

Conteúdo

Item B	8
------------------	---

Questão 1

Item A

Considerando o problema de otimização abaixo:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 && \text{s.t:} \\ &x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ &x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

Este problema de otimização foi resolvido utilizando o Método da Penalidade Exterior através do Método de Nelder-Mead. Para tanto, o problema foi reescrito como um problema de otimização irrestrita usando uma função pseudo-objetivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f'(x) &= F(x) + r_p P(x) && \text{tal que } P(x) \text{ é dado por:} \\ P(x) &= \sum_{i=1}^n (\max(0, g_i(x)))^2 + \sum_{j=1}^m (h_k(x))^2 \\ f'(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + r_p \max(0, x_1 + x_2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Foi encontrado como x^* o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. As figuras 1, 2, 3 e 4 apresentam as curvas de nível e as superfícies da função para cada r_p , assim como a convergência do algoritmo em cada execução:

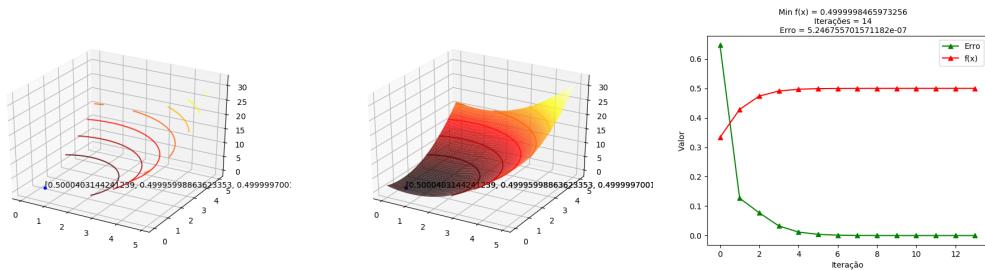


Figura 1: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $r_p = 1$

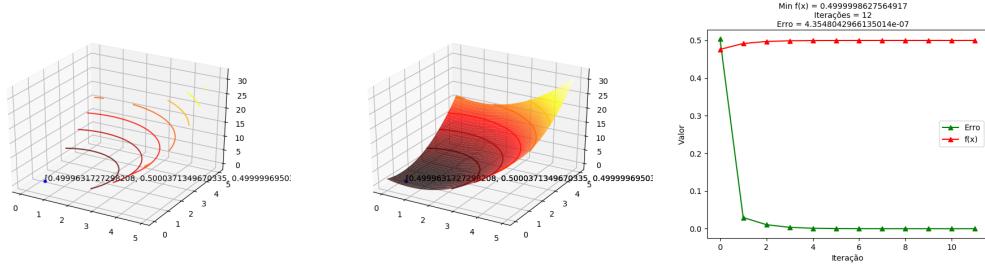


Figura 2: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $r_p = 10$

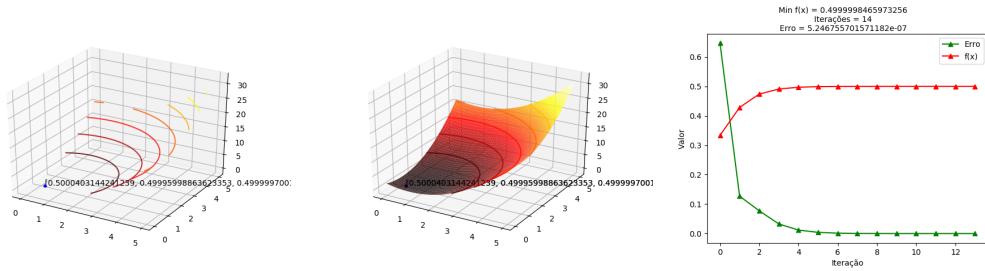


Figura 3: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $r_p = 100$

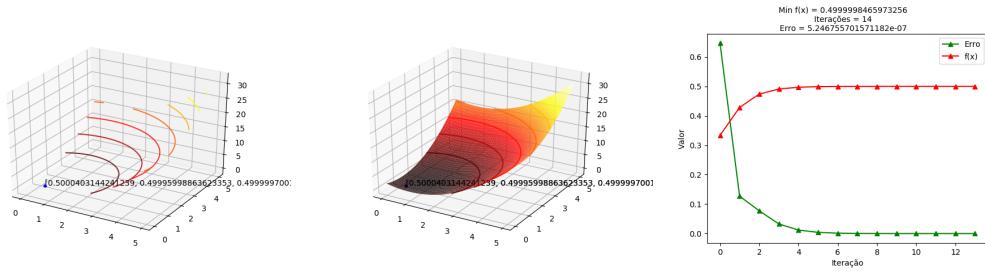


Figura 4: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $r_p = 1000$

As tabelas abaixo geraram os dados apresentados acima:

x_1	x_2	f(x)	erro
0.6666666850283716	0.6666669105274989	0.22222204740725726	0.6466666666665379
0.5714287679821353	0.5714283239884842	0.3673469823926301	0.1269844766143351
0.526315496942255	0.5263160380993406	0.4487535041989682	0.07733611040286753
0.5090905298560064	0.5090912957665924	0.4819834637691798	0.03263653227211932
0.5030672383633491	0.5030676827213969	0.49388389754371076	0.011827829852086247
0.5010262308757442	0.5010271600635555	0.4979487172683068	0.0040564449704547645
0.5003425150025591	0.5003429195586395	0.49931480034915204	0.0013651838080389611
0.5001138951133319	0.5001146850146494	0.4997714459967681	0.0004565835788785666
0.5000379759302219	0.5000382154495984	0.49992381152277154	0.00015235190822671107
0.5000131528815173	0.5000122494888153	0.4999745979527157	5.0774817701215724e-05
0.5000045189438189	0.50000394786201	0.4999915332301776	1.6934852061833983e-05
0.50003110133553	0.4999716884127744	0.4999972120205117	5.641630192065872e-06

