# 有限群的表示

王尉

## 目录



## 1 基本概念

### 1.1 群表示的概念

$V$：域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间.

$GL(V)$：$V$ 的自同构群.

取一组 $V$ 的基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 有

$$f : V \to F^n$$
$$\sum a_i e_i \mapsto (a_1, a_2, ..., a_n)$$

是一个 $F$ 同构，于是定义

$GL(n, F)$：$F$ 上的 $n$ 阶可逆矩阵的全体 (一般线性群).

**定义 1.1.** $G$ 是有限群，$G$ 到 $GL(V)$ 的一个群同态称为 $G$ 的一个线性表示. $n=\dim_F V$ 称为表示的级. 特别地，$G$ 到 $GL(n,F)$ 的一个群同态称为 $G$ 的一个矩阵表示.

**注 1.2.** 因为我们在这里考虑的都是有限群的有限维表示，所以这里所提到的群 $G$ 都是有限群，线性空间全是有限维线性空间.

**注 1.3.** 事实上把矩阵 $A\in GL(n,F)$ 看作 $F^n$ 上的线性变换，矩阵表示是 $G$ 到 $GL(F^n)$ 的线性表示. 反之取定一组 $V$ 上的基，很容易发现线性表示诱导了一个矩阵表示.

**定义 1.4.** 表示 $\rho: G\to GL(V)$ 称为忠实的，如果表示的核 $\ker\rho$ 是平凡的.

**定义 1.5.** 称表示 $\rho_i : G \to GL(V_i)$，$i=1,2$ 两个表示等价，如果存在线性空间的线性同构 $\varphi: V_1\to V_2$ 使得

$$\rho_2(g)=\varphi\circ\rho_1(g)\circ\varphi^{-1},\quad \forall g\in G.$$

## 1.2 群代数与 $G$-模

为了更好地研究群表示的结构，我们引入群代数的概念. 相当于是从群的结构，形式地构造了一个线性结构，于是就有了代数结构.

**定义 1.6.** 设 $F$ 是域，$G$ 是一个有限群，那么令

$$F[G]=\left\{\sum_{i=1}^{|G|} f_i a_i : f_i\in F, a_i\in G\right\}$$

是 $G$ 中元素用 $F$ 中的元素作为系数的所有形式线性组合. 我们规定上面的加法数乘和乘法如下

$$\sum_i f_i a_i+\sum_i f_i' a_i=\sum_i (f_i+f_i')a_i,\quad \forall f_i, f_i'\in F$$

$$f\left(\sum_i f_i a_i\right)=\sum_i f f_i a_i,\quad \forall f_i, f\in F$$

$$\left(\sum_i f_i a_i\right)\left(\sum_j f_j' a_i\right)=\sum_{i,j}(f_i f_j')(a_i a_j),\quad \forall f_i, f_j'\in F$$

容易证明前两条表明 $F[G]$ 是线性空间，后一条表明 $F[G]$ 是代数.

**注 1.7.** 群代数是一类特殊的环，具有线性空间结构的环，同时线性空间有一组好的基，这组基在环的乘法下构成了一个群. 因此并不是所有的代数都能够有一个群代数的结构. 这里最关键的是线性空间的基构成一个群.

类似于环上模的概念，可以定义群代数 $F[G]$ 上的模.

**定义 1.8.** 称 $M$ 为 (左) $F[G]$-模，如果 $M$ 为 $F$ 上的线性空间，并且 $M$ 是 $F[G]$ 作为环上的模. 并且满足相容性条件

$$a(gm)=(ag)m=g(am)\quad \forall a\in F,\ g\in G,\ m\in M.$$

因为群代数 $F[G]$ 由 $G$ 完全确定，通常称 $F[G]$-模为 $G$-模. 定义了群代数后，我们指出 $G$ 的线性表示与 $G$-模事实上是一回事. 实际上，这两者之间有一一对应：

$$
\begin{aligned}
\{G \text{ 的线性表示}\} &\overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{G\text{-模}\}, \\
\{\rho : G \to GL(V)\} &\longrightarrow V \text{ 由 } \rho \text{ 诱导的 } F[G]\text{-模结构,其中 }, \\
&\qquad\qquad gv = \rho(g)v,\ \forall g \in G, v \in V, \\
\{\varphi : G \to GL(M)\} &\longleftarrow G\text{-模 } M, \\
g \mapsto \varphi(g) : M &\to M, \\
m &\mapsto gm.
\end{aligned}
$$

上面的一一对应关系意味着研究 $G$ 的线性表示等价于研究 $G$-模. 从模的概念出发，我们可以定义子模商模模同态等概念如下：

• $G$-子模：$M$ 为 $G$-模，称 $N$ 是 $M$ 的 $G$-子模，如果 $N$ 是 $M$ 的 $F$-子空间，并且是 $G$-不变的，也就是，对于任意的 $g \in G$，$n \in N$，有 $gn \in N$.

• $G$-商模：$N$ 为 $M$ 的 $G$-子模，则商空间 $M/N$ 有一个自然诱导的 $G$-模结构.

• $G$-模同态，同构：$M, N$ 为 $G$-模，若 $F$-同态 $f : M \to N$ 满足对于任意的 $g \in G$，$m \in M$ 有 $f(gm) = gf(m)$，则称为 $G$-模同态. 如果还是双射，称为 $G$-模同构.

• 不可约模：没有非平凡 (零模与自身) 子模的 $G$-模.

从前面的分析可以得到，表示等价当且仅当 $G$-模同构.

**定义 1.9.** 设 $\rho : G \to GL(V)$ 为 $G$ 的线性表示. 称 $\rho$ 为不可约表示，若 $V$ 作为 $\rho$ 诱导的 $G$-模是不可约的 (即没有非平凡的 $G$-子模). 不可约的反面是可约的 (即存在非平凡的 $G$-子模). 称 $\rho$ 为可分解表示，若 $V$ 作为 $\rho$ 诱导的 $G$-模可以分解为两个非平凡子模的直和. 称 $\rho$ 为完全可约的，若对于任意 $V$ 的子模 $W$，都存在一个子模 $W'$ 使得 $V = W \oplus W'$.

把模的直和的概念平移到表示上来，我们可以定义表示的直和

**定义 1.10.** $V_i(i = 1, 2)$ 为 $G$-模，$\rho_i : G \to GL(V_i)$ 是相对应的表示. 直和 $V_1 \oplus V_2$ 所对应的表示

$$
\begin{aligned}
\rho : G &\to GL(V_1 \oplus V_2), \\
g &\mapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g) : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2 \\
&\qquad\qquad (v_1, v_2) \mapsto (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2).
\end{aligned}
$$

下面，我们介绍一个非常重要的定理. 这个定理告诉我们，在很多情况下 $G$ 的线性表示都是完全可约的，这让之后很多证明中的操作成为可能.

