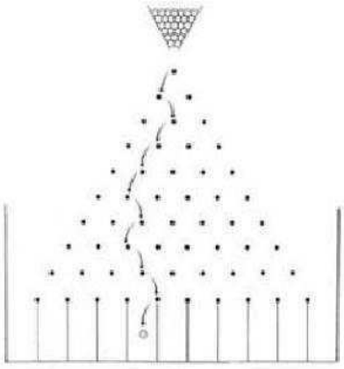
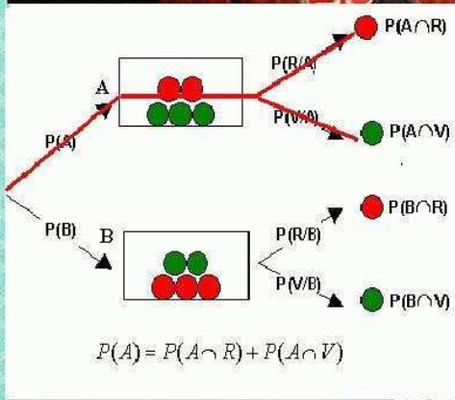
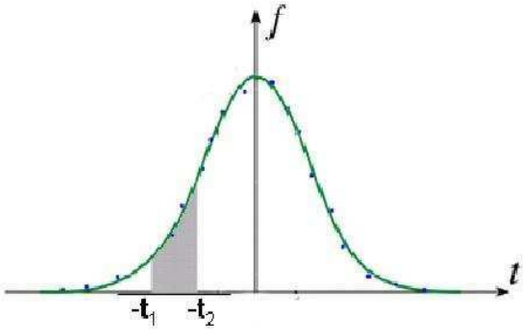
Schaum

PROBABILIDAD

Seymour Lipschutz







Utilizados por estudiantes de todo el mundo

McGraw Hill

Gerente de Producto: Carlos Granados Islas
Supervisora de edición: Leticia Medina Vigil
Supervisor de producción: Zeferino García García

PROBABILIDAD

DERECHOS RESERVADOS © 1991-1968, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S. A. de C. V.
Una División de The McGraw-Hill Companies, Inc.,
Cedro No. 512, Col. Atlampa,
Delegación Cuauhtémoc,
C.P. 06450, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 970-10-2179-7

Traducido de la primera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF PROBABILITY
Copyright © MCMLXVIII, by McGraw-Hill, Inc., U. S. A.

ISBN 0-07-037982-3

8901234567 IEL-94 9076543218

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Noviembre de 1998 en
Diagráficos Unión, S.A. de C.V.
Calle Azucena Núm. 29
Col. Hacienda de la Luz
Atizapán de Zaragoza
C.P. 54500 Edo. De México

Se tiraron 2,000 ejemplares

TABLA DE MATERIAS

Pág.

Capítulo 1 TEORIA DE CONJUNTOS 1

Introducción. Conjuntos, elementos. Operaciones con conjuntos. Conjuntos finitos y contables. Conjunto producto. Clases de conjuntos.

Capítulo 2 TECNICAS DE CONTAR 16

Introducción. Principio fundamental del conteo. Notación factorial. Permutaciones. Permutaciones con repetición. Pruebas ordenadas. Coeficientes del binomio y teorema. Combinaciones. Particiones ordenadas. Diagramas de árbol.

Capítulo 3 INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD 38

Introducción. Espacio muestral y sucesos. Axiomas de probabilidad. Espacios finitos de probabilidad. Espacios equiprobables finitos. Espacios muestrales infinitos.

Capítulo 4 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA 54

Probabilidad condicional. Teorema de la multiplicación para probabilidad condicional. Procesos estocásticos finitos y diagramas de árbol. Particiones y teorema de Bayes. Independencia. Pruebas repetidas o independientes.

Capítulo 5 VARIABLES ALEATORIAS 74

Introducción. Distribución y esperanza de una variable aleatoria finita. Varianza y desviación estándar. Distribución conjunta. Variables aleatorias independientes. Funciones de una variable aleatoria. Variables aleatorias discretas en general. Variables aleatorias continuas. Función de distribución acumulativa. Desigualdad de Tchebycheff. Ley de los números grandes.

Capítulo 6 DISTRIBUCIONES BINOMIAL, NORMAL Y DE POISSON 105

Distribución binomial. Distribución normal. Aproximación normal a la distribución binomial. Teorema central del límite. Distribución de Poisson. Distribución multinomial.

Capítulo 7 CADENAS DE MARKOV 126

Introducción. Vector probabilidad, matrices estocásticas. Matrices estocásticas regulares. Puntos fijos y matrices estocásticas regulares. Cadenas de Markov. Probabilidades de transición de orden superior. Distribución estacionaria de cadenas regulares de Markov. Estados absorbentes.

INDICE 152

Prólogo

La teoría de la probabilidad tuvo sus comienzos a principios del siglo XVII como resultado de investigaciones sobre diversos juegos de azar. De entonces acá han contribuido a su perfeccionamiento muchos matemáticos y científicos célebres, pero a pesar de su larga y activa historia, sólo se axiomatizó durante las tercera y cuarta décadas de este siglo. Este desarrollo axiomático, llamado teoría moderna de la probabilidad, precisó los conceptos de la probabilidad y los colocó sobre una firme base matemática.

La importancia de la probabilidad ha crecido enormemente en los últimos años y hoy aparece, junto con su disciplina gemela, la estadística, en casi todos los campos como la física, la química, la biología, la medicina, la sicología, la sociología, la ciencia política, la educación, la economía, los negocios, la investigación operativa y todos los ramos de la ingeniería.

El presente libro se ha preparado para un curso de introducción a la probabilidad y sólo exige como conocimiento previo el álgebra de secundaria. Puede servir como texto para dicho curso, o como suplemento para cualquier texto comparable. También puede servir como complemento para textos y cursos de estadística. Además, como es completo en sí mismo, se presta fácilmente para estudiar por cuenta propia.

Comienza con un capítulo sobre conjuntos y sus operaciones y continúa con uno sobre permutaciones y otras técnicas de contar. Vienen luego un capítulo de espacios probabilísticos y otro de probabilidad condicional e independencia. El quinto, que es el principal, trata sobre variables aleatorias. Allí definimos la esperanza, varianza y desviación estándar, y probamos la desigualdad de Tchebycheff y la ley de los grandes números. Aunque no se requieren conocimientos de cálculo, se estudian las variables aleatorias, tanto discretas como continuas. Seguimos con un capítulo aparte sobre las distribuciones binomial, normal y de Poisson. Aquí se da el teorema central del límite en el contexto de la aproximación normal a la distribución binomial. El séptimo y último capítulo ofrece un desarrollo elemental completo de las cadenas de Markov con aplicaciones.

Cada capítulo comienza con enunciados claros de las correspondientes definiciones, principios y teoremas, con ilustraciones y otros materiales descriptivos. A esto siguen grupos ordenados de problemas resueltos y propuestos. Los problemas resueltos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, arrojan plena luz sobre aquellos sutiles puntos sin cuya explicación el estudiante se sentirá continuamente sobre terreno movedizo, y constituyen repetición de los principios básicos, que es cosa tan vital para un aprendizaje efectivo. En los problemas resueltos se incluyen demostraciones de la mayor parte de los teoremas. Los problemas propuestos sirven como un repaso completo del material de cada capítulo.

Deseo agradecer al Dr. Martin Silverstein sus valiosas recomendaciones y su revisión crítica del manuscrito. También deseo expresar mi reconocimiento a Daniel Schaum y Nicola Monti por su excelente cooperación.

SEYMOUR LIPSCHUTZ

Capítulo 1

Teoría de conjuntos

INTRODUCCION

Este capítulo trata algunas de las ideas y conceptos elementales de la teoría de conjuntos que son necesarios para una introducción moderna a la teoría de la probabilidad.

CONJUNTOS, ELEMENTOS

Se llama *conjunto* una lista o colección bien definida de objetos; los objetos comprendidos en un conjunto son llamados sus *elementos* o *miembros*. Escribimos

$$p \in A \quad \text{si } p \text{ es un elemento del conjunto } A$$

Si cada elemento de A pertenece también a un conjunto B, esto es, si $p \in A$ implica $p \in B$, entonces se dice que A es *subconjunto* de B, o que está *contenido* en B; esto se denota por

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A$$

Dos conjuntos son *iguales* si cada uno está contenido en el otro; esto es,

$$A = B \quad \text{si y sólo si} \quad A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A$$

Las negaciones de $p \in A$, $A \subset B$ y $A = B$ se escriben $p \notin A$, $A \not\subset B$ y $A \neq B$ respectivamente.

Especificamos un conjunto particular, o por la lista de sus elementos o estableciendo las propiedades que caracterizan dichos elementos. Por ejemplo,

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

significa que A es el conjunto formado por los números 1, 3, 5, 7 y 9; y

$$B = \{x : x \text{ es un número primo}, x < 15\}$$

significa que B es el conjunto de los números primos menores que 15.

A menos que se establezca otra cosa, todos los conjuntos en una investigación se suponen subconjuntos de un conjunto fijo llamado *conjunto universal* denotado (en este capítulo) por U. También usamos el símbolo $\emptyset$ para indicar el conjunto *vacío* o *nulo*, esto es, el conjunto que no contiene elementos; este conjunto se considera como un subconjunto de cualquier otro conjunto. Así para cualquier conjunto A, tenemos $\emptyset \subset A \subset U$.

Ejemplo 1.1: Los conjuntos A y B anteriores pueden también escribirse como

$$A = \{x : x \text{ es un número impar}, x < 10\} \quad \text{y} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

Nótese que $9 \in A$ pero $9 \notin B$, y $11 \in B$ pero $11 \notin A$; mientras que $3 \in A$ y $3 \in B$, y $6 \notin A$ y $6 \notin B$

Ejemplo 1.2: Usamos los símbolos especiales siguientes:

$\mathbf{N}$ = conjunto de los enteros positivos: 1, 2, 3, . . .

$\mathbf{Z}$ = conjunto de los enteros: . . ., −2, −1, 0, 1, 2, . . .

$\mathbf{R}$ = conjunto de los números reales.

Así tenemos $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.

Ejemplo 1.3: Los *intervalos* sobre la línea real, definidos a continuación, aparecen muy frecuentemente en matemáticas. Aquí a y b son números reales con $a < b$.

Intervalo abierto de a a b $= (a, b) = \{x : a < x < b\}$

Intervalo cerrado de a a b $= [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

Intervalo abierto-cerrado de a a b $= (a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

Intervalo cerrado-abierto de a a b $= [a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

Los intervalos abierto-cerrado y cerrado-abierto son también llamados intervalos *semi-abiertos*.

Ejemplo 1.4: En estudios de población, el conjunto universal está formado por todas las personas del mundo.

Ejemplo 1.5: Sea $C = \{x : x^2 = 4, x \text{ es impar}\}$. Entonces $C = \emptyset$, o sea que C es el conjunto vacío.

Apliquemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1: Sean A, B y C unos conjuntos. Además: (i) $A \subset A$; (ii) si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$; y (iii) si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Hacemos énfasis en que $A \subset B$ no excluye la posibilidad de $A = B$. Sin embargo, si $A \subset B$ pero $A \neq B$, entonces decimos que A es un *subconjunto propio* de B. (Algunos autores usan el símbolo $\subseteq$ para un subconjunto y $\subset$ solamente para un subconjunto propio.)

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sean A y B conjuntos arbitrarios. La *reunión* de A y B expresada por $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Aquí "o" se usa en el sentido de y/o.

La *intersección* de A y B, expresada por $A \cap B$, es el conjunto de elementos que pertenecen A y B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, esto es, si A y B no tienen elementos en común, entonces se dice que A y B son *disyuntos*.

La *diferencia* de A y B o el *complemento relativo* de B con respecto a A, expresada por $A \setminus B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

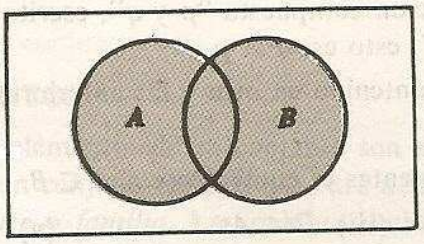
Obsérvese que $A \setminus B$ y B son disyuntos, esto es, $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

El *complemento absoluto* o, simplemente, *complemento* de A, expresado por A^c, es el conjunto de elementos que no pertenecen a A:

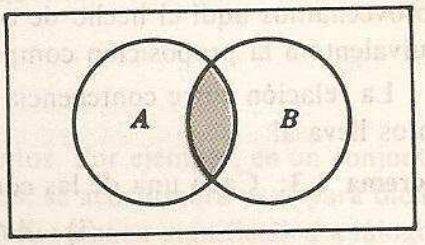
$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

O sea que A^c es la diferencia entre el conjunto universal U y el conjunto A.

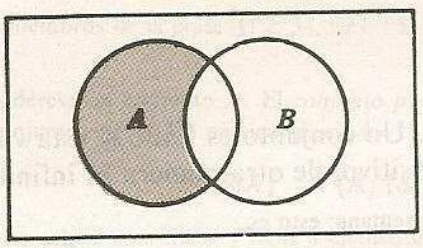
Ejemplo 1.6: Los diagramas siguientes, llamados diagramas de Venn, ilustran las operaciones anteriores. Aquí los conjuntos están representados por simples superficies planas y U, el conjunto universal, por la superficie total del rectángulo.



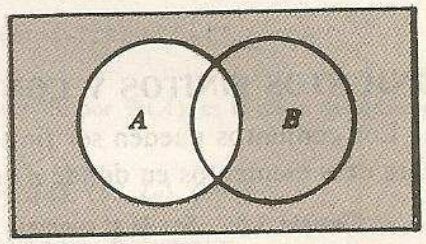
$A \cup B$ sombreado



$A \cap B$ sombreado



$A \setminus B$ sombreado



A^c sombreado

Ejemplo 1.7: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$ donde $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A \cap B = \{3, 4\}$$
$$A \setminus B = \{1, 2\} \qquad A^c = \{5, 6, 7, \ldots\}$$

Los conjuntos de las operaciones anteriores satisfacen las diferentes leyes o identidades que se relacionan en la tabla inferior (tabla 1). Para el efecto, establecemos el:

Teorema 1.2: Conjuntos que satisfacen las leyes de la tabla 1

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS	
Leyes de idempotencia	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Leyes asociativas	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes conmutativas	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leyes de complemento	
7a. $A \cup A^c = U$	7b. $A \cap A^c = \emptyset$
8a. $(A^c)^c = A$	8b. $U^c = \emptyset$, $\emptyset^c = U$
Leyes de De Morgan	
9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tabla 1

Observación: Cada una de las leyes anteriores provienen de una ley lógica análoga. Por ejemplo,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ y } x \in A\} = B \cap A$$

Aprovechamos aquí el hecho de que la proposición compuesta "p y q", escrito $p \wedge q$, es lógicamente equivalente a la proposición compuesta "q y p", esto es, $q \wedge p$.

La relación entre contenencia o conjunto contenido en otro y las anteriores operaciones con conjuntos lleva al:

Teorema 1.3: Cada una de las condiciones siguientes es equivalente a $A \subset B$:

(i) $A \cap B = A$ (iii) $B^c \subset A^c$ (v) $B \cup A^c = U$

(ii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B^c = \emptyset$

CONJUNTOS FINITOS Y CONTABLES

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito si está vacío o si consta exactamente de n elementos en donde n es un entero positivo; de otra manera es infinito.

Ejemplo 1.8: Sea M el conjunto de los días de la semana; esto es,

$M = \{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$

Entonces M es finito.

Ejemplo 1.9: Sea $P = \{x : x$ es un río de la Tierra$\}$. Aunque puede ser difícil contar el número de ríos de la Tierra, P es un conjunto finito.

Ejemplo 1.10: Sea Y el conjunto de los enteros pares (positivos), esto es, $Y = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Entonces Y es un conjunto infinito.

Ejemplo 1.11: Sea I el *intervalo unidad* de los números reales, esto es $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Entonces I es un conjunto infinito.

Un conjunto es *contable* si es finito o si sus elementos pueden ser ordenados en forma de sucesión, en cuyo caso se dice que es *contablemente infinito;* de lo contrario el conjunto es no contable. El conjunto del ejemplo 1.10 es contablemente infinito, mientras se puede comprobar que el conjunto del ejemplo 1.11 es no contable.

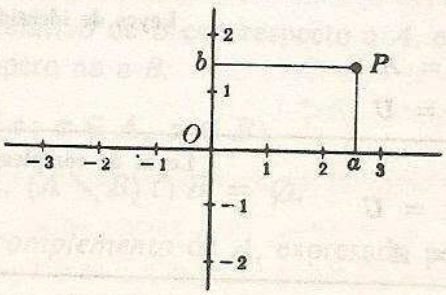
CONJUNTO PRODUCTO

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto producto de A y B, expresado por $A \times B$, está formado por todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

El producto de un conjunto por sí mismo, $A \times A$, se denota por A^2

Ejemplo 1.12: El lector está familiarizado con el plano cartesiano $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ indicado abajo. Aquí cada punto P representa una pareja ordenada (a, b) de números reales, y viceversa.



Ejemplo 1.13: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

El concepto de conjunto producto se extiende a un número finito de conjuntos en forma natural. El conjunto producto de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$, escrito $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ es el conjunto de todas las m-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ donde $a_i \in A_i$ para cada i.

CLASES DE CONJUNTOS

Con frecuencia los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos. Por ejemplo, en un conjunto de líneas cada línea es un conjunto de puntos. Para aclarar estos casos, se acostumbra usar para dicho conjunto la palabra *clase* o *familia*. Las palabras subclase y subfamilia tienen significados análogos a subconjunto.

Ejemplo 1.14: Los miembros de la clase $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ son los conjuntos $\{2, 3\}$, $\{2\}$ y $\{5, 6\}$.

Ejemplo 1.15: Considérese un conjunto A. El *conjunto potencia* de A, expresado por $\mathcal{P}(A)$, es la clase de todos los subconjuntos de A. En particular, si $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

En general, si A es finito y tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tendrá 2^n elementos.

Una *partición* de un conjunto X es una subdivisión de X entre subconjuntos no vacíos que son disyuntos y cuya reunión es X, o sea la clase de subconjuntos no vacíos de X tales que cada $a \in X$ pertenece a un único subconjunto. Los subconjuntos de una partición son llamados células.

Ejemplo 1.16: Considérense las siguientes clases de subconjuntos de $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$:

(i) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}]$

(ii) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}]$

(iii) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}]$

Entonces, (*i*) no es una partición de X puesto que $7 \in X$ pero 7 no pertenece a ninguna célula. Además, (ii) no es una partición de X puesto que $5 \in X$ y 5 pertenece a ambas $\{1, 3, 5\}$ y $\{5, 7, 9\}$. Por otra parte, (iii) es una partición de X puesto que cada elemento de X pertenece a una célula exactamente.

Cuando hablamos de *clases de conjuntos con índices* $\{A_i : i \in I\}$ o simplemente $\{A_i\}$, significamos que hay un conjunto A_i, asignado a cada elemento $i \in I$. El conjunto I se denomina *conjunto de índices* y se dice que los conjuntos A_i tienen por índice I. Cuando el conjunto de índices es el conjunto N de los enteros positivos, la clase con índices $\{A_1, A_2, \ldots\}$ se denomina *sucesión* de conjuntos. Por la *reunión* de conjuntos de los A_i denotados por $\cup_{i \in I} A_i$ (o simplemente $\cup_i A_i$), se entiende el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de los A_i; y por la *intersección* de los A_i, denotada por $\cap_{i \in I} A_i$ (o simplemente $\cap_i A_i$), se entiende el conjunto de elementos que pertenecen a cada A_i. También escribimos

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{y} \quad \cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

para la reunión e intersección, respectivamente, de una sucesión de conjuntos.

Definición: Una clase no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de U se denomina un *álgebra* (σ-álgebra) de conjuntos si:

(i) el complemento de algún conjunto de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$; y

(ii) la reunión de un número finito (contable) de conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$; esto es, si $\mathcal{A}$ es cerrada para complementos y reuniones finitas (contables).

Es sencillo mostrar (problema 1.30) que un álgebra (σ-álgebra) de conjuntos contiene U y $\emptyset$ y es también cerrada para intersecciones finitas (contables).

Problemas resueltos

CONJUNTOS, ELEMENTOS, SUBCONJUNTOS

1.1. Sea $A = \{x : 3x = 6\}$. ¿Es $A = 2$?

A es el conjunto que contiene a 2 como único elemento, esto es, $A = \{2\}$. El número 2 pertenece a A; no es igual a A. Existe una diferencia básica entre un elemento p y el conjunto de un solo elemento $\{p\}$.

1.2. ¿Cuáles de los conjuntos: $\{r, s, t\}$, $\{t, s, r\}$, $\{s, r, t\}$, $\{t, r, s\}$ son iguales?

Son todos iguales. El orden de los elementos no cambia el conjunto.

1.3. Determine si los conjuntos dados son vacíos:

(i) $X = \{x : x^2 = 9,\ 2x = 4\}$, (ii) $Y = \{x : x \neq x\}$, (iii) $Z = \{x : x + 8 = 8\}$.

(i) No hay ningún número que satisfaga ambas proposiciones $x^2 = 9$ y $2x = 4$; por consiguiente X es vacío, o sea, $X = \emptyset$.

(ii) Interpretemos el signo " = " como "es idéntico con" y así Y es también vacío. En efecto, algunos textos definen el conjunto vacío como sigue: $\emptyset \equiv \{x : x \neq x\}$.

(iii) El número cero satisface $x + 8 = 8$; o sea que $Z = \{0\}$. En consecuencia, Z no es el conjunto vacío puesto que contiene al elemento 0. Esto es, $Z \neq \emptyset$.

1.4. Pruebe que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ no es un subconjunto de $B = \{x : x \text{ es par}\}$.

Basta mostrar que por lo menos un elemento de A no pertenece a B. Pues bien $3 \in A$ y, como B es el conjunto de los números pares, $3 \notin B$; entonces A no es subconjunto de B.

1.5. Sean $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{a, b, d\}$. Determinar si las proposiciones son verdaderas o falsas:

(i) $Y \subset X$, (ii) $W \neq Z$, (iii) $Z \supset V$, (iv) $V \subset X$, (v) $X = W$, (vi) $W \subset Y$.

(i) Puesto que cada elemento de Y es elemento de X, $Y \subset X$ es verdadera.

(ii) $a \in Z$ pero $a \notin W$; entonces $W \neq Z$ es verdadera.

(iii) d es el único elemento de V y también d pertenece a Z; entonces $Z \supset V$ es verdadera.

(iv) V no es subconjunto de X puesto que $d \in V$ pero $d \notin X$; entonces $V \subset X$ es falsa.

(v) Ahora $a \in X$ pero $a \notin W$; entonces $X = W$ es falsa.

(vi) W no es subconjunto de Y puesto que $c \in W$ pero $c \notin Y$; entonces $W \subset Y$ es falsa.

1.6. Probar: Si A es un subconjunto del conjunto vacío, entonces $A = \emptyset$.

El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto; en particular, $\emptyset \subset A$. Pero por hipótesis, $A \subset \emptyset$; entonces $A = \emptyset$.

1.7. Probar el teorema 1.1 (iii): Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Tenemos que demostrar que cada elemento de A pertenece también a C. Sea $x \in A$. Como $A \subset B$ implica que $x \in B$, pero $B \subset C$; entonces $x \in C$. Hemos demostrado que $x \in A$ implica $x \in C$, o sea, que $A \subset C$.

1.8. ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son finitos?

(i) Los meses del año.

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$.

(iii) El número de personas que viven en la Tierra.

(iv) El conjunto **Q** de los números racionales.

(v) El conjunto **R** de los números reales.

Los tres primeros conjuntos son finitos; los dos últimos son infinitos. (Puede demostrarse que **Q** es numerable o contable pero **R** es no contable.)

1.9. Considerar los siguientes conjuntos de figuras en el plano Euclidiano:

$$A = \{x : x \text{ es un cuadrilátero}\} \qquad C = \{x : x \text{ es un rombo}\}$$
$$B = \{x : x \text{ es un rectángulo}\} \qquad D = \{x : x \text{ es un cuadrado}\}$$

Determinar cuáles conjuntos son subconjuntos propios de cualquiera de los otros.

Un cuadrado es un rectángulo por tener sus ángulos rectos y es un rombo por tener sus 4 lados iguales, y además por tener 4 lados es un cuadrilátero. Entonces

$$D \subset A, \quad D \subset B \quad \text{y} \quad D \subset C$$

por consiguiente, D es un subconjunto de los otros tres. Así mismo, puesto que hay ejemplos de rectángulos, rombos y cuadriláteros que no son cuadrados, D es un subconjunto propio de los otros tres.

En forma similar vemos que tanto B como C son subconjuntos propios de A. No hay ninguna otra relación entre los conjuntos dados.

1.10. Determinar cuáles de los conjuntos siguientes son iguales: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$.

Cada uno es diferente del otro. El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el número cero. El conjunto $\emptyset$ no contiene elementos; es el conjunto vacío. El conjunto $\{\emptyset\}$ también tiene un elemento, el conjunto nulo.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

1.11. Sean $U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar: (i) A^c, (ii) $A \cap C$, (iii) $(A \cap C)^c$, (iv) $A \cup B$, (v) $B \setminus C$.

(i) A^c consta de los elementos de U que no están en A; o sea $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

(ii) $A \cap C$ consta de los elementos comunes a A y C; o sea $A \cap C = \{3, 4\}$.

(iii) $(A \cap C)^c$ consta de los elementos de U que no están en $A \cap C$. Ahora por (ii), $A \cap C = \{3, 4\}$ y del mismo modo $(A \cap C)^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(iv) $A \cup B$ consta de los elementos de A o de B (o de ambos): o sea $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

(v) $B \setminus C$ consta de los elementos de B que no están en C; o sea $B \setminus C = \{2, 8\}$.

1.12. Sea $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{b, d, e\}$. Hallar:

(i) $A \cup B$ (iii) B^c (v) $A^c \cap B$ (vii) $A^c \cap B^c$ (ix) $(A \cap B)^c$

(ii) $B \cap A$ (iv) $B \setminus A$ (vi) $A \cup B^c$ (viii) $B^c \setminus A^c$ (x) $(A \cup B)^c$

(i) La reunión de A y B consta de los elementos de A y B (o de ambos); o sea $A \cup B = \{a, b, d, e\}$.

(ii) La intersección de A y B consta de aquellos elementos que pertenecen a ambos A y B; o sea $A \cap B = \{b, d\}$.

(iii) El complemento de B consta de las letras de U pero no de B; así que $B^c = \{a, c\}$.

(iv) La diferencia $B \setminus A$ consta de los elementos de B que no pertenecen a A; o sea $B \setminus A = \{e\}$.

(v) $A^c = \{c, e\}$ y $B = \{b, d, e\}$; luego $A^c \cap B = \{e\}$.

(vi) $A = \{a, b, d\}$ y $B^c = \{a, c\}$; entonces $A \cup B^c = \{a, b, c, d\}$.

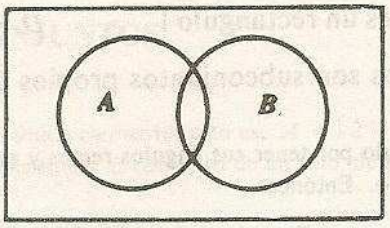
(vii) y (viii). $A^c = \{c, e\}$ y $B^c = \{a, c\}$; entonces

$$A^c \cap B^c = \{c\} \quad \text{y} \quad B^c \setminus A^c = \{a\}$$

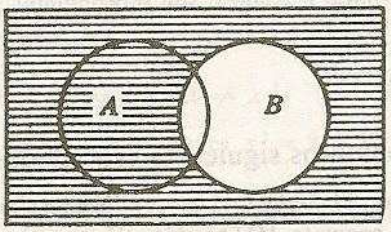
(ix) De (ii), $A \cap B = \{b, d\}$; o sea $(A \cap B)^c = \{a, c, e\}$.

(x) De (i), $A \cup B = \{a, b, d, e\}$; o sea $(A \cup B)^c = \{c\}$.

1.13. En el diagrama de Venn dibujado, sombree: (i) B^c, (ii) $(A \cup B)^c$, (iii) $(B \setminus A)^c$, (iv) $A^c \cap B^c$.

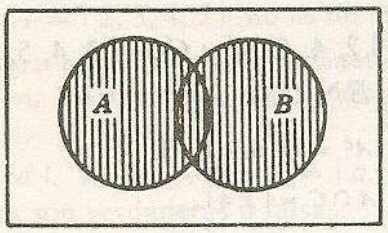


(i) B^c consta de los elementos que no pertenecen a B; o sea que se sombrea el área exterior a B como sigue:

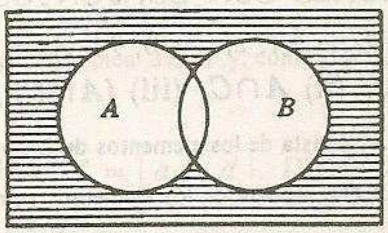


B^c

(ii) Primero se sombrea $A \cup B$; luego el área exterior o sea $(A \cup B)$:

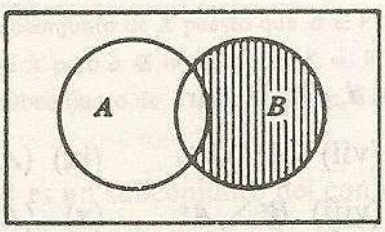


$A \cup B$

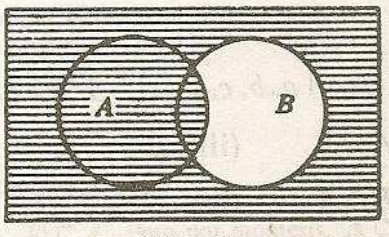


$(A \cup B)^c$

(iii) Primero se sombrea $B \setminus A$, el área de B que no pertenece a A; luego $(B \setminus A)^c$, o sea el área exterior a $B \setminus A$:

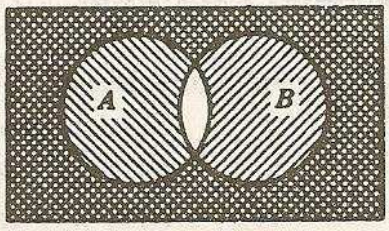


$B \setminus A$

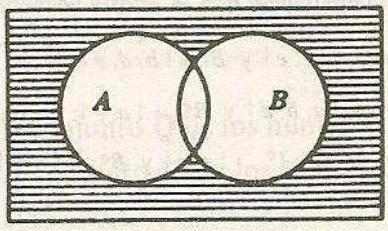


$(B \setminus A)^c$

(iv) Primero se sombrea A^c, o sea el área exterior a A, con trazos oblicuos inclinados a derecha (////), y luego se sombrea B^c con trazos oblicuos inclinados a izquierda (\\\\); entonces $A^c \cap B^c$ es el área ravada doblemente:



A^c y B^c



$A^c \cap B^c$

Observe que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, como se esperaba por la ley de De Morgan.

1.14. Probar: $B \setminus A = B \cap A^c$. O sea, que el conjunto de la operación diferencia puede ser escrito en términos de operaciones de intersección y complemento.

$$B \setminus A = \{x : x \in B,\ x \notin A\} = \{x : x \in B,\ x \in A^c\} = B \cap A^c$$

1.15. Probar: Para dos conjuntos cualesquiera A y B, $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

Sea $x \in A \cap B$; por consiguiente $x \in A$ y $x \in B$. En particular, $x \in A$. Entonces $x \in A \cap B$ implica que $x \in A$. $A \cap B \subset A$. Además si $x \in A$, entonces $x \in A$ o $x \in B$, o sea, $x \in A \cup B$. Puesto que $A \subset A \cup B$. En otras palabras, $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

1.16. Probar el teorema 1.3 (i): $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Supongamos $A \subset B$. Sea $x \in A$; entonces por hipótesis, $x \in B$. O sea que $x \in A$ y $x \in B$, luego $x \in A \cup B$. En consecuencia, $A \subset A \cap B$. Por otra parte, siempre se cumple que $A \cap B \subset A$ (problema 1.15). Luego $A \cap B = A$.

Ahora supongamos que $A \cap B = A$. Entonces en particular, $A \subset A \cap B$. Como siempre se cumple que $A \cap B \subset B$. Entonces $A \subset A \cap B \subset B$ y así, por el teorema 1.1, $A \subset B$.

CONJUNTOS PRODUCTO

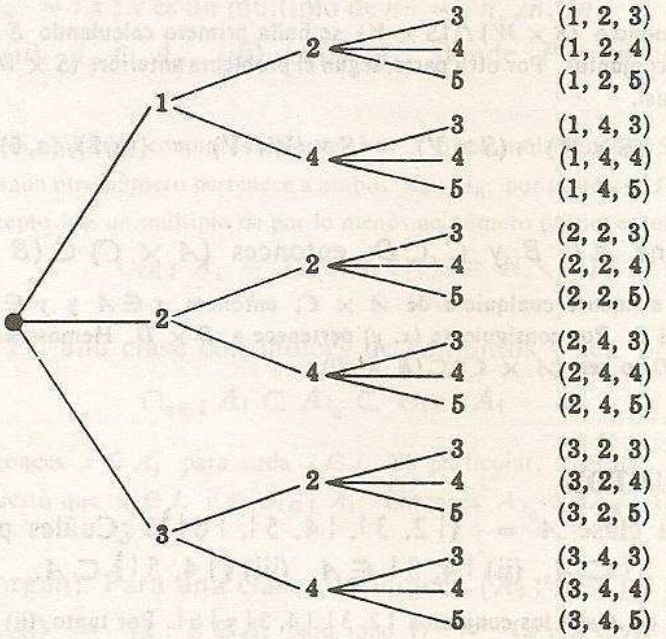
1.17. Sean $M = \{$Tomás, Marcos, Enrique$\}$ y $W = \{$Andrés, Beatriz$\}$. Hallar $M \times W$.

$M \times W$ consta de todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in M$ y $b \in W$. Por tanto

$M \times W = \{$(Tomás, Andrés), (Tomás, Beatriz), (Marcos, Andrés), (Marcos, Beatriz), (Enrique, Andrés), (Enrique, Beatriz)$\}$

1.18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$. Hallar $A \times B \times C$.

Un método conveniente para hallar el producto $A \times B \times C$ es por medio del denominado "diagrama de árbol" que se muestra a continuación:



El "árbol" se construye de izquierda a derecha. $A \times B \times C$ consta de todas las ternas ordenadas, listadas a la derecha del "árbol"

1.19. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$. Hallar:

(i) $A \times (B \cup C)$, (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$, (iii) $A \times (B \cap C)$, (iv) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

(i) Primero hallamos $B \cup C = \{2, 3, 4\}$. Luego

$$A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$$

(ii) Primero hallamos $A \times B$ y $A \times C$:

$$A \times B = \{(a,2), (a,3), (b,2), (b,3)\}$$
$$A \times C = \{(a,3), (a,4), (b,3), (b,4)\}$$

Luego calculamos la reunión de los dos conjuntos:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a,2), (a,3), (b,2), (b,3), (a,4), (b,4)\}$$

Observamos de (i) y (ii) que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

(iii) Primero calculamos $B \cap C = \{3\}$. Luego

$$A \times (B \cap C) = \{(a,3), (b,3)\}$$

(iv) Ahora $A \times B$ y $A \times C$ ya fueron calculados. La intersección de $A \times B$ y $A \times C$ consta de aquellas parejas ordenadas que pertenecen a ambos conjuntos:

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a,3), (b,3)\}$$

Observamos de (iii) y (iv) que

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

1.20. Probar: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x,y) : x \in A,\ y \in B \cap C\} \\ &= \{(x,y) : x \in A,\ y \in B,\ y \in C\} \\ &= \{(x,y) : (x,y) \in A \times B,\ (x,y) \in A \times C\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

1.21. Sean $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $V = \{3, 5, 7, 9\}$. Hallar $(S \times W) \cap (S \times V)$.

El conjunto producto $(S \times W) \cap (S \times V)$ se halla primero calculando $S \times W$ y $S \times V$, y luego calculando la intersección de estos conjuntos. Por otra parte, según el problema anterior, $(S \times W) \cap (S \times V) = S \times (W \cap V)$. Ahora $W \cap V = \{3, 5\}$, y así,

$$(S \times W) \cap (S \times V) = S \times (W \cap V) = \{(a,3), (a,5), (b,3), (b,5)\}$$

1.22. Probar: Si se tiene $A \subset B$ y $C \subset D$; entonces $(A \times C) \subset (B \times D)$.

Sea (x, y) un elemento cualquiera de $A \times C$; entonces $x \in A$ y $y \in C$. Por hipótesis, $A \subset B$ y $C \subset D$; luego $x \in B$ y $y \in D$. Por consiguiente (x, y) pertenece a $B \times D$. Hemos demostrado que $(x, y) \in A \times C$ implica que $(x, y) \in B \times D$; o sea $(A \times C) \subset (B \times D)$.

CLASES DE CONJUNTOS

1.23. Consideremos la clase $A = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$. ¿Cuáles proposiciones son incorrectas y por qué? (i) $\{4, 5\} \subset A$, (ii) $\{4, 5\} \in A$, (iii) $\{\{4, 5\}\} \subset A$.

Los miembros de A son los conjuntos $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ y $\{6\}$. Por tanto, (ii) es correcta pero (i) es una proposición incorrecta. Por otra parte, (iii) es también una proposición correcta puesto que el conjunto que consta del simple elemento $\{4, 5\}$ es una subclase de A.

1.24. Hallar el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$ del conjunto $S = \{1, 2, 3\}$.

El conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$ del conjunto S es la clase de todos los subconjuntos de S; éstos son: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y el conjunto vacío $\emptyset$. Por tanto

$$\mathcal{P}(S) = \{S, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

Nótese que hay $2^3 = 8$ subconjuntos de S.

1.25. Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, y sea:

(i) $A_1 = \{a, c, e\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{d, g\}$;

(ii) $B_1 = \{a, e, g\}$, $B_2 = \{c, d\}$, $B_3 = \{b, e, f\}$;

(iii) $C_1 = \{a, b, e, g\}$, $C_2 = \{c\}$, $C_3 = \{d, f\}$;

(iv) $D_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

¿Cuáles de $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{B_1, B_2, B_3\}$, $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{D_1\}$ son particiones de X?

(i) $\{A_1, A_2, A_3\}$ no es una partición de X puesto que $f \in X$ pero f no pertenece a ninguno de los A_1, A_2 o A_3.

(ii) $\{B_1, B_2, B_3\}$ tampoco es partición de X puesto que $e \in X$ pertenece a ambos B_1 y B_3.

(iii) $\{C_1, C_2, C_3\}$ es una partición de X puesto que cada uno de los elementos de X pertenece a una célula exactamente, o sea, $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y los conjuntos son partes discretas disyuntas.

(iv) $\{D_1\}$ es una partición de X.

1.26. Hallar todas las particiones de $X = \{a, b, c, d\}$.

Notamos primero que cada partición de X contiene, ó 1, 2, 3, ó 4 conjuntos diferentes. Las particiones son las siguientes:

(1) $[\{a, b, c, d\}]$

(2) $[\{a\}, \{b, c, d\}]$, $[\{b\}, \{a, c, d\}]$, $[\{c\}, \{a, b, d\}]$, $[\{d\}, \{a, b, c\}]$,
$[\{a, b\}, \{c, d\}]$, $[\{a, c\}, \{b, d\}]$, $[\{a, d\}, \{b, c\}]$

(3) $[\{a\}, \{b\}, \{c, d\}]$, $[\{a\}, \{c\}, \{b, d\}]$, $[\{a\}, \{d\}, \{b, c\}]$,
$[\{b\}, \{c\}, \{a, d\}]$, $[\{b\}, \{d\}, \{a, c\}]$, $[\{c\}, \{d\}, \{a, b\}]$

(4) $[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}]$

Hay quince particiones diferentes de X.

1.27. Sea $\mathbf{N}$ el conjunto de los enteros positivos y, para cada $n \in \mathbf{N}$, sea

$$A_n = \{x : x \text{ es un múltiplo de } n\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$$

Hallar: (i) $A_3 \cap A_5$, (ii) $A_4 \cap A_6$, (iii) $\cup_{i \in P} A_i$, donde P es el conjunto de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, ...

(i) Aquellos números que son múltiplos conjuntamente de 3×5 o sea múltiplos de 15; por tanto $A_3 \cap A_5 = A_{15}$.

(ii) Los múltiplos de 12 y ningún otro número pertenece a ambos A_4 y A_6; por tanto $A_4 \cap A_6 = A_{12}$.

(iii) Todo entero positivo excepto 1 es un múltiplo de por lo menos un número primo; entonces,

$$\cup_{i \in P} A_i = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$$

1.28. Probar: Sea $\{A_i : i \in I\}$ una clase con índices de conjuntos y sea $i_0 \in I$. Entonces,

$$\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$$

Sea $x \in \cap_{i \in I} A_i$; entonces $x \in A_i$ para cada $i \in I$. En particular, $x \in A_{i_0}$. Por tanto $\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$. Ahora sea $y \in A_{i_0}$. Puesto que $i_0 \in I$, $y \in \cup_{i \in I} A_i$. Entonces $A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$.

1.29. Probar (la ley de De Morgan): Para una clase con índices $\{A_i : i \in I\}$, $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$.

$$(\cup_i A_i)^c = \{x : x \notin \cup_i A_i\} = \{x : x \notin A_i \text{ para todo } i\} = \{x : x \in A_i^c \text{ para todo } i\} = \cap_i A_i^c$$

1.30. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra (σ-álgebra) de conjuntos de U. Demostrar que: (i) U y $\emptyset$ pertenecen a $\mathcal{A}$; y (ii) $\mathcal{A}$ es cerrada para intersecciones finitas (contables).

Recordemos que $\mathcal{A}$ es cerrada para complementos y reuniones finitas (contables).

(i) Puesto que $\mathcal{A}$ no es vacía, hay un conjunto $A \in \mathcal{A}$. Entonces el complemento $A^c \in \mathcal{A}$, y la reunión $U = A \cup A^c \in \mathcal{A}$. También el complemento $\emptyset = U^c \in \mathcal{A}$.

(ii) Sea $\{A_i\}$ una clase finita (contable) de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$. Por la ley de De Morgan (problema 1.29), $(\cup_i A_i^c)^c = \cap_i A_i^{cc} = \cap_i A_i$. Por consiguiente $\cap_i A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$, como se quería demostrar.

Problemas propuestos

CONJUNTOS, ELEMENTOS, SUBCONJUNTOS

1.31. Escribir en notación de conjuntos:

(*a*) R es un subconjunto de T.
(*b*) x es un miembro de Y.
(*c*) El conjunto vacío.
(*d*) M no es subconjunto de S.
(*e*) z no pertenece a A.
(*f*) R pertenece a $\mathcal{A}$.

1.32. Repetir escribiendo explícitamente los elementos de cada conjunto:

(i) $A = \{x : x^2 - x - 2 = 0\}$
(ii) $B = \{x : x$ es una letra de la palabra "fallar"$\}$
(iii) $C = \{x : x^2 = 9, x - 3 = 5\}$
(iv) $D = \{x : x$ es una vocal$\}$
(v) $E = \{x : x$ es un dígito del número 2324$\}$

1.33. Sean $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$.
¿Cuáles conjuntos son iguales a X si se da la siguiente información?
(i) X y B son disyuntos. (ii) $X \subset D$ pero $X \not\subset B$. (iii) $X \subset A$ pero $X \not\subset C$. (iv) $X \subset C$ pero $X \not\subset A$.

1.34. Indicar si cada proposición es verdadera o falsa:

(i) $\{1, 4, 3\} = \{3, 4, 1\}$
(ii) $\{3, 1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
(iii) $1 \not\subset \{1, 2\}$
(iv) $\{4\} \in \{\{4\}\}$
(v) $\{4\} \subset \{\{4\}\}$
(vi) $\emptyset \subset \{\{4\}\}$

1.35. Sea $A = \{1, 0\}$. Indicar si las proposiciones son correctas o no:
(i) $\{0\} \in A$, (ii) $\emptyset \in A$, (iii) $\{0\} \subset A$, (iv) $0 \in A$, (v) $0 \subset A$.

1.36. Establezca si cada conjunto es finito o infinito:

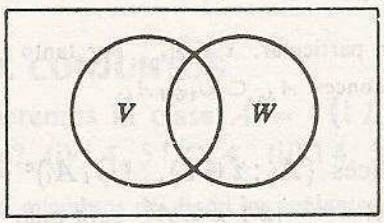
(i) El conjunto de líneas paralelas al eje x.
(ii) El conjunto de letras del alfabeto inglés.
(iii) El conjunto de números múltiplos de 5.
(iv) El conjunto de animales que viven en la Tierra.
(v) El conjunto de números que son solución de la ecuación $x^{27} + 26x^{18} - 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$.
(vi) El conjunto de círculos alrededor del origen (0, 0).

OPERACIONES CON CONJUNTOS

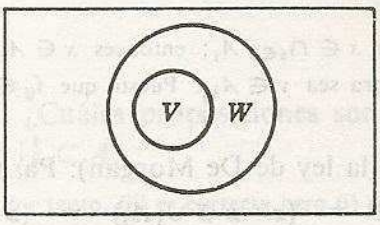
1.37. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, e, f, g\}$. Hallar

(i) $A \cup C$
(ii) $B \cap A$
(iii) $C \setminus B$
(iv) $B^c \cup C$
(v) $C^c \cap A$
(vi) $(A \setminus C)^c$
(vii) $(A \setminus B^c)^c$
(viii) $(A \cap A^c)^c$

1.38. En los diagramas de Venn inferiores, sombree: (i) $W \setminus V$, (ii) $V^c \cup W$, (iii) $V \cap W^c$, (iv) $V^c \setminus W^c$.



(*a*)



(*b*)

1.39. Probar: (*a*) $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$; (*b*) $A \setminus B = A \cap B^c$. (Así las operaciones de reunión y diferencia pueden definirse en términos de operaciones de intersección y complemento.)

1.40. Probar el teorema 1.3 (ii): $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

1.41. Probar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subset B^c$.

1.42. Probar: $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.

1.43. Probar: $A \subset B$ implica $A \cup (B \setminus A) = B$.

1.44. (i) Probar: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(ii) Dar un ejemplo para mostrar que $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

CONJUNTOS PRODUCTO

1.45. Sea $W = \{$Marcos, Enrique, Pablo$\}$ y sea $V = \{$Enrique, David$\}$. Hallar:
(i) $W \times V$, (ii) $V \times W$, (iii) $V^2 = V \times V$.

1.46. Sea $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3, 4\}$. Construir el "diagrama de árbol" de $A \times B \times C$ y luego hallar $A \times B \times C$. (Ver problema 1.18.)

1.47. Sea $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, d\}$ y $W = \{a, d\}$. Construir el "diagrama de árbol" de $S \times T \times W$ y luego hallar $S \times T \times W$.

1.48. Suponer que los conjuntos V, W y Z tienen 3, 4 y 5 elementos respectivamente. Determinar el número de elementos de (i) $V \times W \times Z$, (ii) $Z \times V \times W$, (iii) $W \times Z \times V$.

1.49. Sea $A = B \cap C$. Determinar si ambas proposiciones son ciertas:
(i) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$, (ii) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$.

1.50. Probar: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

CLASES DE CONJUNTOS

1.51. Sea $A_n = \{x : x$ es un múltiplo de $n\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, donde $n \in \mathbf{N}$, enteros positivos. Hallar:
(i) $A_2 \cap A_7$; (ii) $A_6 \cap A_8$; (iii) $A_3 \cup A_{12}$; (iv) $A_3 \cap A_{12}$; (v) $A_s \cup A_{st}$, donde $s, t \in \mathbf{N}$; (vi) $A_s \cap A_{st}$, donde $s, t \in \mathbf{N}$. (vii) Probar: Si $J \subset \mathbf{N}$ es infinito, entonces $\cap_{i \in J} A_i = \emptyset$.

1.52. Hallar el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y el conjunto potencia $\mathcal{P}(B)$ de $B = \{1, \{2, 3\}, 4\}$.

1.53. Sea $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinar si cada proposición es una partición de W.

(i) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}]$ (iii) $[\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 6\}]$

(ii) $[\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 6\}]$ (iv) $[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}]$

1.54. Hallar todas las particiones de $V = \{1, 2, 3\}$.

1.55. Sean $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ y $[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ particiones de un conjunto X. Demostrar que la colección de conjuntos

$$[A_i \cap B_j : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n]$$

también es una partición (llamada la *partición trasversal*) de X.

1.56. Probar: Para cualquier clase con índices $\{A_i : i \in I\}$
(*a*) $B \cup (\cap_i A_i) = \cap_i (B \cup A_i)$, (*b*) $B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$.

1.57. Probar (ley de De Morgan): $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$.

1.58. Demostrar que cada una de las expresiones siguientes es un álgebra de subconjuntos de U:
(i) $\mathcal{A} = \{\emptyset, U\}$; (ii) $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, U\}$; (iii) $\mathcal{P}(U)$, el conjunto potencia de U.

1.59. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras (σ-álgebras) de subconjuntos de U. Probar que la intersección $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ también es un álgebra (σ-álgebra) de subconjuntos de U.

Respuestas a los problemas propuestos

1.31. (*a*) $R \subset T$, (*b*) $x \in Y$, (*c*) $\emptyset$, (*d*) $M \not\subset S$, (*e*) $z \notin A$, (*f*) $R \in \mathcal{A}$.

1.32. (i) $A = \{-1, 2\}$, (ii) $B = \{f, a, l, r\}$, (iii) $C = \emptyset$, (iv) $D = \{a, e, i, o, u\}$, (v) $E = \{2, 3, 4\}$.

1.33. (i) C y E, (ii) D y E, (iii) A, B y D, (iv) no

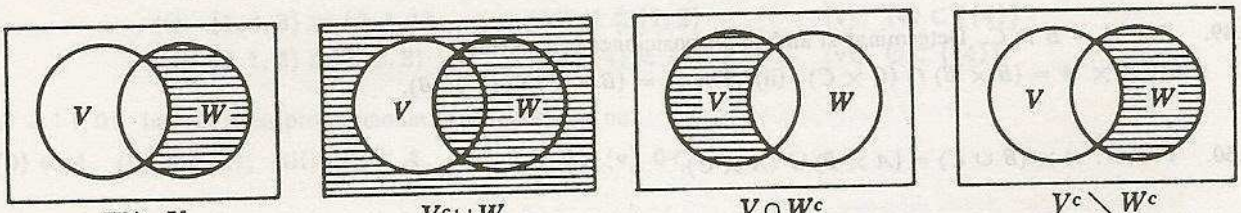
1.34. Todas las proposiciones son verdaderas excepto (v)

1.35. (i) incorrecta, (ii) incorrecta, (iii) correcta, (iv) correcta, (v) incorrecta

1.36. (i) infinito, (ii) finito, (iii) infinito, (iv), finito, (v) finito, (vi) infinito

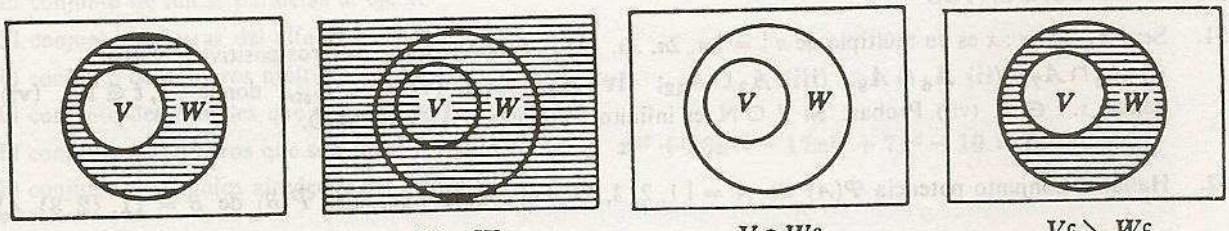
1.37.
(i) $A \cup C = U$
(ii) $B \cap A = \{a, c, e\}$
(iii) $C \setminus B = \{b, f\}$
(iv) $B^c \cup C = \{b, d, e, f, g\}$
(v) $C^c \cap A = \{a, c, d\} = C^c$
(vi) $(A \setminus C)^c = \{b, e, f, g\}$
(vii) $(A \setminus B^c)^c = \{b, d, f, g\}$
(viii) $(A \cap A^c)^c = U$

1.38. (*a*)



$W \setminus V$ $\quad V^c \cup W$ $\quad V \cap W^c$ $\quad V^c \setminus W^c$

(*b*)



$W \setminus V$ $\quad V^c \cup W$ $\quad V \cap W^c$ $\quad V^c \setminus W^c$

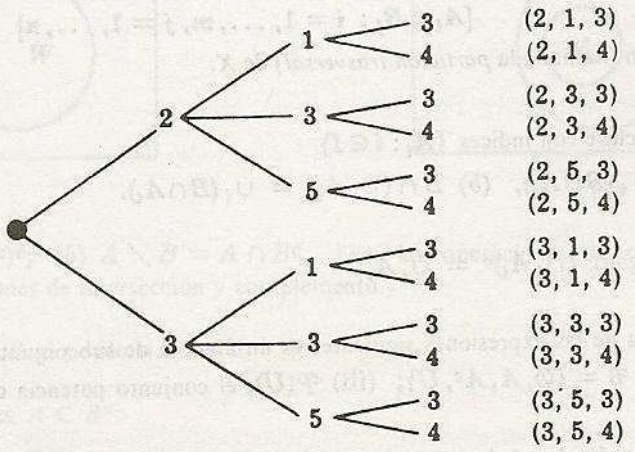
Obsérvese que $V^c \cup W = U$ y $V \cap W^c = \emptyset$ en el caso (*b*) donde $V \subset W$

1.45. (i) $W \times V = \{$(Marcos, Enrique), (Marcos, David), (Enrique, Enrique), (Enrique, David), (Pablo, Enrique), (Pablo, David)$\}$

(ii) $V \times W = \{$(Enrique, Marcos), (David, Marcos), (Enrique, Enrique), (David, Enrique), (Enrique, Pablo), (David, Pablo)$\}$

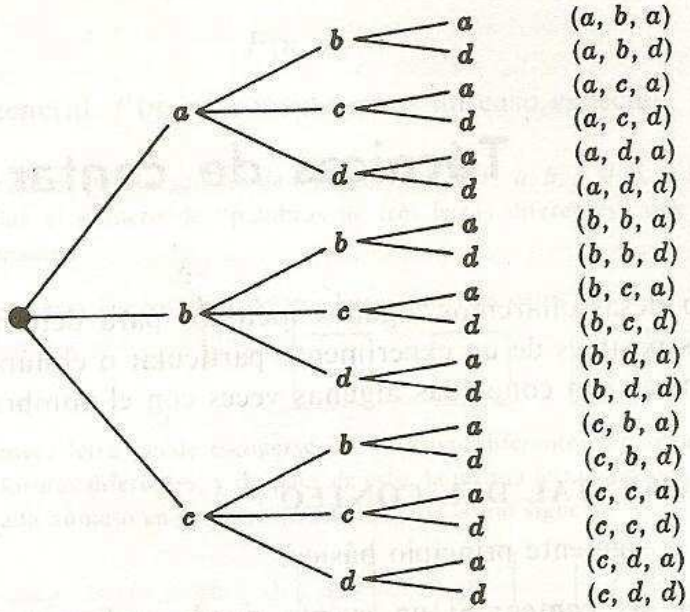
(iii) $V \times V = \{$(Enrique, Enrique), (Enrique, David), (David, Enrique), (David, David)

1.46.



Los elementos de $A \times B \times C$ son las ternas ordenadas a la derecha del diagrama de árbol anterior.

1.47.



Los elementos de $S \times T \times W$ son las ternas ordenadas a la derecha del diagrama de árbol.

1.48. Cada uno tiene 60 elementos

1.49. Ambas son verdaderas: $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C) = (B \times C) \cap (C \times B)$

1.51. (i) A_{14}, (ii) A_{24}, (iii) A_3, (iv) A_{12}, (v) A_s, (vi) A_{st}

1.52. $\mathcal{P}(B) = \{B, \{1, \{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{\{2, 3\}, 4\}, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{4\}, \emptyset\}$

1.53. (i) no, (ii) no, (iii) sí, (iv) sí

1.54. $[\{1, 2, 3\}], [\{1\}, \{2, 3\}], [\{2\}, \{1, 3\}], [\{3\}, \{1, 2\}]$ y $[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$

Capítulo 2

Técnicas de contar

"Conteo"

INTRODUCCION

En este capítulo desarrollaremos algunos métodos para determinar sin enumeración directa el número de resultados posibles de un experimento particular o el número de elementos de un conjunto particular. Tales técnicas son conocidas algunas veces con el nombre de análisis combinatorio.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Empezamos con el siguiente principio básico:

Principio fundamental del conteo: Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes, y si, continuando el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes, y si, después de efectuados, un tercer evento puede realizarse de n_3 maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots$.

Ejemplo 2.1: Supongamos que una placa de automóvil consta de dos letras distintas seguidas de tres dígitos de los cuales el primero no es cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden grabarse?

La primera letra puede colocarse de 26 maneras diferentes (supuesto el alfabeto de 26 letras), la segunda letra de 25 maneras (puesto que la letra grabada de primera no puede escogerse como segunda letra), para el primer dígito hay nueve números o sea nueve maneras y para cada uno de los otros dos dígitos 10 maneras. Por lo tanto pueden grabarse

$$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585.000$$

placas diferentes.

NOTACION FACTORIAL

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta n inclusive, se emplea con mucha frecuencia en matemáticas y aquí lo denotamos por el símbolo especial $n!$ (que se lee "n factorial"):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Conviene también definir $0! = 1$.

Ejemplo 2.2:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120, \quad 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

Ejemplo 2.3:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56 \qquad 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = \frac{12!}{9!}$$

PERMUTACIONES

Una ordenación de un conjunto de n objetos en un orden dado se llama una *permutación* de los objetos (tomados todos a la vez). Una ordenación de un número r de dichos objetos, $r \leq n$, en un orden dado se llama una *permutación* r o una *permutación de los* n *objetos tomados* r *a la vez*.

Ejemplo 2.4: Consideremos el conjunto de las letras $\{a, b, c, d\}$. Entonces:

(i) *bdca*, *dcba* y *acdb* son permutaciones de las 4 letras (tomadas todas a la vez);

(ii) *bad*, *adb*, *cbd* y *bca* son permutaciones de las 4 letras tomadas 3 a la vez;

(iii) *ad*, *cb*, *da* y *bd* son permutaciones de las 4 letras tomadas 2 a la vez.

El número de permutaciones de n objetos tomados r a la vez lo denotamos por

$$P(n, r)$$

Antes de deducir la fórmula general $P(n, r)$ consideremos un caso especial:.

Ejemplo 2.5: Hallar el número de permutaciones de 6 objetos, a saber, a, b, c, d, e, f, tomados tres a la vez. En otras palabras, hallar el número de "palabras de tres letras diferentes" que pueden formarse con las seis letras mencionadas.

Representemos las palabras de tres letras por tres cajas:

Ahora la primera letra puede escogerse de 6 formas diferentes; en seguida, la segunda letra se puede escoger de 5 formas diferentes; y después de esto, la última letra se puede escoger de 4 formas diferentes. Escribimos cada número en su correspondiente caja como sigue:

Así por el principio fundamental del conteo hay $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posibles palabras de tres letras sin repetición, o hay 120 permutaciones de 6 objetos tomados 3 al tiempo. Esto es,

$$P(6, 3) = 120$$

La deducción de la fórmula $P(n, r)$ sigue el procedimiento del ejemplo anterior. El primer elemento de una permutación r de n objetos puede escogerse de n diferentes maneras; a continuación, el segundo elemento de la permutación puede escogerse de $n - 1$ maneras; y, sucesivamente el tercer elemento puede escogerse de $n - 2$ maneras. Continuando en esta forma, tenemos que el r-ésimo (último) elemento de la permutación r puede escogerse de $n - (r - 1) = n - r + 1$ maneras. Así,

Teorema 2.1: $$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

La segunda parte de la fórmula se basa en que

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En el caso especial de $r = n$, tenemos

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Es decir, el

Corolario 2.2: Las permutaciones de n objetos (tomados todos a la vez) son iguales a $n!$

Ejemplo 2.6: ¿Cuántas permutaciones de 3 elementos se forman con 3 objetos a, b y c?

Según el corolario anterior, hay $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutaciones. Estas son abc, acb, bac, bca, cab, cba.

PERMUTACIONES CON REPETICIONES

Con frecuencia se desea saber el número de permutaciones de objetos, de los cuales algunos son iguales, como se indica a continuación. Usamos la fórmula general.

Teorema 2.3: El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, ..., n_r son iguales, es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

Indicamos la comprobación del teorema propuesto por medio del siguiente ejemplo particular. Supóngase que deseamos formar todas las posibles palabras de 5 letras usando las letras empleadas en la palabra DADDY. Ahora se tienen $5! = 120$ permutaciones de los objetos D_1, A, D_2, D_3, Y donde las tres D están marcadas. Observamos que las seis permutaciones siguientes

$$D_1D_2D_3AY,\quad D_2D_1D_3AY,\quad D_3D_1D_2AY,\quad D_1D_3D_2AY,\quad D_2D_3D_1AY,\quad D_3D_2D_1AY$$

forman la misma palabra si se quitan los subíndices. Las 6 resultan del hecho que hay $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras diferentes de colocar las tres D en los tres primeros lugares de la permutación. Esto es cierto para cada una de las otras posiciones posibles en donde las D aparezcan. Por consiguiente hay

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

palabras diferentes de 5 letras, que pueden formarse tomando las letras de la palabra DADDY.

Ejemplo 2.7: ¿Cuántas señales diferentes, cada una de 8 banderas colocadas en una línea vertical, pueden formarse con un conjunto de 4 banderas rojas sin marcar, 3 blancas sin marcar y una azul? Tratamos de obtener el número de permutaciones de 8 objetos de los cuales 4 son iguales (las banderas rojas) y 3 también (las banderas blancas). Según el teorema anterior hay

$$\frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

señales diferentes.

PRUEBAS ORDENADAS

Muchos problemas del análisis combinatorio y, en particular, de probabilidad se relacionan con la escogencia de una bola tomada de una urna que contiene n bolas (o una carta de una baraja, o una persona de una población). Cuando escogemos una bola tras otra de una urna, r veces, definimos esta escogencia como una prueba ordenada de tamaño r. Se consideran dos casos:

(i) *Pruebas con sustitución.* En este caso cada bola escogida se regresa a la urna antes de tomar la siguiente. Ahora puesto que hay n maneras diferentes para escoger cada bola, según el principio fundamental del conteo hay

$$\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}^{r \text{ veces}} = n^r$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño r con sustitución.

(ii) *Pruebas sin sustitución.* Aquí la bola no se devuelve a la urna antes de escoger la siguiente. Así no hay repeticiones en la prueba ordenada. O sea que, una prueba ordenada de tamaño r sin sustitución es simplemente una permutación r de objetos de la urna. Por consiguiente hay

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño r sin sustitución tomadas de un grupo de n objetos.

Ejemplo 2.8: ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres cartas sucesivas de una baraja de 52 cartas, (i) con sustitución, (ii) sin sustitución? Si cada carta se regresa al naipe antes de escoger la siguiente, entonces cada carta puede escogerse de 52 maneras diferentes. Entonces hay

$$52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^3 = 140.608$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño 3 con sustitución.

Por otra parte si no hay sustitución, entonces la primera carta puede escogerse de 52 maneras diferentes, la segunda carta de 51 maneras diferentes, y la tercera y última carta de 50 maneras diferentes. Por lo tanto hay

$$52 \cdot 51 \cdot 50 = 132.600$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño 3 sin sustitución.