Continuação da Tabela 1 da página anterior

x_1	x_2	f(x)	erro
0.5000382193108293	0.49996266826569685	0.49999911527784807	1.814121249499312e-06
0.5000403144241239	0.49995998863623353	0.49999970016580453	5.246755701571182e-07

Tabela 1: Para $r_P = 1$

x_1	x_2	f(x)	erro
0.5238096685439415	0.523809244532719	0.45351486736473057	0.5038095238092439
0.5081970921637178	0.5081964963344485	0.4837407863739348	0.029738415153455655
0.5027626309141939	0.5027621944048724	0.49449043652843205	0.010690694259194
0.5009245672444872	0.5009238660283281	0.4981532750802126	0.0036560485435986334
0.500308837966202	0.5003080364167611	0.49938327008225253	0.0012292581596012875
0.5001026581896479	0.5001030559664557	0.49979430700313254	0.00041096461176692856
0.5000343457642397	0.5000342296817712	0.49993142690529174	0.00013709871286693431
0.5000115590903891	0.5000113038103384	0.4999771373606612	4.5703510737515884e-05
0.5000036285854446	0.5000039936094471	0.49999237783422384	1.5242875561982672e-05
0.49997368156102384	0.5000288401868227	0.49999747977657005	5.08177470931459e-06
0.49996535376827844	0.5000354251072681	0.4999992235797531	1.6530289737026749e-06
0.4999631727298208	0.5000371349670335	0.49999969503839925	4.3548042966135014e-07

Tabela 2: Para $r_P = 10$

x_1	x_2	f(x)	erro
0.5024871168079972	0.5024880076082603	0.49503725151561795	0.4824875621886578
0.5008323270357756	0.5008315439308794	0.4983375132669485	0.0032947571577385815
0.5002772463765501	0.5002780072735618	0.49944490050348556	0.001106756743406212
0.5000929320720773	0.5000922321579115	0.49981485291315214	0.00036990381485046964
0.5000307611547639	0.5000309724391769	0.4999382683115998	0.00012343012066895476
0.5000101543791571	0.5000104228200435	0.49997942301254605	4.1164355555678434e-05
0.5000035161825714	0.5000033415514702	0.4999931422894879	1.3719744382245658e-05
0.5000266233333861	0.4999756263262689	0.4999977516432228	4.5689489297506825e-06
0.5000317671950696	0.49996899670474415	0.49999923807054525	1.4512116387477292e-06
0.5000333806920074	0.49996693183161817	0.49999968968414876	5.047280742798144e-07

Tabela 3: Para $r_P = 100$

x_1	x_2	f(x)	erro
0.5002501733302913	0.5002495894221257	0.4995003621291578	0.4802498750621386
0.5000833337151517	0.5000832907545782	0.49983338941212796	0.00033297000140197763
0.5000276692410743	0.5000278776439161	0.4999444546577595	0.0001103907169396354
0.5000095943242626	0.5000089265354448	0.49998147931202663	3.702106880415501e-05
0.500002612743998	0.5000035619948071	0.49999382528070907	1.2350513761860693e-05
0.49998803955029925	0.5000140164105236	0.4999979443786893	4.118705150601976e-06

Continuação da Tabela 4 da página anterior

x_1	x_2	f(x)	erro
0.4999812879363457	0.5000193244662279	0.49999938832100277	1.3641204836822851e-06
0.499979664177176	0.5000205906985109	0.49999974596183566	3.204938402445734e-07

Tabela 4: Para $r_P = 1000$

Item B

A obtenção do Φ ótimo e os valores e os valores associados de x_1 , x_2 , g_1 e g_2 para $r_P = 1.0$ e $r_P = 10$ foi feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= F(x) + r_P * \sum_{i=1}^m (\max(0, g_i(x)))^2 + \sum_{j=1}^n (h_j(x))^2 \\ \phi(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + r_p \max(0, x_1 + x_2 - 1)^2\end{aligned}$$

Para $\nabla\phi(x) = 0$ temos que:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + 2r_P(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ 2(x_2 - 1) + 2r_P(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Logo, $x_1 = x_2 = \frac{2+2r_P}{2+4r_P}$. Assim, para $r_P = 1$, temos que $(x_1, x_2, \phi, g_1, g_2)^* = (\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e de forma análoga, para $r_P = 10$ temos que $(x_1, x_2, \phi, g_1, g_2)^* = (\frac{22}{42}, \frac{22}{42}, 0.4762, 0.4762, 0.5238)$.