**定理 1.11** (Maschke 定理)**.** *设 $G$ 是有限群，且或者 $\operatorname{char} F = 0$ 或者 $\operatorname{char} F \nmid |G|$，则 $G$ 的任一线性表示都是一些不可约表示的直和.*

**注 1.12.** 事实上，上述定义意味着 $G$ 的任一线性表示都是完全可约的.

证明. 设 $\rho : G \to GL(V)$ 为 $G$ 的任一线性表示，对 $n = \dim_F V$ 作归纳. $n = 1$ 时，结论显然成立，下面设 $n > 1$ 并且 $V$ 可约的. 如果 $V$ 是不可约的，结论就成立了. 于是 $V$ 有非平凡的 $G$-子模. 设 $W$ 为 $V$ 的一个不可约子模，则存在 $V$ 的 $F$ 子空间 $W'$ 使得 $V = W \oplus W'$ (利用了线性空

间的直和分解). 令 $\varphi : V \to W$ 是上面直和分解定义的投影，则 $\varphi$ 是 $F$-线性映射. 令

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} : V &\to W,\\ v &\mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\varphi(gv).\end{aligned}$$

可知 $W$ 是 $G$-不变的，于是 $\widetilde{\varphi}$ 是良定义的. 容易证明，由 $\widetilde{\varphi}$ 定义的遍历性，对任意的 $h \in G$，有

$$\widetilde{\varphi}(hv) = h\widetilde{\varphi}(v).$$

所以 $\widetilde{\varphi}$ 是 $G$-模同态. 令 $W_1 = \ker\widetilde{\varphi}$，则 $W_1$ 是 $V$ 的 $G$-子模，并且 $V = W \oplus W_1$ 是 $G$-模直和. 事实上，对任意的 $w \in W$，$gw \in W$，我们有 $\varphi(gw) = gw$. 这里我们用到了 $\varphi$ 是到 $W$ 的投影. 所以根据 $\widetilde{\varphi}$ 的定义可得 $\widetilde{\varphi}(w) = w$. 于是对于任意的 $v \in V$，有 $v - \widetilde{\varphi}(v) \in \ker\widetilde{\varphi}$. 所以 $V = W + W_1$. 另一方面对于任意的 $x \in W \cap W_1$，可得 $x \in \widetilde{\varphi}(x)$ 并且 $\widetilde{\varphi}(x) = 0$，所以 $x = 0$. 这样根据归纳假设就证明了结论成立，这是因为 $\rho = \rho_W \oplus \rho_{W_1}$，其中 $\rho_W$ 为 $W$ 的线性表示，$\rho_{W_1}$ 为 $G$ 的一些不可约表示的直和. 所以 $\rho$ 可以分解为一些不可约表示的直和. □

从证明中我们也看出实际上我们在证明一个完全可约的性质.

**注 1.13.** 上述定理中的把线性表示分解为一些不可约表示的直和分解一般不唯一. 一个例子就是对于 $\dim_F V \geq 2$，$\rho : G \to GL(V)$ 是平凡表示，也就是 $\ker\rho = G$. 那么 $V$ 的任意 1 维线性空间的直和都是不可约表示的分解.

## 1.3 表示的例子

**例 1.14.** 单位表示：1 级平凡的表示为 $G$ 的单位表示.

**例 1.15.** (左) 正则表示：$G$ 为有限群，$V = F[G]$. 正则表示为

$$\begin{aligned}r : G &\to GL(V),\\ g &\mapsto r(g) : V \to V,\\ &\qquad \sum_{h\in G} a_h h \mapsto \sum_{h\in G} a_h gh.\end{aligned}$$

**例 1.16.** 置换表示：群 $G$ 在集合 $X$ 上有一个作用，$V$ 表示由 $X$ 中元素为一组基生成的 $F$ 上的线性空间. 那么

$$\begin{aligned}\rho : G &\to GL(V),\\ g &\mapsto \rho(g) : V \to V,\\ &\qquad \sum_{x\in X} a_x x \mapsto \sum_{x\in X} a_x gx.\end{aligned}$$

称为一个由 $G$ 在 $X$ 上作用诱导的置换表示.

**注 1.17.** 上面的正则表示是一种特殊的置换表示.

**例 1.18.** 子表示：$\rho : G \to GL(V)$ 是线性表示，$W \subset V$ 是 $G$-子模. 表示

$$
\begin{aligned}
\rho : G &\to GL(V), \\
g &\mapsto \rho(g)|_W,
\end{aligned}
$$

称为 $\rho$ 在 $W$ 上的子表示，记作 $\rho_W$. 一个简单的例子是对于正则表示

$$\rho : G \to GL(\mathbb{C}[G]).$$

$W$ 为由 $\sum_{g\in G} g$ 生成的 $G$-子空间，于是 $G$-子模，那么 $\rho_W$ 就是一个子表示，它等价于单位表示，因为 $W$ 维数是 1 并且 $\rho$ 在上面是恒等的，这同样来自于我们在求和过程中产生的遍历的性质.

**例 1.19.** 两个表示的张量积：$V_i (i = 1, 2)$ 为 $G$-模，$\rho_i : G \to GL(V_i)$ 是相对应的表示. 直和 $V_1 \otimes V_2$ 所对应的表示

$$
\begin{aligned}
\rho : G &\to GL(V_1 \otimes V_2), \\
g &\mapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2, \\
&\qquad\qquad v_1 \otimes v_2 \mapsto \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2.
\end{aligned}
$$

事实上，上面的定义还需要进行线性扩张. 特别地，如果 $(u_1, u_2, ..., u_m)$ 是 $V_1$ 的一组基，$(v_1, v_2, ..., v_n)$ 为 $V_2$ 的一组基，并且

$$
\begin{aligned}
\rho_1(g)(u_1, u_2, ..., u_m) = (u_1, u_2, ..., u_m)A(g), \\
\rho_2(g)(v_1, v_2, ..., v_n) = (v_1, v_2, ..., v_n)B(g).
\end{aligned}
$$

那么

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(u_i \otimes v_j) = \left(\sum_t a_{ti}u_t\right) \otimes \left(\sum_s b_{sj}v_s\right) = \sum_{s,t} a_{ti}b_{sj}u_t \otimes v_s.$$

所以在 $(u_i \times v_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ 这组基下的表示矩阵为

$$
\begin{pmatrix}
A(g)b_{11}(g) & A(g)b_{12}(g) & \cdots & A(g)b_{1n}(g) \\
A(g)b_{21}(g) & A(g)b_{22}(g) & \cdots & A(g)b_{2n}(g) \\
\cdots & \cdots & & \\
A(g)b_{n1}(g) & A(g)b_{n2}(g) & \cdots & A(g)b_{nn}(g)
\end{pmatrix}.
$$

下面两个例子表明 Maschke 定理中的假设条件是必须的.