COEFICIENTES DEL BINOMIO Y TEOREMA

El símbolo $\binom{n}{r}$, léase "nCr", donde r y n son enteros positivos con $r \leq n$, se define como sigue:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}$$

Estos números son llamados *coeficientes del binomio* en atención al teorema 2.5 expuesto más adelante.

Ejemplo 2.9: $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28 \quad \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126 \quad \binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$

Nótese que $\binom{n}{r}$ tiene exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador. También,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Con esta fórmula y teniendo en cuenta que $n - (n - r) = r$, se obtiene la siguiente relación importante:

Lema 2.4: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ o, lo que es lo mismo, si $a + b = n$ entonces $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$.

Ejemplo 2.10: $\binom{10}{7} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 120$ o $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

Obsérvese que el segundo método economiza espacio y tiempo.

Nota: La fórmula abreviada del ejemplo 2.9 para $\binom{n}{r}$ y el hecho de que $0! = 1$, nos llevan a definir:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \quad \text{y, en particular} \quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

El teorema del binomio, que se demuestra por inducción matemática (problema 2.18), proporciona la expresión general para el desarrollo de $(a + b)^n$.

Teorema 2.5 (teorema del binomio):

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3b^2 + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\ &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6\end{aligned}$$

En el desarrollo de $(a+b)^n$ se deben observar las propiedades siguientes:

(i) Hay $n+1$ términos.

(ii) La suma de los exponentes de a y de b en cada término es n.

(iii) Los exponentes de a decrecen una unidad en cada término desde n hasta 0; los exponentes de b crecen similarmente de 0 a n.

(iv) El coeficiente de cualquier término es $\binom{n}{k}$ donde k es el exponente de a o de b. (Esto proviene del lema 2.4.)

(v) Los coeficientes de términos equidistantes de los extremos son iguales.

Hacemos notar que los coeficientes de las potencias sucesivas de $a+b$ pueden ser distribuidos en una formación triangular de números, llamada triángulo de Pascal, como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & a + b \\
(a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 & = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 & = & a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
\cdots & & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

El triángulo de Pascal tiene las siguientes propiedades interesantes.

(a) El primero y último números de cada fila es 1.

(b) Cada uno de los otros números de la formación se obtienen sumando los dos números que aparecen directamente encima de él. Por ejemplo: $10 = 4 + 6$, $15 = 5 + 10$, $20 = 10 + 10$.

Se observa que la propiedad (b) anterior es equivalente al siguiente teorema sobre coeficientes del binomio:

Teorema 2.6: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

Ahora sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros no negativos tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Entonces la expresión $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ se define como sigue:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

Por ejemplo,

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210 \qquad \binom{8}{4,2,2,0} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!\,0!} = 420$$

Estos números son llamados *coeficientes multinomiales* en atención al siguiente teorema que generaliza el teorema del binomio.

Teorema 2.7: $(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_r^{n_r}$

COMBINACIONES

Supongamos que tenemos una colección de n objetos. Una *combinación* de estos n objetos *tomados r a la vez*, o una *combinación r*, es un subconjunto de r elementos. En otras palabras, una combinación r es una selección de r o de n objetos donde el orden no se tiene en cuenta.

Ejemplo 2.12: Las combinaciones de las letras a, b, c, d tomadas 3 a la vez son

$$\{a, b, c\},\ \{a, b, d\},\ \{a, c, d\},\ \{b, c, d\} \text{ o simplemente } abc, abd, acd, bcd$$

Obsérvese que las combinaciones siguientes son iguales:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

O sea, cada una representa el mismo conjunto $\{a, b, c\}$.

El número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez lo denotaremos por

$$C(n, r)$$

Antes de dar la fórmula general para $C(n, r)$, consideremos un caso especial.

Ejemplo 2.13: Determinemos el número de combinaciones de las cuatro letras a, b, c, d tomadas de tres en tres. Vemos que cada combinación que contenga tres letras produce $3! = 6$ permutaciones así:

Combinaciones	Permutaciones
abc	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
abd	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
acd	$acd, adc, cad, cda, dac, dca$
bcd	$bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$

Luego el número de combinaciones multiplicado por $3!$ equivale al número de permutaciones totales:

$$C(4, 3) \cdot 3! = P(4, 3) \quad \text{o} \quad C(4, 3) = \frac{P(4, 3)}{3!}$$

Ahora $P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ y $3! = 6$; entonces $C(4, 3) = 4$ como se anotó antes.

Puesto que cada combinación de n objetos tomados r a la vez determina $r!$ permutaciones de los objetos, se deduce que

$$P(n, r) = r!\,C(n, r)$$

Así obtenemos:

Teorema 2.8: $$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Recalcamos que el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$ fue definido $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$; de aquí

$$\boxed{C(n, r) = \binom{n}{r}}$$

Usaremos $C(n, r)$ y $\binom{n}{r}$ indistintamente.

Ejemplo 2.14: ¿Cuántos comités de 3 se pueden formar con 8 personas? Cada comité es esencialmente una combinación de las 8 personas tomadas 3 a la vez. Por tanto

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

comités diferentes pueden formarse.

PARTICIONES ORDENADAS

Supongamos que una urna A contiene siete bolas numeradas de 1 a 7. Calculemos el número de maneras como podemos sacar, primero 2 bolas de la urna, después 3 bolas y finalmente 2. En otras palabras, queremos calcular el número de *particiones ordenadas*

$$(A_1, A_2, A_3)$$

del conjunto de 7 bolas en células A_1 con 2 bolas, A_2 con 3 y A_3 con 2 bolas. Estas células las llamamos particiones ordenadas desde que distingamos entre

$$(\{1,2\}\ \{3,4,5\},\ \{6,7\}) \quad \text{y} \quad (\{6,7\},\ \{3,4,5\},\ \{1,2\})$$

cada una de las cuales produce la misma partición de A.

Desde que se comience con 7 bolas en la urna, hay $\binom{7}{2}$ maneras de sacar las 2 primeras bolas, esto es, para obtener la primera célula A_1; después de esto, quedan 5 bolas en la urna y por consiguiente hay $\binom{5}{3}$ maneras de sacar 3 bolas o sea para determinar A_2; finalmente, quedan 2 bolas en la urna, o sea que hay $\binom{2}{2}$ maneras de obtener la última célula A_3. Entonces hay

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} = 210$$

particiones ordenadas diferentes de A distribuidas en las células A_1 con 2 bolas, A_2 con 3 bolas y A_3 con 2 bolas.

Ahora obsérvese que

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7!}{2!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!} = \frac{7!}{2!3!2!}$$

puesto que cada numerador después del primero se simplifica con el segundo término del denominador del factor que le precede. En forma similar se comprueba (ver problema 2.28) el

Teorema 2.9: Sea A compuesto de n elementos y sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros positivos con $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Entonces existen

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}$$

particiones ordenadas diferentes de A de la forma $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ donde A_1 consta de n_1 elementos, A_2 consta de n_2 elementos, ..., y A_r consta de n_r elementos.

Ejemplo 2.15: ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 9 juguetes entre 4 niños si el menor recibe 3 juguetes y cada uno de los otros niños 2 juguetes?

Se desea hallar el **número** de particiones ordenadas de los 9 juguetes entre 4 células que constan de 3, 2, 2 y 2 juguetes respectivamente. Por el teorema anterior, hay

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 7560$$

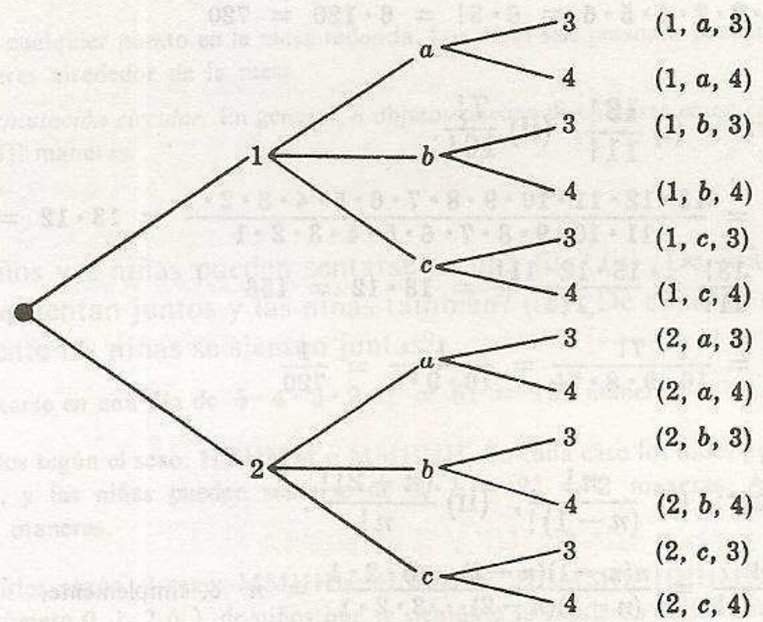
de tales particiones ordenadas.

DIAGRAMAS DE ARBOL

Un diagrama de árbol es el dibujo que se usa para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos en donde cada experimento puede suceder en un número finito de maneras. La construcción de diagramas de árbol se ilustra en los siguientes ejemplos.

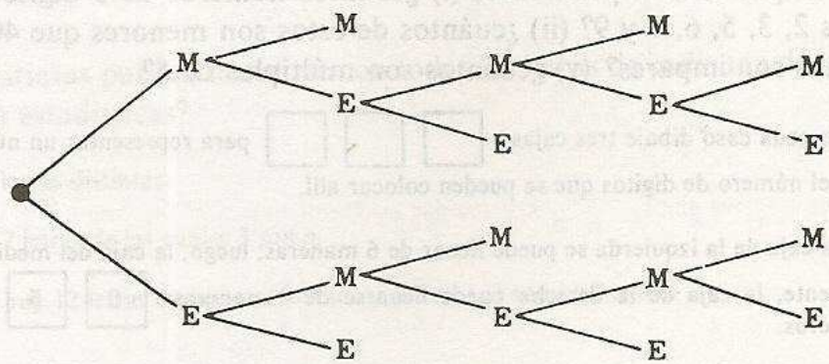
Ejemplo 2.16: Hallar el conjunto producto $A \times B \times C$ en donde $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{3, 4\}$.

Usamos el diagrama de árbol siguiente:



Vemos que el diagrama de árbol se construye de izquierda a derecha, y que el número de ramas en cada punto es el número de resultados posibles del experimento siguiente.

Ejemplo 2.17: Marcos y Enrique intervienen en un torneo de tenis. La primera persona que gane dos juegos seguidos o que complete tres gana el torneo. El diagrama siguiente muestra los posibles resultados del torneo.



Nótese que hay 10 puntos finales que corresponden a los 10 resultados posibles del torneo:

MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME, EMEE, EE

El recorrido desde el principio del árbol a los puntos finales indica quién ganó cada juego en el torneo individual.

Problemas resueltos

FACTORIAL

2.1. Calcular 4!, 5!, 6!, 7! y 8!

$4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

$5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 5\cdot4! = 5\cdot24 = 120$

$6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 6\cdot5! = 6\cdot120 = 720$

$7! = 7\cdot6! = 7\cdot720 = 5040$

$8! = 8\cdot7! = 8\cdot5040 = 40.320$

2.2. Calcular: (i) $\dfrac{13!}{11!}$, (ii) $\dfrac{7!}{10!}$.

(i) $\dfrac{13!}{11!} = \dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 13\cdot12 = 156$

or $\dfrac{13!}{11!} = \dfrac{13\cdot12\cdot11!}{11!} = 13\cdot12 = 156$

(ii) $\dfrac{7!}{10!} = \dfrac{7!}{10\cdot9\cdot8\cdot7!} = \dfrac{1}{10\cdot9\cdot8} = \dfrac{1}{720}$

2.3. Simplificar: (i) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$, (ii) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$.

(i) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1} = n$ o, simplemente, $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(ii) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1} = (n+2)(n+1) = n^2+3n+2$

o, simplemente, $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)\cdot n!}{n!} = (n+2)(n+1) = n^2+3n+2$

PERMUTACIONES, PRUEBAS ORDENADAS

2.4. Si no se permiten repeticiones, (i) ¿cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los seis dígitos 2, 3, 5, 6, 7 y 9? (ii) ¿cuántos de éstos son menores que 400? (iii) ¿cuántos son pares? (iv) ¿cuántos son impares? (v) ¿cuántos son múltiplos de 5?

En cada caso dibuje tres cajas $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$ para representar un número arbitrario, y luego escriba en cada caja el número de dígitos que se pueden colocar allí.

(i) La caja de la izquierda se puede llenar de 6 maneras; luego, la caja del medio puede llenarse de 5 maneras; y, finalmente, la caja de la derecha puede llenarse de 4 maneras: $\boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$. Así hay $6\cdot5\cdot4 = 120$ números.

(ii) La caja de la izquierda puede llenarse de dos maneras solamente, por 2 ó 3, puesto que cada número debe ser menor que 400; la caja de la mitad puede llenarse de 5 maneras; y, finalmente, la caja de la derecha puede llenarse de 4 maneras: $\boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$. Así hay $2\cdot5\cdot4 = 40$ números.

(iii) La caja de la derecha puede llenarse de dos maneras solamente, por 2 y 6, puesto que los números deben ser pares; la caja de la izquierda puede llenarse de 5 maneras; y, finalmente, la caja de la mitad puede llenarse de 4 maneras: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$. Por consiguiente hay $5\cdot4\cdot2 = 40$ números.

(iv) La caja de la derecha puede llenarse de sólo 4 maneras, por 3, 5, 7 ó 9, puesto que los números deben ser impares; la caja de la izquierda puede llenarse por lo tanto de 5 maneras; y, finalmente, la caja de la mitad puede llenarse de 4 maneras: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$. Así hay $5\cdot4\cdot4 = 80$ números.

(v) La caja de la derecha puede llenarse de 1 manera solamente, por 5, puesto que los números deben ser múltiplos de 5; la caja de la izquierda puede llenarse por lo tanto de 5 maneras; y, finalmente, la caja del medio puede llenarse de 4 maneras: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$. O sea que hay $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$ números.

2.5. ¿De cuántas maneras se puede acomodar una reunión de 7 personas, (i) en una fila de 7 sillas? (ii) alrededor de una mesa redonda?

(i) Las siete personas pueden distribuirse en una fila de $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ maneras.

(ii) Una persona puede sentarse en cualquier puesto en la mesa redonda. Las otras seis personas pueden acomodarse de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ maneras alrededor de la mesa.

Este es un ejemplo de *permutación circular*. En general, n objetos pueden distribuirse en un círculo de $(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$ maneras.

2.6. (i) ¿De cuántas maneras 3 niños y 2 niñas pueden sentarse en una fila? (ii) ¿De cuántas maneras pueden sentarse si los niños se sientan juntos y las niñas también? (iii) ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila si justamente las niñas se sientan juntas?

(i) Las cinco personas pueden sentarse en una fila de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ maneras

(ii) Hay 2 maneras para distribuirlos según el sexo: HHHMM o MMHHH. En cada caso los niños pueden sentarse de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ maneras, y las niñas pueden sentarse de $2 \cdot 1 = 2! = 2$ maneras. Así, en total hay $2 \cdot 3! \cdot 2! = 2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ maneras.

(iii) Hay 4 maneras para distribuirlos según el sexo: MMHHH, HMMHH, HHMMH, HHHMM. Obsérvese que cada manera corresponde al número 0, 1, 2 ó 3, de niños que se sientan a la izquierda de las niñas. En cada caso los niños pueden sentarse de 3! maneras, y las niñas de 2! maneras. Así en total, hay $4 \cdot 3! \cdot 2! = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ maneras.

2.7. ¿Cuántas señales diferentes, cada una de 6 banderas colgadas en una línea vertical, pueden formarse con 4 banderas rojas idénticas y 2 azules idénticas?

Este problema corresponde a permutaciones con repetición. Hay $\dfrac{6!}{4!\,2!} = 15$ señales puesto que hay 6 banderas de las cuales 4 son rojas y 2 azules.

2.8. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse con todas las letras de cada una de las palabras: (i) tema, (ii) campana, (iii) estadísticas?

(i) $4! = 24$, puesto que hay 4 letras distintas.

(ii) $\dfrac{7!}{3!} = 840$, puesto que hay 7 letras de las cuales 3 son a.

(iii) $\dfrac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!}$, puesto que hay 12 letras de las cuales 3 son s, 2 son t, 2 son i y 2 son a.

2.9. (i) ¿De cuántas maneras 3 americanos, 4 franceses, 4 daneses y 2 italianos pueden sentarse en una fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos? (ii) Resolver el mismo problema si se sientan en una mesa redonda.

(i) Las cuatro nacionalidades pueden ordenarse en una fila de 4! maneras. En cada caso los 3 americanos pueden sentarse de 3! maneras; los 4 franceses, de 4! maneras; los 4 daneses, de 4! maneras; y los 2 italianos, de 2! maneras. Así que, en total, hay $4!3!4!4!2! = 165.888$ ordenaciones.

(ii) Las 4 nacionalidades pueden distribuirse en un círculo de 3! maneras (ver problema 14.4 sobre permutaciones circulares). En cada caso los 3 americanos pueden sentarse de 3! maneras; los 4 franceses, de 4! maneras; los 4 daneses, de 4! maneras; y los 2 italianos de 2! maneras. O sea que, en total, hay $3!3!4!4!2! = 41.472$ ordenaciones.

2.10. Supóngase que una urna contiene 8 bolas. Hallar el número de pruebas ordenadas de tamaño 3, (i) con sustitución, (ii) sin sustitución.

(i) Cada bola de la prueba ordenada puede escogerse de 8 maneras; entonces hay $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$ pruebas con sustitución.

(ii) La primera bola de la prueba ordenada puede ser escogida de 8 maneras, la siguiente de 7 maneras y la última de 6 maneras. Por lo tanto hay $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ pruebas sin sustitución.

2.11. Hallar n si (i) $P(n, 2) = 72$, (ii) $P(n, 4) = 42P(n, 2)$, (iii) $2P(n, 2) + 50 = P(2n, 2)$.

(i) $P(n, 2) = n(n-1) = n^2 - n$; o sea $n^2 - n = 72$ o $n^2 - n - 72 = 0$ o $(n-9)(n+8) = 0$.

Puesto que n debe ser positivo, la única respuesta es $n = 9$.

(ii) $P(n, 4) = n(n-1)(n-2)(n-3)$ y $P(n, 2) = n(n-1)$. O sea

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1) \quad \text{o, si} \quad n \neq 0, \neq 1, \qquad (n-2)(n-3) = 42$$

$$\text{o} \quad n^2 - 5n + 6 = 42 \quad \text{o} \quad n^2 - 5n - 36 = 0 \quad \text{o} \quad (n-9)(n+4) = 0$$

Puesto que n debe ser positivo, la única respuesta es $n = 9$.

(iii) $P(n, 2) = n(n-1) = n^2 - n$ y $P(2n, 2) = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n$. Entonces

$$2(n^2 - n) + 50 = 4n^2 - 2n \quad \text{o} \quad 2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n \quad \text{o} \quad 50 = 2n^2 \quad \text{o} \quad n^2 = 25$$

Puesto que n debe ser positivo, la única respuesta es $n = 5$.

COEFICIENTE DEL BINOMIO Y TEOREMA

2.12. Calcular: (i) $\binom{16}{3}$, (ii) $\binom{12}{4}$, (iii) $\binom{15}{5}$.

Recordemos que hay tantos factores en el numerador como en el denominador.

(i) $\binom{16}{3} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$ (iii) $\binom{15}{5} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$

(ii) $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$

2.13. Calcular: (i) $\binom{8}{5}$, (ii) $\binom{9}{7}$, (iii) $\binom{10}{6}$.

(i) $\binom{8}{5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$

Observamos que $8 - 5 = 3$; o sea que podríamos calcular también $\binom{8}{5}$ como sigue:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

(ii) Ahora $9 - 7 = 2$; entonces $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

(iii) Ahora $10 - 6 = 4$; luego $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

2.14. Desarrollar y simplificar: $(2x + y^2)^5$.

$$(2x + y^2)^5 = (2x)^5 + \frac{5}{1}(2x)^4(y^2) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}(2x)^3(y^2)^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}(2x)^2(y^2)^3 + \frac{5}{1}(2x)(y^2)^4 + (y^2)^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$$

2.15. Desarrollar y simplificar: $(x^2-2y)^6$.

$$\begin{aligned}(x^2-2y)^6 &= (x^2)^6 + \frac{6}{1}(x^2)^5(-2y) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(x^2)^4(-2y)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(x^2)^3(-2y)^3 \\ &\quad + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(x^2)^2(-2y)^4 + \frac{6}{1}(x^2)(-2y)^5 + (-2y)^6 \\ &= x^{12} - 12x^{10}y + 60x^8y^2 - 160x^6y^3 + 240x^4y^4 - 192x^2y^5 + 64y^6\end{aligned}$$

2.16. Probar: $2^4 = 16 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$.

Desarrollamos $(1+1)^4$ y empleamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}2^4 = (1+1)^4 &= \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3 1^1 + \binom{4}{2}1^2 1^2 + \binom{4}{3}1^1 1^3 + \binom{4}{4}1^4 \\ &= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\end{aligned}$$

2.17. Probar el teorema 2.6: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

Ahora $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r+1)!} + \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. Para obtener el mismo denominador en ambas fracciones, multiplicamos la primera fracción por $\frac{r}{r}$ y la segunda fracción por $\dfrac{n-r+1}{n-r+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{r\cdot n!}{r\cdot(r-1)!\cdot(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\cdot n!}{r!\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)!} \\ &= \frac{r\cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{r\cdot n! + (n-r+1)\cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{[r+(n-r+1)]\cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}\end{aligned}$$

2.18. Probar el teorema del binomio 2.5: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

El teorema es cierto para $n = 1$, puesto que

$$\sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}a^{1-r}b^r = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a + b = (a+b)^1$$

Suponemos que el teorema se cumple para $(a+b)^n$ y probamos que es cierto para $(a+b)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\left[a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}\right. \\ &\qquad \left. + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n\right]\end{aligned}$$

Ahora el término del producto que contiene b^r se obtiene de

$$\begin{aligned}b\left[\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}\right] + a\left[\binom{n}{r}a^{n-r}b^r\right] &= \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^r + \binom{n}{r}a^{n-r+1}b^r \\ &= \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right]a^{n-r+1}b^r\end{aligned}$$

Pero, por el teorema 2.6, $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$. O sea el término que contiene b^r es $\binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$.

Observamos que $(a+b)(a+b)^n$ es un polinomio de grado $n+1$ en b. En consecuencia,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$$

lo cual se quería demostrar.

2.19. Calcular los coeficientes multinomiales siguientes:

$$\text{(i)} \binom{6}{3,2,1}, \quad \text{(ii)} \binom{8}{4,2,2,0}, \quad \text{(iii)} \binom{10}{5,3,2,2}$$

(i) $\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = 60$

(ii) $\binom{8}{4,2,2,0} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!\,0!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = 420$

(iii) La expresión $\binom{10}{5,3,2,2}$ no tiene sentido puesto que $5+3+2+2 \neq 10$.

COMBINACIONES

2.20. ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité, compuesto de 3 hombres y 2 mujeres, de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres?

De los 7 hombres se pueden escoger 3 de $\binom{7}{3}$ maneras, y de las 5 mujeres se pueden escoger 2 de $\binom{5}{2}$ maneras. Por consiguiente el comité puede escogerse de $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 350$ maneras.

2.21. Una delegación de 4 estudiantes de un colegio se selecciona todos los años para asistir a la asamblea anual de la Asociación de Estudiantes. (i) ¿De cuántas maneras puede escogerse la delegación si hay 12 estudiantes elegibles? (ii) ¿De cuántas maneras si dos de los estudiantes elegibles no asisten al mismo tiempo? (iii) ¿De cuántas maneras si dos de los estudiantes elegibles son casados y sólo asistirán si van ambos?

(i) Los 4 estudiantes pueden ser escogidos de los 12 de $\binom{12}{4} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 495$ maneras.

(ii) Sean A y B los estudiantes que no asisten juntos a la asamblea.

Método 1.

Si no se incluye a A ni a B, entonces la delegación puede escogerse de $\binom{10}{4} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210$ maneras. Si uno de los dos A o B, pero no juntos, es incluido, entonces la delegación puede escogerse de $2\cdot\binom{10}{3} = 2\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 240$ maneras. Por lo tanto, en total, la delegación puede ser escogida de $210 + 240 = 450$ maneras.

Método 2.

Si A y B son incluidos, entonces los otros 2 miembros de la delegación pueden escogerse de $\binom{10}{2} = 45$ maneras. O sea que hay $495 \quad 45 = 450$ maneras para que la delegación pueda escogerse si A y B no se incluyen al tiempo.

(iii) Llamemos C y D los estudiantes casados. Si C y D no van, entonces la delegación puede escogerse de $\binom{10}{4} = 210$ maneras. Si ambos C y D van, entonces la delegación puede escogerse de $\binom{10}{2} = 45$ maneras. En resumen, la delegación puede escogerse de $210 + 45 = 255$ maneras.

2.22. Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas en un examen. (i) ¿Cuántas maneras de escoger tiene? (ii) ¿Cuántas maneras, si las 3 primeras preguntas son obligatorias? (iii) ¿Cuántas, si tiene que contestar 4 de las 5 primeras preguntas?

(i) Las 8 preguntas pueden seleccionarse de $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ maneras.

(ii) Si contesta las 3 primeras preguntas, entonces puede escoger las otras 5 de las 7 últimas preguntas de $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ maneras.

(iii) Si contesta todas las 5 primeras preguntas, entonces puede escoger las otras 3 de las 5 últimas de $\binom{5}{3} = 10$ maneras. Por otra parte, si contesta 4 de las 5 primeras preguntas, entonces puede escogerlas de $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ maneras, y puede escoger las otras 4 de las 5 últimas de $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ maneras; por consiguiente puede escoger las 8 preguntas de $5 \cdot 5 = 25$ maneras. O sea que tiene 35 maneras diferentes para escoger.

2.23. Hallar el número de subconjuntos de un conjunto X que contiene n elementos.

Método 1.

El número de subconjuntos de X con $r \leq n$ elementos está dado por $\binom{n}{r}$. Por tanto, en resumen, hay

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

subconjuntos de X. La suma anterior (problema 2.51) es igual a 2^n, o sea que hay 2^n subconjuntos de X.

Método 2.

Hay dos posibilidades para cada elemento de X: o pertenece al subconjunto o no pertenece; por consiguiente hay

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}^{n \text{ veces}} = 2^n$$

maneras de formar un subconjunto de X, o sea, hay 2^n subconjuntos diferentes de X.

2.24. ¿De cuántas maneras puede un profesor escoger uno o más estudiantes de seis elegibles?

Método 1.

Según el problema anterior, hay $2^6 = 64$ subconjuntos del conjunto de seis estudiantes. Sin embargo, el conjunto vacío debe ser excluido puesto que se escogen uno o más estudiantes. En consecuencia hay $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ maneras de escoger los estudiantes.

Método 2.

Puesto que se escogen o uno, o dos, etc., o seis estudiantes; entonces, el número de maneras de escoger es

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

PARTICIONES ORDENADAS Y DESORDENADAS

2.25. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 7 juguetes entre 3 niños si el menor recibe 3 y cada uno de los otros recibe 2?

Buscamos el número de particiones ordenadas de 7 objetos en células de 3, 2 y 2 objetos respectivamente. Por el teorema 2.9, hay $\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$ de dichas particiones.

2.26. En una clase hay 12 estudiantes. ¿De cuántas maneras los 12 estudiantes pueden presentar 3 pruebas diferentes si a cada prueba le corresponden 4 estudiantes?

Método 1.

Buscamos el número de particiones ordenadas de 12 estudiantes en células que constan de 4 estudiantes cada una. Por el teorema 2.9, hay $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34.650$ de tales particiones.

Método 2.

Hay $\dbinom{12}{4}$ maneras de escoger 4 estudiantes que tomen la primera prueba; a continuación hay $\dbinom{8}{4}$ maneras de escoger 4 estudiantes que tomen la segunda prueba. El resto de estudiantes toma la tercera prueba. O sea que, por todas, hay $\dbinom{12}{4}\cdot\dbinom{8}{4} = 495\cdot 70 = 34.650$ maneras para que los estudiantes presenten las pruebas.

2.27. ¿De cuántas maneras 12 estudiantes pueden repartirse en 3 equipos, A_1, A_2 y A_3, de suerte que cada equipo conste de 4 estudiantes.

Método 1.

Observamos que cada partición $\{A_1, A_2, A_3\}$ de estudiantes puede distribuirse de $3! = 6$ maneras lo mismo que una partición ordenada. Puesto que (ver problema anterior) hay $\dfrac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34.650$ de tales particiones ordenadas, hay $34.650/6 = 5775$ particiones (no ordenadas).

Método 2.

Denotemos por A uno de los estudiantes. Entonces hay $\dbinom{11}{3}$ maneras de escoger los otros 3 estudiantes que estén en el mismo equipo de A. Ahora denotemos por B a un estudiante que no sea del mismo equipo de A; entonces hay $\dbinom{7}{3}$ maneras de escoger, entre los restantes, 3 estudiantes que estén en el mismo equipo de B. Los 4 estudiantes que quedan constituyen el tercer equipo. Así, en total hay $\dbinom{11}{3}\cdot\dbinom{7}{3} = 165\cdot 35 = 5775$ maneras de repartir los estudiantes.

2.28. Probar el teorema 2.9: Sea A compuesto de n elementos y sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros positivos con $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Entonces existen

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}$$

particiones ordenadas diferentes de A de la forma $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ donde A_1 contiene n_1 elementos, A_2 contiene n_2 elementos, ..., y A_r contiene n_r elementos.

Empezamos con los n elementos de A; hay $\dbinom{n}{n_1}$ maneras de seleccionar la célula A_1. En seguida de esto, hay $n - n_1$ elementos que sobran, o sea, la diferencia $A \setminus A_1$, y por consiguiente hay $\dbinom{n-n_1}{n_2}$ maneras de seleccionar A_2. Similarmente, para $i = 3, \ldots, r$, hay $\dbinom{n-n_1-\cdots-n_{i-1}}{n_i}$ maneras de seleccionar A_i. Así hay

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r} \qquad (*)$$

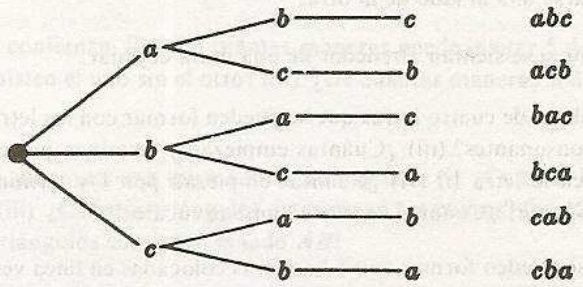
diferentes particiones ordenadas de A. Ahora (*) es igual a

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!\,(n-n_1-\cdots-n_r)!}$$

Pero esto es igual a $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$ puesto que cada numerador después del primero se simplifica con el segundo factor del denominador que le precede y como $(n-n_1-\cdots-n_r)! = 0! = 1$. Entonces el teorema queda probado.

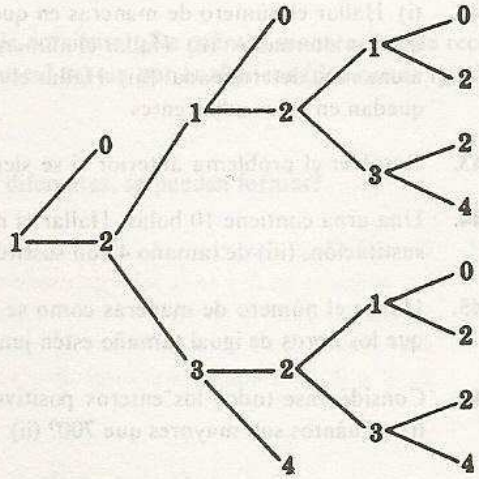
DIAGRAMAS DE ARBOL

2.29. Construir el diagrama de árbol para el número de permutaciones de $\{a, b, c\}$.



A la derecha del diagrama se ordenan las seis permutaciones.

2.30. Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces a lo sumo. En cada juego gana o pierde un dólar. El hombre empieza con un dólar y dejará de jugar si antes de la quinta vez pierde todo su dinero o si gana tres dólares, esto es, si tiene cuatro. Hallar el número de casos en que la apuesta puede ocurrir.



El diagrama de árbol de la derecha, describe el camino en que la apuesta puede suceder. Cada número del diagrama denota el número de dólares que el hombre tiene en ese punto. Observamos que la apuesta puede suceder de 11 maneras diferentes. Obsérvese que él suspenderá la apuesta antes de que los cinco juegos se hayan realizado en solamente tres de los casos.

Problemas propuestos

FACTORIAL

2.31. Calcular: (i) $9!$, (ii) $10!$, (iii) $11!$

2.32. Calcular: (i) $\dfrac{16!}{14!}$, (ii) $\dfrac{14!}{11!}$, (iii) $\dfrac{8!}{10!}$, (iv) $\dfrac{10!}{13!}$.

2.33. Simplificar: (i) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$, (ii) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$, (iii) $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$, (iv) $\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$.

PERMUTACIONES

2.34. (i) ¿Cuántas placas para automóvil pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de 3 dígitos diferentes? (ii) Resolver el problema si el primer dígito no puede ser cero.

2.35. De A a B hay 6 caminos y de B a C 4.

(i) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C pasando por B?

(ii) ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje redondo de A a C pasando por B?

(iii) ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje redondo de A a C sin usar el mismo camino más de una vez?

2.36. Hallar el número de maneras en que 6 personas pueden conducir un tobogán (especie de trineo) si uno de tres debe manejar.

2.37. (i) Hallar el número de maneras en que cinco personas pueden sentarse en una fila. (ii) ¿Cuántas maneras hay si dos de las personas insisten en sentarse una al lado de la otra?

2.38. Resolver el problema anterior si se sientan alrededor de una mesa circular.

2.39. (i) Hallar el número de palabras de cuatro letras que se pueden formar con las letras de la palabra CRISTAL. (ii) ¿Cuántas de ellas contienen sólo consonantes? (iii) ¿Cuántas empiezan y terminan por consonante? (iv) ¿Cuántas empiezan por vocal? (v) ¿Cuántas contienen la letra L? (vi) ¿Cuántas empiezan por T y terminan por vocal? (vii) ¿Cuántas empiezan por T y también contienen S? (viii) ¿Cuántas contienen ambas vocales?

2.40. ¿Cuántas señales diferentes se pueden formar con 8 banderas colocadas en línea vertical, si 4 son rojas, 2 azules y 2 verdes?

2.41. Hallar el número de permutaciones que se pueden formar con todas las letras de cada una de las palabras: (i) barra, (ii) satélites, (iii) proposición, (iv) impropio.

2.42. (i) Hallar el número de maneras en que 4 niños y 4 niñas se pueden sentar en una fila si los hombres y las mujeres deben quedar alternados. (ii) Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente y uno de los niños se sienta siempre junto a una niña determinada. (iii) Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente pero los dos niños mencionados no quedan en sillas adyacentes.

2.43. Resolver el problema anterior si se sientan alrededor de una mesa circular.

2.44. Una urna contiene 10 bolas. Hallar el número de pruebas ordenadas, (i) de tamaño 3 con sustitución, (ii) de tamaño 3 sin sustitución, (iii) de tamaño 4 con sustitución, (iv) de tamaño 5 sin sustitución.

2.45. Hallar el número de maneras como se pueden colocar en un estante 5 libros grandes, 4 medianos y 3 pequeños de modo que los libros de igual tamaño estén juntos.

2.46. Considérense todos los enteros positivos de 3 dígitos diferentes. (Observamos que el 0 no puede ser el primer dígito.) (i) ¿Cuántos son mayores que 700? (ii) ¿Cuántos son impares? (iii) ¿Cuántos son pares? (iv) ¿Cuántos son divisibles por 5?

2.47. (i) Hallar el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con todas las letras de la palabra CAMARA. (ii) ¿Cuántas de ellas principian y terminan por A? (iii) ¿Cuántas tienen 3 A juntas? (iv) ¿Cuántas empiezan con A y terminan con M?

COEFICIENTES DEL BINOMIO Y TEOREMA

2.48. Calcular: (i) $\binom{5}{2}$, (ii) $\binom{7}{3}$, (iii) $\binom{14}{2}$, (iv) $\binom{6}{4}$, (v) $\binom{20}{17}$, (vi) $\binom{18}{15}$.

2.49. Calcular: (i) $\binom{9}{3,5,1}$, (ii) $\binom{7}{3,2,2,0}$, (iii) $\binom{6}{2,2,1,1,0}$.

2.50. Desarrollar y simplificar: (i) $(2x+y^2)^3$, (ii) $(x^2-3y)^4$, (iii) $(\frac{1}{2}a+2b)^5$, (iv) $(2a^2-b)^6$.

2.51. Comprobar que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$.

2.52. Comprobar que $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots\pm\binom{n}{n} = 0$

2.53. Hallar el término del desarrollo $(2x^2-\frac{1}{2}y^3)^8$ que contiene x^8.

2.54. Hallar el término del desarrollo $(3xy^2-z^2)^7$ que contiene y^6.

COMBINACIONES

2.55. Una clase consta de 9 niños y 3 niñas. (i) ¿De cuántas maneras el profesor puede escoger un comité de 4? (ii) ¿Cuántos comités contarán con una niña por lo menos? (iii) ¿Cuántos tendrán una niña exactamente?

2.56. Una señora tiene 11 amigos de confianza. (i) ¿De cuántas maneras puede invitar 5 de ellos a comer? (ii) ¿De cuántas maneras si dos son casados y no asisten el uno sin el otro? (iii) ¿De cuántas maneras si dos de ellos no la van bien y no asisten juntos?

2.57. Hay 10 puntos $A, B, \ldots$ en un plano; en una misma línea no hay tres. (i) ¿Cuántas líneas forman los puntos? (ii) ¿Cuántas líneas no pasan por A o B? (iii) ¿Cuántos triángulos determinan los puntos? (iv) ¿Cuántos triángulos de estos se forman con el punto A? (v) ¿Cuántos triángulos contienen el lado AB?

2.58. Un estudiante tiene que resolver 10 preguntas de 13 en un examen. (i) ¿Cuántas maneras de escoger tiene? (ii) ¿Cuántas, si las dos primeras son obligatorias? (iii) ¿Cuántas, si una de las dos primeras es obligatoria? (iv) ¿Cuántas, si tiene que contestar exactamente 3 de las 5 primeras? (v) ¿Cuántas, si tiene que contestar por lo menos 3 de las 5 primeras?

2.59. A una persona se le reparte una mano de "póker" (5 cartas) de una baraja corriente. ¿De cuántas maneras puede recibir, (i) una escalera flor? (ii) un "póker"? (iii) una escalera? (iv) un par de ases? (v) un par cualquiera (dos cartas iguales)?

2.60. El alfabeto inglés tiene 26 letras de las cuales 5 son vocales.

(i) ¿Cuántas palabras de 5 letras, 3 consonantes diferentes y 2 vocales diferentes, se pueden formar?
(ii) ¿Cuántas de éstas contienen la letra b?
(iii) ¿Cuántas contienen la b y la c?
(iv) ¿Cuántas empiezan por b y contienen c?
(v) ¿Cuántas empiezan por b y terminan por c?
(vi) ¿Cuántas contienen las letras a y b?
(vii) ¿Cuántas empiezan por a y contienen b?
(viii) ¿Cuántas empiezan por b y contienen a?
(ix) ¿Cuántas empiezan por a y terminan por b?
(x) ¿Cuántas contienen las letras a, b y c?

PARTICIONES ORDENADAS Y DESORDENADAS

2.61. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 9 juguetes por igual entre 3 niños?

2.62. ¿De cuántas maneras pueden dividirse por igual 9 estudiantes en tres equipos?

2.63. ¿De cuántas maneras se pueden dividir 10 estudiantes en tres equipos, uno de 4 estudiantes y los otros de 3?

2.64. Hay 12 bolas en una urna. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 3 bolas de la urna, cuatro veces sucesivamente, todas sin sustitución?

2.65. ¿De cuántas maneras se puede repartir un club de 12 miembros en tres comités de 5, 4 y 3 miembros respectivamente?

2.66. ¿De cuántas maneras se pueden repartir n estudiantes en dos equipos que contengan un estudiante por lo menos?

2.67. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 14 hombres en 6 comités en los que dos sean de 3 hombres y los otros de 2?

DIAGRAMAS DE ARBOL

2.68. Construir el diagrama de árbol para el número de permutaciones de $\{a, b, c, d\}$.

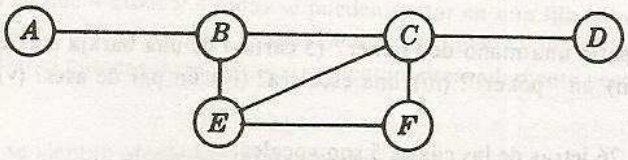
2.69. Hallar el conjunto producto $\{1, 2, 3\} \times \{2, 4\} \times \{2, 3, 4\}$ construyendo el diagrama de árbol apropiado.

2.70. Los equipos A y B juegan en un torneo de baloncesto. El primer equipo que gane dos juegos seguidos o un total de cuatro juegos gana el torneo. Hallar el número de maneras como puede suceder el torneo.

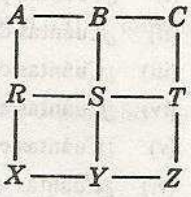
2.71. Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces. Gana o pierde un dólar en cada juego. El hombre empieza con dos dólares y dejará de jugar a la quinta vez si pierde todo su dinero o si gana tres dólares (esto es, complete 5 dólares). Hallar el número de maneras como puede suceder el juego.

2.72. Un hombre está en el origen del eje x y anda un paso unidad a la izquierda o a la derecha. Se detiene después de 5 pasos si avanza 3 o se corre -2. Construir el diagrama de árbol para describir todas las trayectorias posibles que puede seguir.

2.73. En el siguiente diagrama $A, B, \ldots, F$ denotan islas, y las líneas de unión son puentes. El hombre empieza en A y camina de isla en isla. Se detiene para almorzar cuando no puede continuar caminando sin tener que cruzar el mismo puente dos veces. Hallar el número de maneras como puede hacer su recorrido antes de almorzar.



2.74. Considerar el diagrama trazado con nueve puntos $A, B, C, R, S, T, X, Y, Z$. Un hombre empieza en X y se le permite moverse horizontal o verticalmente, un paso cada vez. Se detiene cuando no puede seguir caminando sin pasar por el mismo punto más de una vez. Hallar el número de maneras como puede hacer su recorrido, si primero recorre de X a R. (Por simetría el total de maneras es dos veces lo anterior.)



Respuestas a los problemas propuestos

2.31. (i) 362.880 (ii) 3.628.800 (iii) 39.916.800

2.32. (i) 240 (ii) 2184 (iii) 1/90 (iv) 1/1716

2.33. (i) $n+1$ (ii) $n(n-1) = n^2 - n$ (iii) $1/[n(n+1)(n+2)]$ (iv) $(n-r)(n-r+1)$

2.34. (i) $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468.000$ (ii) $26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421.200$

2.35. (i) $6 \cdot 4 = 24$ (ii) $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 24 \cdot 24 = 576$ (iii) $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$

2.36. $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$

2.37. (i) $5! = 120$ (ii) $4 \cdot 2! \cdot 3! = 48$

2.38. (i) $4! = 24$ (ii) $2!\,3! = 12$

2.39. (i) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ (iii) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 400$ (v) $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$ (vii) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$
(ii) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ (iv) $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 240$ (vi) $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ (viii) $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240$

2.40. $\dfrac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420$

2.41. (i) $\dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$ (ii) $\dfrac{9!}{2!\,2!\,2!} = 45.360$ (iii) $\dfrac{11!}{2!\,3!\,2!} = 1.663.200$ (iv) $\dfrac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5040$

2.42. (i) $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ (ii) $2 \cdot 7 \cdot 3! \cdot 3! = 504$ (iii) $1152 - 504 = 648$

2.43. (i) $3! \cdot 4! = 144$ (ii) $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ (iii) $144 - 72 = 72$

2.44. (i) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (iii) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$
(ii) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (iv) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240$

2.45. $3!\,5!\,4!\,3! = 103.680$

2.46. (i) $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$ (ii) $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$
(iii) $9 \cdot 8 \cdot 1$ 72 terminan en 0; y $8 \cdot 8 \cdot 4$ 256 terminan en los otros dígitos pares; por lo tanto, en total, $72 + 256 = 328$ son pares.
(iv) $9 \cdot 8 \cdot 1$ 72 terminan en 0; y $8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$ terminan en 5; o sea que, por todos, $72 + 64 = 136$ son divisibles por 5.

2.47. (i) $\dfrac{6!}{3!} = 120$ (ii) $4! = 24$ (iii) $4 \cdot 3! = 24$ (iv) $\dfrac{4!}{2!} = 12$

2.48. (i) 10 (ii) 35 (iii) 91 (iv) 15 (v) 1140 (vi) 816

2.49. (i) 504 (ii) 210 (iii) 180

2.50. (i) $8x^3 + 12x^2y^2 + 6xy^4 + y^6$
(ii) $x^8 - 12x^6y + 54x^4y^2 - 108x^2y^3 + 81y^4$
(iii) $a^5/32 + 5a^4b/8 + 5a^3b^2 + 20a^2b^3 + 40ab^4 + 32b^5$
(iv) $64a^{12} - 192a^{10}b + 240a^8b^2 - 160a^6b^3 + 60a^4b^4 - 12a^2b^5 + b^6$

2.51. *Sugerencia:* Desarrollar $(1 + 1)^n$. **2.53.** $70x^8y^{12}$

2.52. *Sugerencia:* Desarrollar $(1 - 1)^n$. **2.54.** $945x^3y^6z^8$

2.55. (i) $\binom{12}{4} = 495$, (ii) $\binom{12}{4} - \binom{9}{4} = 369$, (iii) $3 \cdot \binom{9}{3} = 252$

2.56. (i) $\binom{11}{5} = 462$, (ii) $\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 210$, (iii) $\binom{9}{5} + 2 \cdot \binom{9}{4} = 378$

2.57. (i) $\binom{10}{2} = 45$, (ii) $\binom{8}{2} = 28$, (iii) $\binom{10}{3} = 120$, (iv) $\binom{9}{2} = 36$, (v) 8

2.58. (i) $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$ (iv) $\binom{5}{3}\binom{8}{7} = 80$
(ii) $\binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165$ (v) $\binom{5}{3}\binom{8}{7} + \binom{5}{4}\binom{8}{6} + \binom{5}{5}\binom{8}{5} = 276$
(iii) $2 \cdot \binom{11}{9} = 2 \cdot \binom{11}{2} = 110$

2.59. (i) $4 \cdot 10 = 40$, (ii) $13 \cdot 48 = 624$, (iii) $10 \cdot 4^5 - 40 = 10.200$. (Sustraemos el número de escaleras flor.)
(iv) $\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 84.480$, (v) $13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 1.098.240$

2.60. (i) $\binom{21}{3}\binom{5}{2} \cdot 5! = 1.596.000$ (v) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 1140$ (ix) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 3! = 4560$
(ii) $\binom{20}{2}\binom{5}{2} \cdot 5! = 228.000$ (vi) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 5! = 91.200$ (x) $4 \cdot 19 \cdot 5! = 9120$
(iii) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! = 22.800$ (vii) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 4! = 18.240$
(iv) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 4! = 4560$ (viii) 18.240 (lo mismo que el (vii))

2.61. $\dfrac{9!}{3!\,3!\,3!} = 1680$

2.62. $1680/3! = 280$ o $\dbinom{8}{2}\dbinom{5}{2} = 280$

2.63. $\dfrac{10!}{4!\,3!\,3!} \cdot \dfrac{1}{2!} = 2100$ o $\dbinom{10}{4}\dbinom{5}{2} = 2100$

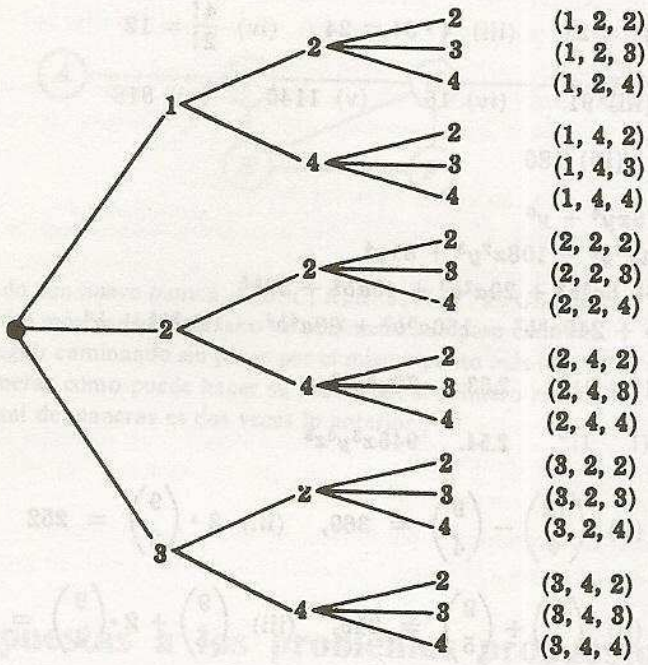
2.64. $\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!} = 369.600$

2.65. $\dfrac{12!}{5!\,4!\,3!} = 27.720$

2.66. $2^{n-1} - 1$

2.67. $\dfrac{14!}{3!\,3!\,2!\,2!\,2!\,2!} \cdot \dfrac{1}{2!\,4!} = 3.153.150$

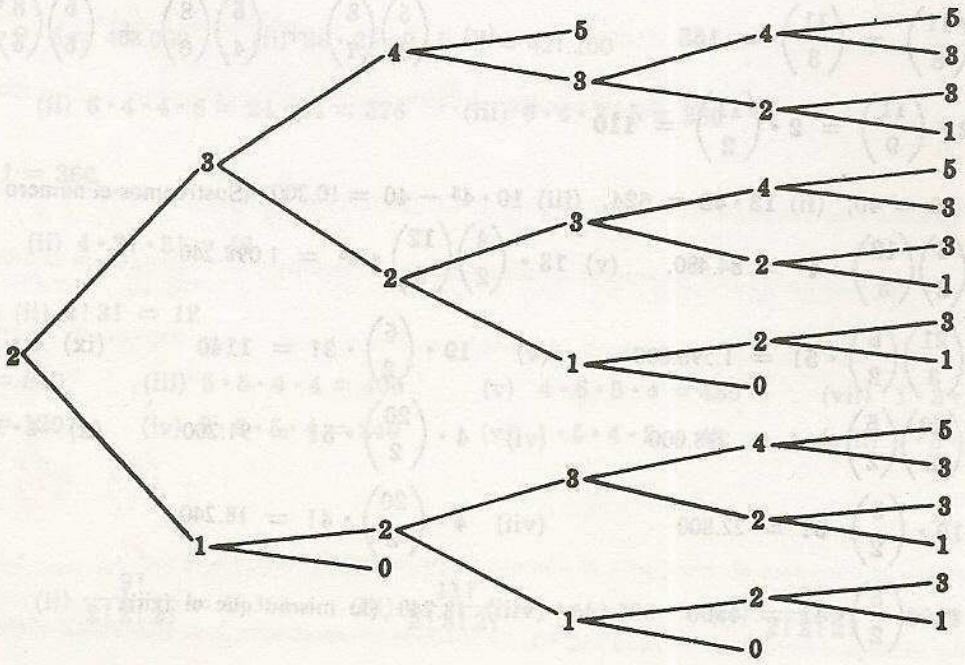
2.69.



Los dieciocho elementos del conjunto producto están listados a la derecha del diagrama de árbol.

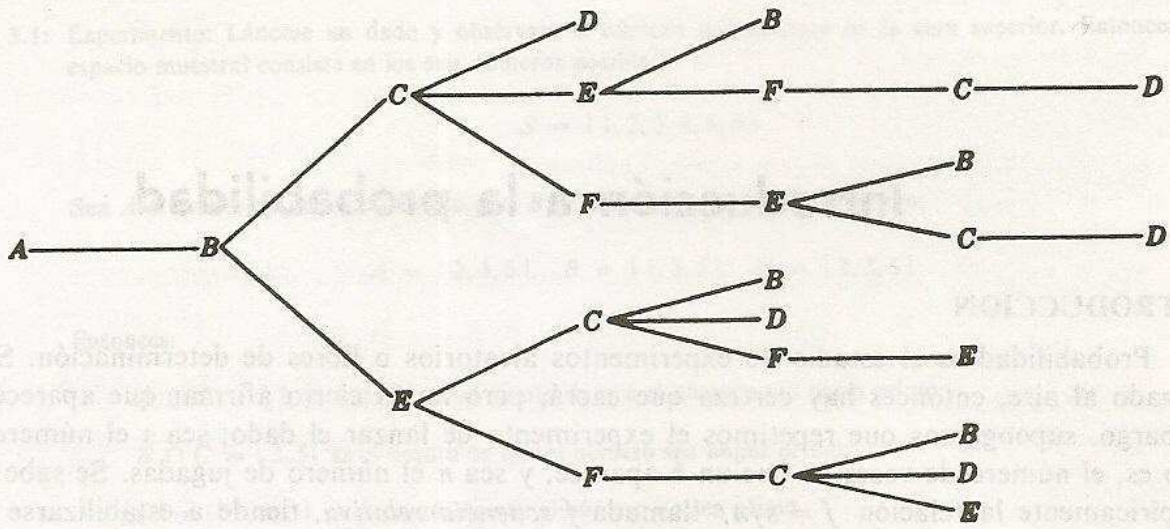
2.70. 14 maneras

2.71. 20 maneras (como se ven en el siguiente diagrama):



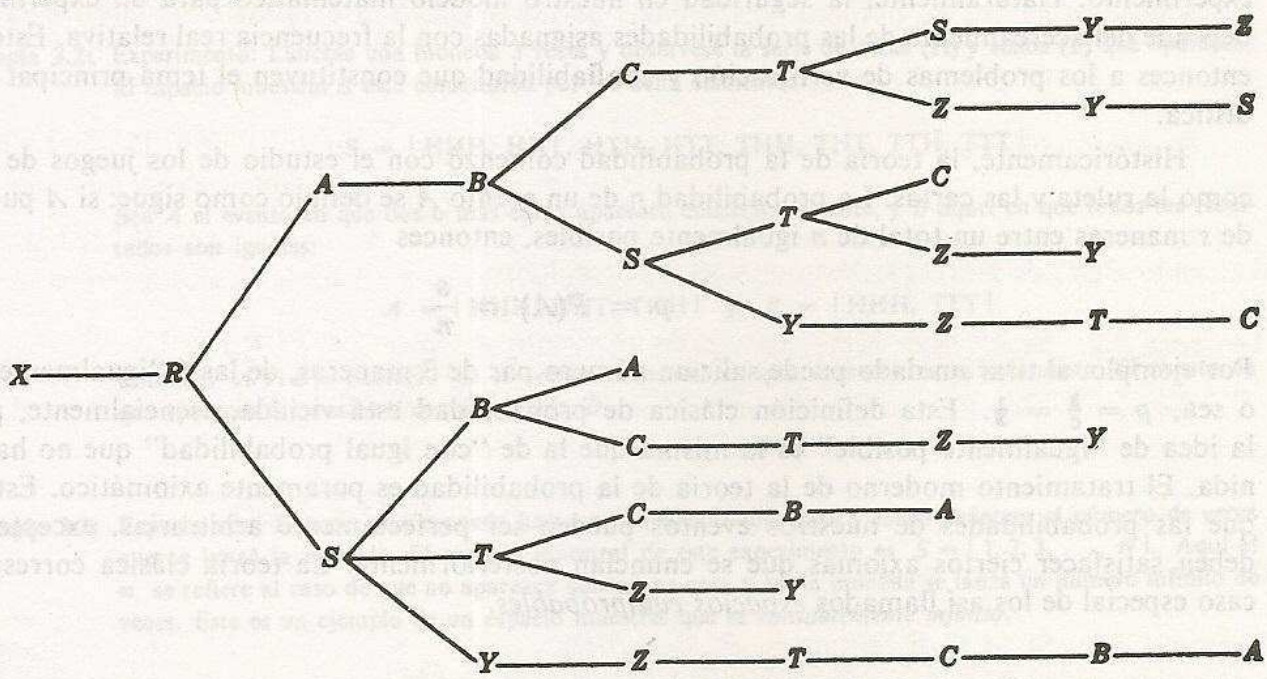
2.72. *Sugerencia:* El árbol es esencialmente lo mismo que el árbol del problema anterior.

2.73. El diagrama de árbol es el siguiente:



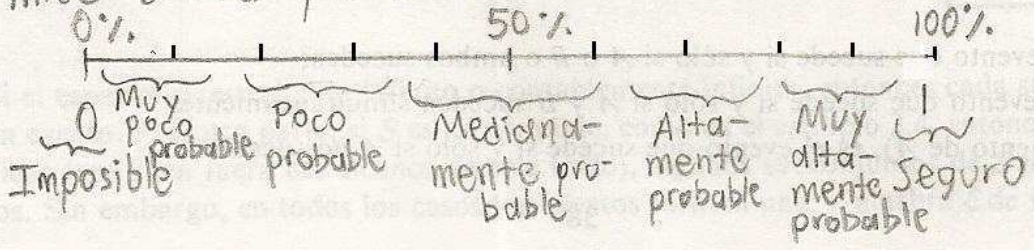
Tiene once maneras de hacer su recorrido. Observar que debe comer en *B*, *D* o *E*.

2.74. El diagrama de árbol apropiado es el siguiente:



Hay 10 recorridos diferentes. (Observar que solamente en 4 de ellos se cubren todos los nueve puntos.)

Probabilidad: Medida de la posibilidad de ocurrencia de un fenómeno o evento aleatorio (al azar). Matemáticamente es un número entre 0 y 1 (o 0% y 100%) que mide dicha posibilidad de acuerdo a la escala:



Capítulo 3

Introducción a la probabilidad

INTRODUCCION

Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación. Si un dado es lanzado al aire, entonces hay certeza que caerá, pero no es cierto afirmar que aparecerá un 6. Sin embargo, supongamos que repetimos el experimento de lanzar el dado; sea s el número de aciertos, esto es, el número de veces en que un 6 aparece, y sea n el número de jugadas. Se sabe entonces que empíricamente la relación $f = s/n$, llamada *frecuencia relativa*, tiende a estabilizarse a la larga, o sea que se aproxima a un límite. Esta estabilidad es la base de la teoría de la probabilidad.

En teoría de probabilidad, definimos un modelo matemático de los fenómenos anteriores asignando "probabilidades" (o: valores límites de las frecuencias relativas) a los "eventos" asociados con un experimento. Naturalmente, la seguridad en nuestro modelo matemático para un experimento dado depende del acercamiento de las probabilidades asignadas con la frecuencia real relativa. Esto da origen entonces a los problemas de verificación y confiabilidad que constituyen el tema principal de la estadística.

Históricamente, la teoría de la probabilidad comenzó con el estudio de los juegos de azar, tales como la ruleta y las cartas. La probabilidad p de un evento A se definió como sigue: si A puede ocurrir de s maneras entre un total de n igualmente posibles, entonces

$$p = P(A) = \frac{s}{n}$$

Por ejemplo, al tirar un dado puede salir un número par de 3 maneras, de las 6 "igualmente posibles"; o sea, $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Esta definición clásica de probabilidad está viciada, esencialmente, puesto que la idea de "igualmente posible" es la misma que la de "con igual probabilidad" que no ha sido definida. El tratamiento moderno de la teoría de la probabilidad es puramente axiomático. Esto significa que las probabilidades de nuestros eventos pueden ser perfectamente arbitrarias, excepto que ellas deben satisfacer ciertos axiomas que se enuncian posteriormente. La teoría clásica corresponderá al caso especial de los así llamados *espacios equiprobables*.

ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

El conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento dado se llama el *espacio muestral*. Un resultado particular, esto es, un elemento de S, se llama un *punto muestral* o *muestra*. Un *evento* A es un conjunto de resultados o, en otras palabras, un subconjunto del espacio muestral S. El evento $\{a\}$ que consta de una muestra simple $a \in S$ se llama *evento elemental*. El conjunto vacío $\emptyset$ y S de por sí son eventos; el $\emptyset$ algunas veces se denomina el evento *imposible* (o imposibilidad), y S el evento *cierto* o *seguro*.

Podemos combinar eventos para formar nuevos eventos, utilizando las diferentes operaciones con conjuntos:

(i) $A \cup B$ es el evento que sucede si y sólo si A o B o ambos suceden;

(ii) $A \cap B$ es el evento que sucede si y sólo si A y B suceden simultáneamente;

(iii) A^c, (complemento de A), es el evento que sucede si y sólo si A no sucede.

Dos eventos A y B son llamados *mutuamente exclusivos* si son disyuntos, esto es, si $A \cap B = \emptyset$. En otras palabras, son mutuamente exclusivos si no pueden suceder simultáneamente.

Ejemplo 3.1: Experimento: Láncese un dado y obsérvese el número que aparece en la cara superior. Entonces el espacio muestral consiste en los seis números posibles:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sea A el evento de salir un número par, B de salir impar y C de salir primo:

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{2, 3, 5\}$$

Entonces:

$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ es el evento de que el número sea par o primo;

$B \cap C = \{3, 5\}$ es el evento de que el número sea impar primo;

$C^c = \{1, 4, 6\}$ es el evento de que el número no sea primo.

Obsérvese que A y B son mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$; en otras palabras, un número par y un impar no pueden ocurrir simultáneamente.

Ejemplo 3.2: Experimento: Láncese una moneda 3 veces y obsérvese la serie de caras (H) y sellos (T) que aparecen. El espacio muestral S está constituido por los ocho elementos:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

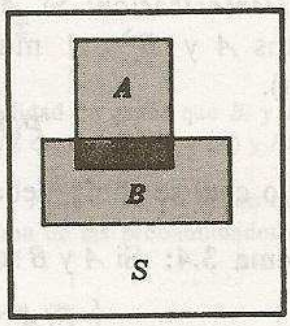
Sea A el evento en que dos o más caras aparecen consecutivamente, y B aquel en que todos los resultados son iguales:

$$A = \{HHH, HHT, THH\} \quad y \quad B = \{HHH, TTT\}$$

Entonces $A \cap B = \{HHH\}$ es el evento elemental en que aparecen caras solamente. El evento en que aparecen 5 caras es el coniunto vacío $\emptyset$.

Ejemplo 3.3: Experimento: Láncese una moneda hasta que aparezca una cara y luego cuéntese el número de veces que se lanzó la moneda. El espacio muestral de este experimento es $S = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Aquí el ∞ se refiere al caso de que no aparezca nunca una cara y así la moneda se lanza un número infinito de veces. Este es un ejemplo de un espacio muestral que es *contablemente infinito*.

Ejemplo 3.4: Experimento: Sea un lápiz que cae de punta, en una caja rectangular y obsérvese el punto del fondo de la caja donde el lápiz toca primero. Aquí S está formado por todos los puntos de la superficie del fondo. Representemos estos puntos por el área rectangular dibujada a la derecha. Sean A y B los eventos en que el lápiz cae en las respectivas áreas ilustradas en la figura. Este es un ejemplo de un espacio muestral que no es finito ni siquiera contablemente infinito, esto es, que es no contable.