Item C

Item D

No item D, foi otimizada a função do item A com $r_p = 10$ através do algoritmo de Nelder-Mead utilizando o Método da Penalidade da função exterior. Foi variado o chute inicial para cada execução, tais que os testes foram feitos para $x_0 = (1.0, 1.0)$, $x_0 = 10.0, 10.0$ e $x_0 = -1.0, 1.0$. As figuras 5, 6 e 8 apresentam as curvas de nível e as superfícies da função para cada x_0 , assim como a convergência do algoritmo em cada execução:

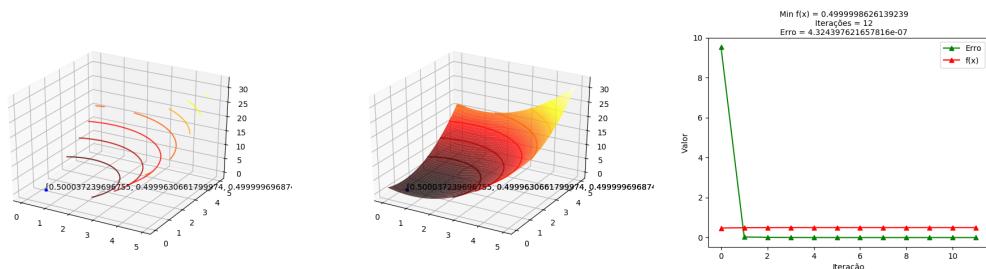


Figura 5: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $x = (1.0, 1.0)$

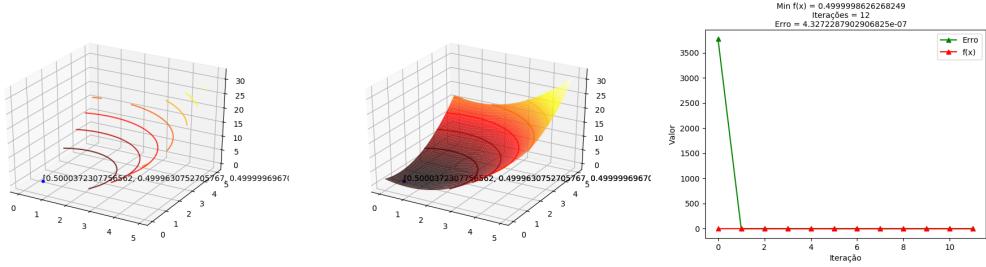


Figura 6: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $x = (10.0, 10.0)$

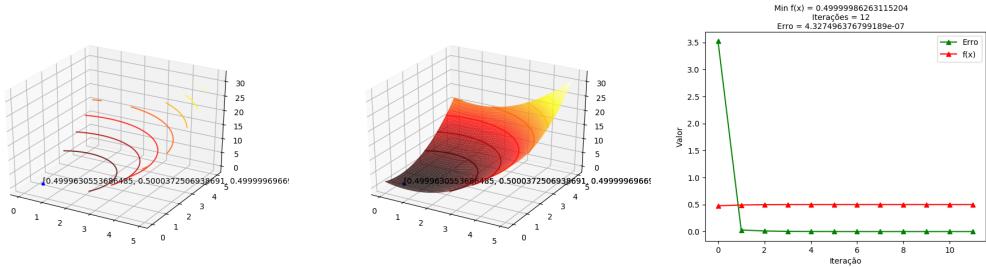


Figura 7: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para $x = (-1.0, 1.0)$

Nota-se que o algoritmo de otimização foi capaz de convergir para o ótimo da função com o mesmo número de iterações (13 iterações) e com razões de convergências idênticas, independentemente do chute inicial fornecido. Tal fato demonstra a robustez do método, visto que o seu correto funcionamento não é demasiadamente sensível aos parâmetros de entrada em casos onde a função objetivo e suas restrições são bem comportados (i.e: contínuos, diferenciáveis, etc.).

Item E

Considerando o problema de otimização do Item A, este foi reformulado para ser reescrito como uma função pseudo-objetivo utilizando o Método da Penalidade Interior, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f'(x) = F(x) + r_p P(x) \quad \text{tal que } P(x) \text{ é dado por:} \\ & P(x) = \sum_{i=1}^m (\bar{g}_i(x)) + \sum_{j=1}^n (h_j(x))^2 \\ & \bar{g}_i(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\bar{g}_i(x)} \leftrightarrow g_i(x) \leq \epsilon \\ \frac{-2\epsilon - g_i(x)}{\epsilon^2} | \epsilon = -Cr_P^a, \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando o método de Nelder-Mead e $r_P = 10.0$ para minimizar a função descrita, obteve-se os seguintes resultado:

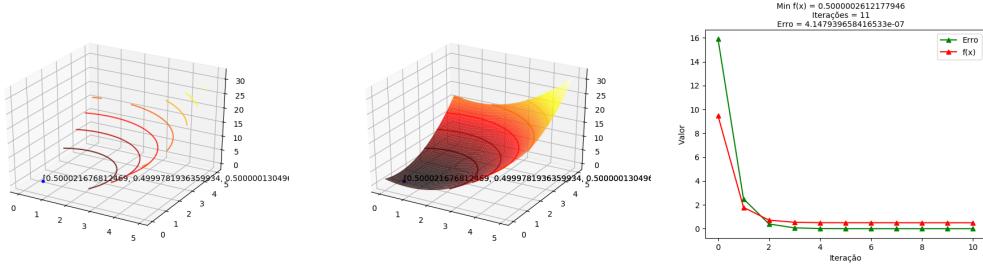


Figura 8: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o item E - Nelder-Mead

x_1	x_2	f(x)	erro
-0.4337297515632955	-0.43373030102459964	4.111163576593839	15.89989389334903
0.2623354976138911	0.26233505431145676	1.088298490178227	2.500092645260892
0.4497588265423719	0.44975943227194093	0.6055300313417242	0.3955656496019184
0.49046768009506486	0.49046812505764736	0.5192459166099743	0.0705425236826952
0.49824650006328	0.4982459867333184	0.5035136645279694	0.012860055488568611
0.4996794192146522	0.49967927179479465	0.5006415146291747	0.0023477842738919286
0.49994177847045607	0.49994111149546056	0.5001171168916858	0.00042865470298514285
0.4999892970271441	0.4999893177539732	0.5000213854475468	7.82544014724662e-05
0.5000353872566405	0.4999606081450917	0.5000040074022439	1.4284741416514812e-05
0.5000235378709201	0.49997581335974817	0.5000006499083567	2.7012590907427025e-06
0.500021676812469	0.4999781936359934	0.5000001304969393	4.147939658416533e-07