**例 1.20.** $p$ 为素数，$G = \langle\sigma\rangle$ 是 $p$ 阶循环群，$F = \mathbb{Z}_p$ 是有限域. 定义

$$
\begin{aligned}
\rho : G &\to GL(2, F), \\
\sigma &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

是一个 2 级表示. 在这个表示下，$F^2$ 是 $G$-模. 取

$$v_1 = (1, 0)^T, v_2 = (0, 1)^T \in F^2.$$

于是有 $\sigma v_2 = (0,1)^T$. 这意味着 $Fv_2$ 是 $G$-子模. 若存在 $F^2$ 的 $G$-子模 $W = F \cdot (a,b)^T$，使得

$$Fv_2 \oplus W = F^2,$$

则存在 $\lambda \in F$ $\sigma(a,b)^T = (a, a+b)^T = (\lambda a, \lambda b)^T$. 于是 $\lambda = 1$，$a = 0$ 矛盾！所以 $F^2$ 不是一个完全可约 $G$-模.

**例 1.21.** 假设

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}.$$

于是利用矩阵的乘法可以定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用，从而 $\mathbb{C}^2$ 是 $G$-模. 令 $v_2 = (0,1)^T$，则 $\mathbb{C}v_2$ 是 $\mathbb{C}^2$ 唯一的 $G$-子模. 事实上，如果有 $\mathbb{C}(a,b)^T$ 是 $G$-子模. 那么存在 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (a,b)^T = (a, a+b)^T = (\lambda a, \lambda b)^T.$$

于是 $\lambda = 1$，$a = 0$ 矛盾！所以 $\mathbb{C}^2$ 不是一个完全可约 $G$-模.

## 1.4 Schur 引理

**引理 1.22.** *(1) 设 $V, W$ 是不可约 $G$-模，$f : V \to W$ 为 $G$-模同态，则或者 $f$ 是零同态，或者 $f$ 是 $G$-模同构.*

*(2) $F$ 是代数闭域，$V$ 是不可约 $G$-模，则 $G$-模同态的全体是数乘，即 $\mathrm{End}_G(V) = F\,\mathrm{id}_V$.*

*证明.* (1) 的证明是显然的，只需要考虑 $\ker f$ 与 $\operatorname{im} f$ 即可. (2) 的证明如下. 显然 $F \cdot 1 \subset \mathrm{End}_G(V)$. 另一方面对于 $0 \neq \varphi \in \mathrm{End}_A(V)$，由于 $V$ 是有限维的向量空间，并且 $F$ 是代数封闭域，所以存在 $\varphi$ 的某个特征值 $\lambda$，考虑 $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ 根据 (1)，这个映射非零即同构，由特征值的定义，显然不是同构，那么就是零，于是 $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$. □

下面我们应用 Schur 引理来考虑一些不可约 $G$-模的性质.

**推论 1.23.** *$V$ 是不可约 $G$-模，$z \in Z(\mathbb{C}[G])$ ($\mathbb{C}[G]$ 的中心)，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $zv = \lambda v$ 对于任意的 $v \in V$ 成立.*

*证明.* 定义映射 $\varphi : V \to V$ 使得 $\varphi(v) = zv$. 那么根据 $z \in Z(\mathbb{C}[G])$ 可得 $\varphi$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 同态. 根据 Schur 引理 (2) 即得到结论. □

对于有限群 $G$ 都有忠实表示，下面的性质说明这样的表示一般是可约的.

**推论 1.24.** *$G$ 为有限群，若存在忠实不可约表示 $\rho : G \to GL(V)$，那么 $G$ 的中心 $Z(G)$ 是循环群.*

*证明.* 对于任意的 $z \in Z(G)$ 有 $z \in Z(\mathbb{C}[G])$，根据前一个推论的结论，存在 $\lambda_z$ 使得 $zv = \lambda_z v$ 对于任意的 $v \in V$ 成立. 这样就定义了一个从 $Z(G)$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的映射，将 $z$ 映为 $\lambda_z$. 很显然，这是一个同态，并且根据忠实的条件，这个是单同态. 从而是循环群. 这是因为首先可得 $\lambda_z \in S^1$. 这些元素的辐角都是有理数，所以可以取最小的就能生成全体了. □

因此，如果有限群 $G$ 的中心不是循环群，那么就不存在不可约的忠实的表示.

# 2 群表示的特征标

## 2.1 特征标的概念

假设 $F=\mathbb{C}$ (这一点非常重要，在后面的证明中会用到)，$\rho: G \to GL(V)$ 是有限群 $G$ 的线性表示，其中 $V$ 是有限维线性空间.

**定义 2.1.** 定义

$$\begin{aligned}\chi_\rho: G &\to \mathbb{C}\\ g &\to \operatorname{tr}(\rho(g)).\end{aligned}$$

即将 $g\in G$ 映为线性映射的在某一组基下的表示矩阵的迹.

很显然由于 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ 于是，上述的定义与基的选取是没有关系的.

**注 2.2.** 等价的表示有着相同的特征标.

对于一些特殊的情况，我们给出特殊的名称.
- 线性特征标：1 级表示的特征标.
- 主特征标：单位表示的特征标.

**注 2.3.** 一般情况下特征标不是同态，即使是单位表示，特征标也不是加法群的同态.

**命题 2.4.** $G$ 是有限群，$\rho: G\to GL(V)$ 为 $n$ 级表示，$\chi_\rho$ 是对应的特征标，则
(1) $\chi_\rho(1)=n$;
(2) $\chi_\rho(g^{-1})=\overline{\chi_\rho(g)}$;
(3) $\chi_\rho(hgh^{-1})=\chi_\rho(g)$.

证明. (1) 的证明是显然的，因为单位元在表示下的像就是恒等变换，变换矩阵就是 $I$，所以迹自然是 $n$. 对于 (2) 我们有，取 $g\in G$，可得 $\rho(g)$ 的特征值是 $\lambda_i(i=1,2,...,n)$. 根据 $G$ 是有限群，所以 $g$ 是有限阶的，那么 $(\rho(g))^{|G|}=1$，于是 $|\lambda_i|=1$ 对于任意的 $i=1,2,...,n$. 由于 $\rho(g^{-1})=(\rho(g))^{-1}$，所以其特征值是 $\lambda_i^{-1}(i=1,2,...,n)$. 也就是 $\overline{\lambda_i}(i=1,2,...,n)$. 加起来就得到了我们要证明的结论了. (3) 的证明直接有相似矩阵有着相同的特征值这一性质得到. □

**命题 2.5.** $\rho_i: G\to GL(V_i)$ $(i=1,2)$ 是两个线性表示. $\chi_i$ 为 $\rho_i$ 的特征标. 则
(1) $\chi_{\rho_1\oplus\rho_2}=\chi_1+\chi_2$.
(1) $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}=\chi_1\chi_2$.

证明. 证明是容易的，对于 (1)，我们注意到对于给定的 $g$ 可得

$$(\rho_1\oplus\rho_2)(g)=\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}.$$

于是就证明成立了. 对于 (2) 根据例 1.19 中的矩阵表示即可得到结果. □

## 2.2　特征标的第一正交关系

在介绍相关结论之前，我们作如下的约定

- $G$ 是有限群.
- $\varphi, \psi$ 是 $G$ 上的复值函数.
- $\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$.

