Cecyt 1 "Gonzalo Vázquez Vela"

Instituto Politécnico Nacional

Problemario De Probabilidad y Estadística

Unidad de Aprendizaje:	**Probabilidad y Estadística**		
Departamento:	Unidad de Aprendizaje del Área Básica	Nivel:	6
Academia:	Matemáticas	Turno:	Vespertino

Problemario Elaborado por:	Ing. Carlos José Mendoza Palomeque

Fecha de Elaboración:	Ene 2022
Ultima Revisión:	Ene 2022

Contenido

1. Teoría de Conjuntos

ISC. Claudia García Pérez

La teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, también, es la teoría matemática dónde fundamentar la aritmética y el resto de las teorías matemáticas. Igualmente, es una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados.

Los conjuntos son un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza con características bien definidas de manera que se puedan distinguir todos sus elementos, por ejemplo: el conjunto de días de la semana, el conjunto de las vocales, el conjunto de los números reales, el conjunto de valores que se pueden obtener al lanzar un dado, etc.

Tomando el ejemplo del lanzamiento de un dado, se tiene que este caso es un experimento que tiene como resultado los valores: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si quisiéramos saber cuál es la posibilidad de que aparezca un 1 o un 6 en el dado, estaríamos empleando la probabilidad a este conjunto o experimento. Es por ello, que la teoría de conjuntos es aplicada a la probabilidad.

A continuación, se da a conocer la definición, notación, operaciones, representación geométrica, leyes, etc. de los conjuntos.

DEFINICIÓN

De acuerdo a Spiegel, un conjunto es una colección de objetos llamados miembros o elementos del conjunto. Algunos sinónimos de conjunto son: clase, grupo y colección. Para Marques, un conjunto es un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza con características bien definidas de manera que se puedan distinguir todos sus elementos. A los objetos que lo componen se les llama elementos del conjunto.

NOTACIÓN

Un conjunto se denota con una letra mayúscula A, B, C y el elemento por una letra minúscula a, b.

A los elementos se les encierra entre llaves ({}) y se separan por comas (,).

Ejemplos:

1. El conjunto D cuyos elementos son los números que aparecen al lanzar un dado.
   D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2. El conjunto de días de la semana.
   S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

3. El conjunto de las vocales.
   V = {a, e, i, o, u}

4. El conjunto de los enteros positivos menores que 10.
   P = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

MÉTODOS PARA DEFINICIÓN DE CONJUNTOS

Al definir un conjunto se puede hacer de dos formas:

Método de Extensión o Numeración

En este método se hace un listado de sus elementos, si esto es posible.

Ejemplos:

1. El conjunto de las vocales en el alfabeto.
   V = {a, e, i, o, u}
2. Lanzamiento de un par de dados comunes
   D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. El conjunto de los triángulos en un plano.
   El método de extensión para este caso no se puede utilizar.

Método de Comprensión o Descripción

Se describe alguna propiedad conservada por todos sus miembros y por los no miembros.

Ejemplos:

1. El conjunto de las vocales en el alfabeto.
   V = {x | x es una vocal}
2. El conjunto de los triángulos en un plano
   T = {x | x es un triángulo en un plano}

El conjunto del ejemplo 1 se lee "El conjunto de los elementos x tales que x es una vocal". La línea vertical | se lee "tal que" ó "dado que". Para el ejemplo 2, se lee "El conjunto de los elementos x dado que x es un triángulo en un plano"

TIPOS DE CONJUNTOS

Según la cantidad de elementos que tenga un conjunto, éstos se pueden clasificar de la siguiente manera:

Conjuntos Finitos

Son los que tienen un número conocido de elementos.

Ejemplos:

• El conjunto de números que aparecen al lanzar un dado.

• El conjunto de días de la semana.

• El conjunto de las vocales.

• El conjunto de los enteros positivos menores que 10.

Conjuntos Infinitos

Son lo que tienen un número ilimitado de elementos.

• El conjunto de los números reales

• El conjunto de los números reales entre 2 y 5

Conjunto universal

Es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada.

Ejemplos:

1. Si solo se desea trabajar con los números reales positivos, el conjunto universal será

$$U = R+ = (0, +\infty)$$

2. Si se quiere trabajar con los números que aparecen en un dado, el conjunto universal será

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se puede notar que el conjunto universal no es único, depende de la situación.

Conjunto vacío

Un conjunto que no tiene elementos y se denota por $\emptyset$ ó { }

Ejemplos:

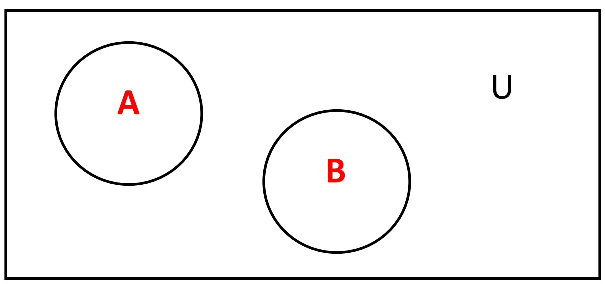
1. El conjunto $A = \{x \in R / x^2 + 1 = 0\}$ es un conjunto vacío porque no hay ningún número real que satisfaga $x^2 + 1 = 0$.

2. El conjunto de los meses del año con 27 días.

DIAGRAMAS DE VENN

Cualquier figura geométrica cerrada (círculos, rectángulos, triángulos, óvalos, etc) sirve para representar gráficamente las operaciones entre conjuntos, estos gráficos son llamados Diagramas de Venn.

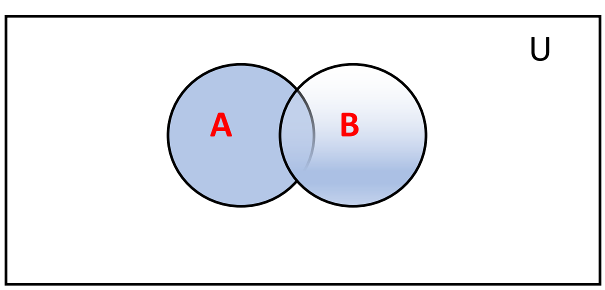
Normalmente, al conjunto universal se le representa con un rectángulo y los conjuntos con un círculo o elipse, tal y como se muestra en la siguiente figura:



OPERACIONES DE CONJUNTOS

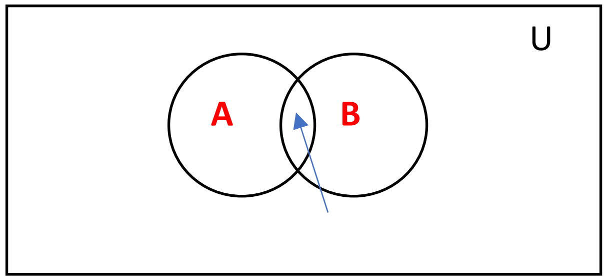
Unión

El conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, o tanto a A como a B, se llama la unión de A y B y se escribe A ∪ B. (Área sombreada).



