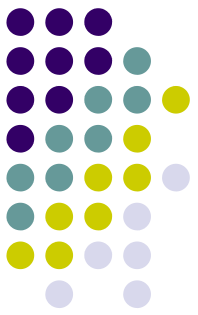
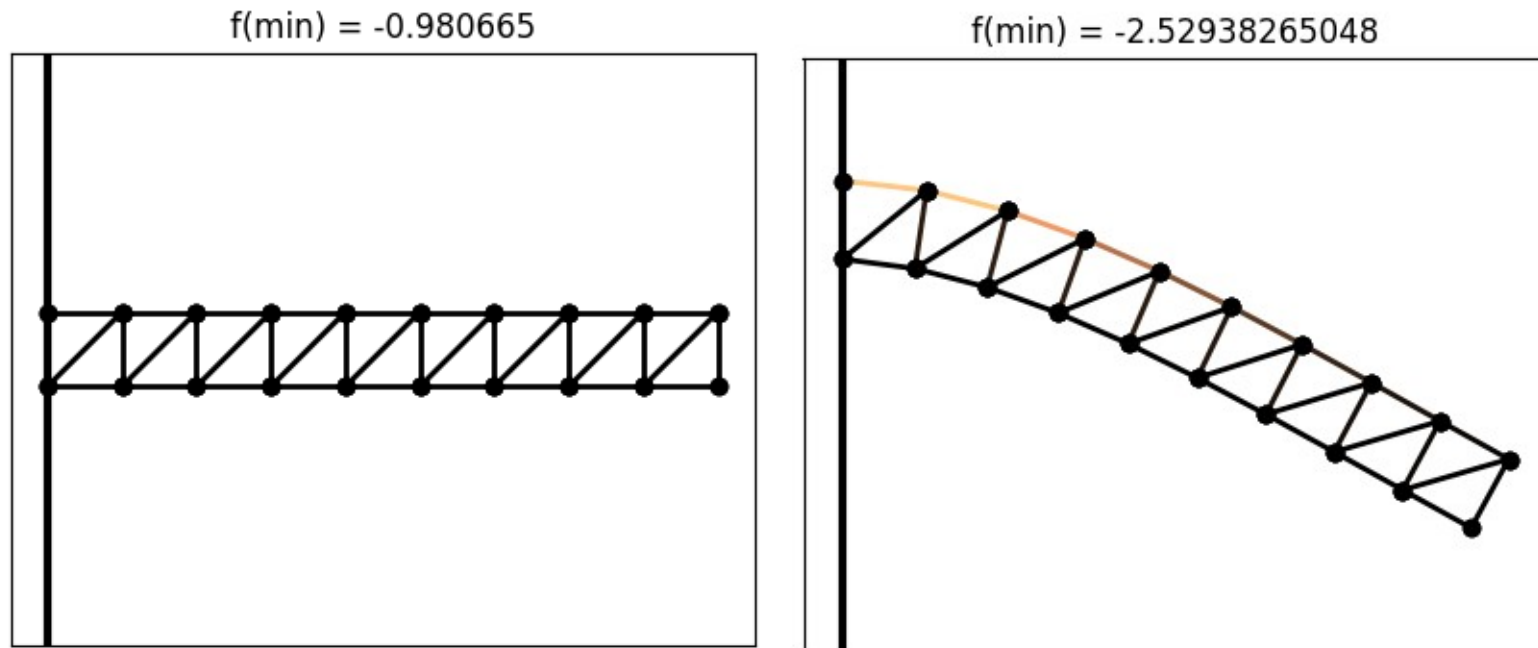


Princípio do Mínimo da Energia Potencial Total aplicado a deformação de uma viga



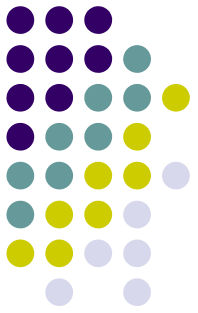
Trabalho Final da disciplina de Otimização Clássica



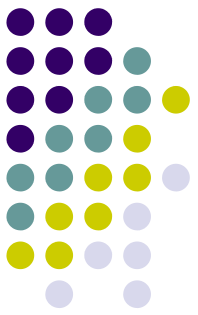
Configuração final de uma viga cantilever após deformação decorrente de uma carga uniformemente distribuída.

Sumário

- Introdução;
- Princípio do mínimo da Energia Potencial Total;
- Modelagem do Problema
- Algoritmos utilizados
 - BFGS
 - Evolução Diferencial
- Resultados
- Conclusões

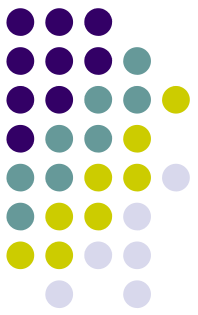


Introdução



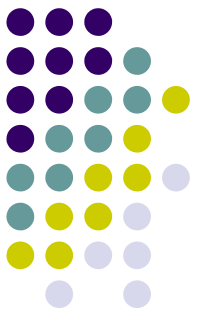
- Este trabalho é um exercício de Modelagem Matemática e Otimização Clássica. Busca-se criar um modelo que compute a deformação de uma viga cantilever sob uma carga uniformemente distribuída. Utilizando o conhecimento obtido na Questão 1 da Lista 1 de Otimização Clássica acerca do princípio da energia mínima potencial (questão do pêndulo), o problema da deformação da viga foi reformulado como um problema de minimização, no qual um algoritmo de minimização (clássico e evolutivo) busca computar a configuração final da estrutura (variáveis de projeto do modelo).