在上述记号下，我们将会给出特征标的第一正交关系.

**定理 2.6** (第一正交关系). (1) 假设 $\rho : G \to GL(V)$ 是不可约线性表示，$\chi$ 是其特征标，那么

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1.$$

(2) 假设 $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ 是两个不可约线性表示，并且不等价，$\chi_i$ 是对应的特征标，那么

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0.$$

在证明这一正交关系之前，我们先要给出一个重要的引理

**引理 2.7.** 假设 $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ 是两个不可约线性表示. $h : V_1 \to V_2$ 为线性映射. 令

$$h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} (\rho_2(\sigma))^{-1} \circ h \circ \rho_1(\sigma) : V_1 \to V_2.$$

则 $h_0$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 同态.

**注 2.8.** 引理 2.7 一旦被证明成立，我们根据 Schur 引理，很容易得到

- $h_0 = 0$ 若 $V_1$ 与 $V_2$ 不是同构的 $\mathbb{C}[G]$ 模，即 $\rho_1$ 与 $\rho_2$ 不等价.
- $h_0 = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(h) \operatorname{id}_V$ 如果 $\rho_1 = \rho_2$，$V_1 = V_2 = V$. 其中 $n = \dim V$.

**注 2.9.** 注 2.8 中的第二条，我们的要求非常强，如果仅仅要求两个表示等价是得不到上述结论的. 对此，如果 $\rho_1$ 与 $\rho_2$ 等价，我们可以得到线性同构 $f : V_1 \to V_2$ 使得 $\rho_2(g) f = f \rho_1(g)$ 对于任意的 $g \in G$ 都成立. 那么

$$h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} (\rho_2(\sigma))^{-1} \circ h \circ \rho_1(\sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} f \circ (\rho_2(\sigma))^{-1} \circ (f^{-1} \circ h) \circ \rho_1(\sigma).$$

也就是 $f^{-1} \circ h_0 = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(f^{-1} \circ h) \operatorname{id}_V$. 这此显然是与之前的不同.

*引理 2.7 的证明.* 对于任意的 $v_1 \in V_1$，$g \in G$，有

$$\begin{aligned} g h_0(v_1) &= \rho_2(g) h_0(v_1) \\ &= \frac{1}{|G|} \rho_2(g) \sum_{\sigma \in G} (\rho_2(\sigma))^{-1} \circ h \circ \rho_1(\sigma)(v_1) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} (\rho_2(\sigma g^{-1}))^{-1} \circ h \circ \rho_1(\sigma g^{-1}) \rho_(g)(v_1) = h_0(gv). \end{aligned}$$

这就证明了结论成立. $\square$

*定理 2.6 的证明.* 我们利用矩阵表示来证明这个结论. 首先我们假设

$$\rho_1(g) = (a_{ij}(g))_{n_1\times n_1}, \quad \rho_2(g) = (b_{ij}(g))_{n_2\times n_2}, \quad \text{以及} \quad h = (x_{ij})_{n_2\times n_1}.$$

当 $V_1$ 与 $V_2$ 不等价时，根据引理 2.7 与注 2.8 的第一条结论，我们可得 $h_0 = 0$，翻译成矩阵的语言就是

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{t,s} b_{it}(g^{-1})x_{ts}a_{sj}(g) = 0$$

对所有的 $g \in G$ 都成立. 这里由于 $h$ 的任意性，可以得到

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} b_{it}(g^{-1})a_{sj}(g)$$

对于任意的 $t, s, i, j$ 都成立. 于是

$$\begin{aligned}
\langle \chi_1, \chi_2\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\chi_2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_i a_{ii}(g)\right)\left(\sum_j b_{jj}(g^{-1})\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_j\sum_{g\in G} a_{ii}(g)b_{jj}(g^{-1}) = 0.
\end{aligned}$$

这样就证明了对于 (2) 结论成立. 对于 (1) 的证明，我们根据引理 2.7 将注 2.8 的第二条结论翻译成矩阵形式. 此时令 $\dim_F V = n$ 并且 $a_{ij}(g) = b_{ij}(g)$. 则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{s,t} a_{it}(g^{-1})x_{ts}a_{sj}(g) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(h)\delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j, \\ 0 & \text{若 } i \neq j. \end{cases}$$

据此，我们可以得到

$$\frac{1}{|G|}\sum_{s,t}\left(\sum_{g\in G} a_{it}(g^{-1})a_{sj}(g) - \frac{1}{n}\delta_{ts}\delta_{ij}\right)x_{ts} \equiv 0.$$

根据 $h$ 的任意性，可以得到

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_{it}(g^{-1})a_{sj}(g) = \frac{1}{n}\delta_{ts}\delta_{ij}.$$

于是我们有，令 $t=i$，$s=j$，则

$$\begin{aligned}\langle\chi,\chi\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(a_{ij}(g))\operatorname{tr}(a_{ij}(g^{-1})) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{i,j}\sum_{g\in G}a_{ii}(g)a_{jj}(g^{-1}) \\ &= 1 \qquad (2.1)\end{aligned}$$

这就证明了 (1) 的成立. □

**注 2.10.** 事实上我们可以证明更加强的结论，即假设 $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ 是两个不可约线性表示，并且等价则它们对应的特征标 $\chi_1$ 与 $\chi_2$ 满足

$$\langle\chi_1,\chi_2\rangle = 1.$$

这是因为根据注 2.9 中的叙述，只要考虑 $f^{-1}h_0$ 与 $f^{-1}h$ 即可.

**定理 2.11.** *设 $V$ 是 $G$ 的一个表示，$W$ 为一个 $G$ 的不可约表示，两个表示的特征标分别为 $\phi$ 与 $\chi$. 那么设 $V$ 分解为不可约的表示的直和*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

*则与 $W$ 等价的不可约表示 $W_i$ 的数目为 $\langle\phi,\chi\rangle$.*

**注 2.12.** 根据 Maschke 定理，可知对于 $F=\mathbb{C}$ 的情况，上面这样的分解一定是存在的，前面我i吗也提到了这样的表示不是唯一的，但是直和因子中与某个给定的不可约表示 $W$ 等价的表示个数与分解是无关的. 这个数称为 $W$ 在表示 $V$ 中出现的次数. 换句话说在这样的意义下，分解是唯一的.

*定理 2.11 的证明.* 假设 $\chi_i$ 是 $W_i$ 的特征标，则根据命题 2.5 中的直和与特征标的性质，可以得到

$$\phi = \sum_i \chi_i.$$

所以，$\langle\phi,\chi\rangle = \sum_i\langle\chi_i,\chi\rangle$. 再利用定理 2.6 与注 2.10，可得 $\langle\chi_i,\chi\rangle$ 在且仅在 $W$ 与 $W_i$ 等价的时候为 1 其他时候都是 0. 这就证明了这个结论. □

**推论 2.13.** *$G$ 的具有相同特征标的两个表示等价.*

*证明.* 两个可约表示的直和分解中会有任意给帝国的不可约表示的个数相等. □

**注 2.14.** 根据上面这个推论，我们可以知道，研究有限群的有限级线性表示归结为特征标的研究.

根据特征标，我们还可以得到一个不可约判据.

