② Dada a função:

$$f(x_1, x_2) = \pi\left[3(x_1 - x_2) - \sqrt{(3x_1 + x_2)(x_1 + 3x_2)}\right]$$

· Temos que o gradiente é:

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \pi \frac{d}{dx_1}\left(\underbrace{3\cdot(x_1 - x_2)}_{\Downarrow \text{ I} \atop 3} - \underbrace{\sqrt{(3x_1 + x_2)\cdot(x_1 + 3x_2)}}_{\Downarrow \atop \text{II}}\right)$$

II $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\sqrt{(3x_1 + x_2)\cdot(x_1 + 3x_2)}\right) =$

$$\frac{d}{du}\underbrace{\sqrt{u}}_{\Downarrow \atop \frac{1}{2\sqrt{u}}} \cdot \frac{d}{dx_1}\underbrace{((3x_1 + x_2)\cdot(x_1 + 3x_2))}_{\Downarrow \atop \text{III}}$$

III $\frac{d}{dx_1}((3x_1 + x_2)\cdot(x_1 + 3x_2))$

III $\frac{d}{x_1}\underbrace{(3x_1 + x_2)}_{\Downarrow \atop 3}\cdot(x_1 + 3x_2) + \frac{d}{dx_1}\underbrace{(x_1 + 3x_2)}_{\Downarrow \atop 1}\cdot(3x_1 + x_2)$

III $3\cdot(x_1 + 3x_2) + 1\cdot(3x_1 + x_2)$

III $6x_1 + 10x_2$

... →

$$\frac{1}{2\sqrt{v}}\,(6x_1+10x_2)$$

$$v=(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)$$

substituindo...

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}\cdot(6x_1+10x_2)\right)=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\pi\cdot\left(3-\frac{3x_1+5x_2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\pi\cdot\left(\frac{d}{dx_2}\underbrace{(3\cdot(x_1-x_2))}_{\Downarrow\ -3}-\frac{d}{dx_2}\underbrace{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)}_{\Downarrow\ \mathrm{I}}\right)=$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_2} \Rightarrow f=\sqrt{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dv}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \qquad \frac{d}{dx_2}=6x_2+10x_1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(6x_2+10x_1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{(3x_1+x_2)(x_1+3x_2)}}\cdot 6x_2+10x_1$$ | Substituir em $v=(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)$

$$\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\pi\cdot\left(-3-\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\pi \cdot \left(3 - \frac{3x_1 + 5x_2}{(3x_1 + x_2)\cdot(x_1 + 3x_2)} \right), \; \pi \left(-3 - \frac{3x_2 + 5x_1}{\sqrt{(x_2 + 3x_1)\cdot(3x_2 + x_1)}} \right) \right)$$

$$\nabla f(0.3, 0.4) = (2.90053, -15.4991)$$

Direção de descida máxima $S = -\nabla f(x)$.

$$S = \begin{bmatrix} -2.90053 \\ 15.4991 \end{bmatrix}$$

(II) $x_1 = x_0 + \alpha S$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha = 0.05$$

$$\cancel{x_1 = \begin{bmatrix} 1.1450265 \\ 1.774955 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1.1450265 \\ x_2 = 1.774955 \end{matrix}}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \begin{bmatrix} -2.90053 \\ 15.4991 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8549735 \\ 1.774955 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f = \pi \cdot (3 \cdot (0.8549735\alpha - 1.774955\alpha) - \sqrt{(3 \cdot 0.8549735\alpha + 1.774955\alpha)\cdot(0.8549735\alpha + 3 \cdot 1.774955\alpha)})$$

- A Jacobiana J de $f(x)$ é:

$$J(f(x)) = \left[\pi \cdot \left(3 - \frac{3x_1 + 5x_2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right), \pi \cdot \left(-3 - \frac{3x_2 + 5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\right)\right]$$