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



- Porque usar o princípio do mínimo da Energia Potencial Total?
 - Computacionalmente mais rápido;
 - Requer apenas a primeira derivada;
 - Incorpora a condição de contorno de força (condição de contorno natural, i.e: forças, momentos prescritos, etc.) automaticamente. O deslocamento admissível precisa satisfazer somente a condição de contorno de deslocamento (condição de contorno geométrica);

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



- O estado de equilíbrio mecânico de um sistema é aquele que (de todas as alternativas possíveis) tem a menor energia potencial.
- A determinação da configuração final de um sistema mecânico implica na formulação da função de energia potencial total do sistema em função das forças internas (energia armazenada por um sistema que sofre deformação - *strain*) e a energia potencial das forças externas.

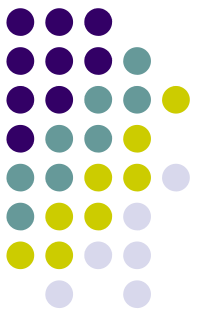
$$\pi = U + W$$

Energia Potencial Total =
Strain Energy -
Trabalho das forças externas

$$\pi = \sum_{e=1}^n \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^m F_i u_i$$

Energia Potencial Total =
Strain energy para cada elemento 'e' e força de
Deslocamento 'i' em cada nó u_i

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



- O estado de equilíbrio mecânico de um sistema é aquele que (de todas as alternativas possíveis) tem a menor energia potencial.
- A determinação da configuração final de um sistema mecânico implica na formulação da função de energia potencial total do sistema em função das forças internas (energia armazenada por um sistema que sofre deformação - *strain*) e a energia potencial das forças externas.

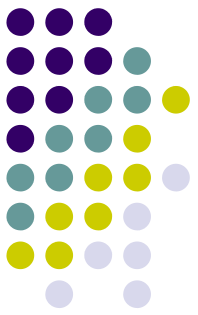
$$\pi = U + W$$

Energia Potencial Total =
Strain Energy -
Trabalho das forças externas

$$\pi = \sum_{e=1}^n \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^m F_i u_i$$

Energia Potencial Total =
Strain energy para cada elemento 'e' e força de
Deslocamento 'i' em cada nó u_i

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



- As forças internas (strain energy) em cada elemento é dada por:

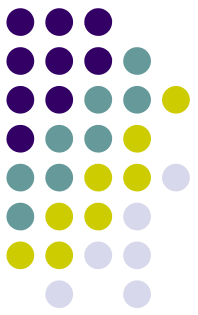
$$\Lambda^{(e)} = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV$$

- Pela Lei de Hook temos:

$$\Lambda^{(e)} = \int_V \frac{1}{2} E \epsilon^2 \, dV$$

- Ou seja, as forças internas são dadas pela área delimitada pela curva σ - ϵ (curva tensão-deformação) multiplicado pelo volume do material.

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total

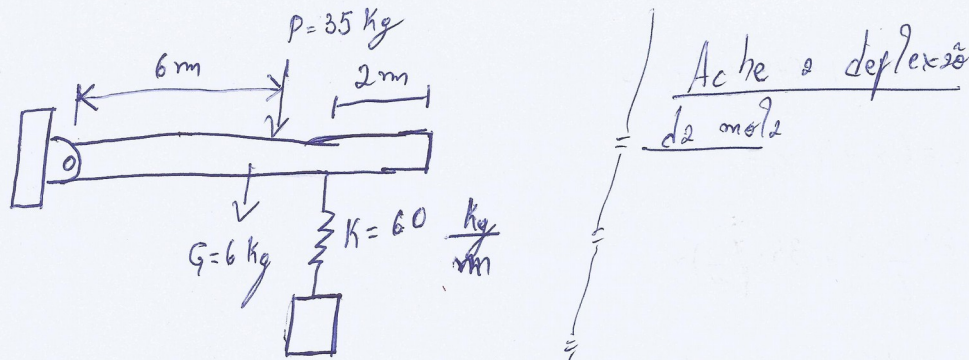
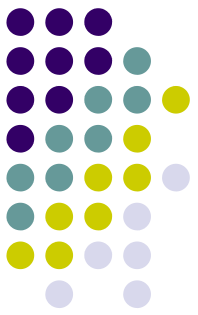


- Logo, a minimização da Energia Potencial Total do sistema mecânico da viga pode ser vista da seguinte forma:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{e=1}^n \Lambda^{(e)} - \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{i=1}^m F_i u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Visto que a diferenciação da energia potencial pelo deslocamento de cada nó é laboriosa, uma solução numérica se faz necessária.
- Segue-se exemplo analítico para demonstração do princípio:

Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



Usando estática e diagrama de corpo livre:

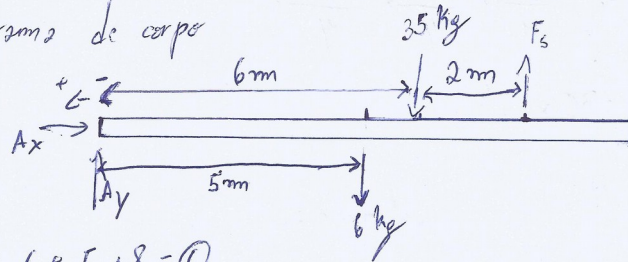
$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_A = (-6) \cdot 5 - 35 \cdot 6 + F_s \cdot 8 = 0$$

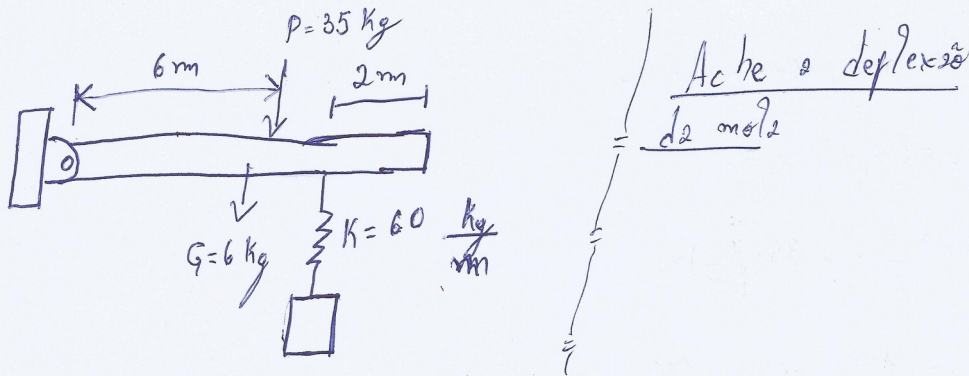
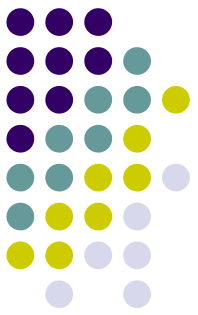
$$-30 - 210 + 8F_s = 0$$

$$F_s = 30 \text{ kg}$$

$$F_s = kx \Rightarrow x = \frac{F_s}{k} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \text{ mm}$$

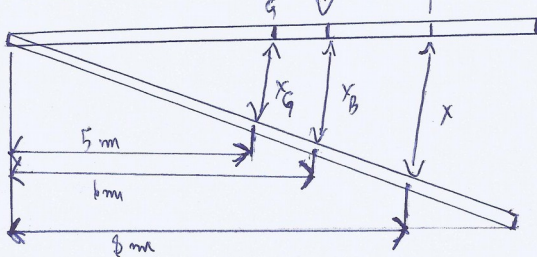


Princípio do mínimo da Energia Potencial Total



Ache a deflexão
da mola

Usando PMEPT:



$$\Lambda = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} 60 x^2$$

$$\Lambda = 30 x^2$$

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{x}{8} \times \frac{x_G}{5} = \frac{x}{6} \times \frac{x_B}{6}$$

$$x_G = \frac{5}{8} x \quad x_B = \frac{3}{4} x$$

Trabalho das forças Externas:

$$\sum F_i u_i = 6 x_G + 35 x_B =$$

$$\sum F_i u_i = 6 \left(\frac{5}{8} x \right) + 35 \left(\frac{3}{4} x \right)$$

$$\sum F_i u_i = \frac{15}{4} x + \frac{105}{4} x = \frac{120}{4} x$$

$$\sum F_i u_i = 30 x \text{ kg}$$

Energia total do sistema é:

$$\pi = \sum \Lambda - \sum F_i u_i$$

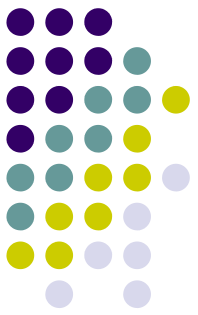
$$\pi = 30 x^2 - 30 x$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (30 x^2 - 30 x) = 0$$

