se servido das mesmas tigelas) se sentiu mal. Há outras explicações alternativas viáveis para o médico (parada cardíaca, ataque, asfixia, ou um súbito começo de uma doença que estava incubada).

Entretanto, duas qualificações importantes devem ser mencionadas nesse exemplo. A primeira, a nível do raciocínio *post hoc* (uma variedade de falsa causa), é que não dissemos que a conclusão é falsa. Nesse sentido 'falsa causa' é um nome inadequado. Nesse caso, da informação contida nas premissas não se segue que a conclusão é muito provável. A segunda é que, embora o argumento não sustente muito bem a conclusão, devemos ser prudentes a fim de decidir que atitude tomar. O médico deve decidir rapidamente; a vida da paciente pode depender disso.

Nesse caso, a hipótese de comida envenenada (embora existam outras) é razoável, apesar de não estar confirmada. Uma boa idéia, por exemplo, é submeter a paciente a uma lavagem estomacal. Se a hipótese for incorreta, a paciente estará submetida a um desconforto passageiro. Se for correta, a vida da paciente pode ser salva. Todavia, imaginar que comida envenenada seja a única explicação razoável é um erro. Ataque do coração, por exemplo, é uma outra hipótese. Se a paciente estava tendo um ataque do coração, seria um grave erro submetê-la somente a uma lavagem estomacal.

A falácia da *evidência suprimida* é muitas vezes classificada como falácia indutiva. Ela é uma falácia que ignora uma evidência e que indutivamente infere uma conclusão contrária. Contudo, ela é diferente das outras falácias discutidas nesta seção, pois pode ocorrer ainda que a probabilidade indutiva do argumento seja alta e o argumentador não a sobrestima. A falácia da evidência suprimida foi discutida na Seção 2.5 e não será mais considerada.

7.6 Falácias formais

Falácias formais ocorrem pelo mau uso de uma regra de inferência válida ou de uma regra demonstravelmente inválida. Uma regra de inferência inválida é uma forma de argumento que tem instâncias inválidas. Assim, para identificar falácias formais, não basta mostrar que o argumento tem uma forma inválida. Se suspeitamos de uma falácia formal, é importante averiguar *não só* se a regra na qual o raciocínio baseou-se é inválida (usando os métodos da lógica formal), mas *também* que o próprio argumento é inválido. Para mostrar que o próprio argumento é inválido exibe-se um contra-exemplo, um caso real ou logicamente possível, no qual as premissas do argumento são verdadeiras e a conclusão é falsa.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.36 É cometida uma falácia formal no argumento?

Se chover torrencialmente amanhã, o jogo será adiado.
Não choverá torrencialmente amanhã.
∴ O jogo não será adiado.

Solução

Sim. O argumento tem uma forma inválida:

$C \to A$
$\sim C$
$\therefore \sim A$

A invalidade da forma pode ser verificada por meio de tabelas-verdade ou árvores de refutação (Capítulo 4). O próprio argumento é inválido. Um contra-exemplo para esse argumento é uma situação em que ambas as premissas são verdadeiras (isto é, se chover torrencialmente amanhã, o jogo será adiado, e amanhã não choverá torrencialmente) e a conclusão é falsa. Há várias maneiras de se falsear a conclusão (isto é, o jogo será adiado) sob essas condições. Talvez esteja nevando amanhã, assim o jogo será adiado por causa da neve. Talvez o time visitante perca o vôo, assim o jogo será adiado por essa razão. Essas possibilidades são alguns dos contra-exemplos possíveis. O argumentador cometeu um erro no raciocínio; supor que a conclusão segue-se validamente das premissas, quando, na verdade, isso não ocorre.

A regra inválida empregada pelo argumentador do problema 7.36 chama-se *negando o antecedente*, e um argumento inválido que tem essa forma comete a *falácia de negando o antecedente*. O nome vem da segunda premissa. Na falácia negando o antecedente, há uma premissa condicional e uma segunda premissa que é a negação do antecedente do condicional. A conclusão é a negação do conseqüente do condicional.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.37 O seguinte argumento é inválido?

Se alguém sabe o que aconteceu, Richard sabe.

Ninguém sabe o que aconteceu.

∴ Richard não sabe o que aconteceu.

Solução

Não. Embora tenha a forma de negando o antecedente

$A \rightarrow R$

$\sim A$

$\therefore \sim R$

o argumento é válido. Se as premissas são verdadeiras, então (como a segunda premissa afirma que ninguém sabe) a conclusão de que Richard não sabe é verdadeira. Não há contra-exemplo. O argumento é válido pois tem a forma válida da lógica de predicados:

$$\exists xKx \rightarrow Kr$$
$$\sim\exists xKx$$
$$\therefore \sim Kr$$

A validade dessa forma pode ser demonstrada usando árvores de refutação ou construindo uma prova no cálculo de predicados. (A conclusão segue-se só da segunda premissa.)

Todo argumento com pelo menos uma forma válida é válido. Mas, como o problema 7.37 ilustra, argumentos válidos podem ter formas inválidas. (Para uma discussão ampla sobre esse ponto, ver Seção 4.3.) Assim, repetindo, ter uma forma inválida não significa que o argumento comete uma falácia formal. Uma falácia formal é cometida se o argumento é, de fato, inválido.[4]

Uma outra falácia formal estreitamente relacionada com negando o antecedente é *afirmando o conseqüente*. Essa falácia ocorre quando raciocinamos com a regra inválida:

$$P \rightarrow Q$$
$$Q$$
$$\therefore P$$

O nome vem da segunda premissa, que afirma o conseqüente da primeira.

4. Às vezes acontece de um argumentador usar uma regra inválida (sem saber que é inválida) e produzir um argumento válido, tal como o argumento do problema 7.37. Se sabemos, por alguma razão, que o argumentador usou uma regra inválida, então podemos dizer que o argumentador cometeu uma falácia formal, mesmo que o argumento seja válido. Entretanto, casos assim são raros.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.38 Avalie o argumento:

Se Sara herdou uma fortuna, então ela é rica.
Ela é rica.
∴ Sara herdou uma fortuna.

Solução

É uma falácia afirmando o conseqüente. O argumento tem a forma indicada acima e é inválido. Um contra-exemplo é uma situação na qual as duas premissas são verdadeiras, mas é falso que Sara herdou uma fortuna; ou seja, ela é rica porque tem uma indústria de computadores. (É claro que existem outras maneiras pelas quais Sara poderia ter ficado rica; todas elas são contra-exemplos.)

Negando o antecedente e afirmando o conseqüente são muitas vezes confundidos com *modus tollens* e *modus ponens*, respectivamente. (Para uma discussão dessas regras válidas, ver Capítulo 3.) Tal confusão é que dá origem a essas falácias. Mais especificamente, ela surge quando confundimos 'se' com 'somente se'. Se a primeira premissa do problema 7.36 fosse '*Somente* se chover torrencialmente amanhã o jogo será adiado', então o argumento seria válido. Analogamente, no problema 7.38, se a primeira premissa fosse '*Somente* se Sara herdar uma fortuna ela será rica', o argumento, também, seria válido.

A falácia de *composição* ocorre quando invalidamente atribuímos características de pelo menos uma das partes de um todo para o todo. Essa falácia tem a seguinte forma:

$p_1,..., p_n$ são partes de w.
$p_1,..., p_n$ têm a propriedade F.
∴ w tem a propriedade F.

($p_1,..., p_n$ podem ser vários objetos ou simplesmente um.)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.39 Avalie o argumento:

Toda sentença neste livro está bem escrita.
∴ Este livro está bem escrito.

Solução

É uma falácia de composição. Ela tem a forma indicada acima (admitindo-se que as sentenças no livro são partes do livro) e é inválida. Para ver sua invalidade, considere o seguinte contra-exemplo. Imagine um livro em que todas as suas sentenças satisfazem critérios gramaticais e estéticos, enquanto as sentenças e os parágrafos não se inter-relacionam, resultando incoerência. Isso tornaria a conclusão falsa enquanto a premissa seria verdadeira. Evidentemente, esse contra-exemplo é bizarro mas não é impossível, especialmente numa época de literatura de vanguarda.

7.40 O que se pode dizer do argumento?

Meu fígado é parte de meu corpo.
Meu fígado contém pelo menos um milhão de células.
∴ Meu corpo contém pelo menos um milhão de células.

Solução

Esse argumento tem a forma da falácia de composição, mas apesar disso ele é válido. Não há contra-exemplo nem falácia.

Tal como com as falácias formais, as falácias de composição não podem ser identificadas considerando somente uma forma de argumento, pois (como o problema 7.40 mostrou) a forma da falácia de composição tem algumas instâncias válidas.

A recíproca da falácia de composição é a falácia de *divisão*. Enquanto na composição invalidamente atribuímos características das partes para o todo, na divisão invalidamente atribuímos características do todo para as partes. Essa falácia tem a seguinte forma:

w tem a propriedade F.

$p_1, \ldots, p_n$ são partes de w.

$\therefore p_1, \ldots, p_n$ têm a propriedade F.

($p_1, \ldots, p_n$ podem ser vários objetos ou só um objeto.)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.41 Avalie o argumento:

Este livro está escrito em português.

$\therefore$ Toda sentença neste livro está em português.

Solução

Falácia de divisão. (Supondo que as sentenças do livro são partes do livro.) Um contra-exemplo é o do livro que está escrito em português e uma ou mais sentenças (por exemplo, aspas) estão escritas em outra linguagem. Entretanto, observe que a recíproca do argumento (que tem a forma da falácia de composição) é válida:

As sentenças deste livro são partes deste livro.

Toda sentença neste livro está em português.

$\therefore$ Este livro está em português.

7.42 Avalie o argumento:

A Califórnia está nos Estados Unidos.
Los Angeles e São Francisco estão na Califórnia.
∴ Los Angeles e São Francisco estão nos Estados Unidos.

Solução

Esse argumento tem a forma da falácia de divisão, contudo ele não é falacioso. Na verdade, ele é válido.

Composição e divisão são freqüentemente classificadas como falácias semânticas. Todavia, como elas usam regras de inferência inválidas e não confundem seus significados, preferimos chamá-las de falácias formais.

7.7 Falácias de premissas falsas

Falácias de premissas falsas são erros do tipo que o nome sugere. Uma instância comum é a *falsa dicotomia*. Essa falácia é cometida quando supomos erroneamente que uma alternativa de um limitado número de opções se verifica.

PROBLEMA RESOLVIDO

7.43 Qual é o erro com o argumento?

Ou você está do nosso lado ou você está contra nós.
Você não está do nosso lado.
∴ Você está contra nós.

Solução

Em muitos contextos, a primeira premissa pode ser falsa. Há uma terceira opção; a opção de permanecer neutro à questão (não formulada no enunciado). Observe que o raciocínio está correto. O argumento é uma instância do silogismo disjuntivo e é, portanto, válido. Além disso, as premissas são relevantes para a conclusão. Se é que existe erro, então ele está na falsidade da primeira premissa.

Uma falácia de *declive ardiloso* ocorre quando raciocinamos como se segue:

$A_1 \rightarrow A_2$

$A_2 \rightarrow A_3$

.

.

.

$A_n \rightarrow A_{n+1}$

Não deve ser o caso que A_{n+1}.

$\therefore$ Não deve ser o caso que A_1.

A frase 'não deve ser o caso que' deve ser entendida no sentido moral (ou seja, é um operador da lógica deôntica, ver Seção 10.7). A forma pode parecer válida; na verdade sua validade depende da interpretação do operador condicional '$\rightarrow$' e de sua relação com o operador deôntico.[5] Contudo, a falácia "declive ardiloso" é um problema não com a validade do raciocínio, mas sim com a veracidade de suas premissas. Por isso é que incluímos *declive ardiloso* nesta seção. Os exemplos seguintes ilustram os problemas dessa forma quanto a sua veracidade e sua validade.

5. O operador condicional tem vários significados. Até agora só discutimos o condicional material (Seção 4.1); outros serão mencionados na Seção 10.7. Uma discussão sobre os diversos tipos de operador condicional envolve técnicas que estão fora do alcance deste livro.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

7.44 Critique o argumento:

Se você der uma pancada em sua mãe, você quebra o nariz dela.

Se você quebra o nariz de sua mãe, você comete um ultraje moral.

Você não deve cometer um ultraje moral.

∴ Você não deve dar uma pancada em sua mãe.

Solução

É uma falácia de declive ardiloso. A primeira premissa é falsa. A segunda também pode ser, pois quebrar o nariz de sua mãe num acidente não seria um ultraje moral. Além do mais, dependendo das interpretações dos condicionais, o argumento pode ser inválido. Imagine uma situação em que você vai quebrar o nariz de sua mãe, mas não como conseqüência de dar-lhe uma pancada. Ou seja, você vai fazer isso independentemente de lhe dar a pancada. Então, sob certas interpretações de 'se ... então' (por exemplo, a interpretação material), a primeira premissa é verdadeira. Suponha que as outras premissas também são verdadeiras. Assim, pode ser falso que você não deveria dar uma pancada em sua mãe. Logo, sob certas interpretações de 'se ... então', o argumento tem um contra-exemplo e é, portanto, inválido.

7.45 Considere o argumento:

Se partirmos do Vietnã, então o Vietnã do Sul se tornará comunista.

Se o Vietnã do Sul se tornar comunista, então Camboja e Laos se tornarão também.

Se esses países se renderem, então o comunismo invadirá a Tailândia e todo o resto do sudeste da Ásia.

Se o comunismo invadir o sudeste da Ásia, então eventualmente ele dominará não somente o sudeste da Ásia mas a Indonésia também.

Não devemos permitir que o sudeste da Ásia e a Indonésia caiam sob a dominação comunista.

∴ Não devemos partir do Vietnã.

Solução

Essa é uma versão da chamada *teoria do dominó*, que (entre outros argumentos) foi usada para justificar o envolvimento americano na guerra do Vietnã nos anos 60 e no princípio dos anos 70. (Theodore Draper discute esse argumento em seu livro *Present History*.[6]) Todas as premissas, exceto as duas primeiras, são polêmicas. (Vietnã do Sul, Camboja e Laos são atualmente controlados por regimes comunistas.) Não é uma falácia de declive ardiloso, pois não é fácil determinar a veracidade das três últimas premissas. Não foi especificado um intervalo de tempo; portanto, somente quando as profecias se revelarem corretas é que poderemos constatar sua veracidade. É um erro aceitar essas três premissas sem criticá-las. Nenhuma delas é *obviamente* verdadeira.

Além do mais, como no problema anterior, o argumento pode ter interpretações inválidas. Suponha, por exemplo, que o sudeste da Ásia e a Indonésia se tornarão comunistas, independentemente da política adotada pelos Estados Unidos. Assim, sob certas interpretações, as premissas condicionais seriam todas verdadeiras e a última premissa de certo modo, seria verdadeira também; no entanto a conclusão permaneceria falsa. Se o envolvimento americano no Vietnã não foi para impedir a expansão do

---

6. Theodore Draper, *Present History*, New York, Random House, 1984.

comunismo, então partir talvez tivesse sido melhor. Isto é um ponto lógico sobre a validade do argumento, não uma afirmação real ou histórica. Nesse contra-exemplo, não estamos dizendo que as coisas estão fadadas a acontecer desse modo, mas sim que devem ser consideradas para avaliar o raciocínio. A autenticidade do assunto depende da consideração final dos fatos e circunstâncias, o que deixamos para os historiadores.

Problemas suplementares

Reescreva os argumentos abaixo na forma padrão e discuta as falácias (se houver alguma) cometidas. (Use os problemas resolvidos deste capítulo como modelo para a discussão.) Se não há argumento explícito, mas a passagem sugere um, escreva-o na forma padrão e avalie-o.

1) Casamentos são como corridas de cavalos. Alguns são vitoriosos, enquanto outros estão fadados ao fracasso logo de saída. A moral é: verifique os seus concorrentes antes de fazer a aposta.

2) Todo peixe desse lago estava, há duas semanas, mordendo a isca quando colocava minhocas frescas nos anzóis. Minhocas frescas me permitirão pegar muitos peixes novamente hoje.

3) Como você se atreve a criticar minha lógica? Você comete falácia toda vez que escreve um artigo.

4) Sarah Socket recomenda o xampu Louella Balsam. Sarah é uma atriz muito popular. Portanto, eu devo experimentar esse xampu.

5) Aqueles que não combatem o comunismo estão do lado dele, e Jones não está combatendo o comunismo.

6) Se o governo não deter o terrorismo, é possível que espalhe por todo o mundo. Se ele se espalhar por todo o mundo, haverá um conflito nuclear. Não queremos isso. Portanto, o governo deve deter agora o terrorismo.

7) Enormous State tem os melhores programas colegiais e universitários de todo o continente. Portanto, ela é a melhor escola do continente.

8) Não há relação entre fumar e câncer pulmonar, apesar das pesquisas médicas. Logo, fumar não é prejudicial para os pulmões.

9) Leonardo da Vinci, Keynes e Capote eram homossexuais. Foram também grandes artistas e escritores. Assim, homossexuais são mais criativos do que a maioria das pessoas.

10) Se não concordarmos com a nova proposta do município sobre o aluguel, o município desapropriará a terra e nos despejará. Logo, devemos assinar hoje o contrato.

11) Não me associarei ao BEST, pois descobri que o fundador da organização era vendedor de carro usado. Ele contou-me tudo o que eu precisava saber sobre o BEST. Não se torne um membro.

12) Deus tem um plano providencial para a humanidade. Sabemos isso porque sabemos que Deus é real. E sabemos que Deus é real porque a providência é real.

13) Toda vez que como no Restaurante Joe eu fico doente. Eu estou deixando de comer lá. Então, não ficarei mais doente.

14) Armas nucleares não são usadas desde 1945. Logo, o perigo de usá-las novamente é muito alto.

15) Armas nucleares não são usadas desde 1945. Logo, é improvável que elas sejam usadas novamente.

16) Quando foi que você desfalcou os fundos de pensão da companhia?

17) Uma vez que legalizarmos o aborto, inevitavelmente acabaremos com a corrupção de menores e abuso de idosos. Total falta de respeito para com a vida. Portanto, devemos declarar ilegal o aborto.

18) Estou me divertindo muito nessas férias. Estou começando a enervar-me. Algo está destinado a sair mal depois que minha viagem terminar.

19) Após a Segunda Guerra Mundial, muitos americanos partiram de suas cidades. Depois de 1946, muitos americanos começaram a comer cereais enlatados no café da manhã. Logo, a mudança de cidade foi responsável pelas mudanças dos hábitos alimentares dos americanos.

20) Já que estou pagando seus estudos, você não deve deixar de se especializar em filosofia. Você deve especializar-se numa profissão ou sofrerá as conseqüências. Como você sabe o que é bom para você, estou certa de que você seguirá o meu conselho.

21) A nossa tradição é a de ter clientes satisfeitos. Ninguém reclama de nossos serviços. Se você estiver no shopping, pare em nossa loja. Você não se arrependerá de comprar aqui.

22) É bom para a minha digestão comer, agora, esse pedaço de torta. Logo, comer mais um pedaço novamente é bom para a minha digestão.

23) Sr. guarda, eu estava dirigindo somente 3 milhas acima da velocidade máxima permitida. Isso dificilmente infringe a lei. Além disso, o carro desta pista ao lado estava fazendo muito barulho, e eu encostei o carro no meio-fio. Eu não mereço a multa.

24) Como somos criaturas propositadas e somos parte do universo, o universo também deve ser propositado.

25) Visto que o universo como um todo carece de objetivo e nós pertencemos ao universo, nossa percepção de sermos propositados deve ser uma mera ilusão.

26) Em *The Second Self*, Sherry Turkle afirma que as crianças e os programadores personificam os computadores, que eles tratam as máquinas como se fossem seres humanos dotados

de sentimentos e pensamentos. Essa pesquisa mostra que os programadores têm a mesma mentalidade de uma criança.

27) Se a teoria da evolução de Darwin estava correta, então seus ancestrais eram macacos. Isso prova quão absurda é a teoria de Darwin.

28) Aqueles que censuram o envolvimento norte-americano na América Central deixam de considerar a violação dos direitos humanos da União Soviética no Afeganistão e seus contínuos atos de agressão por todo o mundo. Ou você contesta todas as formas de terrorismo ou então não deveria contestar.

29) Se a arma do homicídio foi um revólver, então a polícia teria achado marcas de pólvora perto do cadáver. A polícia achou várias marcas de pólvora no carpete, perto de onde a vítima tombou. Logo, a arma do homicídio foi um revólver.

30) Californianos de pulso fraco, que apreciam caviar, são incapazes de pensar seriamente. Para aprender algo sobre política ou sobre o mundo real, converse com um nova-iorquino.

31) Os lógicos afirmam que o estudo de argumentos é parte indispensável na educação de todos. Como essa questão ajuda a mantê-los empregados, não é de espantar que eles a endossem. Não se deixe influenciar por pensamentos que não representam a maioria dos estudantes, pais ou professores.

32) Timmy, o Sheik, pensa que os Bears vencerão novamente. Assim, eu já pedi ao meu corretor para apostar $500 nos Bears. A propósito, você já viu Timmy alguma vez contrariar a Associação Americana do Câncer? Ele está certo. As vantagens estão contra você se você fuma. Eu estou desistindo dos cigarros hoje.

33) Um estudo exaustivo da turma de 1990 revelou que 81% dos alunos acreditam em Deus, 91% acreditam na importância da vida familiar e 95% respeitam seus pais. Esse estudo, também mostrou que cerca de 34 (77%) calouros colocaram "ter uma carreira profissional" em primeiro lugar na lista de

seus objetivos. Claramente, o retorno aos tradicionais valores morais americanos é responsável pela nova ênfase vocacional entre os nossos jovens estudantes.

34) Não podemos permitir que nosso sistema escolar se torne bilíngüe. Se permitirmos instrução em qualquer um desses dois idiomas, o que nos impedirá de introduzir um terceiro ou um quarto? Além disso, como diremos aos membros da comunidade étnica que o idioma deles não é adequado para ser ensinado nas escolas? E quando foi que decidimos conceder este privilégio a uma criança? Conseqüentemente devemos permanecer com um só idioma.

35) A televisão é acusada diretamente do declínio alarmante na capacidade de ler e escrever. Nos Estados Unidos, uma pessoa comum (adulto ou criança) assiste à televisão durante 7 horas diariamente. Nenhuma outra atividade, exceto dormir, consome mais tempo. Além do mais, a televisão é passiva, não requer que se pense ou que se realize esforço. Ela descansa nossas mentes. Em relação a esse fato a tevê não é diferente do sono, porém compete com ele, pois a tevê tem sabor recreativo. Durante aquelas 7 horas, a caixa idiota nos hipnotiza e adula ou critica a consciência do mundo; isso nos torna incapazes de raciocinar e pensar. Não é de surpreender que os americanos já não leiam e escrevam; a tevê consome todo o tempo livre deles.

36) Numa família em decadência, as suas imemoriáveis leis perecem, e quando as leis perecem a família toda fica sobrepujada pelas ilegalidades. E quando a ilegalidade prevalece, ... as mulheres da família se corrompem, ... [e] uma mistura de classe social ergue-se ... E essa confusão inferniza a própria família e aqueles que a destruíram; pois seus ancestrais fracassaram, privou de oferecer-lhes pão e água. Pelos pecados daqueles que destroem uma família e criam uma mistura de classes sociais, as leis eternas da classe social e da família ficam destruídas. (*The Bhagavad-Gita*, I, 40-43.)

37) Nem sempre está errado supor que dois erros produzem um acerto. Quando nos envolvemos em uma resistência passiva para protestar uma lei injusta, violamos a lei tão logo a protestamos e, portanto, o protesto é um segundo "erro". Mas certamente uma resistência passiva se justifica nesses casos. Assim, algumas vezes, dois erros produzem um acerto. (Este exemplo é uma cortesia de Leo Groarke.)

38) Infratores primários geralmente cometem furtos insignificantes. Geralmente, eles são adolescentes que ainda freqüentam o colégio. Eles podem ter ido somente passear com os amigos de automóvel em alta velocidade. Eles ficam emocio- nalmente abalados pela prisão e pelo processo de datilos- copia. Seus pais ficam perturbados quando tomam conhecimento da notícia e se apressam em colocá-los em liberdade sob fiança. Por esses motivos os policiais que executam a lei são condescendentes com os infratores primários. Nós concordamos. Pense em seus erros na fase adolescente. Logo, dê uma oportunidade ao jovem.

39) Embora a usina nuclear tenha interrompido suas atividades desde o último vazamento de radiação, os moradores locais estão obtendo, ainda, sua eletricidade de fontes alternativas. O clima bom e a agradável paisagem da região, além dos shoppings e locais de recreação, são motivos para que os cidadãos não se aborreçam muito com um novo funcionamento da usina ou com as condições de funcionamento de um simples reator.

40) O professor X foi demitido porque se recusou a aprovar os estudantes atletas, apesar das pressões do treinador do time de futebol. No caso Jan Kemp, que foi demitido por causa do fracasso dos estudantes atletas, ficou decidido, em 1986, nos tribunais da Geórgia, o direito aos salários atrasados e indenizações. O trabalho de Kemp era ensinar inglês aos estudantes do time de futebol, enquanto X é um físico nuclear. Porém, eles foram convidados a chegar a um acordo sobre seus princípios. Ambos recusaram. Evidentemente, o tribu-

nal deveria reintegrar o professor X e compensá-lo adequadamente pela perda de seu emprego em vez de comprometer sua integridade.

Respostas a alguns problemas suplementares

1) Alguns cavalos são vitoriosos, enquanto outros estão fadados ao fracasso logo de saída.
Alguns casamentos são vitoriosos, enquanto outros estão fadados ao fracasso logo de saída.
Você deveria verificar os cavalos antes de fazer a aposta.
∴ Você deveria verificar os "participantes" do casamento antes de fazer a aposta.

Esse argumento comete as falácias da vaguidade e da analogia falsa. (Nós o reescrevemos para enquadrá-lo no formato analógico.) A linguagem do argumento é extremamente vaga. O que significa dizer "fazer a aposta" num casamento? Quem faz isso? Os próprios parceiros? Os espectadores? Os parentes? Que tipo de casamento é um "fracasso"? Além do mais, a analogia é fraca e não é relevante para a conclusão (principalmente por causa da vaguidade da conclusão). O conselho implícito na conclusão pode, num certo sentido, estar correto, mas não pelas razões dadas pelo argumento.

3) Você comete falácias toda vez que escreve um artigo.
∴ Sua crítica à minha lógica é inadequada.

(Substituímos a pergunta retórica por um enunciado semelhante a dedução.) É uma variante *tu quoque* da falácia *ad hominem*.

5) Todos aqueles que não combatem o comunismo estão do lado dele.
Jones não combate o comunismo.
∴ Jones está ajudando o comunismo.

Falsa dicotomia.

8) Não há relação entre fumar e câncer pulmonar, apesar de pesquisas médicas.
∴ Fumar cigarros não é prejudicial para os pulmões.

Falácia da ignorância. Além do mais, a premissa é falsa.

11) O fundador do BEST era vendedor de carros usados.
∴ Ninguém deveria tornar-se um membro do BEST.

É uma falácia de culpa por associação, uma das variedades de *ad hominem*. A organização é atacada nas bases de uma estereotipia popular com relação ao vendedor de carros usados.

14) Armas nucleares não são usadas desde 1945.
∴ O perigo de usá-las novamente é muito alto.

Falácia do jogador. Não há evidências de que o uso de armas nucleares são eventos que dependem uns dos outros do modo descrito.

16) Não é um argumento, mas uma pergunta complexa.

17) Uma vez que legalizarmos o aborto, inevitavelmente acabaremos com a corrupção de menores e abuso de idosos.
Essas coisas não devem ocorrer.
∴ Devemos declarar ilegal o aborto.

Essa é a essência do argumento. O enunciado restante, 'Total falta de respeito para com a vida é uma justificativa para a primeira premissa. Nesse caso, a inferência desse enunciado para a primeira premissa é um simples *non sequitur*. A parte do argumento representada acima é um declive ardiloso cuja primeira premissa é questionável e cuja validade também o é, em bases deônticas.

21) A nossa tradição é a de ter clientes satisfeitos.
Ninguém reclama de nossos serviços.
Você não se arrependerá de comprar aqui.
∴ Se estiver no shopping, você deverá ir à nossa loja.

Esse argumento não é dedutivamente válido, mas razoavelmente forte. Nenhuma das falácias discutidas nesse capítulo é aqui cometida.

23) Existem aqui dois argumentos com a mesma conclusão. O primeiro comete a falácia de alegação especial:
Eu estava dirigindo somente a 3 milhas acima da velocidade máxima permitida.
Isso dificilmente infringe a lei.
∴ Eu não mereço uma multa.

O segundo comete a falácia de *tu quoque*:

O carro na pista ao lado estava fazendo muito barulho e eu encostei o carro no meio-fio.
∴ Eu não mereço a multa.

27) Se a teoria da evolução de Darwin estava correta, então seus ancestrais eram macacos.
Uma teoria elaborada por uma pessoa cujos ancestrais eram macacos é absurda.
∴ A teoria de Darwin é absurda.

Com a adição da segunda premissa implícita, o argumento fica parecido com incorrer em petição de princípio. Essa falácia está combinada com uma curiosa falácia *ad hominem* ofensiva (como se fosse vergonhoso ser descendente de macacos!).

30) Californianos de pulso fraco, que apreciam caviar, são incapazes de pensar seriamente.
∴ Para aprender algo sobre política ou sobre o mundo real, converse com um nova-iorquino.

Falácia *ad hominem* ofensiva com conclusão irrelevante. Existe também uma insinuação de falsa dicotomia. O argumentador está assumindo que qualquer pessoa digna de consideração é um californiano ou nova-iorquino?

34) Esse enunciado sugere dois argumentos do tipo declive ardiloso, cada um com premissas questionáveis:

Se permitimos instrução em qualquer um dos dois idiomas, podemos (será?) introduzir um terceiro e um quarto.
Não devemos introduzir um terceiro ou quarto idiomas.
∴ Não devemos permitir que nosso sistema escolar se torne bilíngüe.

Se não permanecemos com um só idioma, teremos de dizer aos membros da comunidade étnica que o idioma deles não é adequado para ser ensinado nas escolas, quando foi que decidimos conceder este privilégio a uma criança.
Não devemos em sã consciência dizer aos representantes de uma comunidade étnica que seu idioma não é suficientemente bom para ser ensinado nas escolas, quando já decidimos dar a alguma criança muito privilégio.
∴ Devemos permanecer com um só idioma.

37) Quando nos envolvemos numa resistência passiva para protestar contra uma lei injusta, violamos a lei tão logo, protestamos e, portanto, o protesto é um segundo "erro".
Certamente uma resistência passiva se justifica nesses casos.
∴ Algumas vezes dois erros produzem um acerto.

O argumento confunde os sentidos legal e moral do termo 'erro'. Uma lei injusta é moralmente errada; justificar a resistência passiva contra uma lei injusta é legalmente errado, mas moralmente certo. Uma falácia é cometida se a conclusão pretende significar (como parece provável) que dois erros morais, algumas vezes, produzem um acerto, visto que o termo 'erro' na primeira premissa é utilizado no sentido moral, e assim tal premissa é falsa.

40) O professor X foi demitido porque se recusou a aprovar os estudantes atletas, apesar das pressões do treinador do time de futebol.
No caso Jan Kemp, que foi demitido por causa do fracasso dos estudantes atletas, ficou decidido em 1986 num tribunal da Geórgia o direito aos salários atrasados e indenizações.
O trabalho de Kemp era ensinar inglês aos estudantes do time de futebol, enquanto X é um físico nuclear.
Os dois foram convidados a chegar a um acordo sobre seus princípios.
Ambos recusaram.
∴ O tribunal deveria reintegrar o professor X e compensá-lo adequadamente pela perda de seu emprego em vez de comprometer sua integridade.

É um argumento analógico, e a analogia é muito forte e relevante. (Existe uma não-analogia no fato de X ensinar física enquanto Kemp ensina inglês, mas isso não é uma não-analogia relevante.) O argumento, tacitamente, assume que a decisão do tribunal da Geórgia foi correta. Se a suposição é verdadeira e não há evidência suprimida, então ele é um bom argumento indutivo.

Capítulo 8

INDUÇÃO

Este capítulo trata de alguns tipos usuais de raciocínio indutivo, isto é, raciocínios nos quais a conclusão não é necessária, dadas as premissas. Num raciocínio indutivo interessa-nos a probabilidade da conclusão, dadas as premissas, isto é, a *probabilidade indutiva* de um argumento. A probabilidade indutiva depende em parte da força existente entre as premissas e a conclusão. Portanto iniciamos com uma discussão sobre a força do enunciado.

8.1 Força do enunciado

Alguns enunciados informam mais do que outros. Enunciados *fortes* são os que mais informam, independente da informação ser verdadeira. Um enunciado forte só é verdadeiro em circunstâncias específicas; o mundo deve ser desse modo, a fim de que ele seja verdadeiro. Um enunciado fraco é verdadeiro numa ampla variedade de circunstâncias possíveis; sua informação não é muito específica, e pouco exige do mundo para a sua veracidade.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.1 Distinga os enunciados fortes dos fracos:

a) Existem exatamente 200 cidades com população acima de 100.000 habitantes nos Estados Unidos.

b) Algo está acontecendo em algum lugar.

c) Algo existe.

d) Hobbits são humanóides, raramente passam de 1 m de altura, têm o rosto enrugado e pés peludos, e vivem em tocas nas encostas de uma terra chamada The Shire.

e) Se existem muitos corvos, então alguns deles são machos.

f) A casa de Jim é a terceira do lado esquerdo, quando você vai da Rua Concord para Main.

g) Todo organismo vivo obtém seu material genético de organismos que já viveram.

h) Algumas pessoas são um pouco estranhas.

i) Todo vertebrado tem um coração.

j) Não é verdade que Knoxville, no Tennessee, tem exatamente 181.379 habitantes neste exato momento.

Solução

a) forte

b) fraco

c) fraco

d) forte

e) fraco

f) forte

g) forte

h) fraco

i) forte

j) fraco

É surpreendente que o enunciado (*j*) seja fraco, pois ele é específico com relação a tempo, lugar e número. Mas, note que o que ele afirma é que existiria *não* exatamente essas pessoas nesse lugar e tempo; ele afirma pouco, pois permite que a população de Knoxville seja qualquer coisa, exceto 181.379 (e é verdade, mesmo que Knoxville não exista!). Se omitimos a frase 'Não é verdade que', esse enunciado torna-se forte; contudo, quando a frase é incluída, ele torna-se fraco.

Na verdade, a negação de um enunciado fraco é forte e a negação de um enunciado forte é fraca. Considere, por exemplo, a negação do enunciado fraco 'Algo existe'; ou seja, 'Nada existe', o qual afirma muito. Ele afirma que o universo está completamente desprovido de algo. Uma insignificante vacilação de existência torna-o falso, apesar dele ser muito informativo.

A força de um enunciado está aproximadamente relacionada inversamente com o que é chamado sua probabilidade *a priori*; isto é, probabilidade prévia ou na ausência de evidência. (Dizemos aproximadamente porque existem várias concepções de probabilidade *a priori*, as quais diferem essencialmente, e não existe acordo em que se estabelece qual delas é o inverso da força do enunciado.) Um enunciado forte é o que é menos provável de ser o verdadeiro; o fraco é aquele que é o mais provável de ser.

Os enunciados mais fortes são os que afirmam que não podem ser verdadeiros; isto é, autocontradições. O enunciado 'Waldo é e não é um gato', por exemplo, é extremamente forte e, portanto, tem probabilidade a *priori* de ser zero. A força desse enunciado é mais bem apreciada se observarmos que, como ele é autocontraditório, ele implica logicamente *qualquer* enunciado.

Os enunciados mais fracos são os que são logicamente necessários. Enunciados logicamente necessários são verdadeiros sob todas as circunstâncias possíveis. A tautologia 'Se a grama é verde, então a grama é verde' é logicamente necessária e portanto extremamente fraca. Sua probabilidade a *priori* é 1.

Nem sempre é possível comparar forças. Dos cinco enunciados fortes do problema 8.1, por exemplo, o impossível dizer qual deles é o mais forte. Contudo, todos eles são mais fortes do que qualquer um dos cinco enunciados fracos. Não se tem um método para se fazer comparações precisas entre tais enunciados.

Apesar disso, é possível estabelecer algumas regras que fornecem meios para determinar a força relativa, que são as seguintes:

Regra 1: Se um enunciado A implica dedutivamente um enunciado B, mas B não implica dedutivamente A, então A é mais forte que B.

Regra 2: Se um enunciado A é logicamente equivalente ao enunciado B (isto é, se A e B implicam dedutivamente um ao outro), então A e B têm forças iguais.

A justificativa dessas duas regras é a seguinte: se um enunciado A implica logicamente o enunciado B, então não existem circunstâncias possíveis em que A é verdadeiro e B é falso. Assim, o conjunto das circunstâncias possíveis em que A é verdadeiro é um subconjunto do conjunto das circunstâncias possíveis em que B é verdadeiro. Por outro lado (como na regra 1), se B não implica A, então existem circunstâncias possíveis em que B é verdadeiro e A é falso. Assim, A é verdadeiro em menos circunstâncias possíveis do que é B, e por isso dizemos que A é mais forte que B. Mas, se (como na regra 2) B implica A, então A e B são verdadeiros sob o mesmo conjunto de circunstâncias e daí eles têm forças iguais.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

8.2 Coloque em ordem do mais forte para o mais fraco os enunciados:

a) Ou algumas vacas são chifrudas ou alguns bois são chifrudos.

b) Existem vacas e bois, e todos os bois e vacas são chifrudos.

c) Existem vacas e todas elas são chifrudas.

d) Algumas vacas são chifrudas.

e) Ou algumas vacas são chifrudas ou não é o caso que algumas vacas são chifrudas.

f) Algumas vacas são chifrudas e não são chifrudas.

Solução

(*f*), (*b*), (*c*), (*d*), (*a*), (*e*). A solução é obtida quando aplicamos a regra 1 e o cálculo de predicados. Pelo método da árvore-verdade (Capítulo 6), vemos que cada item da lista solução implica dedutivamente aqueles que o sucedem, mas nenhum item da lista implica dedutivamente um item anterior. Observe que (*f*) é autocontraditório, enquanto (*e*) é logicamente necessário.

8.3 Compare as forças dos enunciados:

a) Adair admira Adler.

b) Não é o caso que Adair não admira Adler.

c) Adler é admirado por Adair.

d) Adair admira alguém que é idêntico a Adler.

e) Adair admira Adler e se está chovendo, então está chovendo.

Solução

Aplicando as técnicas do Capítulo 6, o leitor pode verificar que esses enunciados são logicamente equivalentes. Pela regra 2, todos eles têm forças iguais. Observe que o enunciado (*e*) é a conjunção do enunciado (*a*) com a tautologia 'se está chovendo, então está chovendo'. Essa tautologia nada afirma; assim sua conjunção com o enunciado (*a*) é um enunciado equivalente a (*a*).

Nem sempre as regras 1 e 2 se aplicam em qualquer caso. Por exemplo, nenhum dos enunciados fortes do problema 8.1 implica dedutivamente qualquer outro. Além do mais, a diferença entre suas forças é demasiadamente pequena e pouca aparente intuitivamente. Assim, não temos meios para ordenar esses enunciados fortes com respeito à sua força. O mesmo se pode dizer dos enunciados fracos do problema 8.1.

A importância lógica da força de um enunciado está na sua relação com a probabilidade indutiva, isto é, na força do raciocínio. Probabilidade indutiva (a probabilidade de uma conclusão, dadas as premissas; ver Seção 2.3) tende a variar diretamente com a força das premissas e inversamente com a força da conclusão.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

8.4 Qual é o efeito de se aumentar o número n, na seguinte forma de argumento?

Temos observado pelo menos n margaridas e todas elas têm corolas amarelas.

$\therefore$ Se observarmos uma outra margarida, ela terá uma corola amarela.

Solução

A premissa torna-se mais forte à medida que o número n aumenta. Em conseqüência, cada aumento em n também aumenta a probabilidade indutiva do argumento.