**定理 2.15.** *设 $V$ 是群 $G$ 的一个表示，$\phi$ 为对应的特征标. 则 $\langle\phi,\phi\rangle\in\mathbb{Z}_+$ 并且 $V$ 为不可约表示当且仅当 $\langle\phi,\phi\rangle = 1$.*

证明. 首先，根据 Maschke 定理，对 $V$ 作分解，使得

$$V = m_1 W_1 \oplus m_2 W_2 \oplus \cdots \oplus m_k W_k, \quad m_i \in \mathbb{Z}_+,$$

其中 $k \geq 1$ 以及 $W_i$ 是互不等价的不可约的 $G$ 的表示. $\chi_i$ 是 $W_i$ 对应的特征标. 那么这些特征标是互不相同的. 于是

$$\langle \phi, \phi \rangle = \left\langle \sum_i m_i \chi_i, \sum_i m_i \chi_i \right\rangle = \sum_i^k m_i^2.$$

于是 $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ 当且仅当 $k = 1$ 也就是 $V$ 不可约. □

## 2.3 (左) 正则表示的分解

下面我们利用上述特征标的工具，求 (左) 正则表示的分解.

设 $r : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ 为正则表示.

**命题 2.16.** 设 $r_G$ 是正则表示的特征标，那么

- $r_G(1) = \mathrm{tr}(r(1_G)) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = |G|$.
- $r_G(g) = 0$，若 $g \neq 1$.

证明. 第一条的证明是显然的，下面我们证明第二条. 我们假设

$$G = \{g_1 = 1, g_2, ..., g_n\}, \quad n = |G|.$$

那么

$$r(g)(1, g_2, ..., g_n) = (g, gg_2, ..., gg_n) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, ..., g_{\sigma(n)})$$

对于某个 $\sigma \in S_n$. 所以

$$r(g)(1, g_2, ..., g_n) = (1, g_2, ..., g_n) \sum_{i=1}^n e_{i\sigma(i)}$$

其中 $e_{ij}$ 表示 $ij$ 位置为 1 其他位置为 0 的矩阵. 利用 $\mathrm{tr}(e_{i\sigma(i)}) \neq 0$ 当且仅当 $i = \sigma(i)$ 也就是 $gg_i = g_i$. 这意味着 $g = 1$. 所以 $g \neq 1$ 时，$\mathrm{tr}(e_{i\sigma(i)}) = 0$，于是 $r_G(g) = 0$. □

**推论 2.17.** 设 $W$ 为 $G$ 的任一不可约表示，特征标为 $\chi$，级为 $n$. 则 $W$ 包含在正则表示 $r$ 中，出现次数为 $n$.

证明. 利用定理 2.11，可得这个次数为

$$\langle r_G, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r_G(g) \chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1) \chi(1) = n.$$

这就证明了这个结论. □

**注 2.18.** 上面这个推论告诉我们，不等价的不可约表示只有有限个. 换句话说，一个有限群如果确定了，那么这个群的群代数就确定了. 给出其不可约分解，之后对于任一的 $G$ 的不可约分解，都能在群代数的分解中找到等价的.

**推论 2.19.** 设 $G$ 的所有不可约的特征标 $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$，它们表示的级为 $n_i$ $(n_i = \chi_i(1))$. 则有

(1) $\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|$.

(2) 若 $g \neq 1$，$g \in G$ 则有 $\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(g) = 0$.

证明. 由上一个推论，可得 $r_G = \sum_{i=1}^h n_i\chi_i$. 所以

$$|G| = r_G(1) = \sum_{i=1}^h n_i\chi_i(1) = \sum_{i=1}^h n_i^2.$$

这证明了 (1). 另外，对于 $g \neq 1$，有

$$0 = r_G(g) = \sum_{i=1}^h n_i\chi_i(g).$$

这证明了 (2). □

## 2.4 不可约表示的个数与第二正交关系

对于有限群 $G$，我们定义类函数的概念. $f : G \to \mathbb{C}$ 满足 $f(hgh^{-1}) = f(g)$ 对任意的 $g, h \in G$ 成立. 这样的函数 $f$ 可以看作是在 $G$ 的共轭类上定义了一个函数. 定义 $H = \{G \text{ 的类函数}\}$. 则 $\dim_{\mathbb{C}} H$ 为 $G$ 的共轭类的个数. 令 $\{1\} = C_1, C_2, ..., C_s$ 为 $G$ 的共轭类全体，则确定一个类函数 $f$ 等价与确定 $f$ 在 $\{1\} = C_1, C_2, ..., C_s$ 上的取值. 后者的取值是任意的.

**定理 2.20** (基定理)**.** *$G$ 的所有不等价的不可约表示的特征标 $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ 构成了 $H$ 的一组正交基. 特别地不等价的不可约表示的个数等于 $G$ 的共轭类的个数.*

**命题 2.21.** *$f$ 为类函数，$\rho : G \to GL(V)$ 为不可约线性表示. 级为 $n$，特征为 $\chi$. $\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g) : V \to V$ 为 $\mathbb{C}[G]$ 线性变换.*

证明. 这一点是不难验证的，事实上

$$\begin{aligned}\rho_f\rho(g) &= \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\rho(\sigma g) = \sum_{\tau\in G} f(\tau g^{-1})\rho(\tau) \\ &= \sum_{\tau\in G} f(g^{-1}\tau)\rho(\tau) = \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\rho(g\sigma) = \rho(g)\rho_f.\end{aligned}$$

即 $\rho_f(gv) = g\rho_f(v)$ 成立. □

**注 2.22.** 根据 Schur 引理，可得如果 $\rho$ 不可约，那么 $\rho_f = \lambda\,\mathrm{id}_V$，其中

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\chi(\sigma).$$

*基定理的证明.* 只需要证明 $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ 生成了 $H$. 记其生成的是 $H$ 的子空间 $H'$ 那么对于任意的 $f \in H'^{\perp}$，我们可以得到 $\langle f, \chi_i\rangle = 0$ 对于任意 $i = 1, 2, ..., h$ 成立. 注意到 $\overline{\chi_1}, \overline{\chi_2}, ..., \overline{\chi_h}$ 也构成了 $G$ 的不可约特征，所以有 $\langle f, \overline{\chi_i}\rangle = 0$ 对于任意的 $i = 1, 2, ..., h$ 成立. 对于每个 $\rho$ 是不可约表示，其特征标必然为上述某一个 $\chi_i$ (等价的表示特征标相同). 级为 $n_i$. 利用前面的命题，可以得到

$$\rho_f = \frac{1}{n_i}\left(\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\chi_i(\sigma)\right)\mathrm{id}_V = \frac{1}{n_i}\langle f, \overline{\chi_i}\rangle\,\mathrm{id}_V = 0.$$