$$60 x - 30 =$$

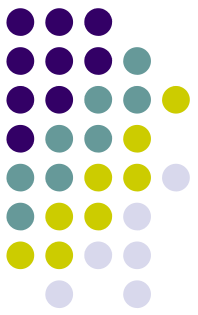
$$x = \frac{1}{2} \text{ metro}$$

Modelagem do Problema

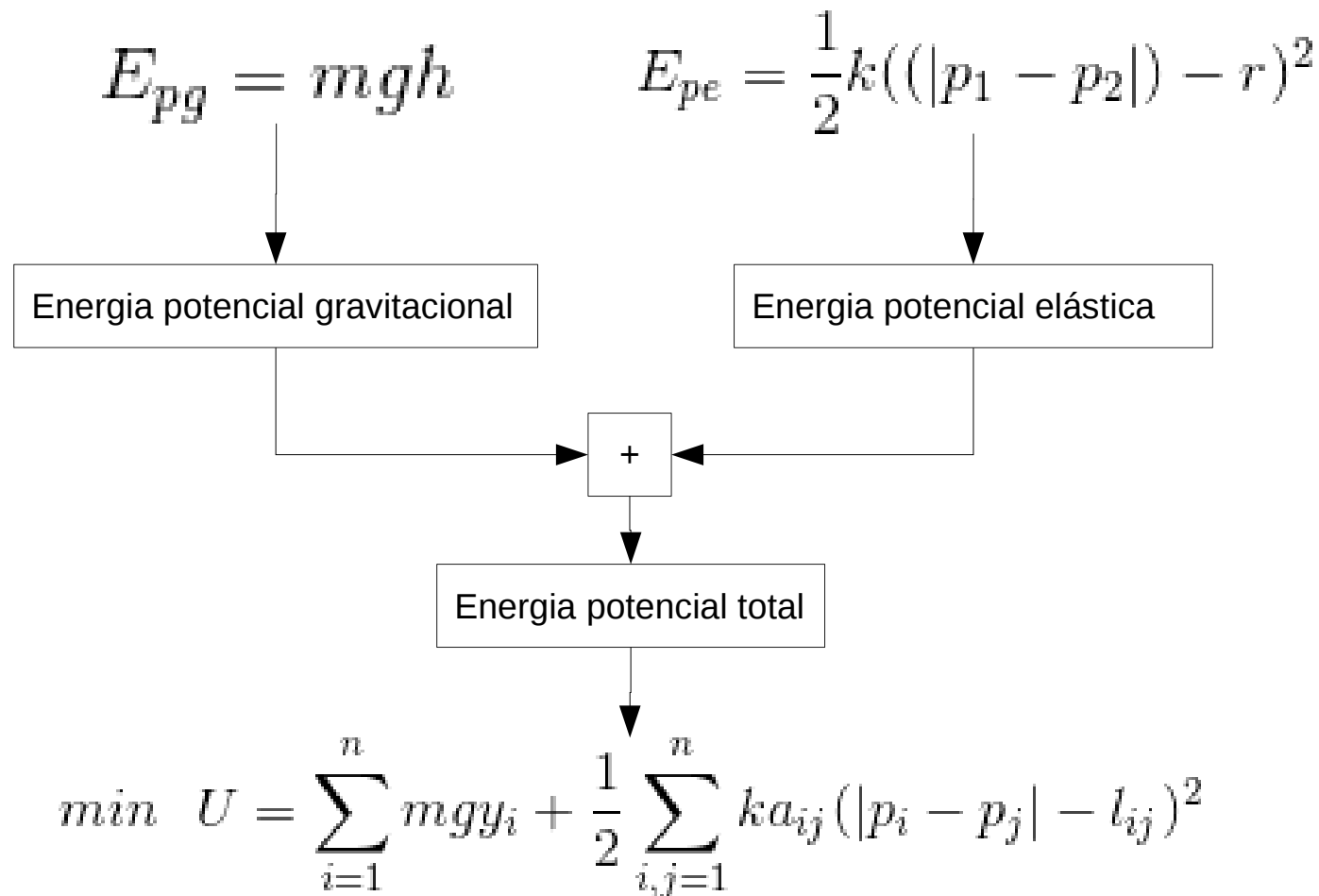


- O modelo busca representar a deformação de uma viga cantilever;
 - Energia potencial total do sistema em equilíbrio;
 - Configuração final da estrutura;
- Considera-se que a viga é constituída de n massas (nós), conectadas por $2n-3$ molas (elementos de malha triangulares);
- Rigidez da estrutura e módulo de elasticidade são definidos em função da rigidez e comprimento relaxado das molas.
- As molas podem se deformar infinitamente (i.e: o modelo não representa rompimento).

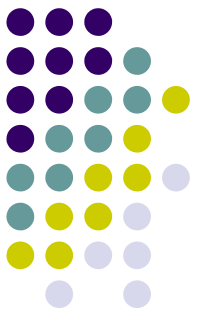
Modelagem do Problema



- Considera-se que a energia potencial total do sistema é composta por:



Modelagem do Problema

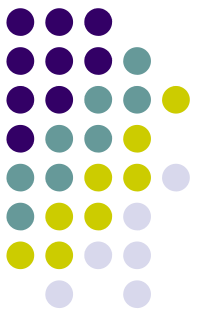


- Logo, temos a seguinte função de energia potencial total do sistema:

$$U = \sum_{i=1}^n mgy_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ka_{ij}(|p_i - p_j| - l_{ij})^2$$

- $n \rightarrow$ número de nós na malha.
- $m \rightarrow$ massa sobre viga (carga);
- $g \rightarrow$ constante gravitacional;
- $y_i \rightarrow$ peso do i -ésimo nó;
- $k \rightarrow$ constante elástica das molas;
- $p_i \rightarrow$ i -ésima posição (x,y) do nó;
- $a_{ij} \rightarrow$ variável de decisão (1 caso exista uma mola entre duas massas, senão 0);
- $l_{ij} \rightarrow$ comprimento relaxado da mola (i,j), 0 caso não exista mola entre nós.