A forma de argumento do problema 8.4 é uma instância de indução simples, e será discutida na Seção 8.4.

8.5 Suponha que a altura média de um homem americano é 1,77 m. Desejamos usar esse fato como premissa para inferir uma conclusão sobre a altura de X, um homem americano que nunca vimos. Abaixo, temos três conclusões que poderíamos inferir. Qual das conclusões produz o argumento mais forte?

a) X tem exatamente 1,77 m de altura.

b) X tem entre 1,70 m e 1,77 m de altura.

c) X tem entre 1,60 m e 1,77 m de altura.

Solução

A probabilidade indutiva (e, portanto, a força) do argumento será maior quanto mais fraca for a conclusão que inferimos. A conclusão (*a*) é a mais forte das três conclusões; (*c*) é a mais fraca. Logo (*c*) produz o argumento mais forte e (*a*) o mais fraco.

Nem sempre a probabilidade indutiva do argumento aumenta, quando se fortalece as premissas ou se enfraquece a conclusão de um argumento. Porém, quando mudamos seu conteúdo, a relevância se altera.

8.6 Avalie a probabilidade indutiva e o grau de relevância do argumento:

95% das famílias americanas têm aquecedor, telefone, televisão e automóvel.

Os Joneses são uma família americana.

∴ Os Joneses têm aquecedor, telefone, televisão e automóvel.

O que acontece à probabilidade indutiva e à relevância se substituímos a conclusão pelo seguinte enunciado mais fraco, porém menos relevante?

a) A família Chun de Beijing possui pelo menos um automóvel.

O que acontece se substituímos a conclusão original pela seguinte, mais fraca porém altamente relevante?

b) Os Joneses têm aquecedor.

Solução

O argumento original tem relevância alta e probabilidade indutiva bastante alta; sua conclusão é forte. A conclusão (*a*) é mais fraca e quando a substituímos pela conclusão original, ambas, a relevância e a probabilidade indutiva do argumento, diminuem significativamente. Por outro lado, se substituímos a conclusão original por (*b*), enfraquecemos a conclusão enquanto preservamos a relevância e, portanto, criamos um argumento mais forte. A probabilidade indutiva desse novo argumento é pelo menos tão alta quanto a original, e podemos supor que ela é um pouco mais alta.

Como na prática quase nunca se modifica as premissas ou conclusões, a menos que elas preservem relevâncias, raramente encontraremos exceções para a regra de que, fortalecendo-se as premissas ou enfraquecendo-se a conclusão, aumenta-se a probabilidade indutiva.

8.2 Silogismo estatístico

Os argumentos indutivos são divididos em dois tipos, caso pressuponham ou não que o universo ou parte dele é provavelmente uniforme ou uma lei. Aqueles que não requerem tal pressuposição chamam-se argumentos *estatísticos*; as premissas de um argumento estatístico sustentam sua conclusão através de razões puramente estatísticas ou matemáticas. Aqueles que requerem essa pressuposição chamam-se argumentos *humeanos*, em homenagem ao filosófo escocês David Hume, o primeiro a estudá-los detalhadamente e questionar essa pressuposição.

EXEMPLO 8.1 O seguinte argumento é estatístico:

98% dos calouros universitários são capazes de ler livros da 6ª série.

Dave é um calouro universitário.

∴ Dave é capaz de ler livros da 6ª série.

A conclusão é provável, dadas as premissas, exclusivamente sob bases estatísticas. (É claro que, se existisse alguma evidência de que as habilidades de leitura de Dave foram deficientes, então a conclusão não seria tão provável; mas isso não é uma característica desse argumento; todos os argumentos indutivos são vulneráveis à evidência contrária; ver Seção 2.5.)

O valor mais óbvio para a probabilidade indutiva desse argumento é o valor porcentagem dividido por 100, isto é, 0,98. Contudo, existem várias interpretações ou concepções de probabilidade indutiva. De acordo com as interpretações *lógicas* de probabilidade indutiva, a probabilidade indutiva desse argumento é precisamente 0,98. Entretanto, muitos teóricos preferem uma versão da chamada interpretação *subjetiva*. De acordo com essa interpretação, probabilidade indutiva é medida pelo grau de crença na conclusão, dadas as premissas. Do ponto de vista subjetivo, a probabilidade indutiva desse argumento pode diferir de 0,98, dependendo do conhecimento e das circunstâncias da pessoa cujo grau de crença está sendo medido. Aqui, não é possível explicar os detalhes desses dois tipos de interpretação (algumas observações serão feitas no Capítulo 9). Para o resto desta seção admitiremos uma interpretação lógica.

O argumento do Exemplo 8.1 é uma instância da forma chamada *silogismo estatístico*:

$n\%$ de F é G.

x é F.

$\therefore x$ é G.

Aqui 'F' e 'G' são substituídas por predicados, 'x' por um nome e 'n' por um número entre 0 e 100. A probabilidade indutiva de um silogismo estatístico é (pela interpretação lógica) $n/100$. Observe que no caso em que n=100, o argumento torna-se dedutivo e sua probabilidade indutiva é 1.

Para $n < 50$, é mais natural que o argumento tenha a forma:

$n\%$ de F é G.

x é F.

$\therefore$ x não é G.

Consideraremos essa forma também como uma versão do silogismo estatístico. Sua probabilidade indutiva é $1 - n/100$, e ela se torna dedutiva quando $n = 0$.

EXEMPLO 8.2 O seguinte argumento é humeano:

Cada um dos 100 calouros universitários examinados sabia como soletrar 'lógica'.

$\therefore$ Se perguntarmos a qualquer calouro universitário, ele também saberá como soletrar 'lógica'.

Esse argumento é uma instância da forma chamada *indução simples*, que será discutida na Seção 8.4. Ele não é dedutivo, pois é possível que sua premissa seja verdadeira e sua conclusão, falsa. Apesar da premissa estar especificada numericamente, mesmo sob a interpretação lógica, não há regra matemática para determinar a probabilidade indutiva do argumento. Intuitivamente, essa probabilidade deverá ser razoavelmente alta; mas quão alta é depende de quão provável é que as futuras observações sobre calouros universitários se pareçam com o acontecido.

A probabilidade de que o futuro se parecerá com o passado não tem valor numérico preciso. Contudo, a estimativa de probabilidade indutiva do argumento dependerá da avaliação dessa probabilidade. Assim, qualquer estimativa de probabilidade indutiva do argumento pressupõe, implicitamente, uma estimativa do grau de uniformidade (ou semelhante lei) dos eventos — nesse caso, eventos envolvendo as habilidades ortográficas de calouros universitários. Essa é a essência de um argumento humeano.

Nesta seção e na Seção 8.3, enfocamos duas formas de raciocínio estatístico: silogismo estatístico e generalização estatística. O restante deste capítulo será dedicado a algumas formas de inferência humeana.

Silogismo estatístico é uma forma de raciocínio na qual as estatísticas sobre um grupo ou classe são usadas para inferir uma conclusão sobre certo elemento do grupo. Os argumentos do próximo problema mostram que essas estatísticas não são numericamente precisas.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.7 Os seguintes argumentos são silogismos estatísticos. Avalie a probabilidade indutiva de cada um.

a) Os diagnósticos de Madame Plodsky estão quase sempre corretos.
Madame Plodsky diz que Susan está com pedras no rim.
∴ Susan está com pedras no rim.

b) A maior parte do que Dana diz de seu passado é falso.
Dana disse que ele morou no Taiti e que tinha duas esposas lá.
∴ Dana não vive no Taiti e tem duas esposas lá.

c) Somente uma minúscula fração dos vôos domésticos termina em desastre.
Eu viajarei num vôo doméstico para o Rio.
∴ O meu vôo para o Rio não terminará em desastre.

Solução

Cada um desses argumentos tem probabilidade indutiva maior do que 0,5, embora a nenhum deles possamos atribuir uma probabilidade indutiva precisa. Os termos 'quase sempre' e 'somente uma minúscula fração' nos argumentos (*a*) e (*c*) indicam, respectivamente, percentuais bem pequenos e bem grandes. Esses argumentos têm probabilidades indutivas razoavelmente altas. 'A maior parte', no argumento (*b*), significa mais do que a metade; a probabilidade indutiva desse argumento é um pouco maior do que 0,5.

É claro que a probabilidade indutiva razoavelmente alta é apenas um dos critérios que um argumento deve ter a fim de evidenciar a provável veracidade de sua conclusão. Ele deve ter também premissas verdadeiras e relevantes e, na medida do possível, deve satisfazer a condição de evidência total (Seção 2.5). As premissas de um silogismo estatístico são relevantes automaticamente em virtude de sua forma. Todavia, elas podem não ser verdadeiras e, ainda, não dizer tudo o que se conhece sobre a conclusão.

Por exemplo, no argumento (*a*) do problema 8.7 a primeira premissa poderia ser falsa, especialmente se Madame Plodsky é cartomante. Ele é um argumento à autoridade, cuja força depende da fidedignidade de Madame Plodsky. Confiamos mais nos argumentos de autoridade do que em nosso conhecimento (isto é, aceitamos o que os outros nos dizem como verdadeiro), mas tal dependência se torna falaciosa se a fidedignidade da autoridade é incerta ou é suposta uma evidência contrária. Se a premissa que afirma a fidedignidade da autoridade é omitida, então o argumento deixa de ser um silogismo estatístico. Sua probabilidade indutiva diminui significativamente, e a outra premissa carece de relevância para a conclusão, pois, na ausência de evidência de que a autoridade é fidedigna, seus pronunciamentos não são relevantes para os fatos. O resultado é uma *falácia de apelo à autoridade*, um erro discutido na Seção 7.2.

O argumento (*b*), em contraste com o argumento (*a*), raciocina a partir da infidedignidade dos pronunciamentos de uma pessoa. Ele é uma forma do argumento *ad hominem* (argumento contra a pessoa). Se as premissas são verdadeiras e não existe evidência suprimida, o argumento (*b*) é, razoavelmente, um bom argumento. Contudo, muitos argumentos *ad hominem*, em vez de apontar a veracidade da pessoa em questão, atacam o caráter ou a reputação dessa pessoa. Por exemplo, se substituíssemos a primeira premissa do argumento (*b*) pelo enunciado 'Dana é um terrorista', então a probabilidade indutiva do argumento diminuiria, as premissas careceriam de relevância e o argumento cometeria a falácia *ad hominem* (ver Seção 7.2). Sem uma premissa que conectasse as citadas atividades terroristas de Dana com a fidedignidade de seus pronunciamentos sobre seu passado, esse novo argumento forneceria pouco apoio para sua conclusão.

O argumento (*c*) seria muito forte se suas premissas fossem realmente verdadeiras e nenhuma evidência fosse suprimida. Aqui existe um problema sutil. A conclusão do argumento (*c*) diz respeito a um vôo futuro. Sua primeira premissa também diz respeito a vôos futuros ou só a vôos que já ocorreram? Isto é, vamos ler a primeira premissa como

1) Somente uma minúscula fração de todos os vôos domésticos, passados, presentes e futuros, termina em desastre.

ou como

2) Somente uma minúscula fração de todos os vôos domésticos passados terminou em desastre.

Se interpretarmos a primeira premissa do argumento (*c*) como na alternativa (1), então como poderemos saber se ela é verdadeira? Talvez ela seja, se considerarmos 'futuro' significando a futuro próximo ou previsível, o que pode ser duvidoso. Interpretando-se dessa maneira, o argumento é um silogismo estatístico, com premissas relevantes e probabilidade indutiva alta.

Por outro lado, se interpretarmos a primeira premissa do argumento (*c*) como na alternativa (2), então a premissa é verdadeira, mas o argumento não é um silogismo estatístico; o referido vôo na conclusão não está entre os vôos mencionados na primeira premissa, pois é um vôo futuro. Sob essa interpretação, a primeira premissa é mais fraca e (na conjunção com a segunda) menos relevante para a conclusão do que sob a interpretação (1); assim, a probabilidade indutiva do argumento é baixa. Na verdade, o argumento parte de premissas acerca do passado para uma conclusão sobre o futuro. Sua fidedignidade depende do que se espera que o futuro se pareça com o passado. Em outras palavras, de quão consistente ou uniforme será o modelo de desastres aéreos, que é a pressuposição humeana. Assim, sob a interpretação (2), o argumento é humeano.

Isso não significa que o argumento (*c*) não é um bom argumento. Ele pode ser um bom argumento sob cada interpretação, contando que saibamos que as premissas são verdadeiras e que não existe evidência suprimida. Contudo, sob a interpretação (1) não podemos saber se a primeira premissa é verdadeira e se, sob a interpretação (2), a probabilidade indutiva do argumento é menor do que ela é sob a interpretação (1) (quanto menos depende da força de nossa pressuposição de uniformidade).

PROBLEMA RESOLVIDO

8.8 Coloque os argumentos em ordem decrescente de probabilidade indutiva:

a) 85% dos mísseis Snooze disparados até agora têm errado os alvos.
Um míssil Snooze foi disparado em 4 de julho de 1987.
∴ Esse Snooze errou o alvo.

b) Um míssil Snooze será disparado amanhã.
∴ Esse Snooze errará o alvo.

c) 85% dos mísseis Snooze disparados até agora têm errado os alvos.
Um Snooze será disparado amanhã.
∴ Esse Snooze errará o alvo.

d) Nenhum míssil Snooze errou o alvo.
Um Snooze foi disparado em 4 de julho de 1987.
∴ Esse Snooze errou o alvo.

e) 95% dos mísseis Snooze disparados até agora erraram os alvos.
Um Snooze foi disparado em 4 de julho de 1987.
∴ Esse Snooze errou o alvo.

f) Nenhum míssil Snooze errou o alvo.
Um Snooze será disparado amanhã.
∴ Esse Snooze errará o alvo.

Solução

(*e*), (*a*), (*c*), (*b*), (*f*), (*d*). O argumento (*e*) é mais forte que o argumento (*a*), pois sua primeira premissa é mais forte. O argumento (*a*) é mais forte que o argumento (*c*), pois (*c*) extrapola do passado para o futuro e, assim, pressupõe a uniformidade da natureza, enquanto (*a*) não. O argumento (*c*) é mais forte que o argumento (*b*), porque (*c*) está baseado em premissas mais fortes; (*b*) não oferece evidência real sustentada pela conclusão. As conclusões dos argumentos (*f*) e (*d*) são improváveis, dadas as suas premissas; a probabilidade indutiva em cada caso é menor que 0,5. Na verdade, (*d*) implica dedutivamente a negação da conclusão; assim, a probabilidade indutiva do argumento (*d*) é 0.

8.3 Generalização estatística

Silogismo estatístico é uma inferência que parte das estatísticas relativas a um conjunto de indivíduos, para uma conclusão (provável) sobre algum elemento desse conjunto. Generalização estatística, pelo contrário, parte de estatísticas relativas a um subconjunto, selecionado ao acaso, de um conjunto de indivíduos para uma conclusão (provável) sobre a composição de todo o conjunto. Esse tipo de raciocínio é usado para obter conclusões gerais a partir de votações de opinião pública e de outros tipos de estudos ao acaso.

EXEMPLO 8.3 O seguinte argumento é uma generalização estatística cuja probabilidade indutiva é bem alta:

> Menos de 1% de 1000 rolamentos, selecionados ao acaso para examinar a produção de 1985 da fábrica Saginaw, deixou de satisfazer as especificações.
>
> ∴ Somente uma pequena percentagem de todos os rolamentos produzidos durante a produção de 1985 da fábrica Saginaw deixa de satisfazer as especificações.

A forma geral da generalização estatística é a seguinte:

n% de s, selecionados ao acaso, F é G.

∴ Quase n% de todo F é G.

O número s indica o tamanho da amostra. F é uma propriedade que define a população sobre a qual estamos generalizando (nesse caso, os rolamentos produzidos em 1985, pela fábrica Saginaw). G é a propriedade estudada pelo exemplo (nesse caso, a propriedade de deixar de satisfazer as especificações).

Uma amostra é selecionada ao acaso quando é selecionada por um método que garante que cada um dos Fs tem chances iguais de ser retirado como amostra. Isso implica que cada subconjunto que tem s elementos dos Fs teve chance igual de ser escolhido. Por outro lado, é um fato matemático (cuja prova está além do alcance desta discussão) que, se s é suficientemente grande, a maioria dos subconjuntos que têm s elementos de uma dada população é representativa daquela população. Em particular, para a maioria dos subconjuntos que têm s elementos do conjunto dos Fs, a proporção dos Gs é quase a mesma, nestas circunstâncias, entre os Fs. Daí, se uma amostra razoavelmente grande dos Fs é selecionada ao acaso, é provável, mas não certo, que a proporção dos Gs que as contenha se aproximará da proporção dos Gs entre todos os Fs.

A probabilidade indutiva de uma generalização estatística é determinada por princípios matemáticos. Não há necessidade de se pressupor qualquer tipo de uniformidade. Conseqüentemente, generalização estatística é uma forma estatística de inferência, não uma forma humeana.

O sucesso da generalização estatística depende fundamentalmente da técnica de amostragem fazer escolhas ao acaso. Se a amostra não é escolhida ao acaso, então a técnica de amostragem pode favorecer amostras que têm número de Gs extraordinariamente alto ou extraordinariamente baixo. Em tais casos, a amostra se diz *tendenciosa*. Aplicar generalização estatística com uma técnica de amostragem que não procede ao acaso, comete-se a falácia da *amostra tendenciosa*, uma forma da *falácia da generalização apressada*, discutida na Seção 7.5. Os argumentos resultantes não são verdadeiras generalizações estatísticas, pois uma correta generalização estatística exige procedimento ao acaso. Suas probabilidades indutivas são muito baixas.

A probabilidade indutiva de uma generalização estatística é uma função de duas quantidades: o tamanho da amostra s e a força da conclusão. Aumentando-se s, fortalece-se a premissa de modo relevante para a conclusão e, assim, aumenta-se a probabilidade indutiva do argumento.

Para determinar a probabilidade indutiva do argumento, precisamos levar em conta a força de sua conclusão. Observe que, na forma dada acima, a conclusão é 'Quase $n\%$ de F é G'. Se se diz 'Exatamente $n\%$

de F é G', então esta conclusão seria muito mais forte e a probabilidade indutiva do argumento estaria muito próxima de zero. É pouco provável que uma amostra ao acaso tivesse *exatamente* a mesma proporção de Gs como a população a partir da qual foi selecionada. Portanto, se queremos que nossa conclusão seja confiável, devemos permitir certa margem de erro, e é isso que o termo 'quase' significa.

Se estipulamos a margem de erro, então existem métodos matemáticos para determinar numericamente a probabilidade indutiva do argumento. Suponha que tomamos 'quase $n\%$' para significar n% ± 3%. Então, se $s = 1000$, a probabilidade indutiva do argumento é bem alta, quase 0,95, ou, um pouco mais alta. Se diminuímos s para 100, mantendo a mesma conclusão, então a probabilidade indutiva cai para algo da como 0,5. Para amostras muito menores do que 100, torna-se improvável que a proporção dos Gs na amostra esteja entre 3% da proporção dos Gs na população. Em outras palavras, a probabilidade indutiva do argumento cai para menos de 0,5.

Se interpretarmos 'quase' menos estritamente, enfraquecemos a conclusão e, com isso, a probabilidade indutiva do argumento aumenta. Suponha que $s = 100$ e que $n\% \pm 10\%$ de F é G. Temos um argumento forte, com uma probabilidade indutiva de 0,95, ou levemente maior. Se permitirmos uma pequena margem de erro na conclusão, a probabilidade indutiva chega mais perto de 1. Se aceitarmos uma margem de erro ainda maior (digamos, ± 30%), obtemos uma probabilidade indutiva de 0,95 com uma amostra menor ou igual a 20. Esses exemplos permanecem praticamente indiferentes ao tamanho da população (número de Fs), se esse número é razoavelmente grande.

Assim, probabilidade indutiva se torna mais alta quando s aumenta (com isso fortalecendo a premissa) e quando a margem de erro da conclusão aumenta (que enfraquece a conclusão). Se a conclusão é muito forte para ser sustentada pela premissa e com probabilidade indutiva razoável, então o argumento comete a *falácia da amostra pequena*; uma versão da falácia da generalização apressada (Seção 7.5).

Apesar de a probabilidade indutiva de uma generalização estatística variar principalmente com s e com a margem de erro da conclusão, também n interfere na probabilidade. Se n é muito grande ou muito pequeno (perto de 0 ou 100), a probabilidade indutiva do argumento é um pouco mais alta (o resto permanecendo igual) do que se n está perto de 50.

Para os detalhes matemáticos das relações entre n, s, a margem de erro e a probabilidade da conclusão dada a premissa, de uma generalização estatística o leitor deve consultar o tópico sobre intervalos de confiança num livro de estatística.

Probabilidades indutivas de generalizações estatísticas usualmente são omitidas dos relatórios de pesquisas e dos resultados de opinião pública. Um relatório pode dizer, por exemplo, "62% dos eleitores aprovaram a política econômica do presidente, sujeita a uma margem de erro de ± 3%". Isso quer dizer que a amostra era suficientemente grande (acima de 1000) para assegurar uma probabilidade de 0,95 e que o intervalo 62% ± 3% contém a proporção real de eleitores que aprovam a política econômica do presidente.

Os estatísticos geralmente consideram a probabilidade de 0,95 como certa, e não mencionam a probabilidade envolvida. Mas a conclusão que 62% ± 3% dos eleitores aprovam a política econômica do presidente é, na verdade, conseqüência da generalização estatística a partir da premissa de que 62% da amostra aprovaram a política econômica do presidente; a probabilidade indutiva é 0,95. Portanto, há uma probabilidade de 0,05 na proporção de todos os eleitores que aprovam a política econômica do presidente, não inclusa nos 62% ± 3%.

Várias precauções devem ser observadas ao se avaliar generalizações estatísticas. Um fato é que a amostra deve ser escolhida ao acaso. Isso não significa que a amostra deve conter a mesma proporção dos Gs como a população no todo. Se assim fosse, não haveria necessidade da generalização estatística; poderíamos, simplesmente, deduzir a proporção dos Gs na população a partir da proporção dos Gs na amostra. Ou seja, a técnica amostral deve assegurar que a proporção dos Gs na amostra está *provavelmente* próxima da proporção dos Gs em toda população.

É claro que, se alguém afirma que certa amostra é ao acaso, mas que na verdade não é, então a premissa da generalização estatística é falsa, e o argumento deve ser rejeitado. Isso ocorre quando o que parece ser um método amostral ao acaso na realidade não é (por exemplo, escolher nomes de uma lista telefônica). Escolher nomes de uma lista telefônica não fornece uma amostra ao acaso de todos os proprietários de casas, pois aqueles sem telefones não têm chance de ser escolhidos.

Tal como os argumentos indutivos, generalização estatística pode omitir uma evidência. Se duas ou mais pesquisas, ao acaso, obtêm resultados diferentes a partir de premissas verdadeiras, então nenhuma delas se constitui num bom argumento. A exigência de evidência total requer que todas as premissas sejam ponderadas ao se avaliar a probabilidade da conclusão sobre as quais elas se referem.

Pequenos desvios na forma de generalização estatística podem enfraquecer seriamente o argumento. Este fato é ilustrado no seguinte exemplo:

EXEMPLO 8.4

> Só 10% de 1000 americanos selecionados ao acaso responderam "sim" à questão "Você já cometeu um crime?"
>
> ∴ Quase 10% de todos os americanos cometeram crimes.

Esse argumento desvia a forma de generalização estatística, pois sua premissa afirma o que os americanos examinados (os Fs) disseram, enquanto a conclusão afirma o que os americanos fizeram. Ou seja, a propriedade designada por G na premissa (responderam "sim" à questão) não é a mesma que a propriedade designada por G na conclusão (realmente cometeram um crime). Contudo, para o argumento ser uma instância legítima da generalização estatística, a mesma propriedade deve ser designada para as duas ocorrências da variável G. A conclusão que podemos legitimamente inferir da premissa, pela generalização estatística, é:

> Quase 10% de todos os americanos responderiam "sim" à questão "Você já cometeu um crime?" (se perguntados nas condições da pesquisa).

Com essa nova conclusão, a probabilidade indutiva do argumento é razoavelmente alta, embora não possamos dizer exatamente quão alta, por causa da vaguidade do termo 'quase'. O argumento original carecia de relevância evidente, e sua probabilidade indutiva era muito mais baixa. É bastante possível (devida a delicadeza do assunto pesquisado) que algumas das respostas recebidas foram desonestas.

O exemplo 8.4 ilustra uma dificuldade: como podemos estar certos de que as pessoas consultadas estão falando a verdade? Em muitos casos (quando se pergunta aos eleitores quais os candidatos preferidos), aparentemente não há motivo para a desonestidade, e, assim, é seguro admitir que as respostas refletem opiniões reais. Mas a suposição de sinceridade não deve ser analisada.

Um problema semelhante refere-se ao modo como uma pergunta é formulada.

EXEMPLO 8.5 Suponha que desejamos pesquisar a opinião pública sobre um projeto de lei proposto pelo senador S. O modo de elaborar a pergunta pode, drasticamente, afetar as respostas. Se perguntamos "Você apóia o projeto de governo socialista do senador S?", estamos provavelmente propiciando muito mais respostas negativas do que se formulássemos a pergunta mais neutramente: "Você apóia o projeto de lei do senador S sobre o governo ajudar aos pobres?". E essa, por sua vez, provavelmente gerará mais respostas negativas do que a pergunta "Você apóia o novo projeto de lei popular do senador S para levar ajuda para as vítimas da pobreza na América?".

Entretanto, a forma final do argumento pode esconder a maneira pela qual a pergunta foi formulada:

> 51% de 100 dos eleitores, selecionados ao acaso disseram que eles apoiaram o projeto de lei do senador S.
>
> ∴ Quase 51% de todos os eleitores apóiam o projeto de lei do senador S.

Tal como o argumento do exemplo 8.4, ele não é uma generalização estatística, pois parte do que os eleitores *disseram* para o que eles realmente *pensam*. Mas, esse argumento tem um ponto fraco, pois não se sabe qual foi a pergunta. A pergunta pode conter respostas tendenciosas a favor ou contra a proposta de lei.

Perguntas tendenciosas são, freqüentemente, um problema em pesquisas de opinião pública. Elas podem ter sido elaboradas por aqueles que têm interesse no resultado ou, ainda, pobremente formuladas.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.9 Coloque os seguintes argumentos em ordem decrescente de probabilidade indutiva.

a) 50% de 100 americanos selecionados ao acaso disseram que eles aprovaram a política econômica do presidente.
∴ Exatamente 50% de todos os americanos diriam (se perguntados nas condições da pesquisa) que eles aprovam a política econômica do presidente.

b) 50% de 1000 americanos selecionados ao acaso disseram que eles aprovaram a política econômica do presidente.
50% ± 10% de todos os americanos diriam (se perguntados nas condições da pesquisa) que eles aprovam a política econômica do presidente.

c) 50 dentre 100 americanos disseram que eles aprovaram o política econômica do presidente.
∴ Exatamente 50% de todos os americanos aprovam a política econômica do presidente.

d) 50% de 100 americanos selecionados ao acaso disseram que eles aprovaram a política econômica do presidente.
∴ 50% ± 1% de todos os americanos diriam (se perguntados nas condições da pesquisa) que eles aprovam a política econômica do presidente.

e) 50% de 100 americanos selecionados ao acaso disseram que eles aprovaram a política econômica do presidente.
∴ Exatamente 50% de todos os americanos aprovam a política econômica do presidente.

f) 50% de 100 americanos selecionados ao acaso disseram que eles aprovaram a política econômica do presidente.
∴ 50% ± 10% de todos os americanos diriam (se perguntados nas condições da pesquisa) que eles aprovam a política econômica do presidente.

Solução

(*b*), (*f*), (*d*), (*a*), (*e*), (*c*). O argumento (*b*) é semelhante ao argumento (*f*), exceto por empregar uma amostra maior; assim, (*b*) é mais forte do que (*f*). O argumento (*f*) é mais forte do que o argumento (*d*), pois (*d*) tem uma conclusão forte. Pela mesma razão, (*d*) é mais forte do que (a). O argumento (*e*) é, todavia, mais fraco que o argumento (*a*), pois a conclusão de (*e*) é menos relevante; uma suposição sobre o que as pessoas realmente acreditam, em oposição ao que elas deveriam dizer. Finalmente, o argumento (*c*) tem a menor probabilidade indutiva, pois é semelhante ao argumento (*e*), exceto que a primeira premissa de (*c*) é mais fraca, pois ela não afirma que a amostra foi escolhida ao acaso.

8.4 Generalização indutiva e indução simples

A generalização estatística nos permite chegar a uma conclusão concernente a uma população toda a partir de uma premissa relativa a uma amostra, ao acaso, daquela população. O fato de se escolher uma amostra ao acaso garante a probabilidade da conclusão em bases puramente matemáticas. Contudo, muitas vezes, não é possível obter uma amostra ao acaso. Isso é verdade, por exemplo, se a população relevante interfere em objetos ou eventos futuros. Como esses objetos ou eventos ainda não existem, na hora em que a amostra é escolhida, eles não têm chance de ser incluídos na amostra. Portanto, como o fato de se escolher ao acaso exige que cada membro da população tenha chance igual de ser selecionado, nenhuma amostra que se escolher pode ser uma amostra ao acaso para uma população que inclui objetos ou eventos futuros.

EXEMPLO 8.6 A conclusão do seguinte argumento diz respeito a uma população (todos os jogos da Copa União dessa temporada) que inclui jogos futuros, e, portanto, a amostra (jogos realizados até agora) não é uma amostra selecionada ao acaso com relação a essa população:

O time X tem 10 vitórias dos 20 jogos que eles disputaram até agora nessa temporada.

∴ O time X terminará a temporada tendo ganho quase a metade de seus jogos.

A forma geral desse argumento é representada do seguinte modo:

$n\%$ de s observados até agora F é G.

∴ Quase $n\%$ de todo F é G.

No Exemplo 8.6, n é 50, s é 20, F é 'Time X joga esta temporada', e G é 'são (ou serão) jogos ganhos pelo time X'. Essa forma chama *generalização indutiva*.

A diferença entre as generalizações estatística e indutiva é que nesta última as premissas não afirmam que a amostra é ao acaso. Sem a afirmação de que a amostra é escolhida ao acaso, o raciocínio não pode ser justificado somente por princípios matemáticos. Nenhum princípio matemático garante, por exemplo, que o time X melhorará repentinamente e vencerá todos os seus jogos restantes ou terminará com uma longa lista de derrotas. Qualquer princípio matemático assegura que tais chances radicais não são prováveis. A inferência do exemplo 8.6 pressupõe algo substancial: que o curso dos eventos (nesse caso, jogos de bola) é uniforme no tempo; ou seja, que instâncias futuras de vitória são prováveis de ocorrer com quase a mesma freqüência que as instâncias anteriores de vitória. Portanto, generalizações indutivas são inferências humeanas.

Generalizações indutivas são argumentos mais fracos do que generalizações estatísticas, pois o tipo de uniformidade que elas pressupõem é de grau incerto. Como não há maneira universalmente aceita de se calcular as probabilidades indutivas dos argumentos humeanos, não podemos dizer exatamente quão mais fraco são. Contudo, em relação a outros aspectos, a avaliação de generalizações indutivas emprega os mesmos princípios que os de generalizações estatísticas. Assim, nos dois tipos de generalização, a probabilidade indutiva aumenta quando s se torna maior.

Uma das mais importantes formas de generalização indutiva é quando n = 100. Assim, temos:

Todos os s observados até agora F é G.

$\therefore$ Todo F é G.

Essa forma é comumente considerada como justificativa para leis científicas (muitas vezes expressas na forma 'Todo F é G'). Por exemplo, sabe-se que todos os objetos exercem força gravitacional na razão direta de suas massas. Essa lei está baseada na seguinte generalização indutiva:

EXEMPLO 8.7

Todos os objetos observados até agora exercem força gravitacional na razão direta de suas massas.

∴ Todos os objetos exercem força gravitacional na razão direta de suas massas.

Contudo, a generalização indutiva é uma forma de raciocínio relativamente fraca. Alguns teóricos rejeitam tal generalização como o meio que estabelece as leis universais.[1] Eles argumentam que se s é relativamente pequena para a população dos Fs, a probabilidade indutiva da inferência está próxima de zero, e que para populações infinitas e s finito ela é estritamente zero. Alguns questionam ainda se a generalização indutiva realmente é o modo pelo qual se justifica leis científicas — ou mesmo, se tais leis podem ser justificadas.[2] Contudo, outros têm contestado essas alegações. Na verdade não se tem uma opinião conclusiva. Apesar desse desacordo, existem certos princípios comparativos nos quais muitos lógicos concordam. Se assumimos que a probabilidade indutiva de uma generalização indutiva não é estritamente zero, então ela pode ser aumentada, quando se aumenta s. (Isso é uma instância da regra geral que ao se fortalecer a premissa fortalece-se o argumento.) O raciocínio também se fortalece quando se enfraquece a conclusão; diminuir a população dos Fs aumenta a probabilidade indutiva do argumento.

A maneira mais extrema para enfraquecer a conclusão de uma inferência é reduzir a população a um único indivíduo. Assim a seguinte forma, chamada *indução simples, indução por enumeração* ou *simples inferência prognóstica*:

$n\%$ de s observados até agora F é G.

∴ Se mais um F for observado, ele será G.

---

1. Ver Rudolf Carnap. *The Logical Foundations of Probability*, Chicago, University of Chicago Press, 1962.
2. Ver, por exemplo, Karl R. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*, New York, Harper & Row, 1968.

EXEMPLO 8.8 O seguinte argumento é uma indução simples em que n = 100.

> Todos os objetos observados até agora exercem força gravitacional na razão direta de suas massas.
>
> ∴ Se mais um objeto for observado, ele exercerá força gravitacional na razão direta de sua massa.

Como a conclusão desse argumento é muito mais fraca do que a do exemplo 8.7, o argumento é consideravelmente mais forte. Em geral, induções simples são muito mais fortes do que generalizações indutivas com as mesmas premissas.

Tal como as generalizações indutivas, as induções simples tornam-se mais fortes à medida que s aumenta, desde que n > 50. Além disso, tal como os silogismos estatísticos, as induções são altamente suscetíveis ao valor de n. Elas são mais fortes quando n = 100, e mais fracas quando n = 0. Se n < 50, uma indução simples fornecerá mais apoio para a negação de sua conclusão do que para a conclusão em si. Por outro lado, ao contrário dos silogismos estatísticos, as induções simples não se tornam dedutivas quando n = 100, pois elas são inferências humeanas cujas forças dependem de uma pressuposição incerta sob a uniformidade da natureza. Do mesmo modo que para todos os argumentos humeanos, não existem métodos aceitos para se calcular a probabilidade indutiva de uma indução simples.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.10 Coloque os argumentos em ordem decrescente de probabilidade indutiva:

a) Exatamente 99% de 500 meteoritos observados continham ferro.
∴ Se outro meteorito for observado, ele conterá ferro.

b) Exatamente 99% de 500 meteoritos observados continham ferro.
∴ Todos os meteoritos contêm ferro.

c) Todos os meteoritos contêm ferro.
∴ Se um meteorito for observado, ele conterá ferro.

d) Todos os 500 meteoritos observados até agora contêm ferro.
∴ Se um outro meteorito for observado, ele conterá ferro.

e) Todos os 500 meteoritos observados até agora contêm ferro.
∴ Todos os meteoritos contêm ferro.

f) Todos os 1000 meteoritos observados até agora contêm ferro.
∴ Se um outro meteorito for observado, ele conterá ferro.

g) Todos os 500 meteoritos observados até agora contêm ferro.
∴ Todos os meteoritos que sempre observarmos conterão ferro.

Solução

(*c*), (*f*), (*d*), (*a*), (*g*), (*c*), (*b*). O argumento (*c*) é dedutivo. Sua probabilidade indutiva é mais alta do que a dos outros, os quais não são dedutivos. O argumento (*f*) é mais forte do que o (*d*), pois sua primeira premissa é mais forte; ela utiliza uma amostra maior. O argumento (*a*) tem probabilidade indutiva mais baixa, pois, em sua primeira premissa, a porcentagem de ferro contida nos meteoritos é menor. A primeira premissa do argumento (*g*) é a mesma que a do argumento (*d*), contudo sua probabilidade indutiva é muito mais baixa do que a de (*a*), ou a de (*d*), pois sua conclusão é excessivamente forte — muito mais forte do que a da conclusão de (*a*) ou (*d*). A conclusão do argumento (*e*) é mais forte; daí (*e*) é o mais fraco. A probabilidade indutiva do argumento (*b*) é estritamente zero, pois, de acordo com sua primeira premissa, dos 500 meteoritos já observados, cinco deles não contêm ferro.

8.5 Indução por analogia

Um outro tipo de argumento humeano é o *argumento por analogia*. Num argumento por analogia observamos que um objeto x tem as propriedades, F_1, F_2, ..., F_n, em comum com um outro objeto y. Além disso, y tem uma outra propriedade G. Assim inferimos que provavelmente x também terá a propriedade G (pois x e y são análogos em muitos outros aspectos). A forma geral desse argumento é representada do seguinte modo:

$$
\begin{array}{l}
F_1x \ \& \ F_2x \ldots \& \ F_n x \\
F_1y \ \& \ F_2y \ \& \ \ldots \& \ F_ny \\
Gy \\
\therefore Gx
\end{array}
$$

EXEMPLO 8.9 O argumento seguinte é um argumento (razoavelmente forte) por analogia:

> Espécime x é uma planta com um só talo, de folhas lanceoladas e flores azuis de cinco pétalas, com quase 40 cm de altura e crescem na beira de estradas.
>
> Espécime y é uma planta com um só talo, de folhas lanceoladas e flores azuis de cinco pétalas, com quase 40 cm de altura e crescem na beira de estradas.
>
> Espécime y é um membro da família genciana.
>
> ∴ Espécime x é um membro da família genciana.

Esse argumento é humeano, pois nenhum princípio lógico ou matemático pode garantir que semelhanças na aparência externa, tamanho e forma criam uniformidade taxionômica ainda provável. O argumento, pressupõe uma correspondência mais ou menos regular entre as características mencionadas e os tipos taxionômicos. A força do argumento é, em parte, função da força de sua pressuposição. Os argumentos analógicos se fortalecem, tal como os argumentos indutivos, pelo fortalecimento de suas premissas ou pelo enfraquecimento de suas conclusões. Aumenta-se a probabilidade indutiva do argumento, por exemplo, quando se enfraquece a conclusão para:

> Espécime x é um membro da família genciana ou alguma família intimamente relacionada.

Pode-se também aumentar sua probabilidade indutiva observando mais propriedades que x e y têm em comum e com isso fortalecer cada uma das premissas. Pode-se observar, por exemplo, que x e y produzem tipos análogos de sementes.

Contudo, uma avaliação simples das propriedades, que constituem a analogia, é somente uma maneira tosca de se estimar a força da premissa. Algumas propriedades avaliam mais do que outras. Por exemplo, x e y, têm a propriedade de ser compostos de substâncias. Porém essa propriedade fornece uma analogia fraca e muito geral entre as duas, em comparação com as propriedades mais específicas, tal como tendo folhas lanceoladas ou tendo flores azuis de cinco pétalas. Assim, a força das premissas depende não só da quantidade de propriedades que x e y têm em comum, como também da especificidade dessas propriedades. Quanto mais específicas são as semelhanças, mais forte é o argumento.

Um outro aspecto é a relevância das propriedades F_1, F_2, ..., F_n para a propriedade G. O Exemplo 8.9 é relativamente forte, porque todas as propriedades mencionadas nas duas primeiras premissas são relevantes para uma classificação taxionômica (isto é, para a propriedade G, a propriedade de ser um membro da família genciana). Se há falta de relevância, e a conclusão é forte o suficiente por ser de muito interesse, então a probabilidade indutiva do argumento é muito baixa.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.11 Estime a probabilidade indutiva do seguinte argumento por analogia:

> x nasceu numa segunda-feira, tem cabelo escuro, 1,70 m de altura e fala finlandês.
>
> y nasceu numa segunda-feira, tem cabelo escuro, 1,70 m de altura e fala finlandês.
>
> y gosta de couve-de-bruxelas.
>
> $\therefore x$ gosta de couve-de-bruxelas.