当 $\rho$ 是可约的时候可以分解为一些不可约的表示，最终 $\rho_f = 0$ 仍然成立. 这时候取 $\rho$ 是正则表示，则

$$\rho_f(1) = \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\rho(\sigma)(1) = \sum f(\sigma)\sigma = 0$$

这意味着 $f(\sigma) = 0$ 对任意的 $\sigma \in G$ 都成立，这是因为 $G$ 是群代数的一组基. □

**定理 2.23** (第二正交关系)**.** 设 $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h$ 是 $G$ 所有的不等价的不可约特征标. 那么

(1) $\sum_{i=1}^h \chi_i(\sigma)\overline{\chi_i(\sigma)} = \frac{|G|}{|C(\sigma)|}$. 这里的 $C(\sigma)$ 表示含有元素 $\sigma$ 的共轭类.

(2) 若 $\tau$ 与 $\sigma$ 互不共轭，则

$$\sum_{i=1}^h \chi_i(\tau)\overline{\chi_i(\sigma)} = 0.$$

*证明.* 设 $f_\sigma$ 是类函数中的元素，其将 $C(\sigma)$ 映为 1，其余共轭类映为 0. 根据基定理，可以得到存在 $a_i \in \mathbb{C}$ 使得

$$f_\sigma = \sum_{i=1}^h a_i \chi_i.$$

那么

$$a_i = a_i\langle \chi_i, \chi_i\rangle = \langle f_\sigma, \chi_i\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{\tau\in} f_\sigma(\tau)\overline{\chi_i(\tau)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\tau\in C(\sigma)} \overline{\chi_i(\tau)} = \frac{|C(\sigma)|}{|G|}\overline{\chi_i(\sigma)}.$$

于是

$$f_\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^h \left(\frac{|G|}{|C(\sigma)|}\right)^{-1}\overline{\chi_i(\sigma)}\chi_i(\tau).$$

于是取 $\tau$ 为对应值即可证明结论. □

# 3 半单代数 $\mathbb{C}[G]$ 的分解

## 3.1 基本性质

首先，我们有 $M_n(\mathbb{C})$ 是单代数，也就是没有真理想的 $\mathbb{C}$ 代数. 半单代数的定义是在这个代数的表示下的任意代数模都是完全可约的.

设 $\rho_i : G \to GL(W_i)$ $(i = 1, 2, ..., h)$ 为 $G$ 的所有不等价的不可约表示，并且 $n_i = \dim W_i$. $\rho_i$ 可以线性扩充为代数同态 $\widetilde{\rho_i} : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(W_i)$. 利用 $\widetilde{\rho_i}$，我们可以定义同态

$$\widetilde{\rho} : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^h \mathrm{End}(W_i) \cong \prod_{i=1}^h M_{n_i}(\mathbb{C})$$
$$g \mapsto \{\rho_i(g)\}_{i=1}^h.$$

**命题 3.1.** $\widetilde{\rho}$ 是 $\mathbb{C}$-代数同构态射.

*证明.* 显然 $\widetilde{\rho}$ 为代数同态. $\widetilde{\rho}$ 是满射，这是因为不然，就存在 $\prod_{i=1}^h M_{n_i}(\mathbb{C})$ 上的非零函数 $f$ 使得 $f|_{\mathrm{im}\,\widetilde{\rho}} = 0$. 写成矩阵的形式，有设

$$f = \sum_{t,i,j} c_{ij}^t x_{ij}^t, \quad \rho_t(\sigma) = (a_{ij}^t(\sigma)).$$

此时 $c_{ij}^t$ 是不全为零的. 于是

$$\sum_{t,i,j} c_{ij}^t a_{ij}^t(\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in G.$$

那么

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\sigma\in G}\left(\sum_{i,j,t} c_{ij}^t a_{ij}^t(\sigma)\right)\left(\sum_{l,m,s}\overline{c_{lm}^s} a_{ml}^s(\sigma^{-1})\right) \\
&= \sum_{t,s,i,j,l,m} c_{ij}^t\overline{c_{lm}^s}\left(\sum_{\sigma\in G} a_{ij}^t(\sigma)a_{ml}^s(\sigma^{-1})\right) \\
&= \sum_{t,s,i,j,l,m} c_{ij}^t\overline{c_{lm}^s}\delta_{ts}\cdot\frac{|G|}{n_t}\delta_{il}\delta_{jm} = \sum_{i,j,t}|c_{ij}^t|^2\frac{|G|}{n_t}
\end{aligned}
$$

这显然与 $c_{ij}^t$ 是不全为零矛盾. □

## 3.2 $\mathbb{C}[G]$ 的中心

**定义 3.2.** 记 $A=\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 是群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的中心，定义为

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{与 } \mathbb{C}[G] \text{ 中元素都可交换的 } \mathbb{C}[G] \text{ 中的元素}\} \\
&= \left\{\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma : \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma\tau = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\tau\sigma\right\}.
\end{aligned}
$$

设 $G$ 的共轭类记为

$$O(\sigma_1=1),\ O(\sigma_2),\ ...,\ O(\sigma_s)$$

于是我们有下面的结论

**命题 3.3.** *$e_i=\sum_{\alpha\in O(\sigma_i)}\alpha$ $(i=1,2,...,s)$ 是 $\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 中的元素，并且是 $\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 的一组 $\mathbb{C}$-基. 另外，$A=\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 是交换代数.*

*证明.* $A$ 的交换性是显然的. 下面我们对其他的性质作证明. 利用定义，有

$$\sum_{\alpha\in O(\sigma_i)}\tau\alpha\tau^{-1} = \sum_{\alpha\in O(\sigma_i)}\alpha,$$

对任意 $\tau\in G$. 所以可知 $\sum_{\alpha\in O(\sigma_i)}\alpha$ 是中心中的元素，另外，对任意 $\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma\in\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$，于是

$$\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma=\sum_{i=1}^s\left(\sum_{\sigma\in O(\sigma_i)}a_\sigma\sigma\right). \quad (1)$$

由于每个共轭类 $O(\sigma_i)$ 在共轭作用下不变，也就是共轭映射把共轭类映到自己. 所以 (1) 中的右侧的 $s$ 项在共轭作用下都不变. 事实上，若令

$$\tau_i=\sum_{\sigma\in O(\sigma_i)}a_\sigma\sigma$$

$i=1,2,...,s$ 是线性无关的，于是有

$$0=\tau\left(\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma\right)\tau^{-1}-\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma=\sum_{i=1}^s(\tau\tau_i\tau^{-1}-\tau_i).$$