Tabela 5: Resolução via MPFI + Nelder-Mead p/ $r_P = 10.0$

Questão 2

Item A

Dado o problema de otimização abaixo:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 && \text{s.t.:} \\ &x_1 - x_2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo o problema de otimização acima utilizando uma função pseudo-objetiva da forma de Lagrangeano Aumentado, temos:

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) &= F(x) + \sum_{i=1}^l (\lambda_i h_i(x) + r_P(h_i(x))^2) \\ A(x, \lambda, r_P) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(x_1 - x_2 - 2) + r_P(x_1 - x_2 - 2)^2 \end{aligned}$$

Reescrevendo o problema de otimização acima utilizando uma função pseudo-objetiva da forma de Penalidade Interior, temos:

$\min f'(x) = F(x) + r_p P(x)$ tal que $P(x)$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m (\bar{g}_i(x)) + \sum_{j=1}^n (h_j(x))^2$$

$$\bar{g}_i(x) = \begin{cases} \frac{-1}{g_i(x)} & \leftrightarrow g_i(x) \leq \epsilon \\ \frac{-2\epsilon - g_i(x)}{\epsilon^2} | \epsilon = -Cr_P^a, \end{cases}$$

$$f'(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$$

Na forma de Penalidade Exterior, temos:

$\min f'(x) = F(x) + r_p P(x)$ tal que $P(x)$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (\max(0, g_i(x)))^2 + \sum_{j=1}^m (h_k(x))^2$$

$$f'(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$$

Item B

Iteração 1:

$P/\lambda = 0$ e $r_p = 1$ temos:

$$x_2 = \frac{2+0}{2+4} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad x_1 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

$$A(x, \lambda, r_p) \quad P/(x_1, x_2) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right) = 1 + \frac{1}{3}$$

Iteração 2:

$$\lambda_n^{p+1} = \lambda_n^p + 2r_p h_K(x^p) \Rightarrow \text{Ajuste da multiplicador de Lagrange.}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + 2(x_1 - x_2 - 2) = -\frac{4}{3} \quad \cancel{\lambda_1}$$

$$r_p = r_p \gamma = 1 \cdot 3 = 3$$

$$P/\lambda' = -\frac{4}{3} \quad , \quad r_p = 3 \quad \text{temos:}$$

$$x_2 = \frac{2 - \frac{4}{3}}{2+4} \approx 0,047\dots$$

$$x_1 = 2 - x_2 \approx 1,952\dots$$

$P/x_1 \text{ e } x_2$, temos que $A(x, \lambda, r_p) \approx 1.968 \quad \cancel{1.968}$

$$\min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \text{ s.t.:}$$

$$x_1 - x_2 - 2 = 0$$

P/ $\lambda = 0$, execute 2 iterações do Lagrangeano Aumentado:

$$\nabla A(x, \lambda, r_p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A(x, \lambda, r_p)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A(x, \lambda, r_p)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) + \lambda + 2r_p(x_1 - x_2 - 2) \\ 2(x_2 - 1) - \lambda - 2r_p(x_1 - x_2 - 2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla A(x, \lambda, r_p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2x_1 - 2) + \lambda + 2r_p(x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ (2x_2 - 2) - \lambda - 2r_p(x_1 - x_2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_2 = \frac{2 + \lambda}{2 + 4r_p} \end{cases}$$

Inicia-se o ~~Lagrange~~ método do Lagrangeano Aumentado:

Questão 3

Item A

Considerando o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.:} \quad & x_1 + x_2 - 0.5 \leq 0 \end{aligned}$$

A função pseudo-objetivo na forma do Lagrangeano Aumentado é dada por:

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) &= F(x) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \psi_i + r_P \psi_i^2) \quad \text{tal que } \psi_i \text{ é dado por:} \\ \psi_i &= \max\left(g_i(x), \frac{-\lambda_i}{2r_P}\right) \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda \left(\max\left((x_1 + x_2 - 0.5), \frac{-\lambda}{2r_P}\right) \right) + \\ &\quad r_P \left(\max\left((x_1 + x_2 - 0.5), \frac{-\lambda}{2r_P}\right) \right)^2 \end{aligned}$$

Visto que o chute inicial é $x = (1, 1)$, temos que:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \max(g_i(1, 1)) = 1.5, 0 \\ \psi_i &= x_1 + x_2 - 0.5 \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$A(x, \lambda, r_P) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 0.5) + r_P(x_1 + x_2 - 0.5)^2$$