Nota: Si el espacio muestral S es infinito o contablemente infinito, entonces cada subconjunto de S es un evento. Por otra parte, si S es no contable, como en el ejemplo 3.4, entonces por razones técnicas (que caen fuera del alcance de este texto), algunos subconjuntos de S no pueden ser eventos. Sin embargo, en todos los casos los eventos forman una σ-álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de S.

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Sea S un espacio muestral, sea $\mathcal{E}$ la clase de eventos y sea P una función de valores reales definida en $\mathcal{E}$. Entonces P se llama *función de probabilidad*, y $P(A)$ es llamada la *probabilidad* del evento A si se cumplen los siguientes axiomas:

[$\mathbf{P}_1$] Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

[$\mathbf{P}_2$] $P(S) = 1$.

[$\mathbf{P}_3$] Si A y B son eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

[$\mathbf{P}_4$] Si $A_1, A_2, \ldots$ es una serie de eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Las siguientes observaciones conciernen al orden en que están los axiomas [$\mathbf{P}_3$] y [$\mathbf{P}_4$]. Ante todo, al utilizar [$\mathbf{P}_3$] y la inducción matemática podemos probar que para eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \qquad (*)$$

Hacemos énfasis en que [$\mathbf{P}_4$] no proviene de [$\mathbf{P}_3$] ni siquiera (*) se cumple para todo entero positivo n. Sin embargo, si el espacio muestral S es finito, entonces claramente el axioma [$\mathbf{P}_4$] es superfluo

Ahora probamos un número de teoremas que se deducen directamente de nuestros axiomas.

Teorema 3.1: Si $\emptyset$ es el conjunto vacío, entonces $P(\emptyset) = 0$.

Demostración: Sea A un conjunto; entonces A y $\emptyset$ son disyuntos y $A \cup \emptyset = A$. Por [$\mathbf{P}_3$],

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

Restando $P(A)$ de ambos lados obtenemos el resultado.

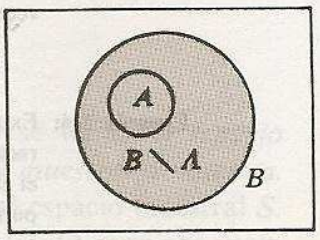
Teorema 3.2: Si A^c es el complemento de un evento A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demostración: El espacio muestral S se puede descomponer en los eventos A y A^c mutuamente exclusivos, esto es, $S = A \cup A^c$. Por [$\mathbf{P}_2$] y [$\mathbf{P}_3$] se obtiene

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

de lo cual se desprende el resultado.

Teorema 3.3: Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.



B sombreado.

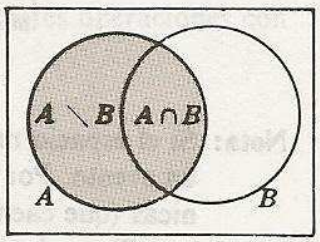
Demostración: Si $A \subset B$, entonces B se puede descomponer en los eventos A y $B \setminus A$ mutuamente exclusivos (como se ilustra a la derecha).
Así

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Con lo cual se comprueba el enunciado puesto que $P(B \setminus A) \geq 0$.

Teorema 3.4: Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$



A sombreado.

Demostración: A se puede descomponer en los eventos mutuamente exclusivos $A \setminus B$ y $A \cap B$; esto es, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
Por consiguiente, por [$\mathbf{P}_3$],

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

de lo cual se obtiene el resultado.

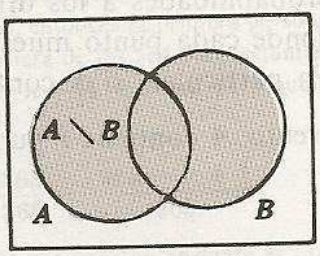
Teorema 3.5: Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: Obsérvese que $A \cup B$ se puede descomponer en los eventos $A \setminus B$ y B mutuamente exclusivos; esto es, $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Entonces por [$\mathbf{P}_3$] y el teorema 3.4,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

que es el resultado buscado.



$A \cup B$ sombreado.

Aplicando el teorema anterior por segunda vez (problema 3.23) obtenemos el

Corolario 3.6: Para los eventos A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

Sea S un espacio muestral finito; digamos, $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Un espacio finito de probabilidad se obtiene al asignar a cada punto $a_i \in S$ un número real p_i, llamado *probabilidad* de a_i, que satisface las propiedades siguientes:

(i) cada p_i es no negativo, $p_i \geq 0$

(ii) la suma de los p_i es uno, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

La *probabilidad* $P(A)$ de un evento A, se define entonces como la suma de las probabilidades de los puntos A. Por conveniencia de símbolos escribimos $P(a_i)$ en lugar de $P(\{a_i\})$.

Ejemplo 3.5: Láncense tres monedas y obsérvense el número de caras que resulten; entonces el espacio muestral es $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Obtenemos un espacio de probabilidad por medio de las siguientes asignaciones

$$P(0) = \tfrac{1}{8}, \quad P(1) = \tfrac{3}{8}, \quad P(2) = \tfrac{3}{8} \quad \text{and} \quad P(3) = \tfrac{1}{8}$$

puesto que cada probabilidad es no negativa y la suma de las probabilidades es 1. Sea A el evento en que aparece una cara por lo menos y sea B el evento en que aparecen todas caras o todos sellos:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{0, 3\}$$

Entonces, por definición,

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}$$

y

$$P(B) = P(0) + P(3) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}$$

Ejemplo 3.6: Tres caballos A, B y C intervienen en una carrera; A tiene doble posibilidad de ganar que B; y B, el doble de ganar que C. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades de ganar, esto es, $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$?

Sea $P(C) = p$; como B tiene doble probabilidad de ganar que C, $P(B) = 2p$; y puesto que A tiene el doble de B, $P(A) = 2P(B) = 2(2p) = 4p$. Ahora como la suma de las probabilidades debe ser 1; entonces

$$p + 2p + 4p = 1 \quad \text{ó} \quad 7p = 1 \quad \text{o} \quad p = \tfrac{1}{7}$$

En consecuencia,

$$P(A) = 4p = \tfrac{4}{7}, \quad P(B) = 2p = \tfrac{2}{7}, \quad P(C) = p = \tfrac{1}{7}$$

Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que B o C ganen, o sea, $P(\{B, C\})$? Por definición

$$P(\{B, C\}) = P(B) + P(C) = \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{3}{7}$$

ESPACIOS FINITOS EQUIPROBABLES

Frecuentemente, las características físicas de un experimento sugieren que se asignen iguales probabilidades a los diferentes resultados del espacio muestral. Un espacio finito S de probabilidad, donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad, se llamará *espacio equiprobable* o *uniforme*. En particular, si S contiene n puntos entonces la probabilidad de cada punto es $1/n$. Además, si un evento A contiene r puntos entonces su probabilidad es $r \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$. En otras palabras,

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } S} = \frac{r}{n} \; ; \quad r \leq n, \; n > 0$$

o

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras en que el evento } A \text{ puede suceder}}{\text{número de maneras en que el espacio muestral } S \text{ puede suceder}}$$

Hacemos hincapié en que la fórmula anterior para $P(A)$ puede utilizarse solamente con respecto a un espacio equiprobable, y no puede usarse en general.

La expresión "al azar" se usará solamente respecto a un espacio equiprobable; formalmente, la proposición "escoger un punto al azar de un conjunto S" significa que S es un espacio equiprobable, esto es, que cada punto muestral de S tiene la misma probabilidad.

Ejemplo 3.7: Selecciónese una carta al azar de una baraja corriente de 52 cartas. Llamemos

$$A = \{\text{espadas}\}$$

y

$$B = \{\text{figuras, es decir J, Q o K}\}$$

Calculemos $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. Como se trata de un espacio equiprobable,

$$P(A) = \frac{\text{número de espadas}}{\text{número de cartas}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\% \qquad P(B) = \frac{\text{número de figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} = 0.2308 = 23.08\%$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{número de espadas que son figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{3}{52} = 0.0577 = 5.77\%$$

Ejemplo 3.8: Sean 2 artículos escogidos al azar de un grupo de 12 de los cuales 4 son defectuosos. Sea

$$A = \{\text{dos artículos defectuosos}\} \quad \text{y} \quad B = \{\text{dos artículos no defectuosos}\}$$

Hallar $P(A)$ y $P(B)$. Ahora

S puede suceder de $\binom{12}{2}$ = 66 maneras, o número de veces en que se pueden escoger 2 artículos entre 12;

A puede suceder de $\binom{4}{2}$ = 6 maneras, o número de veces en que se pueden escoger 2 artículos defectuosos entre 4 defectuosos;

B puede suceder de $\binom{8}{2}$ = 28 maneras, o número de veces en que se pueden escoger 2 artículos no defectuosos entre 8 no defectuosos.

Por consiguiente, $P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$ y $P(B) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$.

Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos un artículo sea defectuoso? Ahora

$$C = \{\text{un artículo por lo menos es defectuoso}\}$$

es el complemento de B; esto es, $C = B^c$ Así, por el teorema 3.2,

$$P(C) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

La *ventaja* con que un evento de probabilidad p sucede, se define como la relación $p : (1 - p)$. Así, la ventaja de que por lo menos un artículo sea defectuoso es $\frac{19}{33} : \frac{14}{33}$ ó 19 : 14 que se lee "19 a 14".

Ejemplo 3.9: (Problema clásico del cumpleaños.) Se desea hallar la probabilidad p de que n personas tengan fechas diferentes de cumpleaños. Para resolver este problema, no tenemos en cuenta los años bisiestos y suponemos que el cumpleaños de una persona puede caer en un día con igual probabilidad.

Puesto que hay n personas y 365 días diferentes, hay 365^n maneras de que n personas puedan cumplir años. Por otra parte, si las n personas cumplen en fechas distintas, entonces la primera persona puede nacer en cualquier día de los 365, la segunda puede nacer en cualquiera de los 364 días restantes, la tercera, en los 363 restantes, etc. Así hay $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)$ maneras para que n personas tengan fechas diferentes de cumpleaños. Por consiguiente,

$$p = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365}$$

Se puede comprobar que para $n \geq 23$, $p < \frac{1}{2}$; en otras palabras, de 23 personas en adelante es más posible que por los menos dos de ellas tengan el mismo día de cumpleaños, a que todas difieran de fecha.

ESPACIOS MUESTRALES INFINITOS

Sea S un espacio muestral infinito contable; es decir, $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Como en el caso finito, obtenemos un espacio de probabilidad asignando a cada $a_i \in S$ un número real p_i, llamado su probabilidad, tal que

$$\text{(i)} \quad p_i \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)} \quad p_1 + p_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

La probabilidad $P(A)$ de un evento A es entonces la suma de las probabilidades de sus puntos.

Ejemplo 3.10: Considérese el espacio muestral $S = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ del experimento de lanzar una moneda hasta que aparezca una cara; aquí n denota el número de veces en que se lanza la moneda. Un espacio de probabilidad se obtiene designando

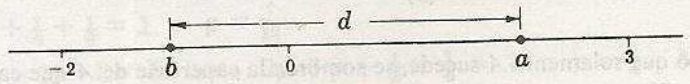
$$p(1) = \tfrac{1}{2}, \quad p(2) = \tfrac{1}{4}, \quad \ldots, \quad p(n) = 1/2^n, \quad \ldots, \quad p(\infty) = 0$$

Los únicos espacios muestrales no contables S que consideraremos aquí son aquellos de medida geométrica finita $m(S)$ tales como longitud, área o volumen, y en los cuales un punto se selecciona al azar. La probabilidad de un evento A, esto es, aquella en que el punto seleccionado pertenece a A, es entonces la relación de $m(A)$ a $m(S)$; o sea,

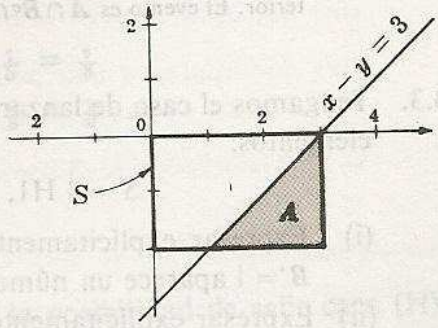
$$P(A) = \frac{\text{longitud de } A}{\text{longitud de } S} \quad \text{o} \quad P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} \quad \text{o} \quad P(A) = \frac{\text{volumen de } A}{\text{volumen de } S}$$

Se dice que un espacio de probabilidad tal es *uniforme*.

Ejemplo 3.11: Sobre la línea real $\mathbf{R}$, se seleccionan al azar los puntos a y b tales que $-2 \leq b \leq 0$ y $0 \leq a \leq 3$, como se muestra luego. Hallar la probabilidad p para que la distancia d entre a y b sea mayor que 3.



El espacio muestral consta de todas las parejas ordenadas (a, b) y forma así la región rectangular que se indica en el diagrama adjunto. Por otra parte, el conjunto A de puntos (a, b) para los cuales $d = a - b > 3$ consta de aquellos puntos de S que caen debajo de la línea $x - y = 3$ y forman por lo tanto la superficie sombreada del diagrama. En consecuencia



$$p = P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

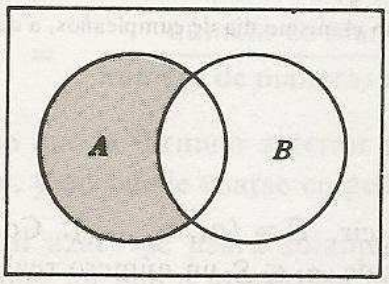
Nota: Un espacio de probabilidad finito o infinito contable se dice que es *discreto*, y un espacio no contable se dice que es *no discreto*.

Problemas resueltos

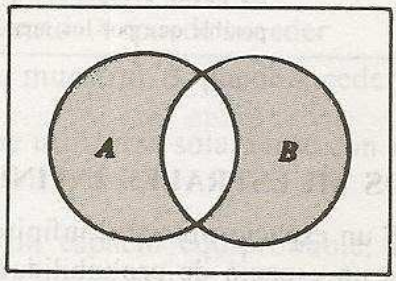
ESPACIOS MUESTRALES Y EVENTOS

3.1. Sean los eventos A y B. Hállese una expresión y represéntese el diagrama de Venn para el evento en que: (i) A ocurre pero B no, esto es, sucede A solamente; (ii) A o B suceden, pero no ambos, esto es, sucede exactamente uno de los dos eventos.

(i) Puesto que A pero no B sucede, se sombrea la superficie de A exterior a B como en la figura (a) indicada. Observamos que B^c (complemento de B), sucede, desde que B no suceda; esto es, A y B^c suceden; en otras palabras, el evento es $A \cap B^c$



Sucede A pero no B.
(a)

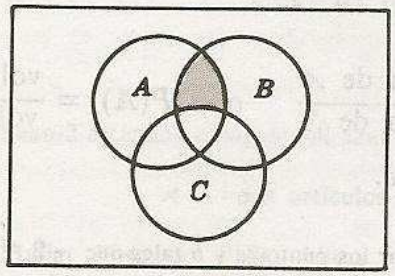


Sucede uno de los dos A o B, pero no ambos.
(b)

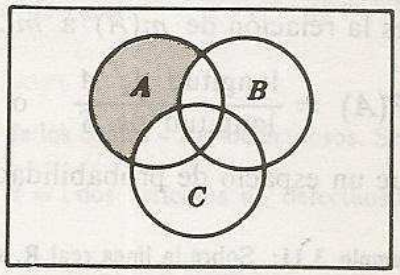
(ii) Puesto que sucede A o B, pero no ambos, se sombrea la superficie de A y B salvo su intersección como en la figura (b) anterior. El evento es equivalente a A, si B no sucede; o a B, si A no sucede. Ahora, como en el caso (i), A, pero no B es el evento $A \cap B^c$; y B, pero no A es el evento $B \cap A^c$. Entonces el evento dado es $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

3.2. Sean los eventos A, B y C. Hallar una expresión y representar el diagrama de Venn para el evento en que, (i) suceden A y B pero no C, (ii) sucede A solamente.

(i) Puesto que A y B pero no C suceden, se sombrea la intersección de A y B que cae fuera de C, como en la figura (a) indicada luego. El evento es $A \cap B \cap C^c$.



Suceden A y B pero no C.
(a)



Sucede A solamente.
(b)

(ii) Puesto que solamente A sucede, se sombrea la superficie de A que cae fuera de B y de C, como en la figura (b) anterior. El evento es $A \cap B^c \cap C^c$.

3.3. Tengamos el caso de lanzar una moneda y un dado; sea el espacio muestral S que consta de doce elementos:

$$S = \{ H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5,\ H6,\ T1,\ T2,\ T3,\ T4,\ T5,\ T6 \}$$

(i) Expresar explícitamente los siguientes eventos: $A = \{$aparecen caras y un número par$\}$, $B = \{$aparece un número primo$\}$, $C = \{$aparecen sellos y un número impar$\}$.

(ii) Expresar explícitamente el evento en que: (a) A o B suceden, (b) B y C suceden, (c) sucede B solamente.

(iii) ¿Cuáles de los sucesos A, B y C son mutuamente exclusivos?

(i) Para obtener A, escogemos aquellos elementos de S que constan de una cara H y un número par: $A = \{H2, H4, H6\}$.

Para obtener B, escogemos aquellos puntos de S que constan de un número primo: $B = \{H2, H3, H5, T2, T3, T5\}$.

Para obtener C, escogemos aquellos puntos de S que constan de un sello T y un número impar: $C = \{T1, T3, T5\}$.

(ii) (*a*) A o $B = A \cup B = \{H2, H4, H6, H3, H5, T2, T3, T5\}$

(*b*) B y $C = B \cap C = \{T3, T5\}$

(*c*) Escoger aquellos elementos de B que no caen en A ni en C: $B \cap A^c \cap C^c = \{H3, H5, T2\}$.

(iii) A y C son mutuamente exclusivos puesto que $A \cap C = \emptyset$.

ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

3.4. Supongamos un espacio muestral S que consta de 4 elementos: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. ¿Qué función define un espacio de probabilidad S?

(i) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{5}$.

(ii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{2}$.

(iii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{8}$, $P(a_4) = \frac{1}{8}$.

(iv) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = 0$.

(i) Como la suma de los valores de los puntos muestrales es mayor que uno, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$, la función no define un espacio de probabilidad S.

(ii) Como $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, número negativo, la función no define un espacio de probabilidad S.

(iii) Como cada valor es no negativo, y la suma de los valores es uno, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$, la función define un espacio de probabilidad S.

(iv) Los valores son no negativos y suman uno; por lo tanto la función define un espacio de probabilidad S.

3.5. Sea $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, y sea P una función de probabilidad de S.

(i) Hallar $P(a_1)$ si $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$.

(ii) Hallar $P(a_1)$ y $P(a_2)$ si $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$ y $P(a_1) = 2P(a_2)$.

(iii) Hallar $P(a_1)$ si $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{2}$ y $P(a_2) = \frac{1}{3}$.

(i) Sea $P(a_1) = p$. Entonces para que P sea una función de probabilidad, la suma de las probabilidades de los puntos muestrales debe ser uno: $p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1$ o $p = \frac{7}{18}$.

(ii) Sea $P(a_2) = p$, entonces $P(a_1) = 2p$. Por lo tanto $2p + p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ o $p = \frac{1}{6}$. Así $P(a_2) = \frac{1}{6}$ y $P(a_1) = \frac{1}{3}$.

(iii) Sea $P(a_1) = p$.

$$P(a_3) = P(\{a_2, a_3\}) - P(a_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(a_4) = P(\{a_2, a_4\}) - P(a_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Entonces $p + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ o $p = \frac{1}{6}$, esto es, $P(a_1) = \frac{1}{6}$.

3.6. Una moneda está cargada (aumentada de peso) de modo que la posibilidad de salir cara (H) sea el doble que la de sello (T). Hallar $P(\mathrm{T})$ y $P(\mathrm{H})$.

Sea $P(\mathrm{T}) = p$; entonces $P(\mathrm{H}) = 2p$. Ahora establecemos la suma de probabilidades, igual a uno: $p + 2p = 1$ o $p = \frac{1}{3}$. Así $P(\mathrm{T}) = p = \frac{1}{3}$ y $P(\mathrm{H}) = 2p = \frac{2}{3}$.

3.7. Dos hombres, h_1 y h_2, y tres mujeres, m_1, m_2, m_3, intervienen en un torneo de ajedrez. Los del mismo sexo tienen iguales probabilidades de ganar pero cada hombre tiene el doble de posibilidades de ganar que una mujer. (i) Hallar la probabilidad de que una mujer gane el torneo. (ii) Si h_1 y m_1 son casados, hallar la probabilidad que uno de ellos gane el torneo.

Sea $P(m_1) = p$; entonces $P(m_2) = P(m_3) = p$ y $P(h_1) = P(h_2) = 2p$. Luego designemos por uno la suma de las probabilidades de los cinco puntos muestrales: $p + p + p + 2p = 1$ o $p = \frac{1}{7}$.

Buscamos, (i) $P(\{m_1, m_2, m_3\})$ y (ii) $P(\{h_1, m_1\})$. Entonces por definición,

$$P(\{m_1, m_2, m_3\}) = P(m_1) + P(m_2) + P(m_3) = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{3}{7}$$

$$P(\{h_1, m_1\}) = P(h_1) + P(m_1) = \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{3}{7}$$

3.8. Sea un dado cargado tal que la probabilidad de salir un número cuando se lanza el dado es proporcional a dicho número (por ejemplo, 6 tiene el doble de probabilidad de salir que 3). Sea $A = \{$número par$\}$, $B = \{$número primo$\}$, $C = \{$número impar$\}$.

(i) Describir el espacio de probabilidad, esto es, hallar la probabilidad de cada punto muestral.

(ii) Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

(iii) Hallar la probabilidad de que: (*a*) salga un número par o primo; (*b*) salga un número impar primo; (*c*) suceda A pero no B.

(i) Sea $P(1) = p$. Entonces $P(2) = 2p$, $P(3) = 3p$, $P(4) = 4p$, $P(5) = 5p$ y $P(6) = 6p$. Como la suma de las probabilidades debe ser uno, obtenemos $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ o $p = 1/21$. Así

$$P(1) = \tfrac{1}{21}, \quad P(2) = \tfrac{2}{21}, \quad P(3) = \tfrac{1}{7}, \quad P(4) = \tfrac{4}{21}, \quad P(5) = \tfrac{5}{21}, \quad P(6) = \tfrac{2}{7}$$

(ii) $P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{4}{7}$, $\quad P(B) = P(\{2,3,5\}) = \frac{10}{21}$, $\quad P(C) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{7}$.

(iii) (*a*) El evento de que salga un número par o primo es $A \cup B = \{2, 4, 6, 3, 5\}$, o que 1 no salga. Así,

$$P(A \cup B) = 1 - P(1) = \tfrac{20}{21}.$$

(*b*) El evento de que salga un número primo impar es $B \cap C = \{3, 5\}$. Así, $P(B \cap C) = P(\{3,5\}) = \frac{8}{21}$.

(*c*) El evento en que sucede A pero no B es $A \cap B^c = \{4, 6\}$. Por lo tanto $P(A \cap B^c) = P(\{4,6\}) = \frac{10}{21}$.

ESPACIOS FINITOS EQUIPROBABLES

3.9. Determinar la probabilidad p de cada evento:

(i) que salga un número par al lanzar un dado normal;

(ii) que resulte un rey al sacar una carta de una baraja corriente de 52 cartas;

(iii) que aparezca por lo menos un sello al lanzar tres monedas normales;

(iv) que aparezca una bola blanca al sacar una sola bola de una urna que contiene 4 blancas, 3 rojas y 5 bolas azules.

(i) El evento puede ocurrir de tres maneras (2, 4 ó 6) de 6 casos igualmente posibles; por consiguiente $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ii) Hay 4 reyes en las 52 cartas; por lo tanto $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(iii) Si consideramos las monedas marcadas, entonces hay 8 casos igualmente posibles: HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT. Solamente el primer caso no es favorable para el evento deseado; por consiguiente $p = \frac{7}{8}$.

(iv) Hay $4 + 3 + 5 = 12$ bolas; de las cuales 4 son blancas; por lo tanto $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

3.10. Se sacan dos cartas al azar de una baraja corriente de 52 cartas. Hallar la probabilidad p de que, (i) las dos sean espadas, (ii) la una espada y la otra corazón.

Hay $\binom{52}{2} = 1326$ maneras de sacar 2 cartas de 52.

(i) Hay $\binom{13}{2} = 78$ maneras de sacar 2 espadas de 13; o sea

$$p = \frac{\text{número de maneras posibles de sacar 2 espadas}}{\text{número de maneras posibles de sacar 2 cartas}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

(ii) Puesto que hay 13 espadas y 13 corazones, hay $13 \cdot 13 = 169$ maneras de sacar una espada y un corazón; o sea $p = \frac{169}{1326} = \frac{13}{102}$.

3.11. Se escogen al azar tres lámparas entre 15 de las cuales 5 son defectuosas. Hallar la probabilidad p de que, (i) ninguna sea defectuosa, (ii) una exactamente sea defectuosa, (iii) una por lo menos sea defectuosa.

Hay $\binom{15}{3} = 455$ maneras de escoger 3 lámparas entre 15.

(i) Puesto que hay $15 - 5 = 10$ lámparas no defectuosas, entonces hay $\binom{10}{3} = 120$ maneras de escoger 3 lámparas no defectuosas. Así que $p = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

(ii) Hay 5 lámparas defectuosas y $\binom{10}{2} = 45$ pares diferentes de lámparas no defectuosas; por consiguiente hay $5 \cdot 45 = 225$ maneras de escoger 3 lámparas de las cuales una es defectuosa. Entonces $p = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$.

(iii) El evento en que por lo menos una sea defectuosa es el complemento del evento en que ninguna es defectuosa que tiene según (i), probabilidad $\frac{24}{91}$. Entonces $p = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

3.12. Se seleccionan al azar dos cartas entre 10 cartas numeradas de 1 a 10. Hallar la probabilidad p de que la suma sea impar si, (i) las dos cartas se sacan juntas, (ii) se sacan una tras otra sin sustitución, (iii) las dos cartas se sacan una después de la otra con sustitución.

(i) Hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de seleccionar 2 de 10 cartas. La suma es impar si un número es impar y el otro par. Hay 5 números pares y 5 impares; entonces hay $5 \cdot 5 = 25$ maneras de escoger un número par y uno impar. Así,

(ii) Hay $10 \cdot 9 = 90$ maneras de sacar dos cartas una primero que la otra sin sustitución. Hay $5 \cdot 5 = 25$ maneras de escoger un número par y uno impar, y $5 \cdot 5 = 25$ maneras de sacar un número impar y luego uno par; por tanto $p = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$.

(iii) Hay $10 \cdot 10 = 100$ maneras de sacar dos cartas una después de la otra con sustitución. Como en (ii), hay $5 \cdot 5 = 25$ maneras de sacar un número par y luego uno impar, y $5 \cdot 5 = 25$ maneras de sacar un número impar y luego uno par; entonces $p = \frac{25+25}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

3.13. Seis parejas de casados se encuentran en un cuarto.

(i) Si se escogen 2 personas al azar, hallar la probabilidad p de que, (a) sean esposos, (b) uno sea hombre y otro mujer.

(ii) Si se escogen 4 personas al azar, hallar la probabilidad p de que, (a) se escojan dos parejas de casados, (b) ninguna pareja sean casados entre los 4, (c) haya exactamente una pareja de casados entre los 4.

(iii) Si las 12 personas se reparten en seis parejas, hallar la probabilidad p de que, (a) cada pareja sean casados, (b) cada pareja la forme un hombre y una mujer.

(i) Hay $\binom{12}{2} = 66$ maneras de escoger 2 personas de las 12.

(*a*) Hay 6 parejas de casados; por lo tanto $p = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

(*b*) Hay 6 maneras de escoger un hombre y 6 maneras de escoger una mujer; por consiguiente $p = \frac{6 \cdot 6}{66} = \frac{6}{11}$.

(ii) Hay $\binom{12}{4} = 495$ maneras de escoger 4 personas de 12.

(*a*) Hay $\binom{6}{2} = 15$ maneras de escoger 2 parejas de las 6; o sea $p = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$.

(*b*) Las 4 personas vienen de 4 parejas diferentes. Hay $\binom{6}{4} = 15$ maneras de escoger 4 parejas de las 6, y hay 2 maneras de escoger una persona de cada pareja, o sea que $p = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15}{495} = \frac{16}{33}$.

(*c*) Este evento es mutuamente disyunto de los dos eventos anteriores (que también son mutuamente disyuntos) y por lo menos debe suceder uno de estos dos. Por lo tanto $p + \frac{1}{33} + \frac{16}{33} = 1$ ó $p = \frac{16}{33}$.

(iii) Hay $\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!} = \frac{12!}{2^6}$ maneras de repartir las 12 personas en 6 células ordenadas con 2 personas en cada una.

(*a*) Las 6 parejas pueden ser colocadas en 6 células ordenadas de 6! maneras. O sea $p = \frac{6!}{12!/2^6} = \frac{1}{10.395}$.

(*b*) Cada uno de los 6 hombres se pueden colocar en 6 células de 6! maneras y cada una de las 6 mujeres lo mismo. Por consiguiente $p = \frac{6!\,6!}{12!/2^6} = \frac{16}{231}$.

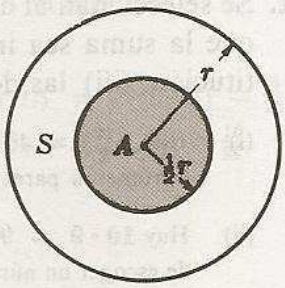
3.14. Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Hallar la probabilidad p de que una persona escogida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

Sea A = {la persona es un hombre} y B = {la persona tiene ojos castaños}. Buscamos la $P(A \cup B)$. Entonces $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Así por el teorema 3.5,

$$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}$$

ESPACIOS UNIFORMES NO CONTABLES

3.15. En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad p de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.



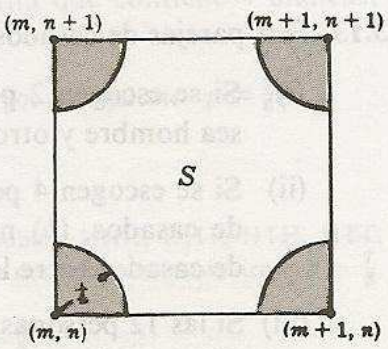
Denotemos por S el conjunto de los puntos interiores al círculo de radio r y denotemos por A el conjunto de los puntos interiores al círculo concéntrico de radio $\frac{1}{2}r$. (Así, A está formado precisamente por aquellos puntos de S que están más cercanos a su centro que a su circunferencia.) Por consiguiente,

$$p = P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi(\frac{1}{2}r)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

3.16. Considérese el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$, y desígnese X como el subconjunto de puntos para los cuales ambas coordenadas son enteros. Se lanza una moneda de diámetro $\frac{1}{2}$ al azar sobre el plano. Hallar la probabilidad p de que la moneda cubra un punto de X.

Denotemos S el conjunto de puntos interiores del cuadrado con extremos

$$(m, n), \quad (m, n+1), \quad (m+1, n), \quad (m+1, n+1) \in X$$



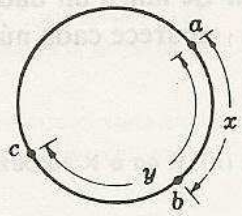
A sombreado.

Denotemos A el conjunto de puntos de S de distancia a las esquinas inferiores a $\frac{1}{4}$. (Obsérvese que el área de A es igual al área interior del círculo de radio $\frac{1}{4}$.) Así una moneda cuyo centro cae en S cubrirá un punto de X si y sólo si su centro cae en un punto de A. Según esto,

$$p = P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi(\frac{1}{4})^2}{1} = \frac{\pi}{16} \approx 0{,}2$$

Nota: No se pueden considerar todos los S de $\mathbf{R}^2$ porque éste tiene área infinita.

3.17. Tres puntos a, b y c de una circunferencia se escogen al azar. Hallar la probabilidad p de que los puntos caigan sobre el mismo semi-círculo.



Supongamos que la longitud de la circunferencia sea $2s$. Denotemos x la longitud del arco ab en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y denotemos y la longitud del arco ac en el mismo sentido. Así

$$0 < x < 2s \quad \text{y} \quad 0 < y < 2s \qquad (*)$$

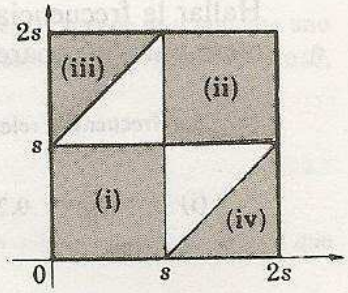
Sea S el conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^2$ para los cuales se cumple la condición (*). Sea A el subconjunto de S para el cual se cumple una de las condiciones siguientes:

(i) $x, y < s$ (iii) $x < s$ y $y - x > s$

(ii) $x, y > s$ (iv) $y < s$ y $x - y > s$

Entonces A consta de aquellos puntos para los cuales se cumple que a, b y c caen sobre el semi-círculo. Así

$$p = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{3s^2}{4s^2} = \frac{3}{4}$$



A sombreado.

PROBLEMAS VARIOS

3.18. Sean A y B eventos con $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar (i) $P(A \cup B)$, (ii) $P(A^c)$ y $P(B^c)$, (iii) $P(A^c \cap B^c)$, (iv) $P(A^c \cup B^c)$, (v) $P(A \cap B^c)$, (vi) $P(B \cap A^c)$.

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

(ii) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ y $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iii) Usando la ley de De Morgan, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, tenemos

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

(iv) Usando la ley de De Morgan, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, tenemos

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Equivalentemente,

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

(v) $P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

(vi) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

3.19. Sean A y B eventos con $P(A \cup B) = \frac{5}{4}$, $P(A^c) = \frac{7}{8}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar: (i) $P(A)$, (ii) $P(B)$, (iii) $P(A \cap B^c)$.

(i) $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

(ii) Remplazamos en $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para obtener $\frac{5}{4} = \frac{1}{8} + P(B) - \frac{1}{4}$ o $P(B) = \frac{7}{8}$.

(iii) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

3.20. Hallar la probabilidad p de un evento si la ventaja de que ocurra es $a : b$, esto es "a a b".

La ventaja de que un evento con probabilidad p suceda es la relación $p : (1 - p)$. Por lo tanto

$$\frac{p}{1-p} = \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad bp = a - ap \quad \text{o} \quad ap + bp = a \quad \text{o} \quad p = \frac{a}{a+b}$$

3.21. Hallar la probabilidad p de un evento si la ventaja de que suceda es "3 a 2".

$\frac{p}{1-p} = \frac{3}{2}$ de lo cual $p = \frac{3}{5}$. Podemos usar también la fórmula del problema anterior para obtener directamente la respuesta: $p = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

3.22. Se lanza un dado 100 veces. La tabla siguiente detalla los seis números y la frecuencia con la cual aparece cada número:

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	14	17	20	18	15	16

Hallar la frecuencia f del evento en que, (i) aparezca un 3, (ii) aparezca un 5, (iii) aparezca un número par, (iv) aparezca un número primo.

La frecuencia relativa $f = \dfrac{\text{número de sucesos}}{\text{número total de pruebas}}$

(i) $f = \frac{20}{100} = 0{,}20$ (ii) $f = \frac{15}{100} = 0{,}15$ (iii) $f = \frac{17+18+16}{100} = 0{,}51$ (iv) $f = \frac{17+20+15}{100} = 0{,}52$

3.23. Probar el corolario 3.6: Para los eventos A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Sea $D = B \cup C$. Luego $A \cap D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y

$$P(A \cap D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Así

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

3.24. Sean $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ y $T = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\}$ espacios finitos de probabilidad. Sea el número $p_{ij} = P(a_i)P(b_j)$ asignado a la pareja ordenada (a_i, b_j) del conjunto producto $S \times T = \{(s, t) : s \in S,\ t \in T\}$. Comprobar que el p_{ij} define un espacio de probabilidad de $S \times T$, esto es, que los p_{ij} son no negativos y suman uno. (Este es el llamado *espacio de probabilidad producto*. Hacemos énfasis que esta no es la única función de probabilidad que se puede definir del conjunto producto $S \times T$.)

Puesto que $P(a_i), P(b_j) \geq 0$, para cada i y cada j, $p_{ij} = P(a_i)P(b_j) \geq 0$. Además,

$$\begin{aligned} & p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1t} + p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2t} + \cdots + p_{s1} + p_{s2} + \cdots + p_{st} \\ &= P(a_1)P(b_1) + \cdots + P(a_1)P(b_t) + \cdots + P(a_s)P(b_1) + \cdots + P(a_s)P(b_t) \\ &= P(a_1)[P(b_1) + \cdots + P(b_t)] + \cdots + P(a_s)[P(b_1) + \cdots + P(b_t)] \\ &= P(a_1) \cdot 1 + \cdots + P(a_s) \cdot 1 \\ &= P(a_1) + \cdots + P(a_s) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

ESPACIOS MUESTRALES Y EVENTOS

3.25. Sean A y B eventos. Hallar la expresión y usar el diagrama de Venn para el evento en que, (i) sucede A o no B, (ii) ni A ni B suceden.

3.26. Sean A, B y C eventos. Hallar la expresión y usar el diagrama de Venn para el evento en que, (i) sucede exactamente uno de los tres eventos, (ii) suceden por lo menos dos de los eventos, (iii) ninguno de los eventos sucede, (iv) sucede A o B, pero no C.

3.27. Sea el caso de lanzar una moneda de centavo, una de diez centavos y un dado.

(i) Escribir el espacio muestral S apropiado.

(ii) Expresar explícitamente los eventos siguientes: $A = \{$que aparezcan dos caras y un numero primo$\}$, $B = \{$que aparezca un 2$\}$, $C = \{$que aparezca exactamente una cara y un número primo$\}$.

(iii) Expresar explícitamente el evento en que, (*a*) A y B suceden, (*b*) sucede solamente B, (*c*) sucede B o C.

ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

3.28. ¿Cuáles funciones definen un espacio de probabilidad de $S = \{a_1, a_2, a_3\}$?

(i) $P(a_1) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{2}$ (iii) $P(a_1) = \frac{1}{6}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{2}$

(ii) $P(a_1) = \frac{2}{3}$, $P(a_2) = -\frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{2}{3}$ (iv) $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{2}{3}$

3.29. Sea P una función de probabilidad de $S = \{a_1, a_2, a_3\}$. Hallar $P(a_1)$ si, (i) $P(a_2) = \frac{1}{3}$ y $P(a_3) = \frac{1}{4}$, (ii) $P(a_1) = 2P(a_2)$ y $P(a_3) = \frac{1}{4}$, (iii) $P(\{a_2, a_3\}) = 2P(a_1)$, (iv) $P(a_3) = 2P(a_2)$ y $P(a_2) = 3P(a_1)$.

3.30. Se carga una moneda de manera que la posibilidad de salir cara sea tres veces la de salir sello. Hallar $P(\mathrm{H})$ y $P(\mathrm{T})$.

3.31. Tres estudiantes A, B y C intervienen en una prueba de natación. A y B tienen la misma probabilidad de ganar y el doble de la de C. Hallar la probabilidad de que gane B o C.

3.32. Se carga un dado de manera que los números pares tienen el doble de posibilidad de salir que los impares. Hallar la probabilidad de que, (i) aparezca un número par, (ii) aparezca un número primo, (iii) aparezca un número impar, (iv) aparezca un número primo impar.

3.33. Hallar la probabilidad de un evento si la ventaja de que suceda es, (i) 2 a 1, (ii) 5 a 11.

3.34. En una carrera de natación, la ventaja de que A gane es 2 a 3 y la ventaja de que B gane es 1 a 4. Hallar la probabilidad p y la ventaja de que A o B ganen la carrera.

ESPACIOS FINITOS EQUIPROBABLES

3.35. Una clase está formada por 5 estudiantes de primero, 4 de segundo, 8 de penúltimo y 3 de último año. Se escoge un estudiante al azar para representar la clase. Hallar la probabilidad de que el estudiante sea, (i) de segundo, (ii) de último año, (iii) de penúltimo o de último año.

3.36. Se selecciona una carta al azar entre 50 cartas numeradas de 1 a 50. Hallar la probabilidad de que el número de la carta sea, (i) divisible por 5, (ii) primo, (iii) termine en dos.

3.37. De las 10 niñas de una clase, 3 tienen ojos azules. Si se escogen dos niñas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que, (i) las dos tengan ojos azules? (ii) ninguna tenga ojos azules? (iii) una por lo menos tenga ojos azules?

3.38. Tres tornillos y tres tuercas están en una caja. Si se escogen dos piezas al azar, hallar la probabilidad de sacar un tornillo y una tuerca.

3.39. Diez estudiantes, $A, B, \ldots$, están en una clase. Si se escoge un comité de 3, al azar, hallar la probabilidad de que, (i) A pertenezca al comité, (ii) B pertenezca al comité, (iii) A y B pertenezcan al comité, (iv) A o B pertenezca al comité.

3.40. Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge al azar un comité de 3, hallar la probabilidad de, (i) seleccionar tres niños, (ii) seleccionar exactamente 2 niños, (iii) seleccionar por lo menos un niño, (iv) seleccionar exactamente 2 niñas.

3.41. Se lanza un par de dados corrientes. Hallar la probabilidad de que la suma de los dos números sea mayor que 4.

3.42. De 120 estudiantes, 60 estudian francés, 50 estudian español, y 20 estudian francés y español. Si se escoge un estudiante al azar, hallar la probabilidad de que el estudiante, (i) estudie francés y español, (ii) no estudie francés ni español.

3.43. Tres niños y 3 niñas se sientan en fila. Hallar la probabilidad de que, (i) las tres niñas se sienten juntas, (ii) los niños y las niñas se sienten alternados.

ESPACIOS UNIFORMES NO CONTABLES

3.44. Se escoge al azar un punto interior a un triángulo equilátero de lado 3. Hallar la probabilidad de que su distancia a un vértice sea mayor que 1.

3.45. Se lanza al azar una moneda sobre el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$. Hallar la probabilidad de que la moneda no corte ninguna línea cuya ecuación sea de la forma, (*a*) $x = k$, (*b*) $x + y = k$, (*c*) $x = k$ o $y = k$. (Aquí k es un entero.)

3.46. Se escoge al azar un punto X sobre un segmento de recta AB con punto medio O. Hallar la probabilidad de que los segmentos de recta AX, XB y AO puedan formar un triángulo.

PROBLEMAS VARIOS

3.47. Sean los eventos A y B con $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $P(A^c) = \frac{5}{8}$. Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B^c)$.

3.48. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ y $P(B^c) = \frac{5}{8}$. Hallar $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$, $P(A^c \cup B^c)$ y $P(B \cap A^c)$.

3.49. Se lanza un dado 50 veces. La tabla siguiente da los seis números y la frecuencia con que se repiten:

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	7	9	8	7	9	10

Hallar la frecuencia relativa del evento, (i) en que aparece un 4, (ii) en que aparece un número impar, (iii) en que aparece un número primo.

3.50. Probar: Para los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \pm P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(*Nota:* Este resultado generaliza el teorema 3.5 y el corolario 3.6.)

Respuestas a los problemas propuestos

3.25. (i) $A \cup B^c$, (ii) $(A \cup B)^c$

3.26. (i) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$ (iii) $(A \cup B \cup C)^c$
(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (iv) $(A \cup B) \cap C^c$

3.27. (i) $S = \{$HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HT1, HT2, HT3, HT4, HT5, HT6, TH1, TH2, TH3, TH4, TH5, TH6, TT1, TT2, TT3, TT4, TT5, TT6$\}$
(ii) $A = \{$HH2, HH4, HH6$\}$, $B = \{$HH2, HT2, TH2, TT2$\}$, $C = \{$HT2, TH2, HT3, TH3, HT5, TH5$\}$
(iii) (a) $A \cap B = \{$HH2$\}$
(b) $B \setminus (A \cup C) = \{$TT2$\}$
(c) $B \cup C = \{$HH2, HT2, TH2, TT2, HT3, TH3, HT5, TH5$\}$

3.28. (i) no, (ii) no, (iii) sí (iv) sí

3.29. (i) $\frac{5}{12}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{1}{8}$, (iv) $\frac{1}{10}$

3.30. $P(H) = \frac{3}{4}$, $P(T) = \frac{1}{4}$

3.31. $\frac{3}{5}$

3.32. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{4}{9}$, (iii) $\frac{1}{3}$, (v) $\frac{2}{9}$

3.33 (i) $\frac{3}{8}$, (ii) $\frac{5}{16}$

3.34. $p = \frac{3}{5}$; la ventaja es 3 a 2

3.35. (i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{3}{20}$, (iii) $\frac{11}{20}$

3.36. (i) $\frac{1}{6}$, (ii) $\frac{3}{10}$, (iii) $\frac{1}{10}$

3.37. (i) $\frac{1}{15}$, (ii) $\frac{7}{15}$, (iii) $\frac{8}{15}$

3.38. $\frac{3}{5}$

3.39. (i) $\frac{3}{10}$, (ii) $\frac{3}{10}$, (iii) $\frac{1}{15}$, (iv) $\frac{8}{15}$

3.40. (i) $\frac{3}{14}$, (ii) $\frac{27}{56}$, (iii) $\frac{27}{28}$, (iv) $\frac{15}{56}$

3.41. $\frac{5}{9}$

3.42. (i) $\frac{3}{4}$, (ii) $\frac{1}{4}$

3.43. (i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{1}{10}$

3.44. $1 - 2\pi/(9\sqrt{3})$

3.45. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, (iii) $\frac{1}{4}$

3.46. $\frac{1}{2}$

3.47. $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B^c) = \frac{1}{8}$

3.48. $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{4}$, $P(A^c \cup B^c) = \frac{7}{8}$, $P(B \cap A^c) = \frac{1}{4}$

3.49. (i) $\frac{7}{50}$, (ii) $\frac{24}{50}$, (iii) $\frac{26}{50}$

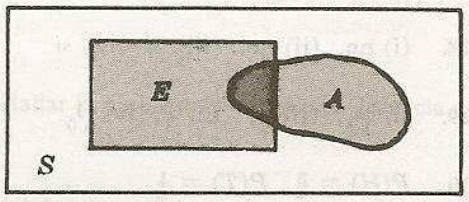
Capítulo 4

Probabilidad condicional e independencia

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea E un evento arbitrario de un espacio muestral S con $P(E) > 0$. La probabilidad de que un evento A suceda una vez que E haya sucedido o, en otras palabras, la *probabilidad condicional* de A dado E, escrito $P(A \mid E)$, se define como sigue:

$$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$



Como se aprecia en el diagrama de Venn expuesto, $P(A \mid E)$ en cierto sentido mide la probabilidad relativa de A con relación al espacio reducido E.

En particular, si S es un espacio finito equiprobable y $|A|$ denota el número de elementos de un evento A, entonces

$$P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|S|}, \quad P(E) = \frac{|E|}{|S|} \quad \text{y así} \quad P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}$$

Esto es,

Teorema 4.1: Sea S un espacio finito equiprobable con eventos A y E. Entonces

$$P(A \mid E) = \frac{\text{número de elementos de } A \cap E}{\text{número de elementos de } E}$$

o

$$P(A \mid E) = \frac{\text{número de maneras en que } A \text{ y } E \text{ pueden suceder}}{\text{número de maneras en que } E \text{ puede suceder}}$$

Ejemplo 4.1: Sea el caso de lanzar un par de dados corrientes. Si la suma es 6, hallar la probabilidad de que uno de los dados sea 2. En otras palabras, si

$$E = \{\text{suma es } 6\} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

y

$$A = \{\text{un 2 aparece por lo menos en un dado}\}$$

hallar $P(A \mid E)$.

Ahora E consta de cinco elementos y dos de ellos, (2, 4) y (4, 2), pertenecen a A: $A \cap E = \{(2, 4), (4, 2)\}$. Entonces $P(A \mid E) = \frac{2}{5}$.

Por otra parte, puesto que A consta de nueve elementos.

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

y S consta de 36 elementos, $P(A) = \frac{11}{36}$.

Ejemplo 4.2: Un hombre visita a un matrimonio que tiene dos hijos. Uno de los hijos, un niño, entra en la sala. Hallar la probabilidad p de que el otro sea también niño si, (i) se sabe que el otro hijo (o hija) es menor, (ii) no se sabe nada del otro hijo.

El espacio muestral para el sexo de los dos hijos es $S = \{bb, bg, gb, gg\}$ con probabilidad $\frac{1}{4}$ para cada muestra. (Aquí la serie de cada punto corresponde a la serie de nacimientos.)

(i) El espacio muestral reducido consta de dos elementos, $\{bb, bg\}$; o sea $p = \frac{1}{2}$.

(ii) El espacio muestral reducido consta de tres elementos, $\{bb, bg, gb\}$; o sea $p = \frac{1}{3}$.

TEOREMA DE LA MULTIPLICACION PARA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Si multiplicamos en cruz la ecuación anterior que define la probabilidad condicional y usamos el hecho de que $A \cap E = E \cap A$, obtenemos la siguiente fórmula útil.

Teorema 4.2: $P(E \cap A) = P(E)\ P(A \mid E)$

Este teorema puede extenderse por inducción matemática como sigue:

Corolario 4.3: Para los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ahora aplicamos el teorema anterior que es llamado, apropiadamente, el *teorema de la multiplicación*.

Ejemplo 4.3: Un lote de 12 artículos tiene 4 defectuosos. Se toman al azar tres artículos del lote uno tras otro. Hallar la probabilidad p de que todos los tres estén buenos.

La probabilidad de que el primer artículo no sea defectuoso es $\frac{8}{12}$ puesto que 8 entre los 12 no son defectuosos. Si el primero no es defectuoso, entonces la probabilidad de que el próximo artículo no sea defectuoso es $\frac{7}{11}$ puesto que solamente 7 de los 11 sobrantes no son defectuosos. Si los dos primeros artículos no son defectuosos, entonces la probabilidad de que el último no sea defectuoso es $\frac{6}{10}$ puesto que solamente 6 entre los 10 que quedan no son defectuosos. Así por el teorema de la multiplicación,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

PROCESOS ESTOCASTICOS FINITOS Y DIAGRAMAS DE ARBOL

Una sucesión (finita) de experimentos en los cuales cada experimento tiene un número finito de resultados con probabilidades dadas se llama un *proceso estocástico (finito)*. Una manera conveniente de describir tal proceso y calcular la probabilidad de un evento se obtiene por el *diagrama de árbol* como se ilustra en la figura siguiente; el teorema de la multiplicación de la sección anterior se usa para calcular la probabilidad de que el resultado representado por una trayectoria determinada del árbol suceda. suceda.

Ejemplo 4.4: Tomemos las tres cajas siguientes:

Caja I contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas.

Caja II contiene 6 con 1 defectuosa.

Caja III contiene 8 con 3 defectuosas.

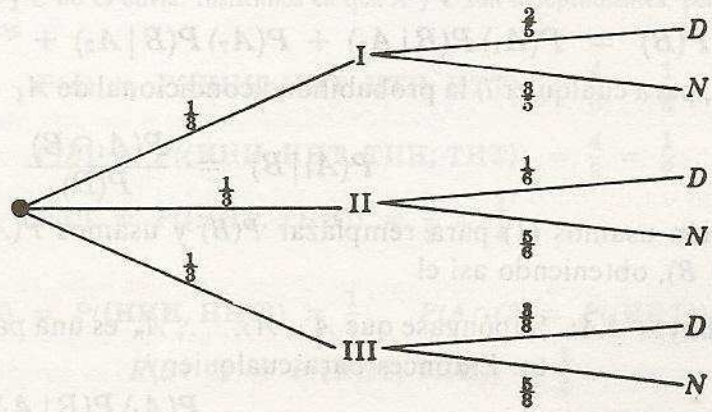
Escogemos al azar una caja y luego sacamos al azar una lámpara. ¿Cuál es la probabilidad p de que la lámpara sea defectuosa?

Aquí realizamos una serie de dos experimentos:

(i) escoger una de las tres cajas;

(ii) escoger una lámpara que sea o defectuosa (D) o no defectuosa (N).

El diagrama de árbol siguiente describe el proceso y da la probabilidad de cada rama del árbol:



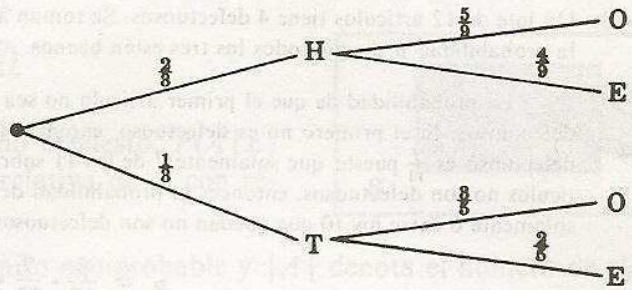
La probabilidad de que una trayectoria determinada del árbol suceda es, según el teorema de la multiplicación, el producto de las probabilidades de cada rama de la trayectoria, o sea, que la probabilidad de escoger la caja I y luego una lámpara defectuosa es $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$.

Ahora como hay tres trayectorias mutuamente exclusivas que conducen a una lámpara defectuosa, la suma de las probabilidades de estas trayectorias es la probabilidad buscada:

$$p = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

Ejemplo 4.5: Se lanza una moneda cargada de modo que $P(C)=\frac{2}{3}$ y $P(S)=\frac{1}{3}$. Si sale cara, se escoge al azar un número de 1 a 9; si sale sello, se escoge al azar un número de 1 a 5. Hallar la probabilidad p de que se escoja un número par.

El diagrama de árbol con las probabilidades respectivas es:



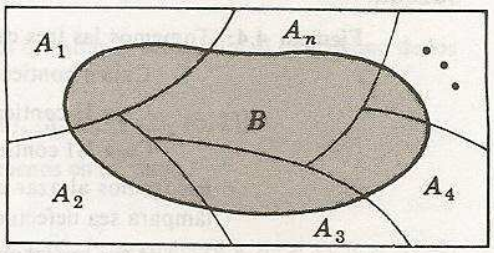
Obsérvese que la probabilidad de escoger un número par de 1 a 9 es $\frac{4}{9}$ puesto que hay 4 pares entre los 9 números, mientras que la probabilidad de escoger un par de 1 a 5 es $\frac{2}{5}$ puesto que hay 2 números pares entre los 5. Dos de las trayectorias conducen a un número par: CP y SP. Así

$$p = P(E) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{58}{135}$$

PARTICIONES Y TEOREMA DE BAYES

Supongamos que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición de un espacio muestral S; esto es, que los eventos A_i son mutuamente exclusivos y su unión es S. Ahora sea B otro evento. Entonces

$$\begin{aligned} B &= S\cap B = (A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap B \\ &= (A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B) \end{aligned}$$



B sombreado.

donde las $A_i\cap B$ son eventos mutuamente exclusivos. En consecuencia.

$$P(B) = P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$

Luego por el teorema de la multiplicación

$$P(B) = P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\,|\,A_n) \qquad (1)$$

Por otra parte, para cualquier i, la probabilidad condicional de A_i dado B se define por

$$P(A_i\,|\,B) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

En esta ecuación usamos (1) para remplazar $P(B)$ y usamos $P(A_i\cap B)=P(A_i)\,P(B\,|\,A_i)$ para remplazar $P(A_i\cap B)$, obteniendo así el

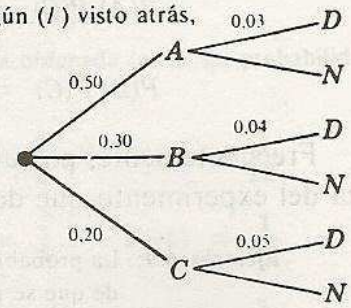
Teorema de Bayes 4.4: Supóngase que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de S y que B es cualquier evento. Entonces para cualquier i,

$$P(A_i\,|\,B) = \frac{P(A_i)P(B\,|\,A_i)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\,|\,A_n)}$$

Ejemplo 4.6: Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3%, 4% y 5%. Si se selecciona al azar un artículo, hallar la probabilidad de que el artículo sea defectuoso.

Sea X el evento de que un artículo es defectuoso. Entonces según (*I*) visto atrás,

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A)\,P(X \mid A) + P(B)\,P(X \mid B) \\ &\quad + P(C)\,P(X \mid C) \\ &= (0{,}50)(0{,}03) + (0{,}30)(0{,}04) + (0{,}20)(0{,}05) \\ &= 0{,}037 \end{aligned}$$



Obsérvese que también podemos considerar este problema como un proceso estocástico que tiene el diagrama de árbol adjunto.

Ejemplo 4.7: Considérese la fábrica del ejemplo anterior. Supóngase que se selecciona un artículo al azar y resulta ser defectuoso. Hallar la probabilidad de que el artículo fue producido por la máquina A; esto es, hallar $P(A \mid X)$.

Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(A \mid X) &= \frac{P(A)\,P(X \mid A)}{P(A)\,P(X \mid A) + P(B)\,P(X \mid B) + P(C)\,P(X \mid C)} \\ &= \frac{(0{,}50)(0{,}03)}{(0{,}50)(0{,}03) + (0{,}30)(0{,}04) + (0{,}20)(0{,}05)} = \frac{15}{37} \end{aligned}$$

En otras palabras, dividimos la probabilidad de la trayectoria pedida por la probabilidad del espacio muestral reducido, o sea, aquellas trayectorias que conducen a un artículo defectuoso.

INDEPENDENCIA

Se dice que un evento B es *independiente* de un evento A si la probabilidad de que B suceda no está influenciada porque A haya o no sucedido. En otras palabras, si la probabilidad de B iguala la probabilidad condicional de B dado A: $P(B) = P(B \mid A)$. Ahora sustituyendo $P(B)$ por $P(B \mid A)$ en el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$, obtenemos

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Usamos la ecuación anterior como nuestra definición formal de independencia.

Definición: A y B son eventos independientes si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$; de otro modo son dependientes.

Ejemplo 4.8: Láncese una moneda corriente tres veces; obtenemos el espacio equiprobable

$$S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

Consideremos los eventos

$$A = \{\text{primeros lanzamientos son caras}\} \qquad B = \{\text{segundos lanzamientos son caras}\}$$

$$C = \{\text{exactamente se lanzan dos caras seguidas}\}$$

Claramente A y B son eventos independientes; este hecho se verifica en seguida. Por otra parte, la relación entre A y C o B y C no es obvia. Insistimos en que A y C son independientes, pero que B y C son dependientes. Tenemos

$$P(A) = P(\{\text{HHH, HHT, HTH, HTT}\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\{\text{HHH, HHT, THH, THT}\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(\{\text{HHT, THH}\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(\{\text{HHH, HHT}\}) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap C) = P(\{\text{HHT}\}) = \frac{1}{8},$$

$$P(B \cap C) = P(\{\text{HHT, THH}\}) = \frac{1}{4}$$

En consecuencia,

$$P(A)\,P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A\cap B), \quad \text{y así } A \text{ y } B \text{ son independientes;}$$

$$P(A)\,P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A\cap C), \quad \text{y así } A \text{ y } B \text{ son independientes;}$$

$$P(B)\,P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B\cap C), \quad \text{y así } B \text{ y } C \text{ son dependientes.}$$

Frecuentemente, postularemos que dos eventos son independientes, o que será claro por la naturaleza del experimento que dos eventos son independientes.

Ejemplo 4.9: La probabilidad de que A dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la de B es $\frac{2}{5}$. Si A y B disparan, ¿cuál es la probabilidad de que se pegue al blanco?

Sabemos que $P(A) = \frac{1}{4}$ y $P(B) = \frac{2}{5}$; y buscamos $P(A \cup B)$. Además, la probabilidad de que A o B den en el blanco no depende, de que el otro dé; esto es, el evento de que A dé en el blanco es independiente del evento de que B dé en el blanco: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Así

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Tres eventos A, B y C son *independientes* si:

(i) $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$, $P(A\cap C) = P(A)\,P(C)$ y $P(B\cap C) = P(B)\,P(C)$

esto es, si los eventos son independientes dos a dos, y

(ii) $P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$.

El próximo ejemplo muestra que la condición (ii) no se desprende de la condición (i); en otras palabras, tres eventos pueden ser dos a dos independientes pero no independientes entre sí.

Ejemplo 4.10: Sea el caso de lanzar un par de monedas corrientes; aquí $S = \{\text{HH, HT, TH, TT}\}$ es un espacio equiprobable. Consideremos los eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{caras en la primera moneda}\} &&= \{\text{HH, HT}\} \\ B &= \{\text{caras en la segunda moneda}\} &&= \{\text{HH, TH}\} \\ C &= \{\text{caras en una moneda exactamente}\} &&= \{\text{HT, TH}\} \end{aligned}$$

Entonces $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y

$$P(A\cap B) = P(\{\text{HH}\}) = \frac{1}{4}, \quad P(A\cap C) = P(\{\text{HT}\}) = \frac{1}{4}, \quad P(B\cap C) = (\{\text{TH}\}) = \frac{1}{4}$$

Así la condición (i) se satisface, o sea, los eventos son independientes dos a dos. Sin embargo, $A \cap B \cap C = \emptyset$ y así

$$P(A\cap B\cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)\,P(B)\,P(C)$$

En otras palabras, la condición (ii) no se satisface y por tanto los tres eventos no son independientes.

PRUEBAS REPETIDAS O INDEPENDIENTES

Hemos discutido previamente espacios de probabilidad que estaban relacionados con un experimento repetido un número finito de veces, tal como el lanzamiento de una moneda tres veces. Este concepto de repetición se formaliza como sigue:

Definición: Sea S un espacio finito de probabilidad. Por *n pruebas repetidas o independientes*, significamos el espacio de probabilidad T que consta de n-uplas o elementos de S con la probabilidad de una n-upla definida como el producto de las probabilidades de sus componentes:

$$P((s_1, s_2, \ldots, s_n)) = P(s_1)\,P(s_2)\cdots P(s_n)$$

Ejemplo 4.11: Tres caballos a, b y c corren juntos, sus probabilidades de ganar son respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$. En otras palabras, $S = \{a, b, c\}$ con $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{3}$ y $P(c) = \frac{1}{6}$. Si los caballos corren dos veces, entonces el espacio muestral de las dos pruebas repetidas es

$$T = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

Por conveniencia en la notación, escribimos ac en lugar de la pareja ordenada (a, c). La probabilidad de cada punto de T es

$$P(aa) = P(a)P(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad P(ba) = \frac{1}{6} \qquad P(ca) = \frac{1}{12}$$

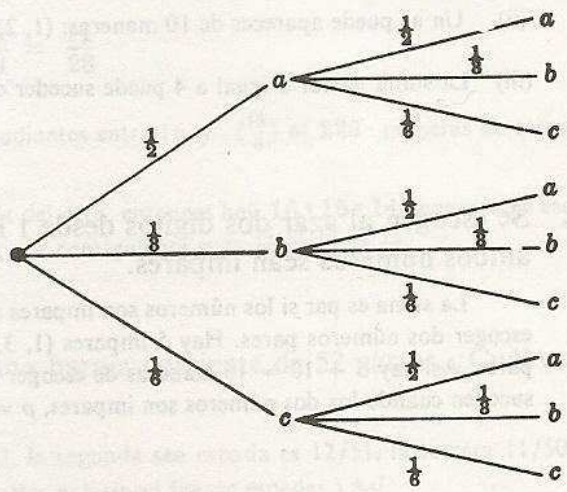
$$P(ab) = P(a)P(b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad P(bb) = \frac{1}{9} \qquad P(cb) = \frac{1}{18}$$

$$P(ac) = P(a)P(c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \qquad P(bc) = \frac{1}{18} \qquad P(cc) = \frac{1}{36}$$

Así la probabilidad de que c gane la primera carrera y de que a gane la segunda es $P(ca) = \frac{1}{12}$.