所以可得 $\tau\tau_i\tau^{-1}-\tau=0$ 对于任意的 $i$ 都成立. 另外共轭作用在 $O(\sigma_i)$ 上是可逆的，于是 (1) 中的右侧的任一项 $\sum_{\sigma\in O(\sigma_i)}a_\sigma\sigma$ 的系数 $a_\sigma$ 相同. 所以自然有 $e_i$ 是 $\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 的一组基. □

若 $\rho_i : G \to GL(W_i)$ 是不可约表示，$\widetilde{\rho_i}$ 是对应的诱导的 $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(W_i)$ 的代数同构. 那么

$$\widetilde{\rho_i} : \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G]) \to \mathrm{End}(W_i)$$

是 $\mathbb{C}$ 代数同态. 这一点是显然的，因为同态在子代数下限制还是同态. 那么利用 $\mathbb{C}[G]$ 的中心的元素与 $G$ 的作用可以交换，所以 $\widetilde{\rho_i} : W_i \to W_i$ 是 $\mathbb{C}[G]$-模同态. 根据 Schur 引理，可得 $\widetilde{\rho_i}$ 是数乘变换. 于是

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho_i} &: \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C} \\ u &= \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \sigma \mapsto \lambda \quad \text{若} \quad \widetilde{\rho_i}(u) = \lambda \, \mathrm{id}_{W_i}. \end{aligned}$$

那么我们可以求出

$$\lambda = \frac{1}{n_i} \mathrm{tr}(\widetilde{\rho_i}(u)) = \frac{1}{n_i} \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \, \mathrm{tr}(\rho_i(\sigma)) = \frac{1}{n_i} \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \chi_i(\sigma).$$

更进一步，我们有以下结论

**命题 3.4.**

$$\widetilde{\rho_1}|_A \times \cdots \times \widetilde{\rho_h}|_A : A = \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}^h$$

是代数同构.

证明. 利用 $\mathbb{C}$-代数 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 的中心是 $\mathbb{C}$ (与所有矩阵都可以交换的矩阵是数量阵). 于是根据命题 3.1，此结论的证明是显然的. □

回忆，对于交换环 $R$，称 $a \in R$ 在 $\mathbb{Z}$ 上整，如果存在首一多项式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得 $f(a) = 0$.

**命题 3.5.** 设 $u = \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \sigma \in \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 且 $u_\sigma$ 是代数整数，即 $u_\sigma$ 在 $\mathbb{Z}$ 上整.

证明. 令 $e_i = \sum_{\sigma \in O(\sigma_i)} \sigma$ $(i = 1, 2, ..., h)$ 组成 $\mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 的一组基，其中 $O(\sigma_i)$ 是 $\sigma_i$ 的共轭类. 于是 $u = \sum_{i=1}^h u_i e_i$ 成立，其中 $u_i$ 为代数整数 (代数整数的在加减法下封闭). 所以只需要证明 $e_i$ 在 $\mathbb{Z}$ 上整即可. 由于 $e_i e_j$ 是 $e_i$ 的线性组合，可知 $R = \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$ 的子群 $\sum_{i=1}^h \mathbb{Z} e_i$ 是 $R$ 的子环，利用下面的注，我们证明了这个结论. □

**注 3.6.** $u \in R$ 在 $\mathbb{Z}$ 上整 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[a]$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[a] \subset M \subset R$，其中 $M$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模.

**推论 3.7.** $\rho : G \to GL(V)$ 是 $n$ 级不可约表示，特征为 $\chi$，$u$ 如上面所定义的. 那么

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \chi(\sigma)$$

是代数整数.

证明. 定义

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}|_- &: \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C} \\ u &= \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \sigma \mapsto \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \chi(\sigma) = \mathrm{tr}((\widetilde{\rho}|_-)(u)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

这里 $\widetilde{\rho}|_-$ 是代数同态，所以把 $\mathbb{Z}$-整的元素映到 $\mathbb{Z}$-整的元素. □

**推论 3.8.** 不可约表示的级整除群的阶数.

证明. 取 $u = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1})\sigma \in \mathrm{Center}(\mathbb{C}[G])$. 根据推论 3.7 以及第一正交关系，可得

$$\frac{1}{n}\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1})\chi(\sigma) = \frac{|G|}{n} \in \mathbb{Q}$$

是代数整数，这意味着 $\frac{|G|}{n}$ 是整数. $\square$

**推论 3.9.** 设 $\chi$ 是 $G$ 的不可约特征标，对于任意的 $\sigma \in G$，令

$$\omega(\sigma) := \frac{|O(\sigma)|\chi(\sigma)}{\chi(1)}.$$

这里 $O(\sigma)$ 是含有 $\sigma$ 的共轭类. 则 $\omega : G \to \mathbb{C}$ 为类函数. 且 $\omega(\sigma)$ 是代数整数，对于任意的 $\sigma \in G$ 都成立.

证明. 若 $\sigma$ 与 $\tau$ 共轭，则 $O(\sigma) = O(\tau)$ 且 $\chi(\sigma) = \chi(\tau)$. 所以 $\omega$ 是类函数. 令

$$u_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma' \in O(\sigma) \\ 0, & \sigma' \notin O(\sigma). \end{cases}$$

利用推论 3.7，可得

$$\frac{1}{\chi(1)}\sum_{\sigma' \in G} u_{\sigma'}\chi(\sigma') = \frac{|O(\sigma)|}{\chi(1)}\chi(\sigma)$$

是代数整数. $\square$

**注 3.10.** 注意到，$\frac{|O(\sigma)|}{\chi(1)}\chi(\sigma)$ 是代数整数这一点并不是直接由 $\chi(\sigma)$ 是整数的性质. 这是显然的，因为整数的比不一定是整数.

## 3.3 Abel 群的表示

下面我们来介绍 Abel 群的表示.

**定理 3.11.** 设 $G$ 是有限群，那么 $G$ 是 *Abel* 群当且仅当其所有的不可约表示的级都是 1.

证明. 设其所有的不可约表示 $\rho_i$ $(i = 1, 2, ..., h)$，级分别是 $n_1, n_2, ..., n_h$. 这里很显然 $h$ 是 $G$ 的共轭类的数量，并且

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} n_i^2.$$

那么显然 $G$ 是 Abel 群当且仅当 $h = |G|$ 这意味着 $n_i = 1$ 对于任意的 $i$ 都成立. $\square$

**推论 3.12.** $G$ 为有限群，$A \subset G$ 是 *Abel* 子群，则 $G$ 的不可约表示的级满足 $\leq \frac{|G|}{|A|}$.

证明. 设 $\rho : G \to GL(V)$ 是一个不可约表示，设 $W \subset V$ 为 $\rho|_A : A \to GL(W)$ 的一个不可约子表示. 则由上述定理可得 $\dim W = 1$. 令 $V'$ 为由

$$\{\rho(\sigma)(W) : \sigma \in G\}$$

生成的 $V$ 的子空间，则 $V'$ 在 $G$ 作用下稳定. 由于 $V'$ 是 $G$-子模，于是 $V' = V$. 对于任意的 $g \in G$，$a \in A$，可得

$$\rho(ga)(W) = \rho(g)\rho(a)W = \rho(a)W.$$

所以 $\{\rho(\sigma)(W) : \sigma \in G\}$ 中不同的一维子空间最多只有 $\frac{|G|}{|A|}$ 个. 于是 $\dim V \leq \frac{|G|}{|A|}$. □