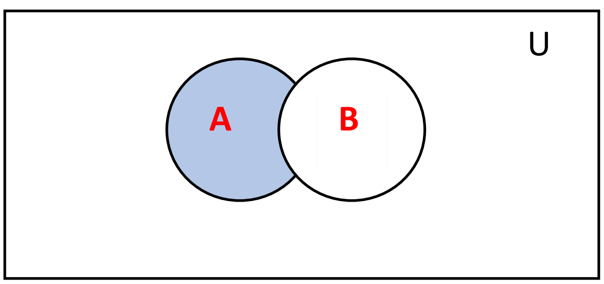
Intersección

El conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B se llama la intersección de A y B y se escribe A ∩ B.



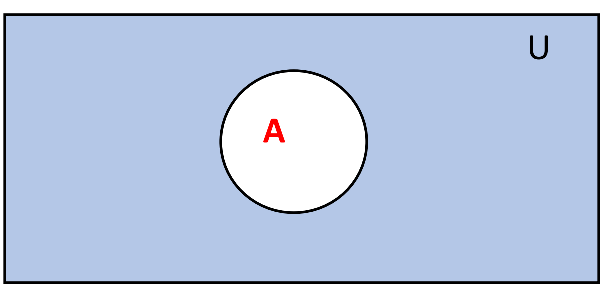
Diferencia

El conjunto que consiste en todos los elementos de A que no pertenecen a B se llama la diferencia de A y B y se escribe A – B. (Área sombreada)



Complemento

Son todos los conjuntos no en A y se escribe A'. (Área sombreada).



Ejemplos de Operaciones de Conjuntos

Sean: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4}

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{7, 8, 9\}$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$
- $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \{7\}$
- $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- $B' = \{1, 2, 8, 9\}$
- $C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A - B = \{1, 2\}$
- $B - A = \{5, 6, 7\}$
- $A - C = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C - A = \{7, 8, 9\}$
- $B - C = \{3, 4, 5, 6\}$
- $C - B = \{8, 9\}$
- $(A \cup B)' = \{8, 9\}$

LEYES DE CONJUNTOS

Ley conmutativa

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Ley asociativa

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

Ley distributiva

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

EVENTOS

La teoría de conjuntos es aplicada a la probabilidad con algunas modificaciones en su terminología: al universo se le llama espacio muestral; a los subconjuntos, eventos; y a los puntos en el conjunto, eventos simples o sucesos.

Algunas definiciones propias de los eventos son:

• Experimento: es un conjunto de pruebas o la realización de un proceso que conducen a un resultado y observación del cual no se está seguro. Por ejemplo: el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, etc.

• Espacio muestral: para un experimento, es el conjunto de todos los resultados experimentales, esto es, cuando se haya especificado todos los resultados posibles, se habrá identificado el espacio muestral del experimento. Un resultado experimental también se conoce como punto muestral para identificarlo como elemento del espacio muestral. Ejemplo: Para el experimento de lanzar una moneda, el espacio muestral es sol y águila. Para el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral es 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

• Eventos: son los resultados posibles que presentan una condición dada al realizar un experimento. Cada resultado posible lo constituye el elemento o suceso.

2. Técnicas de conteo

En el cálculo de las probabilidades se debe poder determinar el número de veces que ocurre un evento o suceso determinado. Es muchas situaciones de importancia práctica es imposible contar físicamente el número de ocurrencias de un evento o enumérelos uno a uno se vuelve un procedimiento engorroso. Cuando se está frente a esta situación es muy útil disponer de un método corto, rápido y eficaz para contar.

A continuación, se presentan algunas de estas técnicas, denominadas técnicas de conteo o análisis combinatorio, entre las cuales se tienen: el principio fundamental del conteo, permutaciones, variaciones, combinaciones, la regla del exponente y el diagrama de árbol.

2.1 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

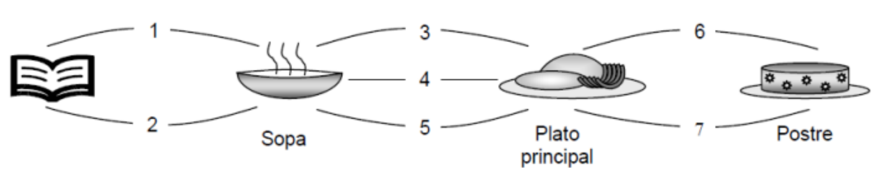
En la teoría fundamental del conteo se tienen dos principios básicos, que son la base para desarrollar otros conceptos como permutaciones y combinaciones que se verán más adelante.

Principio de multiplicación o multiplicativo

Algunos problemas de probabilidad pueden resolverse aplicando este principio. Suponga que una persona desea preparar un almuerzo para sus amigos y tiene dos recetas para la sopa, tres para el plato principal y dos para el postre. ¿De cuántas maneras puede el anfitrión hacer su menú? En la figura 5 se señalan todas las maneras posibles para preparar el almuerzo.

Figura 2.5

Diagrama de las posibles opciones para preparar un menú



Las alternativas que tendrá son:

{1,3,6} {1,3,7} {1,4,6} {1,4,7} {1,5,6} {1,5,7}

{2,3,6} {2,3,7} {2,4,6} {2,4,7} {2,5,6} {2,5,7}

En total se tienen 12 maneras diferentes de preparar un delicioso almuerzo.

Aplicando el principio de multiplicación se tiene: 2 x 3 x 2 = 12

Generalizando, si un evento determinado puede realizarse de n_1 maneras diferentes, y si un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes, y si, además, un tercer evento puede realizarse de n_3 maneras diferentes y así sucesivamente, y si al mismo tiempo cada evento es independiente del otro, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto:

$$n1 * n2 * n3 * \ldots$$

Principio aditivo

Este principio tiene las mismas premisas del principio multiplicativo, pero con la condición no de que los eventos sean independientes sino de que sean mutuamente excluyentes, es decir que cada uno ocurra sin la necesidad de que otro lo haga. El número total de maneras en las que pueden realizarse los eventos es la adición:

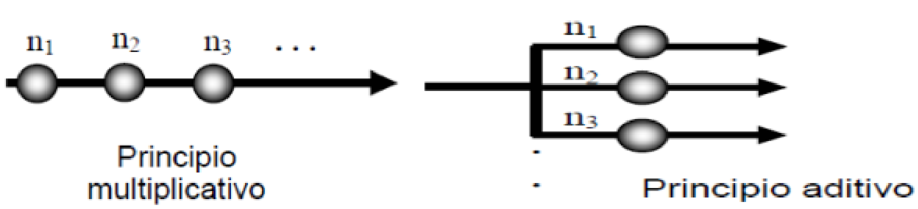
$$n1 + n2 + n3 + \cdots$$

Suponga, ahora, que la persona que prepara el menú para sus amigos preparará pescado como plato principal. Para preparar el pescado, él encuentra cinco maneras diferentes de hacerlo al horno, dos para hacerlo frito y tres para prepararlo cocido. ¿De cuántas maneras diferentes puede cocinar su pescado?