Desde otro punto de vista, un proceso de pruebas repetidas es un proceso estocástico, cuyo diagrama de árbol tiene las siguientes propiedades: (i) cada ramal tiene los mismos resultados; (ii) la probabilidad es la misma en cada rama que conduce a un mismo final. Por ejemplo, el diagrama de árbol del proceso de pruebas repetidas del experimento anterior es tal como se muestra en la figura adjunta.

Obsérvese que cada ramal tiene los resultados a, b y c, y cada rama que conduce al resultado a tiene probabilidad $\frac{1}{2}$, las que conducen a b tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y cada una de las que conducen a c tienen probabilidad $\frac{1}{6}$.



Problemas resueltos

PROBABILIDAD CONDICIONAL EN ESPACIOS FINITOS EQUIPROBABLES

4.1. Se lanza un par de dados corrientes. Hallar la probabilidad p de que la suma de sus números sea 10 o mayor si, (i) aparece un 5 en el primer dado, (ii) aparece un 5 en uno de los dados por lo menos.

(i) Si aparece un 5 en el primer dado, entonces el espacio muestral reducido es

$$A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$$

La suma es 10 o mayor en dos de los seis resultados: (5, 5), (5, 6). Por lo tanto $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(ii) Si aparece un 5 por lo menos en un dado, entonces el espacio muestral reducido tiene once elementos:

$$B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$$

La suma es 10 o mayor en tres de los once resultados: (5, 5), (5, 6), (6, 5). Por lo tanto $p = \frac{3}{11}$.

4.2. Se lanzan tres monedas corrientes. Hallar la probabilidad p de que sean todas caras si, (i) la primera de las monedas es cara, (ii) una de las monedas es cara.

El espacio muestral tiene ocho elementos: $S = \{$ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT $\}$.

(i) Si la primera moneda es cara, el espacio muestral reducido es $A = \{$ HHH, HHT, HTH, HTT $\}$. Puesto que las monedas son todas caras en 1 de 4 casos, $p = \frac{1}{4}$

(ii) Si una de las monedas es cara, el espacio muestral reducido es $B = \{$ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH $\}$. Puesto que las monedas son todas caras en 1 de 7 casos, $p = \frac{1}{7}$.

4.3. Se lanza un par de dados corrientes. Si los dos números que aparecen son diferentes, hallar la probabilidad p de que, (i) la suma sea seis, (ii) aparezca un as, (iii) la suma sea menor o igual a 4.

De las 36 maneras que se puede lanzar el par de dados, 6 contienen números repetidos: (1, 1), (2, 2), . . . , (6, 6). Así el espacio muestral reducido constará de $36 - 6 = 30$ elementos.

(i) La suma 6 puede suceder de 4 maneras: (1, 5), (2, 4), (4, 2) (5, 1). (No incluimos (3, 3) puesto que los números son iguales.) Entonces $p = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

(ii) Un as puede aparecer de 10 maneras: (1, 2), (1, 3), . . . , (1, 6) y (2, 1), (3, 1), . . . , (6, 1). Entonces $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

(iii) La suma menor o igual a 4 puede suceder de 4 maneras: (3, 1), (1, 3), (2, 1), (1, 2). Así $p = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

4.4. Se escogen al azar dos dígitos desde 1 hasta 9. Si la suma es par, hallar la probabilidad p de que ambos números sean impares.

La suma es par si los números son impares o si son pares. Hay 4 pares (2, 4, 6, 8); por tanto hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de escoger dos números pares. Hay 5 impares (1, 3, 5, 7, 9); o sea que hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras de escoger dos números impares. Así hay $6 + 10 = 16$ maneras de escoger dos números tales que su suma sea par; puesto que 10 de estas maneras suceden cuando los dos números son impares, $p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

4.5. A un hombre se reparten 4 espadas de una baraja corriente de 52 cartas. Si se le dan tres cartas más, hallar la probabilidad p de que por lo menos una de las cartas adicionales sea también espada.

Puesto que recibió 4 espadas, quedan $52 - 4 = 48$ cartas de las cuales $13 - 4 = 9$ son espadas. Hay $\binom{48}{3} = 17.296$ maneras en las que puede recibir tres cartas más. Puesto que hay $48 - 9 = 39$ cartas que no son espadas, hay $\binom{39}{3} = 9139$ maneras en que puede recibir tres cartas que no son espadas. Así la probabilidad q de que no reciba espadas es $q = \frac{9139}{17.296}$; por lo tanto $p = 1 - q = \frac{8157}{17.296}$.

4.6. Se reparten 13 cartas de una baraja corriente de 52 cartas a cuatro personas que denominamos Norte, Sur, Este y Oeste.

(i) Si S no tiene ases, hallar la probabilidad p de que su compañero N tenga exactamente dos ases.

(ii) Si N y S juntos tienen nueve corazones, hallar la probabilidad p de que E y O tengan cada uno dos corazones

(i) Hay 39 cartas, contando los 4 ases, repartidas entre N, E y O. Hay $\binom{39}{13}$ maneras de que N reciba 13 de las 39 cartas. Hay $\binom{4}{2}$ maneras de que pueda recibir 2 de los cuatro ases, y $\binom{35}{11}$ maneras de que pueda recibir 11 cartas de las $39 - 4 = 35$ cartas que no son ases. Así

$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{35}{11}}{\binom{39}{13}} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 26}{36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39} = \frac{650}{2109}$$

(ii) Hay 26 cartas, incluyendo 4 corazones, repartidos entre E y O. Hay $\binom{26}{13}$ maneras de que, por ejemplo, E pueda recibir 13 cartas. (Necesitamos solamente analizar las 13 cartas de E puesto que O debe tener el resto.) Hay $\binom{4}{2}$ maneras para que E pueda recibir 2 corazones de los 4, y $\binom{22}{11}$ maneras para que el mismo pueda recibir 11 no-corazones de $26 - 4 = 22$ no-corazones. Así

$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 13}{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26} = \frac{234}{575}$$

TEOREMA DE LA MULTIPLICACION

4.7. Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen tres estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad p de que sean todos niños?

La probabilidad de que el primer estudiante escogido sea un niño es 12/16 puesto que hay 12 niños entre los 16 estudiantes. Si el primero es un niño, entonces la probabilidad de que el segundo sea niño es 11/15 puesto que hay 11 niños entre los 15 restantes. Finalmente, si los primeros dos escogidos son niños, entonces la probabilidad de que el tercero sea niño es 10/14 puesto que quedan 10 niños entre 14. Así, por el teorema de la multiplicación, la probabilidad de que todos tres sean niños es

$$p = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

Otro método. Hay $\binom{16}{3} = 560$ maneras de escoger 3 estudiantes entre 16, y $\binom{12}{3} = 220$ maneras de escoger 3 niños entre 12; por lo tanto $p = \frac{220}{560} = \frac{11}{28}$.

Un tercer método. Si los estudiantes se escogen uno después del otro, entonces hay $16 \cdot 15 \cdot 14$ maneras de escoger tres estudiantes, y $12 \cdot 11 \cdot 10$ maneras de escoger tres niños; por consiguiente $p = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{28}$.

4.8. A un jugador le reparten 5 cartas una tras otra de una baraja corriente de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad p de que todas sean espadas?

La probabilidad que la primera carta sea espada es 13/52, la segunda sea espada es 12/51, la tercera 11/50, la cuarta 10/49, y la última 9/48. (Suponemos en cada caso que las cartas anteriores fueron espadas.) Así

$$p = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66.640}$$

4.9. Una urna contiene 7 bolas rojas y 3 bolas blancas. Se sacan 3 bolas de la urna una tras otra. Hallar la probabilidad p de que las dos primeras sean rojas y la tercera blanca.

La probabilidad de que la primera bola sea roja es 7/10 puesto que hay 7 rojas entre las 10 bolas. Si la primera bola es roja, entonces la probabilidad de que la segunda bola sea roja es 6/9 puesto que quedan 6 rojas entre las 9 bolas restantes. Si las dos primeras son rojas, entonces la probabilidad de que la tercera sea blanca es 3/8 puesto que quedan 3 blancas entre las 8 bolas restantes en la urna. Entonces por el teorema de la multiplicación,

$$p = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

4.10. Los estudiantes de una clase se escogen al azar, uno tras otro, para presentar un examen. Hallar la probabilidad p de que niños y niñas queden alternados si, (i) la clase consta de 4 niños y 3 niñas, (ii) la clase consta de 3 niños y 3 niñas.

(i) Si los niños y las niñas se alternan, el primer estudiante examinado debe ser niño. La probabilidad de que el segundo sea niña es 3/6 puesto que hay 3 niñas entre los 6 restantes. Continuando en esta forma, obtenemos que la probabilidad de que el tercero sea niño es 3/5, que el cuarto sea niña es 2/4, que el quinto sea niño es 2/3, que el sexto sea niña es 1/2, y que el último sea niño es 1/1. Así

$$p = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

(ii) Hay dos casos mutuamente exclusivos: el primer estudiante es un niño, y el primero es una niña. Si el primer estudiante es un niño, entonces por el teorema de la multiplicación la probabilidad p_1 de que los estudiantes se alternen es

$$p_1 = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Si el primer estudiante es una niña, entonces por el teorema de la multiplicación la probabilidad p_2 de que los estudiantes se alternen es

$$p_2 = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Así, $p = p_1 + p_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$.

PROBLEMAS VARIOS SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL

4.11. En cierta facultad, 25% de los estudiantes perdieron matemáticas, 15% perdieron química y 10% perdieron las dos. Se selecciona un estudiante al azar.

(i) Si perdió química, ¿cuál es la probabilidad de que perdió matemáticas?

(ii) Si perdió matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que perdió química?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que perdió matemáticas o química?

Sea $M = \{$estudiantes que perdieron matemáticas$\}$ y $C = \{$estudiantes que perdieron química$\}$; entonces

$$P(M) = 0{,}25 \qquad P(C) = 0{,}15 \qquad P(M\cap C) = 0{,}10$$

(i) La probabilidad de que el estudiante perdiera matemáticas, dado que haya perdido química es

$$P(M\,|\,C) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3}$$

(ii) La probabilidad de que el estudiante perdiera química, dado que haya perdido matemáticas es

$$P(C\,|\,M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$$

(iii) $$P(M\cup C) = P(M) + P(C) - P(M\cap C) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}30 = \frac{3}{10}$$

4.12. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar, (i) $P(A\,|\,B)$, (ii) $P(B\,|\,A)$, (iii) $P(A\cup B)$, (iv) $P(A^c\,|\,B^c)$, (v) $P(B^c\,|\,A^c)$.

(i) $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$ (ii) $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

(iv) Primero calculamos $P(B^c)$ y $P(A^c\cap B^c)$. $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Por la ley de De Morgan, $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$; por lo tanto $P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

Así, $P(A^c\,|\,B^c) = \dfrac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{5}{8}$.

(v) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Luego $P(B^c\,|\,A^c) = \dfrac{P(B^c\cap A^c)}{P(A^c)} = \dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{6}$.

4.13. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ y $P(A\cup B) = \frac{3}{4}$. Hallar $P(A\,|\,B)$ y $P(B\,|\,A)$

Primero calculemos $P(A\cap B)$ usando la fórmula $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$:

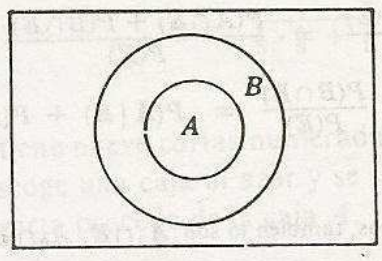
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A\cap B) \quad \text{o} \quad P(A\cap B) = \frac{1}{4}$$

Así, $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{2}{5}$ y $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

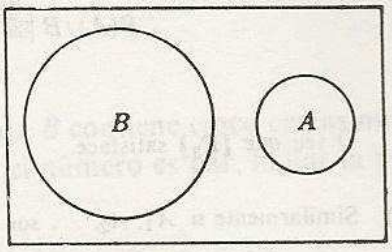
4.14. Hallar $P(B|A)$ si, (i) A es un subconjunto de B, (ii) A y B son mutuamente exclusivos.

(i) Si A es un subconjunto de B, entonces siempre que A suceda, B debe suceder; por lo tanto $P(B|A) = 1$. A su turno, si A es un subconjunto de B entonces $A \cap B = A$; entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$



(i)



(ii)

(ii) Si A y B son mutuamente exclusivos, esto es, disyuntos, entonces siempre que A suceda, B no puede suceder; por lo tanto $P(B|A) = 0$. Alternadamente, si A y B son mutuamente exclusivos entonces $A \cap B = \emptyset$; por lo tanto

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

4.15. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 60%, 30% y 10% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son respectivamente 2%, 3% y 4%. Seleccionado un artículo al azar resultó defectuoso. Hallar la probabilidad de que el artículo hubiera sido producido por la máquina C.

Sea $X = \{$artículos defectuosos$\}$. Buscamos $P(C|X)$, probabilidad de que un artículo sea producido por la máquina C dado que el artículo sea defectuoso. Por el teorema de Bayes,

$$P(C|X) = \frac{P(C)\,P(X|C)}{P(A)\,P(X|A) + P(B)\,P(X|B) + P(C)\,P(X|C)}$$

$$= \frac{(0{,}10)(0{,}04)}{(0{,}60)(0{,}02) + (0{,}30)(0{,}03) + (0{,}10)(0{,}04)} = \frac{4}{25}$$

4.16. En cierta facultad, 4% de los hombres y 1% de las mujeres tienen más de 6 pies de estatura. Además, 60% de los estudiantes son mujeres. Ahora bien si se selecciona al azar un estudiante y es más alto que 6 pies, ¿cuál es la probabilidad que el estudiante sea mujer?

Sea $A = \{$estudiantes de más de 6 pies$\}$. Buscamos $P(W|A)$, probabilidad de que el estudiante sea una mujer dado que el estudiante es de más de 6 pies. Por el teorema de Bayes,

$$P(W|A) = \frac{P(W)\,P(A|W)}{P(W)\,P(A|W) + P(M)\,P(A|M)} = \frac{(0{,}60)(0{,}01)}{(0{,}60)(0{,}01) + (0{,}40)(0{,}04)} = \frac{3}{11}$$

4.17. Sea E un evento para el cual $P(E) > 0$. Comprobar que la función de probabilidad condicional $P(*|E)$ satisface los axiomas de un espacio de probabilidad; esto es,

[P₁] Para un evento A, $0 \leq P(A|E) \leq 1$.

[P₂] Para el evento cierto S, $P(S|E) = 1$.

[P₃] Si A y B son mutuamente exclusivos, entonces $P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E)$.

[P₄] Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots | E) = P(A_1|E) + P(A_2|E) + \cdots$$

(i) Tenemos $A \cap E \subset E$; por lo tanto $P(A \cap E) \leq P(E)$. Así $P(A|E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)} \leq 1$ y es no negativo también. Esto es $0 \leq P(A|E) \leq 1$ y así **[P₁]** cumple.

(ii) Tenemos $S \cap E = E$; por consiguiente $P(S \mid E) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1$. Así $[\mathbf{P}_2]$ satisface.

(iii) Si A y B son eventos mutuamente exclusivos, entonces así son $A \cap E$ y $B \cap E$. Además $(A \cup B) \cap E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$. Así

$$P((A \cup B) \cap E) = P((A \cap E) \cup (B \cap E)) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$$

y por ende

$$P(A \cup B \mid E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = P(A \mid E) + P(B \mid E)$$

O sea que $[\mathbf{P}_3]$ satisface.

(iv) Similarmente si $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente exclusivos, también lo son $A_1 \cap E, A_2 \cap E, \ldots$. Así

$$P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap E) = P((A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup \cdots) = P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + \cdots$$

y por tanto

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \mid E) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + \cdots}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap E)}{P(E)} + \frac{P(A_2 \cap E)}{P(E)} + \cdots = P(A_1 \mid E) + P(A_2 \mid E) + \cdots$$

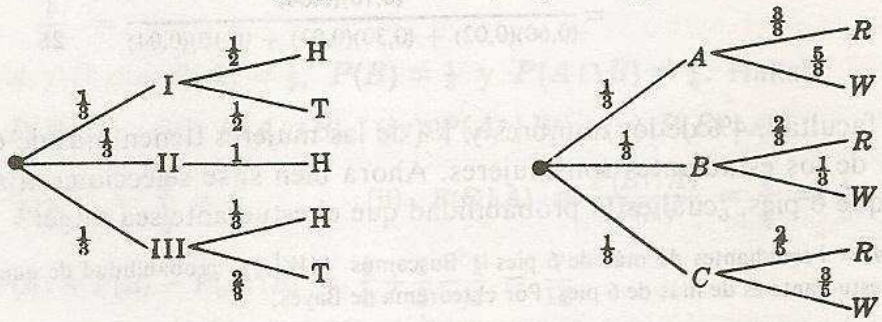
Esto es, $[\mathbf{P}_4]$ satisface.

PROCESOS ESTOCASTICOS FINITOS

4.18. Una caja contiene tres monedas; una moneda es corriente, una moneda tiene dos caras y una moneda está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara sea $\frac{1}{3}$. Se selecciona una moneda al azar y se lanza. Hallar la probabilidad p de que salga cara.

Construimos el diagrama de árbol como se muestra en la figura (*a*) siguiente. Obsérvese que I se refiere a la moneda corriente, II a la de doble cara y III a la moneda cargada. Ahora las caras aparecen a lo largo de tres de las trayectorias; por lo tanto

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$



(*a*) (*b*)

4.19. Se nos dan tres urnas como sigue:

Una urna A contiene 3 bolas rojas y 5 blancas.
Una urna B contiene 2 bolas rojas y 1 blanca.
Una urna C contiene 2 bolas rojas y 3 blancas.

Se selecciona una urna al azar y se saca una bola de la urna. Si la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Se construye el diagrama de árbol como se muestra en la figura (*b*) anterior.

Buscamos la probabilidad de que se seleccione A, dado que la bola es roja; esto es, $P(A \mid R)$. Con el fin de hallar $P(A \mid R)$, es necesario calcular primero $P(A \cap R)$ y $P(R)$.

La probabilidad de que se seleccione A y se saque una bola roja es $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$; esto es, $P(A \cap R) = \frac{1}{8}$. Puesto que hay tres trayectorias que conducen a bola roja, $P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{173}{360}$. Entonces

$$P(A \mid R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$$

Alternadamente, por el teorema de Bayes,

$$P(A \mid R) = \frac{P(A)\,P(R \mid A)}{P(A)\,P(R \mid A) + P(B)\,P(R \mid B) + P(C)\,P(R \mid C)}$$

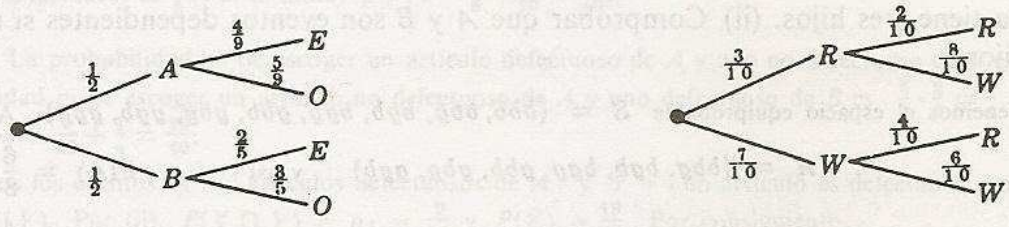
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173}$$

4.20. La caja A contiene nueve cartas numeradas de 1 a 9, y la caja B contiene cinco cartas numeradas de 1 a 5. Se escoge una caja al azar y se saca una carta. Si el número es par, hallar la probabilidad de que la carta proceda de la caja A.

El diagrama de árbol del proceso se muestra en la figura (a) siguiente.

Buscamos $P(A \mid E)$, probabilidad de que se seleccione A, dado que el número es par. La probabilidad de que se escoja la caja A y un número par es $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$; esto es, $P(A \cap E) = \frac{2}{9}$. Puesto que hay dos trayectorias que conducen a un número par, $P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45}$. Así

$$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{10}{19}$$



(a) (b)

4.21. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 blancas. Se saca una bola de la urna y se remplaza por una del otro color. Se saca de la urna una segunda bola.

(i) Hallar la probabilidad p de que la segunda bola sea roja.

(ii) Si ambas bolas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad p de que las dos sean blancas?

Construimos el diagrama de árbol como se indica en la figura (b) anterior.

(i) Dos trayectorias del diagrama de árbol conducen a bola roja: $p = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{50}$.

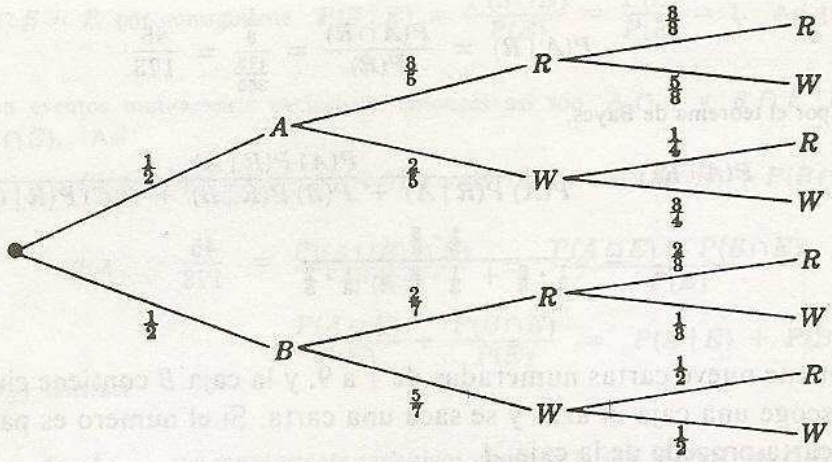
(ii) La probabilidad de que ambas bolas fueran blancas es $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{50}$. La probabilidad de que ambas bolas fueran del mismo color, esto es, la probabilidad del espacio muestral reducido, es $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{25}$. Por lo tanto la probabilidad condicional $p = \frac{21}{50} / \frac{12}{25} = \frac{7}{8}$.

4.22. Se nos dan dos urnas como sigue:

La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 blancas.
La urna B contiene 2 bolas rojas y 5 blancas.

Se selecciona al azar una urna; se saca una bola y se coloca en la otra urna; luego se saca una bola de la segunda urna. Hallar la probabilidad p de que las dos bolas sacadas sean del mismo color.

Construimos el siguiente diagrama de árbol:



Nótese que si se selecciona la urna A y se saca una bola roja y se coloca en la urna B, entonces la urna B tiene 3 bolas rojas y 5 blancas.

Puesto que hay cuatro trayectorias que conducen a dos bolas del mismo color,

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{901}{1680}$$

INDEPENDENCIA

4.23. Sea A = al evento de que una familia tenga niños de ambos sexos; y sea B = al evento de que una familia tenga a lo sumo un niño. (i) Comprobar que A y B son eventos independientes si una familia tiene tres hijos. (ii) Comprobar que A y B son eventos dependientes si una familia tiene dos hijos.

(i) Tenemos el espacio equiprobable $S = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}$. Aquí

$$A = \{bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\} \quad \text{y así} \quad P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{bgg, gbg, ggb, ggg\} \quad \text{y así} \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A\cap B = \{bgg, gbg, ggb\} \quad \text{y así} \quad P(A\cap B) = \frac{3}{8}$$

Puesto que $P(A)\,P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A\cap B)$, A y B son independientes.

(ii) Tenemos el espacio equiprobable $S = \{bb, bg, gb, gg\}$. Aquí

$$A = \{bg, gb\} \quad \text{y así} \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{bg, gb, gg\} \quad \text{y así} \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

$$A\cap B = \{bg, gb\} \quad \text{y así} \quad P(A\cap B) = \frac{1}{2}$$

Puesto que $P(A)\,P(B) \neq P(A\cap B)$, A y B son dependientes.

4.24. Probar si A y B son eventos independientes, entonces A^c y B^c son eventos independientes.

$$\begin{aligned} P(A^c\cap B^c) &= P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)\,P(B^c) \end{aligned}$$

4.25. La probabilidad de que un hombre vivirá 10 años más es $\frac{1}{4}$, y la probabilidad de que su esposa vivirá 10 años más es $\frac{1}{8}$. Hallar la probabilidad de que, (i) ambos estén vivos dentro de 10 años, (ii) al menos uno estará vivo a los 10 años, (iii) ninguno estará vivo a los 10 años, (iv) solamente la esposa estará viva a los 10 años.

Sea A = al evento de que el hombre viva a los 10 años, y B = al evento de que su esposa esté viva a los 10 años; entonces $P(A) = \frac{1}{4}$ y $P(B) = \frac{1}{8}$.

(i) Buscamos $P(A\cap B)$. Puesto que A y B son independientes, $P(A\cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

(ii) Buscamos $P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.

(iii) Buscamos, $P(A^c \cap B^c)$. Ahora $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ y $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Además, puesto que A^c y B^c son independientes, $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\,P(B^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{2}$.

Alternadamente, puesto que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

(iv) Buscamos $P(A^c \cap B)$. Puesto que $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$ y A^c y B son independientes (ver problema 4.56), $P(A^c \cap B) = P(A^c)\,P(B) = \frac{1}{4}$.

4.26. La caja A contiene 8 artículos de los cuales 3 son defectuosos, y la caja B contiene 5 artículos de los cuales 2 son defectuosos. Se saca al azar un artículo de cada caja.

(i) ¿Cuál es la probabilidad p de que ambos artículos sean defectuosos?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad p de que un artículo sea defectuoso y otro no?

(iii) Si un artículo es defectuoso y otro no, ¿cuál es la probabilidad p de que el artículo defectuoso proceda de la caja A?

(i) La probabilidad de escoger un artículo no defectuoso de A es $\frac{5}{8}$ y de B es $\frac{3}{5}$. Puesto que los eventos son independientes, $p = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$.

(ii) **Método 1.** La probabilidad de escoger dos artículos defectuosos es $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$. De (i) la probabilidad de que ambos sean no defectuosos es $\frac{3}{8}$. Por lo tanto $p = 1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{20} = \frac{19}{40}$.

Método 2. La probabilidad p_1 de escoger un artículo defectuoso de A y uno no defectuoso de B es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$. La probabilidad p_2 de escoger un artículo no defectuoso de A y uno defectuoso de B es $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto $p = p_1 + p_2 = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$.

(iii) Consideremos los eventos $X = \{$artículos defectuosos de $A\}$ y $Y = \{$un artículo es defectuoso y otro no$\}$. Buscamos $P(X \mid Y)$. Por (ii), $P(X \cap Y) = p_1 = \frac{9}{40}$ y $P(Y) = \frac{19}{40}$. Por consiguiente

$$p = P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}$$

4.27. Las probabilidades de que tres hombres peguen en el blanco son, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez al blanco. (i) Hallar la probabilidad p de que exactamente uno de ellos pegue en el blanco. (ii) Si solamente uno pega en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea el primer hombre?

Consideremos los eventos $A = \{$el primer hombre pega en el blanco$\}$, $B = \{$el segundo hombre pega en el blanco y $C = \{$el tercer hombre pega en el blanco$\}$; entonces $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(C) = \frac{1}{3}$. Los tres eventos son independientes, y $P(A^c) = \frac{5}{6}$, $P(B^c) = \frac{3}{4}$, $P(C^c) = \frac{2}{3}$.

(i) Sea $E = \{$exactamente un hombre pega en el blanco$\}$. Entonces

$$E = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

En otras palabras, si solamente uno pegó en el blanco, entonces fue o únicamente el primer hombre, $A \cap B^c \cap C^c$; o únicamente el segundo hombre, $A^c \cap B \cap C^c$; o únicamente el tercer hombre, $A^c \cap B^c \cap C$. Como los tres eventos son mutuamente exclusivos, obtenemos (usando el problema 4.62)

$$\begin{aligned} p = P(E) &= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) \\ &= P(A)\,P(B^c)\,P(C^c) + P(A^c)\,P(B)\,P(C^c) + P(A^c)\,P(B^c)\,P(C) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72} \end{aligned}$$

(ii) Buscamos $P(A \mid E)$, la probabilidad de que el primer hombre pegue en el blanco dado que solamente un hombre pega en el blanco. Ahora $A \cap E = A \cap B^c \cap C^c$ es el evento en que solamente el primer hombre pega en el blanco.

Por (i), $P(A \cap E) = P(A \cap B^c \cap C^c) = \frac{1}{12}$ y $P(E) = \frac{31}{72}$; o sea

$$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$$

PRUEBAS INDEPENDIENTES

4.28. Cierto tipo de proyectil da en el blanco con probabilidad 0,3. ¿Cuántos proyectiles deberán ser disparados para que haya al menos un 80% de probabilidad de pegar en el blanco?

La probabilidad de que un proyectil falle su blanco es 0,7; por lo tanto la probabilidad de que n proyectiles fallen el blanco es $(0,7)^n$. Así buscamos el menor n para el que

$$1-(0,7)^n > 0,8 \quad \text{o equivalentemente} \quad (0,7)^n < 0,2$$

Calculamos: $(0,7)^1 = 0,7$, $(0,7)^2 = 0,49$, $(0,7)^3 = 0,343$, $(0,7)^4 = 0,2401$, $(0,7)^5 = 0,16807$. Así por lo menos 5 proyectiles deben ser disparados.

4.29. Cierto equipo de balompié gana (W), con probabilidad 0,6; pierde (L), con probabilidad 0,3; y empata (T), con probabilidad 0,1. El equipo juega tres encuentros durante el fin de semana. (i) Determinar los elementos del evento A en que el equipo gana por lo menos dos y no pierde; y hallar $P(A)$. (ii) Determinar los elementos del evento B en que el equipo gana, pierde y empata, y hallar $P(B)$.

(i) A consta de todas las ternas con al menos dos W (juegos ganados) y ningún L (juego perdido). Así

$$A = \{\text{WWW, WWT, WTW, TWW}\}$$

Además

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{WWW}) + P(\text{WWT}) + P(\text{WTW}) + P(\text{TWW}) \\ &= (0,6)(0,6)(0,6) + (0,6)(0,6)(0,1) + (0,6)(0,1)(0,6) + (0,1)(0,6)(0,6) \\ &= 0,216 + 0,036 + 0,036 + 0,036 = 0,324 \end{aligned}$$

(ii) Aquí $B = \{\text{WLT, WTL, LWT, LTW, TWL, TLW}\}$. Puesto que cada elemento de B tiene probabilidad $(0,6)(0,3)(0,1) = 0,018$ $P(B) = 6(0,018) = 0,108$.

4.30. Sea S un espacio finito de probabilidad y sea T el espacio de probabilidad de n pruebas independientes de S. Comprobar que T está bien definido; esto es, mostrar, (i) la probabilidad de que cada elemento de T es no-negativo, y (ii) la suma de las probabilidades es 1.

Si $S = \{a_1, \ldots, a_r\}$, entonces T puede representarse por

$$T = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} : i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, r\}$$

Puesto que $P(a_i) \geq 0$, tenemos

$$P(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = P(a_{i_1}) \cdots P(a_{i_n}) \geq 0$$

para un elemento típico $a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ de T, lo cual prueba (i).

Probamos (ii) por inducción en n. Esto es cierto obviamente para $n = 1$. Por lo tanto consideremos $n > 1$ y aceptamos que (ii) ha sido probado para $n - 1$. Entonces

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{r} P(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{r} P(a_{i_1}) \cdots P(a_{i_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{r} P(a_{i_1}) \cdots P(a_{i_{n-1}}) \sum_{i_n=1}^{r} P(a_{i_n})$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{r} P(a_{i_1}) \cdots P(a_{i_{n-1}}) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{r} P(a_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}}) = 1$$

por la hipótesis inductiva, lo cual prueba (ii) para n.

Problemas propuestos

PROBABILIDAD CONDICIONAL

4.31. Se lanza un dado. Si el número es impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

4.32. Se lanzan tres monedas corrientes. Si aparecen dos caras y un sello, determinar la probabilidad de que aparezca una cara exactamente.

4.33. Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes, hallar la probabilidad de que su suma sea par.

4.34. A una persona se le reparten 5 cartas rojas de una baraja corriente de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean de la misma pinta, esto es, corazones o diamantes?

4.35. A una persona se le reparten 3 cartas, espadas, de una baraja corriente de 52 cartas. Si se le dan cuatro cartas más, determinar la probabilidad de que por lo menos dos de las cartas adicionales sean también espadas.

4.36. Se escogen al azar dos dígitos diferentes entre los dígitos 1 a 9.

(i) Si la suma es impar, ¿cuál es la probabilidad de que 2 sea uno de los números escogidos?

(ii) Si 2 es uno de los dígitos seleccionados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

4.37. Cuatro personas, llamadas Norte, Sur, Este y Oeste, reciben cada una, B cartas de una baraja corriente de 52 cartas.

(i) Si Sur tiene un as exactamente, ¿cuál es la probabilidad de que su compañero Norte tenga los otros tres ases?

(ii) Si Norte y Sur juntos tienen 10 corazones, ¿cuál es la probabilidad de que Este u Oeste tengan los otros 3 corazones?

4.38. Una clase tiene 10 niños y 5 niñas. Se escogen tres estudiantes de la clase al azar, uno tras otro. Hallar la probabilidad de que, (i) los dos primeros sean niños y la tercera niña, (ii) el primero y el tercero sean niños y el segundo niña, (iii) el primero y el tercero sean del mismo sexo y el segundo del sexo opuesto.

4.39. En el problema anterior, si el primer y tercer estudiantes seleccionados son del mismo sexo y el segundo estudiante es del sexo opuesto, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo sea niña?

4.40. En cierta ciudad, 40% de la población tiene cabellos castaños, 25% tiene ojos castaños y 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar.

(i) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

(ii) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

4.41. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Hallar, (i) $P(A|B)$, (ii) $P(B|A)$, (iii) $P(A \cap B^c)$, (iv) $P(A|B^c)$.

4.42. Sea $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ con $P(a) = \frac{1}{16}$, $P(b) = \frac{1}{16}$, $P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{3}{16}$, $P(e) = \frac{1}{4}$ y $P(f) = \frac{5}{16}$. Sea $A = \{a, c, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ y $C = \{b, c, f\}$. Hallar, (i) $P(A|B)$, (ii) $P(B|C)$, (iii) $P(C|A^c)$, (iv) $P(A^c|C)$.

4.43. En cierta facultad, 25% de los jóvenes y 10% de las jóvenes son estudiantes de matemáticas. Las mujeres constituyen el 60% de los hombres. Si se selecciona al azar un estudiante y resulta ser de matemáticas, determinar la probabilidad de que el estudiante sea una joven.

PROCESOS ESTOCASTICOS FINITOS

4.44. Se nos dan dos urnas como sigue:

Una urna A contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 8 azules.

La otra urna B contiene 3 bolas rojas y 5 blancas.

Se lanza un dado corriente; si aparece el 3 o el 6, se escoge una bola de B; de lo contrario la bola se escoge de A. Hallar la probabilidad de que, (i) se escoja una bola roja, (ii) se escoja una bola blanca, (iii) se escoja una bola azul.

4.45. Respecto al problema anterior. (i) Si se escoge una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de A? (ii) Si se escoge una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un 5 en el dado?

4.46. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan dos bolas del otro color en la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola. Hallar la probabilidad de que, (i) la segunda bola sea roja, (ii) ambas bolas sean del mismo color.

4.47. Respecto al problema anterior. (i) Si la segunda bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja? (ii) Si ambas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

4.48. Una caja contiene tres monedas, dos de ellas corrientes y una de dos caras. Se selecciona al azar una moneda y se lanza dos veces. Si aparece ambas veces cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea la de dos caras?

4.49. Se nos dan dos urnas como sigue:

Una urna A contiene 5 bolas rojas y 3 blancas.

La otra urna B contiene 1 bola roja y 2 blancas.

Se lanza un dado corriente; si aparece un 3 o un 6, se saca una bola de B y se pone en A y luego se saca una bola de A; de lo contrario, se saca una bola de A y se pone en B y luego se saca una bola de B.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

4.50. Una caja A contiene nueve cartas numeradas de 1 a 9, y otra caja B contiene 5 cartas numeradas de 1 a 5. Se escoge una caja al azar y se saca una carta; si la carta indica un número par, se saca otra carta de la misma caja; si la carta es de número impar, se saca una carta de la otra caja.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas muestren números pares?

(ii) Si ambas cartas muestran números pares, ¿cuál es la probabilidad de que procedan de A?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas tengan números impares?

4.51. Una caja contiene una moneda corriente y una de dos caras. Se escoge una moneda al azar y se lanza. Si aparece cara, se lanza la otra moneda; si aparece sello, se lanza la misma moneda.

(i) Hallar la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento.

(ii) Si resulta cara en el segundo lanzamiento, hallar la probabilidad de que también aparezca en el primero.

4.52. Una caja contiene tres monedas, dos corrientes y una de dos caras. Se selecciona una moneda al azar y se lanza. Si sale cara se lanza la moneda de nuevo; si sale sello, entonces se escoge otra moneda entre las dos que quedan y se lanza.

(i) Hallar la probabilidad de que salga cara dos veces.

(ii) Si se lanza la misma moneda dos veces, hallar la probabilidad de que sea la moneda de dos caras.

(iii) Hallar la probabilidad de que salga sello dos veces.

4.53. Una urna A contiene x bolas rojas y y bolas blancas, y otra urna B contiene z bolas rojas y v blancas.

(i) Si se escoge una urna al azar y se saca una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

(ii) Si se saca una bola de la urna A y se pone en la B y luego se saca una bola de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja?

4.54. Una caja contiene 5 tubos de radio de los cuales 2 son defectuosos. Se prueban los tubos uno tras otro hasta que se descubren dos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que se suspenda el proceso en la, (i) segunda prueba? (ii) la tercera prueba?

4.55. Respecto al problema anterior. Si el proceso se suspende en la tercera prueba, ¿cuál es la probabilidad de que el primer tubo no sea defectuoso?

INDEPENDENCIA

4.56. Probar: Si A y B son independientes, entonces A y B^c son independientes y A^c y B son independientes

4.57. Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{8}$ y $P(B) = p$. (i) Hallar p si A y B son mutuamente exclusivos. (ii) Hallar p si A y B son independientes. (iii) Hallar p si A es subconjunto de B.

4.58. Una urna A contiene 5 bolas rojas y 3 blancas, y una urna B contiene 2 rojas y 6 blancas.

(i) Si se saca una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color?

(ii) Si se sacan dos bolas de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que todas las cuatro bolas sean del mismo color?

4.59. Sea el caso de lanzar tres monedas corrientes. Sea $A = \{$todas caras o todas sellos$\}$, $B = \{$dos caras por lo menos$\}$ y $C = \{$dos caras cuando más$\}$. De las parejas (A, B), (A, C) y (B, C), ¿cuáles son independientes y cuáles dependientes?

4.60. La probabilidad de que A dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que B dé es $\frac{1}{3}$.

(i) Si cada uno dispara dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado una vez por lo menos?

(ii) Si cada uno dispara una vez y el blanco es alcanzado solamente una vez, ¿cuál es la probabilidad de que A dé en el blanco?

(iii) Si A puede disparar solamente dos veces, ¿cuántas veces debe disparar B para que haya por lo menos un 90% de probabilidad de que el blanco sea alcanzado?

4.61. Sean los eventos independientes A y B con $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Hallar, (i) $P(B)$, (ii) $P(A \mid B)$, (iii) $P(B^c \mid A)$.

4.62. Supóngase que A, B, C son eventos independientes. Comprobar que cualquiera de las combinaciones

$$A^c, B, C;\ A, B^c, C;\ \ldots;\ A^c, B^c, C;\ \ldots;\ A^c, B^c, C^c$$

son también independientes. Además, comprobar que A y $B \cup C$ son independientes; y así sucesivamente.

PRUEBAS INDEPENDIENTES

4.63. Un tirador pega (H), a su blanco con probabilidad 0,4; y además falla (M), con probabilidad 0,6. Dispara cuatro veces. (i) Determinar los elementos del evento A para que el hombre pegue al blanco dos veces exactamente; y hallar $P(A)$. (ii) Hallar la probabilidad de que el hombre pegue al blanco una vez por lo menos.

4.64. Un equipo gana (W), con probabilidad 0,5; pierde (L) con probabilidad 0,3; y empata (T), con probabilidad 0,2. El equipo juega dos veces. (i) Determinar el espacio muestral S y las probabilidades de los eventos elementales. (ii) Hallar la probabilidad de que el equipo gane una vez por lo menos.

4.65. Consideremos un espacio de probabilidad infinito contable $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Sea

$$T = S^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) : s_i \in S\}$$

y sea

$$P(s_1, s_2, \ldots, s_n) = P(s_1)\,P(s_2) \cdots P(s_n)$$

Comprobar que T también es un espacio de probabilidad infinito contable. (Esto generaliza la definición (página 58) de pruebas independientes para un espacio infinito contable.)

Respuestas a los problemas propuestos

4.31. $\frac{2}{3}$

4.32. $\frac{1}{2}$

4.33. $\frac{2}{5}$

4.34. $\dfrac{2\binom{13}{5}}{\binom{26}{5}} = \dfrac{9}{230}$

4.35. $1 - \dfrac{\binom{39}{4}}{\binom{49}{4}} - \dfrac{10\binom{39}{3}}{\binom{49}{4}}$

4.36. (i) $\frac{1}{4}$, (ii) $\frac{5}{8}$

4.37. (i) $\dfrac{\binom{36}{10}}{\binom{39}{13}} = \dfrac{22}{703}$ (ii) $\dfrac{2\binom{23}{10}}{\binom{26}{13}} = \dfrac{11}{50}$

4.38. (i) $\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$

(ii) $\frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$

(iii) $\frac{15}{91} + \frac{20}{273} = \frac{5}{21}$

4.39. $\dfrac{\frac{15}{91}}{\frac{5}{21}} = \frac{9}{13}$

4.40. (i) $\frac{3}{8}$, (ii) $\frac{2}{5}$, (iii) $\frac{1}{2}$

4.41. (i) $\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{1}{4}$, (iii) $\frac{1}{4}$, (iv) $\frac{1}{3}$

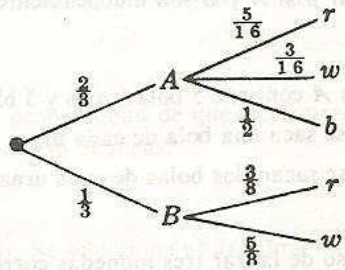
4.42. (i) $\frac{3}{7}$, (ii) $\frac{7}{8}$, (iii) $\frac{2}{3}$, (iv) $\frac{3}{4}$

4.43. $\frac{3}{8}$

4.44. (i) $\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) $\frac{1}{3}$



4.45. (i) $\frac{5}{8}$, (ii) $\frac{3}{32}$

4.46. (i) $\frac{41}{72}$, (ii) $\frac{13}{36}$

4.47. (i) $\frac{20}{41}$, (ii) $\frac{3}{13}$

4.48. $\frac{2}{3}$

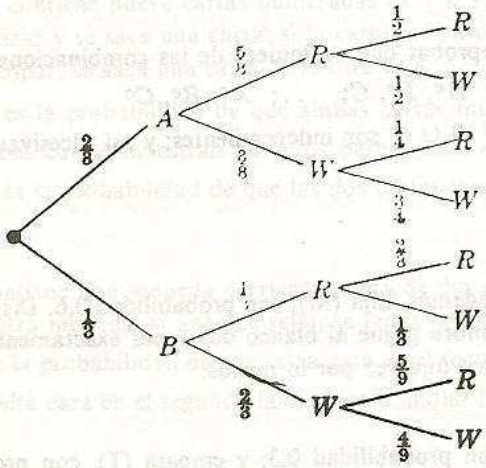


Diagrama de árbol del problema 4.49

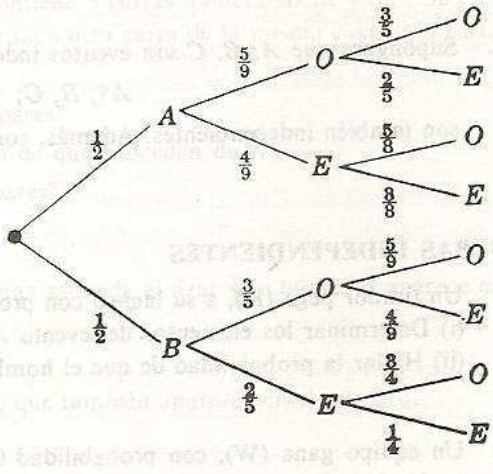


Diagrama de árbol del problema 4.50

4.49. (i) $\frac{5}{24} + \frac{2}{27} = \frac{61}{216}$, (ii) $\frac{3}{16} + \frac{8}{81} = \frac{371}{1296}$

4.50. (i) $\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$, (ii) $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{15}} = \frac{5}{8}$, (iii) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

4.51. (i) $\frac{5}{8}$, (ii) $\frac{4}{5}$

4.52. (i) $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{1}{12}$

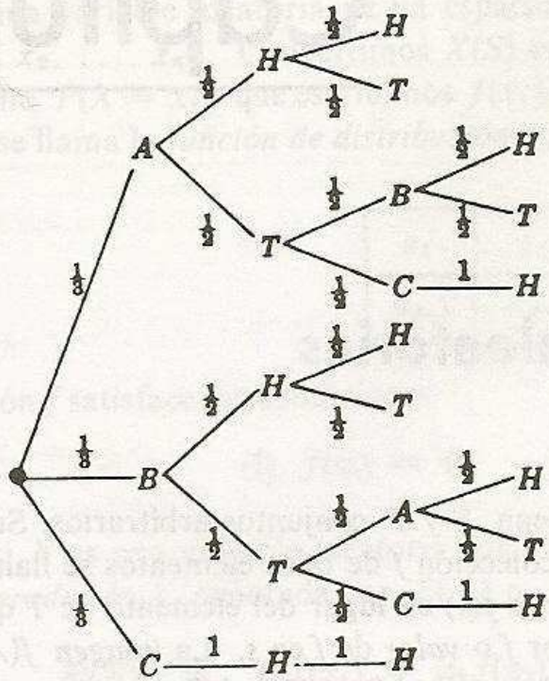


Diagrama de árbol del problema 4.52

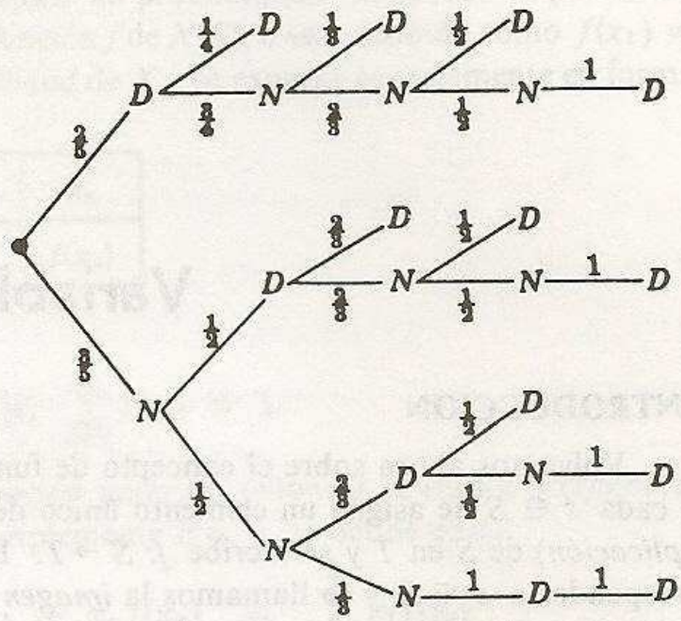


Diagrama de árbol del problema 4.54

4.53. (i) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{z}{z+v}\right)$, (ii) $\frac{xz+z+yz}{(x+y)(z+v+1)}$

4.54. (i) $\frac{1}{10}$, (ii) $\frac{3}{10}$; debemos incluir el caso en que los tres tubos no defectuosos aparecen primero, puesto que los últimos dos tubos tienen que ser los defectuosos

4.55. $\frac{2}{8}$

4.57. (i) $\frac{1}{12}$, (ii) $\frac{1}{9}$, (iii) $\frac{1}{3}$

4.58. (i) $\frac{7}{16}$, (ii) $\frac{55}{784}$

4.59. Solamente A y B son independientes

4.60. (i) $\frac{3}{4}$, (ii) $\frac{2}{5}$, (iii) 5

4.61. (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{2}{3}$

4.63. (i) A = {HHMM, HMHM, HMMH, MHHM, MHMH, MMHH}, $P(A) = 0{,}3456$
(ii) $1 - (0{,}6)^4 = 0{,}8704$

4.64. (i) S = {WW, WL, WT, LW, LL, LT, TW, TL, TT}
(ii) 0,75

Capítulo 5

Variables aleatorias

INTRODUCCION

Volvamos ahora sobre el concepto de función. Sean S y T conjuntos arbitrarios. Supóngase que a cada $s \in S$ se asigna un elemento único de T; la colección f de tales elementos se llama *función* (o *aplicación*) de S en T y se escribe $f: S \to T$. Escribimos $f(s)$ en lugar del elemento de T que f hace corresponder a $s \in S$ y lo llamamos la *imagen* de s por f o *valor* de f en s. La *imagen* $f(A)$ de un subconjunto A de S y la *imagen inversa* $f^{-1}(B)$ de un subconjunto B de T se definen por

$$f(A) = \{f(s) : s \in A\} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(B) = \{s : f(s) \in B\}$$

En otras palabras, $f(A)$ está formado por las imágenes de los puntos de A, y $f^{-1}(B)$ está formado por aquellos puntos cuyas imágenes pertenecen a B. En particular, el conjunto $f(S)$ de todas las imágenes se llama el *conjunto imagen* (o: *imagen* o *recorrido*) de f.

Supongamos ahora que S es el espacio muestral de algún experimento. Como anotamos previamente, los resultados del experimento, es decir, los puntos muestrales de S, no necesitan ser números. Sin embargo, frecuentemente deseamos asignar un número determinado a cada resultado; esto puede ser la suma de los puntos de un par de dados, el número de ases de una mano de "bridge", o el tiempo (en horas) que gasta una lámpara en fundirse. Tal asignación se denomina variable aleatoria; más precisamente,

Definición: Una *variable aleatoria* X de un espacio muestral S es una función de S en el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales tal que la imagen inversa de cada intervalo de $\mathbf{R}$ es un evento (o suceso) de S.

Hacemos énfasis en que si S es un espacio discreto en el cual cada subconjunto es un suceso, entonces cada función de valores reales de S es una variable aleatoria. Por otra parte, se puede comprobar que si S es no contable, entonces ciertas funciones de valores reales de S no son variables aleatorias.

Si X y Y son variables aleatorias del mismo espacio muestral S, entonces $X + Y$, $X + k$, kX y XY (donde k es un número real) son funciones de S definidas por

$$(X + Y)(s) = X(s) + Y(s) \qquad (kX)(s) = kX(s)$$

$$(X + k)(s) = X(s) + k \qquad (XY)(s) = X(s)\,Y(s)$$

para todo $s \in S$. Se puede comprobar que estas variables también son aleatorias. (Esto es trivial en el caso de que cada subconjunto de S sea un suceso.)

Usamos la notación abreviada $P(X = a)$ y $P(a \leq X \leq b)$ para la probabilidad de los sucesos "X toma el valor a" y "X toma valores en el intervalo $[a, b]$." Esto es,

$$P(X = a) = P(\{s \in S : X(s) = a\})$$

y

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{s \in S : a \leq X(s) \leq b\})$$

Significados análogos se dan a $P(X \leq a)$, $P(X = a, Y = b)$, $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$, etc.

DISTRIBUCION Y ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA FINITA

Sea X una variable aleatoria de un espacio muestral S con el conjunto imagen finito; a saber, $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Convertimos $X(S)$ en un espacio de probabilidad definiendo la probabilidad de x_i como $P(X = x_i)$ que escribimos $f(x_i)$. Esta función f de $X(S)$, o sea, definida como $f(x_i) = P(X = x_i)$, se llama la *función de distribución* o *probabilidad* de X y se expresa generalmente en forma de tabla:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

La distribución f satisface las condiciones

$$\text{(i)}\ f(x_i) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

Ahora si X es una variable aleatoria con la distribución anterior, entonces la *media* o *esperanza* (o: *valor esperado*) de X, denotada por $E(X)$ o μ_X, o simplemente E o μ, se define como

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Esto es, $E(X)$ es el *promedio ponderado* de los valores posibles de X, cada valor ponderado por su probabilidad.

Ejemplo 5.1: Se lanza un par de dados corrientes. Obtenemos el espacio finito equiprobable S que consta de las 36 parejas ordenadas de números entre 1 y 6:

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$$

Sea X que hace corresponder a cada punto (a, b) de S el máximo de sus números, o sea, $X(a, b) = \max(a, b)$. Entonces X es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen es

$$X(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Calculamos la distribución f de X:

$$f(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \tfrac{1}{36}$$

$$f(2) = P(X=2) = P(\{(2,1), (2,2), (1,2)\}) = \tfrac{3}{36}$$

$$f(3) = P(X=3) = P(\{(3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3)\}) = \tfrac{5}{36}$$

$$f(4) = P(X=4) = P(\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (3,4), (2,4), (1,4)\}) = \tfrac{7}{36}$$

Similarmente,

$$f(5) = P(X=5) = \tfrac{9}{36} \qquad \text{y} \qquad f(6) = P(X=6) = \tfrac{11}{36}$$

Esta información se pone en forma de tabla como sigue:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Calculamos la media de X:

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 1 \cdot \tfrac{1}{36} + 2 \cdot \tfrac{3}{36} + 3 \cdot \tfrac{5}{36} + 4 \cdot \tfrac{7}{36} + 5 \cdot \tfrac{9}{36} + 6 \cdot \tfrac{11}{36}$$

$$= \tfrac{161}{36} = 4{,}47$$

Ahora sea Y que hace corresponder a cada punto (a, b) de S la suma de sus números, o sea, $Y(a, b) = a + b$. Entonces Y es también una variable aleatoria de S con conjunto imagen

$$Y(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A continuación la distribución g de Y:

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

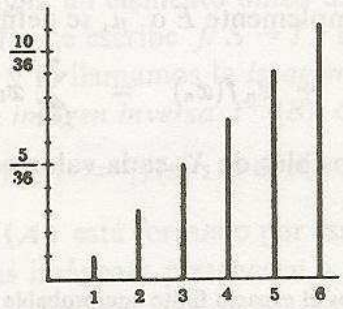
Obtenemos, por ejemplo, $g(4) = \frac{3}{36}$ del hecho de que, (1, 3), (2, 2) y (3, 1) son aquellos puntos de S para los que la suma de componentes es 4; por tanto

$$g(4) = P(Y=4) = P\big(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\big) = \frac{3}{36}$$

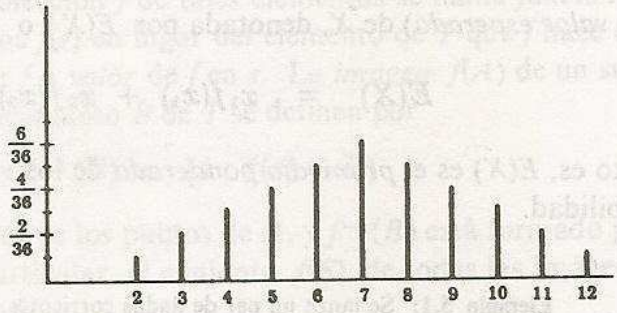
La media de Y se calcula como sigue:

$$E(Y) = \sum y_i g(y_i) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \cdots + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Los siguientes diagramas describen gráficamente las distribuciones anteriores:



Distribución de X



Distribución de Y

Obsérvese que las líneas verticales dibujadas sobre los números del eje horizontal son proporcionales a sus probabilidades.

Ejemplo 5.2: Una moneda cargada tal que $P(H) = \frac{2}{3}$ y $P(T) = \frac{1}{3}$ se lanza tres veces. Las probabilidades de los puntos del espacio muestral $S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$ son las siguientes:

$$P(\text{HHH}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{27} \qquad P(\text{THH}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{27}$$

$$P(\text{HHT}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{27} \qquad P(\text{THT}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{27}$$

$$P(\text{HTH}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{27} \qquad P(\text{TTH}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{27}$$

$$P(\text{HTT}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{27} \qquad P(\text{TTT}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{27}$$

Sea X la variable que asigna a cada punto de S el mayor número de caras sucesivas que suceda. Así,

$$X(\text{TTT}) = 0$$

$$X(\text{HTH}) = 1, \quad X(\text{HTT}) = 1, \quad X(\text{THT}) = 1, \quad X(\text{TTH}) = 1$$

$$X(\text{HHT}) = 2, \quad X(\text{THH}) = 2$$

$$X(\text{HHH}) = 3$$

El conjunto imagen de X es $X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$. Calculamos la distribución f de X:

$$f(0) = P(\text{TTT}) = \tfrac{1}{27}$$

$$f(1) = P(\{\text{HTH, HTT, THT, TTH}\}) = \tfrac{4}{27} + \tfrac{2}{27} + \tfrac{2}{27} + \tfrac{2}{27} = \tfrac{10}{27}$$

$$f(2) = P(\{\text{HHT, THH}\}) = \tfrac{4}{27} + \tfrac{4}{27} = \tfrac{8}{27}$$

$$f(3) = P(\text{HHH}) = \tfrac{8}{27}$$

Esta información se tabula en la siguiente forma:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

La media de X se calcula como sigue:

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{10}{27} + 2 \cdot \tfrac{8}{27} + 3 \cdot \tfrac{8}{27} = \tfrac{50}{27} = 1{,}85$$

Ejemplo 5.3: Se selecciona al azar una muestra de tres artículos de una caja que contiene 12 de los cuales 3 son defectuosos. Hallar el valor esperado E de los artículos defectuosos.

El espacio muestral S consta de las $\binom{12}{3} = 220$ muestras diferentes igualmente posibles de tamaño 3. Notamos que hay:

$$\binom{9}{3} = 84 \text{ muestras sin artículos defectuosos;}$$

$$3 \cdot \binom{9}{2} = 108 \text{ muestras con 1 artículo defectuoso;}$$

$$\binom{3}{2} \cdot 9 = 27 \text{ muestras con 2 artículos defectuosos;}$$

$$\binom{3}{3} = 1 \text{ muestra con 3 artículos defectuosos.}$$

Así la probabilidad de coger 0, 1, 2 y 3 artículos defectuosos es respectivamente 84/220, 108/220, 27/220 y 1/220. Así el número esperado E de los artículos defectuosos es

$$E = 0 \cdot \tfrac{84}{220} + 1 \cdot \tfrac{108}{220} + 2 \cdot \tfrac{27}{220} + 3 \cdot \tfrac{1}{220} = \tfrac{165}{220} = 0{,}75$$

Nota: Implícitamente obtuvimos el valor esperado de la variable aleatoria X que asigna a cada muestra el número de artículos defectuosos que contiene.

En un juego de dinero, el valor esperado E del juego se considera como el juego del jugador. Se dice que el juego es *favorable* al jugador si E es positivo, y *desfavorable* si E es negativo. Si $E = 0$, el juego es legal.

Ejemplo 5.4: Un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número primo gana dicho número de dólares, pero si no sale un número primo entonces pierde esa cantidad de dólares. Los resultados posibles x_i del juego con sus respectivas probabilidades $f(x_i)$ son como sigue:

x_i	2	3	5	−1	−4	−6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Los números negativos −1, −4 y −6 corresponden al hecho de que el jugador pierde si no sale un número primo. El valor esperado del juego es

$$E = 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} - 1 \cdot \tfrac{1}{6} - 4 \cdot \tfrac{1}{6} - 6 \cdot \tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{6}$$

Por tanto, el juego es desfavorable para el jugador puesto que el valor esperado es negativo.

Nuestros primeros teoremas en relación con la noción de valor esperado para operaciones de variables aleatorias son

Teorema 5.1: Sea X una variable aleatoria y k un número real. Entonces (i) $E(kX) = kE(X)$, y (ii) $E(X + k) = E(X) + k$.

Teorema 5.2: Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S. Entonces $E(X + Y) =$

Un simple argumento de inducción conduce al

Corolario 5.3: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias de S. Luego

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

VARIANZA Y DESVIACION ESTANDAR

La media de una variable aleatoria X mide, en cierto sentido, el valor "promedio" de X. El concepto siguiente, el de la varianza de X, mide el "esparcimiento" o "dispersión" de X.

Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Entonces la *varianza* de X, denotada por $\operatorname{var}(X)$, se define como

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = E((X - \mu)^2)$$

donde μ es la media de X. La *desviación estándar* de X, denotada por σ_X, es la raíz cuadrada (no-negativa) de $\operatorname{var}(X)$:

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

El teorema siguiente nos da una alternativa y algunas veces una fórmula más útil para calcular la varianza de la variable aleatoria X.

Teorema 5.4: $\operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$.

Prueba. Usando $\sum x_i f(x_i) = \mu$ y $\sum f(x_i) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) &= \sum (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum x_i f(x_i) + \mu^2 \sum f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 \end{aligned}$$

lo cual prueba el teorema.

Ejemplo 5.5: Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 5.1 (que asigna el máximo de los números que se muestran en un par de dados). La distribución de X es

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

y su media es $\mu_X = 4{,}47$. Calculamos la varianza y la desviación estándar de X. Primero calculamos $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) &= 1^2 \cdot \tfrac{1}{36} + 2^2 \cdot \tfrac{3}{36} + 3^2 \cdot \tfrac{5}{36} + 4^2 \cdot \tfrac{7}{36} + 5^2 \cdot \tfrac{9}{36} + 6^2 \cdot \tfrac{11}{36} \\ &= \tfrac{791}{36} = 21{,}97 \end{aligned}$$

entonces

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 21{,}97 - 19{,}98 = 1{,}99 \quad \text{y} \quad \sigma_X = \sqrt{1{,}99} = 1{,}4$$

Ahora consideramos la variable aleatoria Y del ejemplo 5.1 (que asigna la suma de los números que se muestran en un par de dados). La distribución de Y es

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y su media es $\mu_Y = 7$. Calculamos la varianza y la desviación estándar de Y. Primero calculamos $E(Y^2)$:

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 g(y_i) = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = 54{,}8$$

entonces

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 54{,}8 - 49 = 5{,}8 \quad \text{y} \quad \sigma_Y = \sqrt{5{,}8} = 2{,}4$$

Establecemos algunas propiedades de la varianza en el

Teorema 5.5: Sea X una variable aleatoria y k un número real. Entonces (i) $\text{var}(X + k) = \text{var}(X)$, y (ii) $\text{var}(kX) = k^2\,\text{var}(X)$. Por lo tanto, $\sigma_{X+k} = \sigma_X$ y $\sigma_{kX} = |k|\sigma_X$.

Nota 1. Hay una interpretación física de la media y la varianza. Supóngase que para cada punto x_i sobre el eje x se coloca una unidad con masa $f(x_i)$. Entonces la media es el centro de gravedad del sistema, y la varianza es el momento de inercia del sistema.

Nota 2. Muchas variables aleatorias dan origen a la misma distribución; de aquí que hablemos frecuentemente de la media, la varianza y la desviación estándar de una distribución en lugar de la variable aleatoria fundamental.

Nota 3. Sea X una variable aleatoria con media μ y desviación estándar $\sigma > 0$. La *variable aleatoria X^* estandarizada* que corresponde a X se define por

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Comprobamos que $E(X^*) = 0$ y $\text{var}(X^*) = 1$ (problema 5.23).

