Lista de Exercícios 1 **Luis Vinicius Costa Silva**
Otimização Clássica
Prof. Romes Antonio Borges
Data de Entrega: 29/05/2019

Questão 2

Considerando a função

$$f(x_1, x_2) = \pi[3(x_1 - x_2) - \sqrt{(3x_1 + x_2)(x_1 + 3x_2)}]$$

temos que:

$$\vec{\nabla} f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Logo,

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = \left[\left(\pi\left(\frac{-3x_1 - 5x_2}{\sqrt{3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2}} + 3\right)\right), \left(\pi\left(\frac{-5x_1 - 3x_2}{\sqrt{3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2}} - 3\right)\right)\right]$$

Para $p_1 = (0.3, 0.4)$ temos que:

$$\vec{\nabla} f(p_{1_x}, p_{1_y}) = (2.90053, -15.4991)$$

e a direção de máxima descida S:

$$S = -\vec{\nabla} f(p_{1_x}, p_{1_y}) = (-2.90053, 15.4991)$$

A matriz Jacobiana computada da seguinte forma:

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & & \frac{\partial f_1}{x_m} \\ & ... & \\ & ... & \\ & ... & \\ & ... & \\ \frac{\partial f_n}{x_1} & & \frac{\partial f_n}{x_m} \end{bmatrix}$$

Neste caso, temos que a matriz jacobiana de f original é:

$$\begin{bmatrix} \pi\left(\frac{-3x_1-5x_2}{\sqrt{3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2}} + 3\right) & \pi\left(\frac{-5x_1-3x_2}{\sqrt{3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2}} - 3\right) \end{bmatrix}$$

A Hessiana é computada da seguinte forma:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial^2 x} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f}{\partial^2 y} \end{bmatrix}$$

Logo, a Hessiana desta função é:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{16\pi x_2^2}{(3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{16\pi x_1 x_2}{(3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2)^{3/2}} \\ -\frac{16\pi x_1 x_2}{(3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2)^{3/2}} & \frac{16\pi x_1^2}{(3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

As curvas de nível tangenciando a superfície da função podem ser observadas abaixo, assim como o o vetor de descida máxima da função (i.e: $S = -\nabla f(x_1, x_2)$)

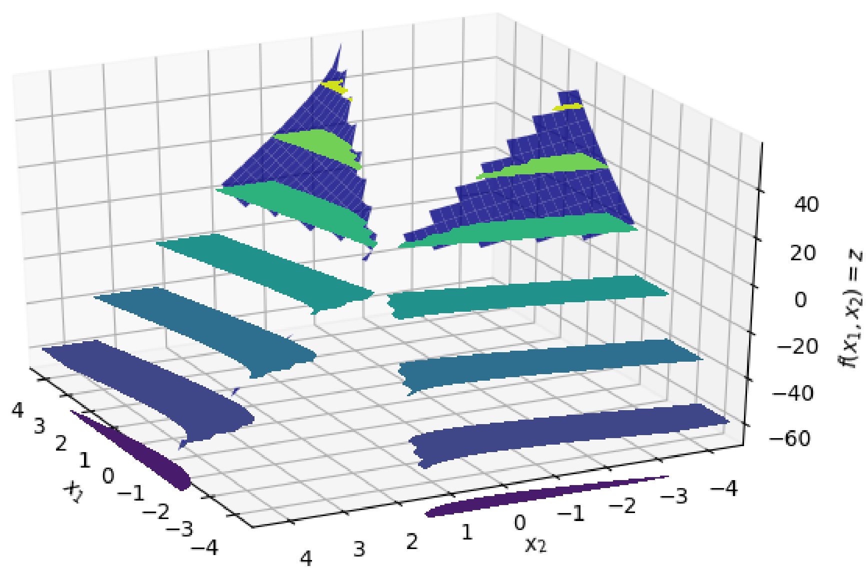

Figura 1: Curvas de nível e superfície da função, assim como o vetor de descida máxima