Cada una de las maneras de preparar el pescado es excluyente de las otras dos.

Es decir, si el cocinero decide preparar el pescado cocido, ya no podrá prepararlo ni frito ni al horno; de igual manera sucede si decide hacerlo al horno o frito. Así que en total, y de acuerdo con el principio aditivo, sólo hay 5+2+3=10 maneras diferentes de cocinar el pescado.

Figura 2.6
Esquema de interpretación de los principios multiplicativo y aditivo



El esquema de la figura 2.6 ilustra una interpretación sencilla de ambos principios. Más adelante se desarrollan los conceptos de eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes, pero ya inicia un primer acercamiento a ellos.

2.2: FACTORIAL DE UN NÚMERO

En el análisis combinatorio interviene con mucha frecuencia el concepto de factorial de un entero no negativo n. Este se denota por el símbolo n! y se define como el producto de n por todos los enteros que le preceden hasta llegar al uno.

Simbólicamente queda expresado como:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 \qquad n \geq 1$$

La excepción es el caso de 0! El cual conviene definirlo como igual a 1 con objeto de preservar la validez de las fórmulas en casos extremos. Muchas calculadoras traen una tecla factorial.

EJEMPLO 2.7

Calcule:

a) 6!=
b) 15!=
c) 0!+5!=
d) $\frac{13!}{11!} =$
e) $\frac{7!}{10!} =$

2.3 PERMUTACIONES Y VARIACIONES

Considere un conjunto de elementos S = {a,b,c}. Una permutación de los elementos es un acomodo u ORDENAMIENTO de ellos. Así:

abc acb bac bca cab cba

Son las permutaciones de los elementos del conjunto S y son en total 6 posibles acomodos. Esto es: 3! = 3* 2*1 = 6

El número de permutaciones (acomodos u ordenaciones) de n elementos distintos, tomados todos de una vez, se denota por n!.

Una ordenación de un número “r” de elementos del conjunto de “n” elementos, r ≤ n, es denominada variación. Son permutaciones en las que implica un orden en la colocación de los elementos, tomando únicamente una parte de los elementos.

Una variación puede construirse seleccionando el elemento que será colocado en la primera posición del arreglo de entre los n elementos, para luego seleccionar el elemento de la segunda posición de entre los n-1 elementos restantes, para seleccionar después el tercer elemento de entre los n-2 restantes, y así sucesivamente. Se trata pues de una permutación de “n” elementos tomando “r” a la vez.

El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez se denota y se define como:

$$_nP_r = P_r^n = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observe que en el caso especial de r=n, se tiene: n!

En el siguiente ejemplo se hará un análisis básico y didáctico para comprender fácilmente el uso adecuado de las permutaciones y las variaciones.

Ejemplo

Suponga que se tienen los números 3,5,6,7. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con dichos números, sin repetir ninguno?

Supóngase que en las siguientes casillas se ubicarán las bases.

En la primera casilla se puede ubicar uno de los cuatro números, cualquiera de ellos. De modo que se tienen 4 formas de llenar esta casilla. Independiente del número elegido para la primera casilla, quedan tres no seleccionados, pues se ha aclarado que no se puede repetir ningún número. De modo que la segunda casilla podrá llenarse de 3 maneras diferentes. La tercera casilla se puede llenar de 2 maneras diferentes. Una vez llenada la tercera casilla, queda un solo número que deberá ser ubicado en la cuarta casilla. De modo que el total de formas diferentes de llenar estas cuatro casillas es:

4	3	2	1

= 4*3*2*1=4! = 24

Haciendo uso de los conceptos hasta ahora estudiados, se trata de conocer el número de permutaciones de 4 elementos distintos, tomados todos de una vez.

Así: 4!= 4*3*2*1 = 24

Bien, ahora, con los mismos números ¿Cuántos números de dos dígitos podemos formar?

Se tienen ahora las siguientes casillas:

En la primera casilla se puede ubicar uno de los cuatro números, cualquiera de ellos. De modo que se tienen 4 formas de llenar esta casilla. Independiente del número elegido para la primera casilla, quedan tres no seleccionados. De modo que la segunda casilla podrá llenarse de 3 maneras diferentes. Así, el total de formas diferentes de llenar estas cuatro casillas es:

4	3

4*3 = 12

Se trata de un problema tipo variación, en donde se pide el número de permutaciones de 4 elementos distintos tomados 2 a la vez.

$$ {}_4P_2 = P_2^4 = P(4,2) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4*3*\cancel{2*1}}{\cancel{2*1}} = 4*3 = 12 $$

Cuando uno o varios elementos están repetidos, el cálculo de las permutaciones varía; en este caso se habla de permutaciones con repetición. El número de permutaciones de n objetos de los cuales n1 son iguales, n2 son iguales, …, nr son iguales, es:

$$ P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots n_r!} $$

Ejemplo 2.8

Calcular el número de acomodos distintos de la palabra CASA.

Para la palabra CASA se tendrían un número inferior a 24 acomodos distintos.

Debe tenerse en cuenta la repetición de la letra A. Debe aplicarse:

$$ \frac{4!}{2!} = \frac{4*3*\cancel{2*1}}{\cancel{2*1}} = 4*3 = 12 $$

Ahora bien, ¿de cuántas maneras distintas se puede ordenar la palabra CASAS?

$$ \frac{5!}{1!\,2!\,2!} = \frac{5*4*3*\cancel{2*1}}{1*2*1*\cancel{2*1}} = \frac{60}{2} = 30 $$

2.4 COMBINACIONES

Suponga que tiene un conjunto de n elementos. Una combinación de ellos, tomados r a la vez, es un subconjunto de r elementos donde el orden no se tiene en cuenta. El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez, r £ n , ..sin tener en cuenta el orden, es:

$$ {}_nC_r = C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

Sea el conjunto S = {a,b,c,d}, si se desea combinar los cuatro elementos a la vez, ¿cuántas combinaciones se podrán hacer?

Una sola combinación, ya que al no importar el orden de colocación da lo mismo cualquiera de ellas. Compruébelo usando la fórmula.

· Si se desean combinar esas cuatro letras en subconjuntos de dos elementos, ¿Cuántas combinaciones se podrán hacer?