DISTRIBUCION CONJUNTA

Sean X y Y variables aleatorias de un espacio muestral S con los respectivos conjuntos imagen

$$X(S) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{y} \quad Y(S) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

Formamos el conjunto producto

$$X(S) \times Y(S) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_n, y_m)\}$$

en un espacio de probabilidad definiendo la *probabilidad* de la pareja ordenada (x_i, y_j) como $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ que escribimos $h(x_i, y_j)$. Esta función h de $X(S) \times Y(S)$, esto es, definida por $h(x_i, y_j) = P(X = x_i,\ Y = y_j)$, se llama *distribución conjunta* o *función de probabilidad conjunta* de X y Y y se da en forma de tabla por lo general:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	Suma
x_1	$h(x_1, y_1)$	$h(x_1, y_2)$	$\cdots$	$h(x_1, y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$h(x_2, y_1)$	$h(x_2, y_2)$	$\cdots$	$h(x_2, y_m)$	$f(x_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	$h(x_n, y_1)$	$h(x_n, y_2)$	$\cdots$	$h(x_n, y_m)$	$f(x_n)$
Suma	$g(y_1)$	$g(y_2)$	$\cdots$	$g(y_m)$	

Las funciones f y g anteriores se definen por

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) \qquad \text{y} \qquad g(y_j) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_j)$$

o sea, $f(x_i)$ es la suma de los elementos de la fila i-ésima y $g(y_j)$ es la suma de los elementos de la columna j-ésima; son llamadas *distribuciones marginales* y son, de hecho, las distribuciones (individuales) de X y Y respectivamente (problema 5.12). La distribución conjunta h satisface las condiciones

$$\text{(i)} \quad h(x_i, y_j) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) = 1$$

Ahora si X y Y son variables aleatorias con la distribución conjunta anterior (y las respectivas medias μ_X y μ_Y), entonces la *covarianza* de X y Y denotada por $\text{cov}(X, Y)$, se define por

$$\text{cov}\,(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)\, h(x_i, y_j) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

o equivalentemente (ver problema 5.18) por

$$\text{cov}\,(X, Y) = \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X \mu_Y = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

La *correlación* de X y Y, denotada por $\rho(X, Y)$, se define por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

La correlación ρ no es dimensionada y tiene las siguientes propiedades:

$$\text{(i)} \quad \rho(X, Y) = \rho(Y, X) \qquad \text{(iii)} \quad \rho(X, X) = 1,\ \rho(X, -X) = -1$$

$$\text{(ii)} \quad -1 \leq \rho \leq 1 \qquad \text{(iv)} \quad \rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y), \ \text{si} \ a, c \neq 0$$

Más adelante (ejemplo 5.7) mostramos qué parejas de variables aleatorias con distribuciones (individuales) idénticas pueden tener covarianzas y correlaciones diferentes. Así $\text{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$ son medidas de la manera como X y Y están relacionadas entre sí.

Ejemplo 5.6: Se lanza un par de dados corrientes. Obtenemos el espacio equiprobable finito S que está formado por 36 parejas ordenadas de números entre 1 y 6:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

Sean X y Y las variables aleatorias de S en el ejemplo 5.1, o sea, X designa el máximo número y Y la suma de los números de cada punto de S. La distribución conjunta de X y Y es la siguiente:

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Suma
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
Suma	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

El elemento anterior $h(3, 5) = \frac{2}{36}$ viene del hecho de que (3, 2) y (2, 3) son los únicos puntos de S cuyo número máximo es 3 y cuya suma es 5; por tanto,

$$h(3,5) = P(X=3, Y=5) = P(\{(3,2), (2,3)\}) = \frac{2}{36}$$

Los otros elementos se obtienen de manera similar.

Calculemos la covarianza y la correlación de X y Y. Primero calculemos $E(XY)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum x_i y_j h(x_i, y_j) \\ &= 1\cdot 2\cdot \tfrac{1}{36} + 2\cdot 3\cdot \tfrac{2}{36} + 2\cdot 4\cdot \tfrac{1}{36} + \cdots + 6\cdot 12\cdot \tfrac{1}{36} \\ &= \frac{1232}{36} = 34{,}2 \end{aligned}$$

Por el ejemplo 5.1, $\mu_X = 4{,}47$ y $\mu_Y = 7$ y por el ejemplo 5.5, $\sigma_X = 1{,}4$ y $\sigma_Y = 2{,}4$; de aquí

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 34{,}2 - (4{,}47)(7) = 2{,}9$$

y

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{2{,}9}{(1{,}4)(2{,}4)} = 0{,}86$$

Ejemplo 5.7: Sean X y Y, y X' y Y' variables aleatorias con las distribuciones conjuntas siguientes:

X \ Y	4	10	Suma
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Suma	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

X' \ Y'	4	10	Suma
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Suma	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Obsérvese que X y X', y Y y Y' tienen distribuciones idénticas:

x_i	1	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Distribución de X y X'

y_i	4	10
$g(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Distribución de Y y Y'

Comprobamos que $\operatorname{cov}(X, Y) \neq \operatorname{cov}(X', Y')$ y de aquí $\rho(X, Y) \neq \rho(X', Y')$. Primero calculamos $E(XY)$ y $E(X'Y')$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1\cdot 4\cdot \tfrac{1}{4} + 1\cdot 10\cdot \tfrac{1}{4} + 3\cdot 4\cdot \tfrac{1}{4} + 3\cdot 10\cdot \tfrac{1}{4} = 14 \\ E(X'Y') &= 1\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 10\cdot \tfrac{1}{2} + 3\cdot 4\cdot \tfrac{1}{2} + 3\cdot 10\cdot 0 = 11 \end{aligned}$$

Como $\mu_X = \mu_{X'} = 2$ y $\mu_Y = \mu_{Y'} = 7$,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{cov}(X', Y') = E(X'Y') - \mu_{X'}\mu_{Y'} = -3$$

Nota: La noción de una distribución conjunta h se extiende a un número finito de variables aleatorias $X, Y, \ldots, Z$ de manera obvia; esto es, h es una función del conjunto producto $X(S) \times Y(S) \times \cdots \times Z(S)$ definida por

$$h(x_i, y_j, \ldots, z_k) = P(X = x_i, Y = y_j, \ldots, Z = z_k)$$

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Se dice que un número finito de variables aleatorias $X, Y, \ldots, Z$ de un espacio muestral S son *independientes* si

$$P(X = x_i, Y = y_j, \ldots, Z = z_k) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j) \cdots P(Z = z_k)$$

para valores $x_i, x_j, \ldots, z_k$. En particular, X y Y son independientes si

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j)$$

Ahora si X y Y tienen las distribuciones f y g, respectivamente, y la distribución conjunta h, entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$h(x_i, y_j) = f(x_i)\,g(y_j)$$

En otras palabras, X y Y son independientes si cada elemento $h(x_i, y_j)$ es el producto de sus elementos marginales.

Ejemplo 5.8: Sean X y Y variables aleatorias con la distribución conjunta siguiente:

$X \backslash Y$	2	3	4	Suma
1	0,06	0,15	0,09	0,30
2	0,14	0,35	0,21	0,70
Suma	0,20	0,50	0,30	

Así, las distribuciones de X y Y son como sigue:

x	1	2
$f(x)$	0,30	0,70

Distribución de X

y	2	3	4
$g(y)$	0,20	0,50	0,30

Distribución de Y

X y Y son variables aleatorias independientes puesto que cada elemento de la distribución conjunta puede obtenerse multiplicando sus elementos marginales; esto es,

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j)$$

para cada i y cada j.

Establezcamos algunas propiedades importantes de variables aleatorias que no se cumplen en general, a saber,

Teorema 5.6: Sean X y Y variables aleatorias independientes. Entonces:

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$,

(ii) $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$,

(iii) $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

La parte (ii) del teorema anterior generaliza al muy importante

Teorema 5.7: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. Entonces

$$\operatorname{var}(X_1 + \cdots + X_n) = \operatorname{var}(X_1) + \cdots + \operatorname{var}(X_n)$$

FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S. Entonces se dice que Y es una *función* de X si Y puede representarse por alguna función Φ de valor real de una variable real $Y = \Phi(X)$; esto es, si $Y(s) = \Phi[X(s)]$ para todo $s \in S$. Por ejemplo, kX, X^2, $X + k$ y $(X + k)^2$ son todas funciones de X con $\Phi(x) = kx, x^2, x + k$ y $(x + k)^2$ respectivamente. Tenemos el teorema fundamental

Teorema 5.8: Sean X y Y variables aleatorias de un mismo espacio muestral S con $Y = \Phi(X)$. Entonces

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i) f(x_i)$$

donde f es la función de distribución de X.

Similarmente, se dice que una variable aleatoria Z es una función de X y Y si Z se puede representar por $Z = \Phi(X, Y)$ donde Φ es una función de valor real de dos variables reales; esto es, si

$$Z(s) = \Phi[X(s), Y(s)]$$

para todo $s \in S$. Conforme al teorema anterior, tenemos

Teorema 5.9: Sean X, Y y Z variables aleatorias del mismo espacio muestral S con $Z = \Phi(X, Y)$. Entonces

$$E(Z) = \sum_{i,j} \Phi(x_i, y_j)\, h(x_i, y_j)$$

donde h es la distribución conjunta de X y Y.

Hacemos notar que los dos teoremas anteriores se usaron implícitamente en la discusión y teoremas precedentes. También hacemos notar que la prueba del teorema 5.9 se da como un problema propuesto, y que el teorema se generaliza para una función de n variables aleatorias en forma obvia.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS EN GENERAL

Ahora supóngase que X es una variable aleatoria de S con un conjunto imagen infinito contable; o sea, $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Tales variables aleatorias junto con aquellas de conjuntos imagen finitos (considerados atrás) son llamadas variables aleatorias *discretas*. Como en el caso finito, construimos $X(S)$ en un espacio de probabilidad definiendo la *probabilidad* de x_i como $f(x_i) = P(X = x_i)$ y llamamos f la *distribución* de x:

x_1	x_2	x_3	$\cdots$
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$

El valor esperado $E(X)$ y la varianza $\text{var}(X)$ se definen por

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

$$\text{var}(X) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

cuando las series pertinentes convergen absolutamente. Se puede demostrar que $\text{var}(X)$ existe si y sólo si $\mu = E(X)$ y $E(X^2)$ existen ambos y que en este caso la fórmula

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

es válida justamente como en el caso finito. Cuando $\text{var}(X)$ existe, la *desviación estándar* σ_X se define como en el caso finito por

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Las nociones de distribución conjunta, variables aleatorias independientes y funciones de variables aleatorias se extienden directamente al caso general. Se puede demostrar que si X y Y están definidas en el mismo espacio muestral S y si $\text{var}(X)$ y $\text{var}(Y)$ existen, entonces las series

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)\, h(x_i, y_j)$$

convergen absolutamente y la relación

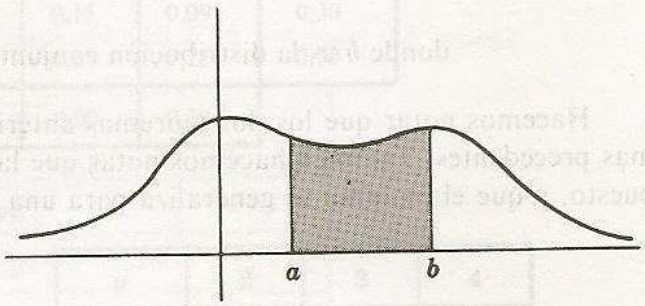
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X \mu_Y = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

se cumple justamente como en el caso finito.

Nota: Para evadir tecnicismos estableceremos muchos teoremas en este capítulo únicamente para variables aleatorias finitas.

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Supóngase que X es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen $X(S)$ es un conjunto continuo de números tales como un intervalo. Recalcamos de la definición de variables aleatorias que el conjunto $\{a \leq X \leq b\}$ es un suceso de S y, por consiguiente, la probabilidad $P(a \leq X \leq b)$ está bien definida. Suponemos que existe una función continua especial $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $P(a \leq X \leq b)$ es igual al área bajo la curva de f entre $x = a$ y $x = b$ (como se muestra a la derecha). En el lenguaje del cálculo,



$P(a \leq X \leq b)$ = área de la parte sombreada

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

En este caso se dice que X es una *variable aleatoria continua*. La función f se llama función de *distribución* o de *probabilidad continua* (o *función de densidad*) de X; que satisface las condiciones

$$\text{(i)}\ f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\ \int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx = 1$$

Esto es, f es no negativa y el área total bajo su curva es 1.

El valor *esperado* $E(X)$ se define por

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\, dx$$

cuando existe. Las funciones de variables aleatorias se definen justamente como en el caso discreto; y puede demostrarse que si $Y = \Phi(X)$, entonces

$$E(Y) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x) f(x)\, dx$$

cuando el miembro de la derecha existe. La *varianza* $\operatorname{var}(X)$ se define por

$$\operatorname{var}(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{\mathbf{R}} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

cuando existe. Justamente como en el caso discreto, se puede demostrar que $\operatorname{var}(X)$ existe si y sólo si $\mu = E(X)$ y $E(X^2)$ existen y, por tanto,

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

La *desviación estándar* σ_X se define por $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$ cuando var (X) existe.

Ya habíamos hecho hincapié en que estableceríamos muchos resultados para variables aleatorias finitas y los daríamos por supuestos en el caso general discreto y en el caso continuo.

Ejemplo 5.9: Sea X una variable aleatoria continua con la distribución siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Entonces

$P(1 \leq X \leq 1{,}5) =$ área de la región sombreada del diagrama

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}) = \tfrac{5}{16}$$

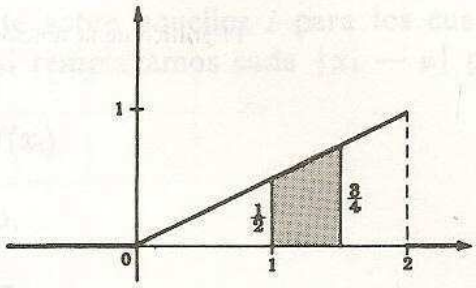


Gráfico de f

Calculamos luego el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de X:

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x\, f(x)\, dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2}x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2}x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \quad \text{y} \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Un número finito de variables aleatorias continuas, a saber $X, Y, \ldots, Z$, se dice que son *independientes* si para unos intervalos $[a, a'], [b, b'], \ldots, [c, c']$,

$$P(a \leq X \leq a', b \leq Y \leq b', \ldots, c \leq Z \leq c') = P(a \leq X \leq a')P(b \leq Y \leq b') \cdots P(c \leq Z \leq c')$$

Obsérvese que los intervalos desempeñan el mismo papel en el caso continuo que los puntos en el caso discreto.

FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA

Sea X una variable aleatoria (discreta o continua). La *función de distribución acumulativa* F de X es la función $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(a) = P(X \leq a)$$

Si X es una variable aleatoria discreta de distribución f, entonces F es la "función escalonada" definida por

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua de distribución f, entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

En ambos casos, F es monótona creciente, esto es

$$F(a) \leq F(b) \quad \text{siempre que} \quad a \leq b$$

y el límite de F a la izquierda es 0 y a la derecha es 1:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Ejemplo 5.10: Sea X una variable aleatoria discreta con la distribución siguiente:

x_i	-2	1	2	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

El gráfico de la función de distribución acumulativa F de X es

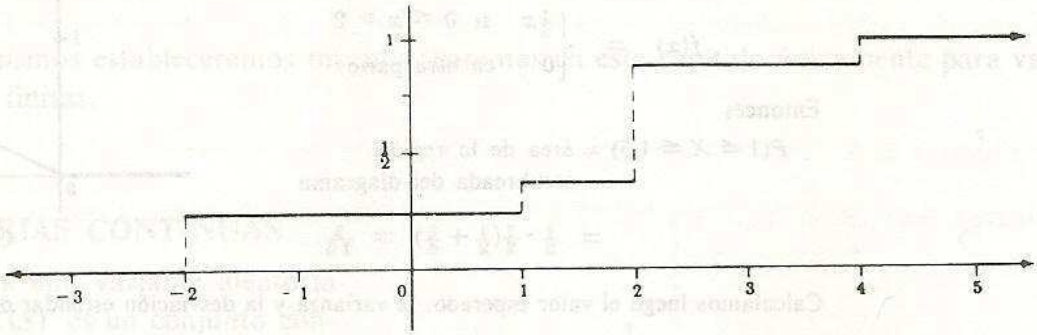


Gráfico de F

Obsérvese que F es una "función escalonada" con un escalón en x_i de altura $f(x_i)$.

Ejemplo 5.11: Sea X una variable aleatoria continua con la distribución siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

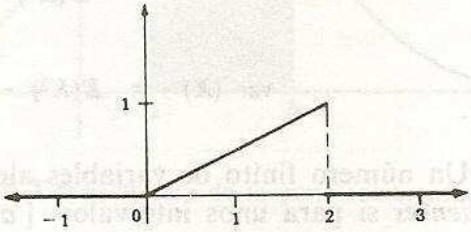


Gráfico de F

La función de distribución acumulativa F y su gráfico se muestran así:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

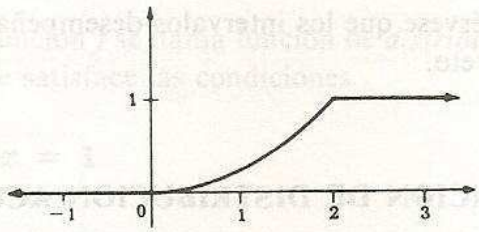


Gráfico de F

Aquí nos valemos del hecho que para $0 \leq x \leq 2$,

$$F(x) = \int_0^x \tfrac{1}{2}t\,dt = \tfrac{1}{4}x^2$$

DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF. LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

La idea intuitiva de probabilidad es la tan nombrada "ley de los promedios", esto es, si un evento A sucede con probabilidad p, entonces el "número promedio de sucesos de A" se acerca a p tanto como el número de pruebas independientes aumenta. Este concepto se precisa con la ley de los grandes números que se establece luego. La prueba de este teorema se vale de la bien conocida desigualdad siguiente de Tchebycheff:

Teorema 5.10: (Desigualdad de Tchebycheff): Sea X una variable aleatoria con promedio μ y desviación estándar σ. Entonces para cada $\epsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Prueba. Empezamos con la definición de varianza:

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

En las series anteriores suprimimos todos los términos para los cuales $|x_i - \mu| < \epsilon$. Esto no aumenta el valor de las series, puesto que todos sus términos son no negativos; esto es,

$$\sigma^2 \geq \sum_i{}^* (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

donde el asterisco indica que la sumatoria se extiende solamente sobre aquellos i para los cuales $|x_i - \mu| \geq \epsilon$. Así, esta nueva sumatoria no aumenta en valor si remplazamos cada $|x_i - \mu|$ por ϵ; esto es,

$$\sigma^2 \geq \sum_i{}^* \epsilon^2 f(x_i) = \epsilon^2 \sum_i{}^* f(x_i)$$

Pero $\sum^* f(x_i)$ es igual a la probabilidad que $|X - \mu| \geq \epsilon$; por tanto,

$$\sigma^2 \geq \epsilon^2 P(|X - \mu| \geq \epsilon)$$

Dividiendo por ϵ^2 conseguimos la desigualdad buscada.

Teorema 5.11: (Ley de los grandes números): Sea $X_1, X_2, \ldots$, una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución con promedio μ y varianza σ^2. Sea

$$\bar{S}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$$

(llamada la *muestra media*). Entonces para un $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{S}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0 \text{ o equivalentemente } \lim_{n\to\infty} P(|\bar{S}_n - \mu| < \epsilon) = 1$$

Prueba. Nótese primero que

$$E(\bar{S}_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Puesto que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, del teorema 5.7 se deduce que

$$\text{var}\,(X_1 + \cdots + X_n) = \text{var}\,(X_1) + \cdots + \text{var}\,(X_n) = n\sigma^2$$

Por consiguiente por el teorema 5.5(ii),

$$\text{var}\,(\bar{S}_n) = \text{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\text{var}\,(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Así, por la desigualdad de Tchebycheff,

$$P(|\bar{S}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

El teorema resulta del hecho de que el límite a la derecha es 0 cuando $n \to \infty$.

Las notas siguientes son en su orden:

Nota 1. Probamos la desigualdad de Tchebycheff solamente para el caso discreto. El caso continuo se deriva de una prueba análoga en que se usan integrales en lugar de sumatorias.

Nota 2. Probamos la ley de los números grandes solamente para el caso en que exista la varianza de X_i, esto es, no diverge. Observamos que el teorema es verdadero siempre que $E(X_i)$ existe.

Nota 3. La ley de los grandes números anteriores llamada también la ley débil de los grandes números a causa de un teorema similar, pero más firme, llamado la ley fuerte de los grandes números.

Problemas resueltos

VARIABLES ALEATORIAS Y VALOR ESPERADO

5.1. Hallar el valor esperado μ, la varianza σ^2 y la desviación estándar σ de cada una de las siguientes distribuciones:

(i)

x_i	2	3	11
$f(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(ii)

x_i	−5	−4	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	0,4	0,1	0,2	0,3

(i)
$$\mu = \sum x_i f(x_i) = 2\cdot\tfrac{1}{3} + 3\cdot\tfrac{1}{2} + 11\cdot\tfrac{1}{6} = 4$$
$$\sum x_i^2 f(x_i) = 2^2\cdot\tfrac{1}{3} + 3^2\cdot\tfrac{1}{2} + 11^2\cdot\tfrac{1}{6} = 26$$
$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 26 - 16 = 10$$
$$\sigma = \sqrt{10} = 3{,}2$$

(ii)
$$\mu = \sum x_i f(x_i) = -5\cdot\tfrac{1}{4} - 4\cdot\tfrac{1}{8} + 1\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{8} = -1$$
$$\sum x_i^2 f(x_i) = 25\cdot\tfrac{1}{4} + 16\cdot\tfrac{1}{8} + 1\cdot\tfrac{1}{2} + 4\cdot\tfrac{1}{8} = 9{,}25$$
$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 9{,}25 - 1 = 8{,}25$$
$$\sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}9$$

(iii)
$$\mu = \sum x_i f(x_i) = 1(0{,}4) + 3(0{,}1) + 4(0{,}2) + 5(0{,}3) = 3$$
$$\sum x_i^2 f(x_i) = 1(0{,}4) + 9(0{,}1) + 16(0{,}2) + 25(0{,}3) = 12$$
$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 12 - 9 = 3$$
$$\sigma = \sqrt{3} = 1{,}7$$

5.2. Se lanza un dado corriente. Designemos X como el doble del número que aparezca, y denotemos Y como 1 ó 3 según que el número sea impar o par. Hallar la distribución, el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de, (i) X, (ii) Y, (iii) $X + Y$, (iv) XY.

El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y cada número aparece con probabilidad $\frac{1}{6}$.

(i) $X(1) = 2$, $X(2) = 4$, $X(3) = 6$, $X(4) = 8$, $X(5) = 10$, $X(6) = 12$. Así $X(S) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y cada número tiene probabilidad $\frac{1}{6}$. Así, la distribución de X es como sigue

x_i	2	4	6	8	10	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Por consiguiente,

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 2\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + 6\cdot\tfrac{1}{6} + 8\cdot\tfrac{1}{6} + 10\cdot\tfrac{1}{6} + 12\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{42}{6} = 7$$
$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i)$$
$$= 4\cdot\tfrac{1}{6} + 16\cdot\tfrac{1}{6} + 36\cdot\tfrac{1}{6} + 64\cdot\tfrac{1}{6} + 100\cdot\tfrac{1}{6} + 144\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{364}{6} = 60{,}7$$
$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 60{,}7 - (7)^2 = 11{,}7$$
$$\sigma_X = \sqrt{11{,}7} = 3.4$$

(ii) $Y(1) = 1,\ Y(2) = 3,\ Y(3) = 1,\ Y(4) = 3,\ Y(5) = 1,\ Y(6) = 3.$ O sea: $Y(S) = \{1, 3\}$ y

$$g(1) = P(Y = 1) = P(\{1, 3, 5\}) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad g(3) = P(Y = 3) = P(\{2, 4, 6\}) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

De esta forma la distribución de Y es como sigue:

y_j	1	3
$g(y_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En consecuencia,

$$\mu_Y = E(Y) = \sum y_j g(y_j) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 2$$

$$E(Y^2) = \sum y_j^2 g(y_j) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 9 \cdot \tfrac{1}{2} = 5$$

$$\sigma_Y^2 = \text{var}\ (Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\sigma_Y = \sqrt{1} = 1$$

(iii) Usando $(X + Y)(s) = X(s) + Y(s)$, obtenemos

$(X + Y)(1) = 2 + 1 = 3$ $\quad (X + Y)(3) = 6 + 1 = 7$ $\quad (X + Y)(5) = 10 + 1 = 11$

$(X + Y)(2) = 4 + 3 = 7$ $\quad (X + Y)(4) = 8 + 3 = 11$ $\quad (X + Y)(6) = 12 + 3 = 15$

Por consiguiente, el conjunto imagen es $(X + Y)(S) = \{3, 7, 11, 15\}$ y 3 y 15 suceden con probabilidad $\frac{1}{6}$, y 7 y 11 con probabilidad $\frac{2}{6}$. Esto es, la distribución de $X + Y$ es como sigue:

z_i	3	7	11	15
$p(z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Así,

$$E(X + Y) = 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 7 \cdot \tfrac{2}{6} + 11 \cdot \tfrac{2}{6} + 15 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{54}{6} = 9$$

$$E((X + Y)^2) = 9 \cdot \tfrac{1}{6} + 49 \cdot \tfrac{2}{6} + 121 \cdot \tfrac{2}{6} + 225 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{574}{6} = 95{,}7$$

$$\text{var}\ (X + Y) = E((X + Y)^2) - \mu^2 = 95{,}7 - 9^2 = 14{,}7$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{14{,}7} = 3{,}8$$

Nótese que, $E(X) + E(Y) = 7 + 2 = 9 = E(X + Y)$, pero var (X) + var $(Y) = 11{,}7 + 1 = 12{,}7 \neq$ var $(X + Y)$.

(iv) Usando $(XY)(s) = X(s)\,Y(s)$, obtenemos

$(XY)(1) = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad (XY)(3) = 6 \cdot 1 = 6$ $\quad (XY)(5) = 10 \cdot 1 = 10$

$(XY)(2) = 4 \cdot 3 = 12$ $\quad (XY)(4) = 8 \cdot 3 = 24$ $\quad (XY)(6) = 12 \cdot 3 = 36$

Por tanto, la distribución de XY es como sigue:

w_i	2	6	10	12	24	36
$p(w_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Así,

$$E(XY) = 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} + 10 \cdot \tfrac{1}{6} + 12 \cdot \tfrac{1}{6} + 24 \cdot \tfrac{1}{6} + 36 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{90}{6} = 15$$

$$E((XY)^2) = 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 36 \cdot \tfrac{1}{6} + 100 \cdot \tfrac{1}{6} + 144 \cdot \tfrac{1}{6} + 576 \cdot \tfrac{1}{6} + 1296 \cdot \tfrac{1}{6}$$
$$= \tfrac{2156}{6} = 359{,}3$$

$$\text{var}\ (XY) = E((XY)^2) - \mu^2 = 359{,}3 - 15^2 = 134{,}3$$

$$\sigma_{XY} = \sqrt{134{,}3} = 11{,}6$$

5.3. Una moneda cargada para que $P(\mathrm{H}) = \frac{3}{4}$ y $P(\mathrm{T}) = \frac{1}{4}$ se lanza tres veces. Sea X la variable aleatoria que denota la mayor hilera de caras (sucesivas) que aparezca. Hallar la distribución, la esperanza, la varianza y la desviación estándar de X.

La variable aleatoria X se define en el espacio muestral

$$S = \{\mathrm{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

Los puntos de S tienen las probabilidades respectivas siguientes:

$$P(\mathrm{HHH}) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{27}{64} \qquad P(\mathrm{THH}) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{64}$$

$$P(\mathrm{HHT}) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{64} \qquad P(\mathrm{THT}) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{64}$$

$$P(\mathrm{HTH}) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{64} \qquad P(\mathrm{TTH}) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{64}$$

$$P(\mathrm{HTT}) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{64} \qquad P(\mathrm{TTT}) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{64}$$

Puesto que X denota la mayor hilera de caras,

$$X(\mathrm{TTT}) = 0;\quad X(\mathrm{HTT}) = 1,\ X(\mathrm{HTH}) = 1,\ X(\mathrm{THT}) = 1,\ X(\mathrm{TTH}) = 1;$$

$$X(\mathrm{HHT}) = 2,\ X(\mathrm{THH}) = 2;\quad X(\mathrm{HHH}) = 3$$

Así, el conjunto imagen de X es $X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$. La probabilidad $f(x_i)$ de cada número x_i de $X(S)$ se obtiene sumando las probabilidades de los puntos de S cuya imagen es x_i:

$$f(0) = P(\mathrm{TTT}) = \tfrac{1}{64}$$

$$f(1) = P(\mathrm{HTT}) + P(\mathrm{HTH}) + P(\mathrm{THT}) + P(\mathrm{TTH}) = \tfrac{18}{64}$$

$$f(2) = P(\mathrm{HHT}) + P(\mathrm{THH}) = \tfrac{18}{64}$$

$$f(3) = P(\mathrm{HHH}) = \tfrac{27}{64}$$

Por consiguiente, la distribución de X es como sigue:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$

Así,

$$\mu = E(X) = 0\cdot\tfrac{1}{64} + 1\cdot\tfrac{18}{64} + 2\cdot\tfrac{18}{64} + 3\cdot\tfrac{27}{64} = \tfrac{135}{64} = 2{,}1$$

$$E(X^2) = 0\cdot\tfrac{1}{64} + 1\cdot\tfrac{18}{64} + 4\cdot\tfrac{18}{64} + 9\cdot\tfrac{27}{64} = \tfrac{333}{64} = 5{,}2$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}\,(X) = E(X^2) - \mu^2 = 5{,}2 - (2{,}1)^2 = 0{,}8$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}8} = 0{,}9$$

5.4. Se lanza una moneda corriente hasta que resulte una cara o cinco sellos. Hallar el valor esperado E de los lanzamientos de la moneda.

Si sale cara en la primera vez sucede un lanzamiento solamente, esto es, el suceso H. Si el primero es sello y el segundo cara suceden dos lanzamientos, esto es el evento TH. Si los dos primeros son sellos y el tercero cara, suceden tres lanzamientos esto es el suceso TTH. Si resulta TTTH suceden cuatro lanzamientos y si resultan TTTTH o TTTTT suceden cinco lanzamientos. Entonces

$$f(1) = P(\mathrm{H}) = \tfrac{1}{2}$$

$$f(2) = P(\mathrm{TH}) = \tfrac{1}{4}$$

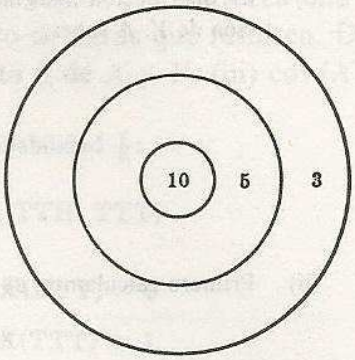
$$f(3) = P(\mathrm{TTH}) = \tfrac{1}{8}$$

$$f(4) = P(\mathrm{TTTH}) = \tfrac{1}{16}$$

$$f(5) = P(\mathrm{TTTTH}) + P(\mathrm{TTTTT}) = \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{32} = \tfrac{1}{16}$$

Por tanto, $$E = 1\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{4} + 3\cdot\tfrac{1}{8} + 4\cdot\tfrac{1}{16} + 5\cdot\tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 1{,}9.$$

5.5. Se dibujan dos círculos concéntricos de radios 1 y 3 pulgadas dentro de un blanco circular de 5 pulgadas de radio. Un hombre recibe 10, 5 ó 3 puntos según pegue en el blanco dentro del círculo menor, en el anillo intermedio o en el anillo exterior respectivamente. Supongamos que el hombre da en el blanco con probabilidad $\frac{1}{2}$ y, por tanto, es lo mismo de posible que pegue en un punto del blanco como en otro. Hallar el valor esperado E de los puntos que marca cada vez que dispara.



La probabilidad de marcar 10, 5, 3 ó 0 puntos es:

$$f(10) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{área de 10 puntos}}{\text{área blanco}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi(1)^2}{\pi(5)^2} = \frac{1}{50}$$

$$f(5) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{área de 5 puntos}}{\text{área blanco}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi(3)^2-\pi(1)^2}{\pi(5)^2} = \frac{8}{50}$$

$$f(3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{área de 3 puntos}}{\text{área blanco}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi(5)^2-\pi(3)^2}{\pi(5)^2} = \frac{16}{50}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Así, $E = 10\cdot\frac{1}{50} + 5\cdot\frac{8}{50} + 3\cdot\frac{16}{50} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{98}{50} = 1{,}96.$

5.6. Un jugador lanza dos monedas corrientes. Gana \$1 ó \$2 según que aparezcan 1 ó 2 caras. Por otra parte, pierde \$5 si no aparece cara. Determinar el valor esperado E del juego y si éste es favorable al jugador.

La probabilidad de que 2 caras sucedan es $\frac{1}{4}$; de 2 sellos es $\frac{1}{4}$ y de 1 cara es $\frac{1}{2}$. Así la probabilidad de ganar \$2 es $\frac{1}{4}$, de ganar \$1 es $\frac{1}{2}$, y de perder \$5 es $\frac{1}{4}$. Por tanto $E = 2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$. Esto es, el valor esperado del juego es menos 25¢, y en esta forma es desfavorable al jugador.

5.7. Un jugador lanza dos monedas corrientes. Gana \$5 si aparecen 2 caras, \$2 si aparece 1 cara y \$1 si ninguna cara aparece. (i) Hallar la ganancia esperada. (ii) ¿Cuánto debe pagar para jugar si el juego es legal?

(i) La probabilidad de ganar \$5 es $\frac{1}{4}$, de ganar \$2 es $\frac{1}{2}$ y de ganar \$1 es $\frac{1}{4}$; por tanto $E = 5\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} =$ 2,50, esto es, la ganancia esperada es \$2,50.

(ii) Si paga \$2,50 para jugar, entonces el juego es legal.

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS, VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

5.8. Supóngase que X y Y tienen la siguiente distribución conjunta:

$X \backslash Y$	−3	2	4	Suma
1	0,1	0,2	0,2	0,5
3	0,3	0,1	0,1	0,5
Suma	0,4	0,3	0,3	

(i) Hallar la distribución de X y de Y.

(ii) Hallar la cov (X, Y), esto es, la covarianza de X y de Y.

(iii) Hallar $\rho(X, Y)$, esto es, la correlación de X y de Y.

(iv) ¿X y Y son variables aleatorias independientes?

(i) La distribución marginal de la derecha es la distribución de X y la distribución marginal del fondo es la distribución de Y. A saber,

x_i	1	3
$f(x_i)$	0,5	0,5

Distribución de X

y_j	−3	2	4
$g(y_j)$	0,4	0,3	0,3

Distribución de Y

(ii) Primero calculamos μ_X y μ_Y:

$$\mu_X = \sum x_i f(x_i) = (1)(0,5) + (3)(0,5) = 2$$

$$\mu_Y = \sum y_j g(y_j) = (-3)(0,4) + (2)(0,3) + (4)(0,3) = 0,6$$

Luego computamos $E(X\,Y)$:

$$E(XY) = \sum x_i y_j h(x_i, y_j)$$

$$= (1)(-3)(0,1) + (1)(2)(0,2) + (1)(4)(0,2) + (3)(-3)(0,3) + (3)(2)(0,1) + (3)(4)(0,1) = 0$$

Entonces $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 0 - (2)(0,6) = -1,2$

(iii) Primero calculamos σ_X y σ_Y:

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = (1)(0,5) + (9)(0,5) = 5$$

$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\sigma_X = \sqrt{1} = 1$$

y

$$E(Y^2) = \sum y_j^2 g(y_j) = (9)(0,4) + (4)(0,3) + (16)(0,3) = 9,6$$

$$\sigma_Y^2 = \text{var}(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 9,6 - (0,6)^2 = 9,24$$

$$\sigma_Y = \sqrt{9,24} = 3,0$$

Entonces $$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-1,2}{(1)(3,0)} = -0,4$$

(iv) X y Y no son independientes, puesto que $P(X = 1, Y = -3) \neq P(X = 1)\,P(Y = -3)$, esto es, el elemento $h(1, -3) = 0,1$ no es igual a $f(1)\,g(-3) = (0,5)(0,4) = 0,2$, el producto de sus elementos marginales.

5.9. Sean X y Y variables aleatorias independientes con las distribuciones siguientes:

x_i	1	2
$f(x_i)$	0,6	0,4

Distribución de X

y_j	5	10	15
$g(y_j)$	0,2	0,5	0,3

Distribución de Y

Hallar la distribución conjunta h de X y Y.

Puesto que X y Y son independientes, la distribución conjunta h se puede obtener de las distribuciones marginales f y g. Primero constrúyase la tabla de la distribución conjunta con las distribuciones marginales solamente como se indica en la tabla de la izquierda, y luego multiplíquense los elementos marginales para obtener los otros elementos, esto es, colóquese $h(x_i, y_j) = f(x_i)\,g(y_j)$, como se muestra a la derecha.

$X \backslash Y$	5	10	15	Suma
1				0,6
2				0,4
Suma	0,2	0,5	0,3	

$X \backslash Y$	5	10	15	Suma
1	0,12	0,30	0,18	0,6
2	0,08	0,20	0,12	0,4
Suma	0,2	0,5	0,3	

5.10. Una moneda corriente se lanza tres veces. Sea X que denota 0 ó 1 según que aparezca una cara o un sello en el primer lanzamiento, y sea Y que denota el número de caras que resulten. Determínese, (i) la distribución de X y de Y, (ii) la distribución conjunta h de X y Y, (iii) $\operatorname{cov}(X, Y)$.

(i) El espacio muestral S consta de los ocho puntos siguientes, cada uno con probabilidad $\frac{1}{8}$:

$$S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

Tenemos
$$X(\text{HHH}) = 0,\ X(\text{HHT}) = 0,\ X(\text{HTH}) = 0,\ X(\text{HTT}) = 0$$
$$X(\text{THH}) = 1,\ X(\text{THT}) = 1,\ X(\text{TTH}) = 1,\ X(\text{TTT}) = 1$$

y
$$Y(\text{HHH}) = 3$$
$$Y(\text{HHT}) = 2,\ Y(\text{HTH}) = 2,\ Y(\text{THH}) = 2$$
$$Y(\text{HTT}) = 1,\ Y(\text{THT}) = 1,\ Y(\text{TTH}) = 1$$
$$Y(\text{TTT}) = 0$$

Así las distribuciones de X y de Y son como sigue:

x_i	0	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Distribución de X

y_j	0	1	2	3
$g(y_j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Distribución de Y

(ii) La distribución h de X y Y es:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	Suma
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
Suma	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

Obtenemos, por ejemplo, el elemento $h(0, 2) = P(X = 0, Y = 2) = P(\{\text{HTH, HHT}\}) = \frac{2}{8}$.

(iii)
$$\mu_X = \sum x_i f(x_i) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\mu_Y = \sum y_j g(y_j) = 0 \cdot \tfrac{1}{8} + 1 \cdot \tfrac{3}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{8} + 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2}$$
$$E(XY) = \sum x_i y_j h(x_i, y_j) = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{8} + \text{términos con factor } 0 = \tfrac{1}{2}$$
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{4}$$

5.11. Sea X una variable aleatoria con la distribución siguiente y sea $Y = X^2$:

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Determinar, (i) la distribución g de Y, (ii) la distribución conjunta h de X y Y, (iii) la $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

(i) Puesto que $Y = X^2$, la variable aleatoria Y puede tomar solamente los valores 4 y 1. Además, $g(4) = P(Y = 4) = P(X = 2 \text{ o } X = -2) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ y, similarmente, $g(1) = \frac{1}{2}$. Por tanto la distribución g de Y es como sigue:

y_j	1	4
$g(y_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(ii) La distribución conjunta h de X y Y viene luego. Nótese que si $X = -2$, entonces $Y = 4$; y de aquí $h(-2, 1) = 0$ y $h(-2, 4) = f(-2) = \frac{1}{4}$. Los otros elementos se obtienen de manera similar.

$X \backslash Y$	1	4	Suma
-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Suma	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(iii)
$$\mu_X = E(X) = \sum x_i f(x_i) = -2 \cdot \tfrac{1}{4} - 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 0$$
$$\mu_Y = E(Y) = \sum y_j g(y_j) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$$
$$E(XY) = \sum x_i y_j h(x_i, y_j) = -8 \cdot \tfrac{1}{4} - 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 8 \cdot \tfrac{1}{4} = 0$$
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0 - 0 \cdot \tfrac{5}{2} = 0 \quad \text{y así} \quad \rho(X, Y) = 0$$

Nota: Este ejemplo muestra que no obstante que Y es una función de X es aún posible que la covarianza y la correlación de X y Y sean 0, como en el caso en que X y Y son independientes (teorema 5.6). Nótese, sin embargo, que X y Y no son independientes en este ejemplo.

PRUEBAS DE TEOREMAS

Nota: En todas las pruebas, X y Y son variables aleatorias con distribución f y g respectivamente y distribución conjunta h.

5.12. Demuéstrese que $f(x_i) = \sum_j h(x_i, y_j)$ y $g(y_j) = \sum_i h(x_i, y_j)$, esto es, que las distribuciones marginales son las distribuciones (individuales) de X y Y.

Sea $A_i = \{X = x_i\}$ y $B_j = \{Y = y_j\}$; esto es, sea $A_i = X^{-1}(x_i)$ y $B_j = Y^{-1}(y_j)$. Así las B_j son disyuntas y $S = \cup_j B_j$. Por tanto,
$$A_i = A_i \cap S = A_i \cap (\cup_j B_j) = \cup_j (A_i \cap B_j)$$
donde las $A_i \cap B_j$ son también disyuntas. En consecuencia,
$$f(x_i) = P(X = x_i) = P(A_i) = \sum_j P(A_i \cap B_j) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j h(x_i, y_j)$$
La prueba para g es similar.

5.13. Probar el teorema 5.8: Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S con $Y = \Phi(X)$. Entonces $E(Y) = \sum_i \Phi(x_i) f(x_i)$ donde f es la distribución de X.

(La prueba se da para el caso en que X es discreta y finita.)

Supóngase que X toma los valores $x_1, \ldots, x_n$ y que $\Phi(x_i)$ toma los valores $y_1, \ldots, y_m$ como i recorre de 1 a n. Entonces claramente los posibles valores de $Y = \Phi(X)$ son $y_1, \ldots, y_m$ y la distribución g de Y está dada por

$$g(y_j) = \sum_{\{i\,:\,\Phi(x_i)=y_j\}} f(x_i)$$

Además

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j\, g(y_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{\{i\,:\,0(x_i)=y_j\}} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{\{j\,:\,\Phi(x_i)=y_j\}} y_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Phi(x_i)$$

lo cual prueba el teorema.

5.14. Probar el teorema 5.1: Sea X una variable aleatoria y k un número real. Entonces (i) $E(kX) = kE(X)$ y (ii) $E(X + k) = E(X) + k$.

(La prueba se da para el caso discreto general suponiendo que $E(X)$ existe.)

(i) Ahora $kX = \Phi(X)$ donde $\Phi(x) = kx$. Además por el teorema 5.8 (problema 5.13),

$$E(kX) = \sum_i kx_i f(x_i) = k \sum_i x_i f(x_i) = kE(X)$$

(ii) Aquí $X + k = \Phi(X)$ donde $\Phi(x) = x + k$. Además

$$E(X+k) = \sum_i (x_i + k) f(x_i) = \sum_i x_i f(x_i) + \sum_i k f(x_i) = E(X) + k$$

5.15. Probar el teorema 5.2: Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S. Entonces $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

(La prueba se da para el caso discreto general suponiendo que $E(X)$ y $E(Y)$ ambos existen.)

Ahora $X + Y = \Phi(X, Y)$ donde $\Phi(x, y) = x + y$. Además por el teorema 5.9,

$$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j)\, h(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i\, h(x_i, y_j) + \sum_i \sum_j y_j\, h(x_i, y_j)$$

Aplicando el problema 5.12, obtenemos

$$E(X+Y) = \sum_i x_i f(x_i) + \sum_j y_j g(y_j) = E(X) + E(Y)$$

5.16. Probar el corolario 5.3: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias de S. Entonces

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

(La prueba se da para el caso discreto general suponiendo que $E(X_1), \ldots, E(X_n)$ todos existen.)

Probamos esto por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial y el caso $n = 2$ es precisamente el teorema 5.2 (problema 5.15). Para el caso $n > 2$ aplicamos el caso $n = 2$ para obtener

$$E(X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = E(X_1 + \cdots + X_{n-1}) + E(X_n)$$

y por la hipótesis inductiva esto se convierte en $E(X_1) + \cdots + E(X_{n-1}) + E(X_n)$.

5.17. Probar el teorema 5.5: (i) $\operatorname{var}(X + k) = \operatorname{var}(X)$ y (ii) $\operatorname{var}(kX) = k^2 \operatorname{var}(X)$. Por tanto $\sigma_{X+k} = \sigma_X$ y $\sigma_{kX} = |k|\,\sigma_X$.

Por el teorema 5.1, $\mu_{X+k} = \mu_X + k$ y $\mu_{kX} = k\mu_X$. También $\sum x_i f(x_i) = \mu_X$ y $\sum f(x_i) = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{var}\ (X+k) &= \sum (x_i+k)^2 f(x_i) - \mu^2_{X+k} \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) + 2k \sum x_i f(x_i) + k^2 \sum f(x_i) - (\mu_X + k)^2 \\ &= \sum x_i^2 f(x_i) + 2k\mu_X + k^2 - (\mu_X^2 + 2k\mu_X + k^2) \\ &= \sum x_i f(x_i) - \mu_X^2 = \text{var}\ (X)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\text{var}\ (kX) &= \sum (kx_i)^2 f(x_i) - \mu^2_{kX} = k^2 \sum x_i^2 f(x_i) - (k\mu_X)^2 \\ &= k^2 \sum x_i^2 f(x_i) - k^2\mu_X^2 = k^2\Big(\sum x_i^2 f(x_i) - \mu_X^2\Big) = k^2\ \text{var}\ (X)\end{aligned}$$

5.18. Mostrar que

$$\text{cov}\ (X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)\, h(x_i, y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X\mu_Y$$

(La prueba se da para el caso en que X y Y son discretas y finitas.)

Puesto que

$$\sum_{i,j} y_j\, h(x_i, y_j) = \sum_j y_j\, g(y_j) = \mu_Y, \quad \sum_{i,j} x_i\, h(x_i, y_j) = \sum_i x_i f(x_i) = \mu_X \quad \text{y} \quad \sum_{i,j} h(x_i, y_j) = 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)\, h(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i,j} (x_i y_j - \mu_X y_j - \mu_Y x_i + \mu_X\mu_Y)\, h(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X \sum_{i,j} y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_Y \sum_{i,j} x_i\, h(x_i, y_j) + \mu_X\mu_Y \sum_{i,j} h(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) - \mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

5.19. Probar el teorema 5.6: Sean X y Y variables aleatorias independientes. Entonces (i) $E(XY) = E(X)E(Y)$, (ii) $\text{var}\ (X+Y) = \text{var}\ (X) + \text{var}\ (Y)$, (iii) $\text{cov}\ (X,Y) = 0$.

(La prueba se da para el caso en que X y Y son discretas y finitas.)

Puesto que X y Y son independientes, $h(x_i, y_j) = f(x_i)\, g(y_j)$. Así

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j\, f(x_i)\, g(y_j) \\ &= \sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j\, g(y_j) = E(X)E(Y)\end{aligned}$$

y

$$\text{cov}\ (X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = E(X)E(Y) - \mu_X\mu_Y = 0$$

Con el fin de probar (ii) necesitamos también

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y, \quad \sum_{i,j} x_i^2\, h(x_i, y_j) = \sum_i x_i^2 f(x_i), \quad \sum_{i,j} y_j^2\, h(x_i, y_j) = \sum_j y_j^2\, g(y_j)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{var}\ (X+Y) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j)^2\, h(x_i, y_j) - \mu^2_{X+Y} \\ &= \sum_{i,j} x_i^2\, h(x_i, y_j) + 2\sum_{i,j} x_i y_j\, h(x_i, y_j) + \sum_{i,j} y_j^2\, h(x_i, y_j) - (\mu_X + \mu_Y)^2 \\ &= \sum_i x_i^2 f(x_i) + 2\sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j\, g(y_j) + \sum_j y_j^2\, g(y_j) - \mu_X^2 - 2\mu_X\mu_Y - \mu_Y^2 \\ &= \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu_X^2 + \sum_j y_j^2\, g(y_j) - \mu_Y^2 = \text{var}\ (X) + \text{var}\ (Y)\end{aligned}$$

5.20. Probar el teorema 5.7: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. Entonces

$$\text{var}\,(X_1 + \cdots + X_n) = \text{var}\,(X_1) + \cdots + \text{var}\,(X_n)$$

(La prueba se da para el caso en que $X_1, \ldots, X_n$ son todas discretas y finitas.)

Damos por supuesto los problemas análogos al 5.12 y al teorema 5.9 para n variables aleatorias. Entonces

$$\begin{aligned}
\text{var}\,(X_1 + \cdots + X_n) &= E((X_1 + \cdots + X_n - \mu_{X_1 + \cdots + X_n})^2) \\
&= \sum (x_1 + \cdots + x_n - \mu_{X_1 + \cdots + X_n})^2\, h(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum (x_1 + \cdots + x_n - \mu_{X_1} - \cdots - \mu_{X_n})^2\, h(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum \left\{ \sum_i \sum_j x_i x_j + \sum_i \sum_j \mu_{X_i}\mu_{X_j} - 2 \sum_i \sum_j \mu_{X_i} x_j \right\} h(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

donde h es la distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, y $\mu_{X_1 + \cdots + X_n} = \mu_{X_1} + \cdots + \mu_{X_n}$ (Corolario 5.3). Puesto que los X_i son independientes dos a dos, $\sum x_i x_j\, h(x_1, \ldots, x_n) = \mu_{X_i}\mu_{X_j}$ para $i \neq j$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\text{var}\,(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{i \neq j} \mu_{X_i}\mu_{X_j} + \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_i \sum_j \mu_{X_i}\mu_{X_j} - 2 \sum_i \sum_j \mu_{X_i}\mu_{X_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \sum_{i=1}^{n} (\mu_{X_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \text{var}\,(X_i)
\end{aligned}$$

como se pedía.

PROBLEMAS VARIOS

5.21. Sea X una variable aleatoria continua con distribución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

(i) Calcular k. (ii) Hallar $P(1 \leq X \leq 2)$.

(i) El gráfico de f se dibuja en seguida. Puesto que f es una función continua de probabilidad, la región sombreada A debe tener área 1. Nótese que A forma un trapecio de bases paralelas de longitudes k y $k + \frac{1}{2}$, y altura 3. Por tanto, el área de $A = \frac{1}{2}(k + k + \frac{1}{2}) \cdot 3 = 1$ o $k = \frac{1}{12}$.

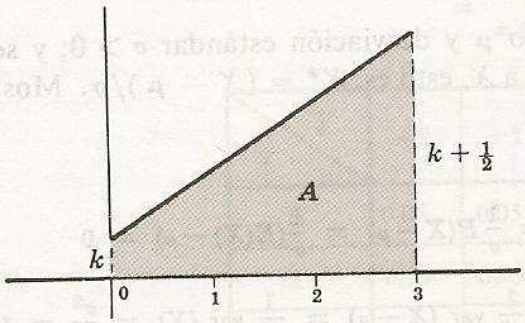
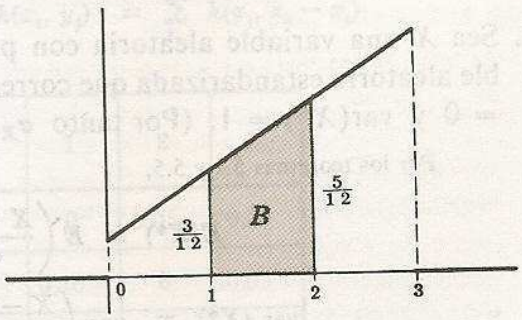


Gráfico de f



$P(1 \leq X \leq 2)$ = área de B

(ii) $P(1 \leq X \leq 2)$ es igual al área de B la cual está bajo el gráfico de f y entre $x = 1$ y $x = 2$ como se muestra en la figura anterior de la derecha. Nótese que $f(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$, $f(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$. Por tanto $P(1 \leq X \leq 2)$ = área de $B = \frac{1}{2}(\frac{3}{12} + \frac{5}{12}) \cdot 1 = \frac{1}{8}$.

5.22. Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución f es constante en un intervalo, como $I = \{a \leq x \leq b\}$, y 0 en cualquier otra parte:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

(Se dice que dicha variable aleatoria está *uniformemente distribuida* en I.) (i) Determinar k. (ii) Hallar la media μ de X. (iii) Determinar la función de distribución acumulativa F de X.

(i) El gráfico de f aparece a la derecha. La región A debe tener área 1; por tanto

$$k(b-a) = 1 \quad \text{o} \quad k = \frac{1}{b-a}$$

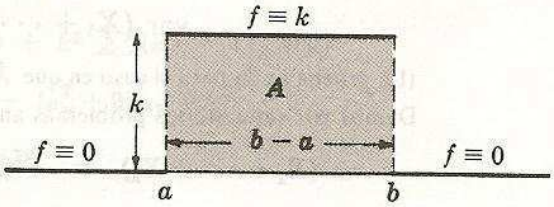


Gráfico de f

(ii) Si consideramos la probabilidad como peso o masa, y el promedio como el centro de gravedad, entonces es intuitivamente claro que

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

el punto medio entre a y b. Verificamos esto matemáticamente usando el cálculo

$$\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

(iii) Recalcamos que la función de distribución acumulativa $F(k) = P(X \leq k)$. Por tanto $F(k)$ origina el área bajo el gráfico de f a la izquierda de $x = k$. Puesto que X está uniformemente distribuida en el intervalo $I = \{a \leq x \leq b\}$, es intuitivo que el gráfico de F debe ser como se muestra a la derecha, esto es, $F \equiv 0$ antes del punto a, $F \equiv 1$ después del punto b, y F es lineal entre a y b. Verificamos esto matemáticamente usando el cálculo

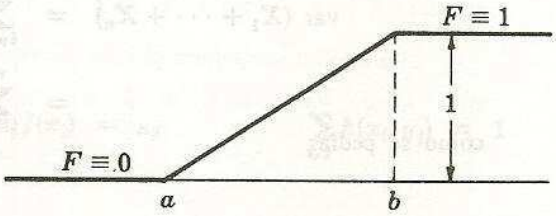


Gráfico de F

(a) para $x < a$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

(b) para $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

(c) para $x > b$, $F(x) = P(X \leq x) \geq P(X \leq b) = F(b) = 1$ y así $1 \geq P(X \leq x) = F(x)$; por tanto $F(x) = 1$.

5.23. Sea X una variable aleatoria con promedio μ y desviación estándar $\sigma > 0$; y sea X^* la variable aleatoria estandarizada que corresponde a X, esto es, $X^* = (X - \mu)/\sigma$. Mostrar que $E(X^*) = 0$ y $\text{var}(X^*) = 1$. (Por tanto $\sigma_{X^*} = 1$.)

Por los teoremas 5.1 y 5.5,

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) = 0$$

y

$$\text{var}(X^*) = \text{var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\text{var}(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\text{var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

5.24. Sea X una variable aleatoria con distribución f. El r-ésimo *momento* M_r de X se define por

$$M_r = E(X^r) = \sum x_i^r f(x_i)$$

Hallar los primeros cinco momentos de X si X tiene la distribución siguiente:

x_i	-2	1	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(Nótese que M_1 es el promedio de X, y M_2 se usa para calcular la varianza y la desviación estándar de X.)

$$M_1 = \sum x_i f(x_i) = -2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 3 \cdot \tfrac{1}{4} = 0,$$

$$M_2 = \sum x_i^2 f(x_i) = 4 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 9 \cdot \tfrac{1}{4} = 4{,}5,$$

$$M_3 = \sum x_i^3 f(x_i) = -8 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 27 \cdot \tfrac{1}{4} = 3,$$

$$M_4 = \sum x_i^4 f(x_i) = 16 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 81 \cdot \tfrac{1}{4} = 28{,}5,$$

$$M_5 = \sum x_i^5 f(x_i) = -32 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 243 \cdot \tfrac{1}{4} = 45.$$

5.25. Sea h la distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y. (i) Mostrar que la distribución f de la suma $Z = X + Y$ puede obtenerse suponiendo las probabilidades a lo largo de las diagonales $x + y = z_k$, esto es,

$$f(z_k) = \sum_{z_k = x_i + y_j} h(x_i, y_j) = \sum_{x_i} h(x_i, z_k - x_i)$$

(ii) Aplicar (i) para obtener la distribución f de la suma $Z = X + Y$ donde X y Y tienen la distribución conjunta siguiente:

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1	2	3	Suma
0	0,05	0,05	0,10	0	0,05	0,05	0,30
1	0,10	0,05	0,05	0,10	0	0,05	0,35
2	0,03	0,12	0,07	0,06	0,03	0,04	0,35
Suma	0,18	0,22	0,22	0,16	0,08	0,14	

(i) Los eventos $\{X = x_i, Y = y_j : x_i + y_j = z_k\}$ son disyuntos; por tanto,

$$f(z_k) = P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i + y_j = z_k} h(x_i, y_j) = \sum_{x_i} h(x_i, z_k - x_i)$$

(ii)

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1	2	3
0	0,05	0,05	0,10	0	0,05	0,05
1	0,10	0,05	0,05	0,10	0	0,05
2	0,03	0,12	0,07	0,06	0,03	0,04

Sumando a lo largo de las diagonales en la tabla anterior, obtenemos

$f(-2) = 0{,}05$

$f(-1) = 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}15$

$f(0) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}03 = 0{,}18$

$f(1) = 0 + 0{,}05 + 0{,}12 = 0{,}17$

$f(2) = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}07 = 0{,}22$

$f(3) = 0{,}05 + 0 + 0{,}06 = 0{,}11$

$f(4) = 0{,}05 + 0{,}03 = 0{,}08$

$f(5) = 0{,}04$

En otras palabras, la distribución de $Z = X + Y$ es como sigue:

z_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(z_i)$	0,05	0,15	0,18	0,17	0,22	0,11	0,08	0,04

Problemas propuestos

VARIABLES ALEATORIAS

5.26. Hallar el promedio μ, la varianza σ^2 y la desviación estándar σ de cada distribución:

(i)

x_i	2	3	8
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

x_i	-2	-1	7
$f(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(iii)

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

5.27. Se lanza un par de dados corrientes. Sea X la variable aleatoria que denota el menor de los dos números que aparezcan. Hallar la distribución, el promedio, la varianza y la desviación estándar de X.

5.28. Una moneda corriente se lanza cuatro veces. Sea X que denota el número de caras que salgan. Hallar la distribución, el promedio, la varianza y la desviación estándar de X.

5.29. Una moneda corriente se lanza cuatro veces. Sea Y que denota la hilera más larga de caras que salgan. Hallar la distribución, el promedio, la varianza y la desviación estándar de Y.

5.30. Hallar el promedio μ, la varianza σ^2 y la desviación estándar σ de la distribución de dos puntos

x_i	a	b
$f(x_i)$	p	q

donde $p + q = 1$.

5.31. Se seleccionan al azar dos cartas de una caja que contiene cinco cartas numeradas 1, 1, 2, 2 y 3. Sea X que denota la suma y Y el mayor de los dos números sacados. Hallar la distribución, el promedio, la varianza y la desviación estándar de (i) X, (ii) Y, (iii) $X + Y$, (iv) XY.

VALOR ESPERADO (ESPERANZA)

5.32. Se lanza una moneda corriente hasta que una cara o cuatro sellos aparezcan. Hallar el número esperado de lanzamientos de la moneda.

5.33. Una moneda cargada tal que $P(\mathrm{H}) = \frac{1}{3}$ y $P(\mathrm{T}) = \frac{2}{3}$ se lanza hasta que una cara o cinco sellos, aparezcan. Hallar el número esperado de lanzamientos de la moneda.

5.34. Una caja contiene 8 artículos de los cuales 2 son defectuosos. Una persona selecciona 3 artículos de la caja. Hallar el número esperado de artículos defectuosos que ella saca.

5.35. Una caja contiene 10 transistores de los cuales 2 son defectuosos. Se selecciona un transistor de la caja y se prueba hasta que se escoge uno no defectuoso. Hallar el número esperado de veces que el transistor se escoge.

5.36. Resolver el problema anterior para el caso de que 3 de los 10 artículos sean defectuosos.

5.37. La probabilidad de que el equipo A gane un juego es $\frac{1}{2}$. A juega con B en un torneo. El primer equipo que gane 2 juegos seguidos o un total de 3 gana el torneo. Hallar el número esperado de juegos en el torneo.

5.38. Un jugador lanza tres monedas corrientes. Gana \$5 si salen 3 caras, \$3 si salen 2 caras, y \$1 si sale solamente 1 cara. Por otra parte, pierde \$15 si salen 3 sellos. Hallar el valor del juego para el jugador.

5.39. Un jugador lanza tres monedas corrientes. Gana \$8 si salen 3 caras, \$3 si salen 2 caras, y \$1 si sale solamente 1 cara. Si el juego es legal, ¿cuánto debería perder si no salen caras?

5.40. Un jugador lanza tres monedas corrientes. Gana \$10 si salen 3 caras, \$5 si salen 2 caras, \$3 si sale 1 cara y \$2 si no sale cara. Si el juego es legal, ¿cuánto debe pagar el jugador para jugar?

DISTRIBUCION CONJUNTA, VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

5.41. Considérese la distribución conjunta de X y Y siguiente:

$X \backslash Y$	-4	2	7	Suma
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Suma	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	

Hallar, (i) $E(X)$ y $E(Y)$, (ii) $\text{cov}(X, Y)$, (iii) σ_X, σ_Y y $\rho(X, Y)$.

5.42. Considérese la distribución conjunta de X y Y siguiente:

$X \backslash Y$	-2	-1	4	5	Suma
1	0,1	0,2	0	0,3	0,6
2	0,2	0,1	0,1	0	0,4
Suma	0,3	0,3	0,1	0,3	

Hallar, (i) $E(X)$ y $E(Y)$, (ii) $\text{cov}(X, Y)$, (iii) σ_X, σ_Y y $\rho(X, Y)$.

5.43. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes con las distribuciones respectivas siguientes:

x_i	1	2
$f(x_i)$	0,7	0,3

y_j	-2	5	8
$g(y_j)$	0,3	0,5	0,2

Hallar la distribución conjunta de X y Y y comprobar que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

5.44. Una moneda corriente se lanza cuatro veces. Sea X que denota el número de caras que salgan y sea Y que denota la mayor hilera de caras que salgan (ver problemas 5.28 y 5.29). (i) Determinar la distribución conjunta de X y Y. (ii) Hallar $\text{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

5.45. Se seleccionan dos cartas al azar de una caja que contiene cinco cartas numeradas 1, 1, 2, 2 y 3. Sea X que denota la suma y Y el mayor de los dos números sacados (ver problema 5.31). (i) Determinar la distribución conjunta de X y Y. (ii) Hallar $\text{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

PROBLEMAS VARIOS

5.46. Sea X una variable aleatoria continua con distribución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

(i) Hallar: $P(2 \leq X \leq 5)$, $P(3 \leq X \leq 7)$ y $P(X \geq 6)$.

(ii) Determinar y hacer el gráfico de la función de distribución acumulativa F de X.

5.47. Sea X una variable aleatoria continua con distribución

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

(i) Calcular k. (ii) Hallar $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ y $P(X \leq 3)$.

