(6) Dado a elipse:

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2 = 4$$

Temos que o maior retângulo inscrito nesta elipse é dado por:

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 4 \Rightarrow \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

$$\max A = 4x_1x_2 \text{ restrito a:}$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1 \quad \text{I}$$

$$\frac{dA}{dx_1} = 4x_1 \frac{dx_2}{dx_1} + 4x_2$$

$$\text{I} \quad \frac{dg}{dx_1} = \frac{2x_1}{16} + \frac{2x_2}{4}\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-4x_1}{16x_2}$$

$$\frac{dA}{dx_1} = 4x_2 - \frac{16x_1^2}{16x_2}$$

$$4x_2 - \frac{16x_1^2}{16x_2} = 0$$

$x_2^2 = \frac{4x_1^2}{16}$, é sabido que $x_2^2 = 4 - \frac{4x_1^2}{16}$, logo $x_2^2 = 4 - x_2^2$, $2x_2^2 = 4$ e $\frac{x_2^2}{4} = \frac{1}{2}$.

Logo, $\frac{x^2}{16} = \frac{1}{2}$. Podemos concluir que a área máxima do retângulo é:

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \max(x_1, x_2) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

(II) $f_0 = 4xy$

$$g = -4 + \frac{x^2}{4} + y^2$$

$$f_p = (-1) \cdot f_0(x,y) + r_p \cdot \left(\max\left(0, g(x,y)\right)^2 \right)$$

(III)