Las combinaciones posibles tomadas dos a la vez son:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Observe que el subconjunto compuesto de los elementos a y b puede ser {a, b} o {b, a}, pues en una combinación no se tiene en cuenta el orden. El número de posibles combinaciones es:

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6 $$

El uso de combinaciones es más usual cuando se trata de contar las posibilidades de ordenar un conjunto de elementos independientemente de su colocación o posición. En el siguiente ejemplo se verá su uso más común, en donde no importa quién o qué es tomado de primero, o en qué orden específico es tomado, de un subconjunto de elementos determinado.

EJEMPLO

En una asamblea de socios de una importante empresa del país, compuesta de 7 hombres y 5 mujeres, se acuerda conformar una comisión de verificación de actividades comerciales en la región. Esta comisión debe estar compuesta por 3 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas maneras puede escogerse dicha comisión?

De los 7 hombres pueden seleccionarse 3. Esto es:

$$ {}_7C_3 = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = 35 $$

De las 5 mujeres pueden seleccionarse 2.

$$ {}_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = 10 $$

Esto es: Por consiguiente, la comisión puede escogerse de $35 \times 10 = 350$ maneras diferentes.

2.5 REGLA DEL EXPONENTE

Se trata de un tipo de combinación o arreglo ordenado en donde siempre hay reemplazo del elemento que se toma.

Si se tienen un conjunto de N elementos y se construye con estos elementos un conjunto de n elementos, con la condición de que cada vez que se tome un elemento del conjunto de N elementos este sea nuevamente reemplazado, entonces el número de posibles arreglos o acomodos del conjunto de n elementos es:

$$ N^n $$

El siguiente ejemplo explica de una manera didáctica el cálculo del número de posibles arreglos haciendo uso de la regla del exponente.

Ejemplo

¿Cuántos casos posibles existen al lanzar una moneda en 5 lanzamientos?

En el lanzamiento de una moneda se tienen dos posibilidades: águila o sol. El número de casos posibles estará dado por el número de posibilidades (2, en este caso) con exponente igual al número de lanzamientos:

· En un lanzamiento: $2^1 = 2$ casos posibles

· En dos lanzamientos: $2^2 = 4$ casos posibles

· En tres lanzamientos: $2^3 = 8$ casos posibles

De modo que, para cinco lanzamientos, hay $2^5 = 32$ casos posibles

EJERCICIOS

1. Usando una calculadora, calcular las siguientes permutaciones y demostrar su desarrollo:

   a. 8P3
   b. 6P4
   c. 15P1
   d. 3P3

2. Suponga que una persona que vive en el municipio de Bello (Antioquia) trabaja en el centro de la ciudad de Medellín. Para llegar a su sitio de trabajo, este tiene tres rutas distintas para llegar a la Autopista y de allí puede tomar otras tres rutas para llegar al centro de la ciudad. En el centro, puede tomar cuatro rutas para llegar al parqueadero más cercano a su oficina. ¿De cuántas maneras o rutas distintas podría tomar la persona para llegar de la casa al parqueadero más próximo a su oficina?

3. En un restaurante en el centro de la ciudad ofrecen almuerzos ejecutivos con las siguientes opciones: tres tipos diferentes de sopa, cuatro tipos de carne con la bandeja, cuatro bebidas a escoger y dos tipos de postre. ¿De cuántas maneras puede un comensal elegir su menú que consista de una sopa, una carne para su bandeja, una bebida y un postre?

4. Si un futbolista conoce 7 jugadas diferentes y si el entrenador le instruye para que juegue las 7 sin que ninguna se repita, ¿qué libertad le queda a ese jugador?

5. ¿Cuántas permutaciones pueden efectuarse con el conjunto S={a,b,c,d}? Describa cada una de las permutaciones posibles.

6. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse con las letras de la palabra PROBABILIDAD?

7. Dados los siguientes seis números: 2, 3, 5, 6, 7, 9; y si no se permiten repeticiones, resuelva:
a. ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con estos seis dígitos?
b. ¿Cuántos de estos son menores de 400?
c. ¿Cuántos son pares?
d. ¿Cuántos son impares?
e. ¿Cuántos son múltiplos de cinco?

8. Una tarjeta de circuito impreso tiene ocho posiciones diferentes en las que puede colocarse un componente. Si se van a colocar cuatro componentes distintos sobre la tarjeta, ¿cuál es el número de diseños diferentes posible?

9. En una pizzería se anuncia que ofrecen más de 500 variedades distintas de pizza. Un cliente puede ordenar una pizza con una combinación de uno o más de los siguientes nueve ingredientes: jamón, champiñones, piña, pimentón, salchicha, cebolla, peperoni, salami y aceitunas. ¿Es cierto lo que afirma su publicidad?

10. El itinerario de un recorrido turístico por Europa incluye cuatro sitios de visita que deben seleccionarse entre diez ciudades. ¿En cuántas formas diferentes puede planearse este recorrido si:
a. Es importante el orden de las visitas?
b. No importa el orden de las visitas?

11. El muy conocido BALOTO electrónico es un juego de azar que consiste en acertar en 6 números de 45 posibles para ganar el premio mayor. Calcule cuántos boletos de juego debe usted comprar para asegurar que tendrá el boleto ganador. La empresa del BALOTO asegura también que usted puede ganar un monto determinado si acierta 3, 4 o 5 veces, calcule también cuántos boletos debe comprar para asegurar 3, 4 y 5 aciertos. ¿Todavía cree en el BALOTO?

12. En una sala de espera se encuentran 5 personas: 3 hombres y 2 mujeres.
a. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila?
b. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila si los hombres se sientan juntos y las mujeres también?
c. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila si justamente las mujeres se sientan juntas?
d. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una mesa redonda?

13. En una urna se tienen 10 bolitas: 5 rojas, 3 blancas y 2 azules. Si se toman 3 con reemplazo, ¿de cuántas maneras se pueden sacar las tres bolitas de modo que todas sean del mismo color?

14. Una prueba de opción múltiple consta de 15 preguntas y cada una tiene tres alternativas, de las cuales sólo debe marcar una. ¿En cuántas formas diferentes puede marcar un estudiante su respuesta a estas preguntas?

15. ¿Cuántas placas vehiculares se pueden elaborar en Colombia? Recuerde que éstas constan de tres letras del alfabeto y tres dígitos. Tome 26 letras del alfabeto.

16. ¿Cuántas formas hay de seleccionar 3 candidatos de un total de 8 recién egresados y con las mismas capacidades para ocupar vacantes en una empresa?

17. En un estudio realizado en California, se concluyó que al seguir 7 reglas sencillas de salud la vida de un hombre puede alargarse, en promedio 11 años. Las 7 reglas son no fumar, hacer ejercicio regularmente, tomar alcohol solo en forma moderada, dormir 7 horas, conservar un peso apropiado, desayunar y no comer entre alimentos. En cuantas formas puede una persona adoptar 5 de estas reglas, a. si actualmente las viola todas; b. Si nunca toma bebidas alcohólicas y siempre desayuna.

