(8) Min $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

Sujeito a:

$h_1(x_1, x_2): 2x_1 + x_2 = 8$

$h_2(x_1, x_2): (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 = 4$

$g_1(x_1, x_2): x_1 + x_2 \leq 7$

$g_2(x_1, x_2): x_1 - 0.25\, x_2^2 \leq 0$

$0 \leq x_1 \leq 10$

$0 \leq x_2 \leq 10$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} 2x_1 - 6 = 0 \\ 2x_2 - 4 = 0 \end{cases} \quad x\tfrac{1}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Avaliando as restrições p/ ponto (3,2)

$h_1 = 6 + 2 - 8 = 0$ (ok)

$h_2 =$ [illegible] $8 \neq 4$ (ñ ok)

$g_1 = 3 + 2 - 7 = -2$ (ok)

$g_2 = 3 - 0.25 \cdot 4 = 2$ (ñ ok)

$2x_1 + x_2 = 8 - x_2$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 = 4$

$x_1^2 - 2x_1 + 1 + ((8 - 2x_1) - 4)^2 = 4$

$x_1^2 - 2x_1 + 1 + 16 - 16x_1$

$5x_1^2 - 18x_1 + 13 = 0$

Ponto 1: $x_1 = 2.6$ / 2.8 — Ponto 2: $x_1 = 1$ / $x_2 = 6$

P/ ponto 1 - viola restrição:

$h_1 = 5$

$h_2 = (2.56)$

$g_1 = 5.4 - 7 = -1.6$, Ok => restrição não ativa.

$g_2 = 2.6 - 0.25 \cdot (2.8^2) = 0.6$ (violação)

P/ ponto 2:

$h_1 = 2 \cdot 1 + 6 - 8 = 0$ Ok

$h_2 = 4 = 4$ Ok

$g_1 = 7 \leq 7$

$g_2 = 1 - 0.25 \cdot (6)^2 = -8$ Ok => restrição não ativa.

Possível ótimo => (1, 6)

Usando:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 8 - 2x_1 \\ x_1 + 8 - 2x_2 - 7 = 0 \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

Soluções:

Ponto 1: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Ponto 2: $\begin{cases} x_1'' = 3 \\ x_2'' = 4 \end{cases}$

$h_1 = 2$ ñ Ok

$h_2 = (3-1)^2 + (4-4)^2 - 4 = 0$ Ok

$g_1 = 3 + 4 - 7 = 0$ Ok

$g_2 = 3 - 0.25 \cdot 4^2 = -1$ Ok mas ñ ativa.

$x_1 - 0.25 x_2^2$ e $(x_1-1)^2 - (x_2-4)^2 - (x_2-4)^2 - 4 = 0$ => usando essas restrições:

$(0.25 x_2^2 - 1)^2 - (x_2-4)^2 - 4 = 0$

$0.0625 x_2^4 + 0.5 x_2^2 - 8x_2 + 13 = 0$

$x_2^7 + 8x_2^2 - 128x_2 - 208 = 0$

$x_2' = 2$

$x_2'' = 3.4128$

$x_2''' = -2.706 + 4.816$ } válidas

$x_2''' = -2.706 + 4.816$

p/ $\begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} h_1 = 2 + 2 - 8 = 4 & \text{ñ Ok} \\ h_2 = (1-1)^2 + (2-4)^2 - 4 = 0, & \text{Ok} \\ g_1 = 1 + 2 - 7 = -4 & \text{Ok, mas ñ ativa.} \\ g_2 = 1 - 0.25 \cdot 2^2 = 0 & \text{Ok} \end{cases}$

⇓

viável.

Encontrando os valores ótimos:

$x_2 - 0.12 + \dfrac{0.07}{0.06} x_1 = 0$ $\qquad x_2 = 0.12 - 0.11667 x_1$

=>

$$\begin{cases} -\pi x_1 \left[3x_1 + 3x_2 - 2\sqrt{x_1 + x_2}\right] + 1.75 = 0 \\ -\pi x_1 \left[3x_1 + 0.36 - 0.35x_1 - 2\sqrt{0.88333x_1 + 0.12}\right] + 1.75 = 0 \\ -\pi x_1 \left[2.65x_1 + 0.36 - 2\sqrt{0.88333x_1 + 0.12}\right] + 1.75 = 0 \\ 2.65x_1 + 0.36 - 2\sqrt{0.88333x_1 + 0.12} - 0.557 = 0 \\ 2.65x_1 - 0.197 = \left[2\sqrt{(0.88333x_1 + 0.12)}\right]^2 = 0 \end{cases}$$

$$7.0225x_1^2 - 1.0773x_1 + 0.038 = 4\cdot(0.88333x_1 + 0.12)$$

$$7.0225x_1^2 - 4.577654x_1 - 0.77114 = 0$$

$$\Downarrow$$

Ponto 1: $\begin{cases} x_1' = 0.7370 \\ x_1'' = 0.034006 \end{cases}$ Ponto 2: $\begin{cases} x_1 = -0.085231 \\ x_2 = 0.129944 \end{cases}$

Ambos os pontos violam restrições laterais

1ª condição: viabilidade de x_1 e x_2:

Encontrando os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{bmatrix} \pi x_2 \\ -\pi x_1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} \frac{0.04}{0.6} \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} \pi \cdot \left[3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2}}\right] \\ \pi \cdot \left[3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2}}\right] \end{bmatrix}$$

Aplicando no ponto 1:

$$\begin{cases} -0.106833 + 0.11667\lambda_1 + \lambda_2 \left[-3\pi + \dfrac{\pi}{0.878119}\right] = 0 \\ -2.315624 + \lambda_1 + \lambda_2 \left[-3\pi + \dfrac{\pi}{0.878119}\right] = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2.500522$, e (... resolvendo sistema anterior).

$\lambda_2 = 0.031621$

$\lambda_1 = 0.05387$

$x_2 = 0.062178$

Aplicando em P_2, temos: (~~aplicando~~)

$$\begin{cases} -0.408223 + 0.116667\lambda_1 + \lambda_2 \left[-3\pi \; e \; \dfrac{\pi}{0.211451} \right] = 0 \\ \\ 0.267761 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot \left[-3\pi \cdot \dfrac{\pi}{0.211451} \right] = 0 \end{cases}$$

Ponto 2: $\begin{cases} x_1'' = 2.9118 \\ x_2'' = 3.7128 \end{cases} \Rightarrow$

$h_1 = 1.236$ ñ ok

$h_2 = 0$ ok

$g_1 = -0.6765$ (ok) mas ñ ativa

$g_2 = 0$ (ok)

$\hookrightarrow$ viola restrição

Logo, o ponto viável é $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$

$$\nabla h_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 8 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5x_2 \end{bmatrix}$$

$\nabla F + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 + \lambda_3 \nabla g_1 + \lambda_4 \nabla g_2 \Rightarrow$ desativado.

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -3$

$\lambda_3 = 4$