Solução

A probabilidade indutiva é baixa, pois as propriedades $F_1, F_2, ..., F_n$ mencionadas nas duas primeiras premissas são irrelevantes para a propriedade G (a propriedade de gostar de couve-de-bruxelas).

Nem sempre está claro o que é ou não relevante ao se iniciar uma investigação. Por exemplo, se uma pessoa tem um gene que a predispõe a gostar de couve-de-bruxelas mas que, por outro lado, escureceu seus cabelos. Assim, nesse caso, ter cabelo escuro foi relevante, apesar de tudo! É claro que isso é improvável. Algumas vezes um raciocínio analógico pode sugerir conexões genuínas, previamente insuspeitas, mas que à primeira vista evidenciam falta de relevância.

Em argumentos analógicos o papel da relevância é problemático e, freqüentemente, difícil de se determinar. O melhor conselho que se pode dar ao se avaliar um raciocínio analógico é que prevaleça o senso comum.

Considerações analógicas podem ser combinadas com indução por enumeração, a fim de se produzir formas de argumentos híbridas. Por exemplo, em vez de comparar x com um único objeto y, podemos compará-lo com outros objetos distintos que têm as propriedades $F_1, F_2, ..., F_n$ e G.

Isso fortalece o argumento, pois mostra que G está associada com F_1, ..., F_n em muitas instâncias e não em uma única.

Argumentos analógicos, tais como todos os argumentos indutivos, são vulneráveis à evidência contrária. Se alguma evidência que se refiria negativamente à analogia foi suprimida, então o argumento viola a exigência de evidência total, por isso, deve ser rejeitado. (A conclusão deve ser analisada levando em conta qualquer evidência disponível.) Geralmente, nos argumentos analógicos uma evidência contrária tem a forma de uma *não-analogia relevante*. (Sobre analogias defeituosas, ver problema 7.30.)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

8.12 Avalie o seguinte argumento por analogia:

Jim Jones foi o líder de um movimento religioso que defendia a paz, a fraternidade e um modo de vida simples.

Mahatma Gandhi foi o líder de um movimento religioso que defendia a paz, a fraternidade e um modo de vida simples.

Mahatma Gandhi foi um homem santo.

∴ Jim Jones foi um homem santo.

Solução

O argumento tem três premissas, uma probabilidade indutiva razoavelmente alta e um grau razoável de relevância. Contudo, uma importante evidência contrária está suprimida: Jim Jones foi líder de um culto fanático, que incitava atos de homicídio e suicídio em massa. Como o argumento ignora essa não-analogia relevante, entre Jones e Gandhi, ele deve ser rejeitado.

8.13 Coloque em ordem decrescente de probabilidade indutiva os argumentos analógicos:

a) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Uma mosca y, com 8 mm de comprimento, foi colocada num vaso fechado hermeticamente.
y morreu em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de um dia.

b) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Uma mosca y, com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, foi colocada num vaso fechado hermeticamente.
y morreu em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de um dia.

c) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Uma mosca y, com 8 mm de comprimento, foi colocada num vaso fechado hermeticamente.
y morreu em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de 12 horas.

d) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Moscas y, z e w, cada uma com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, foram colocadas em vasos fechados hermeticamente.
y, z e w morreram em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de um dia.

e) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Moscas y, z e w, cada uma com 8 mm de comprimento e 14 dias de vida, foram colocadas em vasos fechados hermeticamente.
y, z e w morreram em um dia.
$\therefore x$ morrerá eventualmente.

f) Uma mosca x, com 8 mm de comprimento, está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente em Wisconsin.
Uma mosca y, com 8 mm de comprimento, foi colocada num vaso fechado hermeticamente em Wisconsin.
y morreu em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de um dia.

g) Uma mosca x está sendo colocada num vaso fechado hermeticamente.
Uma mosca y foi colocada num vaso fechado hermeticamente.
y morreu em um dia.
$\therefore x$ morrerá dentro de 12 horas.

Solução

(*e*), (*d*), (*b*), (*f*), (*a*), (*c*), (*g*). O argumento (*e*) é mais forte que o (*d*), pois sua conclusão é mais fraca. O argumento (*d*) é mais forte que o (*b*), pois sua segunda premissa é mais forte; a analogia em (*b*) baseia-se numa amostra com uma só mosca, em vez de três. O argumento (*b*) é mais forte que o (*f*), pois o estado em que o experimento é realizado é certamente menos relevante para a conclusão do que a idade da mosca. Contudo, (*f*) é mais forte que (*a*), que é como (*f*), exceto que (*a*) não menciona o estado em que o experimento foi realizado (portanto tem premissas levemente mais fracas). O argumento (*c*) é como o (*a*), exceto que (*c*) tem conclusão mais forte; assim, (*a*) é mais forte do que (*c*). Finalmente, o argumento (*g*) é levemente mais fraco do que (*c*), pois (*g*) não menciona o tamanho das moscas e, portanto, tem premissas mais fracas.

8.6 Métodos de Mill

Muitas vezes desejamos determinar a causa de um efeito observado. Logicamente, isso é feito em duas etapas. Na primeira etapa se formula uma lista de causas suspeitas que inclui a causa real. Na segunda se exclui da lista algumas das causas suspeitas por meio de várias observações. Se reduzirmos a lista a um item somente, então provavelmente este item é a causa.

Geralmente a primeira etapa (isto é, a evidência de que a causa real se inclui na lista de causas suspeitas) fundamenta-se na indução. O raciocínio eliminativo, da segunda etapa, é dedutivo. Como ambos, raciocínio indutivo e dedutivo, estão envolvidos, o raciocínio como um todo é indutivo (ver Seção 2.3).

A lista de causas suspeitas é obtida por um processo de raciocínio indutivo (freqüentemente analógico). Suponha, que desejamos saber qual é a causa de uma moléstia descoberta recentemente. Essa moléstia se parecerá mais com uma moléstia familiar do que com outras. Observam-se as moléstias familiares com as quais mais se parece e, então, conclui-se (por analogia) que a causa é, provavelmente, similar às causas dessas moléstias.

Suponha, que as moléstias familiares com as quais a nova moléstia mais estreitamente se parece sejam todas infecções por vírus. As causas suspeitas são então viróticas. Através da observação feita com a moléstia das vítimas fica determinado quais vírus estão presentes em seus tecidos. Concluiremos que a causa real seja provavelmente um desses vírus. Esses vírus formarão a lista de causas suspeitas.

Até esse ponto, a investigação está parcialmente concluída. É muito provável que encontremos vários tipos de vírus nas células das vítimas. Para determinar quais desses causaram a moléstia, utiliza-se um processo dedutivo destinado a eliminar da lista todas as possíveis causas suspeitas. O tipo de processo eliminatório a ser usado depende do tipo de causa que se busca.

Abordaremos somente quatro tipos de causas e seus correspondentes métodos de eliminação. Deve-se ao filósofo do século XIX John Stuart Mill a investigação desses métodos. Na verdade, Mill estudou cinco métodos, mas o quinto (o método dos resíduos) não corresponde a qualquer tipo específico de causa e portanto não será tratado. Inicialmente é preciso definir os tipos de causas em que se aplicam os métodos de Mill.

O primeiro tipo de causa é uma *causa necessária* ou *condição causalmente necessária*. Uma causa necessária para um efeito E é uma condição que é necessária para produzir E. Se C é uma causa necessária para E, então E nunca ocorre sem C, embora C possa ocorrer sem E. Por exemplo, o bacilo da tuberculose é uma causa necessária da moléstia tuberculose. A tuberculose nunca ocorre sem o bacilo, mas este pode estar presente no organismo de uma pessoa sem que ela manifeste a moléstia.

Um efeito pode ter várias causas necessárias. Por exemplo, para se produzir fogo, três condições são causalmente necessárias: combustível, oxigênio (ou alguma substância similar) e calor.

O segundo tipo de causa é uma *causa suficiente* ou *condição causalmente suficiente*. Uma condição C é uma causa suficiente para um efeito E se a presença de C produz invariavelmente E. Se C é uma causa suficiente para E, então C nunca ocorre sem E, embora possam existir casos em que E ocorra sem C. Por exemplo (com relação a espécies superiores de animais), a decapitação é uma causa suficiente para a morte. Sempre que a decapitação ocorre, a morte ocorre. Mas, a recíproca não se verifica: outras causas, além da decapitação, podem resultar em morte.

Um efeito pode ter muitas causas suficientes. Além da decapitação, como observado anteriormente, existem várias causas suficientes para a morte: cozimento em óleo, esmagamento, privação de comida, água ou oxigênio por um longo período — mencionando só algumas alternativas desagradáveis.

Algumas condições são *causas necessárias e suficientes* para um dado efeito. Isto é, o efeito nunca ocorre sem a causa nem a causa ocorre sem o efeito. (Esse é um terceiro tipo de relação causal.) Por exemplo, a presença de um corpo maciço é uma causa necessária e suficiente para a presença de um campo gravitacional. Sem massa, nenhum campo gravitacional pode existir. Com ela, não pode falhar a existência de um campo gravitacional. (É claro que isso não significa que se deva conhecer o campo gravitacional. Alguns corpos movendo-se em certas trajetórias relativas ao campo não produzem peso, mas o campo está lá.)

O quarto tipo de relação causal é a *dependência causal de uma quantidade variável de outra*. Uma quantidade variável B é causalmente dependente de uma outra quantidade variável A se uma mudança em A produz sempre uma mudança em B. Por exemplo, o brilho visível B de um objeto luminoso varia inversamente com o quadrado da distância a partir daquele objeto; assim B é uma quantidade variável causalmente dependente da distância. O objeto B parecerá mais, ou então menos brilhante se variar sua distância até nós.

Um efeito (tal como o brilho visível) pode estar causalmente relacionado com vários fatores. Se o objeto cujo brilho visível estamos investigando é um gás em chama, então seu brilho visível dependerá da quantidade de combustível e de oxigênio disponível, entre outros fatores.

Para reiterar, os métodos de Mill visam reduzir uma lista de causas suspeitas (de um dos quatro tipos já descritos), para se encontrar uma causa particular para um efeito E. Cada um dos quatro métodos alistados abaixo é apropriado para um tipo de causa:

Método de Mill de:	*Eliminar condições suspeitas de serem*
Concordância	Causas necessárias de E
Diferença	Causas suficientes de E
Concordância e diferença	Causas necessárias e suficientes de E
Variação concomitante	Quantidades nas quais a magnitude de E é causalmente dependente

Reduzindo-se, pelo método apropriado, a lista de causas suspeitas a uma só causa (presumindo que uma causa do tipo que procuramos está incluída na lista), então ela é a causa que se busca. A seguir, examinamos cada um dos quatro métodos.

O método da concordância

O método da concordância de Mill é um processo dedutivo para se eliminar condições suspeitas causalmente necessárias. Lembramos que C é uma condição causalmente necessária para um efeito E, se E não ocorre sem C. Para determinar qual, da lista de condições suspeitas, é de fato causalmente necessária para E, examinamos vários casos de E. Se uma das condições suspeitas deixa de ocorrer em um desses casos, então ela pode ser eliminada pois não é necessária para E. Na verdade esperamos reduzir a lista a um único item.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.14 Suponha que estamos procurando a causa necessária de uma certa moléstia E. Usando nossos conhecimentos e habilidades, formulamos uma lista com cinco agentes viróticos, V_1 a V_5, suspeitos de causarem E. Examinamos alguns pacientes com E e identificamos quais causas suspeitas estavam presentes. Os resultados foram os seguintes:

Casos	**Circunstâncias (causas suspeitas presentes nesse caso)**	**Efeito**
Paciente 1	V_1, V_3, V_4	E
Paciente 2	V_1, V_4, V_5	E
Paciente 3	V_1, V_2	E
Paciente 4	V_1, V_5	E

Solução

Somente uma das cinco causas suspeitas (a saber, V_1) está presente nos quatro pacientes com a moléstia. Isso mostra que nenhuma das causas suspeitas, exceto possivelmente V_1, é causalmente necessária para E.

Como V_2, V_3, V_4 e V_5 são eliminadas, segue-se dedutivamente que:

1) Se a lista de V_1 a V_5 inclui uma causa necessária para E, então V_1 é a causa necessária. Essa é a conclusão fornecida pelo método da concordância de Mill.

Se queremos obter a conclusão incondicional:

2) V_1 é uma causa necessária para E,

então precisamos da seguinte premissa:

3) A lista de V_1 a V_5 inclui uma causa necessária para E.

Em geral, tal premissa não pode ser demonstrada. Na verdade, ela é estabelecida por um raciocínio indutivo do tipo analógico.

No caso em questão, temos:

4) Moléstia E tem características $F_1, F_2,..., F_n$.

5) As conhecidas moléstias similares a E têm características $F_1, F_2,..., F_n$.

6) Vírus são causas necessárias das conhecidas moléstias similares a E.

∴ 7) Algum vírus é uma causa necessária para E. As características F_1, F_2,..., F_n podem ser por exemplo: infecções ou a presença de febre. Para obter, do enunciado 7, o enunciado 3, precisamos adicionar ao enunciado 7 a seguinte premissa:

8) Os únicos vírus presentes nos quatro pacientes que têm E, serão V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5.

Os enunciados 8 e 7 implicam dedutivamente 3, pois (por definição) qualquer causa necessária para E ocorre para todo E. O argumento resume-se no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} \underline{4+5+6} \\ \downarrow \\ \underline{7+8} \\ \downarrow \\ \underline{3+1} \\ \downarrow \\ 2 \end{array}$$

As premissas básicas nos enunciados 4, 5, 6 e 8 foram obtidas por observações ou investigações prévias. O enunciado 1 é a conclusão obtida pelo método da concordância de Mill. A fidedignidade do argumento depende da inferência analógica (a inferência de 4, 5 e 6 para 7) e, portanto, das premissas básicas. A premissa do enunciado 8, por exemplo, poderia ser falsa se ao observarmos os pacientes não formos suficientemente cuidadosos. Esse fato enfraqueceria o argumento, pois a causa real para E deveria ser um vírus que estava presente, mas não detectado nos casos estudados. A suficiência da inferência analógica depende dos fatores discutidos na Seção 8.5. Devemos ser cautelosos com as evidências suprimidas. (E tem alguma característica fora do comum que sugere uma causa não-virótica?) Nem sempre o método da concordância tem uma aplicação simples como a anterior. Suponha que V_1 e V_2 ocorrem, simultaneamente, em todos os casos de E examinados. Isso significa que *ambas* são necessárias para E? Não, isso não se segue. Podemos não ter examinado uma amostra suficientemente grande de pacientes para se eliminar uma delas.

A investigação não terminou. É preciso obter mais informações, dados, fatos, etc.

Além disso, pode acontecer que o método da concordância elimine todas as causas suspeitas da lista. Nesse caso, o enunciado 3 seria falso como também seria 7 ou 8. Isso significaria que a causa necessária não é virótica (como o argumento analógico nos faz suspeitar), ou deixamos de detectar algum outro vírus que estava presente nos pacientes. Se isso ocorreu, precisamos conferir tudo novamente antes de inferirmos uma conclusão.

Em resumo: o método da concordância de Mill é um procedimento dedutivo para provar que certas condições não são causas necessárias para um efeito *E*. Para empregar o método, examinamos vários casos de *E* e determinamos quais, das causas suspeitas, estão presentes em cada caso. A seguir, eliminamos aquelas causas suspeitas que não estão presentes em todos os casos. Idealmente, esse procedimento eliminará todas as causas suspeitas, exceto uma. Se isso acontece, e a lista contém uma causa necessária para *E*, então o item não-eliminado é a causa.

Para concluir, incondicionalmente, que esse item não-eliminado é uma causa necessária, devemos assumir que uma causa necessária está realmente incluída na lista. Isso só pode ser feito por indução.

O método da diferença

Se procuramos uma causa suficiente, em vez de uma causa necessária, então empregamos o método da diferença. Lembramos que uma causa suficiente para um efeito *E* é um evento que sempre produz *E*. Se a causa *C* sempre ocorre sem *E*, então *C* não é suficiente para *E*.

Muitas vezes é útil lidar com causas suficientes relativamente a uma classe restrita de indivíduos. Por exemplo, uma pequena dose de tóxico pode ser suficiente para causar a morte de animais pequenos e crianças, mas não de adultos sadios. Assim, relativa a uma classe de crianças e animais pequenos, o tóxico é uma causa suficiente para a morte, mas relativa a uma classe ampla, que inclui adultos sadios, ele não é. Freqüentemente, as afirmações de suficiência causal são relativas a uma classe particular de indivíduos ou eventos dada implicitamente.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.15 Algumas pessoas comeram num piquenique cinco tipos de alimentos, F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5. Muitas delas ficaram intoxicadas. Assume-se ainda que entre os cinco alimentos há um que produz intoxicação nas pessoas desse grupo. Suponha, agora, que descobrimos dois indivíduos: um que comeu os cinco alimentos e está intoxicado, e outro que comeu todos, exceto F_1, e que não está intoxicado. Se P é o efeito da intoxicação, temos:

Caso	**Circunstâncias (causas suspeitas suficientes)**	**Efeito**
Pessoa 1	F_1, F_2, F_3, F_4, F_5	P
Pessoa 2	F_2, F_3, F_4, F_5	Nenhum

Qual é a causa suficiente para P?

Solução

Como P não ocorre na pessoa 2, na presença de F_2, F_3, F_4 e F_5, então, nenhum desses alimentos é suficiente para P. Admitindo-se que uma causa suficiente para P ocorre entre F_1 e F_5, segue-se que a causa é F_1.

A parte mais fraca desse raciocínio é a suposição de que uma causa suficiente para P ocorre entre F_1 e F_5. Tal como para a premissa analógica na discussão sobre causas necessárias, essa suposição não pode ser provada dedutivamente, mas pode ser sustentada por um argumento indutivo. Aqui devemos argumentar que, em vários casos anteriores de intoxicação, alguma substância presente no alimento foi a causa suficiente para produzir uma intoxicação.

Mais uma vez, é importante salientar como esse tipo de raciocínio indutivo pode levar a erros. Pode acontecer que nenhum dos alimentos seja, por si só, suficiente para *P*, mas a ingestão de F_1 e F_2 juntos causa uma reação química que resulta em toxicidade. Nessas condições, a pessoa 1 estaria intoxicada, mas a pessoa 2, não. A suposição de que a causa suficiente para *P* ocorre entre F_1 e F_5 seria falsa.

Pode acontecer ainda que nenhum de F_1 e F_5 ou qualquer combinação de F_1 a F_5 é suficiente para *P*. Uma toxina pode estar presente, digamos, em F_1, mas o consumo dessa toxina produz *P* somente em indivíduos suscetíveis. Ou seja, F_1 pode ser suficiente para *P* em uma certa pessoa, mas não em todos os membros da população considerada. Neste caso, a suposição de que uma causa suficiente para *P* ocorre entre F_1 e F_5 é falsa. A conclusão de que F_1 é suficiente para *P* não está correta. Esses erros podem ocorrer mesmo que as observações feitas não sejam defeituosas, devido à falibilidade que o raciocínio exigiu para que essa suposição fosse estabelecida. Logo, é preciso ter precaução na aplicação do método da diferença.

O método da diferença de Mill reduz uma lista de causas suspeitas suficientes para um efeito *E*. Isso é feito rejeitando-se qualquer item na lista que ocorre sem *E*. Se há uma causa suficiente para *E* na lista e se conseguimos reduzir essa lista a um só item, então concluímos dedutivamente que essa causa restante é uma causa suficiente. Para estabelecer que a lista contém uma causa suficiente, contamos com uma indução obtida de experiências anteriores.

O método conjunto de concordância e diferença

O método conjunto de concordância e diferença de Mill é um processo que elimina itens da lista de causas suspeitas necessárias e suficientes. Na verdade, este processo é apenas uma aplicação simultânea dos métodos de concordância e diferença.

Se *C* é uma causa necessária e suficiente para *E*, então *C* nunca ocorre sem *E* e *E* nunca ocorre sem *C*. Se num caso *C* ocorre, mas *E* não (ou *E* ocorre, mas *C* não), então *C* (ou *E*) é eliminada, pois ela não é uma causa necessária e suficiente para *E*.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.16 Suponha que uma estudante de um colégio interno observe uma interferência em sua televisão. Ela viu tipos análogos de interferência antes e suspeita que a causa necessária e suficiente (estando a televisão ligada) seja algum aparelho elétrico que esteja funcionando por perto. Assim, ela formula a seguinte lista de causas suspeitas:

C = chuveiro elétrico

S = secador de cabelo

F = ferro de passar

M = máquina de lavar

Ela observa, então, quais aparelhos estão funcionando nos quartos próximos ao seu, enquanto sua televisão está ligada. Os resultados obtidos são os seguintes:

Caso	**Circunstâncias (causas suspeitas, necessárias e suficientes)**	**Efeito**
1	S, F, M	I
2	F, M	I
3	C, S, F, M	I
4	C, S	Nenhum
5	M, C	Nenhum

(I é a interferência.) Qual das causas suspeitas é a causa necessária e suficiente para I?

Solução

A única das causas suspeitas necessárias e suficientes que está presente sempre que I está presente e que está sempre ausente que I está ausente é F. Se uma das causas suspeitas é realmente necessária e suficiente para I, ela é F.

Se a estudante pretende concluir que F é realmente necessária e suficiente para I, então o ponto fraco de seu raciocínio está na suposição de que uma causa necessária e suficiente está incluída na lista de causas suspeitas. Como antes, essa premissa somente se justifica por indução a partir de experiências anteriores com situações análogas.

O método da variação concomitante

O método da variação concomitante de Mill difere dos outros métodos, pois ele não se refere à mera presença ou ausência de uma causa ou efeito, mas sim às suas magnitudes relativas. O método reduz uma lista de magnitudes variáveis, suspeitas de serem responsáveis por uma mudança na magnitude de um efeito E. Uma variável não é responsável por uma certa mudança quando permanece constante durante toda a mudança e, portanto, é rejeitada. Se todas, exceto uma, da lista de variáveis permanecem constantes, enquanto muda a magnitude de um efeito, então, presumindo que a variável responsável pela mudança está na lista, ela é a única que não permanece constante.

PROBLEMA RESOLVIDO

8.17 Uma planta de estufa mostra um inesperado crescimento. Suspeitamos que as variáveis relevantes para esse crescimento sejam as seguintes:

S = luz do Sol

A = água

F = fertilizante

T = temperatura

Observamos que só uma dessas variáveis, a saber, a quantidade de água recebida pela planta sofreu alteração. Essa observação é esquematizada do seguinte modo:

Caso	Circunstâncias (variáveis que suspeitamos serem relevantes para C)	Efeito
1	S, F, T, A	C
2	$S, F, T, A+$	$C+$

C é a taxa de crescimento, e o sinal '+' significa o aumento da magnitude. A ausência deste sinal indica que não houve mudança. Qual das variáveis na lista é causalmente relevante para a mudança observada na taxa de crescimento da planta?

Solução

Como a quantidade de água recebida pela planta é a única variável da lista que mudou, então ela é a responsável pela mudança observada na taxa de crescimento.

Para averiguar essa conclusão, podemos voltar a fornecer água para a planta. Suponha que encontremos o seguinte:

3	$S, F, T, A-$	$C-$

onde o sinal '-' indica diminuição da magnitude. Com isso, confiamos ainda mais na conclusão de que a quantidade de água é a variável responsável pelas mudanças observadas na taxa de crescimento.

O método da variação concomitante não elimina a possibilidade de mudanças em S, F ou T também afetarem C. O método mostra que essas três variáveis não foram responsáveis pela mudança observada. Se uma variável da lista é responsável, ela é A.

Tal como com os três métodos anteriores, o processo de se eliminar S, F e T como causas possíveis para o efeito observado é dedutivo. De experiências anteriores com plantas obtemos, por indução, a premissa que uma das quatro variáveis na a lista causou a mudança em C.

O caso 3 dá uma confiança maior nessa premissa. Pela indução, ou seja, repetir instâncias que relacionam A e C, a probabilidade de que A e C variam simultaneamente, acentua-se. Se estamos completamente seguros de que a variável responsável pela mudança é uma das quatro da lista, essa confirmação adicional é supérflua. Assim, os casos 1 e 2 são suficientes para estabelecer que a variável responsável é A.

8.7 Teorias científicas

As formas mais sofisticadas de raciocínio indutivo ocorrem na justificação ou confirmação de teorias científicas. Uma teoria científica é uma explicação de algum fenômeno natural, que unida a fatos conhecidos ou conjecturas (chamadas *hipóteses auxiliares*), nos possibilita deduzir conseqüências que podem ser experimentadas pela observação. Muitas vezes, uma teoria é representada por um *modelo*, uma estrutura física ou matemática análoga, em algum aspecto, ao fenômeno explicado pela teoria.

EXEMPLO 8.10 Antes do século XX, haviam duas teorias sobre o fenômeno da luz — a teoria corpuscular e a teoria ondulatória. De acordo com a teoria corpuscular (cujo defensor mais notável foi Isaac Newton), a luz consiste em partículas minúsculas (ou corpúsculos) emitidas por objetos luminosos em trajetórias contínuas. De acordo com a teoria ondulatória (proposta inicialmente pelo astrônomo alemão Christian Huygens), a luz consiste em ondas esféricas que se propagam de objetos luminosos, tal como a ondulação circular produzida por uma pedra lançada na água. Pela teoria ondulatória, ondas de luz se propagam através de uma substância fluida, o éter, que permeia o universo.

As duas teorias deram uma explicação ao fenômeno da cor e as diversas propriedades refletivas e refrativas da luz. No final do século XIX, a teoria ondulatória triunfou devido a justificada que deu para os efeitos da difração — amostras de luz e faixa escura formada quando a luz passa através de uma pequena abertura. Essas amostras são confirmadas pela teoria ondulatória, porém são difíceis de ser explicadas pela teoria corpuscular.

Cada teoria modelou a luz como uma estrutura física — partículas movendo-se, para uma, e ondas num meio fluido, para a outra. Entretanto, elas foram sucedidas, no século XX, pela teoria quântica. Essa teoria modela a luz como sendo uma estrutura matemática que tem algumas características de ondas e partículas, mas não é inteiramente análoga a qualquer estrutura física familiar.

Teorias científicas primariamente se justificam devido ao sucesso obtido quando suas predições se revelam verdadeiras. Por 'predição' entendemos um enunciado sobre os resultados de certos testes ou observações, e não necessariamente um enunciado sobre o futuro. Teorias similares do passado fizeram predições nesse sentido. Essas teorias (junto com hipóteses auxiliares adequadas) deduzem que alguns testes ou observações terão resultados corretos. Uma teoria sobre a evolução do dinossauro, por exemplo, deduz os tipos de fósseis que se espera encontrar em certas camadas geológicas. Essas deduções estão entre suas predições. Como as predições de uma teoria são *deduzidas* da teoria e de suas hipóteses auxiliares, então, se uma delas revelar-se falsa, a teoria ou pelo menos uma de suas hipóteses auxiliares deverá ser falsa. (Não se pode deduzir uma conclusão falsa a partir de um conjunto de premissas verdadeiras.) Se temos segurança na veracidade de todas as hipóteses auxiliares, então devemos rejeitar a parte da teoria usada para derivar a predição. A teoria corpuscular da luz, junto com a hipótese auxiliar sobre o modo como partículas pequenas devem se portar, deduz que a difração não ocorre. Como ela ocorre, físicos do século XIX, seguros dessa hipótese auxiliar, rejeitaram a teoria corpuscular.

Nesse exemplo, um processo dedutivo foi usado para refutar uma teoria científica. Mas, nem sempre os teóricos estão seguros da veracidade das hipóteses auxiliares; assim há controvérsia na legitimidade da dedução utilizada para rejeitar a teoria. Se, pelo menos uma das hipóteses auxiliares é falsa, então a falsidade de uma predição não acarreta a falsidade da teoria. As teorias científicas são refutadas por raciocínios dedutivos e são confirmadas por raciocínios indutivos. A teoria ondulatória (munida de hipóteses auxiliares plausíveis sobre orientação e amplitude das ondas) prediz efeitos de difração. Quando esses efeitos foram observados, a teoria ondulatória adquiriu mais segurança. Assim, a teoria corpuscular foi se enfraquecendo.

Entretanto, a confirmação de uma predição (ou mesmo de muitas predições) de uma teoria não prova dedutivamente que a teoria é verdadeira. As teorias, munidas de suas hipóteses auxiliares, deduzem muito mais predições do que realmente se pode experimentar. Ainda que todas as predições experimentadas seriam verdadeiras, alguma predição não experimentada poderá ser falsa. Isso implicaria a falsidade da teoria, se é que as hipóteses auxiliares são verdadeiras. Assim, de um ponto de vista lógico, a segurança em uma teoria científica não é absoluta. Apesar disso, muitos afirmam que quanto mais as predições deduzidas por uma teoria se verificam, mais a teoria se torna *provável*. Esse princípio é formulado do seguinte modo:

> (P): Se E é uma coleção de evidência inicial (incluindo hipóteses auxiliares) e C é a verificação adicional de alguma predição da teoria, então a probabilidade da teoria dada E & C é mais alta do que a probabilidade da teoria dada somente E.

O princípio (P) parece ser o princípio subjacente às induções que confirmam as teorias científicas. Mas isso não é verdadeiro, e não é provável, como uma lei da lógica ou uma teoria de probabilidade. Além do mais, algumas instâncias de (P) são falsas, o que sugere a necessidade de se impor algumas restrições.

Para ilustrar esse ponto, considere a situação, com relação às teorias da luz, na época em que uma consideração séria dos fenômenos de difração foi pela primeira vez em meados do século XIX. O que aconteceu historicamente foi que a teoria corpuscular foi rejeitada e a teoria ondulatória foi aceita. Contudo, alguém poderia explicar a difração; mantendo a teoria corpuscular e mais a hipótese de que uma força desconhecida atua nos corpúsculos de luz quando eles passam por pequenas aberturas, separando-os em níveis distintos e originando assim os efeitos observados.

Outra alternativa seria questionar se os fenômenos de difração são apenas uma ilusão devida às peculiaridades de nossos olhos. Ou, ainda, seria rejeitar as duas, as teorias ondulatória e corpuscular, e questionar se a luz é, por exemplo, filamentos ou fios emitidos a partir de objetos luminosos. Tal consideração pode tornar-se compatível com as propriedades conhecidas da luz ao se adotar hipóteses auxiliares suficientemente ingênuas. Essas alternativas podem ser criadas *ad infinitum.*

Cada uma dessas teorias, se adicionadas de hipóteses auxiliares adequadas, prediz o fenômeno de difração, bem como as outras propriedades da luz conhecidas no século XIX. Mas então a observação de diframação torna cada uma dessas teorias mais provável, tal como sugere o uso irrestrito de (*P*)? Isso parece duvidoso. Na prática, somente a teoria ondulatória foi confirmada ou dada como a mais provável. As teorias mencionadas no parágrafo precedente não foram seriamente consideradas. O motivo é que as hipóteses auxiliares por elas requeridas (tal como a hipótese de que uma força desconhecida afeta os corpúsculos de luz quando passam por aberturas pequenas) não se justificavam, por si sós. Elas não eram independentes da teoria. Hipóteses auxiliares que não se justificam por si só e que são adotadas somente para acomodar os fatos de uma teoria são chamados hipóteses *ad hoc.*

Na prática, o princípio (*P*) aplica-se preferencialmente às teorias que não requerem hipóteses *ad hoc.* A teoria ondulatória previu difração por meio de hipóteses auxiliares que pareciam perfeitamente naturais. As demais teorias rivais eram extremamente complexas ou então requeriam hipóteses auxiliares complexas e *ad hoc.* Apesar de outras teorias terem sido elaboradas para deduzir as mesmas predições, somente a teoria ondulatória foi considerada como substancialmente confirmada pela observação da difração. (Devemos notar que a teoria ondulatória foi sucedida pela teoria quântica, principalmente por causa da descoberta de novos fenômenos que não podiam ser previstos pela teoria ondulatória, a menos que eles estivessem vinculados com hipóteses *ad hoc.*)

O princípio (P) aplica-se preferencialmente em teorias que não requerem hipóteses *ad hoc*, e ainda (como sugerido pelo exemplo acima) em teorias simples. Isso é, mantendo o resto, as teorias simples são consideradas como mais altamente confirmadas pela verificação de suas predições do que as teorias complexas. Várias restrições em (P) têm sido propostas, mas geralmente elas são polêmicas e não serão discutidas aqui.

Problemas suplementares

I. Coloque os enunciados em ordem do mais forte para o mais fraco:

1) *a*) Ferro é um metal.

b) Ou ferro é um metal ou cobre é um metal.

c) Ou ferro é um metal, ou cobre é um metal ou zinco é um metal.

d) Não é verdade que ferro não é um metal.

e) Ferro, zinco e cobre são metais.

f) Alguma coisa é um metal.

g) Algumas coisas são metais e não são metais.

h) Ou ferro é um metal ou ele não é um metal.

i) Ferro e zinco são metais.

2) *a*) Muitos americanos estão empregados.

b) Existem americanos e todos eles estão empregados.

c) Alguns americanos estão empregados.

d) Pelo menos 90% dos americanos estão empregados.

e) Pelo menos 80% dos americanos estão empregados.

f) Alguém está empregado.

3) a) Quase 51% das crianças recém-nascidas são meninos.

b) Exatamente 51% das crianças recém-nascidas são meninos.

c) Algumas crianças recém-nascidas são meninos.

d) Não é verdade que todas as crianças recém-nascidas não são meninos.

e) Algo entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de todas as crianças recém-nascidas são meninos.

4) *a*) Leonardo foi um grande cientista, inventor e artista que viveu durante a Renascença.

b) Leonardo não viveu durante a Renascença.

c) Leonardo viveu durante a Renascença.

d) Leonardo foi um artista renascentista.

e) Leonardo não foi um artista renascentista.

f) Leonardo não foi um artista e cientista renascentista.

II. Coloque as formas de argumento em ordem de probabilidade indutiva da mais alta para a mais baixa:

1) *a*) 60% de F observados são G.
x é F.
$\therefore x$ é G.

b) 20% de F é G.
x é F.
$\therefore x$ é G.

c) 60% de F é G.
x é F.
$\therefore x$ é G.

2) *a*) Todos os dez F observados são G.
$\therefore$ Todos os F são G.

b) Todos os dez F observados são G.
$\therefore$ Se mais três F forem observados, eles serão G.

c) Todos os dez F observados são G.
$\therefore$ Se mais dois F forem observados, eles serão G.

d) Todos os dez F observados são G.
$\therefore$ Se mais dois F forem observados, pelo menos um deles será G.

e) Todos F são G.
$\therefore$ Se um F for observado, ele será G.

3) *a*) 8 de 10 médicos que interrogamos receitam o produto X.
$\therefore$ Quase 80% de todos os médicos receitam o produto X.

b) 80 de 100 médicos que interrogamos receitam o produto X.
$\therefore$ Quase 80% de todos os médicos receitam o produto X.

c) 80 de 100 médicos selecionados ao acaso receitam o produto X.
$\therefore$ Quase 80% de todos os médicos receitam o produto X.

d) Meu médico receita o produto X.
$\therefore$ Todos os médicos receitam o produto X.

e) Meu médico receita o produto X.
$\therefore$ Algum(ns) médico(s) receita(m) o produto X.

f) Todos os 10 médicos que interrogamos receitam o produto X.
$\therefore$ Todos os médicos receitam o produto X.

4) *a*) Os objetos a, b, c e d têm todos as propriedades F e G.
Os objetos a, b, c e d têm todos a propriedade H.
O objeto e tem as propriedades F e G.
$\therefore$ O objeto e tem a propriedade H.

b) Os objetos a, b, c e d têm todos as propriedades F, G e H.
Os objetos a, b, c e d têm todos a propriedade I.
O objeto e tem as propriedades F, G e H.
$\therefore$ O objeto e tem a propriedade I.

c) O objeto a tem a propriedade F.
O objeto a tem a propriedade G.
O objeto b tem a propriedade F.
$\therefore$ O objeto b tem a propriedade G.

d) O objeto a tem a propriedade F.
$\therefore$ O objeto b tem a propriedade F.

e) O objeto a tem as propriedades F e G.
O objeto a tem a propriedade H.
O objeto b tem as propriedades F e G.
$\therefore$ O objeto b tem a propriedade H.

f) O objeto a tem a propriedade F.
$\therefore$ Os objetos b e c têm a propriedade F.

5) *a*) Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade F.
$\therefore$ Todos os objetos têm a propriedade F.

b) Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade F.
$\therefore$ Os objetos f e g têm a propriedade F.

c) Os objetos a, b e c têm a propriedade F.
∴ Todos os objetos têm a propriedade F.

d) Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade F.
Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade G.
Os objetos f e g têm a propriedade F.
∴ Os objetos f e g têm a propriedade G.

e) Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade F.
Os objetos a, b, c, d e e têm a propriedade G.
Os objetos f e g têm a propriedade F.
∴ O objeto f tem a propriedade G.

III. Os seguintes problemas consistem em uma lista de observações. Em cada um, responda às seguintes perguntas: As observações são compatíveis com a suposição de que exatamente uma causa do tipo indicado (necessária, suficiente, etc.) está entre as causas suspeitas? Se sim, as observações nos possibilitam identificá-la usando os métodos de Mill? Se elas identificam, qual é a causa e qual o método que o identifica?

1)

Caso	**Circunstâncias (causas suspeitas necessárias para *E*)**	**Efeito**
a)	F, G, H, I	E
b)	F, G, I	E
c)	G, H, I	*E*
d)	F, H, I	*E*

2)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas necessárias para E)	Efeito
a)	F, G, H	E
b)	G, H	E
c)	H, I	E

3)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas necessárias para E)	Efeito
a)	F, G	E
b)	G, H	E
c)	H, I	E

4)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas suficientes para E)	Efeito
a)	F, G, H	E
b)	F, G	E
c)	G, H	E
d)	F, H	Nenhum

5)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas suficientes para *E*)	Efeito
a)	*F*, *G*, *H*	*E*
b)	*F*	E
c)	*H*	Nenhum

6)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas, necessárias e suficientes para *E*)	Efeito
a)	*F*, *G*	*E*
b)	*G*, *H*	E
c)	*G*, *H*, *I*	*E*
d)	*I*	Nenhum

7)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas, necessárias e suficientes para *E*)	Efeito
a)	*F*, *G*, *H*	*E*
b)	*G*, *H*	E
c)	*F*, *G*	E
d)	*F*, *G*, *H*, *I*	Nenhum

8)

Caso	Circunstâncias (causas suspeitas, necessárias e suficientes para *E*)	Efeito
a)	*F*, *G*, *H*	*E*
b)	*F*, *G*	E
c)	*H*, *I*	Nenhum
d)	*H*	Nenhum

9)

Caso	Circunstâncias (variáveis suspeitas para serem relevantes para *E*)	Efeito
a)	*F*, *G*, *H*	*E*
b)	*F*, *G* +, *H* +	E +
c)	*F*, *G*, *H* +	*E* +
d)	*F* –, *G*, *H*	*E*

10)

Caso	Circunstâncias (variáveis suspeitas para serem relevantes para *E*)	Efeito
a)	*F* +, *G* +, *H*	*E* +
b)	*F* –, *G*, *H* –	E –
c)	*F*, *G* +, *H* +, *E*	

Respostas a alguns problemas suplementares

I.

1) (*g*), (*e*), (*i*), (*a*) e (*d*), (*b*), (*c*), (*f*), (*h*), ((*a*) e (*d*) têm forças iguais)

4) (*a*), (*d*), (*c*), (*b*), (*e*), (*f*)

II.

2) (*e*), (*d*), (*c*), (*b*), (*a*)

4) (*b*), (*a*), (*e*), (*c*), (*d*), (*f*)

III.

3) Nenhuma das causas suspeitas é necessária para *E* (método da concordância).

6) *G* é a única das causas suspeitas que pode ser necessária e suficiente para *E* (método conjunto da concordância e diferença).

9) *H* é a única das variáveis suspeitas que depende de *E* (método da variação concomitante).