Modelagem do Problema



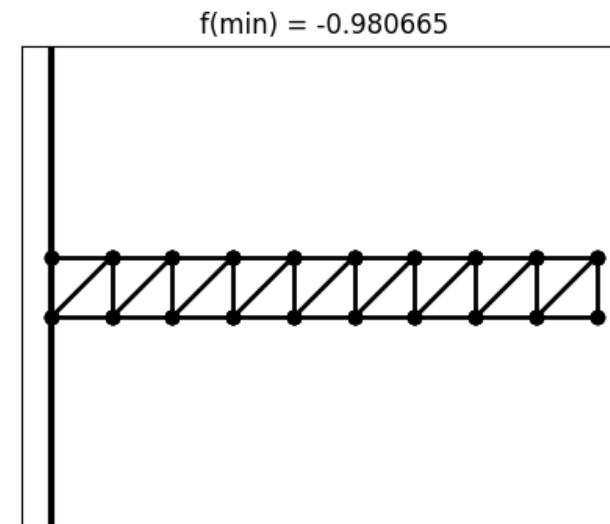
- Logo, temos a seguinte função de energia potencial total do sistema:

$$U = \sum_{i=1}^n mgy_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ka_{ij} (|p_i - p_j| - l_{ij})^2$$

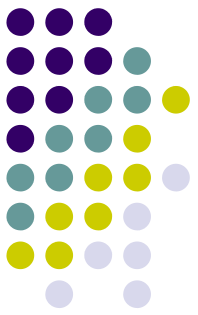
- A inserção da condição de contorno da viga cantilever são dadas pelas seguintes restrições:

$$p_1 = (0.0, 0.0)$$

$$p_2 = (0.0, -0.1)$$

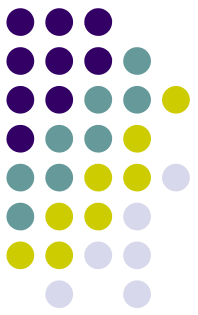


Algoritmos Utilizados



- Determinístico → BFGS;
- Determinístico → Método de Newton Truncado;
- Determinístico → SQP (Programação Quadrática Sequencial);
- Estocástico → Evolução Diferencial;

Resultados



- BFGS

Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min F(x)
40 (20 nós)	133	138	-2.52938265048

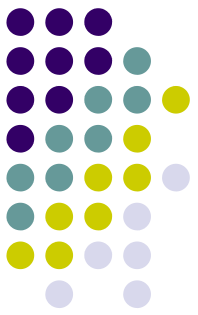
- SQP

Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min F(x)
40 (20 nós)	58	2557	-2.529382692846

- Newton Truncado

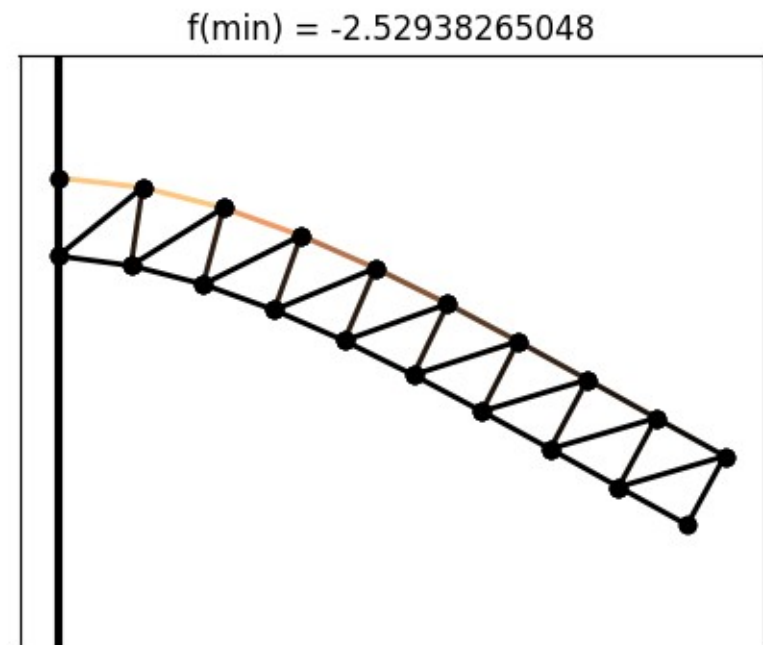
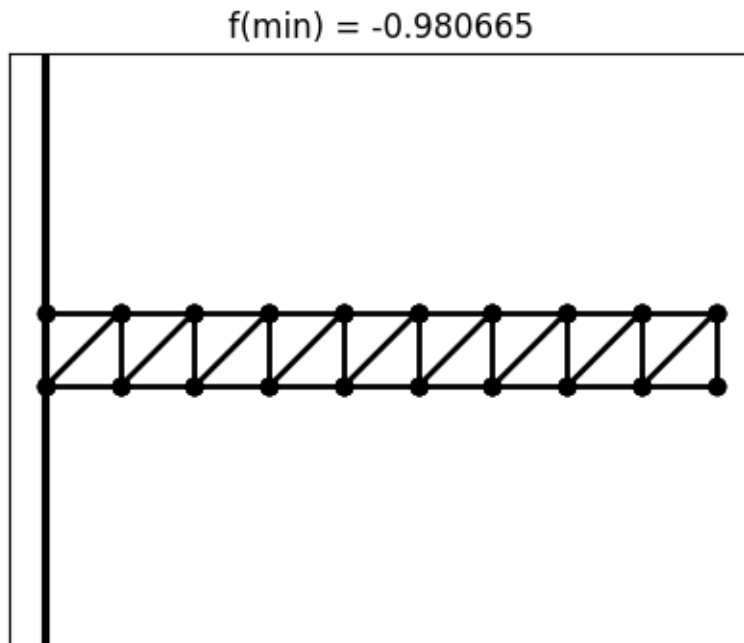
Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min F(x)
40 (20 nós)	830	62	-2.51249006635