18. Un Testigo de un accidente de tránsito en el que el causante huyó le indica al policía que el número de matrícula tenía las letras RHL seguida por tres dígitos el primero de los cuales era cinco, el testigo no puede recordar los otros dos, pero está seguro que los tres números eran diferentes, encuentre el número máximo de registros que debe verificar la policía

19. Seis alumnos de último año de bachillerato participan en un concurso de ensayo literario. No puede haber empates. a. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles? b. ¿Cuántos grupos de primero, segundo y tercer puesto puede haber?

20. Un psicólogo tiene 14 pacientes entre los cuales debe seleccionar nueve para un experimento en grupo. ¿Cuántos grupos de nueve se puede hacer?

21. Supóngase que hay 6 partes diferentes para ser almacenadas, pero solamente, hay 4 cajas disponibles. ¿Cuántas permutaciones son posibles?

22. Un fabricante de llantas hace 10 tipos de neumáticos para diferentes tamaños y quiere preparar una partida que contenga 6 tipos de llantas. ¿Cuántas combinaciones de llantas están disponibles?

23. Un grupo de tres inspectores va a inspeccionar las actividades de una industria contaminante. El grupo se va a formar seleccionando los tres agentes de un grupo de 5. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar siguiendo un orden definido? ¿Siguiendo un orden indefinido?

24. Un fabricante de llantas hace 10 tipos de neumáticos para diferentes tamaños y quiere preparar una partida que contenga 6 tipos de llantas. ¿Cuántas combinaciones de llantas están disponibles?

25. ¿De cuántas maneras puede la Sociedad Química Mexicana seleccionar a 3 conferencistas para 3 conferencias diferentes, si hay únicamente 5 fechas disponibles?

3. Probabilidad Clásica

Por

Fanny Zapata

La probabilidad clásica es un caso particular del cálculo de la probabilidad de un evento. Se define como el cociente entre los eventos favorables a dicho evento y el total de eventos posibles, con la condición de que cada uno de estos eventos sean todos igualmente probables. A la probabilidad clásica también se la conoce como probabilidad a priori o probabilidad teórica.

$$P(E) = \frac{Eventos\ Favorables}{Eventos\ Posibles}$$

El primer libro acerca de las probabilidades se debe al astrónomo holandés Christian Huygens quién lo llamó Razonamientos relativos al juego de dados. Como vemos, la probabilidad clásica tiene sus orígenes en los juegos de azar.

El dado tiene una larga historia, se trata de una pieza cúbica cuyas caras están numeradas con puntos del uno al seis. Al lanzar una sola vez un dado honesto: ¿cuál es la probabilidad de que salga, digamos, un cinco?

Es muy sencillo: hay una sola cara entre las 6 marcada con cinco puntos, por lo tanto, la probabilidad P es:

P = 1/6

Cálculo en probabilidad clásica

Esta forma de calcular la probabilidad de un evento es una aplicación de la regla de Laplace, enunciada inicialmente en 1812 por el matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827).

Sea A un evento del cual queremos conocer su probabilidad de ocurrencia P(A), entonces:

P(A) = número de casos favorables al evento A / número de casos posibles

El resultado de esta operación es siempre un número positivo entre 0 y 1. Si un evento tiene probabilidad 0 de ocurrir significa que no pasará.

En cambio, si la probabilidad de ocurrencia es igual a 1, quiere decir que sucederá de cualquier forma y en todo caso, la probabilidad de que un suceso ocurra, sumada con la probabilidad de que no ocurra, es igual a 1:

$P(A)+P(A^c)=1$

Evidentemente, en un dado legal, cualquiera de las 6 caras tiene la misma probabilidad de salir, por lo tanto, la probabilidad de obtener una cara con 5 debe ser 1/6.

Un detalle importante es el siguiente: para aplicar la regla de Laplace el número de casos posibles tiene que ser finito, es decir, debemos poder contarlos y obtener un número natural.

En el ejemplo del dado hay 6 casos posibles y un solo evento favorable. Al conjunto de casos posibles se le denomina espacio muestral.

Al aplicar la regla de Laplace es conveniente analizar cuidadosamente el espacio muestral, incluyendo todos los sucesos posibles, es decir, que debe estar completo y ordenado, para que ningún suceso escape de ser contabilizado.

El espacio muestral y los eventos

El espacio muestral suele denotarse mediante la letra S o la letra griega Ω (omega mayúscula) y fue un concepto introducido por Galileo.

Un jugador de dados le preguntó al sabio por qué es más difícil obtener un 9 lanzando tres dados que un 10, entonces Galileo calculó las formas posibles de obtener un 9, y luego hizo lo mismo con el 10. Por último, calculó las respectivas probabilidades, encontrando que, en efecto, $P(9) < P(10)$.

Espacio muestral con pocos elementos

Si el espacio muestral consta de pocos elementos, estos se listan como un conjunto. Por ejemplo, supongamos que se quiere encontrar la probabilidad de que, en una familia con dos hijos, ambos sean del mismo sexo.

Podemos aplicar la probabilidad clásica determinando correctamente el espacio muestral. Si M = mujer y H = hombre, el espacio muestral de los hijos es:

$S = \{(M,M), (H,H), (M,H), (H,M)\}$

Cada elemento del espacio muestral es un evento, por ejemplo, el evento (M,M) significa que los dos hijos de esta familia son mujeres.

Teniendo el espacio muestral, calcular la probabilidad pedida es muy sencillo, ya que hay solo 2 casos favorables entre 4, para que ambos hijos sean del mismo sexo: (M,M) y (H,H), por lo tanto:

P (ambos hijos del mismo sexo) = 2/4 = 0.5

Espacio muestral con muchos elementos

Cuando el espacio muestral consta de muchos elementos, es mejor dar una regla general para encontrarlo. Por ejemplo, si t es el tiempo de vida útil de un equipo, el espacio muestral es:

$S = \{t / t \geq 0\}$

Que se lee así: “todos los valores de t tales que t sea mayor o igual a 0”. Un evento de este espacio podría ser que el aparato tenga una vida útil de t = 2 años.

Ejemplos de probabilidad clásica

La probabilidad clásica se aplica siempre que se cumplan las dos premisas señaladas anteriormente, es decir:

-Todos los eventos son igualmente probables.

-El espacio muestral es finito.

Por lo tanto, hay situaciones en las cuales la probabilidad clásica no se puede aplicar, como por ejemplo cuando se quiere anticipar si un tratamiento nuevo curará una determinada enfermedad, o la probabilidad de que una máquina produzca artículos defectuosos.

En cambio, sí se puede aplicar con éxito en los siguientes casos:

Lanzamiento de un dado

La probabilidad clásica surge del interés de las personas por los juegos de azar. Fuente: Pixabay.

Como hemos visto, la probabilidad de que salga determinada cara es igual a 1/6.