Na forma de Penalidade Exterior, temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & f'(x) = F(x) + r_p P(x) \quad \text{tal que } P(x) \text{ é dado por:} \\ P(x) &= \sum_{i=1}^n (\max(0, g_i(x)))^2 + \sum_{j=1}^m (h_j(x))^2 \\ f'(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + r_p \max(0, x_1 + x_2 - 0.5)^2 \end{aligned}$$

Na forma de Penalidade Interior, temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & f'(x) = F(x) + r_p P(x) \quad \text{tal que } P(x) \text{ é dado por:} \\ P(x) &= \sum_{i=1}^m (\bar{g}_i(x)) + \sum_{j=1}^n (h_j(x))^2 \\ \bar{g}_i(x) &= \begin{cases} \frac{-1}{g_i(x)} \leftrightarrow g_i(x) \leq \epsilon \\ \frac{-2\epsilon - g_i(x)}{\epsilon^2} | \epsilon = -Cr_P^a, \end{cases} \end{aligned}$$

Questão 4

Item A

Considerando o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.:} \quad & g(x) = x_1 + x_2 - 0.5 \leq 0 \\ & h(x) = x_1 - x_2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

A função pseudo-objetivo na forma do Lagrangeano Aumentado é dada por:

$$A(x, \lambda, r_P) = F(x) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \psi_i + r_P \psi_i^2) + \sum_{j=1}^n (\lambda_{j+m} h_j(x) + r_P (h_j(x))^2) \quad \text{tal que } \psi_i \text{ é dado por:}$$

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) = & F(x) + \lambda_1 \left(\max \left(g(x), \frac{-\lambda_1}{2r_P} \right) \right) + \\ & r_P \left(\max \left(g(x), \frac{-\lambda_1}{2r_P} \right) \right)^2 + \\ & \lambda_2 h(x) + r_P (h(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) = & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda_1 \left(\max \left((x_1 + x_2 - 0.5), \frac{-\lambda_1}{2r_P} \right) \right) + \\ & r_P \left(\max \left((x_1 + x_2 - 0.5), \frac{-\lambda_1}{2r_P} \right) \right)^2 + \\ & \lambda_2 (x_1 - x_2 - 2) + r_P (x_1 - x_2 - 2)^2 \end{aligned}$$

Considerando $x_1 = (1.0, 1.0)$, temos que:

$$\psi = \max(g(x)) = \max(1.5, 0) = 1.5$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, r_P) = & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 0.5) + \\ & r_P (x_1 + x_2 - 0.5)^2 + \\ & \lambda_2 (x_1 - x_2 - 2) + \\ & r_P (x_1 - x_2 - 2)^2 \end{aligned}$$

A função de penalidade exterior é dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & f'(x) = F(x) + r_p P(x) \quad \text{tal que } P(x) \text{ é dado por:} \\ & P(x) = \sum_{i=1}^n (\max(0, g_i(x)))^2 + \sum_{j=1}^m (h_k(x))^2 \\ f'(x) = & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + r_p \max(0, x_1 + x_2 - 0.5)^2 + (x_1 + x_2 - 0.5)^2 \end{aligned}$$

Questão 5

Item A

Foi realizada a minimização do problema de otimização abaixo utilizando os algoritmos de Newton, Powell, BFGS e Nelder-Mead através do Método da Penalidade Exterior:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 14x_1 - 14x_2 + 10 \quad \text{s.t.:} \\ &4x_1^2 + x_2^2 - 25 \leq 0 \end{aligned}$$

O x^* encontrado foi aproximadamente $(2.0, 3.0, -50)$ em todos os casos (com erro de 10^{-7}). As figuras 9,10 e 11 apresentam os x^* encontrados sob as curvas de nível e superfície da função, assim como a convergência dos algoritmos:

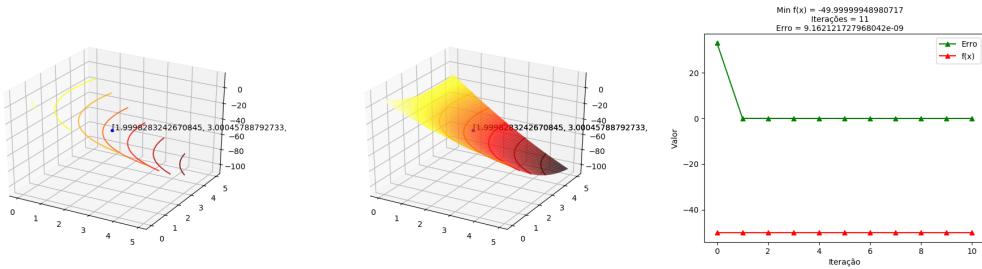


Figura 9: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o algoritmo BFGS

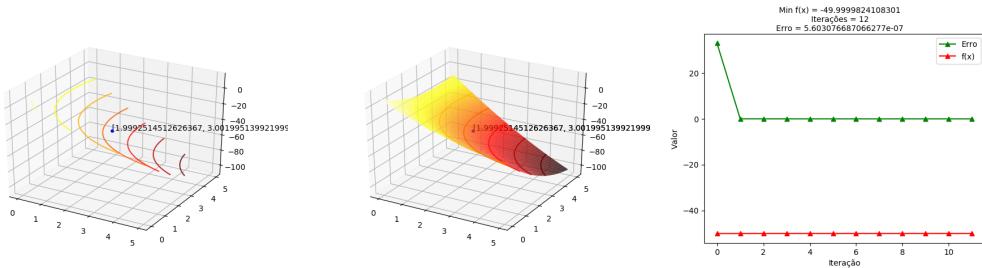


Figura 10: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o algoritmo Powell