Capítulo 9

O CÁLCULO DE PROBABILIDADES

9.1 Introdução

O Capítulo 4 mostrou como as tabelas-verdade são usadas para calcular os valores-verdade de enunciados complexos a partir dos valores-verdade de seus componentes atômicos e determinar a validade ou invalidade das formas de argumento. Seria útil ter algo análogo para o raciocínio indutivo: um método que nos permitisse calcular probabilidade de enunciados complexos a partir das probabilidades dos mais simples e, assim, determinar as probabilidades indutivas de argumentos. Infelizmente, tal método não existe. Nem sempre podemos calcular a probabilidade de um enunciado ou a probabilidade indutiva de um argumento a partir das probabilidades dos componentes atômicos.

Porém pode se estabelecer generalizações sobre as relações probabilísticas entre os enunciados. Apesar dessas generalizações não nos fornecerem um método geral para calcular probabilidades indutivas, elas evidenciam muitos aspectos sobre a natureza da probabilidade e nos permitem solucionar alguns problemas práticos. A mais importante dessas generalizações é o sistema lógico conhecido como *cálculo de probabilidades*.

O cálculo de probabilidades é um conjunto de regras formais governando expressões da forma '$P(A)$', que significa "a probabilidade de A". Essas expressões denotam números. Podemos escrever, por exemplo, '$P(A) = \frac{1}{2}$', para indicar que a probabilidade de A é $\frac{1}{2}$. A expressão 'A' pode representar tipos diferentes de objetos — conjuntos, eventos, apostas, proposições, etc. — dependendo da aplicação específica. Para aplicações do cálculo de probabilidades à lógica, 'A' denota um enunciado ou proposição e, algumas vezes, um evento.

9.2 Relações lógicas entre proposições ou eventos

As proposições podem ser combinadas ou modificadas pelas operações funcional-veritativas da lógica proposicional. Temos expressões tais como:

$P(\sim A)$	(A probabilidade da negação de A)
$P(A \,\&\, B)$	(A probabilidade da conjunção de A e B)
$P(A \vee \sim B)$	(A probabilidade da disjunção de A com a negação de B)

Para o cálculo de probabilidades algumas relações lógicas entre proposições são importantes. Duas proposições se dizem *mutuamente exclusivas* se elas não podem ser simultaneamente verdadeiras.

EXEMPLO 9.1 Proposições da forma $A \,\&\, B$ e $A \,\&\, \sim B$ são mutuamente exclusivas, como a seguinte tabela-verdade indica:

A	B	$A \& B$	$A \& {\sim}B$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

A tabela-verdade exibe todas as situações possíveis e nela não há linha em que $A \& B$ e $A \& {\sim}B$, são simultaneamente verdadeiras.

Evidentemente, se dentre duas proposições uma é autocontraditória, então elas são mutuamente exclusivas.

Por outro lado, existem proposições que são mutuamente exclusivas mas não por razões funcional-veritativas; ou seja, elas podem simultaneamente mostrar um V na mesma linha da tabela-verdade e ainda assim serem mutuamente exclusivos.

EXEMPLO 9.2 Seja 'A_1' denotando a proposição que um dado comum mostrará *um* no seu lançamento e 'A_2', a proposição que ele mostrará *dois* no seu lançamento. A_1 e A_2 são mutuamente exclusivas, apesar de sua tabela-verdade não mostrar isso:

A_1	A_2	A_1	A_2
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	F

A primeira linha da tabela (a linha em que A_1 e A_2 são ambas verdadeiras) representa um caso impossível. Esse caso é impossível, não por motivos funcional-veritativos, mas por causa da natureza do dado.

Outra relação importante entre proposições é a *equivalência funcional-veritativa.* Duas proposições são equivalentes funcional-veritativas se e somente se suas tabelas-verdade forem idênticas.

EXEMPLO 9.3 Proposições da forma $\sim(A \ \& \ B)$ e $\sim A \vee \sim B$ são equivalentes funcional-veritativas, como a seguinte tabela-verdade mostra:

A	B	$\sim(A \ \& \ B)$	$\sim A \vee \sim B$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Uma outra relação importante entre proposições é a *conseqüência funcional-veritativa*. Conseqüência funcional-veritativa é a validade detectada pelas tabelas-verdade. Em outras palavras, uma proposição A é uma conseqüência funcional-veritativa da proposição B se não existe linha comum em sua tabela-verdade em que B é verdadeira e A é falsa. Vimos muitos exemplos dessa relação na Seção 4.3.

As relações entre as proposições discutidas nesta seção podem também ser vistas como relações entre os eventos. Proposições e eventos são formalmente similares, exceto que, as proposições se dizem verdadeiras ou falsas, os eventos são ditos que ocorrem ou não ocorrem.

9.3 Probabilidade

O operador 'P' pode ser interpretado de diversas maneiras. Sob a *interpretação subjetiva*, '$P(A)$' significa o grau de crença que uma pessoa tem na proposição A durante um certo tempo. O grau de crença é aferido através do comportamento da pessoa, no qual se manifesta a vontade dela ao aceitar as apostas sob a veracidade de A.

Sob as várias *interpretações lógicas*, '$P(A)$' designa a probabilidade *lógica* ou *a priori* de A. Existem várias noções de probabilidade lógica, mas em todas elas $P(A)$ varia inversamente com o conteúdo informativo de A. Se A é uma proposição fraca cujo conteúdo informativo é pequeno, então $P(A)$ tende a ser alta, e se A é uma proposição forte cujo conteúdo informativo é grande, então $P(A)$ tende a ser baixa. (Compare com a Seção 8.1.)

Sob a *interpretação de freqüência relativa*, considera-se A como sendo um evento e $P(A)$ a freqüência da ocorrência de A relativa a algumas classes de eventos de uma dada referência. Essa interpretação de probabilidade é comum na matemática e estatística.

O conceito mais antigo de probabilidade é o da a *interpretação clássica*. Tal como a interpretação de freqüência relativa, a interpretação clássica considera o objeto A como sendo um evento. Sob a interpretação clássica, probabilidades são definidas somente quando uma situação tem um número finito, não-nulo, de resultados possíveis identicamente prováveis, como, no lançamento de um dado não-viciado. O número de resultados prováveis é 6, um para cada face do dado. A probabilidade de A é definida como sendo a razão entre o número de resultados possíveis em que A ocorre e o número total de resultados possíveis:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados possíveis em que A ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

EXEMPLO 9.4 Considere a situação em que um dado não-viciado é lançado uma vez. Existem seis resultados possíveis:

A_1 = O dado mostra *um*.

A_2 = O dado mostra *dois*.

A_3 = O dado mostra *três*.

A_4 = O dado mostra *quatro*.

A_5 = O dado mostra *cinco*.

A_6 = O dado mostra *seis*.

Pela definição clássica, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$. Podemos, também, considerar casos em que os eventos são complexos funcional-veritativos. Por exemplo, a probabilidade de sair um número par é $P(A_2 \vee A_4 \vee A_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.[1] A probabilidade de não sair *três* é $P(\sim A_3) = \frac{5}{6}$. A probabilidade de sair *três* ou não sair *três* é $P(A_3 \vee \sim A_3) = \frac{6}{6} = 1$. A probabilidade de sair *dois* e *três* é $P(A_2 \,\&\, A_3) = 0$ (pois o dado é lançado somente uma vez).

9.4 Axiomas do cálculo de probabilidades

O cálculo de probabilidades consiste em três axiomas (princípios básicos) e suas conseqüências dedutivas. Esses axiomas são chamados axiomas de Kolmogorov, em virtude de seu inventor, o matemático russo do século XX A. N. Kolmogorov:

AX1	$P(A) \geq 0$.
AX2	Se A é tautologia, $P(A) = 1$.
AX3	Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$.

onde '*A*' e '*B*' são simples ou complexos funcional-veritativos (atômico ou molecular).

Ilustraremos e explicaremos esses axiomas sob a interpretação clássica, apesar deles possuirem também outras interpretações.

1. Por causa da lei associativa da lógica proposicional (isto é, a equivalência ASSOC), a colocação de parênteses não é crucial, quando três ou mais proposições são unidas somente pela disjunção ou somente pela conjunção. Portanto, costuma-se omitir os parênteses em tais casos.

AX1 afirma que o limite mais baixo de valores para a probabilidade é zero. Em outras palavras, zero é a probabilidade de coisas impossíveis. AX1 é verdadeiro sob a interpretação clássica, pois nem o numerador nem o denominador da razão, que define a probabilidade clássica, podem ser negativos. (Além do mais, o denominador nunca é zero, embora o numerador possa ser.)

Certamente as tautologias devem ter a mais alta probabilidade possível, pois elas são sempre verdadeiras. Assim, AX2 estabelece que 1 é a probabilidade máxima. Isso também está de acordo com a definição clássica, pois o numerador dessa definição nunca excede o denominador.

AX3 dá a probabilidade de uma disjunção como sendo a soma das probabilidades de seus disjunctos, contanto que esses disjunctos sejam mutuamente exclusivos. Podemos ver que AX3 segue-se da definição clássica de probabilidade, pois um evento disjuntivo ocorre em um só caso ou ocorre em ambos de seus disjunctos. Se os disjunctos são mutuamente exclusivos, então em nenhum resultado possível poderá ocorrer os dois simultaneamente e, portanto, o número de resultados possíveis em que a disjunção $A \vee B$ ocorre é a soma do número dos resultados possíveis em que A ocorre e o número de resultados possíveis em que B ocorre. Assim, se A e B são mutuamente exclusivos,

$$
\begin{aligned}
P(A \vee B) &= \frac{\text{número de resultados possíveis em que } A \vee B \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}} \\
&= \frac{\text{número de resultados possíveis em que } A \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}} + \\
&+ \frac{\text{número de resultados possíveis em que } B \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}} \\
&= P(A) + P(B)
\end{aligned}
$$

9.5 Teoremas do cálculo de probabilidades

Vamos provar alguns teoremas — isto é, conseqüências dedutivas dos axiomas. Esses teoremas serão as bases para as aplicações práticas do cálculo de probabilidades, além de reforçar nosso entendimento da própria probabilidade. Suas provas utilizam as leis da lógica proposicional (Capítulos 3 e 4) e um pouco de aritmética elementar. Para ver isso, as provas serão apresentadas de maneira informal. O primeiro teorema mostra como obter a probabilidade da negação de A, dada a probabilidade de A, e vice-versa:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.1 Prove:

$P(\sim A) = 1 - P(A)$

Solução

Como $A \vee \sim A$ é tautologia, por AX2 temos $P(A \vee \sim A) = 1$. Como A e $\sim A$ são mutuamente exclusivos, por AX3, $P(A \vee \sim A) = P(A) + P(\sim A)$. Daí, $1 = P(A) + P(\sim A)$ e, assim, $P(\sim A) = 1 - P(A)$.

Uma proposição é *autocontraditória* se e somente se sua negação é uma tautologia. Proposições autocontraditórias têm probabilidade zero.

9.2 Prove:

Se A é autocontraditória, $P(A) = 0$.

Solução

Se A é autocontraditória, então $\sim A$ é uma tautologia; daí, por AX2, $P(\sim A) = 1$. Logo, pelo Problema 9.1, $P(A) = 0$.

O próximo teorema delimita os extremos inferiores e superiores para a probabilidade.

9.3 Prove:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Solução

Por AX1 sabemos que $P(A) \geq 0$ e que $P(\sim A) \geq 0$. Pelo problema 9.1, $P(\sim A) = 1 - P(A)$, e assim $1 - P(A) \geq 0$, isto é, $P(A) \leq 1$.

O próximo resultado é importante, pois nos permite substituir nas probabilidades, as fórmulas por outras expressões que sejam equivalentes funcional-veritativas.

9.4 Prove:

Se A e B são equivalentes funcional-veritativas, então $P(A) = P(B)$.

Solução

Se A e B são equivalentes funcional-veritativas, então, A e B têm os mesmos valores-verdade. Daí A e $\sim B$ têm sempre valores-verdade opostos; assim A e $\sim B$ são mutuamente exclusivos. Daí, por AX3, $P(A \vee \sim B) = P(A) + P(\sim B)$. Além do mais, $A \vee \sim B$ é uma tautologia e, assim, por AX2, $P(A \vee \sim B) = 1$. Logo, $P(A) + P(\sim B) = 1$. Pelo problema 9.1, $P(A) + 1 - P(B) = 1$, donde se segue que $P(A) = P(B)$.

A seguir estabelecemos a regra geral para calcular a probabilidade de uma disjunção. Essa regra, que será provada no problema 9.5, afirma que a probabilidade de uma disjunção (independentemente de os disjunctos serem ou não mutuamente exclusivos) é a soma das probabilidades dos disjunctos, menos a probabilidade de sua conjunção. Em particular, quando os disjunctos são mutuamente exclusivos, a probabilidade de sua conjunção é zero e assim o enunciado do problema 9.5 se reduz a AX3.

Inicialmente, vejamos um exemplo intuitivo. Considere a probabilidade de sair um número par ou um número menor que 5 num único lançamento de um dado não-viciado. Seja '*E*' denotando que o dado mostra um número par e '*L*' que o dado mostra um número menor que 5. Então, usando a notação do exemplo 9.4, temos:

$$P(E) = P(A_2 \vee A_4 \vee A_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(L) = P(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Queremos achar $P(E \vee L)$. Observe que se somarmos $\frac{1}{2}$ com $\frac{2}{3}$, obteremos o valor impossível $\frac{7}{6}$. Certamente, essa maneira de calcular $P(E \vee L)$ está incorreta. O erro ocorre porque contamos duas vezes A_2 e A_4, enquanto na verdade eles deveriam ser contados somente uma vez. $E \vee L$ ocorre em somente cinco dos seis resultados possíveis de lançamento, mas se contamos A_2 e A_4 duas vezes, obtemos um total de sete resultados, o que é absurdo, pois somente seis são possíveis. Para evitar essa dupla contagem, subtraímos a probabilidade de *E* e *L*, da soma da probabilidade de *E* e da probabilidade de *L*. Assim, o resultado correto é $\frac{5}{6}$. Isto é:

$$
\begin{aligned}
P(E \vee L) &= P(E) + P(L) - P(E \,\&\, L) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

O problema 9.5 generaliza essa idéia. A prova segue analisando $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \vee B)$ em probabilidades complexas equivalentes, a fim de demonstrar a necessidade de se subtrair $P(A \,\&\, B)$ de $P(A) + P(B)$, para compensar a dupla contagem de $P(A \,\&\, B)$. O exemplo dado acima elucida a prova.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.5 Prove:

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \,\&\, B)$$

Solução

Inicialmente notemos os seguintes fatos, os quais podem ser verificados através de tabelas-verdade:

a) A é equivalente funcional-veritativa a $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, \sim B)$.

b) B é equivalente funcional-veritativa a $(A \,\&\, B) \vee (\sim A \,\&\, B)$.

c) $A \vee B$ é equivalente funcional-veritativa a $((A \,\&\, \sim B) \vee (\sim A \,\&\, B)) \vee (A \,\&\, B)$.

d) $A \,\&\, B$ e $A \,\&\, \sim B$ são mutuamente exclusivos.

e) $A \,\&\, B$ e $\sim A \,\&\, B$ são mutuamente exclusivos.

f) $(A \,\&\, \sim B) \vee (\sim A \,\&\, B)$ e $A \,\&\, B$ são mutuamente exclusivos.

g) $A \& \sim B$ e $\sim A \& B$ são mutuamente exclusivos.

Pelo item (*a*) e problema 9.4, $P(A) = P((A \& B) \vee (A \& \sim B))$; daí, pelo item (*d*) e AX3, segue-se que:

h) $P(A)= P(A \& B) + P(A \& \sim B)$.

Analogamente, pelo item (*b*) e problema 9.4, $P(B) = P((A \& B) \vee (\sim A \& B))$; daí, pelo item (*e*) e AX3, obtemos:

i) $P(B) = P(A \& B) + P(\sim A \& B)$.

Pelo item (*c*) e problema 9.4, segue-se que $P(A \vee B) = P(((A \& \sim B) \vee (\sim A \& B)) \vee (A \& B))$; donde, pelo item (*f*) e AX3, obtemos $P(A \vee B) = P((A \& \sim B) \vee (\sim A \& B)) + P(A \& B)$. Então, pelo item (*g*) e AX3, vemos que:

j) $P(A \vee B) = P(A \& \sim B) + P(\sim A \& B) + P(A \& B)$.

Somando-se as equações (*h*) e (*i*) temos:

k) $P(A)+P(B) = P(A \& \sim B) + P(\sim A \& B) + 2P(A \& B)$.

Isso mostra que se somarmos $P(A)$ e $P(B)$, onde A e B não são mutuamente exclusivos (isto é, onde $P(A \& B) > 0$), então $P(A \& B)$ será contada duas vezes. Mas o item (*j*) afirma que o valor correto de $P(A \vee B)$ é obtido por contar $P(A \& B)$ uma só vez. Assim, subtraindo o item (*k*) do item (*j*), obtemos:

l) $P(A \vee B) - (P(A) + P(B)) = - P(A \& B)$.

Adicionando $P(A) + P(B)$ em ambos os lados dessa equação, temos:

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \& B).$$

Provaremos, a seguir, alguns teoremas relacionados com conjunção e disjunção.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.6 Prove:

$$P(A \,\&\, B) \leq P(A) \quad \text{e} \quad P(A \,\&\, B) \leq P(B)$$

Solução

Pelo item (*h*) do problema 9.5, $P(A) = P(A \,\&\, B) + P(A \,\&\, {\sim}B)$. Por AX1, $P(A \,\&\, {\sim}B) \geq 0$. Adicionando essa quantidade não-negativa a $P(A \,\&\, B)$ obtemos $P(A)$. Isso significa que $P(A \,\&\, B) \leq P(A)$. A prova do segundo conjuncto é análoga, exceto que é utilizado o item (*i*) do problema 9.5.

9.7 Prove:

$$P(A \vee B) \geq P(A) \quad \text{e} \quad P(A \vee B) \geq P(B)$$

Solução

Pelo problema 9.5, $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \,\&\, B)$. E, pelo problema 9.6, $P(B) - P(A \,\&\, B) \geq 0$. Daí, $P(A \vee B) \geq P(A)$. A prova do segundo disjuncto é similar.

9.8 Prove:

Se $P(A) = P(B) = 0$, então $P(A \vee B) = 0$.

Solução

Suponha que $P(A) = P(B) = 0$. Pelo problema 9.6 e AX1, $P(A \,\&\, B) = 0$. Daí, pelo problema 9.5, $P(A \vee B) = 0$.

9.9 Prove:

Se $P(A) = 1$, então $P(A \,\&\, B) = P(B)$.

Solução

Suponha que $P(A) = 1$. Pelo problema 9.7, $P(A \vee B) \geq P(A)$ e, pelo problema 9.3, $P(A \vee B) \leq 1$. Logo, $P(A \vee B) = 1$. Além do mais, pelo problema 9.5, $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \,\&\, B)$; assim, $1 = 1 + P(B) - P(A \,\&\, B)$; isto é, $P(A \,\&\, B) = P(B)$.

Lembre-se de que A é uma conseqüência funcional-veritativa de B se e somente se não existe linha comum na tabela-verdade em que B é verdadeira e A é falsa.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.10 Prove:

Se A é uma conseqüência funcional-veritativa de B, então $P(A \,\&\, B) = P(B)$.

Solução

Seja A uma conseqüência funcional-veritativa de B. Então, $A \,\&\, B$ é equivalente funcional-veritativa a B, pois $A \,\&\, B$ é verdadeira numa linha da tabela-verdade em que B é verdadeira e é falsa na linha da tabela-verdade em que B é falsa. Assim, pelo problema 9.4, $P(A \,\&\, B) = P(B)$.

9.6 Probabilidade condicional

Probabilidade condicional é a probabilidade de uma proposição (ou evento), sabendo-se que uma outra é verdadeira (ou tem ocorrido). Expressa-se essa probabilidade pela notação '$P(A \mid B)$' que significa "a probabilidade de A, dada B". Tal notação não deve ser confundida com a probabilidade de um enunciado condicional, $P(B \rightarrow A)$, a qual representa papel secundário na teoria da probabilidade. (A diferença entre $P(A \mid B)$ e $P(B \rightarrow A)$ será vista no problema 9.28.) Observe que a notação para probabilidades condicionais lista primeiro o conseqüente e depois o antecedente, o que não acontece para enunciados condicionais. Essa convenção é usual, embora outras sejam empregadas.

A probabilidade condicional é introduzida no cálculo de probabilidades pela seguinte definição:

$$\text{D1:} \quad P(A \mid B) =_{\text{df}} \frac{P(A \,\&\, B)}{P(B)}$$

O símbolo '$=_{\text{df}}$' significa "é por definição". A expressão '$P(A \mid B)$' deve ser vista como uma abreviação da expressão mais complexa, do lado direito de D1.

Facilmente se entende o significado dessa definição sob a interpretação clássica. Pela definição clássica de probabilidade, temos:

$$P(A \mid B) = \frac{\dfrac{\text{número de resultados possíveis em que } A \,\&\, B \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}}}{\dfrac{\text{número de resultados possíveis em que } B \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis}}}$$

$$= \frac{\text{número de resultados possíveis em que } A \,\&\, B \text{ ocorre}}{\text{número total de resultados possíveis em que } B \text{ ocorre}}$$

Assim, pela interpretação clássica, $P(A|\,B)$ é a razão entre os resultados possíveis em que A e B ocorrem e os resultados possíveis em que B ocorre.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.11 Um dado é lançado uma vez. Seja 'E' significando que o resultado do lançamento é um número par e 'L' que é um número menor que 5. O que é $P(E\,|\,L)$?

Solução

Por D1, temos que

$$P(E\,|\,L) = \frac{P(E\ \&\ L)}{P(L)}$$

Dos seis resultados possíveis, E & L é verdadeira em dois e L é verdadeira em quatro. Daí,

$$P(E\,|\,L) = \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Para a lógica as probabilidades condicionais são fundamentais. Probabilidade indutiva (Seção 2.3) é a probabilidade da conclusão de um argumento, dada a conjunção de suas premissas; portanto, é um tipo de probabilidade condicional. Compreendemos melhor esse tipo de probabilidade não sob a interpretação clássica, mas sim sob as interpretações subjetiva ou lógica, cujos detalhes técnicos estão além do âmbito deste livro.

Note que se $P(B) = 0$, então $P(A\,|\,B)$ não tem valor, pois a divisão por zero não está definida. Em geral, teoremas que utilizam a notação '$P(A|\,B)$' verificam-se somente quando $P(B) > 0$. Como é incômodo repetir comitantemente essa restrição no enunciado dos teoremas ela ficará subentendida.

A partir de D1, derivamos alguns teoremas sobre probabilidades condicionais:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.12 Prove:

$$P(A \mid A) = 1$$

Solução

Por D1, $P(A \mid A) = P(A \;\&\; A)/P(A)$. Mas $A \;\&\; A$ é equivalente funcional-veritativa a A. Logo, pelo Problema 9.4,

$$\frac{P(A \;\&\; A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

9.13 Prove:

$$P({\sim}A \mid A) = 0$$

Solução

Por D1, $P({\sim} A \mid A) = P({\sim} A \;\&\; A)/P(A)$. Mas ${\sim}A \;\&\; A$ é autocontraditória e, assim, pelo problema 9.2, $P({\sim}A \;\&\; A) = 0$.

9.14 Prove:

Se B é tautologia, $P(A \mid B) = P(A)$.

Solução

Se B é tautologia, e então, por AX2, $P(B) = 1$. Mas, $A \& B$ é equivalente funcional-veritativa a A; assim, pelo problema 9.4, $P(A \& B) = P(A)$. Daí, por D1,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \& B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1} = P(A).$$

O problema 9.4 estabelece que fórmulas equivalentes funcional-veritativas podem ser substituídas nas probabilidades.

Os próximos dois teoremas estabelecem esse mesmo resultado para probabilidade condicional.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.15 Prove:

Se A e B são equivalentes funcional-veritativas, então $P(A \mid C) = P(B \mid C)$.

Solução

Suponha que A e B são equivalentes funcional-veritativas. Então também o são $A \& C$ e $B \& C$. Daí, pelo problema 9.4, $P(A \& C) = P(B \& C)$. Mas, então, por D1,

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \& C)}{P(C)} = \frac{P(B \& C)}{P(C)} = P(B \mid C)$$

9.16 Prove:

Se A e B são equivalentes funcional-veritativas, então $P(C \mid A) = P(C \mid B)$.

Solução

Suponha que A e B são equivalentes funcional-veritativas. Então pelo problema 9.4, $P(A) = P(B)$. Com raciocínio análogo ao do problema 9.15, $P(C \,\&\, A) = P(C \,\&\, B)$. Daí, por D1,

$$P(C \mid A) = \frac{P(C \,\&\, A)}{P(A)} = \frac{P(C \,\&\, B)}{P(B)} = P(C \mid B)$$

O próximo resultado nos dá uma maneira de calcular a probabilidade de conjunções.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.17 Prove:

$$P(A \,\&\, B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Solução

Por D1 temos $P(B \mid A) = \frac{P(B \,\&\, A)}{P(A)}$. Como B & A é equivalente funcional-veritativa a A & B, pelo problema 9.4, temos: $P(B \mid A) = \frac{P(B \,\&\, A)}{P(A)}$. Multiplicando-se ambos os lados dessa equação, por $P(A)$, segue-se o teorema.

A ordem dos conjunctos não tem importância lógica. Assim, temos o seguinte teorema:

PROBLEMA RESOLVIDO

9.18 Prove:

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Solução

Pelo problema 9.17, $P(A \mathbin{\&} B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ e $P(B \mathbin{\&} A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$. Como, $A \mathbin{\&} B$ é equivalente funcional-veritativa a $B \mathbin{\&} A$, temos, pelo problema 9.4, $P(A \mathbin{\&} B) = P(B \mathbin{\&} A)$, o que prova o teorema.

Os problemas 9.17 e 9.18 estabelecem duas maneiras de calcular a probabilidade de uma conjunção. Para qualquer conjunção $A \mathbin{\&} B$, $P(A \mathbin{\&} B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.

Quando $P(A \mid B) = P(A)$, isto é, $P(A)$ não se altera pela ocorrência, ou não, de B, dizemos que A é *independente* de B.

EXEMPLO 9.5 Se A é o evento de se obter *um* no primeiro lançamento de um único dado e B é o evento de se obter *um* no segundo lançamento, então A é independente de B, pois $P(A) = P(A \mid B) = \frac{1}{6}$. (Acreditar que os lançamentos dos dados não são independentes é uma versão da falácia do jogador — ver Seção 7.5.)

EXEMPLO 9.6 Se A é o evento de você viver mais dez anos e B é o evento de você contrair a raiva, então $P(A) > P(A \mid B)$. Logo, A não é independente de B. (Note que é difícil dar sentido para essas probabilidades sob a interpretação clássica, pois não há conjunto de resultados igualmente prováveis que interesse a alguém. Essas probabilidades são melhores entendidas sob as interpretações já mencionadas.)

O conceito de independência é peculiar para o cálculo de probabilidades. Esse conceito não pode ser caracterizado como funcional-veritativo, tal como podem, por exemplo, tautologia e equivalência funcional-veritativa. O próximo teorema estabelece que A é independente de B se e somente se B é independente de A; ou seja, independência é uma relação *simétrica.*

PROBLEMA RESOLVIDO

9.19 Prove:

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ se e somente se } P(B \mid A) = P(B).$$

Solução

Por D1, $P(A \mid B) = P(A)$ se e somente se, $P(A) = \dfrac{P(A \,\&\, B)}{P(B)}$.

Multiplicando-se ambos os lados dessa equação por $\dfrac{P(B)}{P(A)}$, obtemos $P(B) = \dfrac{P(A \,\&\, B)}{P(A)}$, que é verdadeira se e somente se $P(B) = \dfrac{P(B \,\&\, A)}{P(A)}$ (pois $A \,\&\, B$ é equivalente funcional-veritativo a $B \,\&\, A$).

Logo, por D1, $P(B) = P(B \mid A)$.

Em virtude da independência ser uma relação simétrica em vez de se dizer "A é independente de B" ou "B é independente de A", dizemos simplesmente que "A e B são independentes". Independência é importante, pois, se A e B são independentes, então o cálculo de $P(A \,\&\, B)$ é simples. Isso é mostrado no seguinte teorema:

PROBLEMA RESOLVIDO

9.20 Prove:

Se A e B são independentes, então $P(A \,\&\, B) = P(A) \cdot P(B)$.

Solução

Segue-se do problema 9.17 e da definição de independência.

O próximo resultado devido a Thomas Bayes (1702-1761), um dos fundadores da teoria da probabilidade desempenha um papel importante nessa teoria. O teorema de Bayes nos permite calcular probabilidades condicionais, dadas as probabilidades condicionais contrárias e probabilidades não-condicionais. Esse teorema tem numerosas aplicações. Vamos inicialmente enunciá-lo numa versão simplificada (problema 9.21) e posteriormente numa forma mais geral (problema 9.23).

PROBLEMA RESOLVIDO

9.21 Prove:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

Solução

Segue-se do problema 9.18.

Essa versão do teorema nos permite calcular $P(A \mid B)$ quando se conhece a probabilidade condicional contrária $P(B \mid A)$ e as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$.

Para estabelecer a versão geral do teorema de Bayes, são necessários dois conceitos: o conceito de seqüência de proposições, ou eventos, exaustiva, e o conceito de seqüência mutuamente exclusiva dois a dois. Uma seqüência de proposições, ou eventos, A_1, A_2, ..., A_n é exaustiva se $P(A_1 \vee ... \vee A_n) = 1$.

EXEMPLO 9.7 A seqüência A_1, A_2, ..., A_6 representando os seis resultados possíveis lançamento de um dado é exaustiva, sob a interpretação clássica.

EXEMPLO 9.8 Toda seqüência da forma A & B, A & ~B, ~A & B, ~A & ~B é exaustiva, pois a disjunção dessas quatro formas é uma tautologia.

O conceito de seqüência mutuamente exclusiva dois a dois é na verdade uma extensão da noção de exclusividade mútua de pares de proposições ou eventos. Uma seqüência de proposições ou eventos A_1, ..., A_n é mutuamente exclusiva dois a dois se para cada par A_i, A_j de seus membros, $P(A_i \,\&\, A_j) = 0$.

EXEMPLO 9.9 A seqüência exaustiva mencionada no exemplo 9.7 é mutuamente exclusiva dois a dois, pois somente um resultado pode ser obtido de um único lançamento. Também o é a seqüência exaustiva do exemplo 9.8, por motivo funcional-veritativo; em nenhuma linha da tabela-verdade, quaisquer dois desses enunciados são ambos verdadeiros.

Um fato importante sobre seqüência mutuamente exclusiva dois a dois e também exaustiva é:

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.22 Prove:

Se A_1, ..., A_n é uma seqüência mutuamente exclusiva dois a dois e é exaustiva, então $P(B) = P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B) + ... + P(A_n \,\&\, B)$.

Solução

Seja $A_1, \ldots A_n$ uma seqüência mutuamente exclusiva dois a dois e também exaustiva. Então, $P(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) = 1$. Assim, pelo problema 9.9,

a) $P((A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \,\&\, B) = P(B)$.

Como podemos ver por aplicação repetida da lei distributiva da lógica proposicional, $(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \,\&\, B$ é equivalente funcional-veritativa a $(A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee \ldots. \vee (A_n \,\&\, B)$. Assim, aplicando o problema 9.4 para o item (*a*), temos:

b) $P(B) = P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee \ldots \vee (A_n \,\&\, B))$.

Além do mais;

c) A seqüência $(A_1 \,\&\, B), (A_2 \,\&\, B), \ldots, (A_n \,\&\, B)$ é mutuamente exclusiva.

Considerando-se dois membros quaisquer dessa seqüência, $(A_i \,\&\, B)$ e $(A_j \,\&\, B)$ e como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é mutuamente exclusiva, temos que $P(A_i \,\&\, A_j) = 0$. Daí, pelo problema 9.6 e AX1, $P(A_i \,\&\, A_j \,\&\, B) = 0$. Logo, pelo problema 9.4, $P((A_i \,\&\, B) \,\&\, (A_j \,\&\, B)) = 0$.

Do item (*c*), segue-se que para todo i tal que $1 \leq i < n$,

d) $P(((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee \ldots \vee (A_i \,\&\, B)) \,\&\, (A_{i+1} \,\&\, B)) = 0$.

Novamente, por aplicações repetidas da lei distributiva, $((A_1 \,\&\, B) \vee \ldots \vee (A_i \,\&\, B)) \,\&\, (A_{i+1} \,\&\, B)$ é equivalente funcional-veritativa a $((A_1 \,\&\, B) \,\&\, (A_{i+1} \,\&\, B)) \vee ((A_2 \,\&\, B) \,\&\, (A_{i+1} \,\&\, B)) \vee \ldots \vee ((A_i \,\&\, B) \,\&\, (A_{i+1} \,\&\, B))$. Porém, pelo item (*c*), a probabilidade de cada um dos disjunctos dessa última fórmula é zero. Por aplicação repetida do problema 9.8, qualquer disjunção cujos disjunctos têm todos probabilidade zero tem probabilidade zero. Logo, o item (*d*) segue-se pelo problema 9.4.

Assim, o teorema segue-se de (*b*) por repetidas aplicações da fórmula (*d*) e do problema 9.5. No caso em que $n = 3$ a fórmula (*b*) é:

b') $P(B) = P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee (A_3 \,\&\, B))$

e temos ainda as duas instâncias da fórmula (*d*):

d') $P(((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B)) \,\&\, (A_3 \,\&\, B)) = 0.$

d") $P((A_1 \,\&\, B) \,\&\, (A_2 \,\&\, B)) = 0.$

Do problema 9.5, obtemos:

e) $P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee (A_3 \,\&\, B))$
$= P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B)) + P(A_3 \,\&\, B) - P(((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B))$
$\&\, (A_3 \,\&\, B))$

que se reduz, por (*d'*), a:

f) $P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee (A_3 \,\&\, B))$
$= P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B)) + P(A_3 \,\&\, B)$

Novamente, pelo problema 9.5:

g) $P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B))$
$= P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B) - P((A_1 \,\&\, B) \,\&\, (A_2 \,\&\, B))$

que se reduz, por (*d*"), a:

h) $P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B)) = P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B)$

Combinando (*f*) com (*h*), temos:

i) $P((A_1 \,\&\, B) \vee (A_2 \,\&\, B) \vee (A_3 \,\&\, B))$
$= P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B) + P(A_3 \,\&\, B)$

que, por (*b'*), nos dá:

$P(B) = P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B) + P(A_3 \,\&\, B)$

o que prova o teorema, para $n = 3$. (O raciocínio para outros valores de n é análogo.)

Usando o resultado do problema 9.22, podemos estabelecer a versão geral do teorema de Bayes:

PROBLEMA RESOLVIDO

9.23 Prove:

Se A_1, A_2, ..., A_n é uma seqüência mutuamente exclusiva dois a dois e é exaustiva e A_i é um elemento dessa seqüência, então

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Solução

Suponhamos que $A_1, A_2, ..., A_n$ é mutuamente exclusiva dois a dois e é exaustiva. Pelo problema 9.21, sabemos que

a) $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$

e pelo problema 9.22, temos que:

b) $P(B) = P(A_1 \,\&\, B) + P(A_2 \,\&\, B) + \ldots + P(A_n \,\&\, B)$

Aplicando o problema 9.21 para a fórmula (*b*), obtemos:

c) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot\ P(B \mid A_2) + \ldots P(A_n \cdot P(B \mid A_n)$

Substituindo-se (*c*) em (*a*), prova-se o teorema.

A versão geral do teorema de Bayes é expressa na seguinte notação:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}$$

Essa notação é uma abreviação da equação do problema 9.23.

Uma aplicação do teorema de Bayes é calcular a probabilidade de uma hipótese A_i, da seqüência $A_1, A_2, ..., A_n$, dada uma observação B, isto é, $P(A_i \mid B)$.

Para o cálculo, precisamos da probabilidade da observação, dadas as hipóteses — ou seja, $P(B \mid A_j)$ para todo j, $1 \leq j \leq n$ —, e da probabilidade de cada uma das hipóteses, $P(A_j)$ para todo j. Estas últimas probabilidades chamam-se *probabilidades prévias* ou, simplesmente *prévias*.[2] Geralmente, elas são difíceis ou mesmo impossíveis de se determinar. Pode-se mostrar que, como as observações vão se acumulando, então as probabilidades prévias exercem menos influência no resultado. Esse fenômeno é conhecido como "afundando as prévias" e permite uma aplicação do teorema de Bayes, ainda que as prévias sejam conhecidas superficialmente.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.24 Três máquinas de certa fábrica produzem cintos de um mesmo tipo. $\frac{3}{10}$ dos cintos produzidos pela máquina 1 são defeituosos, $\frac{2}{10}$ dos cintos produzidos pela máquina 2 são defeituosos,

---

2. A noção de probabilidade prévia não deve ser confundida com probabilidade lógica ou *a priori*, mencionadas anteriormente. Probabilidades prévias são obtidas através de estimativas subjetivas (tal como no problema 9.24) a partir das freqüências relativas da ocorrência. Probabilidades *a priori* estão baseadas na informação que contêm os enunciados e não na freqüência de eventos reais ou estimados.

e $\frac{1}{10}$ dos cintos produzidos pela máquina 3 são defeituosos. A máquina 1 produz $\frac{4}{10}$ da produção da fábrica, a máquina 2 produz $\frac{3}{10}$, e a máquina 3 produz $\frac{3}{10}$. Ana adquiriu um cinto defeituoso da fábrica. Qual é a probabilidade de que o cinto tenha sido produzido pela máquina 1, visto que ele é defeituoso?

Solução

A observação B é que o cinto de Ana é defeituoso. Ela pode ser justificada por três hipóteses mutuamente exclusivas dois a dois e exaustivas:

A_1 = o cinto de Ana foi produzido pela máquina 1.

A_2 = o cinto de Ana foi produzido pela máquina 2.

A_3 = o cinto de Ana foi produzido pela máquina 3.

Considerando a probabilidade de B, dada cada uma dessas hipóteses, como a proporção de cintos defeituosos produzidos pelas máquinas, respectivamente, temos:

$$P(B \mid A_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(B \mid A_2) = \frac{2}{10}$$

$$P(B \mid A_3) = \frac{1}{10}$$

As probabilidades prévias são as proporções da produção da fábrica para cada máquina:

$$P(A_1) = \frac{4}{10}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{10}$$

$$P(A_3) = \frac{3}{10}$$

Pelo teorema de Bayes,

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}$$

$$= \frac{4/10 \cdot 3/10}{(4/10 \cdot 3/10) + (3/10 \cdot 2/10) + (3/10 \cdot 1/10)}$$

$$= \frac{12}{21}$$

que é a solução do problema.

Os problemas 9.25, 9.26 e 9.27 estabelecem relações entre negações, disjunções e conjunções como primeiros termos da probabilidade condicional. Eles são os condicionais dos problemas 9.1, 9.5 e 9.17, respectivamente.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.25 Prove:

$$P(\sim A \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

Solução

Por D1,

$$P((A \vee {\sim}A) \mid B) = \frac{P((A \vee {\sim}A) \mathbin{\&} B)}{P(B)}$$

Mas $(A \vee {\sim}A) \mathbin{\&} B$ é equivalente funcional-veritativo a B. Daí, pelo problema 9.4, $P((A \vee {\sim}A) \mathbin{\&} B) = P(B)$; assim, $P((A \vee {\sim}A) \mathbin{\&} B)$ $= \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. Além disso, $(A \vee {\sim}A) \mathbin{\&} B$ é equivalente funcional-veritativo a $(A \mathbin{\&} B) \vee ({\sim}A \mathbin{\&} B)$ e, portanto, pelo problema 9.4,

$$P((A \vee {\sim}A) \mid B) = \frac{P((A \mathbin{\&} B) \vee ({\sim}A \mathbin{\&} B))}{P(B)} = 1$$

Como $A \mathbin{\&} B$ e ${\sim}A \mathbin{\&} B$ são mutuamente exclusivos, então, por AX3,

$$\frac{P(A \mathbin{\&} B) + P({\sim}A \mathbin{\&} B)}{P(B)} = \frac{P(A \mathbin{\&} B)}{P(B)} + \frac{P({\sim}A \mathbin{\&} B)}{P(B)} = 1$$

Logo, por D1, $P(A \mid B) + P({\sim}A \mid B) = 1$; isto é, $P({\sim}A \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.