Extraer una carta de un mazo

Tenemos un mazo de 52 cartas de una baraja francesa, que consta de cuatro palos: corazones, tréboles, diamantes y picas. Entonces la probabilidad de extraer un corazón, sabiendo que hay 13 cartas de cada palo es:

P (corazón) = 13/52

Lanzamiento de una moneda

Se trata de un ejemplo típico de probabilidad clásica, ya que al lanzar una moneda siempre se tiene una probabilidad igual a ½ de obtener cara o sello.

Extraer canicas de colores de una bolsa

Dentro de una bolsa puede haber N canicas de colores, por ejemplo, hay R canicas rojas, A canicas azules y V canicas verdes. La probabilidad de extraer una roja es:

P(R) = R / N

– Ejercicios

1. Entre 7 personas se reparten 5 cartas cada uno, el objetivo del juego es quien obtiene la combinación más alta de cartas, entonces, ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada uno de ganar la ronda?

2. Un hombre ha pensado un número entre 1 y 15, si este hombre le pide a su amigo que adivine en que número pensó, ¿Cuál es la probabilidad de que su amigo adivine el número en el primer intento?

3. Se lanza una vez un dado honesto. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Sacar un número impar.

b) Que salga un 2 o un 5.

c) Sacar un valor menor que 4.

d) Obtener un valor menor o igual que 4.

e) Sacar un valor diferente de 3

4. En una caja hay una pelota azul, una verde, una roja, una amarilla y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar con los ojos cerrados una pelota de la caja, esta sea amarilla?

5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado, el resultado obtenido sea igual a 5?

6. En un salón de clases hay 8 niños y 8 niñas. Si la maestra escoge al azar un estudiante de su salón, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido sea una niña?

7. Una persona tiene la oportunidad de ganar $100, $200, $500, $800 o $1 000 dólares al girar una ruleta donde están las cantidades que puede ganar, el problema está en que esta persona quiere comprarse un nuevo teléfono y para ello, necesita por lo menos $400, entonces ¿Cuál es la probabilidad que le toque una cantidad que sea suficiente para comprarse su nuevo teléfono?

8. En un grupo de 100 personas se rifará un total de 5 premios, si entre las 100 personas hay un grupo de 7 amigos, ¿Cuál es la probabilidad de que alguno del grupo de amigos se lleve alguno de los 5 premios?

9. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a 4, al lanzar un dado?

10. Encuentre la probabilidad de extraer un As de una baraja inglesa.

11. ¿Cuál es la probabilidad de al sacar una carta de una baraja inglesa, está carta tenga un símbolo rojo?

12. Juan, Luis y Arturo participan constantemente en una carrera para ver quién es el más rápido de los 3. Normalmente Juan gana el doble de carreras que Arturo y Luis gana el triple de eventos que Arturo. ¿Cuál es la probabilidad de ganar la siguiente carrera de cada uno?

13. Tres pescadores compiten a ver quien obtiene el pez más grande. A gana la competencia 3 veces más que B y B obtiene el doble de triunfos que C. En la próxima pesca, ¿cuál es la probabilidad de ganar de cada uno de ellos?

4. Probabilidad con técnicas de Conteo

Considerando sólo espacios muestrales finitos, se simboliza por $\eta(S) \neq 0$ la cantidad de elementos del espacio muestral y por $\eta(E)$ a la cantidad de elementos de algún evento E. Considerando que los elementos del espacio muestral son equiprobables, la probabilidad de uno (cualesquiera de ellos) es $1/\eta(S)$ y, de acuerdo a la corriente clásica de probabilidad, se tiene que la probabilidad del evento es

$$P(E) = \eta(E) * \frac{1}{\eta(S)} = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} \qquad \eta(S) \neq 0 \quad y \quad E \subset S$$

Cabe mencionar que esta probabilidad cumple con los tres axiomas de probabilidad de Kolmogorov.

En los siguientes ejemplos se muestra el procedimiento de solución

1. Se define el experimento del que se habla en el problema.

2. Se encuentra el espacio muestral del experimento.

3. Se define y encuentra al evento correspondiente.

Finalmente, se calcula la probabilidad.

Ejemplo 1

Una urna contiene trece esferas numeradas del uno al trece, de las cuales tres son rojas, cuatro blancas y seis azules. Si se toman dos esferas, calcula la probabilidad de que una y sólo una de ellas sea roja.

$$P(R) = P(R,B) + P(R,A)$$

$$P(R) = \frac{{}_3C_1 *_4 C_1 + {}_3C_1 *_6 C_1}{{}_{13}C_2} = \frac{12+18}{78} = \frac{30}{78} = \frac{5}{13} = 0.3846$$

Ejemplo 2

Si se sientan en línea recta siete hombres y cuatro mujeres aleatoriamente, se calcula la probabilidad de que

a) todas las mujeres se sienten en los primeros cuatro lugares

Formas totales de que se sienten: S = 11! = 39 916 800

Formas en que las mujeres se siente en los primeros cuatro lugares: E= 4!*7!= 120 960

$$P(E) = \frac{E}{S} = \frac{120\,960}{39\,916\,800} = \frac{1}{330} = 0.0030$$

b) todas las mujeres se sienten siempre en lugares contiguos

Formas totales de que se sienten: S = 11! = 39 916 800

Formas en que las mujeres se siente en los primeros cuatro lugares: E= 4!*8!= 967 680

$$P(E) = \frac{E}{S} = \frac{967\,680}{39\,916\,800} = \frac{4}{165} = 0.0242$$

Ejercicios

1. En una tienda se tienen cien artículos de los cuales 90 son buenos y diez defectuosos. Calcula la probabilidad de que en los siguientes diez artículos que se vendan se encuentre

a) uno y sólo uno defectuoso

b) ninguno defectuoso

2. Una urna contiene 20 canicas iguales en forma y tamaño, numeradas del uno al 20, de las cuales ocho son verdes, seis azules, cuatro rojas y dos blancas. Si se toman tres canicas de la urna sin reemplazo (al azar), calcula a) la probabilidad de que las tres canicas sean verdes b) la probabilidad de que al menos una sea verde

3. Calcula la probabilidad de que el día de cumpleaños de doce personas se presente en diferentes meses del año.

4. Se escriben en forma aleatoria tres números entre 0 y 9. Calcula la probabilidad de que a) los tres sean iguales b) entre los tres se encuentren dos iguales

5. En un componente electrónico existen 20 placas de tres tipos diferentes, ocho del tipo I, cinco del tipo II y siete del tipo III. Se seleccionan al azar cinco placas para inspeccionarlas,

calcula la probabilidad de a) que las cinco placas sean del mismo tipo b) que dos sean del tipo I, una del tipo II y dos del tipo III

6. Una urna tiene 8 bolas rojas, 5 amarilla y 7 verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de que:
   a) Sea roja.
   b) No sea verde.

7. Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas;
   a. Si se hacen dos extracciones, encontrar la probabilidad de extraer dos bolas rojas.
   b. Si se hacen dos extracciones, encontrar la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda blanca.
   c. Si se hacen tres extracciones, encontrar la probabilidad de extraer una roja y dos blancas.
   d. Si se hacen tres extracciones, encontrar la probabilidad de extraer dos rojas y una blanca.

5. Probabilidad, Eventos Excluyentes y no Excluyentes

La definición de eventos mutuamente excluyentes se puede dar de distintas formas. Para comenzar, se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos si la ocurrencia de cualquiera de los dos excluye la posibilidad de que suceda el otro. Esto quiere decir que son eventos que no pueden ocurrir simultáneamente. Por ejemplo, al lanzar un dado una sola vez, el resultado de caer en cualquiera de las seis caras excluye que caiga en cualquiera de las otras cinco. Así, el evento en el que cae 4 y el evento en el que cae, por ejemplo, 3, son mutuamente excluyentes, ya que el dado no puede caer en 4 y 3 al mismo tiempo.

Por otro lado, en el campo de la probabilidad se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes siempre que no compartan resultados entre sí. Esto viene del hecho de que, en probabilidad, se considera un evento como un conjunto de posibles resultados de un experimento. Se pueden definir distintos eventos que compartan o no resultados, y aquellos que no compartan resultados son los que se consideran como mutuamente excluyentes.

En términos matemáticos más formales, y utilizando la notación de la teoría de conjuntos, los eventos A y B serán mutuamente excluyentes si su intersección es el conjunto vacío, es decir, no se interceptan. Dicho de otra forma, A y B serán mutuamente excluyentes siempre que $A \cap B = \emptyset$.

¿Cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes?

En los casos en los que la lógica no nos diga de antemano si dos eventos son mutuamente excluyentes, la teoría de conjuntos y la probabilidad nos proporcionan la solución. A continuación, se presentan tres formas fáciles de determinar, sin lugar a dudas, cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos.

Observando los elementos en cada conjunto

Cuando dos eventos contienen un conjunto finito y pequeño de elementos, resulta muy sencillo determinar si son o no disjuntos, simplemente verificando si contienen o no elementos en común.

Ejemplo

Consideremos, por ejemplo, el experimento de lanzar dos dados simultáneamente. Ahora definamos los siguientes dos eventos:

Sea A el evento en el que la suma de los dos dados sea mayor o igual a 10.

Sea B el evento en el que la suma de los dos dados sea exactamente igual a 8.

Es fácil determinar cuáles resultados están incluidos en cada evento. En el primero, solo los resultados (5,5); (5,6) y (6,6) dan como resultado una suma mayor o igual que 10. Por otro lado, solo los resultados (4,4); (5,3) y (6,2) dan como resultado 8. Así que ahora se puede escribir, utilizando la simbología de la teoría de conjuntos:

$$A = \{(5,5), (5,6), (6,6)\}$$

$$B = \{(4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

Como no hay elementos comunes, la intersección es el conjunto vacío y, por lo tanto, los eventos son mutuamente excluyentes.

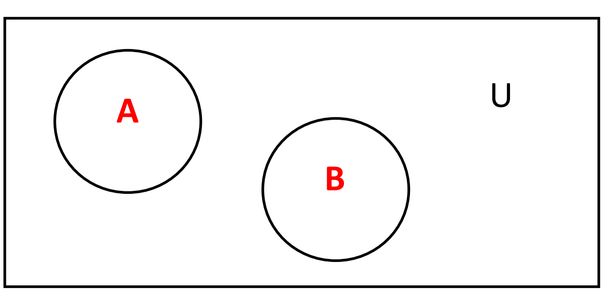
La probabilidad de que ocurra el evento A o que ocurra el evento B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Utilizando diagramas de Venn

Otra manera muy sencilla de determinar si dos eventos son mutuamente excluyentes es al representarlos en un diagrama de Venn. En estos diagramas, se representa el espacio muestral por medio de un rectángulo (u otra figura), mientras que todos los eventos se representan como áreas internas del mismo.

En un diagrama de Venn, los eventos mutuamente excluyentes se reconocen fácilmente, ya que son aquellas áreas dentro del rectángulo que no se tocan ni se solapan.



Por la probabilidad de unión

En algunos casos, los dos métodos anteriores no se pueden aplicar. Una forma alternativa de verificar si dos eventos son o no mutuamente excluyentes es a través de la probabilidad. Si se conocen las probabilidades individuales de cada evento, esto es, P(A) y P(B), así como la probabilidad de que ocurra uno u otro evento, o sea, P(A U B), entonces sabremos que dos eventos son disjuntos si se cumple que:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

Una forma alternativa es a través de la probabilidad de intersección. Dos eventos serán mutuamente excluyentes siempre que P(A ∩ B) = 0.

Los eventos simples siempre son mutuamente excluyentes.

Los eventos simples son aquellos que contienen un solo resultado. Al lanzar un dado de seis caras, el evento de que salga 6 es un evento simple, porque está conformado únicamente por el resultado 6. En cambio, el evento de que salga par no es simple, ya que está conformado por tres resultados, que son 2, 4 y 6.

Imaginemos un experimento en el que se sacan al azar dos cartas de un mazo de 52 cartas de póquer. Ahora definamos los siguientes eventos:

A = se sacan solo pintas rojas.

B = se sacan solo pintas negras.

Estos eventos son mutuamente excluyentes, ya que, si las cartas son ambas rojas, no pueden ser ambas negras y viceversa.

Ejemplos de eventos que no son mutuamente excluyentes

Lanzamiento de tres dados simultáneamente

Definamos los siguientes eventos:

A = evento en el que todos los dados son iguales = {(1,1,1); (2,2,2); (3,3,3);…}

B = evento en el que todos los dados son pares = { (2,2,2); (2,2,4); (2,2,6)…}

Al comparar los elementos dentro de A y B, es fácil darse cuenta que habrá coincidencias, y que la intersección de A y B será:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{(2,2,2);\ (4,4,4);\ (6,6,6)\} \neq \emptyset$$

Como la intersección no es el conjunto vacío, entonces estos eventos no son disjuntos.

Repitiendo el mismo experimento de retirar dos cartas de un mazo, consideremos los siguientes nuevos eventos:

A = al menos una carta es de corazones.

B = al menos una carta es un rey.

En este caso, siempre que salga un rey de corazones estarán ocurriendo A y B al mismo tiempo. De hecho, éste no es el único resultado con el que sucede, ya que, si sale un rey de espadas y un as de corazones, también estarán ocurriendo A y B simultáneamente. Por lo tanto, A y B no son eventos mutuamente excluyentes.