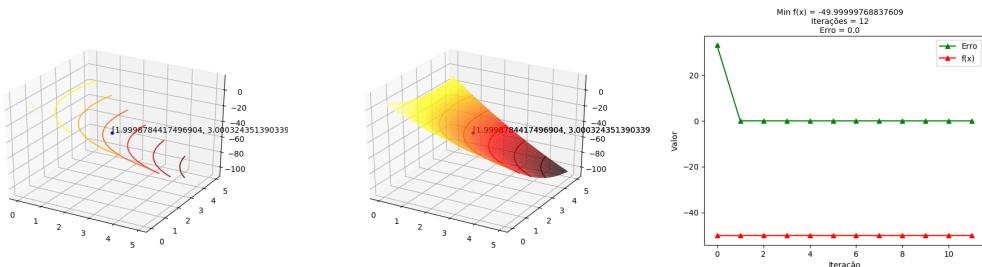


Figura 11: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o algoritmo Nelder-Mead

As tabelas abaixo apresentam a aproximação do x^* na execução de cada algoritmo:

x_1	x_2	f(x)	erro
1.8517490583488905	2.871413556211069	-46.8395451048462	27.04908199658837
1.9727000711264744	2.9766698644623175	-49.42266027031416	2.1113216991046286
1.9950082079576021	2.9957463378479234	-49.89459071593174	0.3857671572697967
1.9990864790334877	2.9992286401135075	-49.980754890011006	0.07043291038843336
1.9998228634367057	2.9998867425338536	-49.996486253282626	0.012859319630159405
1.9999542679482318	3.000015315516531	-49.99936017630952	0.0023478521718658385
1.9998532142484182	3.0003704977318097	-49.999874009514784	0.0004258506799530437
1.9998589495819121	3.0003726477472066	-49.99997867704169	8.622756953258204e-05
1.9998597436198093	3.000372945478484	-49.99999316832337	1.2773734312077067e-05
1.9998599631994842	3.0003730278184504	-49.9999971757174	3.858705284187636e-06
1.9998600692316302	3.000373067577115	-49.99999911082206	1.8799086589638137e-06
1.9998600707580148	3.0003730681837406	-49.99999913888445	2.7818622072572907e-08

Tabela 6: Resolução do Item A via BFGS

x_1	x_2	f(x)	erro
1.8517490678563742	2.871413568446845	-46.83954533342001	27.049081996588377
1.9727001503527257	2.9766697013890835	-49.42266055380941	2.111321478150053
2.0020207774569747	2.977157893870329	-49.89413987774088	0.3842109886290359
2.0072932055405257	2.9772622376760323	-49.97884584983822	0.06877348110932502
2.00825314479338	2.9772819517983256	-49.9942667029744	0.012511994606420274
2.0084283232828763	2.977285554871725	-49.99708068371458	0.0022828971404251774
2.008460304562443	2.977286210056164	-49.99759439291417	0.0004167475290230982
2.008466143424055	2.9772863297131167	-49.997688181462635	7.608614366461097e-05
2.008467213494467	2.9772863406860433	-49.99770530287921	1.3889409004264053e-05
2.008467408861796	2.9772863426883056	-49.99770842880238	2.535850278206908e-06
2.0084674445324797	2.9772863430512944	-49.997708999525884	4.629879839512796e-07

Tabela 7: Resolução do Item A via Powell

x_1	x_2	f(x)	erro	
1.8517492001377192	2.871413566151038	-46.83954744084904	27.049081996586743	
1.9727000439528872	2.9766697784253147	-49.422659315767575	2.1113194409667386	
1.9950086383026266	2.9957452070132007	-49.8945908091244	0.3857680800009078	
1.999088436843856	2.9992234174205725	-49.98075487272487	0.07043282042396015	
1.999833430870394	2.9998585806293105	-49.99648635707022	0.01285933996229005	
2.000157598726168	2.9994731410179933	-49.999359679663904	0.0023466374543446022	
2.000216747330951	2.999402650649328	-49.99988284161152	0.0004259534275732335	
2.0002275659553983	2.999389757331822	-49.999978524957896	7.657035320107752e-05	
2.0002294075569558	2.9993875625886464	-49.99999481266064	1.2724159233812316e-05	
2.0002297155372393	2.999387195551316	-49.99999753653451	2.2263965746560643e-06	
2.0002298015765136	2.9993870930135285	-49.999998297492695	2.1415040407646302e-07	

Tabela 8: Resolução do Item A via Nelder-Mead

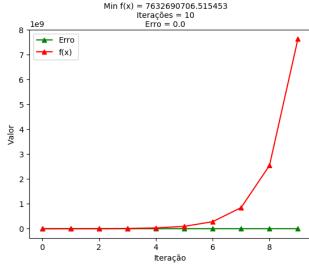
Item B

Foi realizada a minimização do problema de otimização abaixo utilizando os algoritmos de Newton, Powell, BFGS e Nelder-Mead através do Método da Penalidade Exterior:

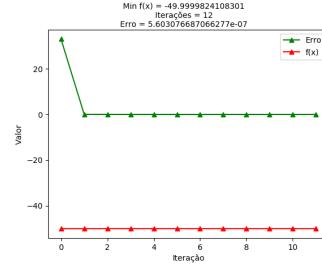
$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 + 100 \quad \text{s.t:} \\
 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 100 \\
 & x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10 \\
 & 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5 \\
 & x_1 - 100 \leq 0 \\
 & x_2 - 100 \leq 0 \\
 & x_3 - 100 \leq 0 \\
 & x_4 - 100 \leq 0 \\
 & x_1 + 100 \leq 0 \\
 & x_2 + 100 \leq 0 \\
 & x_3 + 100 \leq 0 \\
 & x_4 + 100 \leq 0
 \end{aligned}$$

O x^* encontrado foi aproximadamente $(-1.789, -1.400, -2.396, -1.6545, 168.598, 0.0)$ em todos os casos (com erro de 10^{-5}). Não foi realizada a plotagem dos resultados obtidos devido a quantidade de variáveis da função.