Como observamos anteriormente, a probabilidade indutiva de um argumento é um tipo de probabilidade condicional (a probabilidade da conclusão dada a conjunção das premissas). O problema 9.25 estabelece um resultado importante de que a probabilidade de ${\sim}A$, dado um conjunto de premissas, é: 1 menos a probabilidade de A, dadas essas premissas. (E, reciprocamente, a probabilidade de A, dado um conjunto de premissas, é: 1 menos a probabilidade de ${\sim}A$, dadas essas premissas.) A observação feita na Seção 2.3 fica clara agora; qualquer argumento cuja probabilidade indutiva é menor que 0,5 é fraco, pois a probabilidade da negação de sua conclusão, dadas as mesmas premissas é, maior que 0,5.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.26 Prove:

$$P((A \vee B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P((A \,\&\, B) \mid C)$$

Solução

Por D1,

$$P((A \vee B) \mid C) = \frac{P((A \vee B) \,\&\, C)}{P(C)}$$

Como $(A \vee B) \,\&\, C$ é equivalente funcional-veritativo a $(A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C)$, temos, pelo problema 9.4,

$$P((A \vee B) \mid C) = \frac{P((A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C))}{P(C)}$$

Pelo problema 9.5, isso é igual a

$$\frac{P(A \,\&\, C) + P(B \,\&\, C) - P((A \,\&\, C) \,\&\, (B \,\&\, C))}{P(C)}$$

e como $(A \,\&\, C) \,\&\, (B \,\&\, C)$ é equivalente funcional-veritativo a $(A \,\&\, B) \,\&\, C$; pelo problema 9.4 isso se torna igual a

$$\frac{P(A \,\&\, C)}{P(C)} + \frac{P(B \,\&\, C)}{P(C)} - \frac{P((A \,\&\, B) \,\&\, C)}{P(C)}$$

isto é, por D1, $P(A \mid C) + P(B \mid C) - P((A \,\&\, B) \mid C)$.

9.27 Prove:

$$P((A \,\&\, B) \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid (A \,\&\, C))$$

Solução

Por D1,

$$P((A \,\&\, B) \mid C) = \frac{P((A \,\&\, B) \,\&\, C)}{P(C)}$$

que, pelo problema 9.4, é igual a $\frac{P((A \,\&\, C) \,\&\, B)}{P(C)}$. Pelo problema 9.16, isso se torna:

$$\frac{P(A \,\&\, C) \cdot P(B \mid (A \,\&\, C))}{P(C)}$$

que se reduz, por D1, a $P(A \mid C) \cdot P(B \mid (A \,\&\, C))$.

Concluímos esta seção com um teorema que indica a relação entre probabilidade condicional e probabilidade do condicional material.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.28 Prove:

$$P(A \to B) = P(\sim A) + P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Solução

$A \rightarrow B$ é equivalente funcional-veritativa a $\sim(A \,\&\, \sim B)$; assim, pelo problema 9.4:

$$P(A \rightarrow B) = P(\sim(A \,\&\, \sim B))$$

Mas, pelo problema 9.1, $P(\sim(A \,\&\, \sim B)) = 1 - P(A \,\&\, \sim B)$ e como, pelo problema 9.17, $P(A \,\&\, \sim B) = P(A) \cdot P(\sim B \mid A)$, temos:

$$P(A \rightarrow B) = 1 - (P(A) \cdot P(\sim B \mid A))$$

Pelo problema 9.25, $P(\sim B \mid A) = 1 - P(B \mid A)$; daí,

$$P(A \rightarrow B) = 1 - (P(A) \cdot (1 - P(B \mid A)))$$

ou seja:

$$P(A \rightarrow B) = 1 - (P(A) - P(A) \cdot P(B \mid A))$$

isto é,

$$P(A \rightarrow B) = 1 - P(A) + P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Mas, pelo problema 9.1, $1 - P(A) = P(\sim A)$; e, assim,

$$P(A \rightarrow B) = P(\sim A) + P(A) \cdot P(B \mid A)$$

o que era para ser provado.

Esse teorema mostra que, se $P(A) = 1$ (e portanto $P(\sim A) = 0$), $P(A \rightarrow B) = P(B \mid A)$. Mas se $P(A) \neq 1$, a probabilidade condicional não é igual à probabilidade do condicional material. Fica clara, agora, a distinção entre essas probabilidades, observada no começo desta seção.

9.7 Aplicação do cálculo de probabilidades

Nesta seção aplicaremos o cálculo de probabilidades, interpretado classicamente, a alguns problemas. O conjunto inicial de problemas envolve o lançamento de um par de dados. Quando dois dados, não-viciados, são lançados, existem 36 resultados igualmente prováveis, como especificado abaixo (o primeiro número de cada par indica o resultado para o primeiro dado e o segundo número indica o resultado para o segundo):

1 - 1	2 - 1	3 - 1	4 - 1	5 - 1	6 - 1
1 - 2	2 - 2	3 - 2	4 - 2	5 - 2	6 - 2
1 - 3	2 - 3	3 - 3	4 - 3	5 - 3	6 - 3
1 - 4	2 - 4	3 - 4	4 - 4	5 - 4	6 - 4
1 - 5	2 - 5	3 - 5	4 - 5	5 - 5	6 - 5
1 - 6	2 - 6	3 - 6	4 - 6	5 - 6	6 - 6

Consideremos os seguintes eventos:

A_1 = um no dado 1	A_7 = um no dado 2
A_2 = dois no dado 1	A_8 = dois no dado 2
A_3 = três no dado 1	A_9 = três no dado 2
A_4 = quatro no dado 1	A_{10} = quatro no dado 2
A_5 = cinco no dado 1	A_{11} = cinco no dado 2
A_6 = seis no dado 1	A_{12} = seis no dado 2

Com a definição clássica de probabilidade e com o cálculo de probabilidades, podemos calcular as probabilidades desses eventos e suas combinações funcional-veritativas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.29 Qual é a probabilidade de A_1?

Solução

A_1 ocorre em 6 dos 36 resultados possíveis. Portanto, pela definição clássica de probabilidade, $P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Claramente, a probabilidade de $A_2, \ldots, A_{12}$ é também $\frac{1}{6}$.

9.30 Calcule $P(\sim A_1)$.

Solução

Pelo problema 9.1, sabemos que $P(\sim A_1) = 1 - P(A_1)$. Mas $P(A_1) = \frac{1}{6}$, pelo problema 9.29. Daí,

$$P(\sim A_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

9.31 Calcule $P(A_1 \,\&\, A_7)$.

Solução

Calculamos diretamente através da definição clássica, ou indiretamente pelo cálculo de probabilidades. $A_1 \,\&\, A_7$ ocorre em um só dos 36 resultados prováveis. Daí, pela definição clássica $P(A_1 \,\&\, A_7) = \frac{1}{36}$.

Para usar o cálculo de probabilidades, suponhamos que A_1 e A_7 sejam independentes. Se essa suposição for correta (ou seja, que os dados foram lançados honestamente; por exemplo, não admitindo que ambos mostrem a mesma face e nem que se dê um piparote num deles, para que mostrassem a mesma face depois de lançados), então $P(A_1 | A_7) = (A_1)$ e $P(A_7 | A_1) = P(A_7)$. Portanto, pelo problema 9.17, $P(A_1 \,\&\, A_7) = P(A_1) \cdot P(A_7) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Observe que este resultado é o mesmo que obtivemos anteriormente.

O problema 9.31 mostra que as probabilidades podem ser calculadas de várias maneiras (diretamente, pela definição clássica, e indiretamente, via cálculo de probabilidades). Para evitar erros de cálculo, podemos empregar um método e constatar o resultado obtido pelo outro método.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.32 Calcule $P(A_1 \vee A_7)$.

Solução

Para resolver esse problema pelo cálculo de probabilidades, recorremos ao problema 9.5:

$$P(A_1 \vee A_7) = P(A_1) + P(A_7) - P(A_1 \,\&\, A_7)$$

Pelo problema 9.29, $P(A_1) = P(A_7) = \frac{1}{6}$ e, pelo problema 9.31, $P(A_1 \,\&\, A_7) = \frac{1}{36}$. Daí, $P(A_1 \vee A_7) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

$A_1 \vee A_7$ ocorre em 11 resultados possíveis (são os resultados dados pela primeira coluna da esquerda e pela primeira linha horizontal de nossa tabela dos 36 resultados). Assim, pela definição clássica obtemos $P(A_1 \vee A_7) = \frac{11}{36}$.

Os próximos problemas envolvem as probabilidades de se distribuir, ao acaso, certas combinações de cartas de um baralho com 52 cartas. (Uma distribuição ao acaso é quando a distribuição de qualquer carta que permanece no baralho é igualmente provável; essa condição é necessária para a interpretação clássica.)

Se só uma carta é distribuída, então existem 52 resultados possíveis; um para cada carta do baralho. Se duas cartas são distribuídas, o número de resultados possíveis é $52 \cdot 51 = 2652$. (Existem 52 possibilidades para a primeira carta e 51 para a segunda, pois, após a distribuição da primeira carta, restam somente 51 cartas no baralho.) O número de resultados possíveis para se distribuir de n cartas é $52 \cdot 51 \ldots (52 - (n-1))$.

Adotamos as seguintes abreviações:

J = valete	K = rei	C = copas	O = ouro
Q = dama	A = ás	E = espadas	P = paus

Usamos subescritos numéricos para indicar a ordem das cartas distribuídas. Assim 'A_1' significa "A primeira carta distribuída é ás", 'O_3' significa "A terceira carta distribuída é ouro", e assim por diante.

PROBLEMA RESOLVIDO

9.33 Uma carta é distribuída. Qual é a probabilidade de ter sido dama ou copas?

Solução

Procuramos $P(Q_1 \vee C_1)$ que, pelo problema 9.5, é $P(Q_1) + P(C_1) - P(Q_1 \& C_1)$. Das 52 cartas, 4 são damas, 13 são copas, e 1 é uma dama de copas. Assim, obtemos

$$\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Quando duas ou mais cartas são distribuídas, pode-se determinar a probabilidade de uma carta ser de um certo tipo, admitindo que outras cartas foram distribuídas anteriormente. Tais probabilidades condicionais podem ser calculadas por D1, contudo é mais fácil obtê-las diretamente considerando-se a composição da distribuição.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

9.34 Duas cartas são distribuídas. Qual é a probabilidade de a segunda ser ás, visto que a primeira carta foi ás?

Solução

Queremos achar $P(A_2 | A_1)$. Distribuída A_1, permanecem no baralho 51 cartas, das quais três são ases. Daí, $P(A_2 | A_1) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. Por outro lado utilizando-se D1, temos $P(A_2 | A_1) = P(A_2 \& A_1)/P(A_1)$ e $P(A_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Para calcular $P(A_2 \& A_1)$, consideramos todos os 2652 resultados possíveis na distribuição de duas cartas. Desses, somente 12 especificados a seguir ('*AC*' significa "ás de copas", '*AE*' significa "ás de espadas", e assim por diante.) dão $A_2 \& A_1$.

Primeira carta	Segunda carta	Primeira carta	Segunda carta
AC	*AE*	*AO*	*AC*
AC	*AO*	*AO*	*AE*
AC	*AP*	*AO*	*AP*
AE	*AC*	*AP*	*AC*
AE	*AO*	*AP*	*AE*
AE	*AP*	*AP*	*AO*

Assim,

$$\frac{P(A_1 \,\&\, A_2)}{P(A_1)} = \frac{12/2652}{1/13} = \frac{1}{17}$$

Evidentemente, o primeiro cálculo é mais simples.

As probabilidades condicionais, obtidas pelo primeiro cálculo, no problema 9.34, facilitam o cálculo de outras probabilidades.

9.35 Duas cartas são distribuídas. Qual é a probabilidade de ambas serem ases?

Solução

A probabilidade desejada é $P(A_1 \,\&\, A_2)$, que, pelo problema 9.17, é $P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$. Como vimos no problema 9.34, $P(A_1) = \dfrac{1}{13}$ e

$P(A_2 | A_1) = \frac{1}{17}$. Daí, $P(A_1 \& A_2) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$. Esse mesmo resultado pode ser obtido pelo problema 9.34, ou seja, $P(A_2 \& A_1) = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$.

9.36 Cinco cartas são distribuídas. Qual é a probabilidade de um *flush*, isto é, cinco cartas de um mesmo naipe?

Solução

Queremos calcular $P((C_1 \& C_2 \& C_3 \& C_4 \& C_5) \vee (E_1 \& E_2 \& E_3 \& E_4 \& E_5) \vee (O_1 \& O_2 \& O_3 \& O_4 \& O_5) \vee (P_1 \& P_2 \& P_3 \& P_4 \& P_5))$. É claro que esses quatro disjunctos são mutuamente exclusivos. Além disso, cada um deles é mutuamente exclusivo com qualquer disjunção dos outros. Assim, pelo problema 9.5, a probabilidade desejada é a soma das probabilidades desses quatro disjunctos. Vamos calcular $P(C_1 \& C_2 \& C_3 \& C_4 \& C_5)$; as probabilidades dos outros disjunctos serão iguais. Para obter a resposta, basta multiplicar por 4 o resultado obtido.

Aplicando, quatro vezes, o problema 9.17 temos $P(C_1 \& C_2 \& C_3 \& C_4 \& C_5) = P(C_1) \cdot P(C_2 | C_1) \cdot P(C_3 | C_1 \& C_2) \cdot P(C_4 | C_1 \& C_2 \& C_3) \cdot P(C_5 | C_1 \& C_2 \& C_3 \& C_4)$. Usando o primeiro método do problema 9.34, vem $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = 0{,}0004952$. Multiplicando por 4 obtemos a probabilidade de um *flush*: 0,0019808.

9.37 Num jogo de *vinte-um*, foram distribuídos um rei e um oito, de um baralho de 52 cartas. Se você pedir uma terceira carta, qual é a probabilidade de você receber um ás, um dois, ou um três e com isso não passar de 21?

Solução

Seja 'E' denotando que a carta é um *oito*, 'D' para um *dois*, 'T' para um *três*. A probabilidade procurada é $P(A_3 \vee D_3 \vee T_3 \mid E_1 \,\&\, K_2)$ ou $P(A_3 \vee D_3 \vee T_3 \mid K_1 \,\&\, E_2)$.

Elas são iguais pois a ordem em que o rei e o oito foram distribuídos não é relevante. Logo, basta calcularmos uma delas.

Observemos que A_3 e $D_3 \vee T_3$ são mutuamente exclusivos, como são também D_3 e T_3. Daí, por duas aplicações do problema suplementar I (12) (a seguir), $P(A_3 \vee D_3 \vee T_3 \mid K_1 \,\&\, E_2) = P(A_3 \mid K_1 \,\&\, E_2) + P(D_3 \mid K_1 \,\&\, E_2) + P(T_3 \mid K_1 \,\&\, E_2)$. Distribuídas K_1 & E_2, o baralho fica com 50 cartas, sendo que quatro são ases, quatro são dois, quatro são três. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{4}{50} + \frac{4}{50} + \frac{4}{50} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

Problemas suplementares

I. Prove os seguintes teoremas usando os axiomas e teoremas provados anteriormente. (Lembre-se de que todos os teoremas contendo expressões da forma '$P(A \mid B)$' valem somente quando $P(B) > 0$.)

1) Se $P(A) = 0$, então $P(A \vee B) = P(B)$.

2) $P(A \vee B) = P(A) + P(\sim A \,\&\, B)$.

3) Se A e B são mutuamente exclusivas, então $P(A \,\&\, B) = 0$.

4) Se $\sim A$ e $\sim B$ são mutuamente exclusivas, então $P(A \,\&\, B) = P(A) + P(B) - 1$.

5) Se $P(A) = P(B) = 1$, então $P(A \,\&\, B) = 1$.

6) Se A é conseqüência funcional-veritativa de B, então $P(A \vee B) = P(A)$.

7) Se A é conseqüência funcional-veritativa de B, então $P(A) \leq P(B)$.

8) $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$.

9) $P(A \mid B) = 0$ se, e somente se $P(B \mid A) = 0$.

10) Se A é tautologia, $P(A \mid B) = 1$.

11) Se A é autocontraditória, $P(A \mid B) = 0$.

12) Se A e B são mutuamente exclusivas, $P((A \vee B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$.

13) Se A é conseqüência funcional-veritativa de B, então $P(A \mid B) = 1$.

14) Se B é conseqüência funcional-veritativa de C, então $P((A \,\&\, B) \mid C) = P(A \mid C)$.

15) Se A é conseqüência funcional-veritativa de $B \,\&\, C$, então $P((A \,\&\, B) \mid C) = P(B \mid C)$.

16) $P(A \mid B) = P((A \,\&\, C) \mid B) + P((A \,\&\, {\sim}C) \mid B)$.

17) Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, e A e B são mutuamente exclusivas, então A e B não são independentes.

18) $P(A \mid {\sim}B) = \dfrac{P(A) - P(A \,\&\, B)}{1 - P(B)}$

19) $P(A \mid (B \vee C)) = \dfrac{P(A \,\&\, B) + P(A \,\&\, C) + P(A \,\&\, B \,\&\, C)}{P(B) + P(C) - P(B \,\&\, C)}$

20) $P(A \mid (B \,\&\, C)) = \dfrac{P((A \,\&\, B) \mid C)}{P(B \mid C)}$

II. Calcule e compare os valores dos seguintes pares de expressões:

1) $P(A \mid A), P(A \rightarrow A)$.

2) $P(\sim A \mid A), P(A \rightarrow \sim A)$.

3) $P(A \mid (B \,\&\, \sim B)), P((B \,\&\, \sim B) \rightarrow A)$.

4) $P(A_1 \mid A_2), P(A_2 \rightarrow A_1)$, onde A_1 é o evento de sair *um* e A_2 é o evento de sair *dois* num lançamento único de um dado (use a definição clássica de probabilidade).

III. 1) Usando os dados do problema 9.24, calcule a probabilidade do cinto de Ana ter sido produzido pela máquina 2, sabendo-se que é defeituoso; e a probabilidade dele ter sido produzido pela máquina 3, sabendo-se que é defeituoso.

2) Considere o seguinte jogo: duas caixas contêm dinheiro — a caixa 1 contém três notas de \$1 e três notas de \$50; a caixa 2 contém 30 notas de \$1 e uma nota de \$50. Um jogador, com os olhos vendados, retira ao acaso uma nota de uma caixa. A escolha da caixa é determinada pelo lançamento de uma moeda não-viciada; se o resultado for cara, a pessoa retira da caixa 1 e se for coroa, da caixa 2. A moeda é lançada e o jogador faz a retirada. Use o teorema de Bayes para calcular a probabilidade de a retirada ter sido feita da caixa 1, sabendo que o jogador retirou \$50.

3) Seja Q a hipótese de que uma versão da teoria do *quark* da física subatômica é verdadeira. Seja N a hipótese de que nenhum próton desintegrado é observado além do período de um ano numa certa quantidade de líquido próton-rico. Suponha que $P(N \mid Q) = 0{,}001$ e $P(N \mid \sim Q) = 0{,}99$. Suponha, ainda, que as probabilidades prévias são $P(Q) = 0{,}7$ e $P(\sim Q) = 0{,}3$. Usando o teorema de Bayes, calcule $P(Q \mid N)$. Supondo agora $P(Q) = 0{,}3$ e $P(\sim Q) = 0{,}7$, calcule novamente $P(Q \mid N)$. Essa mudança nas probabilidades prévias altera a confiança em Q, dada N?

IV. Dois dados, não-viciados, são lançados uma vez. Usando o cálculo de probabilidades e/ou a definição clássica de probabilidade, calcule (as abreviações usadas são as estabelecidas antes do problema 9.29):

1) $P(A_1 | A_7)$
2) $P(A_7 | A_1)$
3) $P(A_1 | A_2)$
4) $P(A_1 \& A_2)$
5) $P(A_1 | (A_1 \vee A_2 \vee A_3))$
6) $P((A_1 \vee A_2) | (A_7 \vee A_8))$
7) $P(A_1 \vee {\sim}A_1)$
8) $P(A_1 \& {\sim}A_1)$
9) $P({\sim}A_1 \& {\sim}A_2)$
10) $P(A_2 | (A_1 \& {\sim}A_1))$

V. Cinco cartas são retiradas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Calcule as seguintes probabilidades:

1) As quatro primeiras cartas retiradas são ases.
2) A quinta carta retirada é ás, supondo-se que nas quatro primeiras retiradas nenhuma foi ás.
3) A quinta carta retirada é copas, supondo-se que as quatro primeiras retiradas também foram copas.
4) A quinta carta retirada não é copas, sabendo-se que as quatros primeiras retiradas foram copas.
5) Pelo menos uma das duas primeiras cartas retiradas é um ás.
6) O dez, valete, dama, rei e ás de copas são retirados nessa ordem.

7) Nenhuma das duas primeiras cartas retiradas foi rei.

8) A primeira carta retirada é ás e a segunda carta retirada não é ás.

9) Nenhuma das cinco cartas é paus.

10) A quinta carta retirada é ás ou rei, sabendo-se que nas quatro retiradas anteriores duas foram ases e duas foram reis.

VI. Uma moeda não-viciada é lançada três vezes. Os resultados dos lançamentos são independentes. Determine as seguintes probabilidades:

1) Todos os três lançamentos dão cara.

2) Nenhum dos lançamentos dá cara.

3) O primeiro lançamento dá cara e o segundo e o terceiro dão coroa.

4) Um dos lançamentos dá cara e os outros dois dão coroa.

5) Em pelo menos um lançamento dá cara.

6) O primeiro lançamento dá cara, supondo-se que em todos os três lançamentos dão cara.

7) O segundo lançamento dá cara, supondo-se que o primeiro deu cara.

8) O primeiro lançamento dá cara, supondo-se que o segundo dá cara.

9) O primeiro lançamento dá cara, supondo-se que exatamente um dos três lançamentos dará cara.

10) Exatamente duas caras ocorrem, supondo-se que o primeiro lançamento deu cara.

Respostas a alguns problemas suplementares

I. 5) Suponha $P(A) = P(B) = 1$. Então, pelo problema 9.9, $P(A \;\&\; B) = P(B) = 1$.

10) Suponha que A é tautologia. Então, por AX2, $P(A) = 1$; e, pelo problema 9.9, $P(A \;\&\; B) = P(B)$. Mas, por D1,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \;\&\; B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

15) Suponha que A é conseqüência funcional-veritativa de $B \;\&\; C$. Então, $(A \;\&\; B) \;\&\; C$ é conseqüência funcional-veritativa de $B \;\&\; C$. Além disso, $B \;\&\; C$ é conseqüência funcional-veritativa de $(A \;\&\; B) \;\&\; C$; logo $(A \;\&\; B) \;\&\; C$ e $B \;\&\; C$ são equivalentes funcional-veritativos. Pelo problema 9.4, $P((A \;\&\; B) \;\&\; C) = P(B \;\&\; C)$. Por D1,

$$P((A \;\&\; B) \mid C) = \frac{P((A \;\&\; B) \;\&\; C)}{P(C)} = \frac{P(B \;\&\; C)}{P(C)}$$

que, novamente por D1, é $P(B \mid C)$.

20) Por D1 e problema 9.4,

$$P((A \mid (B \;\&\; C)) = \frac{P(A \;\&\; (B \;\&\; C))}{P(B \;\&\; C)} =$$

$$= \frac{\dfrac{P((A \;\&\; B) \;\&\; C)}{P(C)}}{\dfrac{P(B \;\&\; C)}{P(C)}} = \frac{P((A \;\&\; B) \mid C)}{P(B \mid C)}$$

III. 3) Q e $\sim Q$ são mutuamente exclusivas e exaustivas. Portanto, pelo teorema de Bayes,

$$P(Q \mid N) = \frac{P(Q) \cdot P(N \mid Q)}{P(Q) \cdot P(N \mid Q) + P(\sim Q) \cdot P(N \mid \sim Q)}$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}001}{(0{,}7 \cdot 0{,}001) + (0{,}3 \cdot 0{,}99)} = 0{,}00235$$

Se $P(Q) = 0{,}3$ e $P(\sim Q) = 0{,}7$, então $P(Q \mid N) = 0{,}00043$. A mudança nas probabilidades prévias é drástica, mas a mudança em $P(Q \mid N)$ é pequena; Q é ainda improvável, supondo-se as observações N. Dentro de um amplo limite de valores para as probabilidades prévias, Q permanece improvável, supondo-se N.

IV. 5) A_1 é equivalente funcional-veritativa a $A_1 \,\&\, (A_1 \vee A_2 \vee A_3)$. Assim, por D1 e problema 9.4,

$$P(A_1 \mid (A_1 \vee A_2 \vee A_3)) = \frac{P(A_1 \,\&\, (A_1 \vee A_2 \vee A_3))}{P(A_1 \vee A_2 \vee A_3)} =$$

$$= \frac{P(A_1)}{P(A_1 \vee A_2 \vee A_3)}$$

Como $A_1 \vee A_2$ e A_3 são mutuamente exclusivas e também o são A_1 e A_2, temos, aplicando duas vezes AX3, que:

$$P(A_1 \vee A_2 \vee A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

Mas as probabilidades de A_1, A_2 e A_3 são todas iguais a $\frac{1}{6}$.

Assim, o valor procurado é

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

10) A probabilidade está indefinida, pois $P(A_1 \& \sim A_1) = 0$.

V. 5) Usando 'A_1' para "A primeira carta é ás" e 'A_2' para "A segunda carta é ás", a probabilidade procurada é $P(A_1 \vee A_2)$, que, pelo problema 9.4, vem

$$P((A_1 \& A_2) \vee (A_1 \& \sim A_2) \vee (\sim A_1 \& A_2))$$

Como os disjunctos são mutuamente exclusivos, por duas aplicações de AX3, temos:

$$P(A_1 \& A_2) + P(A_1 \& \sim A_2) + P(\sim A_1 \& A_2)$$

que, pelo problema 9.17, torna-se:

$$P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) + P(A_1) \cdot P(\sim A_2 | A_1) + P(\sim A_1) \cdot P(A_2 | \sim A_1)$$

isto é,

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} =$$

$$= \frac{12}{2652} + \frac{192}{2652} + \frac{192}{2652} = \frac{396}{2652} = \frac{33}{221}$$

10) Se dois ases e dois reis foram distribuídos, então existem ainda dois ases e dois reis entre as 48 cartas restantes. Assim, existem quatro chances, das 48, para se retirar um ás ou um rei. Portanto, a probabilidade de se retirar um ás ou um rei, supondo-se que dois ases e dois reis foram retirados é $\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.

VI. 5) Seja H_n a probabilidade de se obter cara no n-ésimo lançamento. Pelo problema 9.1, $P(H_1 \vee H_2 \vee H_3)$ é igual a $1 - P(\sim(H_1 \vee H_2 \vee H_3))$, que é $1 - P(\sim H_1 \& \sim H_2 \& \sim H_3)$, pois $\sim(H_1 \vee H_2 \vee H_3)$ é equivalente funcional-veritativo a $\sim H_1 \& \sim H_2 \& \sim H_3$.

Como os lançamentos são independentes, por duas aplicações do problema 9.20,

$$P(\sim H_1 \,\&\, \sim H_2 \,\&\, \sim H_3) = P(\sim H_1) \cdot P(\sim H_2) \cdot P(\sim H_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Logo, $P(H_1 \vee H_2 \vee H_3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

10) Usando a notação dada na resposta do problema suplementar VI (5), a probabilidade que desejamos determinar é $P((H_2 \,\&\, \sim H_3) \vee (\sim H_2 \,\&\, H_3) \mid H_1)$. Como os lançamentos são independentes, isso é igual a $P((H_2 \,\&\, \sim H_3) \vee (\sim H_2 \,\&\, H_3))$. Mas, os disjunctos são mutuamente exclusivos; assim, por AX3, isso se torna

$$P(H_2 \,\&\, \sim H_3) + P(\sim H_2 \,\&\, H_3)$$

e, como os lançamentos são independentes, temos, pelo problema 9.20,

$$P(H_2) \cdot P(\sim H_3) + P(\sim H_2) \cdot P(H_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

MAKRON
Books

Capítulo 10

OUTROS DESENVOLVIMENTOS EM LÓGICA FORMAL

Neste capítulo vamos tratar, superficialmente, de algumas extensões da lógica formal. Os leitores que desejarem explorar qualquer um desses tópicos deverão consultar os trabalhos mencionados nas notas de rodapé.

10.1 Limitações significativas do cálculo de predicados

O sistema da lógica de predicados apresentado no Capítulo 6 é somente o começo de uma lógica formal dedutiva. Apesar de completa num sentido, ela é incompleta em outro. Como foi notado no final da Seção 6.7, ela é completa no sentido de que suas regras de inferência geram provas para todas as formas válidas de argumento em virtude da semântica do predicado identidade, dos operadores funcional-veritativos e dos quantificadores expressáveis no sistema.[1] Este fato é conhecido como *completude semântica*. Por outro lado, ela é incompleta no sentido de que existem formas válidas de argumento cuja validade depende de

1. Outros tipos de quantificadores serão tratados na próxima seção.

uma outra natureza semântica. A lógica de predicados não gera provas para essas formas.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.1 Considere a seguinte forma, onde '*T*' é interpretada como "é mais alto que" e '*a*', '*b*' e '*c*' são nomes de indivíduos:

$Tab, Tbc \vdash Tac$

A partir das premissas de que a é mais alto que b e b é mais alto que c, segue-se que a é mais alto que c. Todavia, para o cálculo de predicados essa forma é inválida. Se construímos uma árvore-verdade com as premissas e a negação da conclusão, obtemos:

Tab

Tbc

$\sim Tac$

Nenhum passo mais é possível e o único ramo não se fecha, indicando que a inferência é inválida. O que está errado?

Solução

Exatamente como as tabelas-verdade ou árvores-verdade da lógica proposicional detectam validade de um ponto de vista semântico dos operadores funcional-veritativos, também os métodos do cálculo de predicados detectam validade somente do ponto de vista semântico desses operadores, dos quantificadores e do predicado identidade. Mas como nenhuma dessas expressões ocorre nessa inferência, sua validade é devida não pela semântica do cálculo, mas pela semântica do predicado 'é mais alto que'.[2]

Os significados das letras predicativas do cálculo de predicados variam de problema para problema; ao contrário dos quantificadores, operadores funcional-veritativos e do predicado da identidade, pois tais letras predicativas não têm significados fixos. Conseqüentemente, nenhuma regra de inferência do cálculo de predicados é responsável pela semântica de certos predicados específicos — com exceção do predicado identidade. Portanto, ele é insensível à validade gerada por suas distintas semânticas.

Entretanto, podemos dar à letra predicativa '*T*' o mesmo *status* lógico dado ao símbolo '=' no Capítulo 6. Isto é, podemos estipular para essa letra uma interpretação fixa; desse modo, ela sempre significará "é mais alto que". Adotamos ainda um novo conjunto de regras de inferência para essa interpretação. O resultado será uma versão ampliada da lógica de predicados, a qual denominamos *lógica T*. Uma versão plausível da lógica *T* pode ser obtida quando se adiciona ao cálculo de predicados com identidade as seguintes regras:

Regra T1: Podemos introduzir em qualquer linha de uma prova a seguinte fórmula:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Txy\ \&\ Tyz) \rightarrow Txz)$$

2. Alguns leitores podem objetar que a forma do argumento não é uma forma inválida do ponto de vista da lógica de predicados, mas somente incompleta, requerendo para sua completude a suposição suprimida '$\forall x \forall y \forall z((Txy\ \&\ Tyz) \rightarrow Txz)$'. Porém tal objecção é inadequada. Embora, adicionando-se essa suposição obtenha-se uma forma demonstrável na lógica de predicados, ela também altera o exemplo. A forma que desejamos considerar é precisamente a forma dada acima, onde '*T*' significa 'é mais alto que'; e *essa* forma é válida (sua conclusão não pode ser falsa se suas premissas são verdadeiras) ainda que ela não seja demonstrável na lógica de predicados usual. Por outro lado, a objeção não está incorreta, visto que a suposição sugerida ou alguma coisa que a deduza pode ser incorporada em qualquer sistema lógico no qual essa forma é demonstrável. Mas, em tal sistema, ela funciona não como suposição (quer suprimida, quer explicitada), mas sim como verdade da própria lógica. A discussão seguinte esclarece este ponto.

Regra T2: Podemos introduzir em qualquer linha de uma prova a seguinte fórmula:

$\forall x \forall y(Txy \rightarrow \sim Tyx)$

A regra T1 é uma regra geral para justificar o tipo de raciocínio reconhecido como válido, no problema 10.1. Ela diz que a relação 'é mais alto que' é *transitiva*; isto é, se uma coisa é mais alta que uma segunda e a segunda é mais alta que uma terceira, então a primeira coisa é mais alta que a terceira. A regra T2 diz que essa relação é *assimétrica*; se uma coisa é mais alta que uma segunda, então a segunda não é mais alta que a primeira. As duas regras nos permitem introduzir verdades gerais envolvendo o predicado *T* em qualquer linha de uma prova. Tal como os enunciados introduzidos por =I, essas verdades gerais não são consideradas como premissas. Enunciados que desempenham tal papel nas provas chamam-se *axiomas*. Anteriormente, já nos deparamos com axiomas. A regra =I nos permite introduzir axiomas da forma 'a = a' em qualquer linha de uma prova. Também vimos alguns axiomas do cálculo de probabilidades de modo informal no Capítulo 9. A lógica *T* é meramente um sistema formal com dois axiomas. Na lógica *T* podemos construir provas para uma variedade de novas formas de argumento e teoremas.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.2 Construa uma prova para a forma do Problema 10.1, na lógica *T*.

Solução

1	Tab	P
2	Tbc	P
3	$\forall x\, \forall y \forall z\, ((Txy\ \&\ Tyz) \rightarrow Txz)$	T1
4	$\forall y \forall z\, ((Tay\ \&\ Tyz) \rightarrow Taz)$	3 EU
5	$\forall z\, ((Tab\ \&\ Tbz) \rightarrow Taz)$	4 EU
6	$(Tab\ \&\ Tbc) \rightarrow Tac$	5 EU
7	$Tab\ \&\ Tbc$	1, 2 &I
8	Tac	6, 7 MP

A lógica T tem outras conseqüências. Por exemplo, parece ser uma verdade lógica, ou conceitual, que a relação 'é mais alto que' é *irreflexiva*; isto é, que nenhuma coisa é mais alta do que si própria. Essa relação não é um teorema do cálculo de predicados, mas é um teorema da lógica T.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.3 Prove na lógica T, o teorema:

$$\forall x \sim Txx.$$

Solução

1	Taa	H (para RAA)
2	$\forall x \forall y(Txy \rightarrow \sim Tyx)$	T2
3	$\forall x(Tay \rightarrow \sim Tya)$	2 EU
4	$Taa \rightarrow \sim Taa$	3 EU
5	$\sim Taa$	1, 4 MP
6	$Taa \,\&\, \sim Taa =$	1, 5 &I
7	$\sim Taa$	1-6 RAA
8	$\forall x \sim Txx$	7 IU

É claro que existem muitos predicados, além de 'é mais alto que', que dão origem a novas formas válidas e novos teoremas. Podemos ampliar, quase que indefinidamente, o cálculo de predicados adicionando axiomas para os novos predicados. Uma área em que o cálculo de predicados tem-se desenvolvido pela adição de um novo predicado é o da *teoria de conjuntos* — que consiste no estudo dos *conjuntos*, coleções de objetos considerados sem se importar com a ordem ou descrição. Muitos pesquisadores a consideram como a base da matemática, pois tem a virtude de que muitos teoremas matemáticos podem ser provados a partir de seus axiomas. Uma versão formalizada da teoria de conjuntos pode ser obtida a partir do cálculo de predicados com identidade adicionando-se vários axiomas para o predicado 'é um elemento de', comumente representado pelo símbolo '$\in$' e, algumas vezes, é simbolizado pela letra grega epsílon: 'ε'. Todas as outras noções de teoria de conjuntos e, na verdade, muitas noções da matemática podem ser definidas em termos desse predicado. Não trataremos desse assunto aqui.[3]

3. Para uma introdução à teoria de conjuntos, ver Robert R. Stoll, *Set Theory and Logic*, San Francisco, Freeman, 1963. Um tratamento axiomático rigoroso de teoria de conjuntos e os fundamentos da matemática podem ser encontrados em Patrick Suppes, *Axiomatic Set Theory*, New York, Dover, 1972. Ver também *Schaum's Outline of Set Theory*, de Seymour Lipschutz.

Existem outras maneiras de se ampliar o cálculo de predicados, além de fixar as interpretações de certos predicados e adotar novos axiomas ou regras de inferência para eles. U'a maneira, discutida na próxima seção, é adicionar novos tipos de variáveis. Uma outra é adicionar novas expressões pertencentes a categorias gramaticais totalmente diferentes. Nas Seções 10.3, 10.4 e 10.7 discutimos duas novas categorias de expressões: símbolos funcionais e operadores proposicionais não-funcional-veritativos.

10.2 Lógicas de ordem superior

Os quantificadores do cálculo de predicados, descritos no Capítulo 6, ligam variáveis representando indivíduos; quando instanciamos essas variáveis, nós as substituímos por nomes. Por outro lado é possível ter quantificadores ligando variáveis que representam propriedades ou relações; quando instanciadas, elas são substituídas por predicados ou fórmulas abertas. A utilidade de tais quantificadores pode ser vista no seguinte problema:

PROBLEMA RESOLVIDO

10.4 Usando '*M*' para "é marxista", '*c*' para "Cuba" e '*a*' para "Albânia", formalize o seguinte argumento:

Cuba e Albânia são ambos marxistas.
∴ Cuba e Albânia têm algo em comum.

Solução

A formalização da premissa é:

$Mc \: \& \: Ma$

A formalização da conclusão apresenta problemas. Podemos introduzir o predicado ternário 'tem em comum com'. Por exemplo, '$Hxyz$' significaria "x tem y em comum com z", e então escrevemos a conclusão como:

$$\exists xHcxa$$

O resultado é uma forma que não é demonstrável na lógica de predicados, e o argumento parece obviamente válido. Felizmente, existe solução melhor. A conclusão diz que os dois países têm *algo* em comum. O termo 'algo' indica quantificação existencial. Esse algo que eles têm em comum é, evidentemente, a propriedade de serem marxistas, e essa propriedade foi expressa pela letra de predicado 'M'. Isso sugere que o quantificador se aplica, neste caso, não aos indivíduos, mas sim a uma propriedade. O que é substituído pela variável a ele ligado é um predicado e não um nome. Seguindo essa sugestão, podemos formalizar o argumento como se segue:

$$Mc \ \& \ Ma \vdash \exists P(Pc \ \& \ Pa)$$

A conclusão diz, "Existe uma propriedade P, tal que Cuba tem P e Albânia tem P". Usamos a letra maiúscula 'P', em vez de letra minúscula, para indicar que ela é um tipo especial de variável que percorre propriedades e não indivíduos.

Todavia, a conclusão não é uma wff pelas regras de formação do Capítulo 6, porém é uma wff de uma generalização do cálculo de predicados chamada *lógica de segunda ordem*. O argumento formalizado é válido por uma forma generalizada da introdução existencial.

O nome 'lógica de segunda ordem' origina-se numa concepção lógica de uma estrutura hierárquica descrevendo indivíduos, propriedades, propriedades de propriedades, e assim por diante. Qualquer linguagem cujas variáveis percorram somente indivíduos (pessoas, árvores, elétrons, nações ou planetas, por exemplo) é uma *linguagem de* *primeira ordem*. Assim, o sistema lógico apresentado no Capítulo 6 é freqüentemente chamado de *cálculo de predicados de primeira ordem*, pois suas variáveis representam somente indivíduos. Por outro lado, indivíduos têm uma série de propriedades (tais como ser marxista, ser humano ou ser verde), e qualquer linguagem cujas variáveis percorram indivíduos e suas propriedades é chamada *linguagem de segunda ordem*. Além do mais, as próprias propriedades podem ter propriedades; por exemplo, a propriedade de ser marxista tem a propriedade de ser uma propriedade de certos governos. Assim, existem também *linguagens de terceira ordem* (cujas variáveis percorrem indivíduos, suas propriedades e as propriedades de suas propriedades). Na verdade, existem linguagens de ordem n para todo inteiro não-negativo n. Uma totalidade que ordena tais linguagens chama-se *sistema de tipos* ou *teoria de tipos*.