**推论 3.13.** 有限群 $G$ 的线性表示的个数等于 $[G : G']$. 其中 $G' = [G, G]$.

证明. 每一个特征标 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ 是 $G$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的乘法群的同态. 从而诱导 $\widetilde{\chi} : G/G' \to \mathbb{C}^\times$ 的同态. 所以 $\widetilde{\chi}$ 是 $G/G'$ 的特征标. 反之 $G/G'$ 的特征标也诱导了 $G$ 的特征标. 根据上述定理，就证明了上述结论. □

# 4 表示论的应用

**命题 4.1.** $\chi$ 是 $G$ 的不可约特征标，$\sigma \in G$，若 $(\chi(1), |O(\sigma)|) = 1$ 则或者 $\chi(\sigma) = 0$，或者 $|\chi(\sigma)| = \chi(1)$.

证明. 若 $(\chi(1), |O(\sigma)|) = 1$，则存在 $u, v \in \mathbb{Z}$，使得

$$u\chi(1) + v|O(\sigma)| = 1.$$

所以

$$\frac{\chi(\sigma)}{\chi(1)} = \frac{(u\chi(1) + v|O(\sigma)|)\chi(\sigma)}{\chi(1)} = u\chi(\sigma) + v\omega(\sigma)$$

是代数整数，这里 $\omega(\sigma) = \frac{|O(\sigma)|\chi(\sigma)}{\chi(1)}$ 是代数整数. 设 $\sigma$ 的阶是 $n$，$\chi(1) = m$ 并且

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\varphi(n)}$$

是 $\varphi(n)$ 个 $n$ 次本原单位根则

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - \xi_i)$$

是 $n$ 次分圆多项式. 于是 $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 并且首 1. 记 $\chi = \chi_\rho$ 其中 $\rho : G \to GL(m, \mathbb{C})$ 是一个不可约表示，则 $\rho(\sigma)$ 的特征值的 $n$ 次方幂为 1. 所以

$$\chi(\sigma) = \sum \rho(\sigma) \text{ 的特征值} = \sum_{i=1}^{m} \xi_1^{k_i}.$$

令

$$a_1 = \frac{\chi(\sigma)}{\chi(1)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_1^{k_i}, \quad a_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_j^{k_i},\ j = 2, 3, ..., \varphi(n).$$

设 $E/\mathbb{Q}$ 是 $\phi_n(x)$ 的分裂域，$\xi_1 \mapsto \xi_j$ 是 $E$ 的自同构，这个同构将 $a_1$ 映为 $a_j$ 所以 $a_j$ 也是代数整数，于是

$$b = \prod_{j}^{\varphi(n)} a_j$$

是 $\xi_1, ..., \xi_{\varphi(n)}$ 的对称多项式，从而 $b \in \mathbb{Q}$，但是 $b$ 是代数整数，于是 $b \in \mathbb{Z}$. 若 $|\chi(\sigma)| < \chi(1)$ (显然 $|\chi(\sigma)| \leq \chi(1)$)，则 $|a_1| < 1$. 而由 $|a_j| \leq 1$ 对于任意的 $j = 2, 3, ..., n$ 成立，所以 $|b| < 1$. 这意味着 $b = 0$，所以 $a_1 = 0$，也就是 $\chi(\sigma) = 0$. □

**定理 4.2.** *有限单群的共轭类的长度不能是素数的正方幂.*

证明. 可设 $G$ 为有限非交换单群，$\sigma \in G$，若 $|O(\sigma)| = p^a$，其中 $p$ 为素数并且 $p^a||G|$. 又设 $\chi_i$ $(i = 1, 2, ..., h)$ 是 $G$ 的所有互不等价的不可约特征标. 其中 $\chi_1 = I$ 是单位特征标. 则 $|G| = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(1)^2$. 那么存在 $\chi_i$ $i \neq 1$ 使得 $p \nmid \chi_i(1)$. 不妨设

$$p \nmid \chi_1(1), ..., p \nmid \chi_r(1), p|\chi_{r+1}(1), ..., p|\chi_h(1),$$

其中 $h \geq r \geq 2$. 我们断言 $\chi_i(\sigma) = 0$，对于任意的 $i = 2, ..., r$ 成立. 若不然，利用上面的命题，有 $|\chi_i(\sigma)| = \chi_i(1)$. 接着，为了让我们的证明能够继续下去，我们给出一个引理.

**引理 4.3.** *$\rho : G \to GL(V)$ 是一个复表示，若 $|\chi_\rho(\sigma)| = \chi_\rho(1)$ 则 $\rho(\sigma)$ 是数乘变换.*

证明. 这个引理的证明是容易的，根据特征标的定义，可得

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^{\dim V} \xi_i$$

其中 $\xi_i$ 是 $\rho(\sigma)$ 的特征值，也就是 $|\langle\sigma\rangle|$ 次单位根. 于是

$$\chi_\rho(1) = |\chi_\rho(\sigma)| \leq \sum |\xi_i| = \chi_i(1).$$

等号成立的充要条件是 $\xi_i$ 的辐角都是相等的，这样就证明了这个引理. □

下面，我们回到原题. 由于 $G$ 是单群，那么 $\rho$ 是忠实的表示，根据上述引理，可得 $\sigma \in Z(G)$. 又由于 $G$ 是单群，所以 $G$ 可交换. 利用第二正交关系

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(1)\chi_i(\sigma) = 0.$$

则

$$-\frac{1}{p} = \sum_{i=r+1}^{h} \frac{\chi_i(1)}{p} \chi_i(\sigma)$$

是代数整数，矛盾. □

**定理 4.4** (Burnside)**.** *$p, q$ 为素数，$a, b \in \mathbb{N}$ 则 $p^a q^b$ 阶群必然可解.*

证明. 设 $G$ 是使得上述结论不成立的阶最小的群. 很显然，$G$ 是单群，这是因为若不然，其有一个正规子群 $N$，根据 $G$ 的定义 $N$ 与 $G/N$ 都可解可推出 $G$ 可解. 设 $P$ 是 $G$ 的一个 Sylow $p$-子群，由于 $Z(P) \neq \{1\}$ 所以可以取 $1 \neq \sigma \in Z(P)$. 考虑 $G$ 在 $G$ 上的共轭作用则 $P \subset G_\sigma$. 那么 $|O(\sigma)||G_\sigma| = |G|$ 并且 $p^a||G_\sigma|$ 所以 $|O(\sigma)|$ 是 $q$ 的正方幂，这与前一个定理矛盾. □