A Hessiana H de $f(x)$ é:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \pi \cdot \left(3 - \frac{3x_1+5x_2}{\boxed{\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}}\right)$

Termos que $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} \Rightarrow$ $\cdot$ $3 \xRightarrow{\frac{d}{dx_1}} 0$; $\boxed{\ldots} \xRightarrow{\frac{d}{dx_1}}$ II

II $\frac{\partial \text{II}}{\partial x_1} = \frac{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left((3x_1+5x_2)\right)}_{3} \cdot \sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)}^{\text{III}} \cdot (3x_1+5x_2)}{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)^2}$

$\frac{\partial \text{III}}{\partial x_1} \Rightarrow f = \sqrt{v} \Rightarrow v = (3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$, $\xRightarrow{\frac{d}{dx_1}}$ $6x_1 + 10x_2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 6x_1 + 10x_2$

Substituindo em v, temos:

$$\frac{1}{2\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}} \cdot (6x_1 + 10x_2) = \frac{3x_1+5x_2}{\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \dots \frac{3x_1+5x_2}{\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}} = \frac{3\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)} - \frac{3x_1+5x_2}{\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}\cdot(3x_1+5x_2)}{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)^2} =$$

$$= \dots \frac{16x_2^2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} = \frac{16\pi x_2^2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}} \; /\!/$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \pi\cdot\Bigg(\underbrace{-3}_{\frac{d}{dx_2}=0} - \underbrace{\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}}_{\frac{d}{dx_2}=\text{II}}\Bigg)$$

Temos que:

$$\frac{\partial^2 \text{II}}{\partial^2 x_2} = \frac{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(3x_2+5x_1)}_{3}\cdot\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}\right)}^{\text{III}}\cdot(3x_2+5x_1)}{\left(\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}\right)^2}$$

$$\frac{\partial\, \text{III}}{\partial x_2} \Rightarrow f=\sqrt{u}\;,\; u=(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \;,\quad \frac{d}{du} = 6x_2+10x_1 \;\therefore$$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(6x_2+10x_1) \Rightarrow \text{Substituindo em o...}$$

$\Rightarrow$ Substituindo em u:

$$\frac{1}{2\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\cdot(6x_2+10x_1)=\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}$$

$$\frac{3\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}-\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\cdot(3x_2+5x_1)}{\left(\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}\right)^2}=$$

$$\frac{\cancel{16x_1^2}\ 16x_1^2}{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)\cdot\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\ \therefore$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{16\pi x_1^2}{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)\cdot\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\left(\pi\cdot\left(3-\boxed{\frac{3x_1+5x_2}{\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}}\right)\right),\text{ temos que:}$$

$$\Downarrow \ \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}\ \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_2}=\frac{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1+5x_2)}_{5}\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overbrace{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)}^{\mathrm{II}}\cdot(3x_1+5x_2)}{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial x_2}\Rightarrow f=\sqrt{u},\ u=(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)$$

$$\frac{df}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}},\quad \frac{d}{du}=6x_2+10x_1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 6x_2+10x_1 \Rightarrow$$ Substituindo em u... $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Substituindo em a...

$$\frac{1}{2\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}\cdot(6x_2+10x_1)=$$

$$\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}=$$

$$\frac{5\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}-\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\cdot(3x_1+5x_2)}{\left(\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}\right)^2}=$$

$$\frac{16x_1x_2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)\cdot\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}=-\frac{16\pi x_1x_2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}$$

Logo, a Hessiana de f é:

$$H(f(x))=\begin{bmatrix}\pi\left(-3-\frac{3x_2+5x_1}{\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\right) & -\frac{16\pi x_1x_2}{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)\cdot\sqrt{(3x_1+x_2)\cdot(x_1+3x_2)}}\\ -\frac{16\pi x_2x_1}{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)\cdot\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}} & \frac{16\pi x_1^2}{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)\sqrt{(x_2+3x_1)\cdot(3x_2+x_1)}}\end{bmatrix}$$