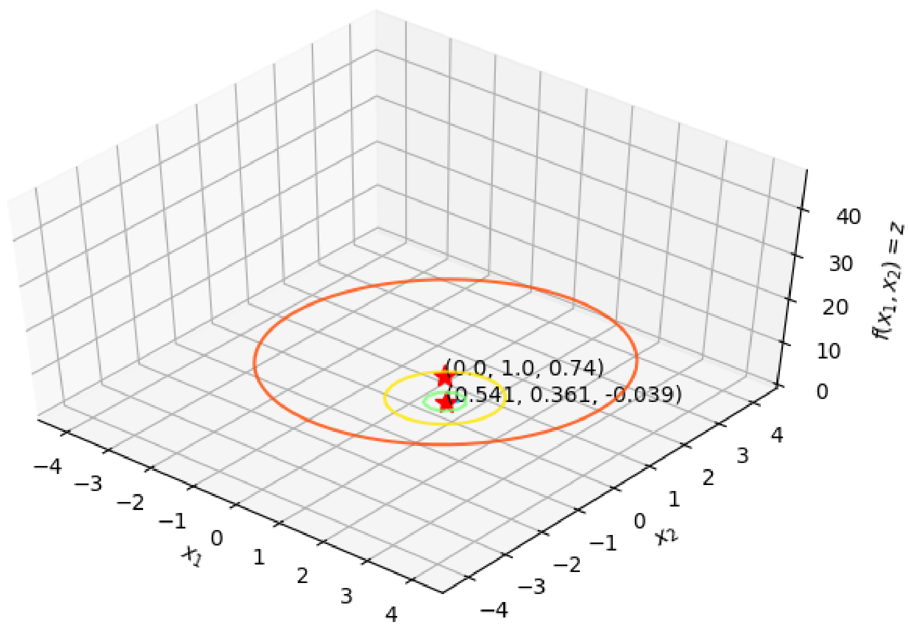

Figura 2: Curvas de nível, em destaque temos o ponto de máximo global da mesma

Questão 3

Considerando a função

$$f(x_1, x_2) = -\pi(0.072)x_1x_2 + (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.3)^2$$

Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 0.226195x_2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 - 0.226195x_2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2 x_1} = -0.226195$$

Logo, a Hessiana é igual a:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} 2 & -0.226195 \\ -0.226195 & 2 \end{bmatrix}$$

Visto que $\det([2]) = 2$ e $\det(H(f(x))) = 3.9488...$, temos que esta matriz Hessiana é positiva definida.

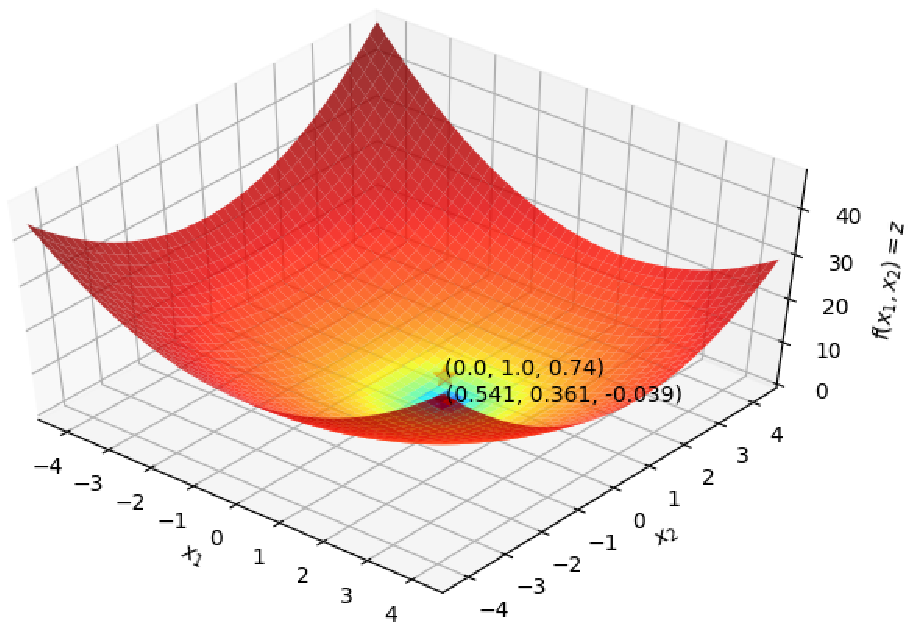

Figura 3: Superfície da função, em destaque temos o ponto de máximo e mínimo local da mesma

Questão 5

Dado o problema:

$$\min x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}$$

Temos que o gradiente de uma função é dado por:

$$\vec{\nabla} f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

logo...

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = [1 - x_1^{-2}, 1 - x_2^{-2}]$$

A Hessiana é computada da seguinte forma:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial^2 x} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f}{\partial^2 y} \end{bmatrix}$$

Logo, a Hessiana desta função é:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} 2{x_1}^{-3} & 0 \\ 0 & 2{x_2}^{-3} \end{bmatrix}$$

Os valores que tornam $\vec{\nabla} f(x) = 0$ são obtidos através da solução do sistema abaixo:

$$\left(\{ \begin{matrix} 1 - x_1^{-2} = & 0 \\ 1 - x_2^{-2} = & 0 \end{matrix} \right.$$

Temos que $x_1 = x_2 = \pm 1 \leftrightarrow x_1 = x_2$ senão $x_1 = -x_2$, tal que $x_1 = \pm 1$.

Observa-se que os pontos $p_1 = (-1, -1)$ e $p_2 = (1, 1)$ são respectivamente o máximo e mínimo local, visto que $H(f(p_{1_x}, p_{1_y})) < 0$ assim como $H(f(p_{2_x}, p_{2_y})) > 0$