Teorias de tipos são complexas, sintaticamente, pois um estilo de variáveis diferentes é usado para cada nível de objetos diferentes. Não consideraremos aqui uma teoria de tipos completa; contudo, abordaremos somente alguns aspectos da lógica de segunda ordem.

Além disso, embora seja possível termos quantificadores de segunda ordem sobre relações (as variáveis substituem predicados n-ários, para $n > 2$), consideraremos somente a quantificação sobre propriedades (de modo que as variáveis são substituídas somente por predicados unários ou fórmulas abertas em uma só variável).

PROBLEMA RESOLVIDO

10.5 Formalize os seguintes enunciados na lógica de segunda ordem, usando '*a*' para 'Albert' e '*b*' para 'Bob':

a) Existe pelo menos uma propriedade que Albert tem e pelo menos uma que ele não tem.

b) Para qualquer objeto e qualquer propriedade, ou esse objeto tem essa propriedade ou ele não tem.

c) Todos os objetos são tais que não existe propriedade que eles têm e não têm.

d) Albert e Bob têm exatamente as mesmas propriedades.

e) Para todos os objetos x e y, x e y têm exatamente as mesmas propriedades se e somente se eles forem idênticos.

Solução

a) $\exists PPa \;\&\; \exists P \sim Pa$

b) $\forall x \forall P(Px \vee \sim Px)$

c) $\forall x \sim \exists P(Px \;\&\; \sim Px)$

d) $\forall P(Pa \leftrightarrow Pb)$

e) $\forall x \forall y(\forall P(Px \leftrightarrow Py) \leftrightarrow x = y)$

A sintaxe da lógica de segunda ordem, como os problemas 10.4 e 10.5 sugerem, é a mesma do cálculo de predicados, com a adição de variáveis quantificadas sobre predicados. Assim, para as quatro regras de formação da Seção 6.3, precisamos adicionar somente a seguinte:

5) Se ϕ é uma wff contendo um predicado unário Π, então toda fórmula da forma $\forall X\phi/\Pi$ ou $\exists X\ \phi/\Pi$ é uma wff, onde ϕ/Π é o resultado de substituir uma ou mais das ocorrências de Π em ϕ por uma variável de predicado X que não ocorra em ϕ.

A lógica de segunda ordem inclui todas as regras de inferência do cálculo de predicados, porém as quatro regras do quantificador das seção 6.4 e 6.5 são generalizadas, a fim de permitir EU, IU, EE e IE para quantificadores ligando variáveis de predicados. Os detalhes são simples e não nos preocuparemos em estabelecê-los. Na aplicação dessas regras de inferência, não somente para os predicados unários, mas também para fórmulas abertas em uma só variável, são permitidas as substituições por variáveis de predicados. Isso porque, tal como os predicados unários, as fórmulas abertas em uma só variável representam propriedades, embora estas sejam logicamente complexas. O problema 10.7 ilustra o uso de uma regra do quantificador com uma fórmula aberta.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

10.6 Prove que a fórmula (*b*) da solução do problema 10.5 é um teorema da lógica de segunda ordem.

Solução

1	$Fa \vee {\sim}Fa$	IT 3.45
2	$\forall P(Pa \vee {\sim}Pa)$	1 IU
3	$\exists x\, \forall P(Px \;\&\; {\sim}Px)$	2 IU

10.7 Prove que é um teorema da lógica de segunda ordem: Existe uma propriedade que qualquer objeto tem.

Solução

O teorema a ser provado é:

$$\vdash \exists P \forall x Px$$

O problema inicial é decidir que tipo de propriedade o '*P*' representa. Uma propriedade que todo objeto tem é a propriedade logicamente complexa de ser um peixe e ou não ser um peixe, que é representada pela fórmula aberta

$$Fx \vee {\sim}Fx$$

Como foi observado acima, as regras dos quantificadores de segunda ordem nos permitem substituir as fórmulas abertas por variáveis de predicados. Assim, podemos raciocinar como se segue:

1	$Fa \vee {\sim}Fa$	IT 3.45
2	$\forall x\,(Fx \vee {\sim}Fx)$	1 IU
3	$\exists P \forall x Px$	2 IE

Na passagem 3, substituímos a fórmula aberta '$(Fx \vee {\sim}Fx)$' pela expressão 'Px' e adicionamos um quantificador existencial sobre 'P'. Isso quer dizer que, como qualquer x tem a propriedade complexa de ser um peixe ou não ser um peixe, então existe alguma propriedade que qualquer x tem.

Alguns filósofos e lógicos observam que existe algo "duvidoso" nas propriedades complexas do tipo empregado nessa prova. Assim a prova dada não é aceita como válida, universalmente. Tem-se discutido em bases filosóficas que enquanto a propriedade de ser um peixe é, na verdade, uma propriedade, não existe tal coisa com a propriedade logicamente complexa de ser um peixe ou não ser um peixe. Adeptos desse ponto de vista proibe instanciação de variáveis de segunda ordem por sentenças abertas e só permitem instanciação por predicados. Contudo, esse ponto de vista torna trivial a lógica de segunda ordem e não será abordado aqui.

Se incluirmos o predicado identidade na lógica de segunda ordem, é necessária uma nova regra de inferência para levar em conta sua interferência em quantificação de segunda ordem. U'a maneira de estabelecer tal regra é aceitar a fórmula (*e*) do problema 10.5, conhecida por *Lei de Leibniz*, como axioma ou como uma definição de identidade. As regras =E e =I tornam-se, então, redundantes (no sentido de que qualquer coisa provável por meio dessas regras pode ser provada somente a partir do axioma) e, portanto, podem ser descartadas.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.8 Usando a fórmula (e) do problema 10.5 como axioma, prove, na lógica de segunda ordem, o teorema:

$\vdash \forall x\, x = x$

Solução

1	$\forall x \forall y\, (\forall P\, (Px \leftrightarrow Py) \leftrightarrow x = y)$	Axioma
2	$\forall y (\forall P\, (Pa \leftrightarrow Py) \leftrightarrow a = y)$	1 EU
3	$\forall P (Pa \leftrightarrow Pa) \leftrightarrow a = a$	2 EU
4	$Fa \rightarrow Fa$	IT prob. sup. VI(1), Cap. 3
5	$Fa \leftrightarrow Fa$	4, 4 $\leftrightarrow$ I
6	$\forall P (Pa \leftrightarrow Pa)$	5 IU
7	$\forall P (Pa \leftrightarrow Pa) \rightarrow a = a$	3 $\leftrightarrow$ E
8	$a = a$	6, 7 MP
9	$\forall x\, x = x$	8 IU

As quatro regras do quantificador mais a Lei de Leibniz formam um conjunto de regras completo para a lógica de segunda ordem com identidade? (No sentido de que elas geram todas as formas cuja validade é função dos símbolos lógicos da linguagem de segunda ordem.) A resposta para essa questão depende em parte do nosso conceito de propriedade, para quais formas consideradas como válidas dependem de tipos de propriedades existentes. Muitos lógicos consideram que existe uma propriedade correspondente a cada conjunto (na verdade, muitos identificam as propriedades com os conjuntos). Se aceitamos essa opinião, então pode-se mostrar que nossas regras de segunda ordem não são completas e que é impossível, em princípio, estabelecer um conjunto de regras completo. Entretanto, esses assuntos estão fora do alcance deste livro.[4] Algumas propriedades parecem ser propriedades de si mesmas. Por exemplo, a propriedade de ser não-humano é ela própria não-humana. Chamamos tais propriedades de *autopredicativas*. Outras, não são propriedades de si mesmas; a propriedade de ser uma pessoa, por exemplo, não é por si mesma uma pessoa. Tais propriedades são ditas *não-autopredicativas*. Pareceria natural expressar o enunciado de que a propriedade de ser não-humano é não-humana, pela fórmula da forma '*NN*', onde '*N*' designa essa propriedade, e analogamente expressar o enunciado que a propriedade de ser uma pessoa não é uma pessoa pela fórmula '~*PP*'. Entretanto, isto não é permitido pelas regras de formação. Os predicados da lógica de segunda ordem podem somente ser ligados a nomes de indivíduos e não a outros predicados. Historicamente, o motivo de tal restrição deve-se ao aparecimento de certas *antinomias* (inconsistências) produzidas quando se permite aos predicados aplicarem-se a si próprios, sem restrição.

A mais simples delas foi notada por Bertrand Russell, em 1901, e reformulada, em termos semânticos, por K. Grelling. Uma versão dela se refere a uma propriedade de ser não-autopredicativa: isto é autopredicativa? Suponha que não. Então, a propriedade de ser não-autopredicativa é, ela própria, não-autopredicativa e, portanto, ela é autopredicativa. Porém, isso contradiz a nossa hipótese; assim a propriedade de ser não-autopredicativa é autopredicativa. Mas, isso significa que ela não é propriedade de si mesma; logo, ela é não-autopredicativa! Se nos permitir essa propriedade, seremos levados a uma contradição. (Para formalização desse argumento na lógica de primeira ordem, ver Capítulo 6, resposta do problema suplementar III (25).)

A fim de evitar tais contradições, Russell desenvolveu a noção de uma hierarquia de tipos (mencionada acima) em que predicados de ordem superior só se aplicam a predicados ou objetos de ordens inferiores; nenhum predicado pode ser aplicado em si próprio. A lógica de segunda ordem se constitui dos dois primeiros níveis de tal hierarquia.

---

4. A incompletude semântica da lógica de segunda ordem é estabelecida pelo teorema de Gödel (ver o final da Seção 10.4). Para uma apresentação elegante, ver Richard Jeffrey, *Formal Logic: Its Scope and Limits*, 2ª ed., New York, McGraw-Hill, 1981, Cap.7.

10.3 Lógica de predicados com símbolos funcionais

Podemos ampliar o cálculo de predicados adicionando novos símbolos. Símbolos funcionais (também conhecidos como *símbolos operacionais*) são um exemplo. Um *símbolo funcional* é um símbolo que quando ligado a um ou mais nomes, ou outros símbolos denotando termos, produz uma expressão que denota um único objeto e que funciona gramaticalmente como um novo nome. Portanto, símbolos funcionais diferem dos predicados, os quais aplicados a um ou mais nomes produzem sentenças. Uma expressão que pode ser tratada como um símbolo funcional (se o assunto em discussão é sobre pessoas) é 'o pai de' (entendido no sentido biológico). Aplicando essa frase a um nome produz-se uma nova frase que denota um novo indivíduo. Assim, aplicando 'o pai de' ao nome 'Isaac', obtemos a frase 'o pai de Isaac', que designa o indivíduo Abraham (admitindo-se o Isaac bíblico). Essa nova frase, *expressão funcional*, atua gramaticalmente como um nome; isto é, pode ocorrer em qualquer contexto gramatical no qual um nome é apropriado. Unindo-o a um predicado unário, criamos uma nova sentença como, por exemplo, 'O pai de Isaac foi um profeta'.

A seguir, veremos a formalização dessa sentença numa extensão do cálculo de predicados. Empregamos as letras minúsculas 'f', 'g' e 'h' para os símbolos funcionais. Os nomes ou expressões funcionais aos quais eles se aplicam são escritos depois dessas letras e entre parênteses. Assim, usando 'P' para 'foi um profeta', 'i' para 'Isaac' e 'f' para 'o pai de', escrevemos 'o pai de Isaac' como '$f(i)$' e 'O pai de Isaac foi um profeta' como '$Pf(i)$'.

Símbolos funcionais podem ser aplicados repetidamente. Por exemplo, para dizer que o avô paterno de Isaac (o pai do pai de Isaac) foi um profeta, escrevemos '$Pf(f(i))$'.

Além do mais, os nomes contidos nos símbolos funcionais (bem como as próprias expressões funcionais) são suscetiveis à quantificação.

Assim, escrevemos 'O avô paterno de alguém foi um profeta' como '$\exists xP(f(f(x)))$'.

Uma expressão pode ser tratada como um símbolo funcional somente se toda expressão obtida por sua aplicação a um nome denota um único indivíduo. Assim, 'o filho de' não é considerada como um símbolo funcional, pois quando aplicada ao nome de alguém, que tem mais do que um filho, não denota um só indivíduo, mas sim vários. De modo diferente, 'o pai de' denota um único indivíduo quando aplicada ao nome de qualquer pessoa, pois toda pessoa tem um e somente um pai (biológico).

Contudo, observe que se '*a*' é o nome de um objeto inanimado, a expressão 'o pai de a' nada denota. Por isso é que restringimos os comentários à discussão de pessoas. Quando usamos símbolos funcionais é importante especificar o *domínio*; isto é, o conjunto de indivíduos aos quais o símbolo funcional se aplica. 'O pai de' não deve ser tratado como um símbolo funcional em domínios que incluem objetos sem pais.[5]

Os símbolos funcionais podem ser vistos como representando operações, chamadas *funções*. Uma *função n-ária* é uma operação que atribui um único objeto a cada n-upla (isto é, ordem linear ou lista de *n* objetos) de elementos do domínio. A função pai-de, por exemplo, é uma função unária (monádica) que atribui a cada pessoa um só indivíduo, que é o seu pai. A função adição da aritmética é uma função binária, que atribui a cada dupla (par ordenado) de números um terceiro número, que é a soma deles. Um elemento de uma n-upla na qual função se aplica chama-se *argumento* da função. (Não confundir esse significado de 'argumento' com a idéia de um conjunto de premissas e sua conclusão.) O objeto que uma função *n*-ária atribui a uma *n*-upla de argumentos chama-se o *valor* da função para aquela *n*-upla. Por exemplo, o valor da função pai-de para o argumento Isaac é Abraham. O conjunto de todos os valores para um domínio é a *imagem* da função.

5. Essa restrição é exigida para que cada expressão funcional denote algo. Existem lógicas de funções parciais que dispensam essa exigência, as quais não serão tratadas aqui.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.9 Usando 'f' para 'o pai de', 'm' para 'a mãe de', 'a' para Abel', 'c' para 'Caim' e 'S' para 'é um pecador', formalize as seguintes sentenças na linguagem do cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais. (Suponha um domínio cujos elementos são pessoas.)

a) O pai de Caim é pecador.

b) Se o pai de uma pessoa é pecador, então essa pessoa é pecador.

c) Se o avô paterno de uma pessoa é pecador, então essa pessoa é pecador.

d) A mãe e o pai de Abel são pecadores.

e) O pai de Abel é também pai de Caim.

f) O pai de Abel é alguém que é pai de outra pessoa.

Solução

a) $Sf(c)$

b) $\forall x(Sf(x) \rightarrow Sx)$

c) $\forall x(Sf(f(x)) \rightarrow Sx)$

d) $Sm(a) \;\&\; S\,f(a)$

e) $f(a) = f(c)$

f) $\exists y(f(a) = f(y) \;\&\; {\sim}y = a)$

Os itens (*e*) e (*f*) do problema 10.9 evidenciam que dois indivíduos podem ter o mesmo pai. Isso significa que uma função pode assumir o mesmo valor para argumentos distintos. O pai de Abel é a mesma pessoa que é pai de Caim — a saber, Adão. Por outro lado, a função pai-de tem um único valor para um dado argumento.

A função pai-de assume um argumento por vez. Por isso, ela é uma função unária ou monádica. Mas, existem funções que assumem dois ou mais argumentos simultaneamente. Considere, por exemplo, o domínio constituído pelos pontos de um plano euclidiano. Para cada par de pontos, existe um ponto médio que está entre eles. (Para um par consistindo em um ponto e ele próprio, o ponto médio é o próprio ponto.) Assim, a expressão 'o ponto médio entre' revela uma função que assume dois argumentos, ou seja, é uma função binária nesse domínio. Essa função aplicada a um par de pontos, tem como valor um ponto.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.10 Usando 'm' para 'o ponto médio entre', formalize os enunciados:

a) O ponto médio entre um ponto e ele próprio é esse ponto.

b) Para quaisquer pontos x e y, o ponto médio entre x e y é idêntico ao ponto médio entre y e x.

c) Todo ponto é ponto médio de algum par de pontos.

d) Para quaisquer pontos x e y, existe um ponto z tal que y é o ponto médio entre x e z.

e) Para quaisquer pontos x e y, o ponto médio entre x e o ponto médio entre y e y é o ponto médio entre x e y.

Solução

Quando uma função tem mais do que um argumento, escrevemos os nomes dos argumentos entre parênteses, depois do símbolo funcional e separados por vírgula, assim:

a) $\forall x\ m(x, x) = x$

b) $\forall x \forall y\ m(x, y) = m(y, x)$

c) $\forall x \exists y \exists z\ x = m(y, z)$

d) $\forall x \forall y \exists z\ y = m(x, z)$

e) $\forall x\ \forall y\ m(x, m(y, y)) = m(x, y)$

No item (*e*), o segundo argumento na primeira ocorrência de '*m*' é o valor da função *m* aplicada a *y* e *y*. Todas as proposições deste problema são verdadeiras para os pontos do plano euclidiano.

Para legitimar os símbolos funcionais no cálculo de predicados com identidade, é preciso modificar as regras de formação e de inferência. As novas regras de formação permitem que as expressões funcionais ocorram em qualquer lugar em que um nome ocorre. Assim, as regras =I, =E, EU e IE podem incluir expressões funcionais, além dos nomes. (Se queremos algum símbolo funcional tenha interpretação fixa, devemos adicionar regras especiais ou axiomas para ele. Isso será ilustrado na próxima seção.)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

10.11 Prove no cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais que o enunciado (*c*) do problema 10.9, 'Se o avô paterno de uma pessoa é pecador, então essa pessoa é pecador', pode ser deduzido do enunciado (*b*), 'Se o pai de uma pessoa é pecador, então essa pessoa é pecador'. (Use a notação do problema 10.9.)

Solução

Provaremos que: $\forall x(Sf(x) \rightarrow Sx) \vdash \forall x(Sf(f(x)) \rightarrow Sx)$

A prova é:

1	$\forall x(Sf(x) \rightarrow Sx)$	P
2	$Sf(f(a)) \rightarrow Sf(a)$	1 EU
3	$Sf(a) \rightarrow Sa$	1 EU
4	$Sf(f(a)) \rightarrow Sa$	2, 3 SH
5	$\forall x(Sf(f(x)) \rightarrow Sx)$	4 IU

Na passagem 2, por EU, substituímos a variável 'x' pela expressão funcional '$f(a)$' e pelo nome 'a' na passagem 3.

10.12 Seja 'f' um símbolo funcional monádico. Prove que é um teorema do cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais: Qualquer argumento de uma função f tem um e somente um valor.

Solução

O teorema a ser provado é: $\vdash \forall x \exists y(y = f(x) \ \& \ \forall z(z = f(x) \rightarrow z = y))$

A prova é:

1	$f(a) = f(a)$	=I
2	$b = f(a) \rightarrow b = f(a)$	IT prob. supl. VI(1), Cap. 3
3	$\forall z(z = f(a) \rightarrow z = f(a))$	2 IU
4	$f(a) = f(a) \ \& \ \forall z(z = f(a) \rightarrow z = f(a))$	1, 3 &I
5	$\exists y(y = f(a) \ \& \ \forall z(z = f(a) \rightarrow z = y))$	4 IE
6	$\forall x \ \exists y(y = f(x) \ \& \ \forall z(z = f(x) \rightarrow z = y))$	5 IU

O artifício na prova é que o objeto y mencionado no teorema seja $f(x)$, a fim de que a condição '$y = f(x)$' esteja satisfeita. Desse modo, o que precisamos provar é algo da forma '$f(a) = f(a)$ & $\forall z(z = f(a) \rightarrow z = f(a))$', a qual é obtida na linha 4. Aplicando-se IE e IU segue-se o teorema.

10.4 Aritmética formal

Muitas expressões que nos são familiares na aritmética são símbolos funcionais, apesar de eles não estarem escritos antes dos nomes aos quais eles se aplicam, como vimos na seção anterior. (Os nomes usados na aritmética são os numerais '0', '1', '2', etc.) Os símbolos '+' e '·' indicam as funções de adição e multiplicação, respectivamente, cada uma delas assumindo dois argumentos. Esses símbolos são escritos em uma posição *fixada* (entre os nomes de seus argumentos e muitas vezes circundados com parênteses) em vez da posição *prefixada*, como é usual em lógica. Assim, em vez de escrever 'a soma de 1 e 2' como '+(1, 2)', escrevemos '1 + 2' ou '(1 + 2)'. O símbolo funcional '–', quando usado para denotar a função negativa monádica (que se aplica a um só número) em vez da subtração (que dá a diferença entre dois números), é escrito na frente do número, embora os parênteses sejam freqüentemente omitidos.

Nesta seção examinamos seis axiomas e uma regra de inferência para a aritmética dos inteiros não-negativos (números inteiros positivos e o zero). O sistema formal resultante gera provas para várias verdades aritméticas e nos permite formalizar e avaliar raciocínios aritméticos.

A aritmética pode ser vista como extensão do cálculo de predicados com identidade. Ela é obtida adicionando-se um nome e três símbolos funcionais em seu vocabulário, bem como axiomas especiais e regras de inferência. O nome é '0', que designa o número zero. Os dois primeiros símbolos funcionais são '+' e '·', que são escritos na posição fixada usual com parênteses. O terceiro símbolo funcional é 's', que significa 'o sucessor de'. A função sucessor é uma função monádica que, quando aplicada a um inteiro, dá como valor o próximo inteiro. Assim, o sucessor de 0 é 1, o sucessor de 1 é 2, e assim por diante. Quando utilizamos 's', empregamos as convenções usadas na matemática para '–'. Ou seja, quando 'x' denota um número, escrevemos 'sx' em vez de '$s(x)$' para 'o sucessor de x'. Omitindo-se os parênteses, as fórmulas extensas se tornam mais legíveis.

Os numerais, com exceção do '0', são abreviações para as expressões funcionais construídas a partir de 's' e '0'. Assim, '1' abrevia '$s0$', '2' abrevia '$ss0$', e assim por diante. Essas abreviações não fazem parte da linguagem, são empregadas nas escrituras das fórmulas, evitando prolixidade. Do mesmo modo que no cálculo de predicados com identidade, o símbolo '=' é um predicado e não um símbolo funcional. Tal como o símbolo identidade, os quatro símbolos aritméticos têm interpretações fixas. Adotaremos seis axiomas especiais e uma nova regra de inferência para expressar essas interpretações.[6] Lembrando que o domínio, nesse caso, é o conjunto dos inteiros não-negativos, facilmente entendem os axiomas:

A1	$\forall x \sim 0 = sx$
A2	$\forall x\, \forall y(sx = sy \rightarrow x = y)$
A3	$\forall x(x + 0) = x$
A4	$\forall x\, \forall y(x + sy) = s(x + y)$
A5	$\forall x(x \cdot 0) = 0$
A6	$\forall x\, \forall y(x \cdot sy) = ((x \cdot y) + x)$

6. O sistema resultante é similar àquele apresentado por Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 2ª ed., New York, Van Nostrand, 1979, Cap. 3. O tratamento de Mendelson é excelente e com muito mais detalhes que o nosso.

Seus significados são os seguintes (onde x e y são quaisquer inteiros não-negativos):

A1	0 não é sucessor de qualquer inteiro não-negativo.
A2	Se x e y têm os mesmos sucessores, então eles são idênticos; isto é, nenhum número é sucessor de mais de um número.
A3	x mais 0 é igual a x.
A4	x mais o sucessor de y é igual ao sucessor de $x + y$. (Por exemplo, $2 + s3 = s(2 + 3) = 6$.)
A5	x vezes 0 é igual a 0.
A6	x vezes o sucessor de y é igual a $((x \cdot y) + x)$. (Por exemplo, $2 \cdot s3 = (2 \cdot 3) + 2 = 8$.)

Como axiomas, qualquer uma dessas fórmulas pode ser introduzida numa linha qualquer de uma prova.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

10.13 Prove que é um teorema da aritmética formal:

$$\vdash 2 + 2 = 4$$

Solução

Na notação de sucessor, o que temos a provar é:

$$\vdash (ss0 + ss0) = ssss0$$

A prova desse enunciado simples é surpreendentemente complexa:

1	$\forall x \forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
2	$\forall y(ss0 + sy) = s(ss0 + y)$	1 EU
3	$(ss0 + ss0) = s(ss0 + s0)$	2 EU
4	$(ss0 + s0) = s(ss0 + 0)$	2 EU
5	$(ss0 + ss0) = ss(ss0 + 0)$	3, 4 =E
6	$\forall x(x + 0) = x$	A3
7	$(ss0 + 0) = ss0$	6 EU
8	$(ss0 + ss0) = ssss0$	5, 7 =E

Na linha 2, instanciamos a variável '*x*'com '*ss*0' e '*y*' com '*s*0' na linha 3. Na passagem 4, instanciamos '*y*' com '0'. Usando a linha 4, substituímos '(*ss*0 + *s*0)' na linha 3 por '*s*(*ss*0 + 0)' pela regra =E, e obtemos a linha 5.

10.14 Prove que é teorema da aritmética formal:

$$\vdash 1 \cdot 2 = 2$$

Solução

Na notação de sucessor, o teorema é

$$\vdash (s0 \cdot ss0) = ss0$$

A prova, ainda mais complexa, é a seguinte:

1	$\forall x \forall y(x \cdot sy) = ((x \cdot y) + x)$	A6
2	$\forall y(s0 \cdot sy) = ((s0 \cdot y) + s0)$	1 EU
3	$(s0 \cdot ss0) = ((s0 \cdot s0) + s0)$	2 EU
4	$\forall x\ \forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
5	$\forall y((s0 \cdot s0) + sy) = s((s0 \cdot s0) + y)$	4 EU
6	$((s0 \cdot s0) + s0) = s((s0 \cdot s0) + 0)$	5 EU
7	$(s0 \cdot ss0) = s((s0 \cdot s0) + 0)$	3, 6 = I
8	$\forall x(x + 0) = x$	A3
9	$((s0 \cdot s0) + 0) = (s0 \cdot s0)$	8 EU
10	$(s0 \cdot ss0) = s((s0 \cdot s0))$	7, 9 =I
11	$(s0 \cdot s0) = ((s0 \cdot 0) + s0)$	2 EU
12	$(s0 \cdot ss0) = s((s0 \cdot 0) + s0)$	10, 11 =I
13	$\forall x(x \cdot 0) = 0$	A5
14	$(s0 \cdot 0) = 0$	13 EU
15	$(s0 \cdot ss0) = s(0 + s0)$	12, 14 =I
16	$\forall y(0 + sy) = s(0 + y)$	4 EU
17	$(0 + s0) = s(0 + 0)$	16 EU
18	$(s0 \cdot ss0) = ss(0 + 0)$	15, 17 =I
19	$(0 + 0) = 0$	8 EU
20	$(s0 \cdot ss0) = ss0$	18, 19 =I

Essa prova fornece boas ilustrações dos usos de =I e EU com símbolos funcionais. Também mostra como aplicações repetidas

das instâncias de A4 e A6 podem ser usadas para manipular expressões envolvendo sucessor até que se alcance o resultado desejado. Em linhas gerais, a estratégia é a seguinte: usam-se instâncias de A6 para reduzir-se fórmulas que contêm '·', seguidas por expressões com sucessores, para fórmulas que contêm '·' seguidas por expressões com sucessores mais curtas e uma soma. Então, usam-se instâncias de A4 para reduzir-se fórmulas contendo '+', seguidas por expressões envolvendo sucessores, para fórmulas contendo '+' seguidas por expressões envolvendo sucessores mais curtas. Fazem-se sucessivas substituições, até obter-se expressões mais curtas, envolvendo sucessor, e finalmente reduzi-las somente a '0', '+' e '·'. Nesse ponto A3 ou A5 podem ser usadas para se eliminar as ocorrências de '+' e '·' e simplificar a fórmula obtendo-se o resultado desejado.

Essas provas têm sido criticadas uma vez que enunciados como '$2 \cdot 1 = 2$' são mais claros do que os princípios usados para prová-los. O que é, inegavelmente, verdadeiro. Mas mesmo assim tais provas mais complexas aumentam nossa confiança em suas conclusões, e ainda possibilitam aclarar as conexões entre as verdades aritméticas simples e os princípios mais gerais a partir dos quais elas podem ser deduzidas. Além do mais, o valor real da aritmética formal permanece não nas provas dessas verdades simples, mas no exame cuidadoso de formas mais avançadas do raciocínio matemático. Na verdade, o raciocínio matemático esmiuçado pelo microscópio da lógica formal tem propiciado algumas descobertas matemáticas fundamentais (por exemplo, teorema de Gödel, que será tratado no final desta seção) e realçam a unidade do conhecimento matemático.

Observe que o maior trabalho nos problemas 10.13 e 10.14 estava em remover os quantificadores universais por EU. Na matemática, os quantificadores universais iniciais estão geralmente omitidos. Por exemplo, A5 poderia ser escrito como '$(x \cdot 0) = 0$'. Além do mais, as provas em matemática freqüentemente eliminam muitas das passagens (tais como EU) requeridas para um completo rigor formal. Devido à complexidade de provas formais, exemplificada nos dois últimos problemas, tais simplificações são obviamente desejáveis.

Ainda que os axiomas impliquem fatos particulares codificados nas tabelas de adição e multiplicação e algumas outras verdades relativamente simples, não nos permitem provar generalizações aritméticas interessantes. Essas generalizações necessitam de um princípio de raciocínio mais poderoso — a regra de *indução matemática*. A indução matemática é uma forma de raciocínio dedutivo. Ela pode ser vista como uma generalização de *modus ponens*. A idéia é a seguinte: desejamos provar que um certo fato geral verifica-se para todos os inteiros não-negativos; isto é, que todos eles têm uma certa propriedade (geralmente um pouco complexa). Para isso, é suficiente provar o seguinte:

1) Zero tem essa propriedade.
2) Para qualquer número x, se x tem essa propriedade, então o sucessor de x também tem.

A condição (2) é equivalente (sob a interpretação usual da aritmética) à seguinte seqüência infinita de enunciados condicionais:

Se 0 tem essa propriedade, então 1 também tem.

Se 1 tem essa propriedade, então 2 também tem.

Se 2 tem essa propriedade, então 3 também tem.

$\vdots$

A condição (1) e o primeiro desses condicionais implica, por *modus ponens*, que 1 tem a propriedade. Mas, se 1 tem essa propriedade e utilizando o segundo condicional, segue-se, aplicando *modus ponens*, que 2 também tem, e assim sucessivamente. Logo, através de infinitas passagens de *modus ponens*, afirmamos a conclusão que todos os inteiros não-negativos têm essa propriedade, isto é, que a generalização desejada é verdadeira para todos eles.

Evidentemente não podemos escrever por extenso uma prova contendo infinitas passagens de *modus ponens*. Contudo, o raciocínio descrito acima é válido. Por isso, adotamos uma nova regra de inferência que nos permite tal raciocínio.[7] Intuitivamente, a regra diz que, se tivemos as condições (1) e (2), podemos inferir:

3) Todo inteiro não-negativo tem essa propriedade.

Em termos formais, a regra é a seguinte:

Indução matemática (I): Dada uma wff ϕ contendo uma letra nominal '0' e uma wff da forma $\forall\alpha(\phi^{\alpha}/0 \rightarrow \phi s^{\alpha}/0)$, podemos inferir $\forall\alpha\ \phi^{\alpha}/0$, onde $\phi^{\alpha}/0$ é o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de '0' em ϕ por uma variável α que não ocorra em ϕ, e $\phi s^{\alpha}/0$ é o resultado de substituir essas mesmas ocorrências de '0' por $s\alpha$.

$\phi^{\alpha}/0$ é uma fórmula aberta em α que expressa uma propriedade que desejamos generalizar, ϕ é a condição (1), $\forall\alpha(\phi^{\alpha}/0 \rightarrow \phi s^{\alpha}/0)$ é a condição (2) e $\forall\alpha\phi^{\alpha}/0$ é a conclusão (3).

PROBLEMA RESOLVIDO

10.15 Prove o seguinte teorema da aritmética formal:

$$\vdash \forall x(0 + x) = x$$

7. Muitos autores tratam a indução matemática como um axioma, em vez de uma regra de inferência. A diferença é uma questão de estilo; isso não muda o que podemos provar. Tratamos a indução matemática como uma regra de inferência para dar ênfase a suas similaridades com outras regras, particularmente *modus ponens*, e também porque ela comumente funciona como uma regra de inferência nas provas matemáticas.

Solução

Observe que esse teorema não afirma o mesmo que A3, pois as ocorrências de 'x' e '0' ocupam posições contrárias em relação ao sinal '+'. Apesar de sua semelhança com A3, esse teorema não pode ser provado diretamente dos axiomas, pois não temos regras que nos permitam obter, diretamente da forma 'a + 0', algo da forma '0 + a'. Essa prova requer o uso da regra I. Desejamos mostrar que todos os números têm a propriedade de que quando adicionados a zero, o resultado é o próprio número. A prova é:

1	$\forall x(x + 0) = x$	A3
2	$(0 + 0) = 0$	1 EU
3	$\quad (0 + a) = a$	H (para PC)
4	$\quad \forall x \forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
5	$\quad \forall y(0 + sy) = s(0 + y)$	4 EU
6	$\quad (0 + sa) = s(0 + a)$	5 EU
7	$\quad (0 + sa) = sa$	3, 6 =E
8	$(0 + a) = a \rightarrow (0 + sa) = sa$	3-7 PC
9	$\forall x((0 + x) = x \rightarrow (0 + sx) = sx)$	8 IU
10	$\forall x(0 + x) = x$	2, 9 I

Provamos, na passagem 2, que 0 tem a propriedade relevante. Na linha 9, deduzimos que, se qualquer número tem essa propriedade, então o sucessor desse número também tem. O teorema segue-se por indução matemática, na linha 10. Em relação ao enunciado formal da regra I, a fórmula contendo '0' é a que está na linha 2. Substituindo-se as duas últimas ocorrências de '0', nessa fórmula, por uma variável α (nesse caso, 'x'), resulta $\phi^{\alpha}/0$ que é '$(0 + x) = x$'. A fórmula $\forall\alpha(\phi^{\alpha}/0 \rightarrow \phi s^{\alpha}/0)$ está representada na passagem 9 e a conclusão $\forall\alpha\ \phi^{\alpha}/0$ aparece na linha 10.

O problema 10.15 ilustra um modelo de provas por indução matemática. Mostra-se que zero tem a propriedade relevante, e então a derivação hipotética seguida por uma passagem de PC e uma passagem de IU estabelece que, se qualquer número tem a propriedade, então o sucessor do número também tem. A derivação do enunciado de que zero tem a propriedade chama-se *caso básico* na prova. No problema 10.15, o caso básico consiste nas linhas 1 e 2. A derivação hipotética junto com as passagens de PC e IU (linhas de 3 a 9, no problema 10.15) é conhecida como *parte indutiva* da prova. Essa parte indutiva começa com uma hipótese chamada *hipótese indutiva* (linha 3).

PROBLEMA RESOLVIDO

10.16 Prove o seguinte teorema da aritmética formal:

$$\vdash \forall y\ \forall x(sx + y) = s(x + y)$$

Solução

Este teorema se relaciona com A4 de um modo análogo ao modo como o problema 10.15 se relaciona com A3. Entretanto, aqui existem duas variáveis quantificadas universalmente, em vez de uma só. Quando temos dois ou mais quantificadores universais iniciais, a indução é empregada de maneiras diferentes. Podemos provar que todos os números x têm a propriedade expressa pela fórmula aberta '$\forall y(sx + y) = s(x + y)$', ou que todos os números y têm a propriedade expressa pela fórmula aberta '$\forall x(sx + y) = s(x + y)$'. No primeiro caso dizemos que a indução é *sobre* 'x'; no segundo que é *sobre* 'y'. Algumas vezes um teorema pode ser provado por indução sobre uma variável, mas não pode em relação a outra variável. Ainda que se possa provar por indução sobre variáveis diferentes, a prova é muitas vezes mais fácil por indução sobre uma do que por indução sobre outra.

Nesse caso a prova por indução sobre 'y' é mais eficiente:

1	$\forall x(x + 0) = x$	A3
2	$(a + 0) = a$	1 EU
3	$sa = sa$	=I
4	$s(a + 0) = sa$	2, 3 =E
5	$(sa + 0) = sa$	1 EU
6	$(sa + 0) = s(a + 0)$	4, 5 =E
7	$\forall x(sx + 0) = s(x + 0)$	6 IU
8	$\forall x(sx + b) = s(x + b)$	*H* (para PC)
9	$(sa + b) = s(a + b)$	8 EU
10	$s(sa + b) = s(sa + b)$	=I
11	$s(sa + b) = ss(a + b)$	9, 10 =E
12	$\forall x\forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
13	$\forall y(sa + sy) = s(sa + y)$	12 EU
14	$(sa + sb) = s(sa + b)$	13 EU
15	$(sa + sb) = ss(a + b)$	11, 14 =E
16	$\forall y(a + sy) = s(a + y)$	12 EU
17	$(a + sb) = s(a + b)$	16 EU
18	$s(a + sb) = s(a + sb)$	=I
19	$s(a + sb) = ss(a + b)$	17, 18 =E
20	$(sa + sb) = s(a + sb)$	15, 19 =E
21	$\forall x(sx + sb) = s(x + sb)$	20 IU
22	$\forall x(sx + b) = s(x + b) \rightarrow \forall x(sx + sb) = s(x + sb)$	8-21 PC
23	$\forall y(\forall x(sx + y) = s(x + y) \rightarrow \forall x(sx + sy) = s(x + sy))$	22 IU
24	$\forall y\forall x(sx + y) = s(x + y)$	7, 23 I

O caso básico está nas passagens de 1 a 7, e a parte indutiva está nas passagens de 8 a 23.

Usamos, a seguir, os teoremas dos problemas 10.15 e 10.16 para provar uma lei fundamental da aritmética, a lei comutativa da adição.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.17 Prove que é um teorema formal da aritmética, a lei comutativa da adição

$$\vdash \forall y \forall x (x + y) = (y + x)$$

Solução

Aqui usamos indução sobre 'y'.

1	$\forall x(x + 0) = x$	A3
2	$(a + 0) = a$	1 EU
3	$\forall x(0 + x) = x$	IT 10.15
4	$(0 + a) = a$	3 EU
5	$(a + 0) = (0 + a)$	2, 4 =I
6	$\mid\ \forall x(x + b) = (b + x)$	*H* (para PC)
7	$\mid\ (a + b) = (b + a)$	7 EU
8	$\mid\ s(a + b) = s(a + b)$	=I
9	$\mid\ s(a + b) = s(b + a)$	7, 8 =E
10	$\mid\ \forall x\, \forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
11	$\mid\ \forall y(a + sy) = s(a + y)$	10 EU

12	$\quad (a + sb) = s(a + b)$	11 EU
13	$\quad \forall y \forall x(sx + y) = s(x + y)$	IT 10.16
14	$\quad \forall x(sb + y) = s(b + y)$	13 EU
15	$\quad (sb + a) = s(b + a)$	14 EU
16	$\quad (a + sb) = s(b + a)$	9, 12 =E
17	$\quad (a + sb) = (sb + a)$	15, 16 =E
18	$\quad \forall x(x + sb) = (sb + x)$	17 IU
19	$\forall x(x + b) = (b + x) \rightarrow \forall x(x + sb) = (sb + x)$	6-18 PC
20	$\forall y(\forall x(x + y) = (y + x) \rightarrow \forall x(x + sy) = (sy + x))$	19 IU
21	$\forall y\, \forall x(x + y) = (y + x)$	5, 20 I

O caso básico está nas passagens de 1 a 5. A parte indutiva está nas passagens de 6 a 20.