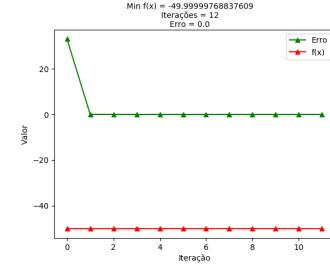
A figura abaixo e as tabelas 9,10 e 11 abaixo apresentam a aproximação do x^* na execução de cada algoritmo:



(a) Convergência do algoritmo BFGS



(b) Convergência do algoritmo Powell



(c) Convergência do algoritmo Nelder-Mead

x_1	x_2	x_3	x_4	f(x)	erro
-1,79095	-1,40019	-2,37144	-1,66819	167,71121	12150,99165
-1,78987	-1,40011	-2,38806	-1,65907	168,30295	0,59176
-1,78951	-1,40007	-2,39359	-1,65602	168,49982	0,19678
-1,78939	-1,40006	-2,39543	-1,65501	168,56550	0,06571
-1,78935	-1,40005	-2,39605	-1,65467	168,58740	0,02189
-1,78934	-1,40005	-2,39625	-1,65456	168,59478	0,00726
-1,78934	-1,40005	-2,39632	-1,65452	168,59702	0,00223
-1,78933	-1,40005	-2,39634	-1,65451	168,59792	0,00101
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65451	168,59818	0,00017
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65451	168,59818	0,00000

Tabela 9: Minimização via BFGS

x_1	x_2	x_3	x_4	f(x)	erro
-1,79227	-1,39709	-2,37280	-1,66723	167,74989	12150,98167
-1,79473	-1,40085	-2,38124	-1,65955	168,13687	0,44239
-1,79326	-1,40206	-2,38891	-1,65556	168,40925	0,65220
-1,79119	-1,40174	-2,39335	-1,65441	168,53661	0,63089
-1,78991	-1,40102	-2,39537	-1,65430	168,58294	0,47526
-1,78941	-1,40049	-2,39611	-1,65440	168,59607	0,26315
-1,78929	-1,40021	-2,39632	-1,65447	168,59856	0,10846
-1,78929	-1,40009	-2,39636	-1,65450	168,59858	0,03668
-1,78931	-1,40006	-2,39636	-1,65450	168,59837	0,01305
-1,78932	-1,40005	-2,39636	-1,65450	168,59829	0,00549
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59829	0,00245
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59830	0,00078
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59832	0,00021
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59832	0,00000

Tabela 10: Minimização via Powell

x_1	x_2	x_3	x_4	f(x)	erro
-1,79095	-1,40019	-2,37144	-1,66819	167,71130	12150,99165

Continuação da Tabela 11 da página anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	f(x)	erro
-1,78987	-1,40010	-2,38806	-1,65907	168,30282	0,59159
-1,78951	-1,40007	-2,39359	-1,65602	168,49985	0,19703
-1,78939	-1,40006	-2,39543	-1,65501	168,56550	0,06565
-1,78935	-1,40005	-2,39605	-1,65467	168,58737	0,02188
-1,78934	-1,40005	-2,39625	-1,65456	168,59466	0,00731
-1,78933	-1,40005	-2,39632	-1,65452	168,59713	0,00247
-1,78933	-1,40005	-2,39634	-1,65451	168,59792	0,00078
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59818	0,00027
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59829	0,00010
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59831	0,00002
-1,78933	-1,40005	-2,39635	-1,65450	168,59831	0,00000

Tabela 11: Minimização via Nelder-Mead

Questão 6

Considerando o problema de otimização abaixo:

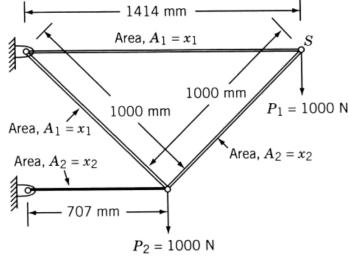


Figura 13: Treliça de 4 barras

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = (9 - (x_1 - 3)^2) \frac{x_2^3}{27\sqrt{3}} \quad \text{s.t:} \\ & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq \frac{x_1}{\sqrt{3}} \\ & 0 \leq x_1 + \sqrt{3}x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Este foi resolvido utilizando 2 métodos de otimização irrestrita (BFGS e Nelder-Mead) através do Método da Penalidade Exterior, para tanto, o problema inicial foi reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = (-1) \left((9 - (x_1 - 3)^2) \left(\frac{x_1^3}{27\sqrt{3}} \right) \right) \quad \text{s.t:} \\ & x_1 + \sqrt{3}x_2 - 6 \leq 0 \\ & x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{3}} \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