5.48. Hacer el gráfico de la función de distribución acumulativa F de la variable aleatoria X con distribución

x_i	-3	2	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

5.49. Mostrar que $\sigma_X = 0$ si y sólo si X es una *función constante*, esto es $X(s) = k$ para cada $s \in S$, o simplemente $X = k$.

5.50. Si $\sigma_X \neq 0$, mostrar que $\rho(X, X) = 1$ y $\rho(X, -X) = -1$.

5.51. Probar el teorema 5.9: Sean X, Y y Z variables aleatorias de S con $Z = \Phi(X, Y)$. Entonces

$$E(Z) = \sum_{i,j} \Phi(x_i, y_j)\, h(x_i, y_j)$$

donde h es la distribución conjunta de X y Y.

Respuestas a los problemas propuestos

5.26. (i) $\mu = 4$, $\sigma^2 = 5{,}5$, $\sigma = 2{,}3$; (ii) $\mu = 0$, $\sigma^2 = 10$, $\sigma = 3{,}2$; (iii) $\mu = 1$, $\sigma^2 = 2{,}4$, $\sigma = 1{,}5$.

5.27.

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = 2{,}5$, var $(X) = 2{,}1$, $\sigma_X = 1{,}4$

5.28.

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = 2$, var $(X) = 1$, $\sigma_X = 1$

5.29.

y_j	0	1	2	3	4
$g(y_j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(Y) = 1{,}7$, var $(Y) = 0{,}9$, $\sigma_Y = 0{,}95$

5.30. $\mu = ap + bq$, $\sigma^2 = pq(a-b)^2$, $\sigma = |a-b|\sqrt{pq}$

5.31. (i)

x_i	2	3	4	5
$f(x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

$E(X) = 3{,}6$, var $(X) = 0{,}84$, $\sigma_X = 0{,}9$

(ii)

y_j	1	2	3
$g(y_j)$	0,1	0,5	0,4

$E(Y) = 2{,}3$, var $(Y) = 0{,}41$, $\sigma_Y = 0{,}64$

(iii)

z_k	3	5	6	7	8
$p(z_k)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

$E(X+Y) = 5{,}9$, var $(X+Y) = 2{,}3$, $\sigma_{X+Y} = 1{,}5$

(iv)

w_k	2	6	8	12	15
$s(w_k)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

$E(XY) = 8{,}8$, var $(XY) = 17{,}6$, $\sigma_{XY} = 4{,}2$

5.32. 15/8

5.33. 211/81

5.34. 3/4

5.35. 11/9

5.36. 11/8

5.37. 23/8

5.38. 25¢ a favor del jugador

5.39. \$20

5.40. \$4,50

5.41. (i) $E(X) = 3$, $E(Y) = 1$; (ii) cov $(X, Y) = 1{,}5$; (iii) $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 4{,}3$, $\rho(X, Y) = 0{,}17$

5.42. (i) $E(X) = 1{,}4$, $E(Y) = 1$; (ii) cov $(X, Y) = -0{,}5$ (iii) $\sigma_X = 0{,}49$, $\sigma_Y = 3{,}1$, $\rho(X, Y) = -0{,}3$

5.43.

$X \backslash Y$	-2	5	8	Suma
1	0,21	0,35	0,14	0,7
2	0,09	0,15	0,06	0,3
Suma	0,3	0,5	0,2	

5.44. (i)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	Suma
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{6}{16}$
3	0	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
Suma	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	

(ii) cov $(X, Y) = 0{,}85$, $\rho(X, Y) = 0{,}89$

5.45. (i)

$X \backslash Y$	1	2	3	Suma
2	0,1	0	0	0,1
3	0	0,4	0	0,4
4	0	0,1	0,2	0,3
5	0	0	0,2	0,2
Suma	0,1	0,5	0,4	

(ii) $\operatorname{cov}(X, Y) = 0{,}52 \quad \rho(X, Y) = 0{,}9$

5.46. (i) $P(2 \leq X \leq 5) = \frac{3}{8}$, $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{1}{2}$, $P(X \geq 6) = \frac{1}{4}$

(ii)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}x & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

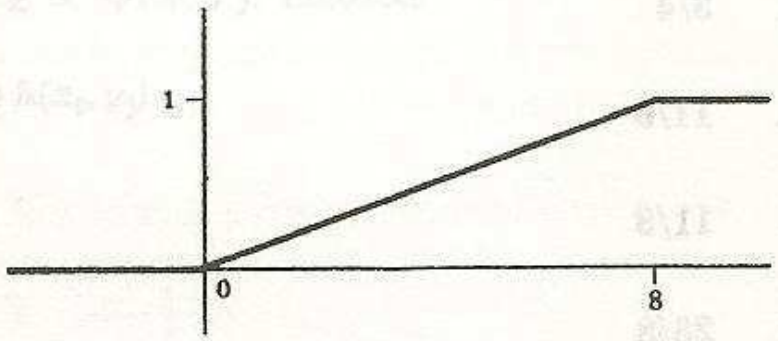


Gráfico de F

5.47. (i) $k = \frac{2}{25}$, (ii) $P(1 \leq X \leq 3) = \frac{8}{25}$, $P(2 \leq X \leq 4) = \frac{12}{25}$, $P(X \leq 3) = \frac{9}{25}$

5.48.

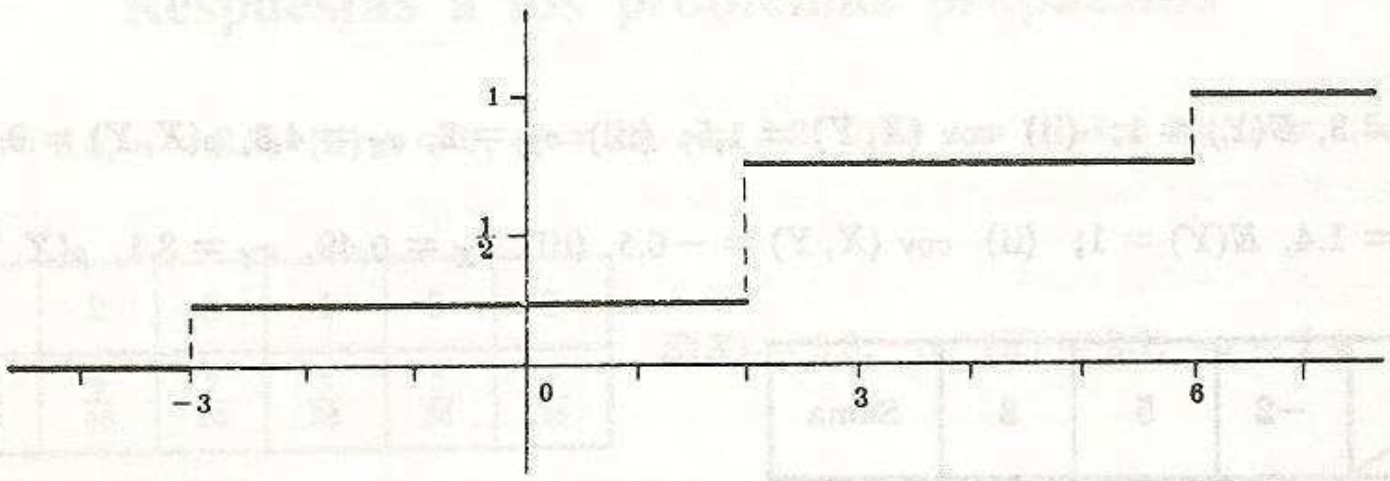


Gráfico de F

Capítulo 6

Distribuciones binomial, normal y de Poisson

DISTRIBUCION BINOMIAL

Consideramos pruebas repetidas e independientes de un experimento con dos resultados; llamamos unó de los resultados *favorable* (o *éxito*) y el otro *desfavorable* (o *fracaso*). Sea p la probabilidad favorable, así que $q = 1 - p$ es la probabilidad desfavorable. Si estamos interesados en el número de *éxitos* y no en el orden en que suceden, entonces aplicamos los teoremas siguientes.

Teorema 6.1: La probabilidad de k éxitos exactamente en n pruebas repetidas se denota y expresa por

$$b(k; n, p) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Aquí $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial (ver página 19). Téngase en cuenta que la probabilidad desfavorable es q^n y, por consiguiente, la probabilidad de por lo menos un éxito es $1 - q^n$.

Ejemplo 6.1: Se lanza una moneda corriente 6 veces o, su equivalente, seis monedas corrientes se lanzan una vez; llamamos cara un éxito. Por consiguiente $n = 6$ y $p = q = \frac{1}{2}$

(i) La probabilidad de que sucedan dos caras exactamente (o sea, $k = 2$) es

$$b(2; 6, \tfrac{1}{2}) \;=\; \binom{6}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^4 \;=\; \tfrac{15}{64}$$

(ii) La probabilidad de conseguir por lo menos cuatro caras (o sea, $k = 4, 5$ ó 6) es

$$\begin{aligned} b(4; 6, \tfrac{1}{2}) + b(5; 6, \tfrac{1}{2}) + b(6; 6, \tfrac{1}{2}) \;&=\; \binom{6}{4}(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^2 + \binom{6}{5}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2}) + \binom{6}{6}(\tfrac{1}{2})^6 \\ &=\; \tfrac{15}{64} + \tfrac{6}{64} + \tfrac{1}{64} \;=\; \tfrac{11}{32} \end{aligned}$$

(iii) La probabilidad de no caras (o sea, todos *fracasos*) es $q^6 = (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$ y, por tanto, la probabilidad de una cara por lo menos es $1 - q^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

Ejemplo 6.2: Un dado corriente se lanza 7 veces; llamamos a un lanzamiento un éxito si sale un 5 o un 6. Entonces $n = 7$, $p = P(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}$ y $q = 1 - p = \frac{2}{3}$

(i) La probabilidad de que un 5 ó 6 salga 3 veces exactamente (o sea, $k = 3$) es

$$b(3; 7, \tfrac{1}{3}) \;=\; \binom{7}{3}(\tfrac{1}{3})^3(\tfrac{2}{3})^4 \;=\; \frac{560}{2187}$$

(ii) La probabilidad de que un 5 ó 6 no salga (o sea, todos fracasos) es $q^7 = (\frac{2}{3})^7 = \frac{128}{2187}$; por consiguiente la probabilidad de que un 5 o un 6 salga una vez por lo menos es $1 - q^7 = \frac{2059}{2187}$.

Si consideramos n y p como constantes, entonces la función anterior $P(k) = b(k; n, p)$ es una distribución de probabilidad discreta:

k	0	1	2	$\cdots$	n
$P(k)$	q^n	$\binom{n}{1} q^{n-1} p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} p^2$	$\cdots$	p^n

Se la llama *distribución binomial* puesto que para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ corresponde a los términos sucesivos del desarrollo binomial

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + \cdots + p^n$$

Esta distribución se conoce también como distribución de Bernoulli, y las pruebas independientes con dos resultados se llaman pruebas de Bernoulli.

Las propiedades de esta distribución son:

Teorema 6.2:

Distribución binomial	
Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{npq}$

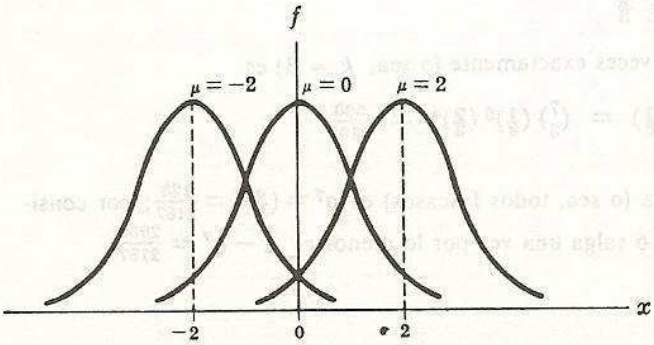
Ejemplo 6.3: Un dado corriente se lanza 180 veces. El número esperado de seises es $\mu = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$. La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5$.

DISTRIBUCION NORMAL

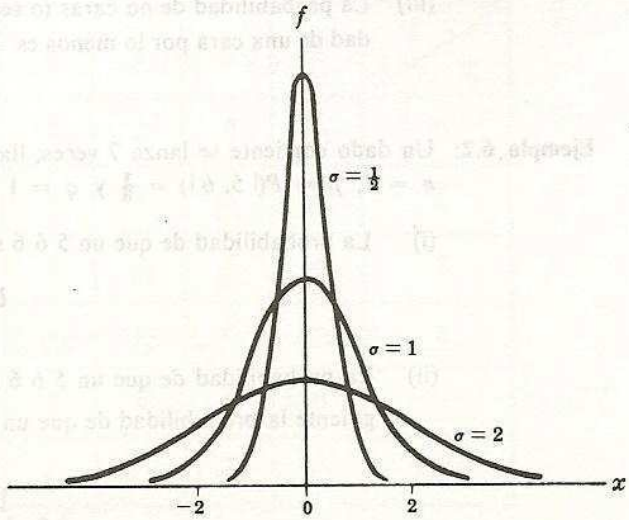
La *distribución normal* o *curva normal* (o: de *Gauss*) se define como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

donde μ y $\sigma > 0$ son constantes arbitrarias. Esta función es en realidad uno de los ejemplos más importantes de una distribución de probabilidad continua. Los dos diagramas que siguen, muestran los cambios de f cuando μ varía y cuando σ varía. En particular, obsérvese que estas curvas en forma de campanas son simétricas alrededor de $x = \mu$.



Distribución normal para σ fijo ($\sigma = 1$)



Distribución normal para μ fijo ($\mu = 0$)

Las propiedades de la distribución normal son:

Teorema 6.3:

Distribución normal	
Media	μ
Varianza	σ^2
Desviación estándar	σ

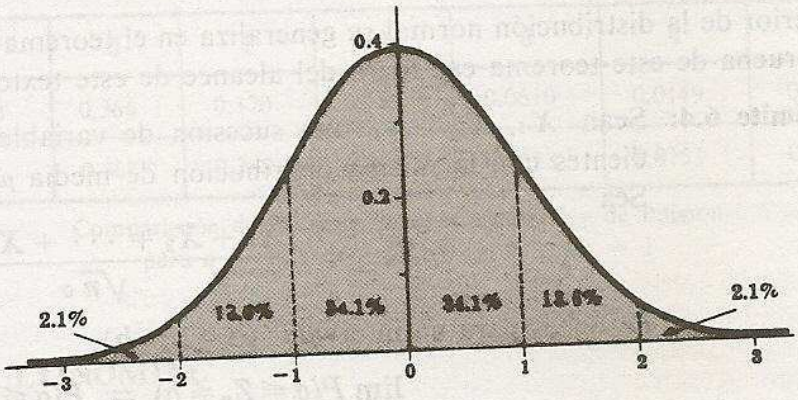
La distribución normal anterior con media μ y varianza σ^2 la designamos por

$$N(\mu, \sigma^2)$$

Si hacemos la sustitución $t = (x - \mu)/\sigma$ en la fórmula de $N(\mu, \sigma^2)$ obtenemos la *distribución* o *curva normal estándar*

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. La gráfica de esta distribución aparece luego. Observamos que para $-1 \leq t \leq 1$ el área bajo la curva es 68,2%; y para $-2 \leq t \leq 2$ el área bajo la curva es 95,4%.



Distribución normal $N(0, 1)$

La tabla de la página 111 da el área bajo la curva normal estándar entre $t = 0$ y valores positivos de t. La simetría de la curva alrededor de $t = 0$ nos permite obtener el área entre dos valores de t (ver problema 6.14).

Ahora sea X una variable aleatoria continua con distribución normal; con frecuencia decimos que X está *distribuida normalmente*. Calculamos la probabilidad de que X caiga entre a y b, designada por $P(a \leq X \leq b)$, como sigue. Primero pasamos a y b a *unidades estándar*

$$a' = (a - \mu)/\sigma \quad \text{y} \quad b' = (b - \mu)/\sigma$$

respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a' \leq X^* \leq b') \\ &= \text{área bajo la curva normal estándar entre } a' \text{ y } b' \end{aligned}$$

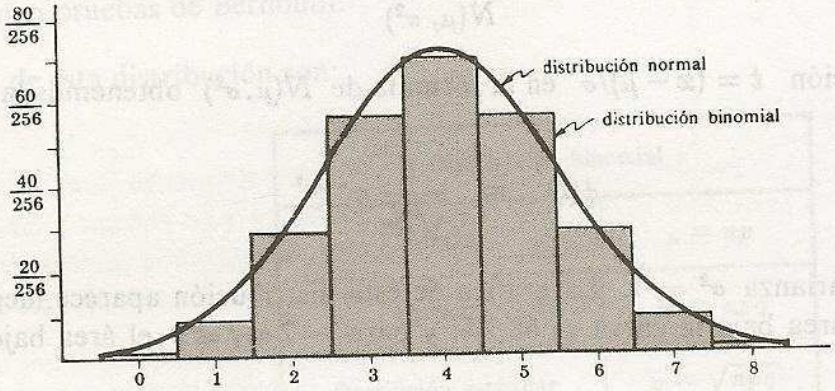
Aquí X^* es la variable aleatoria estandarizada (ver página 79) que corresponde a X y, por tanto, X^* tiene distribución normal estándar $N(0, 1)$.

APROXIMACION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL. TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

La distribución binomial $P(k) = b(k; n, p)$ se aproxima estrechamente a la distribución normal proveyendo un n grande y ni p ni q próximos a cero. Esta propiedad se indica en el diagrama siguiente donde escogimos la distribución binomial correspondiente a $n = 8$ y $p = q = \frac{1}{2}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(k)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Distribución binomial con $n = 8$ y $p = q = \frac{1}{2}$



Comparación de las distribuciones binomial y normal

La propiedad anterior de la distribución normal se generaliza en el teorema central del límite que viene en seguida. La prueba de este teorema cae fuera del alcance de este texto.

Teorema central del límite 6.4: Sean $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución de media μ y varianza σ. Sea

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

Entonces para un intervalo $\{a \leq x \leq b\}$,

$$\lim_{n \to \infty} P(a \leq Z_n \leq b) = P(a \leq \phi \leq b)$$

donde ϕ es la distribución normal estándar.

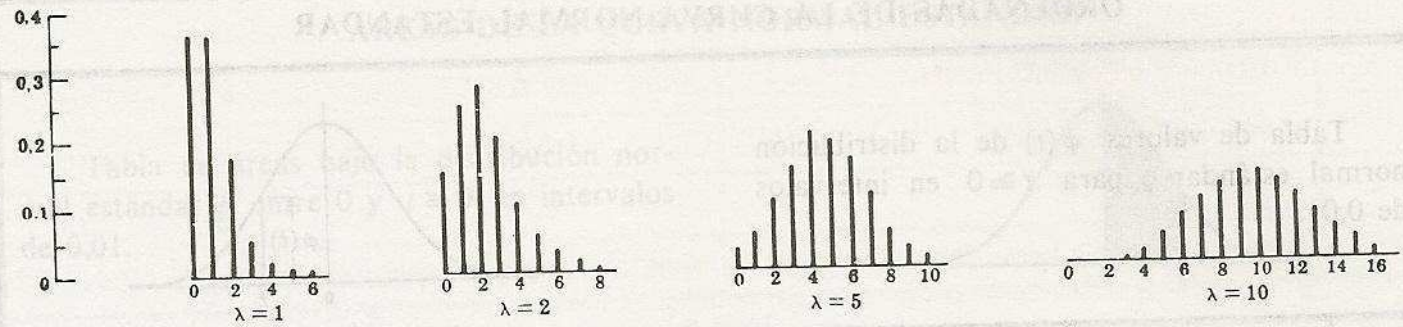
Recordamos que llamamos $\bar{S}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ la media muestral de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$. Así Z_n en el teorema anterior es la media muestral estandarizada. Hablando en términos generales, el teorema central del límite dice que en una sucesión de pruebas repetidas la media muestral estandarizada se aproxima a la curva normal estándar según que el número de pruebas aumente.

DISTRIBUCION DE POISSON

La distribución de Poisson se define como sigue:

$$p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\lambda > 0$ es una constante. Esta distribución infinita contable se presenta en muchos fenómenos naturales, tales como el número de llamadas telefónicas por minuto en un tablero de distribución, el número de erratas por página en un texto grande, y el número de partículas α emitidas por una sustancia radiactiva. A continuación se muestran algunos diagramas de la distribución de Poisson para diferentes valores de λ.



Distribución de Poisson para valores escogidos de λ

Propiedades de la distribución de Poisson:

Teorema 6.5:

Distribución de Poisson	
Media	$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \lambda$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{\lambda}$

A pesar de que la distribución de Poisson tiene interés independiente, también nos proporciona una aproximación notable a la distribución binomial para un k pequeño, establecido que p sea pequeño y $\lambda = np$ (ver problema 6.27). Esto se indica en la tabla siguiente.

k	0	1	2	3	4	5
Binomial	0,366	0,370	0,185	0.0610	0,0149	0,0029
Poisson	0,368	0,368	0,184	0,0613	0,0153	0,00307

Comparación de las distribuciones binomial y de Poisson para $n = 100$, $p = 1/100$ y $\lambda = np = 1$

DISTRIBUCION MULTINOMIAL

La distribución binomial se generaliza como sigue. Supóngase que el espacio muestral de un experimento se divide en, digamos, s sucesos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_s$ con probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_s$. (Por consiguiente $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = 1$.) Entonces:

Teorema 6.6: En n pruebas respectivas, la probabilidad de que A_1 suceda k_1 veces, A_2 suceda k_2 veces, ..., y A_s suceda k_s veces es igual

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_s!}\,p_1^{k_1}\,p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$$

donde $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

Los números anteriores forman la tan nombrada *distribución multinomial* puesto que son precisamente los términos del desarrollo de $(p_1 + p_2 + \cdots + P_s)^n$. Obsérvese que si $s = 2$, entonces obtenemos la distribución binomial, discutida al principio del capítulo.

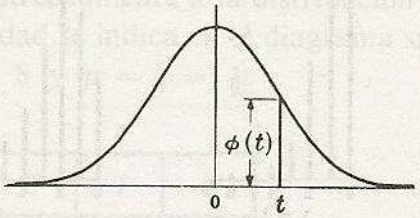
Ejemplo 6.4: Un dado corriente se lanza 8 veces. La probabilidad de obtener los lados 5 y 6 dos veces y cada uno de los otros una vez es

$$\frac{8!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right) = \frac{35}{5832} \approx 0{,}006$$

Tabla 6.1

ORDENADAS DE LA CURVA NORMAL ESTANDAR

Tabla de valores $\phi(t)$ de la distribución normal estándar ϕ para $t \geq 0$ en intervalos de 0,01.

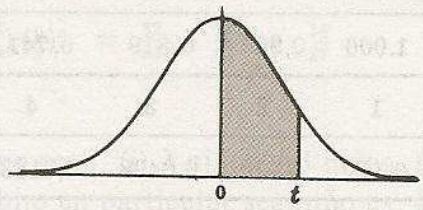


t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 6.2

AREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTANDAR

Tabla de áreas bajo la distribución normal estándar ϕ entre 0 y $t \geq 0$ en intervalos de 0,01.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0.3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0.4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,.4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0.4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

VALORES DE $e^{-\lambda}$										
λ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$e^{-\lambda}$	1,000	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0,368	0,135	0,0498	0,0183	0,00674	0,00248	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045

Tabla 6.3

Problemas resueltos

DISTRIBUCION BINOMIAL

6.1. Hallar (i) $b(2; 5, \frac{1}{3})$, (ii) $b(3; 6, \frac{1}{2})$, (iii) $b(3; 4, \frac{1}{4})$.

Aquí $b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ donde $p + q = 1$.

(i) $b(2; 5, \frac{1}{3}) = \binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 = \frac{80}{243}$.

(ii) $b(3; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}$.

(iii) $b(3; 4, \frac{1}{4}) = \binom{4}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4}) = \binom{4}{1}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4}) = \frac{4}{1}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4}) = \frac{3}{64}$.

6.2. Una moneda corriente se lanza tres veces. Hallar la probabilidad P de que salgan, (i) tres caras, (ii) dos caras, (iii) una cara, (iv) no caras.

Método 1. Se obtiene el espacio equiprobable siguiente de ocho elementos:

$$S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

(i) Tres caras (HHH) aparecen una vez solamente entre los ocho puntos muestrales; o sea, $P = \frac{1}{8}$.

(ii) Dos caras aparecen 3 veces (HHT, HTH y THH); o sea, $P = \frac{3}{8}$.

(iii) Una cara aparece 3 veces (HTT, THT y TTH); o sea, $P = \frac{3}{8}$.

(iv) No caras, esto es, tres sellos (TTT), ocurre solamente una vez; o sea, $P = \frac{1}{8}$.

Método 2. Usar teorema 6.1 con $n = 3$ y $p = q = \frac{1}{2}$.

(i) Aquí $k = 3$ y $P = b(3; 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = 1\cdot\frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{8}$.

(ii) Aquí $k = 2$ y $P = b(2; 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}) = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

(iii) Aquí $k = 1$ y $P = b(1; 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

(iv) Aquí $k = 0$ y $P = b(0; 3, \frac{1}{2}) = \binom{3}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

6.3. El equipo A tiene $\frac{2}{3}$ de probabilidad de ganar cuando juega. Si A juega 4 partidos, hallar la probabilidad de que A gane, (i) dos partidos, (ii) un partido por lo menos, (iii) más de la mitad de los juegos.

Aquí $n = 4$, $p = \frac{2}{3}$ y $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.

(i) $P(2 \text{ victorias}) = b(2; 4, \frac{2}{3}) = \binom{4}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{27}$.

(ii) Aquí $q^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ es la probabilidad de que A pierda todos los cuatro partidos. Entonces $1 - q^4 = \frac{80}{81}$ es la probabilidad de ganar por lo menos un partido.

(iii) A gana más de la mitad de los partidos si A gana 3 ó 4 partidos. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$P(3 \text{ victorias}) + P(4 \text{ victorias}) = \binom{4}{3}(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3}) + \binom{4}{4}(\tfrac{2}{3})^4 = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{16}{27}$$

6.4. Una familia tiene 6 hijos. Hallar la probabilidad P de que sean, (i) 3 niños y 3 niñas, (ii) menos niños que niñas. Suponer que la probabilidad de que un hijo en particular sea niño es $\frac{1}{2}$.

Por tanto $n = 6$ y $p = q = \frac{1}{2}$.

(i) $P = P(3 \text{ niños}) = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

(ii) Hay menos niños que niñas si hay 0,1 ó 2 niños. Por tanto

$$P = P(0 \text{ niños}) + P(1 \text{ niño}) + P(2 \text{ niños}) = (\tfrac{1}{2})^6 + \binom{6}{1}(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^5 + \binom{6}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^4 = \frac{11}{32}$$

6.5. ¿Cuántos dados se deben lanzar para que la probabilidad de sacar un seis sea mayor?

La probabilidad de no conseguir un seis con n dados es $(\frac{5}{6})^n$. Por tanto buscamos el menor n para el cual $(\frac{5}{6})^n$ es *menor* que $\frac{1}{2}$:

$$(\tfrac{5}{6})^1 = \tfrac{5}{6}; \quad (\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{25}{36}; \quad (\tfrac{5}{6})^3 = \tfrac{125}{216}; \quad \text{pero} \quad (\tfrac{5}{6})^4 = \tfrac{625}{1296} < \tfrac{1}{2}$$

O sea que tiene que lanzar 4 dados.

6.6. La probabilidad de que un hombre pegue en el blanco es $\frac{1}{4}$. (i) Si dispara 7 veces, ¿cuál es la probabilidad P de que dos veces por lo menos pegue al blanco? (ii) ¿Cuántas veces tiene que disparar para que la probabilidad de pegar por lo menos una vez sea mayor que $\frac{2}{3}$?

(i) Buscamos la suma de probabilidades para $k = 2, 3, 4, 5, 6$ y 7. Es más simple en este caso hallar la suma de las probabilidades para $k = 0$ y 1, o sea, ningún acierto o 1 acierto y luego restar esto de 1.

$$P(\text{ningún acierto}) = (\tfrac{3}{4})^7 = \frac{2187}{16.384}, \quad P(1 \text{ acierto}) = \binom{7}{1}(\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4})^6 = \frac{5103}{16.384}$$

Entonces $P = 1 - \frac{2187}{16.384} - \frac{5103}{16.384} = \frac{4547}{8192}$.

(ii) La probabilidad de no pegar en el blanco es q^n. Por tanto buscamos el menor n para el cual q^n es menor que $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, donde $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Por tanto calculamos potencias sucesivas de q hasta obtener $q^n < \frac{1}{3}$

$$(\tfrac{3}{4})^1 = \tfrac{3}{4} \not< \tfrac{1}{3}; \quad (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{9}{16} \not< \tfrac{1}{3}; \quad (\tfrac{3}{4})^3 = \tfrac{27}{64} \not< \tfrac{1}{3}; \quad \text{pero} \quad (\tfrac{3}{4})^4 = \tfrac{81}{256} < \tfrac{1}{3}$$

En resumen tiene que disparar 4 veces.

6.7. Probar el teorema 6.1: La probabilidad de k éxitos exactamente en n pruebas repetidas es $b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

El espacio muestral de las n pruebas repetidas consta de todas las n-uplas ordenadas cuyas componentes son o s (éxitos) o f(fracasos). El evento A de k éxitos consta de todas las n-uplas de las cuales k componentes son s y las otras n-k componentes son f. El número de n-uplas en el evento A es igual al número de maneras en que k letras s puede distribuirse entre las n componentes de una n-upla: o sea que A consta de $\binom{n}{k}$ puntos muestrales. Puesto que la probabilidad de cada punto de A es $p^k q^{n-k}$, tenemos $P(A) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

6.8. Probar el teorema 6.2: Sea X una variable aleatoria con distribución binomial $b(k; n, p)$. Entonces, (i) $E(X) = np$ y (ii) $\text{var}(X) = npq$. Por consiguiente, $\sigma_X = \sqrt{npq}$.

(i) Usando $b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, obtenemos

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot b(k; n, p) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}$$

(no consideramos el término $k = 0$ puesto que su valor es cero, y factorizamos np en cada término). Hacemos $s = k - 1$ en la suma anterior. Cuando k recorre los valores 1 a n, s recorre los valores 0 a $n - 1$. Así,

$$E(X) = np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!\,(n-1-s)!} p^s q^{n-1-s} = np \sum_{s=0}^{n-1} b(s; n-1, p) = np$$

puesto que, por el teorema del binomio

$$\sum_{s=0}^{n-1} b(s; n-1, p) = (p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$$

(ii) Calculamos primero $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 b(k; n, p) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}$$

Hacemos de nuevo $s = k - 1$ y obtenemos

$$E(X^2) = np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \frac{(n-1)!}{s!\,(n-1-s)!} p^s q^{n-1-s} = np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)\, b(s; n-1, p)$$

Pero
$$\sum_{s=0}^{n-1} (s+1)\, b(s; n-1, p) = \sum_{s=0}^{n-1} s \cdot b(s; n-1, p) + \sum_{s=0}^{n-1} b(s; n-1, p)$$
$$= (n-1)p + 1 = np + 1 - p = np + q$$

donde usamos (i) para obtener $(n - 1)p$. En consecuencia,

$$E(X^2) = np(np+q) = (np)^2 + npq$$

y
$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = (np)^2 + npq - (np)^2 = npq$$

Así el teorema queda probado.

6.9. Determinar el número esperado de niños de una familia con 8 hijos, suponiendo la distribución del sexo igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad de que el número esperado de niños suceda?

El número esperado de niños es $E = np = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$. La probabilidad de que la familia tenga cuatro niños es

$$b(4; 8, \tfrac{1}{2}) = \binom{8}{4} (\tfrac{1}{2})^4 (\tfrac{1}{2})^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\tfrac{1}{2})^8 = \frac{70}{256} = 0{,}27$$

6.10. La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es 0,02. Un cargamento de 10.000 artículos se envía a sus almacenes. Hallar el número esperado E de artículos defectuosos y la desviación estándar σ.

$E = np = (10.000)(0{,}02) = 200.$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10.000)(0{,}02)(0{,}98)} = \sqrt{196} = 14.$

DISTRIBUCION NORMAL

6.11. La media y la desviación estándar de un examen son 74 y 12 respectivamente. Hallar los resultados en unidades estándar de los estudiantes que recibieron notas, (i) 65, (ii) 74, (iii) 86, (iv) 92.

(i) $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{65-74}{12} = -0{,}75$

(ii) $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{74-74}{12} = 0$

(iii) $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{86-74}{12} = 1{,}0$

(iv) $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{92-74}{12} = 1{,}5$

6.12. En relación con el problema precedente, hallar las notas que corresponden a resultados estándar (i) —1, (ii) 0,5, (iii) 1,25, (iv) 1,75.

(i) $x = \sigma t + \mu = (12)(-1) + 74 = 62$

(ii) $x = \sigma t + \mu = (12)(0{,}5) + 74 = 80$

(iii) $x = \sigma t + \mu = (12)(1{,}25) + 74 = 89$

(iv) $x = \sigma t + \mu = (12)(1{,}75) + 74 = 95$

6.13. Sea ϕ la distribución normal estándar. Hallar $\phi(t)$ para, (i) $t = 1{,}63$, (ii) $t = -0{,}75$, (iii) $t = -2{,}08$.

(i) En la tabla 6.1, buscar hacia abajo en la columna primera hasta llegar al elemento 1,6. Luego continuar a la derecha hasta la columna 3. El elemento hallado es 0,1057. Por consiguiente $\phi(1{,}63) = 0{,}1057$.

(ii) Por simetría, $\phi(-0{,}75) = \phi(0{,}75) = 0{,}3011$.

(iii) $\phi(-2{,}08) = \phi(2{,}08) = 0{,}0459$.

6.14. Sea X una variable aleatoria con distribución estándar ϕ. Hallar:

(i) $P(0 \leq X \leq 1{,}42)$

(ii) $P(-0{,}73 \leq X \leq 0)$

(iii) $P(-1{,}37 \leq X \leq 2{,}01)$

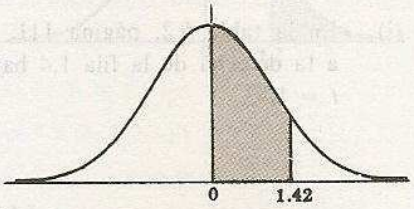
(iv) $P(0{,}65 \leq X \leq 1{,}26)$

(v) $P(-1{,}79 \leq X \leq -0{,}54)$

(vi) $P(X \geq 1{,}13)$

(vii) $P(|X| \leq 0{,}5)$

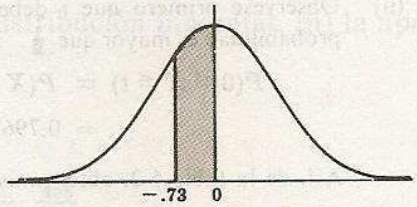
(i) $P(0 \leq X \leq 1{,}42)$ es igual al área bajo la curva normal estándar entre 0 y 1,42. O sea que en la tabla 6.2, buscar hacia abajo en la primera columna hasta llegar a 1,4, y luego continuar a la derecha hasta la columna 2. El elemento es 0,4222. Por consiguiente, $P(0 \leq X \leq 1{,}42) = 0{,}4222$.



(ii) Por simetría,

$P(-0{,}73 \leq X \leq 0)$

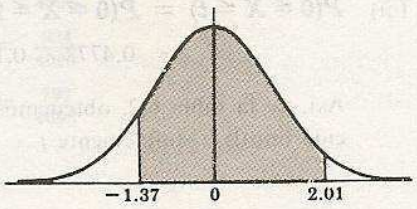
$= P(0 \leq X \leq 0{,}73) = 0{,}2673$



(iii) $P(\ 1{,}37 \leq X \leq 2{,}01)$

$= P(\ 1{,}37 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 2{,}01)$

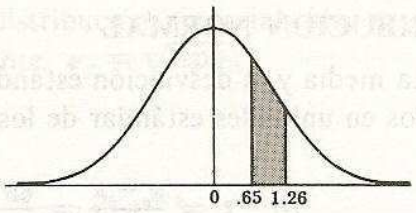
$= 0{,}4147 + 0{,}4778 = 0{,}8925$



(iv) $P(0{,}65 \leq X \leq 1{,}26)$

$= P(0 \leq X \leq 1{,}26) - P(0 \leq X \leq 0{,}65)$

$= 0{,}3962 - 0{,}2422 = 0{,}1540$

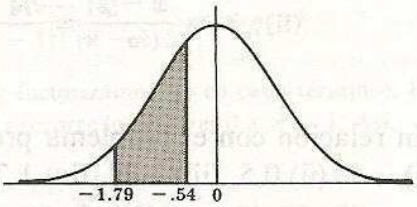


(v) $P(-1{,}79 \leq X \leq -0{,}54)$

$= P(0{,}54 \leq X \leq 1{,}79)$

$= P(0 \leq X \leq 1{,}79) - P(0 \leq X \leq 0{,}54)$

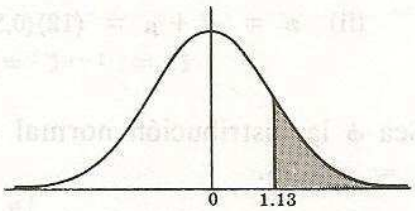
$= 0{,}4633 - 0{,}2054 = 0{,}2579$



(vi) $P(X \geq 1{,}13)$

$= P(X \geq 0) - P(0 \leq X \leq 1{,}13)$

$= 0{,}5000 - 0{,}3708 = 0{,}1292$

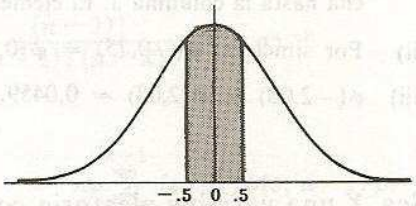


(vii) $P(|X| \leq 0{,}5)$

$= P(-0{,}5 \leq X \leq 0{,}5)$

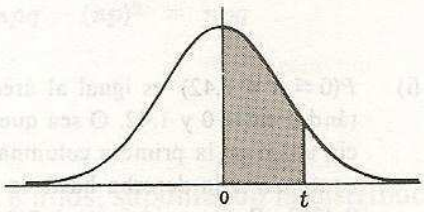
$= 2P(0 \leq X \leq 0{,}5)$

$= 2(0{,}1915) = 0{,}3830$



6.15. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar ϕ. Determinar el valor de t si, (i) $P(0 \leq X \leq t) = 0{,}4236$, (ii) $P(X \leq t) = 0{,}7967$, (iii) $P(t \leq X \leq 2) = 0{,}1000$.

(i) En la tabla 6.2, página 111, el elemento 0,4236 aparece a la derecha de la fila 1,4 bajo la columna 3. Por tanto, $t = 1{,}43$.

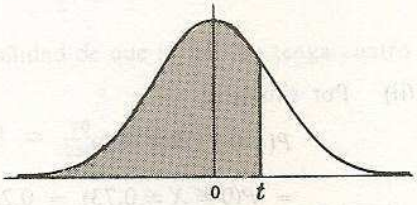


(ii) Obsérvese primero que t debe ser positivo puesto que la probabilidad es mayor que $\frac{1}{2}$. Tenemos

$$P(0 \leq X \leq t) = P(X \leq t) - \tfrac{1}{2}$$

$$= 0{,}7967 - 0{,}5000 = 0{,}2967$$

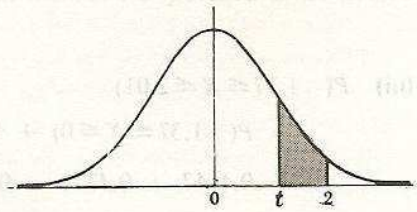
Así, de la tabla 6.2, obtenemos $t = 0{,}83$.



(iii) $P(0 \leq X \leq t) = P(0 \leq X \leq 2) - P(t \leq X \leq 2)$

$= 0{,}4772 - 0{,}1000 = 0{,}3772$

Así, de la tabla 6.2, obtenemos $t = 1{,}161$ (por interpolación lineal) o simplemente $t = 1{,}16$.



6.16. Supóngase que la temperatura T durante junio está distribuida normalmente con media 68° y desviación estándar 6°. Hallar la probabilidad p de que la temperatura esté entre 70° y 80°.

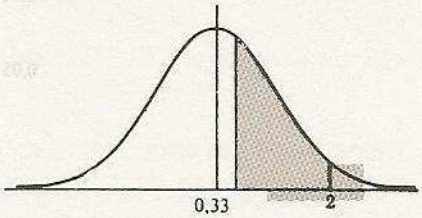
70° en unidades estándar $= (70 - 68)/6 = 0{,}33$.

80° en unidades estándar $= (80 - 68)/6 = 2{,}00$.

Entonces

$$\begin{aligned} p &= P(70 \leq T \leq 80) = P(0{,}33 \leq T^* \leq 2) \\ &= P(0 \leq T^* \leq 2) - P(0 \leq T^* \leq 0{,}33) \\ &= 0{,}4772 - 0{,}1293 = 0{,}3479 \end{aligned}$$

Aquí T^* es la variable aleatoria estandarizada correspondiente a T y así T^* tiene distribución normal estándar ϕ.



6.17. Supóngase que las estaturas H de 800 estudiantes están normalmente distribuidas con media 66 pulgadas y desviación estándar 5 pulgadas. Hallar el número N de estudiantes con estatura, (i) entre 65 y 70 pulgadas, (ii) mayor o igual a 6 pies (72 pulgadas).

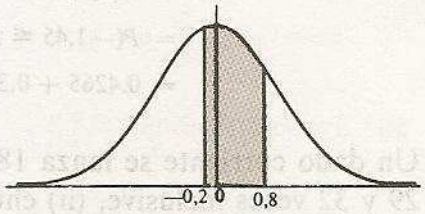
(i) 65 pulgadas en unidades estándar $= (65 - 66)/5 = -0{,}20$

70 pulgadas en unidades estándar $= (70 - 66)/5 = 0{,}80$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(65 \leq H \leq 70) &= P(-0{,}20 \leq H^* \leq 0{,}80) \\ &= 0{,}0793 + 0{,}2881 = 0{,}3674 \end{aligned}$$

Entonces $N = 800(0{,}3674) = 294$.



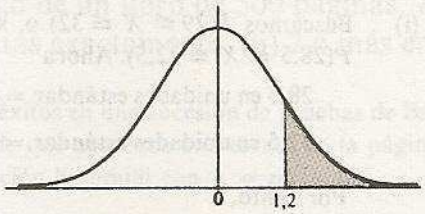
(ii) 72 pulgadas en unidades estándar $= (72 - 66)/5 = 1{,}20$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(H \geq 72) &= P(H^* \geq 1{,}2) \\ &= 0{,}5000 - 0{,}3849 = 0{,}1151 \end{aligned}$$

Así $N = 800(0{,}1151) = 92$.

Aquí H^* es la variable aleatoria estandarizada correspondiente a H y, por tanto, H^* tiene distribución normal estándar ϕ.



APROXIMACION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL

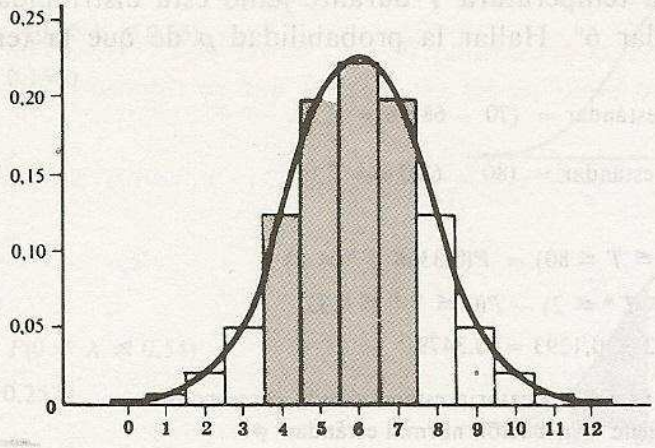
6.18. Una moneda corriente se lanza 12 veces. Determinar la probabilidad P de que el número de caras que salgan esté entre 4 y 7 inclusive por medio de, (i) la distribución binomial, (ii) la aproximación normal a la distribución binomial.

(i) Por el teorema 6.1 con $n = 12$ y $p = q = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} P(4 \text{ caras}) &= \binom{12}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \frac{495}{4096} \\ P(5 \text{ caras}) &= \binom{12}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 = \frac{792}{4096} \\ P(6 \text{ caras}) &= \binom{12}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \frac{924}{4096} \\ P(7 \text{ caras}) &= \binom{12}{7}\left(\tfrac{1}{2}\right)^7\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{792}{4096} \end{aligned}$$

Por tanto, $P = \frac{495}{4096} + \frac{792}{4096} + \frac{924}{4096} + \frac{792}{4096} = \frac{3003}{4096} = 0{,}7332$.

(ii)

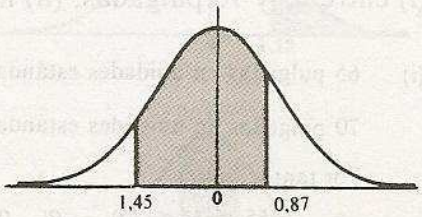


Probabilidad de ocurrencia del número de caras.

Aquí $\mu = np = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}73$. Denotemos X el número de caras que sale. Buscamos $P(4 \leq X \leq 7)$. Pero si suponemos que el dato es continuo, con el fin de poder aplicar la aproximación normal, tenemos que hallar $P(3{,}5 \leq X \leq 7{,}5)$, como se indica en el diagrama anterior. Ahora

3,5 en unidades estándar $= (3{,}5 - 6)/1{,}73 = -1{,}45$.

7,5 en unidades estándar $= (7{,}5 - 6)/1{,}73 = 0{,}87$.



Entonces
$$\begin{aligned} P &\approx P(3{,}5 \leq X \leq 7{,}5) \\ &= P(-1{,}45 \leq X^* \leq 0{,}87) \\ &= 0.4265 + 0{,}3078 = 0{,}7343 \end{aligned}$$

6.19. Un dado corriente se lanza 180 veces. Hallar la probabilidad P de que el lado 6 salga, (i) entre 29 y 32 veces inclusive, (ii) entre 31 y 35 veces inclusive.

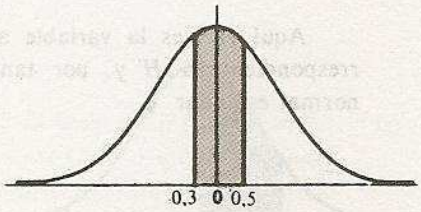
Aquí $\mu = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5$. Denotamos X el número de veces que el lado 6 aparece.

(i) Buscamos $P(29 \leq X \leq 32)$ o, supuesto el dato continuo, $P(28{,}5 \leq X \leq 32{,}5)$. Ahora

28,5 en unidades estándar $= (28{,}5 - 30)/5 = -0{,}3$

32,5 en unidades estándar $= (32{,}5 - 30)/5 = 0{,}5$

Por tanto,
$$\begin{aligned} P &\approx P(28{,}5 \leq X \leq 32{,}5) = P(-0{,}3 \leq X^* \leq 0{,}5) \\ &= P(-0{,}3 \leq X^* \leq 0) + P(0 \leq X^* \leq 0{,}5) \\ &= 0{,}1179 + 0{,}1915 = 0{,}3094 \end{aligned}$$

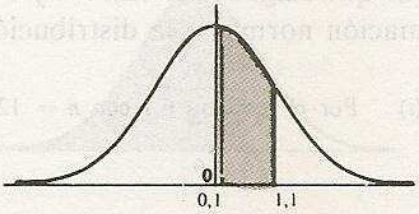


(ii) Buscamos $P(31 \leq X \leq 35)$ o, supuesto el dato continuo, $P(30{,}5 \leq X \leq 35{,}5)$. Ahora

30,5 en unidades estándar $= (30{,}5 - 30)/5 = 0{,}1$

35,5 en unidades estándar $= (35{,}5 - 30)/5 = 1{,}1$

Entonces
$$\begin{aligned} P &\approx P(30{,}5 \leq X \leq 35{,}5) = P(0{,}1 \leq X^* \leq 1{,}1) \\ &= P(0 \leq X^* \leq 1{,}1) - P(0 \leq X^* \leq 0{,}1) \\ &= 0{,}3643 - 0{,}0398 = 0{,}3245 \end{aligned}$$



6.20. Hallar la probabilidad P de que entre 10.000 dígitos al azar, el dígito 3 aparezca 950 veces a lo sumo.

Aquí $\mu = np = 10.000 \cdot \frac{1}{10} = 1000$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10.000 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = 30$. Llamemos X el número de veces que el dígito 3 sale. Buscamos $P(X \leq 950)$. Ahora

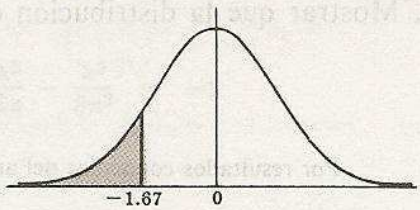
950 en unidades estándar $= (950 - 1000)/30$

$= -1.67$

Por tanto $P \approx P(X \leq 950) = P(X^* \leq -1{,}67)$

$= P(X^* \leq 0) - P(-1{,}67 \leq X^* \leq 0)$

$= 0{,}5000 - 0{,}4525 = 0{,}0475$



DISTRIBUCION DE POISSON

6.21. Hallar (i) $e^{-1.3}$, (ii) $e^{-2.5}$.

Por la tabla 6.3, página 112, y la ley de los exponentes:

(i) $e^{-1.3} = (e^{-1})(e^{-0.3}) = (0{,}368)(0{,}741) = 0{,}273.$

(ii) $e^{-2.5} = (e^{-2})(e^{-0.5}) = (0{,}135)(0{,}607) = 0{,}0819.$

6.22. Por la distribución de Poisson $p(k;\lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, hallar (i) $p(2;\ 1)$, (ii) $p(3;\ \frac{1}{2})$, (iii) $p(2;\ 0{,}7)$.

(Usar la tabla 6.3, página 112, para obtener $e^{-\lambda}$.)

(i) $p(2;\ 1) = \dfrac{1^2 e^{-1}}{2!} = \dfrac{e^{-1}}{2} = \dfrac{0{,}368}{2} = 0{,}184$

(ii) $p(3;\ \frac{1}{2}) = \dfrac{(\frac{1}{2})^3 e^{-0.5}}{3!} = \dfrac{e^{-0.5}}{48} = \dfrac{0{,}607}{48} = 0{,}013$

(iii) $p(2;\ .7) = \dfrac{(0{,}7)^2 e^{-0.7}}{2!} = \dfrac{(0{,}49)(0{,}497)}{2} = 0{,}12$

6.23. Supóngase que 300 erratas están distribuidas al azar a lo largo de un libro de 500 páginas. Hallar la probabilidad P de que una página dada contenga, (i) 2 erratas exactamente, (ii) 2 o más erratas.

Consideremos el número de erratas de una página como el número de éxitos en una sucesión de pruebas de Bernoulli. Aquí $n = 300$ puesto que hay 300 erratas, y $p = 1/500$, la probabilidad de que aparezca una errata en la página dada. Puesto que p es pequeño, usamos la aproximación de Poisson a la distribución binomial con $\lambda = np = 0{,}6$.

(i) $P = p(2;\ 0{,}6) = \dfrac{(0{,}6)^2 e^{-0.6}}{0!} = (0{,}36)(0{,}549)/2 = 0{,}0988 \approx 0{,}1$

(ii) $P(0 \text{ erratas}) = \dfrac{(0{,}6)^0 e^{-0.6}}{0!} = e^{-0.6} = 0{,}549$

$P(1 \text{ errata}) = \dfrac{(0{,}6)^1 e^{-0.6}}{1!} = (0{,}6)(0{,}549) = 0{,}329$

Entonces $P = 1 - P(0 \text{ ó } 1 \text{ errata}) = 1 - (0{,}549 + 0{,}329) = 0{,}122.$

6.24. Supóngase que el 2 % de los artículos producidos en una fábrica son defectuosos. Hallar la probabilidad P de que haya 3 artículos defectuosos en una muestra de 100 artículos.

Se aplica la distribución binomial para $n = 100$ y $P = 0{,}02$. Sin embargo, puesto que p es pequeño, usamos la aproximación de Poisson con $\lambda = np = 2$. Así

$$P = p(3;\ 2) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 8(0{,}135)/6 = 0{,}180$$

6.25. Mostrar que la distribución de Poisson $p(k;\lambda)$ es una distribución de probabilidad, o sea

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) = 1$$

Por resultados conocidos del análisis $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!$. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k! = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

6.26. Probar el teorema 6.5: Sea X una variable aleatoria con la distribución de Poisson $p(k;\lambda)$. Por tanto, (i) $E(X) = \lambda$ y (ii) var $(X) = \lambda$. De aquí $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

(i) Usando $p(k;\lambda) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, obtenemos

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

(despreciamos el término $k = 0$ puesto que su valor es cero, y factorizamos λ en cada término). Sea $s = k - 1$ en la suma anterior. Cuando k recorre los valores 1 a ∞, s recorre los valores 0 a ∞. Así,

$$E(X) = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s e^{-\lambda}}{s!} = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} p(s;\lambda) = \lambda$$

puesto que $\sum_{s=0}^{\infty} p(s;\lambda) = 1$ por el problema anterior.

(ii) Primero calculamos $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

Hacemos de nuevo $s = k - 1$ y obtenemos

$$E(X^2) = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\frac{\lambda^s e^{-\lambda}}{s!} = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\, p(s;\lambda)$$

Pero $\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\, p(s;\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} s p(s;\lambda) + \sum_{s=0}^{\infty} p(s;\lambda) = \lambda + 1$

donde usamos (i) para obtener λ y el problema anterior para obtener 1. En consecuencia,

$$E(X^2) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda$$

y

$$\text{var}\,(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Así, el teorema queda probado.

6.27. Mostrar que si p es pequeño y n es grande, la distribución binomial se aproxima a la distribución de Poisson; esto es, $b(k;n,p) \approx p(k;\lambda)$ donde $\lambda = np$.

Tenemos $b(0;n,p) = (1-p)^n = (1-\lambda/n)^n$. Tomando logaritmo natural a ambos lados,

$$\ln b(0;n,p) = n\ln(1-\lambda/n)$$

El desarrollo de Taylor del logaritmo natural es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

y, por tanto,

$$\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} - \frac{\lambda^3}{3n^3} - \cdots$$

Por tanto, si n es grande,

$$\ln b(0; n, p) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{3n^2} \approx -\lambda$$

y de aquí $b(0; n, p) \approx e^{-\lambda}$.

Además, si p es muy pequeño y, por consiguiente, $q \approx 1$, tenemos

$$\frac{b(k; n, p)}{b(k-1; n, p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = \frac{\lambda - (k-1)p}{kq} \approx \frac{\lambda}{k}$$

Esto es, $b(k; n, p) \approx \frac{\lambda}{k} b(k-1; n, p)$. Así usando $b(0; n, p) \approx e^{-\lambda}$, obtenemos $b(1; n, p) \approx \lambda e^{-\lambda}$, $b(2; n, p) \approx \lambda^2 e^{-\lambda}/2$ y, por inducción, $b(k; n, p) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = p(k; \lambda)$.

PROBLEMAS VARIOS

6.28. Las lámparas de colores producidas por una compañía son 50% rojas 30% azules y 20% verdes. En una muestra de 5 lámparas, hallar la probabilidad P de que 2 sean rojas, 1 sea verde y 2 sean azules.

Por el teorema 6.6 sobre distribución multinomial,

$$P = \frac{5!}{2!\,1!\,2!}(0{,}5)^2(0{,}3)(0{,}2)^2 = 0{,}09$$

6.29. Mostrar que la distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

es una distribución de probabilidad continua, esto es $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Sustituyendo $t = (x-\mu)/\sigma$ en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, obtenemos la integral

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

Es suficiente mostrar que $I^2 = 1$. Tenemos

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)/2}\,ds\,dt$$

Introducimos coordenadas polares en la integral doble anterior. Sea $s = r\cos\theta$ y $t = r\,\text{sen}\,\theta$. Por tanto, $ds\,dt = r\,dr\,d\theta$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq \infty$. Esto es,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}\,dr\,d\theta$$

Pero

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 1$$

Por tanto, $I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1$ y el teorema quedó probado.

6.30. Probar el teorema 6.3: Sea X una variable aleatoria con distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

Entonces, (i) $E(X) = \mu$ y (ii) $\text{var}(X) = \sigma^2$. Por tanto $\sigma_X = \sigma$.

(i) Por definición, $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\,dx$. Estableciendo $t = (x-\mu)/\sigma$, obtenemos

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}\,dt + \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt$$

Pero $g(t) = te^{-t^2/2}$ es una función impar, o sea, $g(-t) = -g(t)$; por tanto $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt = 0$. Además, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt = 1$ por el problema anterior. En consecuencia, $E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0 + \mu\cdot 1 = \mu$ como se pedía.

(ii) Por definición, $E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\,dx$. Tomando de nuevo $t = (x-\mu)/\sigma$, obtenemos

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)^2e^{-t^2/2}\,dt$$

$$= \sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}\,dt + 2\mu\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}\,dt + \mu^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt$$

que se reduce como antes a $E(X^2) = \sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}\,dt + \mu^2$

Hacemos esta integración por partes. Sea $u = t$ y $dv = te^{-t^2/2}\,dt$. Entonces $v = -e^{-t^2/2}$ y $du = dt$. Así

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-te^{-t^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt = 0 + 1 = 1$$

En consecuencia, $E(X^2) = \sigma^2\cdot 1 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$ y

$$\text{var}\,(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Por tanto el problema queda probado.

Problemas propuestos

DISTRIBUCION BINOMIAL

6.31. Hallar, (i) $b(1; 5, \frac{1}{3})$, (ii) $b(2; 7, \frac{1}{2})$, (iii) $b(2; 4, \frac{1}{4})$.

6.32. De una baraja corriente de 52 cartas se saca y se sustituye tres veces una carta. Hallar la probabilidad de que resulten, (i) dos corazones, (ii) tres corazones, (iii) por lo menos un corazón.

6.33. El promedio de un bateador de béisbol es 0,300. Si batea 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que logre, (i) dos aciertos? (ii) al menos un acierto?

6.34. Una caja contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Se saca y se remplaza una bola tres veces. Hallar la probabilidad de sacar, (i) 1 bola roja, (ii) 2 bolas rojas, (iii) por lo menos una bola roja.

6.35. El equipo A tiene $\frac{2}{5}$ de probabilidad de ganar cuando juega. Si juega 4 veces, hallar la probabilidad de que A gane, (i) 2 partidos, (ii) por lo menos 1 partido, (iii) más de la mitad de los partidos.

6.36. Se saca y se sustituye una carta de una baraja corriente. ¿Cuántas veces se tiene que repetir la operación para que, (i) haya por lo menos una oportunidad igual de sacar un corazón, (ii) la probabilidad de sacar un corazón sea mayor que $\frac{3}{4}$?

6.37. La probabilidad de que un hombre pegue en el blanco es $\frac{1}{3}$. (i) Si dispara 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de que pegue en el blanco dos veces por lo menos? (ii) ¿Cuántas veces debe disparar para que la probabilidad de pegar en el blanco una vez por lo menos sea mayor del 90%?

6.38. El departamento de matemáticas tiene 8 licenciados auxiliares que se destinan a una misma oficina. Cada licenciado puede estudiar por igual en su casa o en la oficina. ¿Cuántos escritorios deben haber en la oficina para que cada uno tenga por lo menos un escritorio el 90% de las veces?

6.39. El 2% de los tornillos producidos por una fábrica son defectuosos. En un despacho de 3600 tornillos, hallar el número esperado de tornillos defectuosos y la desviación estándar.

6.40. Un dado corriente se lanza 1620 veces. Hallar el número esperado de veces que sale el 6 y la desviación estándar.

6.41. Sea X una variable aleatoria de una distribución binomial con $E(X) = 2$ y var $(X) = 4/3$. Hallar la distribución de X.

6.42. Considerar la distribución binomial $P(k) = b(k; n, p)$. Mostrar que:

(i) $$\frac{P(k)}{P(k-1)} = \frac{b(k; n, p)}{b(k-1; n, p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq}$$

(ii) $P(k) > P(k-1)$ para $k < (n+1)p$ y $P(k) < P(k-1)$ para $k > (n+1)p$.

DISTRIBUCION NORMAL

6.43. Sea ϕ la distribución normal estándar

(i) Hallar $\phi(\frac{1}{4})$, $\phi(\frac{1}{2})$ y $\phi(-\frac{3}{4})$.

(ii) Hallar t tal que, (*a*) $\phi(t) = 0{,}100$, (*b*) $\phi(t) = 0{,}2500$, (*c*) $\phi(t) = 0{,}4500$.

6.44. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar ϕ. Hallar:
(i) $P(-0{,}81 \leq X \leq 1{,}13)$, (ii) $P(0{,}53 \leq X \leq 2{,}03)$, (iii) $P(X \leq 0{,}73)$, (iv) $P(|X| \leq \frac{1}{4})$.

6.45. Sea X una variable distribuida normalmente con media 8 y desviación estándar 4. Hallar:
(i) $P(5 \leq X \leq 10)$, (ii) $P(10 \leq X \leq 15)$, (iii) $P(X \geq 15)$, (iv) $P(X \leq 5)$.

6.46. Supóngase que los pesos de 2000 estudiantes varones están distribuidos normalmente con media 155 libras y desviación estándar 20 libras. Hallar el número de estudiantes con pesos (i) inferiores o iguales a 100 libras, (ii) entre 120 y 130 libras, (iii) entre 150 y 175 libras, (iv) mayores o iguales a 200 libras.

6.47. Supóngase que los diámetros de los tornillos fabricados por una compañía están distribuidos normalmente con media 0,25 pulgadas y desviación estándar 0,02 pulgadas. Se considera defectuoso un tornillo si su diámetro es $\leq 0{,}20$ pulgadas o $\geq 0{,}28$. Hallar el porcentaje de tornillos defectuosos producidos por la compañía.

6.48. Supóngase que los puntajes de un examen están distribuidos normalmente con media 76 y desviación estándar 15. El 15% de los estudiantes, los mejores, reciben aclamación A y el 10%, los peores, pierden el curso y reciben P. Hallar, (i) el puntaje mínimo para ganar un (A) y (ii) el puntaje mínimo para aprobar (para no recibir P).

APROXIMACION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL

6.49. Una moneda corriente se lanza 10 veces. Hallar la probabilidad de obtener entre 4 y 7 caras inclusive usando, (i) la distribución binomial, (ii) la aproximación normal a la distribución binomial.

6.50. Una moneda corriente se lanza 400 veces. Hallar la probabilidad de que el número de caras que resulten difiera de 200 por, (i) más de 10, (ii) más de 25.

6.51. Un dado corriente se lanza 720 veces. Hallar la probabilidad de que el 6 salga, (i) entre 100 y 125 veces inclusive, (ii) más de 150 veces.

6.52. Entre 625 dígitos al azar, hallar la probabilidad de que el dígito 7 salga, (i) entre 50 y 60 veces inclusive, (ii) entre 60 y 70 veces inclusive.

DISTRIBUCION DE POISSON

6.53. Hallar, (i) $e^{-1,6}$, (ii) $e^{-2,3}$.

6.54. En la distribución de Poisson $p(k; \lambda)$, hallar, (i) $p(2; 1,5)$, (ii) $p(3; 1)$, (iii) $p(2; 0,6)$.

6.55. Supóngase que 220 erratas están distribuidas al azar a lo largo de un libro de 200 páginas. Hallar la probabilidad de que una página dada contenga, (i) ninguna errata, (ii) 1 errata, (iii) 2 erratas, (iv) 2 o más erratas.

6.56. Supóngase que el 1% de los artículos producidos por una máquina son defectuosos. Hallar la probabilidad de que 3 o más artículos sean defectuosos en una muestra de 100.