A aritmética formal descrita nesta seção é suficientemente forte para provar as leis que governam os inteiros não-negativos. É possível, usando símbolos desse sistema, definir outros predicados como 'é menor que' e 'é maior que' (ver problema suplementar IV) e adicionar símbolos funcionais tais como 'o quadrado de', 'a menor potência de 10 maior que', e assim por diante. Subtração e divisão não são símbolos funcionais para os inteiros não-negativos, pois dessas operações podem resultar números que não são inteiros não-negativos. Por isso, elas não são consideradas como símbolos funcionais; todavia, como veremos na próxima seção, a subtração será dada por outros meios.

A aritmética formal apresentada semanticamente incompleta; algumas verdades sobre os inteiros não-negativos, as quais são formuláveis nessa notação, não podem ser provadas. Essa incompletude não pode ser remediada. A célebre prova metalógica de Kurt Gödel estabelece que, algumas verdades expressáveis no sistema contendo os axiomas e regras dadas aqui (e, na verdade, qualquer sistema que contém axiomas mais fracos e regras), não podem ser provadas dentro do sistema.[8]

10.5 Definições formais

Muitas vezes a formalização de idéias relativamente simples produz fórmulas complexas. Essas fórmulas tornam-se mais compreensíveis quando reescritas ou abreviadas de modo sistemático. Esse é o papel da definição formal. O tipo mais simples de definição formal é a substituição de uma expressão por outra. Isso foi visto na seção anterior, onde os numerais foram considerados como abreviações de expressões envolvendo sucessores.

Mais complicadas, porém mais úteis, são as *definições contextuais* ou *definições em uso*. Numa definição contextual, um símbolo é definido não por sua substituição por outros símbolos, mas sim por mostrar de que modo fórmulas, nas quais ele ocorre, podem ser transcritas sistematicamente em fórmulas nas quais ele não ocorre. Considere a definição do símbolo subtração '–' na linguagem da aritmética formal:

D1: $(x - y) = z =_{df} (y + z) = x$

O símbolo '$=_{df}$' significa "é por definição". Assim, D1 estabelece que '$(x - y) = z$' é um modo alternativo de se escrever '$(y + z) = x$'. Observe que '–' não é somente uma abreviação de um outro símbolo ou mais símbolos. Pelo contrário, a fórmula em que '–' ocorre é transcrita numa fórmula diferente na qual 'x', 'y' e 'z' ocorrem numa ordem diferente.

Na definição as variáveis 'x', 'y' e 'z' podem representar qualquer nome, variável ou expressão funcional. Isso também se aplica às subfórmulas de uma fórmula. Portanto, D1 nos permite reescrever '$(2 + 1) = 3$'

8. Para uma introdução bastante acessível do teorema da incompletude de Gödel, ver Ernest Nagel e James R. Newman, *Gödel's Proof*, New York, New York University Press, 1958.

como '$(3 - 2) = 1$', '$(s0 + s0) = ss0$' como '$(ss0 - s0 = s0)$' e '$\forall x(x + 0) = x$' como '$\forall x(x - x) = 0$', e assim por diante.

As definições são usadas como regras de inferência nas provas, permitindo substituir qualquer versão da fórmula definida por outra. Contudo, elas não são de fato regras de inferência, pois não nos permitem inferir algo novo, mas somente reescrever fórmulas dadas numa notação alternativa.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

10.18 Prove o seguinte teorema da aritmética formal:

$$\vdash \forall x(x - 0) = x$$

Solução

O teorema é simplesmente outra maneira de se escrever a fórmula '$\forall x(0 + x) = x$'. Essa fórmula foi provada no problema 10.15. Portanto, sua prova é:

1	$\forall x(0 + x) = x$	IT 10.15
2	$\forall x(x = 0) = x$	1 D1

10.19 Prove o seguinte teorema da aritmética formal:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z((x - y) = z \rightarrow (x - z) = y)$$

Solução

1	$\vert\ (a - b) = c$	H (para PC)
2	$\vert\ (b + c) = a$	1 D1
3	$\vert\ \forall x\, \forall y(x + y) = (y + x)$	IT 10.17
4	$\vert\ \forall y(b + y) = (y + b)$	3 EU
5	$\vert\ (b + c) = (c + b)$	4 EU
6	$\vert\ (c + b) = a$	2, 5 =E
7	$\vert\ (a - c) = b$	6 D1
8	$(a - b) = c \rightarrow (a - c) = b$	1-7 PC
9	$\forall z((a - b) = z \rightarrow (a - z) = b)$	8 IU
10	$\forall y \forall z((a - y) = z \rightarrow (a - z) = y)$	9 IU
11	$\forall x \forall y \forall z((x - y) = z \rightarrow (x - z) = y)$	10 IU

O teorema é um condicional quantificado três vezes. Usamos PC envolvendo D1, para obter um condicional apropriado em 8, e então introduzir os quantificadores por IU.

Definições contextuais têm suas limitações. D1 no permite introduzir '–'(permitida para nomes, variáveis ou expressões funcionais) somente do lado esquerdo de um predicado identidade. Ela não nos permite usar '–' em outros contextos. Não permite, por exemplo, escrever '1 = (3 – 2)', onde '–' aparece do lado direito de '='. Assim, necessitamos de uma definição paralela:

D2: $z = (x - y) =_{\text{df}} (y + z) = x$

Mesmo com D2, existem contextos em que não podemos escrever '–', tal como na expressão '$s(0 - 0) = s0$', onde '–' ocorre dentro de uma expressão funcional. Introduzindo '–' na expressões funcionais, teremos problemas, pois, quando x é menor que y, $(x - y)$ não é um inteiro não-negativo e portanto não está no domínio. É preciso fazer restrições nessas definições, o que não faremos aqui.[9]

10.6 Descrições definidas

Uma das aplicações mais notáveis de definição contextual ocorre na teoria das descrições definidas, de Bertrand Russell. *Descrições definidas* são expressões que denotam um único objeto por enumeração das propriedades que o identificam univocamente. Usualmente, elas são frases começando com o artigo 'o'('a'). As seguintes expressões são descrições definidas:

O atual presidente dos Estados Unidos.

O pico do Monte Everest.

A grande torre em Paris.

O pai de Isaac.

Expressões funcionais podem ser utilizadas para formalizar algumas descrições definidas (por exemplo, 'o pai de Isaac' — ver Seção 10.3), porém para outras não. A frase 'a grande torre em', por exemplo, não é uma função se aplicada ao domínio de cidades (ou ainda em outros domínios), pois algumas cidades não têm uma grande torre e outras podem ter mais do que uma. A teoria de Russell possibilita descrições definidas em qualquer caso.

Russell emprega o símbolo 'ι' para 'o'/'a'. Tal como um quantificador, este símbolo deve ser seguido por uma variável. Por exemplo, se '*F*' é o predicado 'é o *o* pai de' (em oposição à frase funcional 'o pai de') e

---

9. Para uma discussão detalhada, ver Patrick Suppes, *Introduction to Logic*, New York, Van Nostrand, 1957; ou Benson Mates, *Elementary Logic*, 2ª ed., New York, Oxford University Press, 1972, pp. 197-204.

'*i*' é o nome de 'Isaac', a expressão 'o pai de Isaac' é escrita como '$\iota xFxi$'. Ela significa: "o (único) x tal que x é o pai de Isaac". Descrições definidas, tal como as expressões funcionais, atuam gramaticalmente como nomes. Para dizer 'o pai de Isaac foi um profeta' escrevemos '$P\iota xFxi$', com a descrição definida escrita após o predicado.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.20 Usando '*G*' para 'é grande', '*T*' para 'é uma torre', '*P*' para 'está em Paris' e '*M*' para 'é magnífica', formalize a sentença 'A grande torre em Paris é magnífica'.

Solução

A descrição definida 'a grande torre em Paris' é formalizada por '$\iota x((Gx \;\&\; Tx) \;\&\; Px)$'. Lida literalmente, ela significa "o x tal que x é grande, x é uma torre e x está em Paris". Para formalizar o enunciado, juntamos o predicado '*M*' à descrição: '$M\iota x((Gx \;\&\; Tx) \;\&\; Px)$'.

Em geral, uma descrição definida formalizada tem a forma 'ιxFx', onde 'x' pode ser substituída por qualquer variável e 'Fx' por qualquer sentença aberta nessa variável. Os enunciados mais simples contendo descrições definidas têm a forma '$G(\iota xFx)$', onde G pode ser substituído por qualquer predicado monádico. Essa forma pode ser lida como "*O F* é *G*". Os enunciados 'o pai de Isaac foi um profeta' e 'a grande torre em Paris é magnífica' têm essa forma. (No último caso, 'Fx' é substituída pela fórmula aberta '$(Gx \;\&\; Tx) \;\&\; Px$'.)

De acordo com a teoria de Russell, tais expressões são preferíveis à seguinte asserção complexa:

Existe exatamente um F que é G.

Ela pode ser formalizada sem o símbolo 'ι' no cálculo de predicados com identidade:

$$\exists x((Fx \;\&\; \forall y(Fy \rightarrow x = y)) \;\&\; Gx)$$

(compare com o item (*l*) do problema 6.36). O símbolo 'ι' pode ser definido contextualmente por ocorrências seguidas de predicados monádicos do seguinte modo:

$$\text{D: } G\iota xFx =_{\text{df}} \exists x((Fx \;\&\; \forall y(Fy \rightarrow x = y)) \;\&\; Gx)$$

onde '*G*' é um predicado monádico. Por essa definição, a fórmula do problema 10.20 é muito mais simples do que a seguinte fórmula:

$$\exists x((((Gx \;\&\; Tx) \;\&\; Px) \;\&\; \forall y(((Gy \;\&\; Ty) \;\&\; Py) \rightarrow x = y)) \;\&\; Mx)$$

Ela diz "Existe um x tal que x é grande, x é uma torre e x está em Paris, e para todo y, se y é grande, y é uma torre e y está em Paris, então y é o mesmo que x e x é magnífica", ou, sucintamente, "Existe exatamente uma grande torre x, em Paris, e x é magnífica".

Essa fórmula é uma wff do cálculo de predicados, independentemente de existir uma grande torre em Paris, ou muitas ou nenhuma. (Nos dois últimos casos ela seria falsa.) Como a definição elimina 'ι' em favor da terminologia do cálculo de predicados, não são necessários novos axiomas ou regras de inferência.

Todas as deduções de fórmulas que contêm descrições definidas podem ser estabelecidas pelas regras do cálculo de predicados com identidade. O seguinte problema ilustra a validade da introdução existencial sobre descrições definidas:

PROBLEMA RESOLVIDO

10.21 Prove:

$$G\iota xFx \vdash \exists xGx$$

Solução

1	$G\iota xFx$	P
2	$\exists x((Fx \,\&\, \forall y(Fy \rightarrow x = y)) \,\&\, Gx)$	1 D
3	$\quad \vert\ (Fa \,\&\, \forall y(Fy \rightarrow a = y)) \,\&\, Ga$	H (para EE)
4	$\quad \vert\ Ga$	3 &E
5	$\quad \vert\ \exists xGx$	4 IE
6	$\exists xGx$	2, 3-5 EE

Quando descrições definidas ocorrem em contextos mais complicados do que os que envolvem um predicado monádico podem surgir ambigüidades interessantes. Para esses casos, a definição D deve ser generalizada a fim de permitir que '$G\iota xFx$' signifique qualquer wff contendo uma única ocorrência de 'ιxFx'. Não abordaremos essas complexidades.[10]

10.7 Lógica modal

A lógica formal pode ser ampliada em outras direções. Uma extensão que se tem desenvolvido muito, é a *lógica modal*. Lógica modal — o nome é proveniente do latim '*modus*' (modo) — é uma lógica de expressões tais como 'ser possível', 'ser necessário', 'ser permitido', 'ser obrigado', e assim por diante, que expressam a "modalidade" gramatical de uma sentença. As expressões modais mais investigadas são 'É possível que' e 'É necessário que'. Na lógica modal, essas expressões são

10. Uma explicação pode ser encontrada em Jeffrey, op. cit., pp. 118-122. Um tratamento amplo, porém mais técnico, é dado em Donald Kalish, Richard Montague e Gary Mar, *Logic: Techniques of Form Reasoning*, 2ª ed., New York, Harcourt Brace Jovanovich, 1980, Caps. VI e VIII.

representadas, respectivamente, pelos *símbolos* '◊' e '□'.[11] Sintaticamente, eles funcionam como a negação, prefixando uma wff, obtendo-se uma nova wff. Todavia, semanticamente são bastante diferentes, pois eles não são funcional-veritativos; nem sempre podemos determinar o valor-verdade de uma sentença da forma '◊*P*' ou '□P' a partir do valor-verdade de '*P*'.

Por exemplo, suponha que um certo rio é poluído. Seja '*P*' representando esse enunciado. Então, '*P*' é verdadeira e '~*P*' é falsa. Contudo, os enunciados

'□*P*' (É necessário que esse rio seja poluído.)

e

'□ ~*P*' (É necessário que esse rio não seja poluído.)

são falsos. Nenhuma condição é necessária. A condição do rio é um fato contingente; ele não está destinado a ser de uma maneira ou de outra. Assim, o operador '□' pode produzir uma sentença falsa quando prefixa tanto uma sentença falsa como uma sentença verdadeira.

Analogamente, os enunciados

◊*P* (É possível que esse rio seja poluído.)

e

◊~*P* (É possível que esse rio não seja poluído.)

são verdadeiros. As duas condições são possíveis. Novamente, não podemos determinar o valor-verdade do enunciado modal a partir do valor-verdade de seu componente não-modal.

11. Algumas vezes a letra 'M', a primeira letra do termo germânico "möglicherweise" (possivelmente), é usada para 'é possível que' e 'L' (significando verdade lógica) ou 'N' para 'é necessário que'.

Existem duas exceções a essa regra. Se 'P' é verdadeira, então '$\Diamond P$' é certamente verdadeira, pois se algo é realmente o caso, ele é certamente possível. E se 'P' é falsa, então '$\Box P$' é falsa, pois o que não é o caso certamente não é necessário.

Em geral, o valor-verdade de um enunciado modal não depende somente dos valores-verdade reais de seus componentes, mas também dos valores-verdade que esses componentes possam ter. O valor-verdade de um enunciado modal pode ser pensado como uma função dos valores-verdade de seus componentes em vários *mundos possíveis.*

Enunciados da forma '$\Diamond P$' são verdadeiros se e somente se 'P' é verdadeira em pelo menos um mundo possível. Visto que o mundo real (o universo) é um mundo possível, se 'P' é verdadeira no mundo real então, '$\Diamond P$' é verdadeira. Contudo, '$\Diamond P$' pode ser verdadeira mesmo que 'P' seja falsa no mundo real, contanto que 'P' seja verdadeira em algum mundo possível.

Analogamente, enunciados da forma '$\Box P$' são verdadeiros se e somente se 'P' é verdadeira em todos os mundos possíveis. Assim, se 'P' é falsa no mundo real, então '$\Box P$' é falsa . Mas se 'P' é verdadeira no mundo real, '$\Box P$' pode ser tanto verdadeira como falsa, dependendo quando ou não 'P' é verdadeira em todos os outros mundos possíveis.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.22 Formalize os seguintes enunciados usando os operadores '$\Box$' e '$\Diamond$' e a letra sentencial 'P' para 'Pete é carteiro'.

a) É impossível que Pete seja carteiro.

b) Pete pode não ser carteiro.

c) Não é verdade que Pete é necessariamente carteiro.

d) É necessário que Pete não seja carteiro.

e) Necessariamente, se Pete é carteiro, então Pete é carteiro.

f) É necessariamente possível que Pete seja carteiro.

g) É possível que Pete seja carteiro e possível que ele não seja.

h) É impossível que Pete seja e não seja carteiro.

i) Se é necessário que Pete seja carteiro, então é necessário que é necessário que Pete seja carteiro.

j) É necessário que é necessário que, se Pete é carteiro, então Pete é carteiro.

Solução

a) $\sim\Diamond P$

b) $\Diamond\sim P$

c) $\sim\Box P$

d) $\Box\sim P$

e) $\Box(P \rightarrow P)$

f) $\Box\Diamond P$

g) $\Diamond P \;\&\; \Diamond\sim P$

h) $\sim\Diamond(P \;\&\; \sim P)$

i) $\Box P \rightarrow \Box\Box P$

j) $\Box\Box(P \rightarrow P)$

Observe nos significados diferentes quando as posições relativas de um operador modal e um sinal de negação são intercambiadas, como nos itens (*a*) e (*b*) ou nos itens (*c*) e (*d*).

Oos termos 'possível' e 'necessário', por si sós, têm vários significados. Existem condições que são *logicamente* possíveis (elas não violam as leis da lógica), mas não *fisicamente* possíveis (elas violam as leis da física). Por exemplo, é logicamente possível, mas não fisicamente possível, acelerar um corpo a uma velocidade acima da velocidade da luz. Existem, ainda, condições que são fisicamente possíveis, mas que não são *praticamente* possíveis (pelo menos com tecnologias atuais). Por exemplo, é fisicamente possível suprir toda a energia que a Terra precisa com energia solar, mas isso não é praticamente possível. Existem, ainda, outros sentidos de possibilidade.

Os diferentes conceitos de possibilidade têm lógicas distintas e, para algumas, a lógica apropriada é ainda um assunto polêmico. Estamos interessados exclusivamente na lógica da possibilidade lógica. Assim, consideramos algo como possível se podemos descrevê-lo sem inconsistência. Mas o que é, exatamente, inconsistência? Até agora caracterizamos essa noção como falsidade devida somente à semântica. Isso fica claro quando trabalhamos com uma linguagem formal que tem semântica bem definida (por exemplo, lógica proposicional ou de predicados), mas não muito claro para as linguagens naturais.

Alternativamente, dizemos que uma coisa é logicamente possível se sua descrição não viola as leis da lógica. Mas, o que é uma lei da lógica? Existe um acordo universal que os teoremas do cálculo de predicados devam ser considerados como leis lógicas. Mas quais dos teoremas: da lógica T (Seção 10.1), da lógica de segunda ordem (Seção 10.2) ou da aritmética formal (Seção 10.4)? Exatamente, até onde o domínio da lógica se estende? Além do mais, se a lógica inclui a aritmética formal (que como vimos é incompleta), poderíamos considerar as verdades aritméticas, que não podem ser provadas no sistema da aritmética formal, como leis lógicas?

Existe aqui uma questão profunda. Na Seção 2.3, definimos um argumento válido como sendo aquele que é logicamente impossível (não logicamente possível) que sua conclusão seja falsa enquanto suas premissas são verdadeiras. Se definirmos possibilidade lógica em termos de leis lógicas, como podemos definir a noção de uma lei lógica sem pressupor algum conceito de validade, tornando as definições viciosamente circulares? Ajudaria o conceito de mundo possível ou é, também, circular ou insuficientemente claro?

Essas dificuldades têm levado alguns filósofos a rejeitar as noções de possibilidade e de necessidade, juntamente com a concepção de validade e algumas idéias correlacionadas,[12] porém essa posição parece drástica. Contudo, deve se admitir que esses conceitos aumentam as

12. Mais notavelmente, W. V. O. Quine, em "Two Dogmas of Empiricism", in *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1953. Para uma discussão dessas e de outras críticas da lógica modal, ver Susan Haack, *Philosophy of Logics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1978, Cap. 10.

dificuldades sem soluções. Felizmente, o desenvolvimento formal de várias lógicas modais não depende de soluções para essas dificuldades filosóficas, de modo que muito têm progredido.

Esta seção apresenta um sistema proposicional de lógica modal conhecido como S5. Não discutiremos lógica modal quantificada. O sistema S5 é o mais forte dos cinco sistemas modais descobertos pelo lógico C. I. Lewis e é considerado como o sistema que melhor codifica o conceito de possibilidade lógica. Todavia, ele pode ser demasiadamente poderoso para outros conceitos de possibilidade.

Nossa versão de S5 se baseia na lógica proposicional do Capítulo 3, mais quatro esquemas de axiomas e uma regra de inferência. Um *esquema de axioma* é uma fórmula cujas instâncias substitutivas são consideradas como axioma. (Vimos na seção 3.5 que uma instância substitutiva de uma wff é o resultado de substituir nenhuma ou mais de uma de suas letras sentenciais por wffs; cada ocorrência da mesma letra sentencial é substituída pela mesma wff.) Desse modo, um esquema de axioma representa muitos axiomas. Os esquemas de axiomas são os seguintes:

AS1	$\Diamond P \leftrightarrow \sim\Box\sim P$
AS2	$\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$
AS3	$\Box \mathrm{P} \rightarrow P$
AS4	$\Diamond P \rightarrow \Box\Diamond P$

Qualquer instância substitutiva desses axiomas é considerada como axioma. Por exemplo, as seguintes instâncias substitutivas de AS1 são axiomas:

$\Diamond Q \leftrightarrow \sim\Box\sim Q$

$\Diamond\Box S \leftrightarrow \sim\Box\sim\Box S$

$\Diamond(P \,\&\, R) \leftrightarrow \sim\Box\sim(P \,\&\, R)$

AS1 afirma que é possível P se e somente se não é necessário não P.[13] Em outras palavras, ele afirma que 'P' é verdadeira em algum mundo possível se e somente se não é o caso que '$\sim P$' é verdadeira em todos os mundos possíveis. Isso é correto, pois '$\sim P$' é falsa em qualquer mundo possível no qual 'P' é verdadeira.

AS2 afirma que se é necessário que, se P então Q, então, se é necessário P, é necessário Q. Em termos de mundos possíveis, isso significa que se '$P \rightarrow Q$' é verdadeira em todos os mundos possíveis, então, se 'P' é verdadeira em todos os mundos possíveis, 'Q' também o é.

AS3 afirma que se é necessário P, então P. Ou seja, se 'P' é verdadeira em todos os mundos possíveis, então 'P' é verdadeira no mundo real (ou em qualquer mundo em que consideremos a veracidade do axioma).

AS4 é o único axioma cuja verdade pode não ser óbvia. A intuição subjacente é: o que consideramos como logicamente possível não é uma questão de fatos contingentes, mas está necessariamente fixado pelas leis da lógica. Assim, se é possível P, então é necessário que é possível P.[14]

Na linguagem dos mundos possíveis, AS4 significa: se 'P' é verdadeira em algum mundo possível, então ela é verdadeira em todos os mundos possíveis em que 'P' é verdadeira em algum mundo possível.

Além dos quatro axiomas, S5 tem uma regra de inferência — a regra da necessitação:

<u>Necessitação (N)</u>: Se ϕ foi provado como um teorema, então podemos inferir $\Box\phi$.

---

13. Em diversos tratamentos da lógica modal, AS1 é uma definição; a linguagem de tais sistemas contém somente um operador modal, '$\Box$', e '$\Diamond$' é introduzido como abreviação de '$\sim\Box\sim$'. Contudo, tratando AS1 como um esquema de axioma, obtêm-se resultados equivalentes. Outros sistemas têm '$\Diamond$' como o único operador modal e tratam '$\Box$' como abreviação de '$\sim\Diamond\sim$'. (O problema 10.24 fornece uma pista do motivo desse trabalho.) Esses sistemas produzem resultados equivalentes.

14. Esse raciocínio não é plausível para algumas formas não-lógicas de possibilidade; assim, AS4 é rejeitado em algumas versões da lógica modal. Se omitirmos AS4 do sistema, obtemos uma lógica modal mais fraca, o sistema modal T. Outras versões da lógica modal são construídas substituindo-se AS4 por outros axiomas mais fracos. (Ver os comentários após o problema 10.28.)

Em outras palavras, os teoremas, são considerados como verdades necessárias. A regra N nos permite inferir $\Box\phi$ de ϕ somente se ϕ é um teorema. Por exemplo, o seguinte uso de N não é correto:

1	P	P
2	$\Box P$	N (incorreto)

Todavia, qualquer fórmula numa derivação que não contém suposições (a fórmula não faz parte de uma derivação hipotética) é um teorema, pois pode ser provada sem se fazer uso das suposições que a precede na derivação.

Provemos alguns teoremas de S5. As equivalências da lógica proposicional (Seção 3.7), que são válidas para a lógica modal figuram nas provas. O primeiro teorema estabelece que: se P então é possível P.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

10.23 Prove o teorema:

$$\vdash P \rightarrow \Diamond P$$

Solução

1	$\Box{\sim}P \rightarrow {\sim}P$	AS3
2	${\sim\sim}P \rightarrow {\sim}\Box{\sim}P$	1TRANS
3	$P \rightarrow {\sim}\Box{\sim}P$	2DN
4	$\Diamond P \leftrightarrow {\sim}\Box{\sim}P$	AS1
5	${\sim}\Box{\sim}P \rightarrow \Diamond P$	4 $\leftrightarrow$E
6	$P \rightarrow \Diamond P$	3, 5

Note que usamos uma instância substitutiva de AS3 na linha 1. A prova pode ser simplificada, tratando AS1 como uma equivalência do modo descrito na Seção 3.7. Assim, em vez das passagens 4, 5 e 6, temos, simplesmente:

4	$P \rightarrow \Diamond P$	3 AS1

10.24 Prove o teorema:

$$\vdash \Box P \leftrightarrow {\sim}\Diamond{\sim}P$$

Solução

1	$\Diamond{\sim}P \leftrightarrow {\sim}\Box{\sim}{\sim}P$	AS1
2	$\Diamond{\sim}P \leftrightarrow {\sim}\Box P$	1 DN
3	$\Diamond{\sim}P \rightarrow {\sim}\Box P$	2 $\leftrightarrow$E
4	${\sim}\Box P \rightarrow \Diamond{\sim}P$	2 $\leftrightarrow$E
5	${\sim}{\sim}\Box P \rightarrow {\sim}\Diamond{\sim}P$	3 TRANS
6	${\sim}\Diamond{\sim}P \rightarrow {\sim}{\sim}\Box P$	4 TRANS
7	${\sim}{\sim}\Box P \leftrightarrow {\sim}\Diamond{\sim}P$	5, 6 $\leftrightarrow$I
8	$\Box P \leftrightarrow {\sim}\Diamond{\sim}P$	7 DN

Compare esse teorema com AS1. Esse resultado pode ser provado se considerarmos AS1 como uma equivalência. A prova é deixada para o leitor como exercício.

10.25 Prove o teorema:

$$\vdash {\sim}\Diamond(P \;\&\; {\sim}P)$$

Solução

1	$\sim(P \,\&\, \sim P)$	IT 3.41
2	$\Box\sim(P \,\&\, \sim P)$	1 N
3	$\Box\sim(P \,\&\, \sim P) \leftrightarrow \sim\Diamond\sim\sim(P \,\&\, \sim P)$	IT 10.24
4	$\Box\sim(P \,\&\, \sim P) \rightarrow \sim\Diamond\sim\sim(P \,\&\, \sim P)$	3 $\leftrightarrow$E
5	$\sim\Diamond\sim\sim(P \,\&\, \sim P)$	2, 4 MP
6	$\sim\Diamond(P \,\&\, \sim P)$	5 DN

10.26 Prove o teorema:

$$\vdash \Box\Box P \rightarrow P$$

Solução

1	$\Box P \rightarrow P$	AS3
2	$\Box(\Box P \rightarrow P)$	1N
3	$\Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow (\Box\Box P \rightarrow \Box P)$	AS2
4	$\Box\Box P \rightarrow \Box P$	2, 3 MP
5	$\Box\Box P \rightarrow P$	1, 4 SH

10.27 Prove o teorema:

$$\vdash \Diamond\Box P \rightarrow \Box P$$

Solução

1	$\Diamond\Box P \leftrightarrow \sim\Box\sim\Box P$	AS1
2	$\Diamond\Box P \rightarrow \sim\Box\sim\Box P$	2 $\leftrightarrow$E
3	$\Box P \leftrightarrow \sim\Diamond\sim P$	IT 10.24
4	$\Box P \rightarrow \sim\Diamond\sim P$	3 $\leftrightarrow$E
5	$\sim\sim\Diamond\sim P \rightarrow \sim\Box P$	4 TRANS
6	$\Diamond\sim P \rightarrow \sim\Box P$	5 DN
7	$\Box(\Diamond\sim P \rightarrow \sim\Box P)$	6 N
8	$\Box(\Diamond\sim P \rightarrow \sim\Box P) \rightarrow (\Box\Diamond\sim P \rightarrow \Box\sim\Box P)$	AS2
9	$\Box\Diamond\sim P \rightarrow \Box\sim\Box P$	7, 8 MP
10	$\sim\Box\sim\Box P \rightarrow \sim\Box\Diamond\sim P$	9 TRANS
11	$\Diamond\Box P \rightarrow \sim\Box\Diamond\sim P$	2, 10 SH
12	$\Diamond\sim P \rightarrow \Box\Diamond\sim P$	AS4
13	$\sim\Box\Diamond\sim P \rightarrow \sim\Diamond\sim P$	12 TRANS
14	$\Diamond\Box P \rightarrow \sim\Diamond\sim P$	11, 13 SH
15	$\sim\Diamond\sim P \rightarrow \Box P$	3 $\leftrightarrow$E
16	$\Diamond\Box P \rightarrow \Box P$	14, 15 SH

Esse teorema é surpreendente. Para ver isso, considere o fato de que muitos teólogos sustentam que Deus existe, necessariamente. Se interpretamos 'P' como 'Deus existe', então o teorema afirma que se é possível que é necessário que Deus existe, então necessariamente Deus existe. Assim, dada a suposição de que é possível que é necessário que Deus existe, então por *modus ponens* é necessário que Deus existe e, portanto, por AS3, Deus existe! O raciocínio parece impecável, contanto que a possibilidade e necessidade sejam entendidas no sentido lógico que é como as leis de S5 impõem. Contudo, a suposição de que é possível que é necessário que Deus existe é polêmica. Geralmente os lógicos, não a consideram como um argumento correto.

PROBLEMA RESOLVIDO

10.28 Prove o teorema:

$$\vdash \Box P \rightarrow \Box\Box P$$

Solução

1	$\Box P \rightarrow \Diamond\Box P$	IT 10.23
2	$\Diamond\Box P \rightarrow \Box\Diamond\Box P$	AS4
3	$\Box P \rightarrow \Box\Diamond\Box P$	1, 2 SH
4	$\Diamond\Box P \rightarrow \Box \mathrm{P}$	IT 10.27
5	$\Box(\Diamond\Box P \rightarrow \Box P)$	4N
6	$\Box(\Diamond\Box \mathrm{P} \rightarrow \Box \mathrm{P}) \rightarrow (\Box\Diamond\Box P \rightarrow \Box\Box P)$	AS2
7	$\Box\Diamond\Box P \rightarrow \Box\Box P$	5, 6 MP
8	$\Box P \rightarrow \Box\Box P$	3, 7 SH

Esse teorema afirma que se uma proposição é necessária, então ela é necessariamente necessária. Algumas vezes, este teorema é considerado como um esquema de axioma em lugar de AS4. O sistema resultante, conhecido como S4, é mais fraco que S5 (em particular, AS4 e o problema 10.27 não são teoremas em S4), porém mais plausível para algumas aplicações. [15]

No Capítulo 4 vimos que o condicional material não é o único tipo de condicional; na verdade, ele é o tipo mais fraco. Em lógica modal podemos definir o *condicional estrito*, que é um dos mais fortes. Tal como

15. Para um amplo tratamento da lógica modal, ver G. E. Hughes e M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen, 1968; ou Brian F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

os outros operadores modais, o condicional estrito que representamos pelo símbolo '$\rightarrow\!\!\!\!3$'[16], não é um funcional-veritativo. Enunciados da forma '$P \rightarrow\!\!\!\!3\ Q$' são freqüentemente considerados como abreviações de '$\Box(P \rightarrow Q)$'. Assim, P implica estritamente Q se e somente se o condicional material '$P \rightarrow Q$' é necessário. Quando '$\Box$' representa necessidade lógica, '$P \rightarrow\!\!\!\!3\ Q$' é verdadeira se e somente se a inferência com 'P' como premissa e 'Q' como conclusão é válida. Usando a notação do condicional estrito, AS2 pode ser escrito como:

$$(P \rightarrow\!\!\!\!3\ Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

Em nossa versão de lógica modal, os operadores '$\Box$' e '$\Diamond$' signifiquem "é necessário que" e "é possível que", respectivamente. Contudo, em algumas versões da lógica modal esses operadores têm outras interpretações. Por exemplo, existem *lógicas deônticas* (lógica lidando com conceitos morais), em que '$\Box$' significa "é obrigatório ser o caso que" ou "deve ser o caso que" e '$\Diamond$' significa "é permitido que". Existem, também, *lógicas epistêmicas* (lógicas do conhecimento e da crença), em que esses operadores, ou operadores similares a eles, são interpretados como representando vários conceitos relacionados com conhecimento. Existem, ainda, *lógicas temporais*, em que eles representam várias noções temporais[17] Essas interpretações requerem sistemas formais diferentes e geralmente mais fracos do que S5.

Outra lógica relacionada com a lógica da possibilidade e necessidade é a lógica do condicional *contrafático* ou *subjuntivo*. São tipos de condicionais expressos pelo modo subjuntivo, como, por exemplo, na sentença 'Se eu não tivesse ficado doente, eu poderia ter participado da corrida'. Condicionais contrafáticos são intermediários, em potência,

16. Em sistemas em que se usa '$\supset$' para o condicional material, o condicional estrito é representado pelo símbolo '$\rightarrow$'.

17. Uma boa introdução à lógica deôntica é Risto Hilpinen, ed., *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, Dordrecht, Netherlands, D. Reidel, 1981. O trabalho clássico em lógica epistêmica é Jaakko Hintikka, *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, N. Y., Cornell University Press, 1962. Para uma introdução à lógica temporal, ver A. N. Prior, *Time and Modality*, Westport, Conn., Greenwood Press, 1957.

entre condicional material e estrito, e sua lógica é diferente da lógica de qualquer um dos dois.[18]

Problemas suplementares

I. Suponha que estendemos o cálculo de predicados sem identidade a uma lógica de segunda ordem e que introduzimos o predicado identidade assumindo a Lei de Leibniz como a seguinte definição:

LL: $x = y =_{\text{df}} \forall P(Px \leftrightarrow Py)$

Prove as seguintes leis da identidade como teoremas dessa lógica de segunda ordem:

1) $a = b \rightarrow b = a$
2) $(Fa \,\&\, a = b) \rightarrow Fb$
3) $(a = b \,\&\, b = c) \rightarrow a = c$
4) $\exists P(Pa \,\&\, {\sim}Pb) \rightarrow {\sim}a = b$
5) $a = b \leftrightarrow \forall P(Pa \rightarrow Pb)$

II. Prove os seguintes teoremas do cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais:

1) $\forall x \exists y\, y = f(x)$
2) $\forall x\, \forall y\, x = y \rightarrow \forall x\, \mathrm{f}(x) = x$
3) $\forall x \forall y({\sim}\mathrm{f}(x) = f(y) \rightarrow {\sim}x = y)$
4) $\forall x\, Fg(x) \rightarrow \forall x Fg(g(x))$
5) $\forall x\, \forall y((x = \mathrm{f}(y) \,\&\, y = g(x)) \rightarrow x = f(g(x)))$

---

18. Uma boa introdução à lógica dos condicionais contrafáticos é David Lewis, *Counterfactuals*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1973.

III. Prove os seguintes teoremas da aritmética formal:

1) $\sim 1 = 2$
2) $(1 + 1) = 2$
3) $(1 \cdot 1) = 1$
4) $\forall x \exists y y = sx$
5) $\forall x \sim x = sx$
6) $\forall x\, (0 \cdot x) = 0$
7) $\forall y\, \forall x (x \cdot y) = (y \cdot x)$

IV. Os predicados 'é menor que' ('<'), 'é maior que' ('>'), 'é menor ou igual a' ('≤') e 'é maior ou igual a' ('≥') são definidos na aritmética formal do seguinte modo:

D3 $x < y =_{df} \exists z(\sim 0 = z \ \&\ (x + z = y)$

D4 $x \leq y =_{df} x\ < y \vee\ x = y$

D5 $x > y =_{df} y\ < x$

D6 $x \geq y =_{df} y \leq x$

Usando essas definições e o D1, prove os seguintes teoremas da aritmética formal:

1) $\forall x \forall y (x < y \leftrightarrow y > x)$
2) $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x \leq y)$
3) $\forall x \forall y (x > y \rightarrow x \geq y)$
4) $\forall x\, x \leq x$
5) $\forall x\, \exists y\, y\ > x$
6) $\forall x\, \forall y (x - y) \leq\ x$
7) $\forall x\, 0 < sx$

V. Usando a teoria das descrições de Russell, formalize os seguintes argumentos e prove sua validade usando '*a*' para 'Andy', '*C*' para 'é uma cadeira', '*L*' para 'gosta' e '*B*' para 'é azul'.

1) A cadeira que Andy gosta é azul. Portanto, Andy gosta de uma cadeira.
2) A cadeira que Andy gosta é a azul. Portanto, existe no máximo uma cadeira que Andy gosta.
3) A cadeira que Andy gosta é azul. Portanto, toda cadeira que Andy gosta é azul.
4) Não é o caso que a cadeira que Andy gosta é azul. Andy gosta de uma cadeira azul. Portanto, Andy gosta de pelo menos duas cadeiras azuis.
5) Não é o caso que a cadeira que Andy gosta é azul. Portanto, se existe exatamente uma cadeira que Andy gosta, então Andy gosta de uma cadeira que não é azul.

VI. Prove os seguintes teoremas da lógica modal S5:

1) $P \rightarrow \Diamond\Diamond P$
2) $\sim\Diamond P \leftrightarrow \Box\sim P$
3) $\Diamond\sim P \leftrightarrow \sim\Box P$
4) $\sim\Diamond\sim\Diamond(P \vee \sim P)$
5) $\Box(P \,\&\, Q) \leftrightarrow (\Box P \,\&\, \Box Q)$
6) $\sim\Diamond(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim\Diamond P \,\&\, \sim\Diamond Q)$
7) $\Diamond(P \vee Q) \leftrightarrow (\Diamond P \vee \Diamond Q)$
8) $(\Box P \vee \Box Q) \rightarrow \Box(P \vee Q)$

Respostas a alguns problemas suplementares

I. 5)

1	$a = b$	H (para PC)
2	$\forall P(Pa \leftrightarrow Pb)$	1 LL
3	$Fa \leftrightarrow Fb$	1 EU
4	$Fa \rightarrow Fb$	1 $\leftrightarrow$ E
5	$\forall P(Pa \rightarrow Pb)$	4 IU
6	$a = b \rightarrow \forall P(Pa \rightarrow Pb)$	1, 5 PC
7	$\forall P(Pa \rightarrow Pb)$	H (para PC)
8	Fb	H (para PC)
9	$\sim Fa$	H (para RAA)
10	$\sim Fa \rightarrow \sim Fb$	7 IU
11	$\sim Fb$	9, 10 MP
12	$Fb \;\&\; \sim Fb$	8, 11 &I
13	$\sim\sim Fa$	9-12 RAA
14	Fa	13 ~E
15	$Fb \rightarrow Fa$	8-14 PC
16	$Fa \rightarrow Fb$	7 IU
17	$Fa \leftrightarrow Fb$	15, 16 $\leftrightarrow$ I
18	$\forall P(Pa \leftrightarrow Pb)$	17 IU
19	$a = b$	18 LL
20	$\forall P\,(Pa \rightarrow Pb) \rightarrow a = b$	7, 19 PC
21	$a = b \leftrightarrow \forall P(Pa \rightarrow Pb)$	6, 20 $\leftrightarrow$I

Comentário: esse teorema é importante, pois mostra que a condição de que a e b têm as mesmas propriedades (isto é, $a = b$) é equivalente à condição mais simples de que b tem todas as propriedades que a tem. Assim, a Lei de Leibniz pode ser formulada como:

$$a = b =_{\text{df}} \forall P(Pa \rightarrow Pb)$$

Observe como 'P' é instanciada pelo predicado '$\sim F$' na passagem 10.