En matemáticas, el cálculo de la probabilidad de múltiples eventos depende en grado sumo de si son o no mutuamente excluyentes. Por ejemplo, uno de los axiomas de la probabilidad establece que la probabilidad de unión de varios eventos es igual a la suma de la probabilidad individual de cada evento si, y solo si, todos los eventos son mutuamente excluyentes. En otras palabras,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Solo si A y B son eventos disjuntos o mutuamente excluyentes.

Si no son mutuamente excluyentes, entonces la suma de las probabilidades cuenta dos veces la probabilidad de los resultados comunes a ambos eventos, i.e. la probabilidad de la intersección. Por esta razón, en estos casos, la probabilidad de unión se calcula de una manera distinta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para tres eventos, A, B y C que no sean mutuamente excluyentes y que además se intersecten entre si las cosas se complican todavía más:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

En este caso, la probabilidad de intersección de los tres eventos, P(A ∩ B ∩ C), se debe sumar al final, ya que se restó tres veces al restar las intersecciones de los distintos pares de eventos.

Ejercicios:

Al extraer una carta de una baraja de 52 cartas, ¿Cuál es la probabilidad de extraer un Rey o una Reyna?

Analizando las probabilidades de anotación de un jugador, tenemos que la probabilidad de que no anote gol es del 20% y la probabilidad de que anote un gol es del 15%. ¿Cuál es la probabilidad de no marcar gol o que anote 1 gol?

Al extraer una carta de una baraja de 52 cartas, ¿Cuál es la probabilidad de extraer un Rey o un Corazón?

Si tenemos un grupo de 30 personas, que estudian francés o español, sabemos que 21 de ellos estudian español y 16 estudian francés.

a) ¿Cuántas personas estudian ambos idiomas?
b) Si seleccionamos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie ambos idiomas?

En un grupo de 10 estudiantes universitarios hay 3 que toman un curso de inglés, 4 que toman un curso de matemáticas y 2 que toman ambos cursos. Halle la probabilidad de que al seleccionar uno de estos estudiantes al azar, el mismo tome el curso de inglés o el curso de matemáticas.

Sea S el espacio muestral donde P(A) = 0.3, P(B) = 0.4 yP(A∩B) = 0.1 . Halle las siguientes probabilidades:

a. $P(A \cup B)$ b. $P(A^c)=$

c. $P(A \cup B)^c$ d. $P(A \cap B^c)=$

Considere el espacio muestral S donde P(A) = 0.5, P(B) = 0.4 y PA B ( ) I = 0.3 . Halle:

a. $P(A \cup B)$ b. $P(A^c)=$

c. $P(A \cup B)^c$ d. $P(A \cap B^c)=$

Una compañía le administra un examen a un grupo de 40 de sus empleados, que aspiran a cierta posición, para cualificarlos. La siguiente tabla resume los resultados divididos por género:

	Masculino (M)	Femenino (F)
Aprobó	7	2
Fracasó	18	13

De un naipe inglés de 52 cartas se extrae una al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que resulte 8 o trébol?

6. Probabilidad, Eventos Dependientes e Independientes

Se dice que dos eventos A y B son independientes si y solo si la probabilidad del evento B no está influida por el suceso del evento A o viceversa.

Tratemos de tener claro estos conceptos, considere los eventos:

Eventos	**Independiente**	**Dependiente**
Una persona tiene hambre y se tiene que ir a trabajar	**x**	
La persona es daltónica y tiene dificultad para distinguir los colores		**x**
María es católica y cree en un Dios		**x**
Tirar una moneda y que caiga águila	**x**	
El sr. Sánchez recibe un aumento de sueldo y compra un televisor		**x**
El día de hoy llovió y Roberto reprobó el examen	**x**	

Un evento independiente es un evento que no depende de otro evento que determine su resultado. Cuando tenemos dos eventos independientes, un resultado no afecta el resultado del segundo evento. Escoger una carta de un mazo es un buen ejemplo de evento independiente.

¿Cómo podemos encontrar la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes?

Para encontrar la probabilidad de que ocurran estos dos eventos independientes, multiplicamos las dos probabilidades.

El comprender y distinguir los eventos ya sean independientes o dependientes nos permitirá tener claridad sobre otro concepto involucrado: la Probabilidad Condicional.

De esta forma la Probabilidad Condicional se define cuando la probabilidad de que ocurra un evento A, dado que el evento B ha ocurrido, lo denotaremos como P(A|B) y se lee Probabilidad de A dado B.

De lo anterior se desprende la Regla General de la multiplicación, es decir:

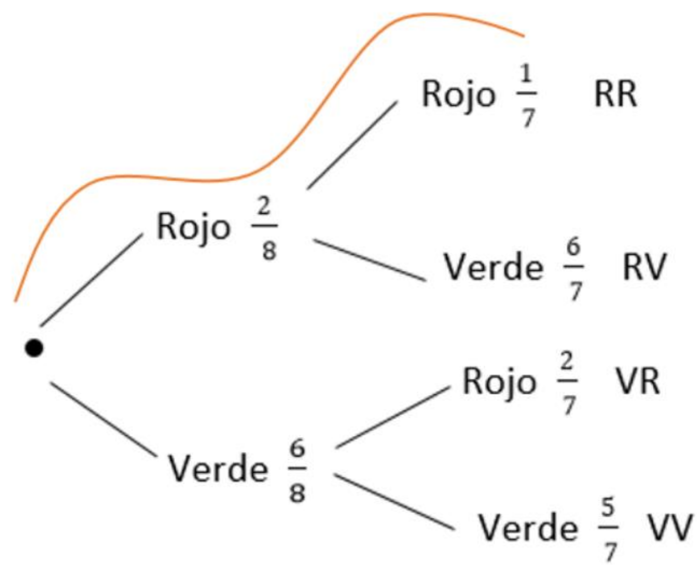
$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) \text{ ó } P(A \cap B) = P(B) * P(A/B)$$

Ejemplo 1. En un experimento de preferencia de color, ocho juguetes se ponen en un recipiente. Los juguetes son idénticos excepto por el color, dos son rojos y seis son verdes. Se pide a un niño que elija dos juguetes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño elija los dos juguetes rojos?

Considera R: “se elige un juguete rojo”

V: “se elige un juguete verde”

Observa el diagrama:



Si A: “ambos juguetes rojos”, entonces

$$A = \{R \cap R\}$$

$$A = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

Así finalmente la probabilidad condicional del evento A dado que el evento B ha ocurrido es:

La probabilidad condicional del elemento B, dado que el evento A ha ocurrido, es:

7. Diagramas de Árbol

8. Teorema de la multiplicación

9. Teorema de Bayes

10. Esperanza Matemáticas

11. Distribución Binomial

12. Distribución de Poisson

13. Distribución Normal

14. Conceptos básicos de Estadística

15. Graficas

16. Medidas de Tendencia Central

17. Medidas de Dispersión

18. Medidas de Posición

19. Construcción de Tablas