Resultados

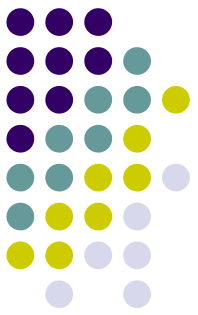


- BFGS

Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min F(x)
40 (20 nós)	133	138	-2.52938265048

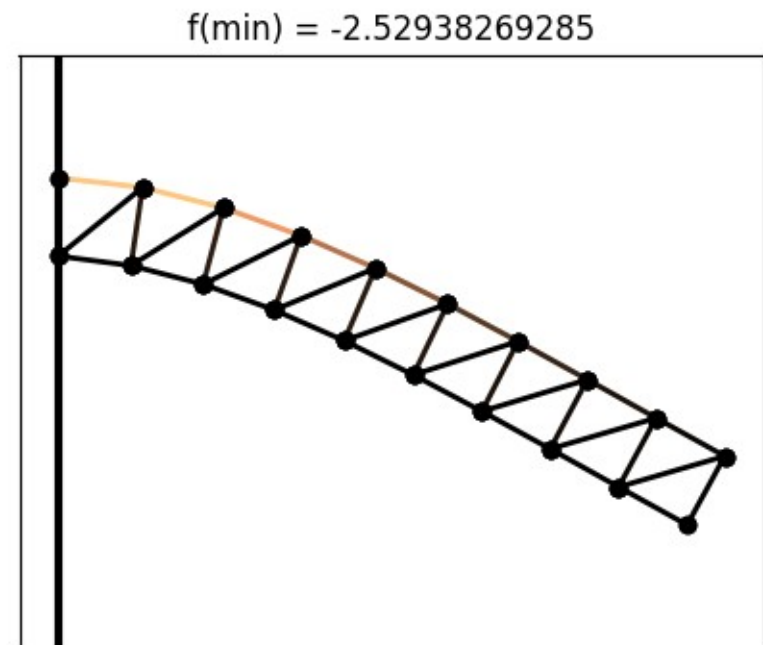
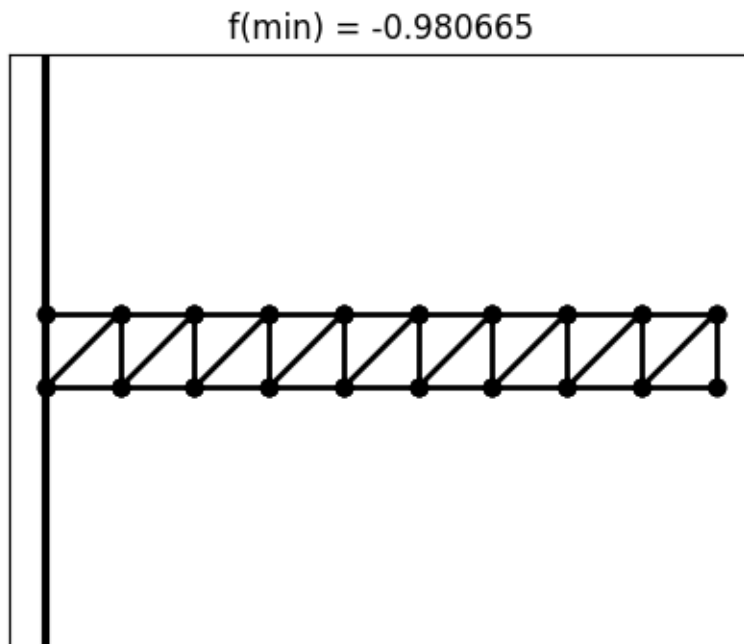


Resultados

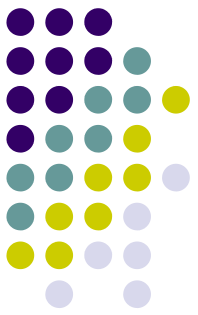


- SQP

Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min F(x)
40 (20 nós)	58	2557	-2.529382692846