II. 5)

1	$\quad\mid\ a = f(b)\ \&\ b = g(a)$	H (para PC)
2	$\quad\mid\ a = f(b)$	1 &E
3	$\quad\mid\ b = g(a)$	1 &E
4	$\quad\mid\ a = f(g(a))$	2, 3 =E
5	$(a = f(b)\ \&\ b = g(a)) \rightarrow a = f(g(a))$	1-4 PC
6	$\forall y((a = f(y)\ \&\ y = g(a)) \rightarrow a = f(g(a)))$	5 IU
7	$\forall x \forall y((x = f(y)\ \&\ y = g(x)) \rightarrow x = f(g(x)))$	6 IU

III. 5)

1	$\forall x \sim 0 = sx$	A1
2	$\sim 0 = s0$	1 EU
3	$\quad\mid\ \sim a = sa$	H (para PC)
4	$\quad\mid\ \forall x \forall y(sx = sy \rightarrow x = y)$	A2
5	$\quad\mid\ \forall y(sa = sy \rightarrow a = y)$	4 EU
6	$\quad\mid\ sa = ssa \rightarrow a = sa$	5 EU
7	$\quad\mid\ \sim sa = ssa$	3, 6 MT
8	$\sim a = sa \rightarrow \sim sa = ssa$	3-7 PC
9	$\forall x(\sim x = sx \rightarrow \sim sx = ssx)$	8 IU
10	$\forall x \sim x = sx$	2, 9 I

IV. 5)

1	$\forall x \sim 0 = sx$	A1
2	$\sim 0 = s0$	1 EU
3	$\forall x \forall y(x + sy) = s(x + y)$	A4
4	$\forall y(a + sy) = s(a + y)$	3 EU
5	$(a + s0) = s(a + 0)$	4 EU
6	$\forall x(x + 0) = x$	A3
7	$(a + 0) = a$	6 EU
8	$(a + s0) = sa$	5, 7 = E
9	$\sim 0 = s0 \ \& \ (a + s0) = sa$	2 ,8 &I
10	$\exists z(\sim 0 = z \ \& \ (a + z) = sa)$	9 IE
11	$a < sa$	10 D3
12	$sa > a$	11 D5
13	$\exists y \ y > a$	12 IE
14	$\forall x \exists y \ y > x$	13 IU

V. 5) A forma do argumento é:

$\sim B \ \iota x(Cx \ \& \ Lax) \vdash$

$\exists x((Cx \ \& \ Lax) \ \& \ \forall y((Cy \ \& \ Lay) \rightarrow x = y)) \rightarrow \exists x((Cx \ \& \ Lax) \ \& \sim Bx)$

Sua prova é a seguinte:

1	$\sim B \ \iota \ x(Cx \ \& \ Lax)$	*P*
2	$\sim \exists x(((C \ x \ \& \ Lax) \ \& \ \forall y((Cy \ \& \ Lay) \rightarrow x = y)) \ \& \ Bx)$	1 D
3	$\forall x \sim(((Cx \ \& \ Lax) \ \& \ \forall y((Cy \ \& \ Lay) \rightarrow x = y)) \ \& \ Bx)$	2 EQ

4 $\exists x((Cx \,\&\, Lax) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow x = y))$	H(para PC)
5 $(Cb \,\&\, Lab) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow b = y)$	H (para EE)
6 $\sim(((Cb \,\&\, Lab) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow b = y)) \,\&\, Bb)$	3 EU
7 $\sim((Cb \,\&\, Lab) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow b = y)) \vee \sim Bb$	6 DM
8 $\sim\sim((Cb \,\&\, Lab) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow b = y))$	5 DN
9 $\sim Bb$	7, 8 SD
10 $Cb \,\&\, Lab$	5 &E
11 $(Cb \,\&\, Lab) \,\&\, Bb$	9, 10 &I
12 $\exists x((Cx \,\&\, Lax) \,\&\, \sim Bx)$	11 IE
13 $\exists x((Cx \,\&\, Lax) \,\&\, \sim Bx)$	4, 5-12 EE
14 $\exists x((Cx \,\&\, Lax) \,\&\, \forall y((Cy \,\&\, Lay) \rightarrow x = y)) \rightarrow \exists x((Cx \,\&\, Lax) \,\&\, \sim Bx)$	4-13 PC

VI. 5)

1 $P \,\&\, Q$	H (para PC)
2 P	2 &E
3 $(P \,\&\, Q) \rightarrow P$	1-2 PC
4 $\Box((P \,\&\, Q) \rightarrow P)$	3 N
5 $\Box((P \,\&\, Q) \rightarrow P) \rightarrow (\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box P)$	AS2
6 $\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box P$	4, 5 MP
7 $P \,\&\, Q$	H (para PC)
8 Q	7 &E
9 $(P \,\&\, Q) \rightarrow Q$	7-8 PC
10 $\Box((P \,\&\, Q) \rightarrow Q)$	9 N
11 $\Box((P \,\&\, Q) \rightarrow Q) \rightarrow (\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box Q)$	AS2

12	$\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box Q$	10, 11 MP
13	$\quad\mid\ \Box(P \,\&\, Q)$	*H* (para PC)
14	$\quad\mid\ \Box P$	6, 13 MP
15	$\quad\mid\ \Box Q$	12, 13 MP
16	$\quad\mid\ \Box P \,\&\, \Box Q$	14, 15 &I
17	$\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow (\Box P \,\&\, \Box Q)$	13-16 PC
18	$P \rightarrow (Q \rightarrow (P \,\&\, Q))$	IT prob. sup. VI (2), Cap. 3
19	$\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \,\&\, Q)))$	18 N
20	$\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \,\&\, Q))) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow (P \,\&\, Q)))$	AS2
21	$\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow (P \,\&\, Q))$	19, 20 MP
22	$\Box(Q \rightarrow (P \,\&\, Q)) \rightarrow (\Box Q \rightarrow \Box(P \,\&\, Q))$	AS2
23	$\Box P \rightarrow (\Box Q \rightarrow \Box(P \,\&\, Q))$	21, 22 SH
24	$\quad\mid\ \Box P \,\&\, \Box Q$	H (para PC)
25	$\quad\mid\ \Box P$	24 &E
26	$\quad\mid\ \Box Q$	24 &E
27	$\quad\mid\ \Box Q \rightarrow \Box(P \,\&\, Q)$	23, 25 MP
28	$\quad\mid\ \Box(P \,\&\, Q)$	26, 27 MP
29	$(\Box P \,\&\, \Box Q) \rightarrow \Box(P \,\&\, Q)$	24-28 PC
30	$\Box(P \,\&\, Q) \leftrightarrow (\Box P \,\&\, \Box Q)$	17, 29 $\leftrightarrow$I

A estratégia geral é $\leftrightarrow$I. As primeiras 17 linhas da prova estabelecem o primeiro dos dois condicionais requeridos. Das linhas de 18 a 29 estabelecem o segundo. Nas linhas de 1 a 12 provamos dois condicionais, '$\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box P$' *e* '$\Box(P \,\&\, Q) \rightarrow \Box Q$', os quais são necessários na prova do primeiro condicional.

10)

1	$\Diamond(P \,\&\, Q)$	H (para PC)
2	$\sim\Box\sim(P \,\&\, Q)$	1 AS1
3	$\sim\Box(\sim P \vee \sim Q)$	2 DM
4	$(\Box\sim P \vee \Box\sim Q) \rightarrow \Box(\sim P \vee \sim Q)$	IT prob. supl. VI (8)
5	$\sim(\Box\sim P \vee \Box\sim Q)$	3, 4 MT
6	$\sim\Box\sim P \,\&\, \sim\Box\sim Q$	5 DM
7	$\Diamond P \,\&\, \sim\Box\sim Q$	6 AS1
8	$\Diamond P \,\&\, \Diamond Q$	7 AS1
9	$\Diamond(P \,\&\, Q) \rightarrow (\Diamond P \,\&\, \Diamond Q)$	1-8 PC

Essa prova usa muitas equivalências. DM é usada nas passagens 3 e 6, e AS1 é usada como equivalência nas passagens 2, 7 e 8.

GLOSSÁRIO

Absorção (Abs). A regra de inferência válida $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \,\&\, Q)$.

Acarretamento. A relação que se verifica entre enunciados ou conjunto de enunciados S e um enunciado A se é logicamente impossível que A seja falso enquanto S é verdadeiro e S é relevante para A.

Afirmação do conseqüente. A forma de argumento inválida $P \rightarrow Q, Q \vdash P$.

Algoritmo. Um teste rigorosamente especificado que pode ser executado por um computador e que fornece uma resposta após um número finito de operações.

Ambigüidade. Multiplicidade de significados.

Anfibologia. Ambigüidade resultante da estrutura da sentença.

Antecedente. O enunciado P num condicional da forma 'Se P, então Q'.

Antinomia. Uma inconsistência imprevista.

Apelo à autoridade. Um argumento no qual uma afirmação é verdadeira por causa do que diz uma pessoa ou autoridade.

Apelo à força. Um argumento que tenta estabelecer uma conclusão por ameaça ou intimidação.

Apelo à ignorância. Raciocínio a partir da premissa de que uma afirmação não foi refutada para a conclusão que ela é verdadeira.

Apelo à piedade. Um argumento que certa ação deve ser desculpada ou um favor especial concedido sob circunstâncias atenuantes.

Apelo ao povo. Raciocínio que parte da premissa de que uma idéia é muito útil para a conclusão que ela é correta.

Argumento. Uma seqüência de enunciados, um dos quais é a conclusão e os outros são as premissas, que provam ou fornecem alguma evidência para a conclusão.

Argumento *ad baculum*. (Ver *apelo à força*.)

Argumento *ad hominem*. Um argumento que tenta refutar uma afirmação ao desacreditar seu proponente.

Argumento ad hominem circunstancial. Um tipo de argumento *ad hominem* que tenta refutar uma afirmação argüindo que a afirmação endossada pelo proponente é inconsistente.

Argumento *ad hominem* ofensivo. Um tipo de *ad hominem* que tenta refutar uma afirmação atacando as características pessoais de seu proponente.

Argumento *ad ignorantiam*. (Ver *apelo à ignorância*.)

Argumento *ad misericordiam*. (Ver *apelo à piedade*.)

Argumento *ad populum*. (Ver *apelo ao povo*.)

Argumento *ad verecundiam*. (Ver *apelo à autoridade*.)

Argumento complexo. Um argumento consistindo em mais de uma passagem de raciocínio.

Argumento convergente. Um argumento contendo várias passagens de raciocínio que sustentam a mesma conclusão intermediária ou final.

Argumento correto. Um argumento válido cujas premissas são verdadeiras.

Argumento de uma função n-ária. Uma n-upla de objetos na qual a função n-ária se aplica.

Argumento declive ardiloso. Um argumento da forma:

$$
\begin{array}{l}
A_1 \to A_2 \\
A_2 \to A_3 \\
\vdots \\
A_n \to A_{n+1} \\
\text{Não deve ser o caso que } A_{n+1}. \\
\therefore \text{ Não deve ser o caso que } A_1.
\end{array}
$$

Tais argumentos freqüentemente têm premissas questionáveis e podem ser inválidos.

Argumento dedutivo. Um argumento em que é logicamente impossível que sua conclusão seja falsa enquanto suas premissas são verdadeiras.

Argumento estatístico. Um argumento indutivo que não pressupõe a uniformidade da natureza.

Argumento humeano. Um argumento indutivo que pressupõe a uniformidade da natureza.

Argumento indutivo. Um argumento não-dedutivo; um argumento em que é logicamente possível que sua conclusão seja falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras. (Esta é uma definição bem ampla; muitos autores preferem uma definição mais restrita.)

Argumento válido. (Ver *argumento dedutivo.*)

Associação (ASSOC). As equivalências $(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ e $(P \,\&\, (Q \,\&\, R)) \leftrightarrow ((P \,\&\, Q) \,\&\, R)$.

Axioma. Uma fórmula que não é considerada como suposição e que pode ser introduzida em qualquer prova; intuitivamente, um axioma expressa uma verdade óbvia.

Bicondicional. Um enunciado da forma '*P* se e somente se *Q*'.

Cálculo de predicados. O sistema formal definido pelas regras de formação e regras de inferência do Capítulo 6. Também chamado lógica de predicados de primeira ordem.

Cálculo de probabilidades. Os axiomas de AX1 a AX3 (Seção 9.4) e suas conseqüências dedutivas.

Cálculo proposicional. O sistema formal definido pelas regras de formação e as regras de inferência do Capítulo 3. É também chamado lógica proposicional, cálculo sentencial ou cálculo dos enunciados.

Causa necessária. Uma condição necessária para produzir um certo efeito.

Causa suficiente. Uma condição que sempre produz um certo efeito.

Classe de atributo. Um termo que denota um conjunto de objetos.

Complemento de um conjunto. O conjunto de elementos que não são elementos do conjunto dado.

Completude semântica. Com relação à semântica de um sistema formal, a propriedade que toda forma de argumento, expressável nesse sistema, válida pela semântica é provável no sistema.

Comutativa (COM). As equivalências $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ e $(P \,\&\, Q) \leftrightarrow (Q \,\&\, P)$.

Conclusão intermediária. (Ver *premissas não-básicas*.)

Conclusão irrelevante. A falácia de se inferir uma conclusão diferente (e talvez contrária) daquela que o argumento assegura.

Condicional. Um enunciado da forma 'Se *P*, então *Q*'. Os condicionais são também expressos pelas locuções 'somente se' e 'contanto que'.

Condicional contrafático. O tipo de condicional expresso pelas sentenças no modo subjuntivo. Os condicionais contrafáticos têm força intermediária entre os condicionais materiais e estritos.

Condicional estrito. Um tipo de condicional que é verdadeiro se e somente se seu antecedente implica dedutivamente seu conseqüente.

Condicional material. Um tipo de condicional que é verdadeiro se e somente se não é o caso que seu antecedente é verdadeiro e seu conseqüente é falso. O condicional material é representado neste livro pelo símbolo '$\rightarrow$'.

Conjunção. A operação funcional-veritativa expressa pelo termo 'e'; a conjunção de dois enunciados é verdadeira se e somente se os dois enunciados são verdadeiros. A conjunção é um enunciado cujo operador principal é '&'.

Conjuncto. Qualquer enunciado de um par de enunciados unidos pelo operador 'e'.

Conjunto. Uma coleção de objetos considerados sem se importar com a ordem ou descrição.

Conjunto inconsistente de enunciados. Um conjunto de enunciados cuja semântica sozinha impede suas verdades simultaneamente; um conjunto de enunciados cuja verdade simultânea é logicamente impossível.

Conseqüência funcional-veritativa. Um enunciado ou uma forma de enunciado A é uma conseqüência funcional-veritativa de um enunciado ou uma forma de enunciado B se não há linha em sua tabela-verdade em que B é verdadeira e A é falsa.

Conseqüente. O enunciado Q no condicional da forma 'Se P, então Q'.

Contra-exemplo (para um argumento ou forma de argumento). Uma situação possível na qual a conclusão é falsa enquanto as premissas são verdadeiras. Um contra-exemplo mostra que o argumento (ou forma de argumento) é inválido.

Contradição. Um enunciado da forma 'P & ~P'. (Alguns autores usam o termo para designar em enunciado inconsistente.) É a regra de inferência válida CONTRAD: P, ~$P \vdash Q$.

Contraditórios. Dois enunciados, sendo que cada um deles implica a negação do outro.

Contrapositivo. O resultado de se substituir o termo sujeito de um enunciado categórico pelo complemento de seu termo predicado e substituir seu termo predicado pelo complemento de seu termo sujeito.

Conversão. O resultado de se intercambiar os termos sujeito e predicado de um enunciado categórico.

Decidibilidade. Um sistema formal é decidível se existe um algoritmo para se determinar, para qualquer forma de argumento expresso nesse sistema, quando ou não essa forma é válida. A lógica proposicional é decidível, mas a lógica de predicados não.

Definição contextual. Um tipo de definição formal em que o uso de um símbolo é justificado ao se mostrar como fórmulas nas quais ele ocorre podem ser transcritas sistematicamente em fórmulas nos quais ele não ocorre.

Derivação. (Ver *prova*.)

Derivação hipotética. Uma derivação que começa com uma hipótese e que termina quando essa hipótese é descartada.

Descrição definida. Uma expressão que denota um único objeto por enumerar as propriedades que univocamente o identificam. Descrições definidas começam com os artigos 'o'/'a'.

Diagrama de Venn. Uma representação de relações entre classes de atributos utilizadas para mostrar a semântica de enunciados categóricos e para testar a validade de alguns argumentos em que tais enunciados ocorrem. (Ver Capítulo 5.)

Dilema construtivo (DC). A regra de inferência válida $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$.

Disjunção. Qualquer enunciado cujo operador principal é 'ou', tanto no sentido inclusivo como no exclusivo.

Disjunção exclusiva. Um operador binário funcional-veritativo que quando aplicado a um par de enunciados fornece um terceiro enunciado que é verdadeiro se e somente se exatamente um elemento do par é verdadeiro.

Disjunção inclusiva. Um operador funcional-veritativo que quando aplicado a um par de enunciados fornece um terceiro enunciado que é verdadeiro se e somente se pelo menos um elemento do par é verdadeiro.

Disjuncto. Qualquer enunciado de um par de enunciados unidos pelo operador 'ou'.

Domínio de uma função. O conjunto de objetos ao qual uma função é aplicada; o conjunto dos argumentos possíveis para a função.

Dupla negação (DN). A equivalência $P \leftrightarrow {\sim}{\sim}P$.

Eliminação da conjunção (&E). A regra de inferência válida $P \,\&\, Q \vdash P$ ou $P \,\&\, Q \vdash Q$.

Eliminação da disjunção (∨E). A regra de inferência válida $P \vee Q$, $P \rightarrow R$, $Q \rightarrow R \vdash R$.

Eliminação da identidade (=E). A regra que nos permite inferir o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de uma letra nominal α por uma letra nominal β em qualquer wff que contém α usando essa fórmula junto com $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$ como premissas.

Eliminação da negação (~E). A regra de inferência válida ${\sim}{\sim}P \vdash P$

Eliminação do bicondicional (↔E). A regra de inferência válida $P \leftrightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$ ou $P \leftrightarrow Q \vdash Q \rightarrow P$.

Eliminação existencial (EE). A regra de inferência que nos permite inferir uma conclusão após derivá-la a partir de uma hipótese instanciada de uma fórmula quantificada existencialmente. Certas restrições devem estar satisfeitas a fim de aplicá-la corretamente. (Ver Seção 6.5.)

Eliminação universal (EU). A regra de inferência que nos permite inferir de uma wff quantificada universalmente qualquer instância dessa wff.

Enunciado. Um tipo de pensamento expressável por uma sentença declarativa.

Enunciado categórico. Uma das quatro formas de enunciados explanadas na Seção 5.1 (Neste livro consideramos as negações de enunciados categóricos como sendo enunciados categóricos.)

Enunciado categórico afirmativo. Um enunciado categórico da forma *A* ou da forma *I*.

Enunciado categórico da forma A. Um enunciado da forma 'Todo *S* é *P*'.

Enunciado categórico da forma E. Um enunciado da forma 'Nenhum *S* é *P*'.

Enunciado categórico da forma I. Um enunciado da forma 'Algum *S* é *P*'.

Enunciado categórico da forma O. Um enunciado da forma 'Algum *S* não é *P*', onde 'não' representa complementação.

Enunciado categórico negativo. Um enunciado categórico da forma *E* ou da forma *O*.

Enunciado categórico particular. Um enunciado categórico da forma *I* ou da forma *O*.

Enunciado categórico universal. Um enunciado categórico da forma *A* ou da forma *E*.

Enunciado inconsistente. Um enunciado cuja semântica sozinha impede sua verdade; um enunciado cuja verdade é logicamente impossível.

Equivalência. Um bicondicional que é um teorema.

Equivalência funcional-veritativa. A relação que se verifica entre dois enunciados ou formas de enunciados desde que eles tenham a mesma tabela-verdade.

Equívoco. Multiplicidade de significados.

Escopo. O escopo de uma ocorrência de um operador lógico numa wff é a menor subwff que contém essa wff. Intuitivamente, o escopo de uma ocorrência de um operador é essa ocorrência do operador junto com a parte da wff à qual ele se aplica.

Esquema de axioma. Uma fórmula em que toda instância substitutiva é considerada como um axioma.

Exigência de total evidência. O princípio de que se um argumento é indutivo, então suas premissas devem conter todas as evidências que são relevantes para a conclusão.

Exportação (EXP). A equivalência $((P \,\&\, Q) \rightarrow \mathrm{R}) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

Expressão funcional. Uma expressão obtida por se aplicar um símbolo funcional n-ário a n, termos.

Falácia. Qualquer erro que afete a irrefutabilidade de um argumento.

Falácia de analogia defeituosa. Raciocínio analógico cuja probabilidade indutiva é baixa por causa da insuficiência da analogia na qual ela está baseada.

Falácia de composição. Inferir-se invalidamente que um dado objeto tem uma propriedade por causa que uma, algumas ou todas as partes do objeto têm essa propriedade.

Falácia de culpa por associação. Um tipo de argumento *ad hominem* no qual uma afirmação é atacada por salientar que um ou mais de seus proponentes estão associados com pessoas sabidamente repugnáveis.

Falácia de divisão. Inferir-se invalidamente que uma parte de um objeto tem uma propriedade por causa que o objeto tem.

Falácia de ênfase. Uma falácia de ambigüidade causada por mudanças enfáticas ou acentuadas.

Falácia de evidência suprimida. Uma violação da exigência de total evidência tão séria que constitui um erro considerável.

Falácia de falsa causa. Concluir-se que um evento causa outro com bases em evidências insuficientes.

Falácia de falsa dicotomia. Raciocínio que está incorreto por causa de uma falsa premissa disjuntiva.

Falácia de relevância. Raciocínio que está errado porque as premissas não são suficientemente relevantes para a conclusão.

Falácia do capital investido. Um tipo de falácia *ad hominem* na qual tenta-se refutar uma afirmação argüindo que seu proponente está motivado pelo desejo de ganho pessoal ou para evitar uma perda pessoal.

Falácia do homem-de-palha. Uma tentativa de se refutar uma afirmação de uma pessoa que confunde uma afirmação com uma afirmação menos plausível não-sugerida.

Falácia do jogador. Um argumento da forma:

x não ocorreu recentemente.

$\therefore$ x provavelmente ocorrerá logo.

onde 'x' designa um evento cujas ocorrências são independentes.

Falácia formal. Erro no raciocínio resultante da aplicação incorreta de uma regra de inferência válida ou da aplicação de uma regra inválida.

Falácia indutiva. Sobrestimação da probabilidade indutiva de um argumento.

Falácia *post hoc*. A falácia de se raciocinar partindo da premissa que A precede B para a conclusão de que A causa B.

Falácia semântica. Erro no raciocínio resultante da vaguidade ou da multiplicidade de significados.

Falácia *tu quoque*. Um tipo de falácia *ad hominem* na qual se procura refutar uma opinião argüindo que seu proponente a impõe hipocritamente.

Força de um enunciado. A informação contida num enunciado.

Forma inválida. Uma forma de argumento com pelo menos uma instância que não é válida.

Forma padrão. Um formato para se escrever argumentos no qual as premissas são alistadas antes da conclusão e as conclusões são prefixadas por '∴'.

Forma válida. Uma forma de argumento em que cada instância é válida.

Fórmula. Uma seqüência finita de elementos do vocabulário de um sistema formal.

Fórmula aberta. Uma fórmula que resulta por se omitir um ou mais quantificadores iniciais de uma wff quantificada.

Fórmula atômica. O tipo mais simples de wff de uma linguagem formal; uma fórmula atômica do cálculo de predicados é uma letra predicativa seguida de zero ou mais letras nominais.

Função. Uma operação que para algum n designa objetos únicos à n-upla de objetos.

Generalização apressada. Inferir-se de modo falaz um enunciado sobre uma classe completa de coisas com base na informação de alguns de seus elementos.

Generalização estatística. Um argumento da forma:

$n\%$ de s, selecionados ao acaso, F são G.

∴ Quase $n\%$ de todos os F são G.

Generalização indutiva. Um argumento da forma:

$n\%$ de s, observados até agora F é G.

$\therefore$ Quase $n\%$ de todos os F são G.

Generalização universal. (Ver *introdução universal*.)

Hipótese. Uma suposição introduzida numa prova a fim de mostrar que certas conseqüências se seguem, mas que devem ser descartadas antes da prova se concluir.

Hipótese *ad hoc*. Uma hipótese auxiliar adotada sem justificativa independente a fim de permitir que uma teoria científica explique certos fatos anormais.

Hipótese auxiliar. Uma premissa utilizada em conjunção com uma teoria científica para deduzir conseqüências observáveis a partir dessa teoria.

Imagem de uma função. O conjunto de valores possíveis para uma função.

Impertinência. Um assunto estranho introduzido para desviar a atenção da questão proposta por um argumento.

Implicação material (IM). A equivalência $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$.

Independência. A relação que se verifica entre duas proposições (ou eventos) quando a probabilidade de uma delas não se afeta pela verdade (ou ocorrência) da outra.

Indicador de conclusão. Uma expressão vinculada a uma sentença para indicar que ela estabelece uma conclusão.

Indicador de inferência. Um indicador de premissa ou um indicador de conclusão.

Indicador de premissa. Uma expressão vinculada a uma sentença para indicar que ela estabelece uma premissa.

Indução matemática. O princípio de que se O tem uma certa propriedade e, para qualquer inteiro não-negativo N, se N tem essa propriedade, então N+1 também, segue-se que todos os inteiros não-negativos têm essa propriedade. (Muitos princípios correlacionados também são chamados indução matemática por outros autores; contudo todos eles permitem inferências dedutivas.)

Indução por analogia. Um argumento da forma:

F_1x & F_2x & ··· & F_nx
F_1y & F_2y & ··· & F_ny
Gy
∴ Gx

Indução por enumeração. (Ver *indução simples.*)

Indução simples. Um argumento da forma:

$n\%$ de s observados até agora F é G.
∴ Se mais um F for observado, ele será G.

Inferência imediata. Uma inferência a partir de único enunciado categórico como premissa para um enunciado categórico como conclusão. Também chamada *conclusão irrelevante.*

Instância de uma wff quantificada. O resultado de se remover o quantificador e substituir-se a variável a ele ligada por uma letra nominal.

Instanciação universal. (Ver *eliminação universal.*)

Interpretação clássica. A noção de probabilidade em que a probabilidade de um evento A relativo a uma situação é o número de resultados possíveis no qual um evento ocorre dividido pelo número total de resultados possíveis.

Introdução da conjunção (&I). A regra de inferência válida $P, Q \vdash P \& Q$.

Introdução da disjunção ($\vee$I). A regra de inferência válida, $P \vdash P \vee Q$ ou $Q \vdash P \vee Q$.

Introdução da identidade (=I). A regra que nos permite escrever $\alpha = \alpha$, para qualquer letra nominal α, numa linha de uma prova.

Introdução de teorema (IT). A regra de inferência que nos permite introduzir um teorema na linha de uma prova.

Introdução do bicondicional (↔I). A regra de inferência válida $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P \vdash P \leftrightarrow Q$.

Introdução existencial (IE). A regra de inferência que nos permite inferir uma wff quantificada existencialmente a partir de uma de suas instâncias.

Introdução universal (IU). Uma regra de inferência que, contanto que certas restrições estejam satisfeitas (ver Seção 6.4), nos permite inferir um enunciado quantificado universalmente a partir de uma prova de uma de suas instâncias.

Lei de Leibniz. O princípio da lógica de segunda ordem:

$\forall x \forall y\ (\forall(Xx \leftrightarrow Xy) \leftrightarrow x = y)$.

Leis de De Morgan (DM). As equivalências $\sim(P\ \&\ Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ e $\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P\ \&\ \sim Q)$.

Lógica de primeira ordem. Lógica quantificacional cujos quantificadores se aplicam somente sobre objetos individuais.

Lógica de segunda ordem. Lógica quantificacional cujos quantificadores se aplicam sobre objetos individuais e suas propriedades (onde as propriedades podem ou não ser construídas como conjuntos.)

Lógica formal. O estudo de formas de argumentos.

Lógica informal. O estudo de argumentos específicos em seus contextos da linguagem natural.

Lógica modal. A lógica das expressões modais, especialmente 'é possível que' e 'é necessário que'.

Lógica relevante. O estudo de acarretamento.

Logicamente impossível. Conceitualmente impossível; impossível em virtude das considerações semânticas.

Logicamente necessário. Conceitualmente necessário; necessário em virtude das considerações semânticas.

Logicamente possível. Conceitualmente possível; não excluída pelas considerações semânticas.

Lógicas de ordem superior. Lógicas que utilizam variáveis especiais para quantificação sobre propriedades além de para as variáveis utilizadas para quantificação sobre objetos individuais.

Lógicas deônticas. Lógicas que tratam dos conceitos morais.

Lógicas epistêmicas. Lógicas que tratam dos conceitos de conhecimento e crença.

Metalógica. Raciocínio lógico sobre sistemas formais.

Métodos de Mill. Formas de raciocínio utilizadas para excluir causas suspeitas de um efeito observado (para detalhes, ver seção 8.6).

***Modus ponens* (MP).** A regra de inferência válida $P \rightarrow Q, P \vdash Q$.

***Modus tollens* (MT).** A regra de inferência válida $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$.

Mundo possível. Um universo possível; a menos que se especifique em contrário, 'possível' nesse contexto significa 'logicamente possível'.

Mutuamente exclusiva. Duas proposições são mutuamente exclusivas se elas não podem ser ambas verdadeiras.

***n*-upla.** Uma lista ordenada de *n* objetos.

Necessitação (N). A regra de inferência da lógica modal que nos permite inferir $\Box$A a partir de qualquer teorema A.

Negação. A operação funcional-veritativa expressa pelo termo 'não'; a negação de um enunciado é verdadeira se e somente se o enunciado é falso. A negação é um enunciado cujo operador principal é '~'.

Negando o antecedente. A regra de inferência inválida $P \to Q, \sim P \vdash \sim Q$.

Non sequitur. Qualquer falácia de relevância.

Obversa. O resultado de se mudar a qualidade de um enunciado categórico e de se substituir o termo predicado pelo seu complemento.

Operador. (Ver *operador lógico.*)

Operador lógico. Um elemento do vocabulário de uma linguagem formal que tem uma interpretação fixa. (Por exemplo '&' é um operador lógico do cálculo proposicional.) (Podemos utilizar o termo 'operador lógico' para descrever a expressão da linguagem natural desse termo. Assim, 'e' é um operador lógico.)

Operador principal. O operador numa wff cujo escopo é toda a wff.

Petição de princípio. (Ver *raciocínio circular.*)

Petitio principii. (Ver *Raciocínio circular.*)

Predicado de relação. Um predicado que combina dois ou mais nomes para formar uma sentença.

Predicado identidade. O símbolo '=', que significa "é idêntico a".

Premissa básica. (Ver *suposição.*)

Premissa não-básica. Uma premissa de um argumento complexo que funciona como conclusão de uma etapa do raciocínio e premissa de uma etapa posterior.

Princípio de bivalência. A suposição que verdadeiro e falso são os únicos valores-verdade e que cada enunciado tem somente um desses valores-verdade.

Princípio de caridade. O princípio de que, ao se formular enunciados implícitos para se analisar um argumento, se permanece tão fiel quanto possível ao que se conhece do pensamento do argumentador.

Probabilidade *a priori*. Possibilidade inerente; probabilidade considerada sem a evidência. A probabilidade *a priori* de um enunciado está inversamente relacionada com sua força.

Probabilidade condicional. A probabilidade de uma proposição ou evento, dada uma outra proposição ou evento.

Probabilidade indutiva. A probabilidade de uma conclusão, dado um conjunto de premissas.

Probabilidade lógica. Uma probabilidade *a priori.*

Probabilidade subjetiva. O grau de crença de uma pessoa numa proposição, o qual é aferido pela vontade da pessoa ao aceitar certas apostas com respeito a essa proposição.

Proposição. (Ver *enunciado.*)

Prova. Uma seqüência de wffs de um sistema formal, onde cada elemento dessa seqüência é uma suposição (possivelmente hipotética), um axioma ou foi derivado de wffs anteriores por uma das regras de inferência.

Prova condicional (PC). A regra de inferência válida que nos permite deduzir um condicional depois de derivar seu conseqüente a partir de seu antecedente.

Prova indireta. (Ver *redução ao absurdo.*)

Qualidade. A classificação de um enunciado categórico em negativo e afirmativo.

Quantidade. A classificação de um enunciado categórico em universal e particular.

Quantificador. Um operador lógico que liga a variável de uma fórmula aberta, originando uma wff. Os quantificadores são expressos pelas palavras 'qualquer', 'todo', 'cada', 'algum', 'nenhum', 'existe'.

Quantificador existencial. O símbolo '$\exists$', que significa "para pelo menos um". Outros termos expressando esse mesmo significado também são chamados quantificadores existenciais.

Quantificador universal. O símbolo '$\forall$', que significa "para todo". Outros termos que expressam o mesmo significado também são chamados quantificadores universais.

Raciocínio circular. A falácia de assumir a conclusão que se está tentando provar.

Raciocínio forte. Probabilidade indutiva alta.

Raciocínio fraco. Probabilidade indutiva baixa.

Redução ao absurdo. (*Reductio ad absurdum*) (RAA). A regra de inferência válida que nos permite inferir uma conclusão da forma $\sim A$ após derivarmos uma contradição a partir da hipótese A.

Regra de inferência derivada. Uma regra de inferência que não é uma das regras básicas ou regras definidas de um sistema formal, mas que são provadas nesse sistema.

Regras de formação. Um conjunto de regras que definem as fórmulas bem formadas (wffs) de um sistema formal.

Regras de inferência. As regras de um sistema formal que determinam quais passagens do raciocínio são admissíveis nas provas.

Regras de intercâmbio dos quantificadores (IQ). Um conjunto de regras de inferência baseadas nas equivalências dadas na tabela 6-1.

Relação assimétrica. Uma relação R tal que para todo x e y, se Rxy então não é que Ryx.

Relação irreflexiva. A relação R tal que não existe um x de modo que Rxx.

Relação reflexiva. Uma relação R tal que para todo x, Rxx.

Relação simétrica. Uma relação R tal que para todo x e y, se Rxy, então Ryx.

Relação transitiva. Uma relação R tal que para todo x, y e z, se Rxy e Ryz, então Rxz.

Repetição (RE). A regra de inferência válida $P \vdash P$.

Semântica. O estudo do significado; a semântica de uma expressão contribui para se estabelecer a veracidade ou falsidade de enunciados que a contêm.

Silogismo categórico. Um argumento de duas premissas e uma conclusão que são enunciados categóricos. E ainda se requer: o argumento deve conter exatamente três classes de atributos, uma das quais ocorre nas duas premissas, e nenhum termo pode ocorrer mais que uma vez numa única premissa.

Silogismo disjuntivo (SD). A regra de inferência válida $P \vee Q, \sim P \vdash Q$.

Silogismo estatístico. Um argumento da forma:

$n\%$ de F é G.

x é F.

$\therefore$ x é G.

Silogismo hipotético (SH). A regra de inferência válida $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$.

Símbolo funcional. Um símbolo que, quando aplicado a algum número n de nomes ou outros denotando termos, produz um termo que denota um único objeto.

Símbolos não-lógicos. Símbolos de uma linguagem formal cujas interpretações variam de contexto para contexto.

Sintaxe. Gramática; a sintaxe de uma linguagem formal é codificada por suas regras de formação. As regras de inferência formais são sintáticas, pois elas se referem à forma gramatical e não a condições de verdade, enquanto tabelas-verdade, diagramas de Venn e árvores de refutação são de natureza semântica.

Sistema de tipos. Um sistema formal com tipos diferentes de variáveis, cada qual interpretando uma de um série de domínios classificados hierarquicamente.

Sistema formal. Uma linguagem definida rigorosamente junto com um conjunto de regras de inferência e axiomas para essa linguagem. (O cálculo proposicional, por exemplo, é um sistema formal.)

Subwff. Uma parte de uma wff que é, também, uma wff.

Suposição. Uma premissa que não é uma conclusão de premissas anteriores.

Tautologia. Uma wff do cálculo proposicional cuja tabela-verdade contém somente valores-verdade V sob seu operador principal. Qualquer enunciado cuja formalização é uma wff desse tipo também se diz tautologia. (O termo 'tautologia' é algumas vezes usado, embora não neste livro, para designar qualquer verdade logicamente necessária.) As equivalências $P \leftrightarrow (P \,\&\, P)$ ou $P \leftrightarrow (P \vee P)$ são chamadas TAUT.

Teorema. Uma wff de um sistema formal que é a conclusão de uma prova nesse sistema que não envolve premissas não-hipotéticas.

Termo maior. O termo predicado da conclusão de um silogismo categórico.

Termo médio. A classe de atributo que ocorre em ambas as premissas de um silogismo categórico.

Termo menor. O termo sujeito da conclusão de um silogismo categórico.

Termo predicado. O segundo de duas classes de atributos num enunciado categórico.

Termo sujeito. O primeiro de duas classes de atributos num enunciado categórico.

Valor de uma função. O objeto designado por uma função n-ária para uma n-upla de argumentos.

Wff. Uma fórmula bem formada de uma sistema formal, definida pelas regras de formação desse sistema.

Wff funcional-veritativa contingente. Uma wff do cálculo proposicional cuja tabela-verdade contém os valores-verdade V e F sob seu operador principal.

Wff funcional-veritativa inconsistente. Uma wff do cálculo proposicional cuja tabela-verdade contém somente o valor-verdade F sob seu operador principal. Qualquer enunciado cuja formalização é uma wff desse tipo também é chamado funcional-veritativo inconsistente.

ÍNDICE ANALÍTICO

A letra n após um número da página refere-se à nota de rodapé.

E

F

R

S

T

U

V

W

Impressão e acabamento
(com filmes fornecidos):
EDITORA SANTUÁRIO
Fone (0125) 36-2140
APARECIDA - SP

CADASTRO PARA MALA DIRETA
Favor preencher todos os campos

NOME (não abreviar):

END. RESIDENCIAL:

CIDADE: UF: CEP: FONE:

EMPRESA:

SEXO: F ( ) M ( ) NASCIMENTO:_____/_____ MÊS ANO

1. Cargo:
( ) 1. Digitador ( ) 2. Programador
( ) 3. Analista ( ) 4. Supervisor
( ) 5. Gerente ( ) 6. Diretor
( ) 7. Outros (especificar):__________

2. Escolaridade: ( ) 1. 1º grau ( ) 2. 2º grau
( ) 3. 3º grau

3. Eu geralmente, compro livros:
( ) 1. Em livrarias ( ) 2. Por telefone
( ) 3. Em feiras ( ) 4. Por Reembolso Postal
( ) 5. Outros (especificar):__________

4. Costumo comprar em média, a seguinte quantidade de livros por ano:
( ) 1. 01 ( ) 2. 03 ( ) 3. 05 ( ) 4. mais

5. Estou interessado em livros das seguintes áreas:
( ) 1. Informática ( ) 2. Negócios ( ) 3. Controle Qualidade
( ) 4. Informática na Educação ( ) 5. Ensino Inglês ( ) 6. Psicologia
( ) 7. Sociologia ( ) 8. Metodologia ( ) 9. Medicina
( ) 10. Eng. Civil ( ) 11. Eng. Elétrica/Eletrônica ( ) 12. Eng. Mecânica
( ) 13. Eng. Química ( ) 14. Física ( ) 15. Matemática
( ) 16. Outras (especificar):__________

6. Utiliza microcomputador:
( ) Sim ( ) Não

7. Qual?
( ) 1. PC ( ) 2. Apple ( ) 3. MSX
( ) 4. Outros (especificar):__________

8. Softwares mais utilizados:
( ) 1. Banco de Dados ( ) 2. Planilha ( ) 3. Proc. Texto
( ) 4. Outros (especificar):__________

9. Linguagens:
( ) 1. C ( ) 2. Cobol
( ) 3. Clipper/dBase ( ) 4. Assembler
( ) 5. Outras (especificar):__________

Obra: Lógica

Autoria: John Nolt e Dennis Rohatyn

MAKRON *Books*

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.
Nova denominação da
Editora McGRAW-HILL Ltda.
"Padrão em Livros de Qualidade"
Rua Tabapuã, 1105 – Itaim Bibi – SP
04533 – Tels.: 820.6622/820.8528