6.57. Supóngase que el 2% de la población en promedio sean zurdos. Hallar la probabilidad que en 100 personas haya 3 o más zurdos.

6.58. Supóngase que en una población de 50.000 hay un promedio anual de 2 suicidas. Para una población de 100.000 hallar la probabilidad de que en un año dado haya, (i) 0, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 2 o más suicidas.

DISTRIBUCION MULTINOMIAL

6.59. Un dado se "carga para que el 6 salga 0,3 veces, el lado opuesto 1 salga 0,1 veces, y cada uno de los demás números salga 0,15 veces. Se lanza el dado 6 veces. Hallar la probabilidad de que, (i) cada lado salga una vez, (ii) cada uno de los lados 4, 5 y 6 salga dos veces.

6.60. Una caja contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 2 azules. Se toma una muestra de 6 bolas con sustitución, o sea, cada bola se devuelve antes de sacar la siguiente. Hallar la probabilidad de que, (i) 3 sean rojas, 2 blancas y 1 azul, (ii) 2 sean rojas, 3 blancas y 1 azul, (iii) aparezcan 2 de cada color.

Respuestas a los problemas propuestos

6.31. (i) $\frac{80}{243}$, (ii) $\frac{21}{128}$, (iii) $\frac{27}{128}$

6.32. (i) $\frac{9}{64}$, (ii) $\frac{1}{64}$, (iii) $\frac{37}{64}$

6.33. (i) 0,2646, (ii) 0,7599

6.34. (i) $\frac{36}{125}$, (ii) $\frac{54}{125}$, (iii) $\frac{117}{125}$

6.35. (i) $\frac{216}{625}$, (ii) $\frac{544}{625}$, (iii) $\frac{112}{625}$

6.36. (i) 3, (ii) 5

6.37. (i) $\frac{131}{243}$, (ii) 6

6.38. 6

6.39. $\mu = 72$, $\sigma = 8,4$

6.40. $\mu = 270$, $\sigma = 15$

6.41.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	64/729	192/729	240/729	160/729	60/729	12/729	1/729

Distribución de X con $n = 6$ y $p = 1/3$

6.43. (i) $\phi(\frac{1}{4}) = 0{,}3867$, $\phi(\frac{1}{2}) = 0{,}3521$, $\phi(-\frac{3}{4}) = 0{,}3011$.
(ii) (*a*) $t = \pm 1{,}66$, (*b*) $t = \pm 0{,}97$, (*c*) no hay valor de t.

6.44. (i) 0,2910 + 0,3708 = 0,6618, (ii) 0,4788 — 0.2019 = 0,2769, (iii) 0,5000 + 0,2673 = 0,7673, (iv) 2(0,0987) = 0,1974

6.45. (i) 0,4649, (ii) 0,2684, (iii) 0,0401, (iv) 0,2266

6.46. (i) 6, (ii) 131, (iii) 880, (iv) 24

6.47. 7,3%

6.48. (i) 92, (ii) 57

6.49. (i) 0,7734, (ii) 0,7718

6.50. (i) 0,2938, (ii) 0,0108

6.51. (i) 0,6886, (ii) 0,0011

6.52. (i) 0,3518, (ii) 0,5131

6.53. (i) 0,202, (ii) 0,100

6.54. (i) 0,251, (ii) 0,0613, (iii) 0,0988

6.55. (i) 0,333, (ii) 0,366, (iii) 0,201, (iv) 0,301

6.56. 0,080

6.57. 0,325

6.58. (i) 0,0183, (ii) 0,0732, (iii) 0,1464, (iv) 0,909

6.59. (i) 0,0109, (ii) 0,00103

6.60. (i) 0,135, (ii) 0,0810, (iii) 0,0810

Capítulo 7

Cadenas de Markov

INTRODUCCION

Repasemos las definiciones y las propiedades elementales de vectores y matrices que son necesarias para este capítulo.

Por un *vector* u significamos simplemente una n-upla de números:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Las u_i se llaman *componentes* de u. Si todas las $u_i = 0$, entonces u se llama el *vector cero*. Por un *múltiplo escalar* ku de u (donde k es un número real), significamos el vector que se obtiene multiplicando las componentes de u por k:

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Anotamos que dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales.

Por una *matriz* A significamos una ordenación rectangular de números:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las m n-uplas horizontales

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\ \ldots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

se llaman las *filas* de A, y las n m-uplas verticales

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

sus *columnas*. Nótese que el elemento a_{ij}, llamado la *posición* ij, aparece en la i-ésima fila y j-ésima columna. Con frecuencia denotamos esta matriz simplemente por $A = (a_{ij})$.

Se dice que una matriz de m filas y n columnas es una matriz m por n, escrita matriz $m \times n$; si $m = n$, entonces se llama matriz cuadrada de orden n (o matriz cuadrada n). También anotamos que una matriz con una fila solamente puede considerarse como un vector, y viceversa.

Ahora supóngase que A y B son dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, es decir que A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $p \times n$. Entonces el producto de A y B, escrito AB, es la matriz $m \times n$ cuyo elemento ij se obtiene multiplicando los elementos de la i-ésima fila de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B y luego sumando:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Si el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, es decir A es $m \times p$ y B es $q \times n$ donde $p \neq q$, entonces el producto AB no está definido.

Hay casos particulares de multiplicación de matrices que son de interés especial. Si A es una matriz de orden n, entonces podemos formar todas las *potencias* de A:

$$A^2 = AA, \; A^3 = AA^2, \; A^4 = AA^3, \; \ldots$$

Además, si u es un vector de n componentes, entonces podemos formar el producto

$$uA$$

que nuevamente es un vector con n componentes. Llamamos $u \neq 0$ un *vector fijo* (o. *punto fijo*) de A, si u es "fijo a izquierda", esto es, no cambia, cuando se multiplica por A:

$$uA = u$$

En este caso, para un escalar $k \neq 0$, tenemos

$$(ku)A = k(uA) = ku$$

Esto es,

Teorema 7.1: Si u es un vector fijo de una matriz A, entonces todo múltiplo escalar no nulo ku de u también es un vector fijo de A.

Ejemplo 7.1: $$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.2: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.3: $$(1, 2, 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (1+8+21, 2+10+24, 3+12+27) = (30, 36, 42)$$

Ejemplo 7.4: Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces el vector $u = (2, -1)$ es un punto fijo de A. Para,

$$uA = (2, -1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 2, \; 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = (2, -1) = u$$

Así, por el teorema anterior, el vector $2u = (4, -2)$ también es un punto fijo de A:

$$(4, -2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 2 - 2 \cdot 2, \; 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = (4, -2)$$

VECTORES PROBABILISTICOS, MATRICES ESTOCASTICAS

Un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se llama *vector de probabilidad* si las componentes no son negativas y su suma es 1.

Ejemplo 7.5: Considérense los vectores siguientes:

$$u = (\tfrac{3}{4}, 0, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}), \quad v = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}) \quad \text{y} \quad w = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{2})$$

Entonces:

u no es un vector de probabilidad puesto que su tercera componente es negativa,

v no es un vector de probabilidad puesto que la suma de sus componentes es mayor que 1;

w es un vector de probabilidad.

Ejemplo 7.6: El vector no nulo $v = (2, 3, 5, 0, 1)$ no es un vector de probabilidad puesto que la suma de sus componentes es $2 + 3 + 5 + 0 + 1 = 11$. Sin embargo, como las componentes de v son no negativas, v tiene un múltiplo escalar único λv que es un vector de probabilidad; puede obtenerse multiplicando cada una de las componentes de v por el recíproco de la suma de dichas componentes:

$$\tfrac{1}{11}v = (\tfrac{2}{11}, \tfrac{3}{11}, \tfrac{5}{11}, 0, \tfrac{1}{11}).$$

Una matriz cuadrada $P = (p_{ij})$ se denomina *matriz estocástica* si cada una de sus filas es un vector de probabilidad, esto es, si cada elemento de P es no negativo y la suma de los elementos en cada fila es 1.

Ejemplo 7.7: Considérense las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) (ii) (iii)

(i) no es una matriz estocástica puesto que el elemento de la segunda fila y tercera columna es negativo;

(ii) no es una matriz estocástica puesto que la suma de los elementos de la segunda fila no es 1;

(iii) es una matriz estocástica puesto que cada fila es un vector de probabilidad.

Probaremos (ver problema 7.10) el

Teorema 7.2: Si A y B son matrices estocásticas, entonces el producto AB es una matriz estocástica. Además, en particular, todas las potencias A^n son matrices estocásticas.

MATRICES ESTOCASTICAS REGULARES

Ahora definimos una clase importante de matrices estocásticas cuyas propiedades deben ser investigadas posteriormente.

Definición: Se dice que una matriz estocástica P es *regular* si todos los elementos de una potencia P^m son positivos.

Ejemplo 7.8: La matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es regular puesto que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

es positiva en cada elemento.

Ejemplo 7.9: Considérese la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Aquí

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

En resumen, cada potencia A^m tendrá 1 y 0 en la primera fila; por consiguiente, A no es regular.

PUNTOS FIJOS Y MATRICES ESTOCASTICAS REGULARES

Las propiedades fundamentales de las matrices estocásticas regulares se detallan en el teorema siguiente cuya prueba cae fuera del alcance de este libro.

Teorema 7.3: Sea P una matriz estocástica regular. Entonces:

(i) P tiene un vector de probabilidad fijo único t y sus componentes son todas positivas;

(ii) la sucesión $P, P^2, P^3, \ldots$ de potencias de P se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada punto fijo t;

(iii) si p es un vector de probabilidad, entonces la sucesión de vectores $pP, pP^2, pP^3, \ldots$ se aproxima al punto fijo t.

Nota: P^n se aproxima a T significa que cada elemento de P^n se aproxima al elemento correspondiente de T, pP^n se aproxima a t significa que cada componente de pP^n se aproxima a la componente correspondiente de t.

Ejemplo 7.10: Consideremos la matriz estocástica regular $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Buscamos un vector de probabilidad con dos componentes, que podemos denotar por $t = (x, 1-x)$, tal que $tP = t$:

$$(x, 1-x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (x, 1-x)$$

Multiplicando el lado izquierdo de la ecuación de la matriz anterior, obtenemos

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x) = (x, 1-x) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = x \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 1 - x \end{cases} \quad \text{o} \quad x = \tfrac{1}{3}$$

Así, $t = (\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es el vector de probabilidad fijo único de P. Por el teorema 7.3, la sucesión $P, P^2, P^3, \ldots$ se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada vector t:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}67 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$$

Presentamos algunas potencias de P para indicar el resultado anterior:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}; \quad P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}37 & 0{,}63 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}63 \\ 0{,}31 & 0{,}69 \end{pmatrix}; \quad P^5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \\ \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}31 & 0{,}69 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.11: Hallar el vector de probabilidad fijo único de la matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Método 1. Buscamos un vector de probabilidad con tres componentes, que podemos representar por $t = (x, y, 1-x-y)$, tal que $tP = t$:

$$(x, y, 1-x-y)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 1-x-y)$$

Multiplicando el lado izquierdo de la ecuación de la matriz anterior y colocando luego componentes correspondientes iguales a cada lado, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y &= x \\ x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y &= y \\ y &= 1 - x - y \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - 3y &= -1 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{5} \\ y &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Así, $t = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ es el vector de probabilidad fijo único de P.

Método 2. Primero buscamos un vector fijo $u = (x, y, z)$ de la matriz P:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}z = x \\ x + \frac{1}{2}z = y \\ y = z \end{cases}$$

Sabemos que el sistema tiene una solución no nula; por consiguiente, podemos asignar arbitrariamente un valor a una de las incógnitas. Establecemos $z = 2$. Entonces por la primera ecuación $x = 1$, y por la tercera ecuación $y = 2$. Así, $u = (1, 2, 2)$ es un punto fijo de P. Por tanto, multiplicamos u por $\frac{1}{5}$ para obtener el vector de probabilidad fijo buscado $t = \frac{1}{5}u = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

CADENAS DE MARKOV

Consideremos ahora una sucesión de pruebas cuyos resultados, o sea, $X_1, X_2, \ldots,$ satisfacen las dos propiedades siguientes:

(i) Cada resultado pertenece a un conjunto finito de resultados $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ llamado *espacio de estados* del sistema; si el resultado de la n-ésima prueba es a_i, entonces decimos que el sistema está en estado a_i en la vez n o en el paso n-ésimo.

(ii) El resultado de una prueba depende a lo sumo del resultado de la prueba inmediatamente precedente y no de cualquier otro resultado previo; con cada par de estados (a_i, a_j) se establece la probabilidad p_{ij} de que a_j suceda inmediatamente después de que suceda a_i.

A un proceso estocástico tal, se llama *cadena de Markov* (finita). Los números p_{ij}, llamados *probabilidades de transición*, pueden ordenarse en una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

llamada *matriz de transición*.

Así, para cada estado a_i corresponde la i-ésima fila $(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im})$ de la matriz de transición P; si el sistema está en estado a_i entonces este vector fila representa las probabilidades de todos los resultados posibles de la prueba siguiente y, por tanto, es un vector de probabilidad. En consecuencia,

Teorema 7.4: La matriz de transición P de una cadena de Markov es una matriz estocástica.

Ejemplo 7.12: Un hombre o maneja su carro o toma el tren para ir a trabajar cada día. Supóngase que nunca toma el tren dos días seguidos; pero si maneja para trabajar, entonces al día siguiente es tan posible que maneje de nuevo como que tome el tren.

El espacio de estados del sistema es $\{t$ (tren), d (manejar)$\}$. Este proceso estocástico es una cadena de Markov puesto que los resultados de un día dependen únicamente de lo que sucedió el día anterior. La matriz de transición de la cadena de Markov es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

La primera fila de la matriz corresponde al hecho de que nunca toma el tren dos días seguidos y por tanto es seguro que manejará al día siguiente de usar el tren. La segunda fila de la matriz corresponde al hecho de que al día siguiente de manejar, manejará o tomará el tren con igual probabilidad.

Ejemplo 7.13: Tres niños A, B y C se pasan una bola unos a otros. A siempre tira la bola a B y éste siempre la pasa a C; pero C pasa la bola tan posiblemente a B como a A. Denotemos X_n la n-ésima persona a quien se pasa la bola. El espacio de estados del sistema es $\{A, B, C\}$. Esta es una cadena de Markov puesto que la persona que lanza la bola no está influenciada por aquella que tenía previamente la bola. La matriz de transición de la cadena de Markov es

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La primera fila de la matriz corresponde al hecho de que A siempre pasa la bola a B. La segunda fila corresponde al hecho de que B siempre pasa la bola a C. La última fila corresponde al hecho de que C la pasa a A o a B con probabilidad igual (y no se la pasa a sí mismo).

Ejemplo 7.14: Una escuela consta de 200 niños y 150 niñas. Se selecciona un estudiante tras otro para un examen de ojos. Denotamos por X_n el sexo del n-ésimo estudiante que toma el examen. El espacio de estados del proceso estocástico es $\{m$ (hombre), f (mujer)$\}$. Sin embargo, este proceso no es una cadena de Markov puesto que, por ejemplo, la probabilidad de que la tercera persona sea una niña no solamente depende del resultado de la segunda prueba sino de ambas, la primera y la segunda pruebas.

Ejemplo 7.15: (Recorrido al azar sujeto a señales reflectantes.) Un hombre está en un punto entero sobre el eje x entre el origen O y, por ejemplo, el punto 5. Da un paso unidad a la derecha con probabilidad p o a la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$, a menos que esté en el origen donde da el paso a la derecha al punto 1 o si está en el punto 5 donde da el paso a la izquierda al punto 4. Designamos X_n su posición después de n pasos. Se trata de una cadena de Markov con espacio de estados $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ donde a_i significa que el hombre está en el punto i. La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada fila de la matriz, excepto la primera y la última, corresponde al hecho de que el hombre se mueve del estado a_i al estado a_{i+1} con probabilidad p o retrocede al estado a_{i-1} con probabilidad $q = 1 - p$. La primera fila corresponde al hecho de que el hombre tiene que moverse del estado a_0 al estado a_1 y la última fila del estado a_5 al estado a_4.

PROBABILIDADES DE TRANSICION SUPERIOR

El elemento p_{ij} en la matriz de transición P de una cadena de Markov es la probabilidad de que el sistema cambie del estado a_i al estado a_j en un paso: $a_i \to a_j$. Averiguar: ¿Cuál es la probabilidad, denotada por $p_{ij}^{(n)}$, de que el sistema cambie del estado a_i al estado a_j en n pasos exactamente:

$$a_i \to a_{k_1} \to a_{k_2} \to \cdots \to a_{k_{n-1}} \to a_j$$

El siguiente teorema resuelve la pregunta; aquí los $p_{ij}^{(n)}$ se ordenan en la matriz $P^{(n)}$ llamada *matriz de transición de n pasos:*

Teorema 7.5: Sea P la matriz de transición de un proceso de cadena de Markov. Entonces la matriz de transición de n pasos es igual a la n-ésima potencia de P; esto es $P^{(n)} = P^n$.

Ahora supóngase que después de un tiempo arbitrario, la probabilidad de que el sistema esté en estado a_i es p_i; denotamos estas probabilidades por el vector de probabilidad $p = (p_1, p_2, \ldots p_m)$ que se denomina *distribución de probabilidad* del sistema para tal tiempo. En particular, denotaremos por

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_m^{(0)})$$

la *distribución de probabilidad inicial*, o sea la distribución cuando el proceso comienza, y denotaremos por

$$p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)})$$

la *distribución de probabilidad* de *paso n*-ésimo, o sea la distribución después de los primeros n pasos. Aplicamos el siguiente teorema.

Teorema 7.6: Sea P la matriz de transición de un proceso de cadena de Markov. Si $p = (p_i)$ es la distribución de probabilidad del sistema para un tiempo arbitrario, entonces pP es la distribución de probabilidad del sistema un paso más tarde y pP^n es la distribución de probabilidad del sistema n pasos más tarde. En particular,

$$p^{(1)} = p^{(0)}P, \quad p^{(2)} = p^{(1)}P, \quad p^{(3)} = p^{(2)}P, \quad \ldots, \quad p^{(n)} = p^{(0)}P^n$$

Ejemplo 7.16: Considérese la cadena de Markov del ejemplo 7.12 cuya matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Aquí t es el estado de tomar el tren para ir a trabajar y d el de manejar para ir a trabajar. Por el ejemplo 7.8,

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Así, la probabilidad de que el sistema cambie de, por ejemplo, el estado t al estado d en 4 pasos exactamente es $\frac{5}{8}$, o sea $p_{td}^{(4)} = \frac{5}{8}$. Similarmente, $p_{tt}^{(4)} = \frac{3}{8}$, $p_{dt}^{(4)} = \frac{5}{16}$ y $p_{dd}^{(4)} = \frac{11}{16}$.

Ahora supóngase que en el primer día de trabajo el hombre lance un dado corriente y maneje para ir al trabajo si y sólo si sale un 6. En otras palabras, $p^{(0)} = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ es la distribución de probabilidad inicial. Entonces

$$p^{(4)} = p^{(0)}P^4 = (\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6})\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = (\tfrac{35}{96}, \tfrac{61}{96})$$

es la distribución de probabilidad después de 4 días, o sea, $p_t^{(4)} = \frac{35}{96}$ y $p_d^{(4)} = \frac{61}{96}$.

Ejemplo 7.17: Considérese la cadena de Markov del ejemplo 7.13 cuya matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supóngase que C fue la primera persona con la bola, esto es, $p^{(0)} = (0, 0, 1)$ es la distribución de probabilidad inicial. Entonces

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, 0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

Por tanto, después de tres pases, la probabilidad de que A tenga la bola es $\frac{1}{4}$, de que B tenga la bola es $\frac{1}{4}$ y de que C tenga la bola es $\frac{1}{2}$: $p_A^{(3)} = \frac{1}{4}$, $p_B^{(3)} = \frac{1}{4}$ y $p_C^{(3)} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 7.18: Considérese el problema del paseo casual del problema 7.15. Supóngase que el hombre comienza en el punto 2; hallar la distribución de probabilidad después de 3 pasos y después de 4 pasos, esto es $p^{(3)}$ y $p^{(4)}$.

Ahora $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ es la distribución de probabilidad inicial. Entonces

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, q, 0, p, 0, 0)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (q^2, 0, 2pq, 0, p^2, 0)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (0, q^2 + 2pq^2, 0, 3p^2q, 0, p^3)$$

$$p^{(4)} = p^{(3)}P = (q^3 + 2pq^3, 0, pq^2 + 5p^2q^2, 0, 3p^3q + p^3, 0)$$

Así, después de 4 pasos el hombre está en el origen con probabilidad $q^3 + 2pq^3$.

DISTRIBUCION ESTACIONARIA DE CADENAS DE MARKOV REGULARES

Supóngase que una cadena de Markov es regular, esto es, que su matriz de transición P es regular. Por el teorema 7.3 la sucesión de las matrices de transición P^n de n pasos se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada una el vector de probabilidad fijo único t de P; por consiguiente, la probabilidad $p_{ij}^{(n)}$ de que a_j suceda para n suficientemente grande es independiente del estado original a_i y se aproxima a la componente t_j de t. En otras palabras,

Teorema 7.7: Considérese que la matriz de transición P de una cadena de Markov es regular. Entonces, a la larga, la probabilidad de que un estado a_j suceda es igual aproximadamente a la componente t_j del vector de probabilidad fijo único t de P.

Así, vemos que el efecto del estado inicial o de la distribución de probabilidad inicial del proceso desaparece a medida que el número de pasos del proceso aumentan. Además, cada sucesión de distribuciones de probabilidad se aproxima al vector de probabilidad fijo t de P, llamado la *distribución estacionaria* de la cadena de Markov.

Ejemplo 7.19: Considérese el proceso de cadena de Markov del ejemplo 7.12 cuya matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ t \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Según el ejemplo 7.10 el vector de probabilidad fijo único de la matriz anterior es $(\frac{1}{8}, \frac{2}{8})$. Por consiguiente, a la larga, el hombre tomará el tren $\frac{1}{8}$ de las veces, y manejará los otros $\frac{2}{8}$ del tiempo.

Ejemplo 7.20: Considérese el proceso de cadena de Markov del ejemplo 7.13 cuya matriz de transición es.

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por el ejemplo 7.11, el vector de probabilidad fijo único de la matriz anterior es $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. Así, a la larga, A lanzará la bola 20% de las veces y B y C 40% de las veces.

ESTADOS ABSORBENTES

Un estado a_i de una cadena de Markov se llama *absorbente* si el sistema permanece en el estado a_i una vez que entra en él. Así, un estado a_i es absorbente si y sólo si la fila i-ésima de la matriz de transición P tiene un 1 en la diagonal principal y ceros en las demás partes. (La *diagonal principal* de una matriz cuadrada de orden n $A = (a_{ij})$ consta de los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.)

Ejemplo 7.21: Supóngase que la siguiente matriz es la matriz de transición de una cadena de Markov:

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los estados a_2 y a_5 son cada uno absorbentes, puesto que cada una de la segunda y quinta filas tiene un 1 en la diagonal principal.

Ejemplo 7.22: (Recorrido al azar con señales absorbentes.) Consideremos el problema del paseo del ejemplo 7.15, excepto que ahora suponemos que el hombre permanece en uno de los dos extremos cuando llega allí. Esto también es una cadena de Markov y la matriz de transición está dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A este proceso lo llamamos un recorrido al azar con señales absorbentes. En este caso, $p_0^{(n)}$ denota la probabilidad que el hombre llegue al estado a_0 en el paso n-ésimo o antes. Similarmente, $p_5^{(n)}$ denota la probabilidad que llegue al estado a_5 en el paso n-ésimo o antes.

Ejemplo 7.23: Un jugador tiene x dólares. Apuesta un dólar cada vez y gana con probabilidad p y pierde con probabilidad $q = 1 - p$. El juego termina cuando pierda todo su dinero, o sea, tenga 0 dólares, o cuando gane $N - x$ dólares, esto es, tenga N dólares. Este juego es idéntico al del recorrido al azar del ejemplo precedente excepto que aquí los obstáculos absorbentes son 0 y N.

Ejemplo 7.24: Un hombre lanza una moneda corriente hasta cuando salgan 3 caras sucesivas. En la prueba n-ésima, tomamos $X_n = k$ si el último sello ocurre en la prueba $(n - k)$, o sea X_n denota la fila más larga de caras que termina con la prueba n-ésima. Esto es un proceso de cadena de Markov con un espacio de estados $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, donde a_i representa la fila de caras con longitud i. La matriz de transición es

$$\begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada fila, excepto la última, corresponde al hecho de que una fila de caras se interrumpe si sale un sello o aumenta uno si sale cara. La última línea corresponde al hecho de que el juego termina si salen tres caras seguidas. Nótese que a_3 es un estado absorbente.

Sea a_i un estado absorbente de una cadena de Markov con matriz de transición P. Entonces, para $j \neq i$, la probabilidad de transición de paso n es $p_{ij}^{(n)} = 0$ para cada n. En consecuencia, cada potencia de P tiene un elemento cero y, por tanto, P no es regular. Así:

Teorema 7.8: Si una matriz estocástica P tiene un 1 en la diagonal principal, entonces P no es regular (a menos que P sea una matriz 1×1).

Problemas resueltos

MULTIPLICACION DE MATRICES

7.1. Sea $u = (1, -2, 4)$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar uA.

El producto del vector u con 3 componentes por la matriz A 3×3 es de nuevo un vector con 3 componentes. Para obtener la primera componente de uA, multiplicamos los elementos de u por los elementos correspondientes de la primera columna de A y luego sumamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 4, \quad , \quad) = (17, \quad , \quad)$$

Para obtener la segunda componente de uA, multiplicamos los elementos de u por los elementos correspondientes de la segunda columna de A y luego sumamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (17, 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1, \quad) = (17, 3, \quad)$$

Para obtener la tercera componente de uA multiplicamos los elementos de u por los elementos correspondientes de la tercera columna de A y luego sumamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (17, 3, 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 6) = (17, 3, 13)$$

Esto es, $uA = (17, 3, 13)$

7.2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar, (i) AB, (ii) BA.

(i) Puesto que A es 2×2 y B es 2×3, el producto AB es una matriz 2×3. Para obtener la primera fila de AB, multiplicamos los elementos de la primera fila de (1, 3) de A por los elementos correspondientes de cada una de las columnas $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ de B y luego sumamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

Para obtener la segunda fila de AB, multiplicamos los elementos de la segunda fila (2, —1) de A por los elementos correspondientes de cada una de las columnas de B y luego sumamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Así,
$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

(ii) Nótese que B es 2×3 y A es 2×2. Puesto que los "números interiores" 3 y 2 no son iguales, esto es, el número de columnas de B no es igual al número de filas de A y, por tanto, el producto BA no está definido

7.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar, (i) A^2, (ii) A^3.

(i) $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 + (-3)\cdot 4 & 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

(ii) $$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot(-8) & 1\cdot(-4) + 2\cdot 17 \\ 4\cdot 9 + (-3)\cdot(-8) & 4\cdot(-4) + (-3)\cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

VECTORES PROBABILISTICOS Y MATRICES ESTOCASTICAS

7.4. ¿Cuáles vectores son vectores de probabilidad?

(i) $u = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, (ii) $v = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, (iii) $w = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

Un vector es un vector de probabilidad si sus componentes no son negativas y su suma es 1.

(i) u no es un vector de probabilidad puesto que su tercera componente es negativa.

(ii) v no es un vector de probabilidad puesto que la suma de las componentes es mayor que 1.

(iii) w es un vector de probabilidad puesto que las componentes no son negativas y su suma es 1.

7.5. Multiplicar cada vector por el escalar apropiado para formar un vector de probabilidad:

(i) (2, 1, 0, 2, 3), (ii) (4, 0, 1, 2, 0, 5), (iii) (3, 0, −2, 1), (iv) (0, 0, 0, 0, 0).

(i) La suma de las componentes es $2 + 1 + 0 + 3 + 2 = 8$; por tanto, multiplicamos el vector, o sea, cada componente, por $\frac{1}{8}$ para obtener el vector de probabilidad $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$.

(ii) La suma de las componentes es $4 + 0 + 1 + 2 + 0 + 5 = 12$; por tanto, multiplicamos el vector, esto es, cada componente, por $\frac{1}{12}$ para obtener el vector de probabilidad $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{12})$.

(iii) La primera componente es positiva y la tercera es negativa; por tanto, es imposible multiplicar el vector por un escalar para formar un vector con componentes no negativas. Por consiguiente, ningún múltiplo escalar del vector es un vector de probabilidad.

(iv) Todo múltiplo escalar del vector cero es el vector cero cuyas componentes suman 0. Por tanto, ningún múltiplo del vector cero es un vector de probabilidad.

7.6. Hallar un múltiplo de cada vector que sea un vector de probabilidad:
(i) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0, 2, \frac{5}{6})$, (ii) $(0, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{5}{6})$.

En cada caso, multiplicamos primero cada vector por un escalar para que las fracciones se eliminen.

(i) Multiplicamos primero el vector por 6 para obtener (3, 4, 0, 12, 5). Luego multiplicamos por $1/(3 + 4 + 0 + 12 + 5) = \frac{1}{24}$ para obtener $(\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{24})$ que es un vector de probabilidad.

(ii) Multiplicamos primero el vector por 30 para obtener (0, 20, 30, 18, 25). Luego multiplicamos por $1/(0 + 20 + 30 + 18 + 25) = \frac{1}{93}$ para obtener $(0, \frac{20}{93}, \frac{30}{93}, \frac{18}{93}, \frac{25}{93})$ que es un vector de probabilidad.

7.7. ¿Cuáles de las matrices siguientes son matrices estocásticas?

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(iv) } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(i) A no es una matriz estocástica puesto que no es una matriz cuadrada.

(ii) B no es una matriz estocástica puesto que la suma de las componentes de la última fila es mayor que 1.

(iii) C es una matriz estocástica.

(iv) D no es una matriz estocástica puesto que el elemento de la primera fila, segunda columna es negativo.

7.8. Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ una matriz estocástica y sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vector de probabilidad. Demostrar que uA también es un vector de probabilidad.

$$uA = (u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3,\ u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3,\ u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3)$$

Puesto que u_i, a_i, b_i, y c_i son no negativos y puesto que los productos y sumas de números no negativos son no negativos, las componentes de uA son no negativas como se pedía. Así, solamente necesitamos demostrar que la suma de las componentes de uA es 1. Aquí usamos el hecho de que $u_1 + u_2 + u_3$, $a_1 + b_1 + c_1$, $a_2 + b_2 + c_2$ y $a_3 + b_3 + c_3$ son cada uno 1:

$$\begin{aligned} & u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 + u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3 \\ &= u_1(a_1 + b_1 + c_1) + u_2(a_2 + b_2 + c_2) + u_3(a_3 + b_3 + c_3) \\ &= u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 \end{aligned}$$

7.9. Probar: Si $A = (a_{ij})$ es una matriz estocástica de orden n y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es un vector de probabilidad, entonces uA también es un vector de probabilidad.

La prueba es similar a la del problema precedente para el caso $n = 3$:

$$uA = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1a_{11} + u_2a_{21} + \cdots + u_na_{n1},\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \cdots + u_na_{n2},\ \ldots,\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \cdots + u_na_{nn})$$

Puesto que los u_i y a_{ij} son no negativos, las componentes de uA también son no negativas. Así, solamente necesitamos demostrar que la suma de las componentes de uA es 1:

$$u_1a_{11} + u_2a_{21} + \cdots + u_na_{n1} + u_1a_{12} + u_2a_{22} + \cdots + u_na_{n2} + \cdots + u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \cdots + u_na_{nn}$$

$$= u_1(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + u_2(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots + u_n(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn})$$

$$= u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \cdots + u_n \cdot 1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1$$

7.10. Probar el teorema 7.2: Si A y B son matrices estocásticas, entonces el producto AB es una matriz estocástica. Además, en particular, todas las potencias A^n son matrices estocásticas.

La fila i-ésima s_i de la matriz producto AB se obtiene multiplicando la fila i-ésima r_i de A por la matriz B: $s_i = r_i B$. Puesto que cada r_i es un vector de probabilidad y B es una matriz estocástica, por el problema precedente, s_i también es un vector de probabilidad. Por consiguiente, AB es una matriz estocástica.

7.11. Probar: Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ es un vector de probabilidad, y T es una matriz cuyas filas son cada una el mismo vector $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Entonces $pT = t$.

Usando el hecho de que $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$, tenemos

$$pT = (p_1, p_2, \ldots, p_m)\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{pmatrix}$$

$$= (p_1t_1 + p_2t_1 + \cdots + p_mt_1,\ p_1t_2 + p_2t_2 + \cdots + p_mt_2,\ \ldots,\ p_1t_m + p_2t_m + \cdots + p_mt_m)$$

$$= ((p_1 + p_2 + \cdots + p_m)t_1,\ (p_1 + p_2 + \cdots + p_m)t_2,\ \ldots,\ (p_1 + p_2 + \cdots + p_m)t_m)$$

$$= (1 \cdot t_1, 1 \cdot t_2, \ldots, 1 \cdot t_m) = (t_1, t_2, \ldots, t_m) = t$$

MATRICES ESTOCASTICAS REGULARES Y VECTORES PROBABILISTICOS FIJOS

7.12. Hallar el vector de probabilidad fijo de la matriz estocástica regular $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Hallar a qué matriz se aproxima A^n.

Buscamos un vector de probabilidad $t = (x, 1 - x)$ tal que $tA = t$:

$$(x, 1-x)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (x, 1-x)$$

Multiplicamos el lado izquierdo de la ecuación de la matriz anterior y luego igualamos unas a otras las componentes respectivas para obtener las dos ecuaciones

$$\tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x = x, \quad \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x = 1 - x$$

Resolvemos cualquiera de las ecuaciones para hallar $x = \frac{2}{3}$. Por tanto, $t = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ es el vector de probabilidad pedido.

La respuesta se verifica calculando el producto tA:

$$(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

La respuesta es correcta puesto que $tA = t$.

La matriz A^n se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada una el punto fijo t: $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

7.13. (i) Comprobar que el vector $u = (b, a)$ es un punto fijo de la matriz 2×2 estocástica general

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

(ii) Usar el resultado de (i) para hallar el vector de probabilidad fijo único de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

(i) $uP = (b, a)\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = (b - ab + ab,\ ab + a - ab) = (b, a) = u.$

(ii) Por (i), $u = (1, \frac{2}{3})$ es un punto fijo de A. Multiplicamos u por 3 para obtener el punto fijo (3, 2) de A que no tiene fracciones. Luego multiplicamos (3, 2) por $1/(3 + 2) = \frac{1}{5}$ para obtener el vector de probabilidad fijo único pedido $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

Por (i), $u = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ es un punto fijo de B. Multiplicamos u por 6 para obtener el punto fijo (4, 3), y luego multiplicamos por $1/(4 + 3) = \frac{1}{7}$ para obtener el vector de probabilidad fijo único pedido $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$.

Por (i), $u = (0{,}8, 0{,}3)$ es un punto fijo de C. Por tanto (8, 3) y el vector de probabilidad $(\frac{8}{11}, \frac{3}{11})$ también son puntos fijos de C.

7.14. Hallar el vector de probabilidad fijo único de la matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Método 1. Buscamos un vector de probabilidad $t = (x, y, 1 - x - y)$ tal que $tP = t$:

$$(x, y, 1-x-y)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 1-x-y)$$

Multiplicamos el lado izquierdo de la ecuación de la matriz anterior e igualamos unas a otras las componentes correspondientes para obtener el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{2}x + 1 - x - y = y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 - x - y \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Escogemos dos de las ecuaciones en x y y para resolverlas y obtener $x = \frac{4}{11}$ y $y = \frac{4}{11}$. Verificamos la solución por sustitución de x y y en la tercera ecuación. Puesto que $1 - x - y = \frac{3}{11}$, el vector de probabilidad fijo requerido es

$$t = (\tfrac{4}{11}, \tfrac{4}{11}, \tfrac{3}{11}).$$

Método 2. Buscamos un vector fijo $u = (x, y, z)$ de la matriz P:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

Multiplicamos el miembro de la izquierda de la ecuación de la matriz anterior e igualamos unas a otras las componentes correspondientes para obtener el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}x + z = y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Sabemos que el sistema tiene una solución diferente de cero; por consiguiente, podemos asignar arbitrariamente un valor a una de las incógnitas. Hacemos $y = 4$. Entonces por la primera ecuación $x = 4$, y por la tercera $z = 3$. Así, $u = (4, 4, 3)$ es un punto fijo de P. Multiplicamos u por $1/(4 + 4 + 3) = \frac{1}{11}$ para obtener $t = \frac{1}{11}u = (\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11})$ que es un vector de probabilidad y también es un punto fijo de P.

7.15. Hallar el vector de probabilidad fijo único de la matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Y decir a qué matriz se aproxima P^n.

Buscamos primero un vector fijo $u = (x, y, z)$ de la matriz P:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

Multiplicamos el miembro de la izquierda de la ecuación de la matriz anterior e igualamos una a otra las componentes correspondientes para obtener el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{6}y = x \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 6x \\ 6x + 3y + 4z = 6y \\ y + z = 3z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 6x \\ 6x + 4z = 3y \\ y = 2z \end{cases}$$

Sabemos que el sistema tiene una solución diferente de cero; por tanto, podemos asignar arbitrariamente un valor a una de las incógnitas. Hacemos $x = 1$. Entonces, por la primera ecuación $y = 6$, y por la última ecuación $z = 3$. Así que $u = (1, 6, 3)$ es un punto fijo de P. Puesto que $1 + 6 + 3 = 10$, el vector $t = (\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10})$ es el vector de probabilidad fijo único de P buscado.

P^n se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada una el punto fijo t: $\quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

7.16. Si $t = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$ es un punto fijo de una matriz estocástica P, ¿por qué P no es regular?

Si P es regular, entonces, por el teorema 7.3, P tiene un vector de probabilidad fijo único, y las componentes del vector son positivas. Como las componentes del vector de probabilidad fijo dado no son todas positivas, P no puede ser regular.

7.17. ¿Cuáles de las matrices estocásticas siguientes son regulares?

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(iv) } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Insistimos en que una matriz estocástica es regular si una potencia de la matriz tiene elementos positivos únicamente.

(i) A no es regular puesto que hay un 1 en la diagonal principal (en la segunda fila).

(ii) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ matriz idéntica I

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Así, cada potencia par de B es la matriz idéntica I y cada potencia impar de B es la matriz B. En consecuencia, cada potencia de B tiene cero elementos y, así, B no es regular.

(iii) C no es regular puesto que tiene un 1 en la diagonal principal.

(iv) $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ y $D^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{32} & \frac{41}{64} & \frac{13}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$

Como todos los elementos de D^3 son positivos, D es regular.

CADENAS DE MARKOV

7.18. Los hábitos de estudio de un estudiante son como sigue. Si estudia una noche, está 70% seguro de no estudiar la noche siguiente. Por otra parte, si no estudia una noche, está 60% seguro de no estudiar tampoco la noche siguiente. A la larga, ¿con qué frecuencia estudia?

Los estados del sistema son S (de estudiar) y T (de no estudiar). La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para averiguar qué sucede a la larga, tenemos que hallar el vector de probabilidad fijo único t de P. Por el problema 7.13, $u = (0{,}4,\ 0{,}7)$ es un punto fijo de P y así $t = (\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$ es el vector de probabilidad buscado. Así que a la larga el estudiante estudia $\frac{4}{11}$ de las veces.

7.19. Un sicólogo hace los supuestos siguientes que conciernen al comportamiento de ratas sujetas a un régimen especial de alimentación. Para una prueba particular, 80% de las ratas que cogieron para la derecha en el experimento previo hicieron lo mismo en esta prueba, y 60% de aquellas que cogieron para la izquierda en el experimento previo, cogieron para la derecha en esta prueba. Si 50% van a la derecha en la primera prueba, ¿qué se podría predecir para, (i) la segunda prueba? (ii) la tercera prueba? (iii) la milésima prueba?

Los estados del sistema son R (derecha) y L (izquierda). La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

La distribución de probabilidad para la primera prueba es $p = (0{,}5,\ 0{,}5)$. Para calcular la distribución de probabilidad para el paso siguiente, esto es, la segunda prueba, multiplicamos p por la matriz de transición P:

$$(0{,}5,\ 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}7,\ 0{,}3)$$

Por consiguiente, en la segunda prueba se espera que el 70% de las ratas vayan a la derecha y 30% a la izquierda. Para calcular la distribución de probabilidad para la tercera prueba, multiplicamos la de la segunda prueba por P:

$$(0{,}7,\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}74,\ 0{,}26)$$

Así, en la tercera prueba se espera que el 74% de las ratas se dirijan a la derecha y 26% a la izquierda.

Suponemos que la distribución de probabilidad para la milésima prueba es esencialmente la distribución de probabilidad estacionaria de la cadena de Markov, esto es, el vector de probabilidad fijo único t de la matriz de transición P. Por el problema 7.13, $u = (0{,}6,\ 0{,}2)$ es un punto fijo de P y así $t = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = (0{,}75,\ 0{,}25)$. Por tanto, se espera que en la prueba mil 75% de las ratas irán a la derecha y 25% a la izquierda.

7.20. Dada la matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con distribución de probabilidad inicial $p^{(0)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Definir y hallar (i) $p_{21}^{(3)}$, (ii) $p^{(3)}$, (iii) $p_2^{(3)}$.

(i) $p_{21}^{(3)}$ es la probabilidad de pasar del estado a_2 al estado a_1 en 3 pasos. Esto se puede obtener de la matriz de transición de 3 pasos P^3; por tanto, calculamos primero P^3:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Entonces $p_{21}^{(3)}$ es el elemento de la segunda fila primera columna de P^3: $p_{21}^{(3)} = \frac{7}{8}$.

(ii) $p^{(3)}$ es la distribución de probabilidad del sistema después de tres pasos. Puede obtenerse calculando sucesivamente $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ y luego $p^{(3)}$:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6})$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\tfrac{11}{12}, \tfrac{1}{12})$$

Sin embargo, como la matriz de transición de 3 pasos P^3 ya se calculó en (i), $p^{(3)}$ también puede obtenerse como sigue:

$$p^{(3)} = p^{(0)}P^3 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = (\tfrac{11}{12}, \tfrac{1}{12})$$

(iii) $p_2^{(3)}$ es la probabilidad de que el proceso esté en el estado a_2 después de 3 pasos; esto es, la segunda componente de la distribución de probabilidad de 3 pasos $p^{(3)}$: $p_2^{(3)} = \frac{1}{12}$.

7.21. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la distribución de probabilidad inicial $p^{(0)} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$. Hallar: (i) $p_{32}^{(2)}$ y $p_{13}^{(2)}$, (ii) $p^{(4)}$ y $p_3^{(4)}$, (iii) el vector al cual se aproxima $p^{(0)}P^n$, (iv) la matriz a que se aproxima P^n.

(i) Calculamos primero la matriz de transición de 2 pasos P^2:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $p_{32}^{(2)} = \frac{1}{2}$ y $p_{13}^{(2)} = 0$, puesto que estos números se refieren a los elementos de P^2.

(ii) Para calcular $p^{(4)}$, usamos la matriz de transición de 2 pasos P^2 y la distribución de probabilidad inicial $p^{(0)}$:

$$p^{(2)} = p^{(0)}P^2 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0) \quad \text{y} \quad p^{(4)} = p^{(2)}P^2 = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{1}{6})$$

Puesto que $p_3^{(4)}$ es la tercera componente de $p^{(4)}$, $p_3^{(4)} = \frac{1}{6}$.

(iii) Por el teorema 7.3, $p^{(0)}P^n$ se aproxima al vector de probabilidad fijo único t de P. Para obtener t, hallamos primero un vector fijo $u = (x, y, z)$:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = y \\ \frac{1}{2}x = z \end{cases}$$

Hallar una solución no nula del anterior sistema de ecuaciones. Hacemos $x = 1$; luego por la tercera ecuación $x = 2$, y por la primera ecuación $y = 4$. Por tanto, $u = (2, 4, 1)$ es un punto fijo de P y así $t = (\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$. En otras palabras, $p^{(0)}P^n$ se aproxima a $(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$.

(iv) P^n se aproxima a la matriz T cuyas filas son cada una el vector de probabilidad fijo de P; por consiguiente

$$P^n \text{ se aproxima } \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

7.22. La región de ventas de un vendedor la componen tres ciudades, A, B y C. Nunca vende en la misma ciudad en días seguidos. Si vende en la ciudad A, entonces al día siguiente vende en la ciudad B. Sin embargo, si vende en una de las dos B o C, entonces al día siguiente está en doble posibilidad tanto para vender en A como en la otra ciudad. A la larga, ¿con qué frecuencia vende en cada ciudad?

La matriz de transición del problema es como sigue:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

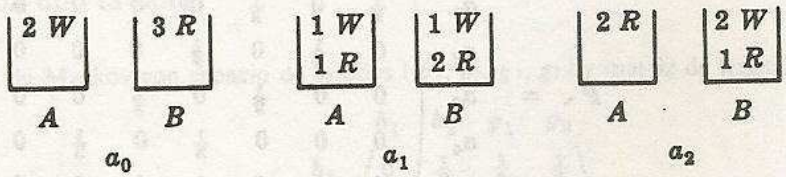
Buscamos el vector de probabilidad fijo único de la matriz P. Hallamos primero un vector fijo $u = (x, y, z)$:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{2}{8}y + \frac{2}{8}z = x \\ x + \frac{1}{8}z = y \\ \frac{1}{8}y = z \end{cases}$$

Hacemos $z = 1$. Luego por la tercera ecuación $y = 3$ y por la primera ecuación $x = \frac{8}{3}$. Así, $u = (\frac{8}{3}, 3, 1)$. También $3u = (8, 9, 3)$ es un vector de probabilidad fijo de P. Multiplicamos $3u$ por $1/(8 + 9 + 3) = \frac{1}{20}$ para obtener el vector de probabilidad fijo pedido $t = (\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}) = (0{,}40,\ 0{,}45,\ 0{,}15)$. Por consiguiente, a la larga vende 40% del tiempo en la ciudad A, 45% del tiempo en B y 15% del tiempo en C.

7.23. Hay 2 bolas blancas en una urna A y 3 rojas en otra urna B. A cada paso del proceso se selecciona una bola de cada urna y las dos bolas escogidas se intercambian. Sea el estado a_i del sistema el número i de bolas rojas de la urna A. (i) Hallar la matriz de transición P. (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos? (iii) A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A?

(i) Hay tres estados, a_0, a_1 y a_2 descritos en los diagramas siguientes:



Si el sistema está en el estado a_0, entonces tiene que escogerse una bola blanca de la urna A y una roja de la urna B, así que el sistema tiene que pasar al estado a_1. En consecuencia, la primera fila de la matriz de transición es $(0, 1, 0)$.

Supongamos que el sistema está en estado a_1. Puede pasar al estado a_0 si y sólo si se escoge una bola roja de la urna A y una blanca de la urna B; la probabilidad de que suceda esto es $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Así, $p_{10}=\frac{1}{6}$. El sistema puede pasar del estado a_1 al a_2 si y sólo si se selecciona una bola blanca de la urna A y una roja de la urna B; la probabilidad de que suceda esto es $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Así, $p_{12}=\frac{1}{3}$. En consecuencia, la probabilidad de que el sistema permanezca en estado a_1 es $p_{11}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. Así, la segunda fila de la matriz de transición es $(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. (Obsérvese que p_{11} también se puede obtener del hecho de que el sistema permanezca en estado a_1 si se saca o una bola blanca de cada urna, con probabilidad $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, o una bola roja de cada urna con probabilidad $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; así, $p_{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.)

Ahora supongamos que el sistema está en estado a_2. Tiene que sacarse una bola roja de la urna A. Si se escoge una bola roja de la urna B, con probabilidad $\frac{1}{3}$, entonces el sistema permanece en estado a_2 y si se escoge una bola blanca de la urna B, con probabilidad $\frac{2}{3}$, entonces el sistema pasa al estado a_1. Nótese que el sistema nunca puede pasar del estado a_2 al estado a_0. Así, la fila tercera de la matriz de transición es $(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. Esto es,

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) El sistema empieza en estado a_0, esto es, $p^{(0)}=(1,0,0)$. Así:

$$p^{(1)}=p^{(0)}P=(0,1,0),\quad p^{(2)}=p^{(1)}P=(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}),\quad p^{(3)}=p^{(2)}P=(\tfrac{1}{12},\tfrac{23}{36},\tfrac{5}{18})$$

En consecuencia, la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos es $\frac{5}{18}$.

(iii) Buscamos el vector de probabilidad fijo único t de la matriz de transición P. Primero hallamos un vector fijo $u=(x,y,z)$:

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (x,y,z) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{1}{6}y = x \\ x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z = z \end{cases}$$

Hacemos, $x=1$. Luego por la primera ecuación $y=6$ y por la tercera ecuación $z=3$. Por tanto, $u=(1,6,3)$. Multipliquemos u por $1/(1+6+3)=\frac{1}{10}$ para obtener, el vector de probabilidad fijo único $t=(0{,}1,0{,}6,0{,}3)$ requerido. Así a la larga, 30% de las veces habrá 2 bolas rojas en la urna A.

Nótese que a la larga la distribución de probabilidad es la misma que si las cinco bolas se colocaran en una urna y se escogieran 2 al azar para ponerlas en la urna A.

7.24. Un jugador tiene \$2. Apuesta \$1 cada vez y gana \$1 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Deja de jugar si pierde los \$2 o si gana \$4. (i) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda su dinero al final de, a lo sumo, 5 juegos? (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego dure más de 7 juegos?

Esto es un recorrido al azar con señales absorbentes en 0 y 6 (ver ejemplo 7.22 y 7.23). La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

con distribución de probabilidad inicial $p^{(0)}=(0,0,1,0,0,0,0)$ puesto que empieza con \$2.

(i) Buscamos $p_0^{(5)}$, la probabilidad de que el sistema esté en estado a_0 después de 5 pasos. Calculamos la distribución de probabilidad del quinto paso $p^{(5)}$:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0) \qquad p^{(4)} = p^{(3)}P = (\tfrac{3}{8}, 0, \tfrac{5}{16}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{16})$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, 0) \qquad p^{(5)} = p^{(4)}P = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{32}, 0, \tfrac{9}{32}, 0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16})$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{3}{8}, 0, \tfrac{1}{8}, 0)$$

Así, $p_0^{(5)}$, la probabilidad de que no tenga dinero después de 5 juegos, es $\frac{3}{8}$.

(ii) Calculamos $p^{(7)}$: $p^{(6)} = p^{(5)}P = (\frac{29}{64}, 0, \frac{7}{32}, 0, \frac{13}{64}, 0, \frac{1}{8})$. $p^{(7)} = p^{(6)}P = (\frac{29}{64}, \frac{7}{64}, 0, \frac{27}{128}, 0, \frac{13}{128}, \frac{1}{8})$

La probabilidad de que el juego dure más de 7 juegos, esto es, de que el sistema no esté en el estado a_0 o a_6 después de 7 pasos, es $\frac{7}{64} + \frac{27}{128} + \frac{13}{128} = \frac{27}{64}$.

7.25. Considérense lanzamientos repetidos de un dado corriente. Sea X_n el máximo de los números que resulten en las n primeras pruebas.

(i) Hallar la matriz de transición P de la cadena de Markov. ¿La matriz es regular?

(ii) Hallar $p^{(1)}$, la distribución de probabilidad después del primer lanzamiento.

(iii) Hallar $p^{(2)}$ y $p^{(3)}$.

(i) El espacio de estados de la cadena de Markov es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Obtenemos, por ejemplo, la tercera fila de la matriz como sigue. Supóngase que el sistema está en el estado 3, o sea, el máximo de los números que resultan en las n primeras pruebas es 3. Entonces el sistema permanece en estado 3 si un 1, 2 ó 3 sucede en la prueba $(n + 1)$; por tanto $p_{33} = \frac{3}{6}$. Por otra parte, el sistema pasa al estado 4, 5 ó 6, respectivamente, si un 4, 5 ó 6 sucede en la prueba $(n + 1)$; por tanto $p_{34} = p_{35} = p_{36} = \frac{1}{6}$. El sistema nunca puede pasar al estado 1 ó 2 puesto que salió un 3 en una de las pruebas; de aquí $p_{31} = p_{32} = 0$. Así, la tercera fila de la matriz de transición es $(0, 0, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Las otras filas se obtienen similarmente.

La matriz no es regular puesto que el estado 6 es absorbente, o sea, hay un 1 en la diagonal principal, fila 6.

(ii) En el primer lanzamiento del dado el estado del sistema X_1 es el número que sale; por tanto, $p^{(1)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

(iii) $p^{(2)} = p^{(1)}P = (\frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{5}{36}, \frac{7}{36}, \frac{9}{36}, \frac{11}{36})$. $p^{(3)} = p^{(2)}P = (\frac{1}{216}, \frac{7}{216}, \frac{19}{216}, \frac{37}{216}, \frac{61}{216}, \frac{91}{216})$.

7.26. Dos niños b_1 y b_2 y dos niñas g_1 y g_2 están lanzándose una bola el uno al otro. Cada niño pasa la bola al otro niño con probabilidad $\frac{1}{2}$ y a cada niña con probabilidad $\frac{1}{4}$. Por otra parte, cada niña lanza la bola a cada niño con probabilidad $\frac{1}{2}$ y nunca a la otra niña. A la larga, ¿con qué frecuencia recibe cada uno la bola?

Esto es una cadena de Markov con espacio de estados $\{b_1, b_2, g_1, g_2\}$ y matriz de transición.

$$P = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ g_1 \\ g_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & g_1 & g_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Buscamos un vector fijo $u = (x, y, z, w)$ de P: $(x, y, z, w)\,P = (x, y, z, w)$. Hacemos las componentes correspondientes de uP iguales a u para obtener el sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}w &= x \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}w &= y \\ \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y &= z \\ \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y &= w \end{aligned}$$

Buscamos una solución diferente de cero. Sea $z = 1$; entonces $w = 1$, $x = 2$ y $y = 2$. Así $u = (2, 2, 1, 1)$ y, por tanto, la probabilidad fija única de P es $t = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Así, a la larga, cada niño recibe la bola $\frac{1}{6}$ de las veces y cada niña $\frac{1}{6}$ de las veces.

7.27. Probar el teorema 7.6: Sea $P = (p_{ij})$ la matriz de transición de la cadena de Markov. Si $p = (p_i)$ es la distribución de probabilidad del sistema un paso más tarde, esto es, cada $k + 1$ vez; entonces pP^n es la distribución de probabilidad del sistema n pasos más tarde, esto es, en la $k + n$ vez. En particular, $p^{(1)} = p^{(0)}P$, $p^{(2)} = p^{(1)}P$, ... y también $p^{(n)} = p^{(0)}P^n$.

Supóngase que el espacio de estados es $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. La probabilidad de que el sistema esté en estado a_j en la vez k y luego en estado a_i en la vez $k + 1$ es el producto $p_j p_{ji}$. Así, la probabilidad de que el sistema esté en estado a_i en la vez $k + 1$ es la suma

$$p_1 p_{1i} + p_2 p_{2i} + \cdots + p_m p_{mi} = \sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji}$$

Así, la distribución de probabilidad en la vez $k + 1$ es

$$p^* = \left(\sum_{j=1}^{m} p_j p_{j1},\ \sum_{j=1}^{m} p_j p_{j2},\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{m} p_j p_{jm}\right)$$

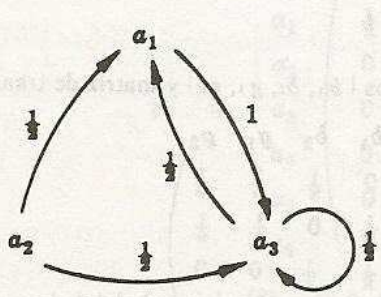
Sin embargo, este vector precisamente es el producto del vector $p = (p_i)$ por la matriz $P = (p_{ij})$: $p^* = pP$.

7.28. Probar el teorema 7.5: Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov. Entonces la matriz de transición de paso n es igual a la potencia n-ésima de P: $P^{(n)} = P^n$.

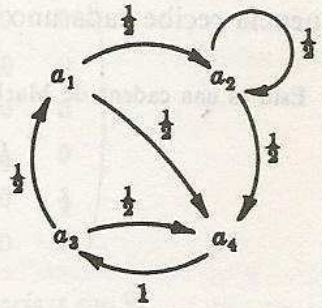
Supongamos que el sistema está en estado a_i en la k-ésima vez. Buscamos la probabilidad $P_{ij}^{(n)}$ de que el sistema esté en estado a_j en la $k + n$-ésima vez. Ahora la distribución de probabilidad del sistema en la vez k, puesto que el sistema está en estado a_i, es el vector $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ que tiene un 1 en la i-ésima posición y ceros en cualquier otra parte. Por el problema precedente, la distribución de probabilidad en la $k + n$-ésima vez es el producto $e_i P^n$. Pero $e_i P^n$ es la i-ésima fila de la matriz P^n. Por tanto, $P_{ij}^{(n)}$ es la componente j-ésima de la fila i-ésima de la matriz P^n, y así $P^{(n)} = P^n$.

PROBLEMAS VARIOS

7.29. Las probabilidades de transición de una cadena de Markov pueden representarse por un diagrama, llamado *diagrama de transición*, donde una probabilidad positiva p_{ij} es señalada por una flecha del estado a_i al estado a_j. Hallar la matriz de transición de cada uno de los diagramas de transición siguientes:



(i)



(ii)

(i) Obsérvese primero que el espacio de estados es $\{a_1, a_2, a_3\}$ y, por tanto, la matriz de transición es de la forma

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

La fila i-ésima de la matriz se obtiene hallando aquellas flechas que parten de a_i en el diagrama; el número anexo a la flecha de a_i a a_j es la componente j-ésima de la fila i-ésima. Entonces la matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) El espacio de estados es $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7.30. Supóngase que la matriz de transición de una cadena de Markov es como sigue:

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

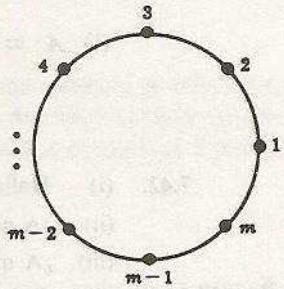
¿La cadena de Markov es regular?

Nótese que una vez que el sistema pasa al estado a_1 o al estado a_2, entonces nunca puede pasar al estado a_3 o al estado a_4, esto es, el sistema permanece en el sub-espacio de estados $\{a_1, a_2\}$. Así, en particular, $p_{13}^{(n)} = 0$, para cada n y, por tanto, cada potencia P^n contiene un elemento cero. Se concluye que P no es regular.

7.31. Supóngase que m puntos en un círculo se numeran $1, 2, \ldots, m$ respectivamente en la dirección contraria a la de las agujas del reloj. Una partícula realiza un "paseo al azar" sobre el círculo; se mueve un paso en dirección contraria a la de las agujas del reloj con probabilidad p o un paso en la dirección de las agujas con probabilidad $q = 1 - p$. Hallar la matriz de transición de esta cadena de Markov.

El espacio de estados es $\{1, 2, \ldots, m\}$. El diagrama de la derecha que se muestra luego puede usarse para obtener la matriz de transición del diagrama puesto a la izquierda.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m-2 & m-1 & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Problemas propuestos

MULTIPLICACION DE MATRICES

7.32. Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar uA si, (i) $u = (1, -3, 2)$, (ii) $u = (3, 0, -2)$, (iii) $u = (4, -1, -1)$.

7.33. Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar AB y BA.

7.34. Dado $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar A^2 y A^3.

7.35. Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n.

VECTORES PROBABILISTICOS Y MATRICES ESTOCASTICAS

7.36. ¿Qué vectores son vectores de probabilidad?

(i) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (ii) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ (iii) $(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{4})$.

7.37. Hallar un múltiplo escalar de cada vector que sea vector de probabilidad:

(i) $(3, 0, 2, 5, 3)$ (ii) $(2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 1)$ (iii) $(\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$.

7.38. ¿Qué matrices son estocásticas?

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

MATRICES ESTOCASTICAS REGULARES Y VECTORES DE PROBABILIDAD FIJOS

7.39. Hallar el vector de probabilidad fijo único de cada matriz:

(i) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

7.40. (i) Hallar el vector de probabilidad fijo único t de $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) ¿A qué matriz se aproxima P^n? (iii) ¿A qué vector se aproxima $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})P^n$?

7.41. Hallar el vector de probabilidad fijo único t de cada matriz:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

7.42. (i) Hallar el vector de probabilidad fijo único t de $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(ii) ¿A qué matriz se aproxima P^n?

(iii) ¿A qué vector se aproxima $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})P^n$?

(iv) ¿A qué vector se aproxima $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})P^n$?

7.43. (i) Dado que $t = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sea un punto fijo de una matriz estocástica P, ¿P es regular?

(ii) Dado que $t = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sea un punto fijo de una matriz estocástica P, ¿P es regular?

7.44. ¿Qué matrices estocásticas son regulares?

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.45. Mostrar que $(cf + ce + de, af + bf + ae, ad + bd + bc)$ es un punto fijo de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ c & 1-c-d & d \\ e & f & 1-e-f \end{pmatrix}$$

CADENAS DE MARKOV

7.46. Los hábitos de fumar de un hombre son los siguientes: Si fuma cigarrillos con filtro una semana, los suspende a la semana siguiente con probabilidad 0,2. Por otra parte, si fuma cigarrillos sin filtro una semana, hay una probabilidad de 0,7 que continuará fumando de éstos la semana siguiente. A la larga, ¿con qué frecuencia fumará cigarrillos con filtro?

7.47. La suerte de un jugador sigue una pauta: Si gana un juego, la probabilidad de ganar el siguiente es 0,6. Sin embargo, si pierde, la probabilidad de perder el siguiente es 0,7. Además existe igual probabilidad de que el jugador gane el primer juego.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el segundo juego?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el tercer juego?

(iii) A la larga, ¿con qué frecuencia gana?

7.48. Para una cadena de Markov, la matriz de transición es $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ con distribución de probabilidad inicial $p^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Hallar: (i) $p_{21}^{(2)}$; (ii) $p_{12}^{(2)}$; (iii) $p^{(2)}$; (iv) $p_{1}^{(2)}$; (v) el vector $p^{(0)}P^n$ se aproxima; (vi) la matriz P^n se aproxima.

7.49. Para una cadena de Markov, la matriz de transición es $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ y la distribución de probabilidad inicial es $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Hallar: (i) $p_{13}^{(2)}$, (ii) $p_{23}^{(2)}$, (iii) $p^{(2)}$, (iv) $p_{1}^{(2)}$.

7.50. Un hombre cambia su carro por uno nuevo cada año. Si tiene un Buick, lo cambia por un Plymouth. Si tiene un Plymouth, lo cambia por un Ford. Sin embargo, si tiene un Ford, es igualmente posible que lo cambie por un Ford como por un Buick o un Plymouth. En 1955 compró su primer carro que era un Ford.

(i) Hallar la probabilidad de que tenga un, (*a*) Ford 1957, (*b*) Buick 1957, (*c*) Plymouth 1958, (*d*) Ford 1958.

(ii) A la larga, ¿con qué frecuencia tiene Ford?

7.51. Hay 2 bolas blancas en una urna A y 4 rojas en otra urna B. A cada paso del proceso se selecciona una bola de cada urna, y las dos bolas escogidas se intercambian. Sea X_n el número de bolas rojas de la urna A después de n intercambios. (i) Hallar la matriz de transición P. (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A después de 3 pasos? (iii) A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que haya 2 bolas rojas en la urna A?