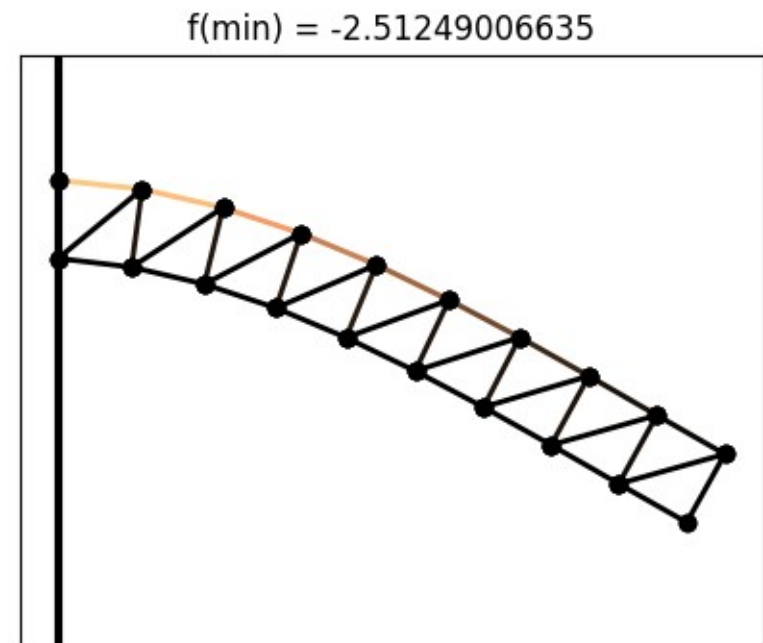
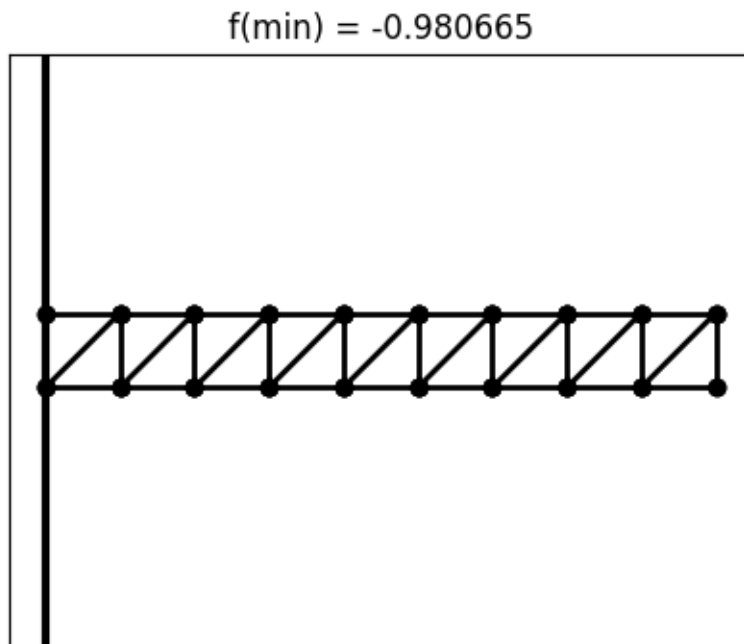


Resultados

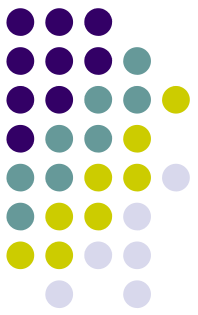


- Newton Truncado

Qtde de variáveis	Qtde de Iterações	Avaliações da função objetivo	Min $F(x)$
40 (20 nós)	830	62	-2.51249006635



Resultados



- Evolução Diferencial
 - Não convergiu para resultados aceitáveis em nenhuma execução na minimização do problema original;
 - Foi necessária a adição de novas restrições/condições de contorno da forma:

$$p_1 = (0.0, 0.0)$$

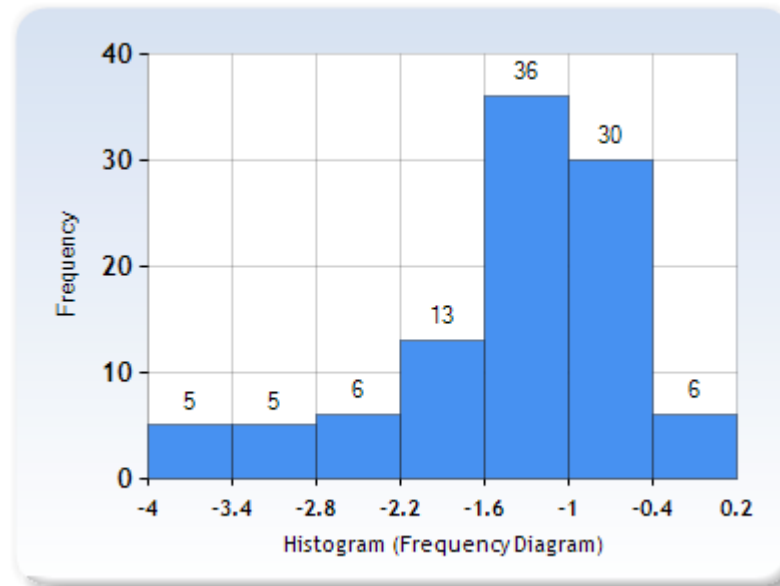
$$p_2 = (0.0, -0.1)$$

$$-i \bmod 2 \leq p_{i+4} \leq (i \bmod 2) - 1, \quad i = 0, 1, \dots, 18$$

- Após estas modificações o algoritmo de Evolução Diferencial obteve alguns resultados satisfatórios

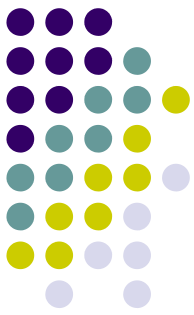
Resultados

- Parâmetros utilizados:
- Estratégia: best1bin;
 - Dois membros são aleatoriamente escolhidos, a diferença destes é utilizado na mutação do melhor
- Inicialização dos candidatos: hipercubo latino;
- População: 40 candidatos
- Probabilidade de crossover: 0.5