E finalmente:

$$\min \quad f'(x_1, x_2) = (-1) \left((9 - (x_1 - 3)^2) \left(\frac{x_1^3}{27\sqrt{3}} \right) \right) + r_P \left((x_1 + \sqrt{3} * x_2 - 6)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)$$

Foi encontrado um x^* ótimo igual a $(3, \sqrt{3}, -1)$ no algoritmo de Nelder-Mead, e o mesmo resultado (com erro da ordem de 10^{-7}) no algoritmo BFGS, ambos com 7 iterações. É sabido que existe outro x^* desta função, $(0.000183308, -0.156902, 0.0)$, entretanto nenhum dos experimentos elaborados foi capaz de retornar tal x^* . As figuras 14 e 15 apresentam o mínimo da função sob as curvas de nível e superfície das mesmas, assim como a convergência de cada algoritmo durante a execução do problema descrito:

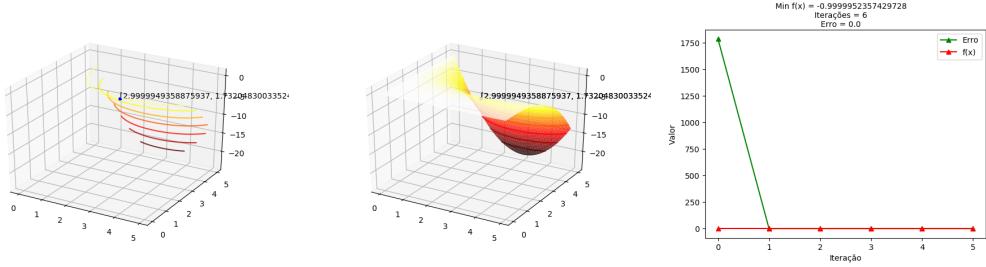


Figura 14: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o algoritmo Nelder-Mead

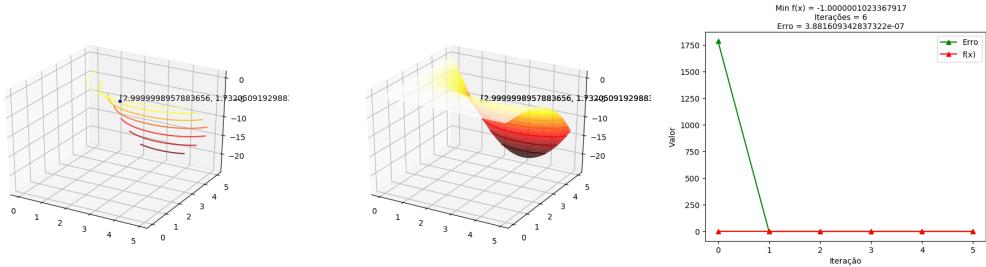


Figura 15: Curvas de nível, superfícies e séries de convergência para o algoritmo BFGS

Os dados apresentados acima foram gerados à partir das tabelas abaixo:

x_1	x_2	f(x)	erro
2.9999747780098738	1.7320795641239406	-1.0000498085706777	1787.2210578233385
2.9999868106124943	1.7320609013961183	-1.0000174831041808	3.214210625512859e-05
2.9999917236288516	1.732053282069772	-1.0000042859597853	1.1951566638690458e-05
2.9999941624392235	1.7320494998353593	-0.9999977349370279	6.5034268849073484e-06
2.9999949358875937	1.7320483003352463	-0.9999956573474016	1.2278195206105735e-06
2.9999949358875937	1.7320483003352463	-0.9999956573474016	0.0

Tabela 12: Resolução do problema de otimização via Nelder-Mead

x_1	x_2	f(x)	erro
2.9999749981166355	1.732079668896944	-1.000049990050108	1787.2210578250624
2.999991666937979	1.7320604240912012	-1.0000166563900192	3.331122909755457e-05
2.9999972208843695	1.7320540080148927	-1.0000055433444905	1.1090305371164177e-05
2.999999072742912	1.7320518696720812	-1.0000018396177448	3.6792543515185017e-06
2.999999690610147	1.7320511572355557	-1.0000006056405644	1.2101214538207117e-06
2.9999998957883656	1.7320509192988323	-1.0000001935219702	3.881609342837322e-07

Tabela 13

O problema também foi resolvido através dos algoritmos SLSQP (Sequential Least Squares Programming) e Cobyla (Constraints by Linear Approximations), visto que am-

bos os métodos foram capazes de atingir os resultados apresentados anteriormente, as plotagens dos gráficos foram emitidas. Notou-se que o SLSQP levou 5 iterações, 20 avaliações da função objetivo e 5 avaliações do gradiente para convergir até um resultado aceitável, enquanto que o algoritmo Cobyla levou 14 iterações, e 26 avaliações da função objetivo para atingir um resultado dentro da margem de tolerância padrão (10^{-6}).

x_1	x_2	f(x)
1.3860516216884882	0.80023727576844728	-0.070078383768581873
1.5306770535297327	0.88373680847664904	-0.10096474433628834
2.4633471432328333	1.4222141404861244	-0.53590602198628878
3.0000000096336938	1.7320508075702321	-1.00000000000023468
3.0000000096336938	1.7320508075702321	-1.00000000000023468

Tabela 14: Resolução do problema de otimização via SQP

Um resultado semelhante foi apresentado pelo Método Cobyla (Constrained optimization by linear approximation), podendo ser encontrado nos arquivos em anexo (no arquivo cobyla.py).