Lista de Exercícios 4 **Luis Vinicius Costa Silva**

Modelagem Computacional
Prof. Thiago Alves de Queiroz
Data de Entrega: 07/09/2018

Questão 1

Um algoritmo que resolve um sistema linear utilizando o método de Eliminação de Gauss com substituição inversa foi escrito, as chamadas abaixo do programa "ex1.m"resolvem a Letra A e B da Questão 1 (o primeiro argumento é a matriz de coeficientes enquanto que o segundo argumento é o vetor de termos independentes):

```
./ex1.m "[2 ,0, 0, 0;1 ,1.5,0,0;0,-3, 0.5,0;2,-2,1,1]" "[3,4.5,-6.6,0.8]"
```

```
./ex1.m "[1,1,0,1;2,1,-1,1;4,-1,-2,2;3,-1,-1,2]" "[2,1,0,-3]"
```

A primeira chamada do programa computou a seguinte solução para o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = 1.5 \\ x_2 = 2.0 \\ x_3 = -1.2 \\ x_4 = 3.0 \end{cases}$$

Enquanto que a segunda chamada do programa retorna a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_1 = NaN \\ x_2 = NaN \\ x_3 = \infty \\ x_4 = -\infty \end{cases}$$

O array retornado ante a segunda chamada do programa demonstra que o sistema de equações da letra B é impossível. Não houve necessidade de permutar linhas durante a execução das duas chamadas a fim de que o sistema fosse resolvido.

Questão 2

A questão 2 foi resolvido através do algoritmo abaixo:

```
b = [-2,3,2];
for k=-10:0.1:10
 L = k;
 A = [1,-1, L; -1, 2, -L; L, 1, 1];

 %printf("Para L=%f, temos:\n",L);
 %disp([A,b']);
  _flag = AvaliaFactibilidadeDoSistema(A,b);
  if _flag==0
   printf("\nPara L=%f, temos: SPD\n\n",k);
  elseif _flag==1
   printf("\nPara L=%f, temos: SPI\n\n",k);
  else
   printf("\nPara L=%f, temos: SI\n\n",k);
  endif
endfor
```

E as seguintes chamadas:

```
./ex2.m | grep SPD
```

```
./ex2.m | grep SPI
```

```
./ex2.m | grep SI
```

Para $\alpha = -1$, temos que o sistema é possível determinado, enquanto que para $\alpha = 1.0$ temos que o sistema é impossível, para qualquer outro α, temos que o sistema é possível determinado. Basicamente este algoritmo percorre um intervalo considerável a um passo h, e checa se a matriz é positiva definida a cada passo da iteração, o comando "grep"simplesmente facilita a percepção de quais intervalos correspondem a cada tipo de sistema de equações (i.e: Sistema impossível (SI), Sistema Possível Determinado (SPD), Sistema Impossível Indeterminado (SPI)).

Questão 4

Utilizando a regra de Laplace, o determinante é computado através das submatrizes:

Letra A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 1 \cdot\ 2 - 2 \cdot\ 5 + 0 \cdot (-1) = -8$$

Letra B

Já que a regra de Laplace é demasiada trabalhosa para matrizes de dimensão maior que 3, o determinante foi calculado através do escalonamento da matriz inicial e o posterior produtório dos elementos da diagonal principal:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_1 \leftrightarrow R_4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3} \cdot R_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{3} \cdot R_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{vmatrix} R_4 \leftarrow R_4 - \frac{2}{3} \cdot R_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{vmatrix} R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{4} \cdot R_2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{2} \cdot R_2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$det(A) = \cdot\frac{4}{3} \cdot (-1) \cdot -\frac{3}{4} = 3$$

$$det(A) = 3$$

Questão 5

De forma similar a Questão 2, o algoritmo abaixo foi escrito a fim de aferir para qual α, a matriz seria singular:

```
L = 0;
h = 0.01;
A = [1,2,-1;1,L,1;2,L,-1];
for i=-10:h:10
L = i;
A = [1,2,-1;1,L,1;2,L,-1];
if isinf(inv(A))
  printf("\nPara L=%f, temos que a matriz abaixo eh singular:\n",L);
  disp(A);
endif
endfor
```

Basicamente, o algoritmo varia o α da matriz A através de um passo h, e a cada iteração, checa se a matriz gerada não possui inversa, caso esta condição seja satisfeita, um valor de α que torna a matriz singular é descoberto e impresso. Neste caso, a matriz A é singular apenas para $\alpha = 6$.

Questão 6

Um algoritmo para fatoração LU foi escrito, no qual a matriz A foi fatorada na forma LU, i.e: $A = LU$, abaixo as matrizes fatores de A podem ser observadas:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.66790 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.36119 & 0.14002 & 1.00000 & 0.00000 \\ -0.16602 & -0.37925 & -0.51127 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 6.02350 & 7.00000 & 0.00000 & -4.15610 \\ 0.00000 & 10.67531 & 0.00000 & -1.57856 \\ 0.00000 & 0.00000 & -2.17320 & 6.91886 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 2.24878 \end{bmatrix}$$

Questão 8

$$L = \begin{bmatrix} 2.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.50000 & 1.65831 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.50000 & -0.45227 & 2.13201 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.93808 & 1.76635 \end{bmatrix}$$

Questão 10

O exercício 10 pede todos os valores possíveis de α de tal forma que A seja positiva definida.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste caso, deve-se lembrar que uma matriz é positiva definida, se somente se, seus autovalores são positivos, logo obtém-se o polinômio característico da matriz em função de α, são estes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de tal forma que $\lambda_i > 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq 3$.

$$P_A(x) = det(A - xI) \quad \text{onde I é a matriz identidade}$$

Após esse procedimento, é obtido:

$$\begin{cases} \lambda_1 \Rightarrow 0.5\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha + 12} - 0.5\alpha + 3 = 0 \\ \lambda_2 \Rightarrow 3 - 0.5\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha + 12} - 0.5\alpha = 0 \\ \lambda_3 \Rightarrow \alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

Logo, o intervalo de valores de α que tornam A positiva definida são limitados por, respectivamente, as duas raízes mínimas de λ_i. Visto que a equação 3 é trivial, utiliza-se o método da bisseção para obter as raízes das equações 1 e 2. Após obtidas as raízes das equações 1 e 2 podemos concluir que a matriz A é positiva definida para qualquer α entre -2(Eq. 3) e 1.5 (Eq. 2), i.e: $-2 < \alpha < 1.5$