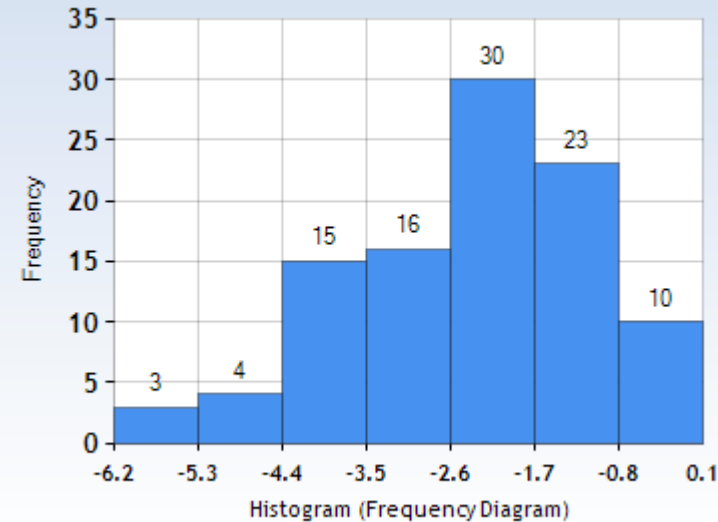
Frequency Table	
Class	Count
-4~-3.400001	5
-3.4~-2.800001	5
-2.8~-2.200001	6
-2.2~-1.600001	13
-1.6~-1.000001	36
-1~-0.400001	30
-0.4~0.199999	6

Your Histogram	
Mean	-1.43625
Standard Deviation (s)	0.83188
Skewness	-0.97257
Kurtosis	0.64226
Lowest Score	-3.731048
Highest Score	-0.11218
Distribution Range	3.61887
Total Number of Scores	101
Number of Distinct Scores	101
Lowest Class Value	-4
Highest Class Value	0.199999
Number of Classes	7
Class Range	0.6



Resultados

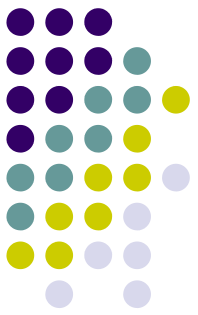
- Parâmetros utilizados:
- Estratégia: best1bin;
 - Dois membros são aleatoriamente escolhidos, a diferença destes é utilizado na mutação do melhor
- Inicialização dos candidatos: hipercubo latino;
- População: 100 candidatos
- Probabilidade de crossover: 0.7



Frequency Table	
Class	Count
-6.2--5.300001	3
-5.3--4.400001	4
-4.4--3.500001	15
-3.5--2.600001	16
-2.6--1.700001	30
-1.7--0.800001	23
-0.8-0.099999	10

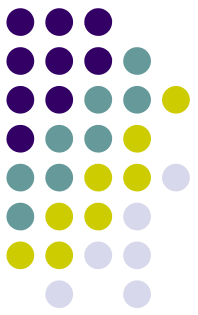
Your Histogram	
Mean	-2.43901
Standard Deviation (s)	1.29414
Skewness	-0.67495
Kurtosis	0.07705
Lowest Score	-6.157294
Highest Score	-0.380459
Distribution Range	5.77684
Total Number of Scores	101
Number of Distinct Scores	101
Lowest Class Value	-6.2
Highest Class Value	0.099999
Number of Classes	7
Class Range	0.9

Conclusões



- O modelo desenvolvido parece ser capaz de simular a deformação da viga de maneira correta, os métodos clássicos apresentam uma boa robustez para este problema em particular, executando quase que instantaneamente e apresentando a configuração final do sistema assim como a energia potencial mínima do sistema associada ao sistema.
- O método de evolução diferencial não se mostrou eficaz para a resolução deste problema, visto que este convergiu para um resultado incorreto na maioria das vezes, além de necessitar de um tempo de execução substancialmente maior e a adaptação do problema para que alguma convergência fosse atingida (diminuição da região de busca através de limites laterais para todos os nós).

Referências Bibliográficas



1. Liu, T., Bargteil, A. W., O'Brien, J. F., & Kavan, L. (2013). Fast simulation of mass-spring systems. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(6), 214.
2. Bathe, K. J. (2006). *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe.
3. Hutton, D. V., & Wu, J. (2004). *Fundamentals of finite element analysis (Vol. 1)*. New York: McGraw-hill.
4. Wang, Z., Ruimi, A., & Srinivasa, A. R. (2015). A direct minimization technique for finding minimum energy configurations for beam buckling and post-buckling problems with constraints. *International Journal of Solids and Structures*, 72, 165-173.
5. Felippa, C. A. (1977). Numerical experiments in finite element grid optimization by direct energy search. *Applied Mathematical Modelling*, 1(5), 239-244.
6. Baghmisheh, M. V., Peimani, M., Sadeghi, M. H., Etefagh, M. M., & Tabrizi, A. F. (2012). A hybrid particle swarm–Nelder–Mead optimization method for crack detection in cantilever beams. *Applied Soft Computing*, 12(8), 2217-2226.
7. Blanco-Silva, F. J. (2013). *Learning SciPy for Numerical and Scientific Computing*. Packt Publishing Ltd.
- 8.