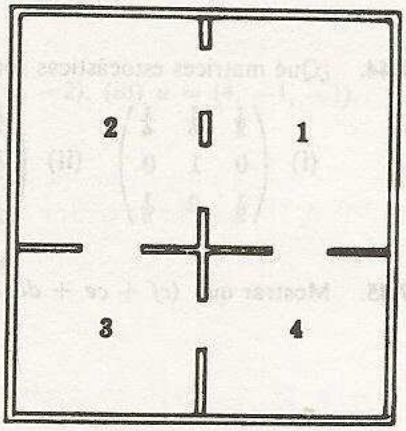
7.52. Resolver el problema anterior para el caso de que haya 3 bolas blancas en la urna A y 3 bolas rojas en la urna B.

7.53. Se lanza una moneda corriente hasta que salgan 3 caras seguidas. Sea X_n la longitud de la sucesión de caras que terminan en la prueba n-ésima. (Ver ejemplo 7.20.) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 8 lanzamientos de la moneda por lo menos?

7.54. Un jugador tiene 3 dólares. En cada jugada, pierde un dólar con probabilidad $\frac{3}{4}$ pero gana dos dólares con probabilidad $\frac{1}{4}$. Deja de jugar si pierde sus 3 dólares o si gana por lo menos 3 dólares.

(i) Hallar la matriz de transición de la cadena de Markov.

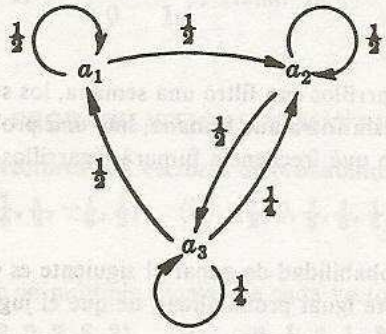
(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que haya por lo menos 4 jugadas en el juego?



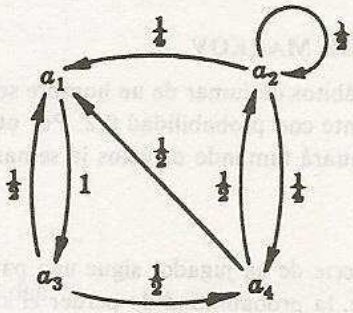
7.55. El diagrama de la derecha muestra cuatro compartimientos con puertas de comunicación de unos con otros. Un ratón está en un compartimiento y tiene la misma probabilidad de atravesar cada una de las puertas del compartimiento. Hallar la matriz de transición de la cadena de Markov.

PROBLEMAS VARIOS

7.56. Hallar la matriz de transición correspondiente a cada diagrama de transición:



(i)



(ii)

7.57. Dibujar el diagrama de transición para cada una de las matrices de transición:

$$\text{(i)} \quad P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

7.58. Considérese el vector $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ que tiene un 1 en la posición i-ésima y cero en las demás partes. Mostrar que $e_i A$ es la fila i-ésima de la matriz A (siempre que el producto esté definido).

Respuestas de los problemas propuestos

7.32. (i) $(-1, -1, 12)$, (ii) $(-7, -10, 3)$, (iii) $(-5, -11, 10)$

7.33. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 17 & -10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 13 \\ -3 & -9 & 9 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

7.34. $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$

7.35. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.36. Solamente (iii)

7.37. (i) (3/13, 0, 2/13, 5/13, 3/13)
(ii) (8/18, 2/18, 0, 1/18, 3/18, 0, 4/18)
(iii) (4/45, 24/45, 6/45, 0, 3/45, 8/45)

7.38. Solamente (ii) y (iv)

7.39. (i) (6/11, 5/11), (ii) (10/19, 9/19), (iii) (5/13, 8/13), (iv) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

7.40. (i) $t = (4/13, 8/13, 1/13)$, (iii) $t = (4/13, 8/13, 1/13)$

7.41. (i) $t = (2/9, 6/9, 1/9)$, (ii) $t = (5/15, 6/15, 4/15)$

7.42. (i) $t = (2/11, 4/11, 1/11, 4/11)$, (iii) t, (iv) t

7.43. (i) No, (ii) no necesariamente, v gr. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.44. Solamente (iii)

7.46. 60% de las veces

7.47. (i) 9/20, (ii) 87/200, (iii) 3/7 de las veces

7.48. (i) 9/16, (ii) 3/8, (iii) (37/64, 27/64), (iv) 37/64, (v) (0,6, 0,4) (vi) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

7.49. (i) 3/8, (ii) 1/2, (iii) (7/16, 2/16, 7/16), (iv) 7/16

7.50. (i) (*a*) 4/9, (*b*) 1/9, (*c*) 7/27, (*d*) 16/27. (ii) 50% de las veces

7.51. (i) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (ii) 3/8 (iii) 2/5

7.52. (i) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) 32/81 (iii) 9/20

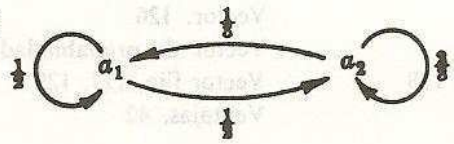
7.53. 81/128

7.54. (i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) 27/64

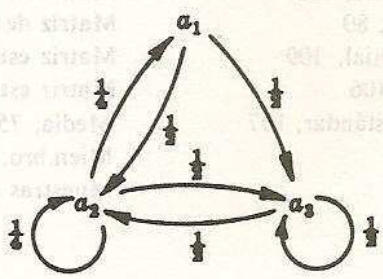
7.55. $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

7.56. (i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.57 (i)



(ii)



19

Cadenas de Markov

Nota: Debido a la escasez del tema de Cadenas o procesos de Markov, se decidió reforzarlo con el capítulo respectivo del libro: "Elementos de Probabilidad y estadística" por Elmer B. Mode, de la Ed. Reverté.

Una cadena de demostraciones debe tener su principio en alguna parte.

JEREMY BENTHAM
An Introduction to the Principles of Morals and Legislation

19.1. MATRICES Y VECTORES

Muchas ramas de las matemáticas y muchos campos de la ciencia hacen uso extensivo de vectores y matrices. Son extremadamente útiles; en particular, en el estudio de los procesos de Markov. Empezaremos con un breve estudio de estos conceptos.

Una matriz es un arreglo rectangular de m renglones y n columnas de números que se escribe así:

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix}. \tag{19.1}$$

Un *vector renglón* es una matriz consistente en un renglón únicamente y un *vector columna* es una matriz consistente en una columna únicamente. Ilustraremos estas definiciones con los ejemplos siguientes.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\ (2,-1,3) \qquad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)}\ (\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5},0)$$

a) es una matriz 3×2, b) es una *matriz cuadrada* 3×3, c) es una matriz 4×3, d) es un vector renglón que tiene tres componentes, e) es un vector columna con cuatro componentes, y f) es una clase especial de vector renglón llamado *vector de probabilidad* porque sus componentes son no negativos y su suma es 1; b) también es llamada *matriz estocástica,* ya que cada renglón es un vector de probabilidad.

Si dos matrices, A y B, son tales que el número de columnas en A es igual al número de renglones en B, su producto $A \times B$ se define como la matriz para la cual el elemento en el renglón de orden i y columna de orden j es la suma de los productos obtenidos cuando cada elemento del renglón i de A se multiplica por el elemento correspondiente de la columna j de B. Así, una matriz A, $m \times r$, multiplicada por una matriz B, $r \times n$, produce una matriz $m \times n$.

EJEMPLO 1. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Entonces

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Nótese que A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2; por lo tanto, $A \times B$ es una matriz 2×2.

EJEMPLO 2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que, en el ejemplo 2, el producto $B \times A$ no está definido. ¿Por qué? Si A y B son matrices cuadradas, esto es, matrices para las cuales el número de renglones es igual al número de columnas, $A \times B \neq B \times A$ generalmente, pues la multiplicación matricial no es conmutativa. Por ejemplo, sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

pues dos matrices son iguales si, y solo si, sus elementos correspondientes son iguales.

Las matrices cuadradas pueden elevarse a la potencia enésima $n = 2, 3, \ldots$ mediante multiplicaciones sucesivas.

19.2. UN EJEMPLO

Supongamos que tenemos dos dados perfectos; uno de ellos que representaremos por I, tiene cuatro caras blancas y dos negras; el otro, que representaremos por II, tiene una cara blanca y cinco negras. Seleccionamos al azar uno de estos dados, lanzando una moneda no sesgada. Si obtenemos "cara", lanzamos el dado I; si obtenemos "cruz", lanzamos el dado II. Si, en el dado lanzado, aparece una cara blanca, lanzamos el I; si aparece una cara negra, lanzamos el II. Así, continuamos este proceso donde la elección del dado por lanzarse depende del resultado previo. Esta serie de lanzamientos o pruebas ilustra un tipo simple de cadena de Markov, o más precisamente, una serie de *pruebas binomiales dependientes de Markov.*

En lo que sigue, representaremos por $P(W_k)$ y $P(B_k)$ las probabilidades respectivas de los resultados blanco y negro $(W$ y $B)$ en la prueba de orden k. También, $P(W_k \mid W_{k-1})$ será la probabilidad de que aparezca blanco (W) en la prueba de orden k, dado que W ha aparecido en la prueba de orden $(k - 1)$, con significados similares para $P(B_k \mid W_{k-1})$, $P(W_k \mid B_{k-1})$, y $P(B_k \mid B_{k-1})$.

$$P(W_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) = \frac{7}{12}.$$

Entonces,

$$P(W_2) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1) + P(B_1)P(W_2 \mid B_1)$$
$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$$
$$P(B_2) = P(W_1)P(B_2 \mid W_1) + P(B_1)P(B_2 \mid B_1)$$
$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}.$$

También,

$$P(W_3) = P(W_2)P(W_3 \mid W_2) + P(B_2)P(W_3 \mid B_2)$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{48}$$
$$P(B_3) = P(W_2)P(B_3 \mid W_2) + P(B_2)P(B_3 \mid B_2)$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{31}{48}$$

Este proceso puede continuarse indefinidamente. Observamos que, en cada paso de la serie $P(W_i) + P(B_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Los resultados posibles y sus probabilidades correspondientes se pueden obtener también con la ayuda de un diagrama de árbol. En la Fig. 19-1 se muestra uno de estos diagramas para la eventualidad en que sea seleccionado el dado I para el primer lanzamiento. Se puede construir un diagrama similar para la eventualidad alternativa

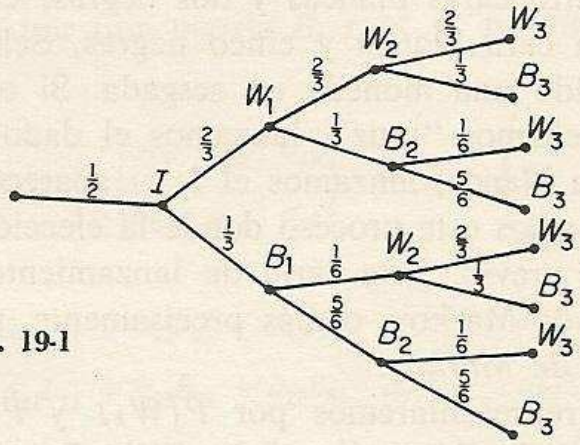


Fig. 19-1

(ejercicio 9). Por ejemplo, la probabilidad $P(B_3 \mid \mathrm{I})$ de que aparezca la cara negra en la tercera prueba, pues que fue seleccionado el dado I para la primera prueba, se obtiene como la suma de los productos de tres probabilidades anotadas en las ramas del árbol que terminan en B_3 (no se incluye el $^1/_2$).

$$P(B_3 \mid I) = \frac{4}{27} + \frac{5}{27} + \frac{1}{54} + \frac{25}{108} = \frac{7}{12}.$$

Formalizaremos ahora las ideas contenidas en este ejemplo y obtendremos algunos resultados generales.

19.3. PRUEBAS BINOMIALES DEPENDIENTES DE MARKOV

En el estudio de la función binomial de probabilidad, estábamos interesados en N pruebas *independientes* de un experimento con una probabilidad constante de éxitos. En lo que sigue, estamos interesados en una sucesión de pruebas *dependientes* donde la probabilidad de éxito en una prueba dada depende del resultado de la prueba precedente.

Consideremos que existen N pruebas en un experimento, cada una de las cuales tiene únicamente dos resultados posibles, representados por S y F. Supongamos que el resultado en cualquier prueba depende únicamente del resultado de la prueba precedente. Existirán, entonces, cuatro probabilidades asociadas con la prueba de orden $(k + 1)$, $k = 1, 2, \ldots$, esto es:

$$P(S_{k+1} \mid S_k), \quad P(S_{k+1} \mid F_k), \quad P(F_{k+1} \mid S_k), \quad \text{y} \quad P(F_{k+1} \mid F_k).$$

Así, hemos definido una serie de pruebas binomiales dependientes de Markov. Se acostumbra llamar *estados* a los resultados y, a las probabilidades de estos resultados, *probabilidades de transición.* Llamaremos S al estado 1, y F al estado 2. Hablamos, entonces, de una cadena de Markov con dos estados. Nótese que la probabilidad de un resultado dado en la prueba de orden $(k + 1)$, es condicional, dependiendo esto únicamente del resultado de la prueba de orden k y no de cualquier otro resultado anterior. Si las cuatro probabilidades que se han dado son independientes de k, entonces podemos escribir:

$$p_{11} = P(S \mid S), \quad p_{21} = P(S \mid F), \quad p_{12} = P(F \mid S), \quad \text{y} \quad p_{22} = P(F \mid F).$$

Sea

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \tag{19.2}$$

Debe ser evidente que

$$\left.\begin{aligned} p_{11} + p_{12} &= 1 \\ p_{21} + p_{22} &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{19.3}$$

puesto que cada renglón de P es un vector de probabilidad, P es una matriz estocástica.

Es conveniente calcular $p_1^{(n)}$ y $p_2^{(n)}$ las probabilidades correspondientes a los estados 1 y 2, para la prueba de orden $(n + 1)$, esto es, después de n pasos. Es importante hacer notar que un paso en el proceso de Markov significa una transición de una prueba a la siguiente. Así, el paso enésimo implica $n + 1$ pruebas. En particular, la tercera prueba implica 2 pasos; de la primera prueba a la segunda y de la segunda a la tercera. La primera prueba es el paso número cero. Las ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(n)} &= p_1^{(n-1)} p_{11} + p_2^{(n-1)} p_{21} \\ p_2^{(n)} &= p_1^{(n-1)} p_{12} + p_2^{(n-1)} p_{22} \end{aligned}\right\}, \tag{19.4}$$

son válidas, puesto que el primer miembro del lado derecho representa la probabilidad para el estado 1 en el enésimo paso, dado que haya ocurrido el estado 1 o el estado 2 en el paso previo y el segundo miembro del lado derecho es la probabilidad para el estado 2 en el enésimo paso, dado que haya ocurrido el estado 1 o el estado 2 en el paso previo.

Podemos escribir la ecuación (19.4) como el producto:

$$(p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)})\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

que se transforma en el vector renglón:

$$p^{(n)} = (p_1^{(n-1)}p_{11} + p_2^{(n-1)}p_{21},\ p_1^{(n-1)}p_{12} + p_2^{(n-1)}p_{22}). \tag{19.5}$$

En consecuencia,

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}P, \tag{19.6}$$

que es una fórmula de recursión para obtener $p^{(n)}$, partiendo de $p^{(n-1)}$.

Puesto que

$$p^{(1)} = p^{(0)}P$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}P,$$

se sigue que

$$p^{(n)} = p^{(0)}P^n. \tag{19.7}$$

Esto significa que el producto del vector de probabilidad inicial $p^{(0)}$ y la enésima potencia de la matriz de probabilidades de transición, P, produce el vector renglón $p^{(n)}$ de probabilidades de estar en cada uno de los dos estados después de n pasos.

Ejemplo 1. Refirámonos al ejemplo de la sección 19.2. Sea W el estado 1, y B el estado 2.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Según la ecuación (19.4)

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(1)} &= p_1^{(0)}p_{11} + p_2^{(0)}p_{21} \\ p_2^{(1)} &= p_1^{(0)}p_{12} + p_2^{(0)}p_{22} \end{aligned}\right\}.$$

Hemos demostrado previamente que

$$P(W_1) = p_1^{(0)} = \frac{5}{12}$$

y

$$P(B_1) = p_2^{(0)} = \frac{7}{12}.$$

Entonces,

$$p_1^{(1)} = \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$$

$$p_2^{(1)} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}.$$

EJEMPLO 2. Supóngase que calculamos las probabilidades de los estados 1 y 2 después de tres pruebas para el ejemplo de la sección 2. Entonces, según la ecuación (19.7),

$$\begin{aligned} p^{(2)} &= p^{(0)}P^2 \\ &= \left(\tfrac{5}{12}, \ \tfrac{7}{12}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^2 \\ &= \left(\tfrac{5}{12}, \ \tfrac{7}{12}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{17}{48}, \ \frac{31}{48}\right). \end{aligned}$$

Se verá que estos resultados concuerdan con los obtenidos en la sección 3.

19.4. OTRO METODO

Las probabilidades para los estados 1 y 2 después de n pasos son dadas por la ecuación (19.4).

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{11} + p_2^{(n-1)}p_{21} \\ p_2^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{12} + p_2^{(n-1)}p_{22} \end{aligned}\right\}.$$

Pero

$$p_2^{(n-1)} = 1 - p_1^{(n-1)}$$

y

$$p_{21} = 1 - p_{22}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{11} + [1 - p_1^{(n-1)}][1 - p_{22}] \\ &= p_1^{(n-1)}(p_{11} + p_{22} - 1) + (1 - p_{22}). \end{aligned} \tag{19.8}$$

Será conveniente establecer la siguiente notación:

$$R_1 = 1 - p_{11}$$

$$R_2 = 1 - p_{22}$$

y

$$Q = p_{11} + p_{22} - 1,$$

de modo que la ecuación (19.8) puede escribirse como:

$$p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)}Q + R_2. \tag{19.9a}$$

Esta es una fórmula de recursión que nos permite calcular $p_1^{(n)}$, partiendo de $p_1^{(n-1)}$

Análogamente

$$p_2^{(n)} = p_2^{(n-1)}Q + R_1. \tag{19.9b}$$

Apliquémosla al ejemplo de la sección 2:

$$p_{11} = \frac{2}{3} \quad p_{22} = \frac{5}{6}; \text{ por lo tanto, } R_1 = \frac{1}{3}, \quad R_2 = \frac{1}{6}, \quad \text{y} \quad Q = \frac{1}{2}.$$

Para el estado 1 en la segunda prueba,

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= p_1^{(0)}Q + R_2 \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

En la tercera prueba,

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= p_1^{(1)}Q + R_2 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{17}{48}, \end{aligned}$$

etc.

Puesto que, para toda p, $0 \leqq p \leqq 1$, se sigue que $|Q| \leqq 1$. Sin embargo, supondremos que $|Q| < 1$ para eliminar los casos en los que $p_{11} = p_{22} = 0$ o $p_{11} = p_{22} = 1$. Mediante la inducción matemática (ejercicio 17), se puede demostrar que:

$$p_1^{(n)} = \left(p_1^{(0)} - \frac{R_2}{1-Q}\right)Q^n + \frac{R_2}{1-Q}. \tag{19.10}$$

Si intercambiamos los estados 1 y 2 en la ecuación (19.10), la ecuación resultante es:

$$p_2^{(n)} = \left(p_2^{(0)} - \frac{R_1}{1-Q}\right)Q^n + \frac{R_1}{1-Q}. \tag{19.11}$$

Así, las ecuaciones (19.10) y (19.11) nos permiten calcular las probabilidades para los estados 1 y 2 después de n pasos sin depender de una fórmula de recursión.

19.5. PROBABILIDADES INICIALES DESCONOCIDAS

Aunque la probabilidad para el estado 1 en la prueba inicial puede ser desconocida, podemos, sin embargo, calcular las probabilidades para el estado 1 o para el estado 2 después de n pasos, dados los estados 1 o 2 en la primera prueba. Estas probabilidades se representarán por $p_{11}^{(n)}$, $p_{21}^{(n)}$, $p_{12}^{(n)}$, ay $p_{22}^{(n)}$. Puesto que

$$\left.\begin{aligned} p_{12}^{(n)} &= 1 - p_{11}^{(n)} \\ \text{y} \quad p_{21}^{(n)} &= 1 - p_{22}^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

necesitamos obtener únicamente $p_{11}^{(n)}$ y $p_{22}^{(n)}$. Por medio del mismo método empleado para derivar la fórmula (19.9a), encontramos (ejercicio 20) que:

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}Q + R_2. \tag{19.13}$$

Nuevamente, nos valemos de la inducción matemática (ejercicio 21) para derivar:

$$p_{11}^{(n)} = \left[p_{11}^{(0)} - \frac{R_2}{1-Q}\right]Q^n + \frac{R_2}{1-Q}. \tag{19.14}$$

Pero, ya que $p_{11}^{(0)} = p_{11}$, esta ecuación se transforma en

$$p_{11}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q}Q^n + \frac{R_2}{1-Q}. \tag{19.15}$$

Intercambiando 1 y 2, obtenemos:

$$p_{22}^{(n)} = \frac{R_2}{1-Q}Q^n + \frac{R_1}{1-Q}. \tag{19.16}$$

De las ecuaciones (19.12) y (19.14), encontramos que:

$$p_{12}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q}(1 - Q^n). \tag{19.17}$$

Análogamente,

$$p_{21}^{(n)} = \frac{R_2}{1-Q}(1 - Q^n). \tag{19.18}$$

EJEMPLO 1. En el ejemplo de la sección 2, supongamos que la moneda considerada es sesgada y que no conocemos la probabilidad de obtener "cara". Se sigue que $p_1^{(0)}$ y $p_2^{(0)}$ son desconocidas. Podemos, sin embargo, calcular las probabilidades para los cuatro resultados condicionales posibles $p_{11}^{(n)}$, $p_{12}^{(n)}$, $p_{21}^{(n)}$, y $p_{22}^{(n)}$ con las ecuaciones (19.15) a (19.18). Por ejemplo, la probabilidad para blanco (estado 1) en el sexto lanzamiento del dado, ya que en el primer lanzamiento apareció negro (estado 2), es dada por la ecuación (19.18). $R_2 = {}^1/_6$ y $Q = {}^2/_3 + {}^5/_6 - 1 = {}^1/_2$. El número de pasos en $n = 5$.

$$p_{21}^{(5)} = \frac{1/6}{1/2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] = \frac{31}{96}.$$

EJEMPLO 2. El Problema de los Cuatro Mentirosos. Es conveniente hacer referencia a la sección 5.6, donde se estableció y se resolvió este problema con métodos elementales para el caso de tres mentirosos. Consideraremos ahora la sucesión dada de proposiciones como un proceso de Markov, donde una verdad se considerará como el estado 1 y una mentira como el estado 2; pero no será una serie de pruebas binomiales dependientes de Markov, a menos que supongamos que las afirmaciones de *C, B* y *A* son hechas conociendo únicamente la declaración de la persona previa. El estado observado es 1 o 2, dependiendo ello de si la afirmación correspondiente implica que *D* está diciendo la verdad o está mintiendo.

Ya que las declaraciones son independientes,

$$p_1^{(n)} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad p_2^{(n)} = \frac{2}{3} \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3.$$

Recordando que un número par de mentiras resulta en una verdad, podemos escribir $p_{11} = p_{22} = {}^1/_3$. Entonces, $R_1 = R_2 = {}^2/_3$, $Q = -{}^1/_3$ y $1 - Q = {}^4/_3$.

El estado inicial es el de *D*. Si *A* afirma que *B* niega que *C* declara que *D* es un mentiroso, entonces para las alternativas "*D* dijo la verdad", *(T)*, y "*D* mintió", *(L)*, tenemos, para las afirmaciones de *A B C D*, las combinaciones respectivas *T T L T* y *T T L L*, en cada una de las cuales *A* implica que *D* dijo la verdad. Buscamos, entonces, la probabilidad —llamémosla $p_{11}^{(0)}$— de que *D* dijo la verdad bajo la condición de que *A* implicó que así había sido. Los pasos 0, 1, 2, 3 en el proceso corresponden a las afirmaciones de *D, C, B* y *A*, respectivamente.

La probabilidad de que *D* dijo la verdad y de que *A* implicó que así fue, por el teorema de la multiplicación, fórmula (4.6), puede escribirse en estas dos formas equivalentes:

$$p_1^{(3)} p_{11}^{(0)} = p_1^{(0)} p_{11}^{(3)}$$

de donde

$$p_{11}^{(0)} = \frac{p_1^{(0)} p_{11}^{(3)}}{p_1^{(3)}}$$

Ahora,

$$p_1^{(n)} = \tfrac{1}{3}.$$

También, según la ecuación (19.15),

$$p_{11}^{(3)} = \frac{2/3}{4/3}\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2/3}{4/3} = \frac{13}{27}.$$

Según la ecuación (19.10),

$$p_1^{(3)} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2/3}{4/3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2/3}{4/3} = \frac{41}{81},$$

de donde

$$p_{11}^{(0)} = \frac{(1/3)(13/27)}{41/81} = \frac{13}{41}, \qquad \text{como se calculó previamente.}$$

19.6. EQUILIBRIO ESTADISTICO

Del hecho que $|Q| < 1$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$; por lo tanto, con las ecuaciones (19.18), encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = \frac{R_2}{1-Q}, \tag{19.19}$$

y con las ecuaciones (19.16) y (19.17),

$$\lim_{n\to\infty} p_{22}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q}. \tag{19.20}$$

Es evidente que un gran número de pruebas binomiales dependientes de Markov conduce a un estado de *equilibrio estadístico*. Esto significa que $p_1^{(n)}$ y $p_2^{(n)}$ permanecen prácticamente constantes e independientes de los resultados iniciales cuando n es grande. El tamaño de n dependerá del tamaño de Q, y ésta, a la vez, es una función de p_{11} y p_{22}. Si el estado 1 tiende a ser seguido por el estado 1 y el estado 2 por el estado 2, entonces se obtendrá el equilibrio rápidamente. En particular, si $p_{11} = p_{22}$ para toda n, entonces $R_1 = R_2$ y $p_{11}^{(n)} = p_{21}^{(n)} = p_{22}^{(n)} = p_{12}^{(n)} = \frac{1}{2}$, aproximadamente. Esto significa que $p_1^{(n)} = p_2^{(n)} = \frac{1}{2}$, aproximadamente, cuando n es grande. Decimos, entonces, que las pruebas binomiales constituyen un juego justo.

Ejemplo. Refirámonos al ejemplo 1 de la sección 19.5. Según la ecuación (19.15), puesto que $R_1 = 1/3$, $R_2 = 1/6$ y $Q = 1/2$,

$$p_{11}^{(10)} = \frac{1/3}{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{1536} + \frac{1}{3}.$$

Según la ecuación (19.19),

$$p_{21}^{(10)} = \frac{1/6}{1/2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3072}.$$

Cada una de estas probabilidades es, aproximadamente, $1/3$, el valor dado por la ecuación (19.19), sin importar el resultado de la primera prueba.

19.7. UNA CADENA DE MARKOV MAS GENERAL

En las secciones precedentes, discutimos una secuencia de experimentos donde cada uno de ellos tenía únicamente dos estados. Consideraremos ahora el caso donde cada experimento puede tener un número finito, r, de estados posibles, que representaremos por $\{e_1, e_2, \ldots e_r\}$. Nuevamente, suponemos que la

probabilidad de un resultado depende únicamente del resultado inmediato precedente. Sea $P(e_j \mid e_i) = p_{ij}$. Es conveniente representar las probabilidades de transición mediante una matriz cuadrada. Una de estas matrices para un proceso de Markov de 3 estados es:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}. \tag{19.21}$$

Cuando una transición es imposible, su probabilidad es 0 por definición. P es una matriz estocástica.

EJEMPLO 1. Supongamos que tenemos tres dados: el primero tiene tres caras rojas, dos blancas y una azul; el segundo tiene dos caras rojas, tres blancas y una azul; y el tercero tiene una cara roja, dos blancas y tres azules. Luego, lanzamos un dado ordinario. Si aparece el 1 o el 4, se lanza el primer dado de colores; si aparece el 2 o el 5, se lanza el segundo dado de colores; si aparece el 3 o el 6, se lanza el tercer dado de colores. Si en el dado de colores aparece el rojo, se lanza el primer dado; si aparece el blanco, se lanza el segundo dado; si aparece el azul, se lanza el tercer dado, etc. Así, tenemos una cadena de Markov con tres estados: $e_1 = R$, $e_2 = W$, $e_3 = B$.

$$p_1^{(0)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$p_2^{(0)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18}$$

$$p_3^{(0)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{18}.$$

Se puede verificar que la matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta cadena de Markov se puede representar mediante un diagrama de árbol como en la Fig. 19-2.

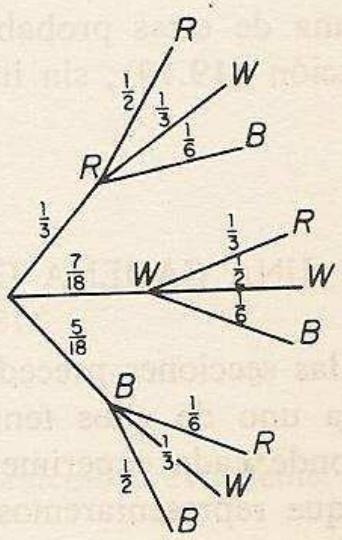


Fig. 19-2

Se presenta un tipo importante de problema cuando buscamos la probabilidad $p_{ij}^{(n)}$ de que un proceso que se supone empieza en el estado i se encuentre en el estado j después de n pasos. Las probabilidades involucradas pueden distribuirse en una matriz:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{19.22}$$

Para la condición establecida en el ejemplo precedente, preguntemos: "¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el rojo en un dado después de dos lanzamientos si en el lanzamiento anterior apareció el azul?" Las probabilidades de la matriz (19.22) pueden obtenerse con un diagrama de árbol, Fig. 19-3.

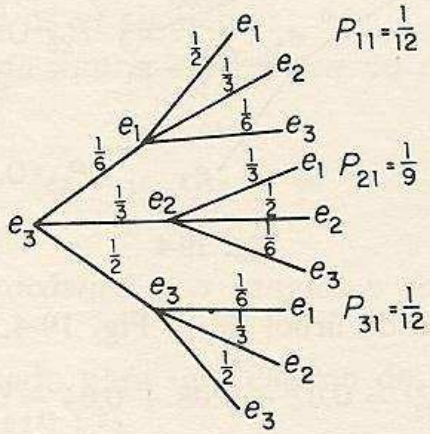


Fig. 19-3

La probabilidad deseada $p_{31}^{(2)}$ se obtiene como la suma de las probabilidades de todas las ramas del árbol empezando en e_3, y terminando en e_1; por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{31}^{(2)} &= p_{11} + p_{21} + p_{31} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Análogamente, pueden obtenerse $p_{32}^{(2)}$ y $p_{33}^{(2)}$. Estas probabilidades constituyen el tercer renglón de la matriz:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{13}{36} & \frac{5}{12} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Para calcular los otros dos renglones de esta matriz, construimos diagramas de árbol, partiendo de e_1 y e_2 (ejercicio 23). Nótese, por ejemplo, que las probabilidades del tercer renglón suman 1 porque empezando en el estado e_3, debemos llegar a alguno de los tres estados posibles después de dos pasos.

EJEMPLO 2. Supongamos que, en cierta región de los Estados Unidos, el 50% de los votantes son republicanos, (e_1); 40% son demócratas (e_2); y 10% son independientes (e_3). Supongamos que, en generaciones sucesivas, 70% de los hijos de republicanos llegan a ser republicanos; 10% demócratas; y 20% independientes. Para los demócratas, 80% de sus hijos llegan a ser demócratas; 10%, republicanos; y 10% independientes. Para los independientes, 30% de sus hijos llegan a ser republicanos; 30% demócratas; y 40% independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que a) un demócrata tenga un nieto que llegue a ser independiente? b) ¿un votante seleccionado al azar tenga un nieto que llegue a ser independiente? Supóngase que todos los votantes tienen hijos que llegarán a ser votantes.

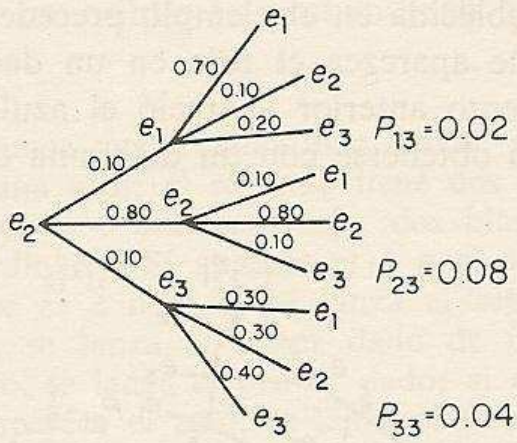


Fig. 19-4

Mediante el diagrama de árbol de la Fig. 19-4, encontramos que

$$p_{23}^{(2)} = 0.02 + 0.08 + 0.04 = 0.14.$$

Análogamente, encontramos que

$$p_{13}^{(2)} = 0.14 + 0.01 + 0.08 = 0.23$$

y

$$p_{33}^{(2)} = 0.06 + 0.03 + 0.16 = 0.25.$$

Para (b) se sigue que

$$p_3^{(2)} = (0.5 \times 0.23) + (0.4 \times 0.14) + (0.1 \times 0.25) = 0.196.$$

19.8. ALGUNAS RELACIONES INTERESANTES

Es posible demostrar que la ecuación (19.6),

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}P,$$

y la ecuación (19.7),

$$p^{(n)} = p^{(0)}P^n,$$

que se derivaron para una cadena de Markov de 2 estados, son válidas también para una cadena de r estados (ejercicio 24). Sin embargo, en este texto nos hemos restringido al caso de 3 estados. Recordando que:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

y

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{19.23}$$

se puede demostrar que

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n. \tag{19.24}$$

Así, las probabilidades contenidas en $P^{(n)}$ se pueden obtener mediante multiplicaciones sucesivas, partiendo de la matriz P. Con excepción de los casos simples, estas multiplicaciones pueden ser tan laboriosas que debe buscarse el auxilio de una máquina computadora.

Un resultado interesante es el siguiente:

Si alguna potencia de una matriz estocástica no contiene probabilidades cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{T}, \tag{19.25}$$

donde $\mathbf{T}$ *es una matriz estocástica con renglones idénticos.*

Demostremos este resultado para una cadena de Markov de 2 estados. Según las ecuaciones (19.16) y (19.17),

$$p_{22}^{(n)} = \frac{R_2}{1-Q} Q^n + \frac{R_1}{1-Q}$$

$$p_{12}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q}(1-Q^n).$$

Nuevamente, puesto que $|Q| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{22}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q},$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \frac{R_1}{1-Q},$$

$$p_{22}^{(n)} = p_{12}^{(n)} \quad \text{aproximadamente, cuando } n \text{ es grande.}$$

Análogamente, podemos demostrar que

$$p_{11}^{(n)} = p_{21}^{(n)} = \frac{R_2}{1-Q} \quad \text{aproximadamente, cuando } n \text{ es grande.}$$

Puesto que

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \end{pmatrix},$$

si n tiende a infinito,

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \dfrac{R_2}{1-Q} & \dfrac{R_1}{1-Q} \\ \dfrac{R_2}{1-Q} & \dfrac{R_1}{1-Q} \end{pmatrix} = T,$$

que constituye una matriz estocástica con renglones idénticos (ejercicio 25).

De acuerdo con la ecuación (19.24), se sigue el teorema sumarizado en la ecuación (19.25).

Ejemplo. Sea

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.489 & 0.511 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.529 & 0.471 \\ 0.523 & 0.477 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.526 & 0.474 \\ 0.526 & 0.474 \end{pmatrix}.$$

Es obvio que la matriz límite T tendrá elementos aproximadamente iguales a los de P^4.

El vector de probabilidad t definido por los renglones idénticos de T se llama *punto fijo* de la *transformación* P porque

$$tP = t. \tag{19.26}$$

La razón de esta terminología es la siguiente. Según la ecuación (19.6), al multiplicar el vector de probabilidad $p^{(n-1)}$ por P, se transforma en el vector de probabilidad $p^{(n)}$. Por lo tanto, el vector "fijo" t se transforma en sí mismo cuando se multiplica por P.

19.9. APLICACIONES

La teoría de las cadenas de Markov tiene una gran variedad de aplicaciones. Se presentarán, a continuación, algunas de ellas.

Genética. Se sabe que las características de un animal son determinadas por los genes transmitidos por sus padres. Una característica dada resulta de dos genes heredados, uno de cada padre. En un tipo muy simple de herencia, cada gene del par transmitido puede ser de cualquiera de dos tipos, que simbolizaremos por D y d. De esta manera, surgen tres combinaciones posibles de genes en un individuo: Los genotipos DD, Dd y dd. Si un individuo ha heredado dos genes D, uno de cada padre, se dice que es *dominante, DD;* si ha heredado dos genes d, se dice que es *recesivo, dd;* si hereda un gene D de un padre y un gene d del otro, se dice que es *híbrido, Dd.*

Si un individuo dominante se aparea con otro dominante, esta unión puede producir únicamente dominantes (tabla A). Resulta una conclusión análoga en el apareo de dos recesivos. Si se aparea un dominante con un híbrido, resultan descendientes de dos genotipos, DD y Dd, cada uno con probabilidad $1/2$ (tabla B). Existe un resultado similar cuando se aparea un recesivo con un híbrido. En el apareo de dos híbridos, resulta un dominante con probabilidad $1/4$, un híbrido con probabilidad $1/2$, y un recesivo con probabilidad $1/4$ (tabla C).

(A)

$DD \times DD$

	D	D
D	DD	DD
D	DD	DD

(B)

$DD \times Dd$

	D	d
D	DD	Dd
D	DD	Dd

(C)

$Dd \times Dd$

	D	d
D	DD	Dd
d	Dd	dd

Se puede estudiar la probabilidad de que aparezcan los tres tipos diferentes en los descendientes de generaciones sucesivas en términos de una cadena de Markov. Los estados son dominante (e_1), híbrido (e_2) y recesivo (e_3). Supongamos que cruzamos un dominante con un híbrido y luego cruzamos todas las generaciones sucesivas con un híbrido. ¿Cuál es la probabilidad, $p_{13}^{(3)}$, de que un individuo en la tercera generación sea recesivo? Nuevamente, emplearemos diagramas de árbol para resolver este problema. Los dos siguientes (Fig. 19-5) son para los eventos de que el individuo en la primera generación está en el estado e_1 o en el estado e_2 (tabla B). De estos diagramas se sigue que la respuesta a nuestra pregunta es:

$$p_{13}^{(3)} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

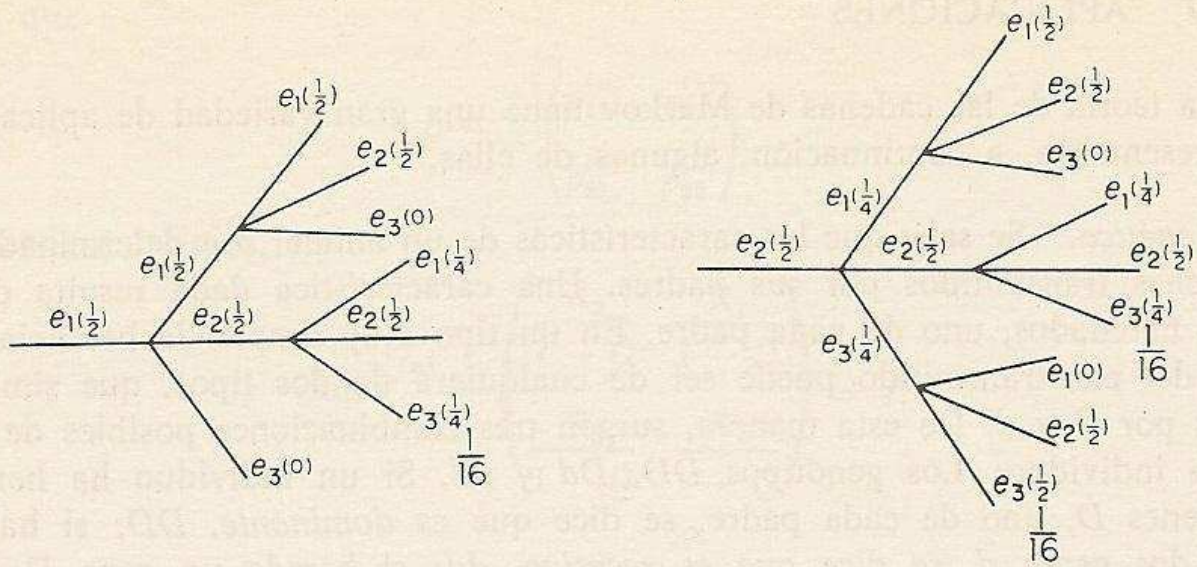


Fig. 19-5

Supongamos ahora que empezamos no necesariamente con un dominante, sino con un individuo de genotipo desconocido cruzado con un híbrido. Se puede verificar que la matriz estocástica para este problema, es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

que es una matriz que no contiene probabilidades cero. Según la ecuación (19.24), $P^{(n)} = P^n$.

Es posible demostrar, de acuerdo con la ecuación (19.25) que,

$$\lim_{n \to \infty} P^n = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

que significa que, después de un número de generaciones, los descendientes tienen, aproximadamente, las probabilidades $^1/_4$, $^1/_2$ y $^1/_4$ de ser dominante, híbrido y recesivo, respectivamente.

Es interesante hacer notar que, si la situación discutida en los párrafos anteriores se alterara de tal modo que el animal de genotipo desconocido se cruzara con un dominante en lugar de un recesivo, y todos los descendientes sucesivos se cruzaran similarmente, no podríamos obtener un descendiente recesivo en nin-

gún momento, ni aun en la primera generación. Es posible, por supuesto, obtener un híbrido, pero la probabilidad de tenerlo n veces en sucesión es $(^1/_2)^n$. (Nótese que, para P, todas las probabilidades de la segunda columna son $^1/_2$.) Puesto que $\lim_{n\to\infty} (^1/_2)^n = 0$, eventualmente tendremos un dominante. Puesto que será apareado con un dominante, todos los animales sucesivos serán dominantes. Infortunadamente, la relación de la ecuación (19.25) no es válida, puesto que ninguna potencia de P está exenta de probabilidades cero. Se omiten las demostraciones de estos hechos.

Camino al azar. El fenómeno conocido como camino al azar se estudia en muchas ramas de la Física. Discutiremos brevemente una de sus formas más simples.

Consideremos puntos igualmente espaciados sobre una línea recta, numerados 1, 2,... n. (Véase la Fig. 19.6.) Una partícula, inicialmente situada en el punto i, $0 < i < n$, se desplaza con probabilidad p, un paso de una unidad

Fig. 19-6

hacia n, y con probabilidad q un paso hacia 1; $p + q = 1$. Siempre que la partícula alcance la posición 1 o n, termina su movimiento. La sucesión de desplazamientos da origen a una cadena de Markov finita con *barreras absorbentes* 1 y n. A cada posición se la llama "estado", de modo que tenemos una cadena de n estados.

La matriz estocástica para el caso $n = 4$ es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para facilitar la interpretación de esta matriz, consideremos el renglón 2. Contiene las probabilidades $p_{21} = q$, $p_{22} = 0$, $p_{23} = p$ y $p_{24} = 0$. Así, si la partícula se encuentra inicialmente en el punto 2, $p_{21} = q$, nos dice que se desplaza hacia 1, con probabilidad q; $p_{22} = 0$, puesto que la partícula no puede permanecer estacionaria en 2; debe desplazarse hacia adelante o hacia atrás; $p_{23} = p$ significa que se desplaza de 2 a 3, con probabilidad p; $p_{24} = 0$ significa que la partícula no puede desplazarse dos pasos a la vez —de 2 a 4.

Entre las muchas preguntas interesantes que podemos plantearnos en relación al camino al azar, se encuentran las siguientes:

1) Si una partícula parte de la posición i, ¿cuál es la probabilidad de que, después de un número dado de pasos, sea absorbida en n? ¿En 1?

2) ¿Cuál es la trayectoria más probable de la partícula?

Consideremos el caso para $n = 4$ con $i = 3$, $p = {}^3/_5$ y $q = {}^2/_5$, con la ayuda de un diagrama de árbol (Fig. 19-7). Supongamos cinco pasos. Claramente, la probabilidad de que sea absorbida en 4, después de cinco pasos es:

$$p_{34}^{(5)} = \frac{108}{3125} = 0.0346.$$

Resulta que la trayectoria más probable es la más corta, de 3 a 4, con probabilidad ${}^3/_5$. Podemos observar que, si el camino continúa indefinidamente, existe una posibilidad de que la partícula oscile entre 2 y 3. Para $2n$ pasos, en esta eventualidad la probabilidad es $({}^2/_5 \cdot {}^3/_5)^n$, que tiene como límite 0 cuando n aumenta sin límite. Obviamente, es muy poco probable que esta oscilación continúe sin fin.

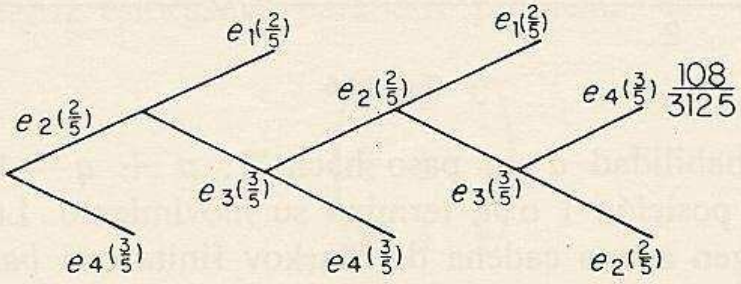


Fig. 19-7

El camino al azar puede estudiarse bajo otras condiciones. En lugar de absorción en las fronteras, puede existir una reflexión hacia atrás a una posición interior o a la frontera opuesta. La reflexión es una condición que se presenta cuando las moléculas de un gas se encuentran confinadas en un recipiente cerrado. Los varios casos para grandes valores de n pueden manejarse con técnicas más complejas de las que podemos presentar en este breve capítulo y los cálculos correspondientes requieren el uso de máquinas computadoras modernas.

Ruina del jugador. Existe una relación íntima entre un famoso juego de azar y el problema del camino al azar. Supongamos que dos jugadores, A y B, participan en un juego. A tiene i dólares y B, j dólares. En cada partida, A tiene una probabilidad p de ganar, y q de perder un dólar. El juego continúa hasta n partidas o hasta que uno de los jugadores pierde todo su dinero. ¿Cuál es la probabilidad de que A quede arruinado, esto es, que pierda todos sus i dólares? En un juego justo, $p = q = {}^1/_2$.

En este problema, el número de dólares poseídos por A corresponde a la posición i en el camino al azar. Un paso hacia n significa que A ganó una partida; un paso hacia 1, significa que B ganó una partida. Llegar a la posición 1 significa la ruina de A; a la posición n, la ruina de B.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de los siguientes son vectores de probabilidad? ¿Por qué?

(a) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12})$
(b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$
(c) $(2, 3, 5)$
(d) $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$

2. ¿Cuáles de las siguientes son matrices estocásticas? ¿Por qué?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Calcule los productos indicados en los ejercicios 3-7.

3. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. (a) $(1,2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. (a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. Dada $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, Calcule A^2 y A^3.

9. Construya un diagrama de árbol para la eventualidad de que el dado II sea seleccionado para el primer lanzamiento en el ejemplo de la sección 19.2. Extienda este diagrama a tres pruebas, como en la Fig. 19-1.

10. Del diagrama del ejercicio anterior, donde el dado II fue seleccionado para el primer lanzamiento, calcule la probabilidad: a) de que aparezca el color negro en la segunda prueba; b) de que aparezca el color blanco en la tercera prueba; c) de que aparezca el color negro en la tercera prueba.

11. Haciendo referencia a los resultados de los ejemplos 1 y 2 de la sección 19.3 y aplicando la fórmula (19.7), obtenga $p_1^{(3)}$ y $p_2^{(3)}$.

12. Imaginemos una serie de interruptores eléctricos en un mecanismo. Representemos un interruptor abierto por 1 y un interruptor cerrado por 2. Para cualquier instante al azar en que el mecanismo está en operación, supongamos $p_1^{(0)} = \frac{1}{5}$ y $p_2^{(0)} = \frac{4}{5}$. También, $p_{11} = \frac{1}{10}$, $p_{12} = \frac{9}{10}$, $p_{21} = \frac{3}{5}$ y $p_{22} = \frac{2}{5}$ para todos los interruptores con excepción del primero. ¿Cuál es la probabilidad de que el cuarto interruptor esté abierto?

13. Consideremos una serie de interruptores eléctricos donde la probabilidad es $^3/_5$ de que un interruptor esté abierto si el precedente lo está y $^2/_5$ de que un interruptor esté cerrado si el precedente está abierto. La probabilidad de que un interruptor esté abierto es $^2/_3$ si el precedente está cerrado y la probabilidad de que esté cerrado es $^1/_3$ si el precedente está cerrado. Calcule la probabilidad a) de que el tercer interruptor esté abierto, y b) de que el tercero esté abierto si el primero lo está. Supóngase que la probabilidad de que el primer interruptor esté abierto es $^1/_2$.

14. Resuelva la parte (b) del ejercicio 13, mediante un diagrama de árbol.

15. En el ejemplo de la sección 19.2, calcule $p_{11}^{(4)}$, $p_{12}^{(4)}$, y $p_{22}^{(4)}$. Verifique que

$$p_{11}^{(4)} + p_{12}^{(4)} = 1 \quad \text{y} \quad p_{21}^{(4)} + p_{22}^{(4)} = 1,$$

donde el estado 1 es blanco y el estado 2 es negro.

16. Dada la ecuación $p_n = ap_{n-1} + b$, donde a y b son constantes y $n = 1, 2,$ Si una secuencia de números $p_0, p_1, p_2, \ldots$ satisface esta ecuación, demuestre que

$$p_n = \left(p_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}, \text{ siempre que } a \neq 1.$$

Use la inducción matemática.

17. Derive la fórmula (19.10) por inducción matemática. Observe que la ecuación (19.9) es una ecuación de la forma $p_n = ap_{n-1} + b$. (Véase el ejercicio 16.)

18. Demuestre que $p_1^{(n)} + p_2^{(n)} = 1$.

19. Derive la fórmula (19.9b): $p_2^{(n)} = p_2^{(n-1)}Q + R_1$.

20. Derive la fórmula (19.13): $p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}Q + R_2$.

21. Derive la fórmula (19.14):

$$p_{11}^{(n)} = \left[p_{11}^{(0)} - \frac{R_2}{1-Q}\right]Q^n + \frac{R_2}{1-Q}.$$

22. En el pueblo de Graumark existen únicamente dos partidos políticos, los hokes y los dokes. Se efectúa una elección anualmente para la alcaldía, el alcalde permanece en funciones únicamente un año. La probabilidad de que un hoke suceda a un hoke como alcalde es $^3/_5$, y de que un doke suceda a un doke es $^1/_2$. Si es elegido un hoke para la alcaldía en 1965, ¿cuál es la probabilidad de que a) sea elegido otro hoke en 1968? b) ¿sea elegido un doke en 1967?

23. Para los datos del ejemplo 1 de la sección 19.7, verifique los valores dados en, a) el primer renglón, y b) el segundo renglón de la matriz $P^{(2)}$.

24. Demuestre que las ecuaciones (19.6) y (19.7) son válidas para una cadena de r estados, $r > 2$.

25. Demuestre que $\begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{1-Q} & \dfrac{R_2}{1-Q} \\ \dfrac{R_1}{1-Q} & \dfrac{R_2}{1-Q} \end{pmatrix}$ es una matriz estocástica.

26. Si $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$; calcule a) P^2, P^3 y P^4, b) los valores aproximados de los elementos de la matriz límite T. Redondee cada elemento al segundo lugar decimal. c) ¿Cuál es el vector fijo?

27. Verifique, mediante un diagrama de árbol, los valores de $p_{13}^{(2)}$ y $p_{33}^{(2)}$ dados al final de la sección 19.7.

28. Con la Fig. 19-5, calcule la probabilidad de que un animal en la tercera generación sea, a) dominante; b) híbrido.

29. Construya un diagrama de árbol para dos generaciones cuando un híbrido se cruza con un híbrido y luego estos descendientes se cruzan con un híbrido. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente de la segunda generación sea híbrido?

30. Con la Fig. 19-7, calcule la probabilidad de que la partícula alcance la posición 2 después de a) tres pasos; b) cinco pasos; c) $2m$ pasos.

31. Con la Fig. 19-7, extendida, si es necesario, calcule la probabilidad de que la partícula sea absorbida después de a) tres pasos; b) seis pasos.

32. A apuesta con B en un juego justo. Cada uno de ellos empieza con \$3 y juegan tres partidas. ¿Cuál es la probabilidad de que A a) quede arruinado? b) Gane \$1?

ALGUNAS RESPUESTAS

CAPITULO 19

1. (a) y b), porque los renglones suman 1.

3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{24} \\ \frac{17}{60} & \frac{43}{60} \end{pmatrix}$.

5. (a) (5,3); (b) $(\frac{29}{60}, \frac{31}{60})$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 11. $p_1^{(3)} = \frac{43}{128}$; $p_2^{(3)} = \frac{85}{128}$.

13. (a) 0.624; (b) 0.626. 15. $p_{11}^{(4)} = \frac{3}{8}$; $p_{12}^{(4)} = \frac{5}{8}$; $p_{22}^{(4)} = \frac{11}{16}$.

29. $\frac{1}{2}$. 31. (a) $\frac{18}{125}$; (b) 0.00922.

Aquí termina el refuerzo del tema "Cadenas de Markov" y también es el fin de la obra.

Esperamos que sea de enorme provecho para todos aquellos interesados en el apasionate a la vez que importante tema de la Teoría de Probabilidad y sus muchísimas aplicaciones.

INDICE

Algebra de conjuntos, 5
Análisis combinatorio, 16
Aplicación, 74

$C(n, r)$, 21
Cadena (Markov), 130
Cadena de Markov, 130
Células, 5
Clases de conjuntos, 5
Coeficientes del binomio, 19
Coeficientes multinomiales, 20
Columna de una matriz, 126
Combinaciones, 21
Complemento de un conjunto, 2
Complemento relativo, 2
Componente de un vector, 126
Conjunto, 1
Conjunto nulo, 1
Conjunto potencia, 5
Conjunto producto, 4
Conjunto universal, 1
Conjunto vacío, 1
Conjuntos contables, 4
Conjuntos de índices, 5
Conjuntos disyuntos, 2
Conjuntos finitos, 4
Conjuntos infinitos, 4
Conjuntos no contables, 4
Conteo, 16
Correlación, 80
Covarianza, 80

Desfavorable, 105
Desigualdad de Tchebycheff, 86
Desviación estándar, 78, 83, 85
Diagonal, 134
Diagonal principal, 134
Diagrama de árbol, 9, 23, 55
Diagrama de transición, 146
Diagrama de Venn, 3
Diferencia de conjuntos, 2
Distribución (de variable aleatoria), 75, 83
Distribución binomial, 105
Distribución conjunta, 79
Distribución de Bernoulli, 106
Distribución de Gauss, 106
Distribución de Poisson, 108
Distribución de probabilidad inicial, 132
Distribución estacionaria, 133
Distribución marginal, 80
Distribución multinomial, 109
Distribución normal, 106
Distribución normal estándar, 107

Elemento, 1
Enteros, 2
Enteros positivos, 2
Espacio de estados, 130
Espacio de probabilidad discreto, 43
Espacio de probabilidad finito, 41
Espacio de probabilidad producto, 50
Espacio equiprobable, 42
Espacio equiprobable finito, 42
Espacio muestral, 38
Espacio uniforme, 42, 43
Espacios muestrales infinitos, 43
Esperanza, 75, 83, 84
Estado absorbente, 134
Evento, 38
Evento cierto, 38
Evento imposible, 38
Eventos aleatorios, 42
Eventos dependientes, 57
Eventos elementales, 38
Eventos independientes, 57
Eventos mutuamente exclusivos, 39
Exito (distribución binomial), 105

Familia de conjuntos, 5
Favorable, 105
Fila de una matriz, 126
Fracaso (distribución binomial), 105
Frecuencia relativa, 38
Función, 74
Función de densidad, 84
Función de distribución acumulativa, 85
Función de probabilidad, 40, 75
Función de probabilidad condicional, 63
Función de probabilidad conjunta, 79
Función de variables aleatorias, 82

Imagen, 74
Imagen inversa, 74
Independencia, 57
Indice, 1
Infinito contable, 4
Intersección de conjuntos, 25
Intervalo, 2

Ley de los grandes números, 86
Leyes de De Morgan, 3

Matriz, 126
Matriz cuadrada, 126
Matriz de transición, 130
Matriz estocástica, 127
Matriz estocástica regular, 128
Media, 75
Miembro, 1
Muestras ordenadas, 18
Multiplicación escalar, 126

N (enteros positivos), 2
$N(\mu, \sigma^2)$, 107
Notación factorial, 16
Números reales, 2

Particiones, 5, 22, 56
Particiones ordenadas, 22
$P(n, r)$, 17
$P(k; \lambda)$, 108
Permutaciones, 16
Permutaciones con repeticiones, 17
Probabilidad, 38, 40
Probabilidad condicional, 54
Problema del cumpleaños, 43
Proceso estocástico, 55
Proceso estocástico finito, 55
Producto de probabilidad, 50
Promedio muestral, 87
Promedio ponderado, 75
Pruebas con sustitución, 18
Pruebas independientes, 58, 68
Pruebas repetidas, 58
Punto muestral, 38

R (números reales), 2
Recorrido, 74

Subconjunto, 1
Sucesos, 38, 57

Técnicas de contar, 16
Teorema central del límite, 108
Teorema de Bayes, 56
Teorema de la multiplicación, 55
Teorema del binomio, 19, 27
Triángulo de Pascal, 20

Unidades estándar, 107
Unión de conjuntos, 2

Valor esperado, 75
Variable aleatoria continua, 84
Variable aleatoria discreta, 83
Variable aleatoria estandarizada, 79
Variable aleatoria independiente, 81, 85
Variables aleatorias, 74
Varianza, 78, 83, 84
Vector, 126
Vector de probabilidad, 127
Vector fijo, 127, 129
Ventajas, 42

Z (enteros), 2

Distribución binomial de Bernoulli:

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$\mu = np$

$s = \sqrt{\mu q}$

a) 2 resultados posibles

b) n ensayos independientes

c) $p+q=1$; p: éxito, q: fracaso

d) x: no. de éxitos de 0 a n

Ejem: Un Sr. vende 6 de cada 100 carros que muestra. ¿Cuál es la prob. que venda 2 de los sigs. 10 carros?

$$P\left(2,10,\tfrac{6}{100}\right) = \binom{10}{2}\left(\tfrac{6}{100}\right)^2\left(\tfrac{94}{100}\right)^8 = 9.87\%$$

Ejem. 2.

Si lanzo una moneda 5 veces, ¿Qué prob. hay de que resulten:

a) 0 águilas: $P_{\neq}(0,5,\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$

b) 1 águila: $P(1,5,\frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$

c) 2 águilas: $P(2,5,\frac{1}{2}) = \frac{10}{32}$

d) 3 águilas: $P(3,5,\frac{1}{2}) = \frac{10}{32}$

e) 4 águilas: $P(4,5,\frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$

f) 5 águilas: $P(5,5,\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$

$\Sigma = 1$

Distribución de Poisson:

Cuando N (Población) es muy grande y p muy pequeña:

$$P(x,\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$\lambda = Np = \mu$

x: casos favorables

Ejem. 1: 10% de productos son defectuosos; hallar la prob. de que en 10 productos tomados al azar, 2 sean defectuosos

$\lambda = Np = 10(\frac{1}{10}) = 1$ $\quad p = 10\% = \frac{1}{10}$

$x = 2$

$$P = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e} \doteq 18.4\%$$

Ejm. 2: Si la prob. de que 1 individuo sufra una reacción al inyectarle suero es 1/1000, determinar la prob. de que en 2000 gentes:

a) Exactamente 3 tengan reacción

$p = 0.001$ $\quad \lambda = Np = 2$, $x = 3$

$$P = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3e^2} \doteq 18\%$$

b) Más de 2 tengan reacción

$$P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2} \doteq 13.53\%$$

$$P(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2} \doteq 27.06\%$$

$$P(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{2}{e^2} \doteq 27.06\%$$

$$P = 1 - (13.53\% + 2(27.06\%))$$

$$P = 32.33\%$$

Tamaño de la Muestra

r: error:

$$n = \frac{N}{1+Nr^2}$$

Z	3.0	2.58	2.33	2.05	2.0	1.96	1.645	1.28	1.00	0.67
Niv. de Confianza	99.73%	99%	98%	96%	95.45%	95%	90%	80%	68.27%	50%
Error (r)	0.0027	0.01	0.02	0.04	0.0455	0.05	0.10	0.20	0.3673	0.5

Distribución Normal de Gauss: $\mu = Np \quad \sigma = \sqrt{\mu q}$

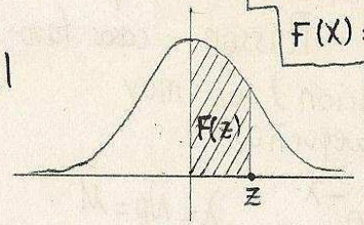
$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \; ; \; \operatorname{Exp}(u) = e^u \; ; \; e \doteq 2.71828\ldots$$

$x \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$$

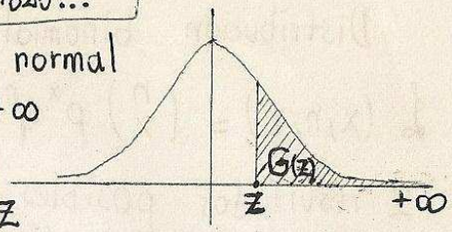
a) Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



b) Areas bajo la curva normal standar de z a +∞

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998	.4998
⋮	⋮									
4.0	.4999683									
5.0	.499999713									

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013									
	5									
3.5	.00 233									
4.0	.000 031 7									
4.5	.000 003 4									
5.0	.000 000 287									

Schaum

• La teoría de la probabilidad tuvo sus comienzos a principios del siglo XVII como resultado de investigaciones sobre diversos juegos de azar. De entonces acá han contribuido a su perfeccionamiento muchos matemáticos y científicos célebres; pero a pesar de su larga y activa historia, sólo se axiomatizó durante la tercera y cuarta décadas de este siglo.

• La importancia de la probabilidad ha crecido enormemente en los últimos años, y hoy aparece, junto con su disciplina gemela, la estadística, en casi todos los campos, como la física, la química, la biología, la medicina, la psicología, la sociología, la ciencia política, la educación, la economía, los negocios, la investigación operativa y todas las ramas de la ingeniería.

• Este libro comienza con un capítulo sobre conjuntos y sus operaciones y continúa con uno sobre permutaciones y otras técnicas de contar. Viene luego un capítulo de espacios probabilísticos y otros de probabilidad condicional e independencia. El capítulo quinto, que es el principal, trata sobre variables y aleatorias. Allí definimos la esperenza, varianza, desviación estándar, y probamos la desigualdad de Tchebycheb y la ley de los grandes números. Seguimos con un capítulo aparte sobre las distribuciones binomial, normal y de Poisson. Aquí se da el teorema central del límite en el contexto de la aproximación normal a la distribución binomial. El séptimo y último capítulos ofrecen un desarrollo elemental completo de las cadenas de Markov con aplicaciones.

ISBN 970-10-2179-7

9 789701 021798

McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies