

Università degli Studi di Roma Tor Vergata - Facoltà di  
Giurisprudenza  
Corso di Laurea in Scienze dell'Amministrazione e delle Relazioni  
Internazionali

Microeconomia  
Esercitazioni svolte in classe

Luisa Lorè

A.A. 2019/2020

# Microeconomia

## Esercitazione 1 - Elementi di Matematica (1)

Luisa Lorè\*

27/02/2020

### 1 Potenze e radicali

#### 1.1 Potenze

La potenza  $n$ -esima di un numero  $x$ ,  $x^n$ , si calcola moltiplicando  $x$  per se stesso  $n$  volte. Ad esempio, elevare 2 alla terza significa moltiplicare 2 tre volte per se stesso:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

è importante ricordare che:

1. ogni numero positivo elevato alla 0 dà come risultato 1; ad esempio,  $323^0 = 1$
2. ogni numero elevato alla 1 è uguale a se stesso; ad esempio,  $2^1 = 2$
3. elevare un numero  $x$  alla meno  $n$  significa calcolare  $\frac{1}{x^n}$ ; ad esempio,  $2^{-3} = \frac{1}{8}$

#### 1.2 Radicali

La radice  $n$ -esima di un numero  $x$  si definisce come quel numero che, elevato alla  $n$ , dà come risultato  $x$ . Facendo riferimento all'esempio precedente:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

è importante ricordare che:

1. ogni radicale può essere espresso come una potenza, secondo la seguente regola:  
 $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
2. dalla regola del punto 1, deriva che:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ . Intuitivamente, se  $m = n$ , allora vale che:  $\sqrt[n]{x^n} = x$
3. tutti i numeri possono essere elevati a potenza, ma solo i numeri positivi possono essere portati sotto radici di indici pari; ad esempio, non si può calcolare la radice quadrata (di indice uguale a 2 e, dunque, pari) di -5

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

### 1.3 Proprietà di potenze e radicali

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^n y^n = (xy)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

## 2 Equazioni di primo grado ad un'incognita

Le equazioni di primo grado ad una incognita sono uguaglianze tra due polinomi che hanno grado 0 o 1, dove per grado del polinomio si intende l'esponente più alto associato alla  $x$  (l'incognita). Un esempio è dato da:

$$2x + 3 = 1$$

Risolvere un'equazione vuol dire individuare il valore dell'incognita (la  $x$ ) per cui l'uguaglianza è verificata; nel farlo, è di cruciale importanza ricordare due tecniche:

1. è possibile sommare o sottrarre uno stesso da numero da entrambi i membri
2. è possibile moltiplicare o dividere per uno stesso numero entrambi i membri

Facendo riferimento all'esempio mostrato in precedenza, l'equazione può essere risolta attraverso due passaggi:

1. si sottrae il numero 3 da entrambi i membri, ottenendo:

$$2x + 3 = 1 \rightarrow 2x + 3 - 3 = 1 - 3 \rightarrow 2x = -2$$

2. si dividono entrambi i membri per 2, ottenendo:

$$2x = -2 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \rightarrow x = -1$$

## 3 Equazioni con potenze e radicali (grado diverso da uno)

Le equazioni con potenze e radicali si risolvono secondo la stessa logica applicata nel caso delle equazioni di primo grado. Vanno tuttavia tenuti in considerazione due elementi aggiuntivi:

1. le proprietà delle potenze e dei radicali
2. è possibile elevare per il medesimo esponente entrambi i membri

Un esempio è fornito dall'equazione:

$$x^3 - 3 = 5$$

Questa equazione si risolve attraverso due passaggi:

1. si aggiunge 3 ad entrambi i membri
2. si elevano alla  $\frac{1}{3}$  entrambi i membri, ottenendo:

$$x^3 = 8 \rightarrow x^{3\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \rightarrow x = 2$$

## 4 Le funzioni

### 4.1 Il concetto di funzione

Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme detto dominio uno ed un solo elemento di un insieme detto codominio. Detto diversamente, una funzione consente di trasformare i valori di una variabile input  $x$  in valori di una variabile output  $y$ , secondo la relazione:

$$Y = f(x)$$

Le funzioni ad una variabile si rappresentano nel piano cartesiano, costruito con un asse orizzontale e un asse verticale. Sull'asse orizzontale vengono rappresentati i valori della variabile input  $x$  e sull'asse verticale i valori assunti dalla variabile output  $y$ . La funzione si disegna come l'insieme dei punti del piano cartesiano che rappresentano combinazioni di  $x$  e di  $y$ , individuate secondo la relazione espressa dalla funzione stessa. Nel corso di Microeconomia assume rilevanza il primo quadrante (quello in alto a destra) del piano cartesiano.

### 4.2 La retta

Nel corso di Microeconomia, la classe di funzioni che assume la maggiore importanza sin dai primi argomenti trattati dal libro di testo è quella delle rette.

La generica equazione di una retta è:

$$y = mx + q$$

Oltre alle due variabili  $x$  ed  $y$ , due elementi, costanti, sono presenti:

1. il coefficiente angolare  $m$ , che indica la pendenza della retta. 4 casi sono importanti da ricordare:
  - $m > 0$  indica che la retta è inclinata positivamente (va verso l'alto)
  - $m < 0$  indica che la retta è inclinata negativamente (va verso il basso)
  - $m = 0$  indica che la retta è orizzontale e la sua equazione è:  $y=q$
  - $m$  non esiste (o, più precisamente, è pari a  $\infty$ ) nel caso di una retta verticale, del tipo  $x = k$

2. l'intercetta  $q$ , che indica il valore assunto dalla variabile  $y$  quando la  $x$  è pari a zero e dunque l'intersezione tra la retta e l'asse verticale; ovviamente, nel caso di retta verticale, questo valore non esiste, in quanto la retta non interseca l'asse verticale ma è alla stessa parallela

### 4.3 Retta passante tra due punti

Spesso nel corso di Microeconomia si è chiamati a rappresentare una funzione lineare (una retta) nel piano. Posto che tra due punti passa una e una sola retta, per disegnare una retta su un piano cartesiano basta individuare i valori assunti dalla funzione che la rappresenta in corrispondenza di due valori della  $x$  (o, più in generale, della variabile i cui valori sono rappresentati sull'asse orizzontale).

Spesso nel corso di Microeconomia si è chiamati ad individuare l'equazione di una retta passante tra due punti. In questo caso bisogna partire dal calcolo del coefficiente angolare, per poi determinare il valore dell'intercetta secondo la formula dell'equazione di una retta generica. Questo procedimento può essere chiarito da un esempio.

**Esercizio** Si determini l'equazione della retta passante per i punti 1 e 2, di coordinate  $P_1 = (3; 8)$  e  $P_2 = (4; 5)$

Svolgimento:

- Il primo passaggio consiste nella determinazione del coefficiente angolare  $m$  secondo questa formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nell'esempio in esame,

$$m = \frac{5 - 8}{4 - 3} = \frac{-3}{1} = -3$$

Dal momento che il coefficiente angolare è negativo, deduciamo che questa retta è inclinata negativamente, il che non ci deve stupire, dal momento che se la  $x$  aumenta da 3 a 4 la  $y$  decresce da 8 a 5.

- Nel secondo passaggio, una volta determinato  $m$ , si utilizza l'equazione di una retta generica, si sostituiscono le variabili  $x$  ed  $y$  con le coordinate di uno dei due punti (non importa quale dei due), si sostituisce  $m$  con il valore trovato e si risolve l'equazione per  $q$ . In particolare, l'equazione di una retta è

$$y = mx + q$$

Facendo riferimento alle coordinate del punto 1 e al coefficiente angolare individuato, si ottiene

$$8 = (-3)(3) + q$$

Da cui

$$q = 17$$

Di conseguenza l'equazione della retta passante per i punti 1 e 2 è:

$$y = -3x + 17$$

## 4.4 Intersezione tra due rette: i sistemi lineari

Nella risoluzione degli esercizi del Corso di Microeconomia spesso vi sar chiesto di individuare il punto di intersezione tra due rette (vale a dire, il punto in corrispondenza del quale due rette si incontrano, assumendo lo stesso valore). Per svolgere un esercizio di questo tipo, bisogna inserire all'interno di un sistema lineare le equazioni delle due rette e trovare i valori della  $x$  e della  $y$  (o, più in generale, delle due variabili presenti nelle equazioni) che risolvono il sistema stesso. Per risolvere i sistemi lineari ci sono 4 metodi: sostituzione, confronto, addizione o sottrazione, Cramer. Il più semplice ed intuitivo è il metodo di sostituzione. Siete comunque liberi di applicare il metodo che preferite. Chiariamo tutto con un esempio.

**Esercizio** Date le rette di equazioni  $3x + 2y = 5$  e  $x + y = 7$ , individuare le coordinate del punto di intersezione.

### Svolgimento

1. il primo passaggio consiste nel porre a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

2. in accordo al metodo di sostituzione, bisogna esplicitare un'equazione (possibilmente quella più facile da gestire) rispetto ad un'incognita; nel nostro caso, esplicheremo la seconda equazione rispetto alla  $y$ , nella consapevolezza che altre scelte sono possibili ed ugualmente corrette:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

3. il terzo passaggio consiste nel trascrivere la seconda equazione nella prima, sostituendo il valore ricavato al posto dell'incognita precedentemente esplicitata (nel nostro caso, sostituiamo all'interno della prima equazione  $y$  con  $(7 - x)$ ); la seconda equazione viene copiata così com'è:

$$\begin{cases} (3x + 2(7 - x)) = 5 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

4. a questo punto la prima equazione è diventata un'equazione di primo grado ad un'incognita e si può risolvere attraverso le regole esposte all'inizio di questa esercitazione:

$$\begin{cases} 3x + 14 - 2x = 5 \rightarrow x + 14 = 5 \rightarrow x = -9 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

5. a questo punto abbiamo individuato il valore della  $x$ ; per determinare quello della  $y$  basta sostituire, nella seconda equazione, la variabile  $x$  con il valore individuato  $(-9)$ :

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 7 - x \rightarrow y = 7 - (-9) \rightarrow y = 16 \end{cases}$$

6. il punto di intersezione tra le rette ha coordinate  $x^* = -9$  e  $y^* = 16$

## 5 Funzione logaritmica ed esponenziale

Un'equazione esponenziale si presenta nel seguente modo:

$$a^x = b$$

Ad esempio

$$2^x = 8$$

Per risolverla è necessario esprimere le costanti come numeri elevati a potenza in modo tale da ottenere potenze con la stessa base in entrambi i membri dell'equazione e poter occuparsi delle incognite, in questo modo:

$$2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$$

Ripartiamo ora dalla forma generica di equazione esponenziale

$$a^x = b$$

E definiamo il logaritmo nel seguente modo

$$\log_a(b) = x$$

(si legge: *logaritmo di b in base a uguale ad x*)

Il logaritmo quindi è una funzione che ha come valore l'indice della potenza ( $x$ ) a cui dobbiamo elevare la base ( $a$ ) per ottenere l'argomento ( $b$ ).

Convenzionalmente la base del logaritmo è 10, ma esiste anche una base “speciale” che è molto frequentemente utilizzata in economia e in statistica, il numero del Nepero,  $e$ . Il logaritmo in base  $e$  si definisce logaritmo naturale e si scrive così

$$\ln(b) = x$$

(si legge: *logaritmo naturale di b uguale ad x*)

La funzione esponenziale è la funzione inversa a quella logaritmica, per comprendere il suo significato ripartiamo dall'equazione esponenziale che abbiamo utilizzato all'inizio

$$a^x = b \rightarrow \log_a(b) = x$$

$$\ln(b) = \log_e(b) = x \rightarrow e^x = b$$

Durante la prossima esercitazione daremo un'occhiata alla rappresentazione grafica della funzione logaritmica e di quella esponenziale.

# ESERCIZI

**1.1** Calcolare le seguenti potenze:

1.  $6^2$

2.  $3^3$

3.  $2^4$

4.  $6^{-2}$

5.  $3^{-3}$

6.  $2^{-4}$

**1.2** Scrivere i seguenti radicali in forma di potenza e le seguenti potenze in forma di radicali:

1.  $\sqrt[5]{3}$

2.  $\sqrt[6]{3^5}$

3.  $2^{\frac{1}{2}}$

4.  $3^{\frac{4}{5}}$

5.  $\sqrt[6]{10^6}$

6.  $2^{-\frac{1}{2}}$

**1.3** Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le proprietà di potenze e radicali:

1.  $5^3 5$

2.  $2^4 2^{0.25}$

3.  $\frac{6^5}{6}$

4.  $\frac{30^9}{30^{10}}$

5.  $\frac{6}{2^2 3^2}$

6.  $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$

**2** Risolvere le seguenti equazioni:

1.  $3x + 5 - 7x = 4x + 1$

2.  $3 + 80x = -3 + 6x$

3.  $2 + \frac{(x+1)}{4} = 5$



**3** Risolvere le seguenti equazioni:

1.  $x^2 + 2x - 1 = 3 + 5x - 3x$

2.  $x^3 + 4x = 27 + 10x - 6x$

3.  $x^{\frac{1}{3}} + x^2 - 2 = xx$

**4.2** Individuare il coefficiente angolare e l'intercetta delle seguenti rette; rappresentare le rette in un piano cartesiano.

1.  $5 = 3x + 2y$

2.  $3y = 18 + 6x$

3.  $25 = 5y + 10x$

4.  $y = 5x + 10 - 2x + 3$

**4.3** Individuare l'equazione della rette passanti tra i seguenti punti e rappresentarle graficamente:

1.  $(5; 2)$   $(3; 1)$

2.  $(5; 2)$   $(5; 1)$

3.  $(6; 1)$   $(4; 1)$

4.  $(8; 3)$   $(7; 2)$

**4.4** Individuare il punto di intersezione tra le seguenti rette:

1.  $y = 3x + 2$  e  $5 = 2y + 3x$

2.  $25 = 3x + 2y$  e  $2y = 4x + 6$

3.  $20x = 100$  e  $25 = 5y + 10x$

# SOLUZIONI

## 1.1

1. 32

2. 27

3. 16

4.  $\frac{1}{36}$

5.  $\frac{1}{27}$

6.  $\frac{1}{16}$

## 1.2

1.  $3^{\frac{1}{5}}$

2.  $3^{\frac{5}{6}}$

3.  $\sqrt{2}$

4.  $\sqrt[5]{3^4}$

5. 10

6.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

## 1.3

1.  $5^4$

2.  $2^{4.25}$

3.  $6^4$

4.  $\frac{1}{30}$

5.  $\frac{1}{6}$

6.  $\frac{1}{\sqrt{7}}$

## 2

1.  $\frac{1}{2}$

2.  $-\frac{3}{37}$

3. 11

### 3

1.  $\pm 2$
2. 3
3. 8

### 4.2

1.  $m = -\frac{3}{2}, q = \frac{5}{2}$
2.  $m = 2, q = 6$
3.  $m = -2, q = 5$
4.  $m = 3, q = 13$

### 4.3

1.  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
2.  $x = 5$
3.  $y = 1$
4.  $y = x - 5$

### 4.4

1.  $(x^*, y^*) = (\frac{1}{9}, \frac{7}{3})$
2.  $(x^*, y^*) = (\frac{19}{7}, \frac{59}{7})$
3.  $(x^*, y^*) = (5, -5)$

# Microeconomia

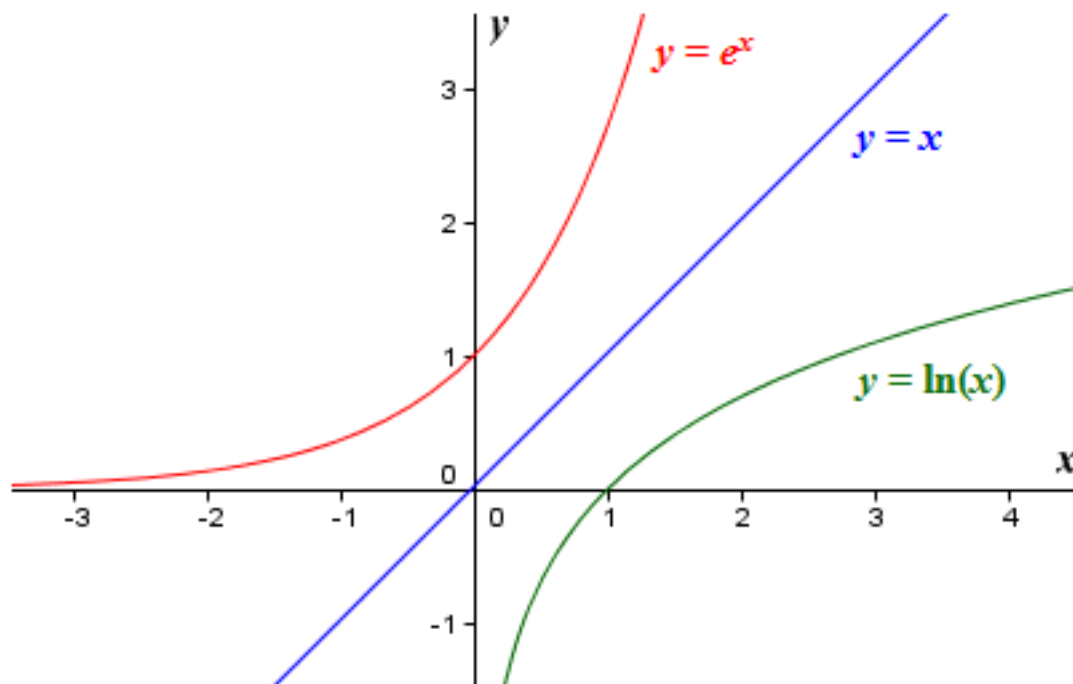
## Esercitazione 2 - Elementi di Matematica (2)

Luisa Lorè\*

03/03/2020

### 1 Funzione logaritmica ed esponenziale: rappresentazione sul piano cartesiano

Per concludere il discorso aperto durante la prima esercitazione riguardo queste funzioni, osserviamone la rappresentazione grafica:



Sia l'esponenziale sia il logaritmo sono due funzioni crescenti, ma il primo cresce più velocemente rispetto al secondo. L'intercetta della funzione esponenziale con l'asse delle  $y$  è 1, perché questa funzione vale 1 quando  $e$  è elevato a 0 (qualsiasi numero elevato alla 0 risulta 1), mentre non è possibile che  $y$  sia zero perché non esistono valori di  $x$  tali per cui un numero diverso da zero elevato a  $x$  risulti 0, e quindi questa funzione non avrà

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

un'intercetta sull'asse delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto orizzontale per la funzione esponenziale quando essa tende a infinito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano). L'intercetta della funzione logaritmica con l'asse delle  $x$  è 1, perché questa funzione vale 0 quando l'argomento del logaritmo è 1, mentre non c'è nessun valore che  $x$  possa assumere tale per cui il valore della funzione sia uguale a 0 e quindi questa funzione non avrà un'intercetta sul piano delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto verticale per la funzione logaritmica quando essa tende a infinito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano, ma trovando il *muro* che gli pone davanti l'asintoto portata verso il basso).

## 2 Le derivate

Le derivate rappresentano il concetto matematico più importante nel corso di Microeconomia. Siete pertanto invitati a prestare particolare attenzione a questo paragrafo. La piena comprensione delle derivate è la premessa necessaria per la comprensione di tutti gli esercizi che verranno discussi durante il corso di Microeconomia.

### 2.1 La derivata prima di una funzione

La derivata prima di una funzione  $f(x)$  in un punto di ascissa  $x_0$ ,  $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ , indica il coefficiente angolare (e dunque la pendenza) della retta tangente alla funzione  $f(x)$  in  $x_0$ .

### 2.2 Interpretazione economica del concetto di derivata

È importante ricordare un'ulteriore interpretazione del concetto di derivata, coerente rispetto alla precedente definizione e di grande rilevanza nell'ambito del Corso di Microeconomia. In particolare, la derivata prima di una funzione indica l'impatto sulla variabile output  $y$  di una unità aggiuntiva della variabile input  $x$ .

## 2.3 Calcolo delle derivate

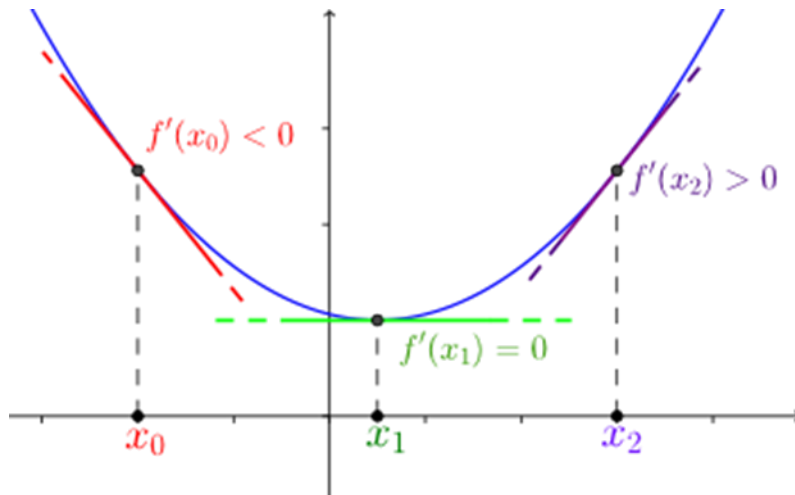
Per effettuare il calcolo delle derivate, si utilizzano le regole di derivazione, le quali consentono, a partire da una funzione  $f(x)$ , di individuare la funzione che esprime la sua derivata prima  $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ .

La seguente tabella riporta in modo esaustivo le regole di derivazione.

funzione	derivata prima
$f(x) = k$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$
$f(x) = x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1$
$f(x) = kh(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k \frac{\partial h(x)}{\partial x}$
$f(x) = kx$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k$
$f(x) = x^{(n)}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = nx^{(n-1)}$
$f(x) = g(h(x))$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \frac{\partial g(h(x))}{\partial x}$
$f(x) = \ln(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = e^x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = e^x$
$f(x) = a^x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = a^x \ln(a)$
$f(x) = h(x) + g(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x}$
$f(x) = h(x)g(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} h(x)$
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} h(x)}{[g(x)]^2}$

## 2.4 Derivata e andamento della funzione

Calcolare la derivata di una funzione è di fondamentale importanza dal momento che ci consente di comprendere quale sia l'andamento della funzione stessa, come si evince chiaramente dalla seguente rappresentazione grafica.



In particolare, siamo interessati a tre casi:

1. Se la derivata è minore di zero, significa che la funzione è decrescente (vale a dire, va verso il basso);
2. Se la derivata è maggiore di zero, significa che la funzione è crescente (vale a dire, va verso l'alto);
3. Se la derivata è pari a zero, significa che la funzione è né crescente né decrescente: è caratterizzata da un punto stazionario e la retta tangente alla funzione è orizzontale.

## 3 La derivata seconda

La derivata seconda di una funzione  $f(x)$ ,  $f''(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x}$ , si calcola come la derivata della derivata prima  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ . Ad esempio, data la funzione  $f(x) = x^2$ , la derivata prima è  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  e la derivata seconda è  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} = 2$ .

La derivata seconda è utile dal momento che indica se la funzione sia concava o convessa. Una funzione concava è caratterizzata da una derivata seconda negativa, mentre una funzione convessa ha derivata seconda positiva.

Studiare la derivata seconda di una funzione è utile per minimizzare o massimizzare la funzione stessa. In particolare, una funzione ha un punto di minimo (un punto tale che non ci sono valori più bassi della  $y$ ) quando:

- La derivata prima è pari a zero (il punto è stazionario)
- La derivata seconda è positiva (la funzione è convessa)

Una funzione ha un punto di massimo (un punto tale che non ci sono valori più alti della  $y$ ) quando:

- La derivata prima è pari a zero (il punto è stazionario)
- La derivata seconda è negativa (la funzione è concava)

Nel Corso di Microeconomia si svolgono vari problemi di massimizzazione e minimizzazione; tuttavia, negli esercizi, non vi sar chiesto di calcolare derivate seconde. Vi troverete di fronte a funzioni concave o convesse per costruzione. Per risolvere tali problemi, dunque, basta ricordare due cose:

- Quando la funzione è concava, per massimizzarla si azzerla la derivata prima
- Quando la funzione è convessa, per minimizzarla si azzerla la derivata prima

Azzerare la derivata prima di una funzione significa calcolare l'equazione della derivata prima e individuare il valore della variabile input che la rende pari a zero.



## ESERCIZI

**2** Derivare le seguenti funzioni:

1.  $f(x) = 10x + 100$

2.  $f(x) = x^2 + 4x + 10$

3.  $f(x) = 200x - x^2 - 20x - 200$

4.  $f(x) = x + 10 + \frac{100}{x}$

5.  $f(x) = x^3 + x^{\frac{1}{2}} + 3281$

**3** Massimizzare le seguenti funzioni concave:

1.  $f(x) = 50x - x^2 + 28$

2.  $f(x) = -3x^2 + x + 3$

3.  $f(x) = -4x^2 + 5x - 45$

Minimizzare le seguenti funzioni convesse:

1.  $f(x) = x + 10 + \frac{10000}{x}$

2.  $f(x) = 4x^2 - 8x - 21$

3.  $f(x) = 2x + \frac{56}{x}$

# SOLUZIONI

## 2

1.  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 10$

2.  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x + 4$

3.  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 180 - 2x$

4.  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1 + \frac{100}{x^2}$

5.  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

## 3

1.  $x = 25$

2.  $x = \frac{1}{6}$

3.  $x = \frac{5}{8}$

1.  $x = \pm 100$

2.  $x = 1$

3.  $x = \sqrt{28}$

# Microeconomia

## Esercitazione 3 (pt. 1) - Elementi di Matematica (3)

Luisa Lorè\*

12/03/2020

### 1 Le funzioni a due variabili

Questo paragrafo potrebbe risultare difficile a livello teorico, ma, come vedrete, negli esercizi tutto sar facile ed intuitivo.

Le funzioni a due variabili si esprimono nella forma  $Z = f(X, Y)$ , dipendono da due variabili ( $X$  e  $Y$ ) e si rappresentano nello spazio individuato da tre assi ( $X, Y, Z$ ). Queste funzioni associano a combinazioni di  $X$  e  $Y$  determinati valori di  $Z$ .

Un esempio è dato da  $Z = X^2Y^3$ . Questa funzione ci dice, ad esempio, che ad una combinazione di  $X$  e  $Y$  per cui  $X = 1$  e  $Y = 2$  corrisponde un valore di  $Z$  pari ad 8.

#### 1.1 Le curve di livello

Data una funzione  $Z = f(X, Y)$ , una curva di livello, costruita sul piano  $X - Y$ , è l'insieme dei punti che rappresentano combinazioni di  $X$  e  $Y$  associate dalla funzione ad un medesimo livello di  $Z$ .

Facciamo un esempio:

Data la funzione a due variabili  $Z = X^2Y^3$ , la curva di livello  $8 = X^2Y^3$  rappresenta tutte le combinazioni di  $X$  ed  $Y$  che secondo la funzione  $Z$  danno come risultato 8. Ovviamente, il punto  $(1, 2)$  dell' esempio precedente fa parte di questa curva di livello.

Per rappresentare nel piano  $X - Y$  questa curva di livello, si fa riferimento alla funzione

$$Y^3 = \frac{8}{X^2}$$

Cioè

$$Y = \frac{2}{X^{\frac{2}{3}}}$$

#### 1.2 Le derivate parziali

Data una funzione a due variabili,  $Z = f(X, Y)$ , è possibile calcolare due derivate parziali. La derivata parziale di  $Z$  rispetto a  $X$ ,  $\frac{\partial f(X, Y)}{\partial X}$ , indica la variazione subita dalla  $Z$  in corrispondenza di una variazione infinitesimale della variabile  $X$ , tenendo costante la  $Y$ .

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

La derivata parziale di  $Z$  rispetto a  $Y$ ,  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}$ , indica la variazione subita dalla  $Z$  in corrispondenza di una variazione infinitesimale della variabile  $Y$ , tenendo costante la  $X$ .

### 1.3 Calcolo delle derivate parziali

Per calcolare la derivata parziale di una funzione  $Z = f(X, Y)$  rispetto a  $X$ , si deriva la funzione  $Z$  considerando  $X$  come una variabile e  $Y$  come una costante. Per calcolare la derivata parziale rispetto a  $Y$ , si considera  $Y$  come una variabile e  $X$  come una costante. Tutto ciò può essere chiarito con un esempio.

**Esercizio** Data la funzione  $Z = X^2Y^3$ , si determinino le derivate parziali.

**Svolgimento** La formula che bisogna ricordare è quella della derivata di una funzione moltiplicata per una costante, secondo cui, se  $f(x) = kh(x)$ , allora  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k \frac{\partial h(x)}{\partial x}$ . Iniziando dalla derivata parziale rispetto a  $x$ , si ha che  $h(x) = X^2$ , mentre  $k = Y^3$ . Essendo  $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 2X$ , si ottiene che:

$$\frac{\partial f(X, Y)}{\partial X} = 2XY^3$$

Seguendo un ragionamento del tutto analogo, si ottiene che:

$$\frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y} = 3X^2Y^2$$

## ESERCIZI

**1.1** Determinare l'equazione che esprime la curva di livello per le seguenti funzioni, dati i seguenti livelli:

1.  $Z = X^{0.5}Y^{0.5}$  con  $Z_0 = 3$

2.  $Z = X^2Y$  con  $Z_0 = 5$

3.  $Z = X^{0.25}Y^{0.25}$  con  $Z_0 = 8$

4.  $Z = X^2Y^3$  con  $Z_0 = 27$

**1.2** Determinare le derivate parziali relative alle funzioni del precedente esercizio.

# SOLUZIONI

## 1.1

1.  $Y = \frac{9}{X}$
2.  $Y = \frac{5}{X^2}$
3.  $Y = \frac{8^4}{X}$
4.  $Y = \frac{3}{X^{\frac{2}{3}}}$

## 1.2

1.  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 0.5X^{-0.5}Y^{0.5}$ ;  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 0.5X^{0.5}Y^{-0.5}$
2.  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 2XY$ ;  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = X^2$
3.  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 0.25X^{-0.75}Y^{0.25}$ ;  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 0.25X^{0.25}Y^{-0.75}$
4.  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 2XY^3$ ;  $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 3X^2Y^2$

# Microeconomia

## Esercitazione 3 (pt. 2) - Microeconomia e Mercati (1)

Luisa Lorè\*

12/03/2020

### Come organizzeremo il nostro lavoro

D'ora in poi ci concentreremo e faremo pratica sugli esercizi. Prima di iniziare questa nuova esercitazione, ecco poche utili informazioni su come leggere queste esercitazioni di volta in volta. Per ogni esercizio che faremo in aula vi ritroverete un'intestazione simile:

#### **Esercizio 1 (E1.5, E1.6)**

Durante le varie esercitazioni cercherò di non svolgere gli esercizi dell'eserciziario così da permettervi di svolgerli autonomamente durante il vostro studio individuale. Di volta in volta troverete nelle parentesi accanto al numero dell'esercizio il riferimento agli esercizi del Salustri simili a quello proposto in aula. In questo caso, il primo esercizio visto in classe è simile agli esercizi 5 e 6 sul Salustri proposti per il primo capitolo.

#### **ARGOMENTI**

Prima ancora del testo dell'esercizio troverete la lista degli argomenti che vi servirà studiare e/o ripassare per svolgere l'esercizio in questione.

#### **Esercizio 1 (E1.5, E1.6)**

#### **ARGOMENTI**

- curva di domanda diretta e inversa
- elasticità

Data la seguente combinazione di prezzi e quantità del caffè:  $A = (2, 6)$  e  $B = (4, 2)$

1. Calcolate:

- (a) La funzione di domanda diretta e il relativo grafico

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

- (b) La funzione di domanda indiretta e il relativo grafico
  - (c) L'elasticità della domanda nei due punti
2. Indicate e commentate le variazioni del grafico della domanda, in caso si verifichino i seguenti eventi:
- (a) Il reddito del consumatore si dimezza
  - (b) Il prezzo del caffè raddoppia
  - (c) Il prezzo dello zucchero aumenta
  - (d) Il prezzo del tè diminuisce
  - (e) Il prezzo del caffè si dimezza

## SOLUZIONE

1. Per calcolare la funzione di domanda diretta e indiretta procediamo di pari passo, perché hanno un procedimento speculare e quindi ci risulterà più facile risolvere simultaneamente i punti (a) e (b). Ricordate che per convenzione, la funzione della domanda diretta è in funzione del prezzo ( $Q = ap + b$ ), mentre quella della domanda indiretta è in funzione della quantità ( $p = \frac{1}{a}Q + c$ ). Calcoliamo prima la pendenza delle due rette, e poi cerchiamo le intercette sul piano delle ascisse e delle ordinate:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta p} = \frac{2 - 6}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta Q} = -\frac{1}{2}$$

Per  $p = 0$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta p} = \frac{x - 2}{0 - 4} = -2 \rightarrow (x - 2) = 8 \rightarrow x = 10$$

Per  $Q = 0$

$$\frac{\Delta p}{\Delta Q} = \frac{x - 4}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \rightarrow (x - 4) = 1 \rightarrow x = 5$$

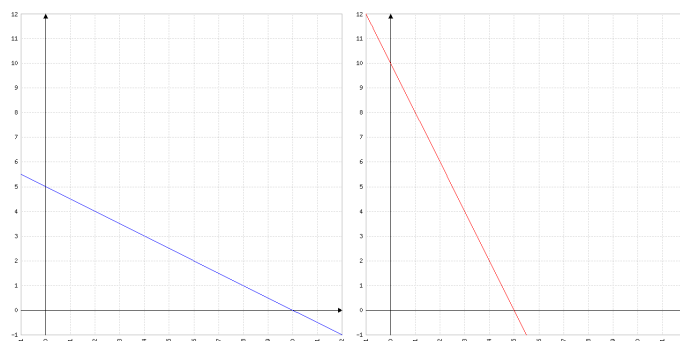
Quindi le due funzioni con i relativi grafici risultano essere

- (a) Domanda diretta

$$Q = -2p + 10$$

- (b) Domanda indiretta

$$p = -\frac{1}{2}Q + 5$$





- (c) Per calcolare l'elasticità della domanda nei due punti osservati è necessario seguire la seguente formula:

$$\varepsilon_{Q,p} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta p/p} = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \frac{p}{Q}$$

Quindi nel nostro caso per i punti  $A = (2, 6)$  e  $B = (4, 2)$  abbiamo:

$$\varepsilon_{Q,p}^A = -2 \left( \frac{2}{6} \right) = -\frac{2}{3} = 0.\bar{6}$$

$$\varepsilon_{Q,p}^B = -2 \left( \frac{4}{2} \right) = -4$$

2. Prima di svolgere questo punto cerchiamo di fare chiarezza sulla differenza tra un movimento **della curva** e un movimento **lungo la curva**:

Un movimento della curva di domanda è un vero e proprio spostamento e può essere causato da diversi fattori esterni, mentre un movimento lungo la curva di domanda è uno spostamento della posizione del consumatore sulla curva ed è determinato da una variazione del prezzo.

Per osservare le variazioni della domanda, in caso si verifichino gli eventi (a)-(e) cerchiamo di comprendere l'intuizione economica dietro a queste possibili variazioni:

- (a) Il reddito del consumatore si dimezza: questo implica che il consumatore avrà a disposizione meno reddito da allocare nel consumo del caffè e quindi la sua intera curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.
- (b) Il prezzo del caffè raddoppia: questo implica che il consumatore potrà comprare meno caffè allo stesso prezzo di prima e quindi ci sarà un movimento lungo la sua curva di domanda per il caffè verso sinistra.
- (c) Il prezzo dello zucchero aumenta: supponendo che lo zucchero sia un perfetto complemento del caffè (si definiscono perfetti complementi quei beni che si consumano solo ed esclusivamente in maniera congiunta), l'aumento del prezzo dello zucchero implica indirettamente un aumento del costo di caffè, quindi la curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.
- (d) Il prezzo del tè diminuisce: supponendo che il tè sia un perfetto sostituto del caffè (si definiscono perfetti sostituti quei beni che si consumano alternativamente l'uno all'altro), la riduzione del prezzo del tè implica indirettamente un aumento del costo di caffè, quindi la curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.
- (e) Il prezzo del caffè si dimezza: questo implica che il consumatore potrà comprare più caffè allo stesso prezzo di prima e quindi ci sarà un movimento lungo la sua curva di domanda per il caffè verso destra.

## Esercizio 2 (E1.7)

### ARGOMENTI

- Funzione del costo totale
- Funzione del ricavo totale

Data la seguente tabella di valori:

Quantità	Costo	Ricavo
0	0	0
10	200	600
20	600	1000
30	1200	1200
40	2000	1200

Quale quantità dovrebbe produrre l'imprenditore per massimizzare i suoi ricavi?

### SOLUZIONE

L'imprenditore dovrebbe produrre sempre nel punto di massimo profitto, il profitto totale in economia è sempre:

$$\pi(Q) = RT(Q) - CT(Q)$$

Nel nostro caso, quindi:

$$\pi(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\pi(10) = 600 - 200 = 400$$

$$\pi(20) = 1000 - 600 = 400$$

$$\pi(30) = 1200 - 1200 = 0$$

$$\pi(40) = 2000 - 1200 = -800$$

Il punto di massimo profitto corrisponde a  $Q = 10$  o a  $Q = 20$ , sebbene i punti di massimo ricavo siano  $Q = 30$  e  $Q = 40$ .

# Microeconomia

## Esercitazione 4 - Microeconomia e Mercati (2)

### La scelta del consumatore (1)

Luisa Lorè\*

19/03/2020

#### Esercizio 1 (E1.9)

##### ARGOMENTI

- Costo totale, costo medio e costo marginale

Data la tabella successiva:

Output	Lavoro(L)	Capitale (K)
0	0	0
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15

Un costo fisso pari a 20, un costo del lavoro unitario pari a 3 ed un costo unitario del capitale di 4. Calcolate per ogni livello di output:

1. il costo totale sostenuto dall'imprenditore
2. il valore assunto dalla funzione del costo medio
3. il valore assunto dalla funzione del costo marginale

##### SOLUZIONE

1. Per calcolare il costo totale sostenuto dall'imprenditore, possiamo costruire la funzione di costo totale in questo modo:

$$CT(Q) = 20 + (3L) + (4K) = 20 + 18(Q)$$

La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

2. Per il valore assunto della funzione del costo medio, possiamo costruire la seguente funzione:

$$CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{20 + 18(Q)}{Q}$$

La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.

3. Per il valore assunto della funzione del costo marginale, possiamo costruire la seguente funzione:

$$CMa(Q) = \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = 18$$

La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.

Output	CT	CMe	CMa
0	20	-	-
1	38	38	18
2	56	28	18
3	74	24,6	18
4	92	23	18
5	110	22	18

## Esercizio 2 (E2.5, E2.6)

### ARGOMENTI

- Preferenze
- Utilità
- Saggio marginale di sostituzione

Le preferenze di un individuo sono rappresentate dalla seguente funzione d'utilità:

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

1. Data la precedente funzione verificate l'utilità dei panieri corrispondenti ai punti  $A = (9, 4)$  e  $B = (4, 1)$ . Quali considerazioni è possibile trarre riguardo il valore d'uso dei due panieri corrispondenti ai punti A e B?
2. Quali tra le seguenti funzioni possono rappresentare le stesse preferenze espresse dalla nostra funzione d'utilità:

(a)  $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$

(b)  $U(x_1, x_2) = 6x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{5}{2}}$

(c)  $U(x_1, x_2) = 18x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$

(d)  $U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$

3. Verificate se le curve d'indifferenza associate alla funzione d'utilità sono crescenti o decrescenti.
4. Calcolate la pendenza della curva d'indifferenza, quali sono le rilevanti considerazioni che possiamo fare riguardo il modulo e il segno?
5. Calcolate le funzioni di utilità marginale per i due beni.
6. Calcolate il SMS.

## SOLUZIONE

1. Per verificare l'utilità dei panieri corrispondenti ai punti  $A = (9, 4)$  e  $B = (4, 1)$  dobbiamo inserire i valori dei due punti all'interno della funzione d'utilità, in questo modo:

$$U_A = 3 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

$$U_B = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Tutto ciò che possiamo affermare è che il valore d'uso del paniere  $A$  è superiore a quello del paniere  $B$ . Non possiamo però fare considerazioni riguardo all'entità del dislivello fra  $A$  e  $B$ , ad esempio non possiamo dire che l'utilità del primo paniere è il triplo del secondo, questo perchè l'utilità non è misurata in termini ordinali.

2. La risposte esatte possono essere la (a) e la (c) poichè, fra le quattro funzioni proposte, sono le uniche ad essere trasformazioni lineari della funzione d'utilità di partenza.
3. Per derivare le curve d'indifferenza è necessario fissare un livello d'utilità  $\bar{U}$  ed esplicitare la funzione in termine di  $x_2$ , così:

$$\bar{U} = 3x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \longrightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{U}}{3x_1^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow x_2 = \frac{\bar{U}^2}{9x_1}$$

Possiamo ora osservare che all'aumentare del bene  $x_2$  corrisponde automaticamente una diminuzione del bene  $x_1$ . Si può concludere quindi, sia che i due beni presentati siano effettivamente due beni secondo le preferenze dell'individuo (nessuno dei due beni è un male), sia che, di conseguenza, le curve d'indifferenza hanno una pendenza negativa.

4. Per derivare la pendenza della curva d'indifferenza deriviamo  $x_2$  per  $x_1$  in questo modo:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{\bar{U}^2}{9x_1^2} \longrightarrow \left| \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right| = \frac{\bar{U}^2}{9x_1^2}$$

Le cose interessanti che possiamo notare sono: che la pendenza della curva d'indifferenza è negativa, e questo ci conferma il ragionamento portato avanti nel punto 3., e che all'aumentare del bene  $x_1$  il modulo della pendenza tende a diminuire e che quindi la curva d'indifferenza tende ad essere più piatta.

5. Per calcolare la funzione di utilità marginale di un bene  $Umg$ , è necessario derivare la funzione di utilità per il bene di cui stiamo calcolando la  $Umg$ :

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 3 \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 3 \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

6. Per calcolare il SMS facciamo il rapporto tra l'utilità marginale dei due beni:

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{3}{2} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

Il SMS è la pendenza della curva d'indifferenza del nostro individuo, infatti, se sostituiamo la funzione d'utilità all'interno della pendenza trovata nel punto 4. quello che otteniamo è appunto il SMS:

$$\left| \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right| = \frac{\bar{U}^2}{9x_1^2} = \frac{(3x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})^2}{9x_1^2} = \frac{9x_1x_2}{9x_1^2} = \frac{x_2}{x_1} = SMS$$

# Microeconomia

## Esercitazione 5 - La scelta del consumatore (2)

Luisa Lorè\*

02/04/2020

### Esercizio 1 (E2.9, E2.10, E2.11, E2.12)

#### ARGOMENTI

- Vincolo di bilancio

Dati i beni  $x_1$  e  $x_2$ , i rispettivi prezzi  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 4$  ed un reddito  $R = 400$ :

1. Scrivete il vincolo di bilancio nella forma  $x_2 = f(x_1)$ , evidenziando le intercette ed il coefficiente angolare della funzione.
2. Individuate l'insieme delle possibilità di consumo.
3. Ripetete i punti 1. e 2. supponendo un aumento del 20% del reddito del consumatore.

#### SOLUZIONE

Per comodità il vincolo di bilancio va sempre espresso nella forma  $x_2 = f(x_1)$  poiché sarà più utile questa forma per poterlo in seguito rappresentare su di un piano cartesiano. Ma è molto importante conoscere e partire con la nostra analisi dalla seguente formula:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2$$

E poi eventualmente riscriverla nel seguente modo:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 \longrightarrow p_2x_2 = R - p_1x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Questo perché la forma espressa dalla prima formula ci aiuta a comprendere meglio il concetto del vincolo di bilancio ed il suo funzionamento. Prima di inserire i numeri all'interno del vincolo cerchiamo di capire dalla forma generica quali siano le intercette ed il coefficiente angolare.

- Partiamo dal coefficiente angolare, la costante che nella forma  $x_2 = f(x_1)$  è moltiplicata per  $x_1$ , quindi  $-\frac{p_1}{p_2}$ . La pendenza del vincolo di bilancio è data dal rapporto tra i due prezzi.

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

- Passiamo ora alle intercette, sappiamo dalla forma  $x_2 = f(x_1)$  che l'intercetta sull'asse  $x_2$ , cioè il valore che la retta assume quando  $x_1 = 0$  è  $x_2 = \frac{R}{p_2}$ . Quale intuizione economica ci suggerisce questo? Le intercette del vincolo di bilancio rappresentano quante unità di un bene il consumatore avrebbe la possibilità di acquistare nel caso decidesse di comprare solo quel bene, quindi se allocasse il suo intero reddito in un bene. Appare quindi evidente che le intercette sugli assi, in assenza di ulteriori condizioni, saranno sempre individuate nel seguente modo:  $x_1 = \frac{R}{p_1}$  e  $x_2 = \frac{R}{p_2}$ .

1. Per concludere,  
Vincolo di bilancio:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 \longrightarrow p_2x_2 = R - p_1x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$400 = 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 = 400 - 2x_1 \longrightarrow x_2 = 100 - \frac{1}{2}x_1$$

Coefficiente angolare:

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Intercette:

$$x_1 = \frac{R}{p_1} = \frac{400}{2} = 200$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} = \frac{400}{4} = 100$$

2. Dato il vincolo di bilancio calcolato nel punto 1., possiamo identificare l'insieme delle possibilità di consumo dell'individuo. Ripartiamo da questa formula:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2$$

Questa espressione, come abbiamo già lungamente detto, rappresenta il vincolo di bilancio, in un certo senso rappresenta al massimo quanto il consumatore può comprare, ma dobbiamo anche valutare tutti i panieri che il consumatore può acquistare senza spendere il suo intero reddito, quindi le combinazioni prezzo-quantità dei beni  $x_1$  e  $x_2$  minori di  $R$ , nel seguente modo:

$$R > p_1x_1 + p_2x_2 \longrightarrow p_2x_2 < R - p_1x_1 \longrightarrow x_2 < \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$400 > 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 < 400 - 2x_1 \longrightarrow x_2 < 100 - \frac{1}{2}x_1$$

3. Calcoliamo un aumento del 20% del reddito del consumatore nel seguente modo:

$$R + \left(R \cdot \frac{20}{100}\right) = 400 + \left(400 \cdot \frac{20}{100}\right) = 400 + 80 = 480$$

Vincolo di bilancio:

$$480 = 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 = 480 - 2x_1 \longrightarrow x_2 = 120 - \frac{1}{2}x_1$$



Coefficiente angolare:

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Inercente:

$$x_1 = \frac{R}{p_1} = \frac{480}{2} = 240$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} = \frac{480}{4} = 120$$

Insieme delle possibilità di consumo

$$480 > 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 < 480 - 2x_1 \longrightarrow x_2 < 120 - \frac{1}{2}x_1$$

## Esercizio 2 (E2.13) \*\*\*

### ARGOMENTI

N.B. Questo esercizio riassume gran parte (se non davvero tutti) dei concetti e degli argomenti trattati riguardo come, i.e. con quali strumenti ostacoli e mezzi, il consumatore compie le sue scelte. D'ora in poi questo tipo di esercizi verranno sempre contraddistinti con tre asterischi.

- Punto di ottimo del consumatore
- Tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

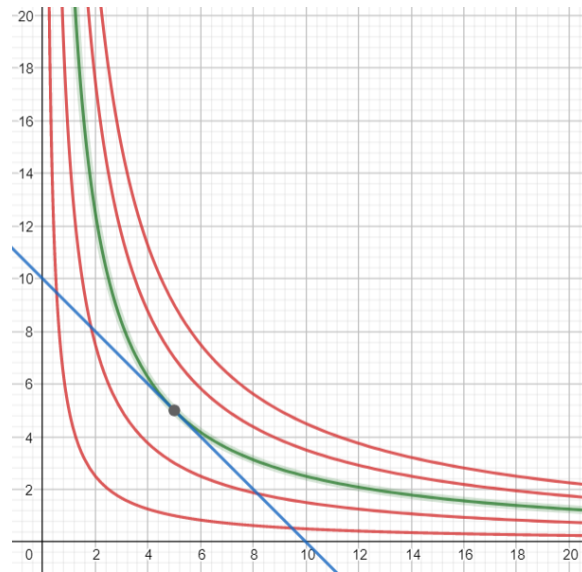
Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito  $R = 200$  in un mercato in cui i prezzi dei beni sono  $p_1 = p_2 = 10$ .

### SOLUZIONE

Il punto di ottimo del consumatore è il punto in cui l'individuo preso in analisi gode dell'utilità maggiore che può raggiungere dato il suo vincolo di bilancio, in parole povere è il più felice possibile rispetto a quelle che sono le sue risorse economiche. Dalla teoria sappiamo di dover risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \text{Condizione di Tangenza (soluzione interna)} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \rightarrow \text{Vincolo di Bilancio} \end{cases}$$

Ma perché? Come abbiamo detto già tante volte, un sistema ci aiuta ad individuare i punti in cui più curve passano e quindi punti di intersezione o di tangenza tra le due curve. In questo caso noi stiamo ponendo uguali nella prima equazione le due pendenze delle curve di cui ci interessa trovare il punto di tangenza, la funzione della curva d'indifferenza ( $SMS$ ) e il vincolo di bilancio  $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ .



La prima equazione ci esprime, quindi, come ricavare da un punto di vista matematico la situazione ottimale per il consumatore. La seconda equazione pone una restrizione al nostro problema, cioè individua al massimo quanto il consumatore può acquistare per massimizzare la sua funzione di utilità, ed è semplicemente il vincolo di bilancio. Ora, la risoluzione di questo sistema non è estremamente complessa, ma è importante sottolineare perché stiamo cercando esattamente il punto di tangenza, e non semplicemente un punto di intersezione tra le due curve. La curva di utilità tangente al vincolo di bilancio è quella che corrisponde al livello più alto possibile tra quelle che sono ancora parte del vincolo di bilancio, è la più estrema, quindi in un'ottica di massimizzazione è la migliore. Passiamo ora alla risoluzione numerica:

$$SMS = \frac{U_{mg1}}{U_{mg2}} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{10} \rightarrow x_1 = x_2 \\ 200 = 10x_1 + 10x_2 \rightarrow 200 = 10x_1 + 10x_1 \rightarrow x_1 = \frac{200}{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 = 10 \end{cases}$$

**Paniere Ottimo:**  $(x_1^*, x_2^*) = (10, 10)$

### Esercizio 3 (E2.13) \*\*\*

#### ARGOMENTI

- Punto di ottimo del consumatore
- Tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1, x_2) = \ln x_1 \ln x_2$$

1. Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito  $R = 120$  in un mercato in cui i prezzi dei beni sono  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$ .
2. Determinate come cambia la scelta di ottimo se il reddito del consumatore raddoppia ( $R' = 240$ ).

## SOLUZIONE

1. Come gi visto, per risolvere questo tipo di esercizi dobbiamo impostare un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Prima di passare al sistema, calcoliamo il SMS della funzione attraverso le utilit marginali:

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{1} = \frac{x_2}{x_1}$$

Passiamo ora alla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 120 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow 120 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \rightarrow x_1 = \frac{120}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}30 = 20 \\ x_1 = 30 \end{cases}$$

**Paniere Ottimo:**  $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*) = (30, 20)$

2. Come per il punto precedente, il sistema di risoluzione sempre quello relativo al Problema di Massimizzazione dell'Utilit:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R' = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Dovendo variare solo ed esclusivamente il reddito, l'intera prima condizione del sistema rimane invariata.

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 240 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow 240 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \rightarrow x_1 = \frac{240}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}30 = 40 \\ x_1 = 60 \end{cases}$$

**Paniere Ottimo:**  $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*) = (60, 40)$

# Microeconomia

## Esercitazione 6 - Costruire una curva di domanda (1)

Luisa Lorè\*

09/04/2020

### Esercizio 1 (=E3.7)

#### ARGOMENTI

- Concetto di domanda ottima per un bene
- Elasticità della domanda
- Definizione della natura di un bene in base all'elasticità della sua domanda

Data una generica funzione di utilità Coob-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Le elasticità delle domande ottime al prezzo, sia dirette che incrociate
3. Le elasticità delle domande ottime al reddito ed indicare se i due beni sono normali (superiori) o Giffen (inferiori)

#### SOLUZIONE

1. Calcoliamo le domande ottime per i due beni con il solito sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$Um_{g1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$$

$$Um_{g2} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}$$

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow x_2 = x_1 \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_1 x_1 \frac{\beta}{\alpha}$$

$$R = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_1 x_1$$

$$x_1^* = \frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)$$

$$x_2^* = \frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{R}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$$

2. Calcoliamo le elasticità dirette delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_1) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{1}{\frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)} = -1$$

$$\epsilon(x_2, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2^2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \frac{1}{\frac{R}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)} = -1$$

Ora invece, calcoliamo le elasticità incrociate domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_2) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_1} = 0$$

$$\epsilon(x_2, p_1) = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_2} = 0$$

3. Calcoliamo le elasticità delle domande ottime al reddito:

$$\epsilon(x_1, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R} \frac{R}{x_1} = \frac{1}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{R}{x_1} = \frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \frac{1}{\frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)} = 1$$

$$\epsilon(x_2, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R} \frac{R}{x_2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \frac{R}{x_2} = \frac{R}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \frac{1}{\frac{R}{p_2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)} = 1$$

Cosa possiamo quindi imparare da questo esercizio? La funzione di Cobb-Douglas, è una forma funzionale estremamente usata in Economia, ci permette di descrivere molto bene i fenomeni economici, e gode di diverse proprietà. Analizziamo, ad esempio, la domanda per il bene  $x_1$  ed alcune sue caratteristiche (i.e. come varia al variare del reddito  $R$ , del proprio prezzo  $p_1$  e del prezzo dell'altro bene  $p_2$ ):

$$x_1^* = \frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)$$

- Partiamo da  $p_1$ , se osserviamo la funzione possiamo renderci conto che all'aumentare del proprio prezzo, la domanda per il bene 1 diminuisce. Intuitivamente, dato che stiamo parlando di beni normali, ce lo saremmo aspettato, inoltre avevamo anche già verificato che l'elasticità della domanda al prezzo diretto è negativa.
- Per quanto riguarda  $R$ , invece, guardando la funzione capiamo come all'aumentare del reddito del consumatore, la domanda per il bene 1 aumenta. Intuitivamente, dato che stiamo parlando di beni superiori, ce lo saremmo aspettato, inoltre avevamo anche già verificato che l'elasticità della domanda al reddito è positiva.
- Infine come possiamo notare dalla funzione, il prezzo del secondo bene  $p_2$  è assente, per questo possiamo dire che la domanda del bene 1 è completamente indipendente rispetto alle variazioni del prezzo dell'altro bene. Per questo l'elasticità della domanda al prezzo incrociato è uguale a zero.

## Esercizio 2 (E3.3, E3.8, E3.11, E3.13)

### ARGOMENTI

- Perfetti Sostituti

Data la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Il paniere ottimo per un reddito del consumatore

$$R = 30$$

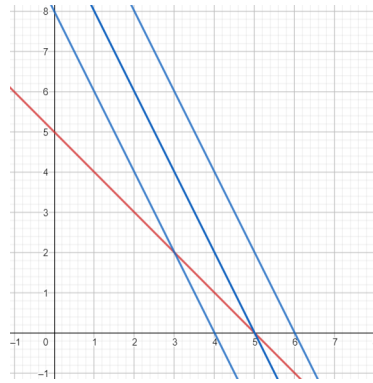
e dei prezzi di mercato  $p_1 = 3$  e  $p_2 = 1$

### SOLUZIONE

Il caso dei beni perfetti sostituti è un caso particolare, in cui il consumatore considera il consumo dei due beni equivalente (il classico esempio è quello del tè e del caffè), la scelta tra i due beni è dettata, come vedremo, unicamente dal loro prezzo.

Per comprendere come costruire la curva di domanda di questi beni, ed il paniere ottimo ai prezzi e al reddito indicati, utilizziamo una rappresentazione grafica. Possiamo osservare tre casi (in blu ci sono le curve d'indifferenza, mentre in rosso il vincolo di bilancio):

1. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno pendenze diverse, e la pendenza del primo è maggiore di quella delle seconde, quindi  $-\frac{p_1}{p_2} > -MRS \rightarrow MRS > \frac{p_1}{p_2}$ , il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è l'intercetta con l'asse  $x_1$ , come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per il bene  $x_1$  è data dall'intero reddito diviso per il prezzo del bene 1, come abbiamo potuto vedere nelle precedenti esercitazioni, mentre la domanda per il bene  $x_2$  è uguale a zero.

$$x_1 = \frac{R}{p_1} \text{ se } MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = 0 \text{ se } MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

$$MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} > \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} > \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è superiore a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è maggiore rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. È facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito nell'acquisto del bene 1.

2. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno pendenze diverse, e la pendenza del primo è minore di quella delle seconde, quindi  $-\frac{p_1}{p_2} < -MRS \rightarrow MRS < \frac{p_1}{p_2}$ , il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è l'intercetta con l'asse  $x_2$ , come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per il bene  $x_2$  è data dall'intero reddito diviso per il prezzo del bene 2, come abbiamo potuto vedere nelle precedenti esercitazioni, mentre la domanda per il bene  $x_1$  è uguale a zero.

$$x_1 = 0 \text{ se } MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} \text{ se } MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

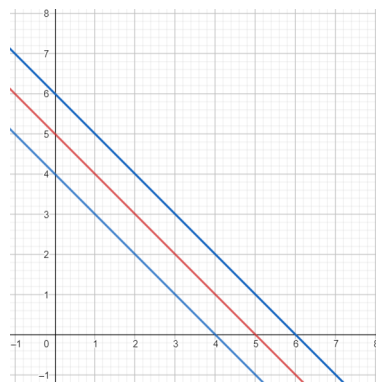
$$MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} < \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} < \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è inferiore a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è minore rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. E facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito nell'acquisto del bene 2.

3. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno la stessa pendenza, quindi  $-\frac{p_1}{p_2} = -MRS \rightarrow MRS = \frac{p_1}{p_2}$ , il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è un qualsiasi punto del vincolo di bilancio come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per i bene  $x_1$  e  $x_2$  è data da una qualsiasi combinazione lineare dei due punti che giaccia sul vincolo di bilancio.

$$x_1 = [0; \frac{R}{p_1}] \text{ se } MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = [0; \frac{R}{p_2}] \text{ se } MRS = \frac{p_1}{p_2}$$



Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} = \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è uguale a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è uguale rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. È facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito in una qualsiasi combinazione dei due bene.

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per prima cosa calcoliamo il *SMS*:

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1$$

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = 2$$

Le domande per i beni sono le seguenti:

$$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{p_1}{p_2} > 2 \\ 0; \frac{R}{p_1} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \frac{R}{p_1} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} < 2 \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{p_1}{p_2} < 2 \\ 0; \frac{R}{p_2} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \frac{R}{p_2} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} > 2 \end{cases}$$

2. Sapendo le domande per i due beni, dobbiamo solo confrontare il *SMS* calcolato nel precedente punto e confrontarlo con i prezzi relativi:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{1}$$

$$2 < 3 \rightarrow SMS < \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = \frac{R}{p_2} = \frac{30}{1} = 30$$

### Esercizio 3 (E3.2, E3.6, E3.9, E3.12)

#### ARGOMENTI

- Perfetti Complementi

Data la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1, x_2) = \min\{3x_1; 5x_2\}$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Il paniere ottimo per un reddito del consumatore

$$R = 220$$

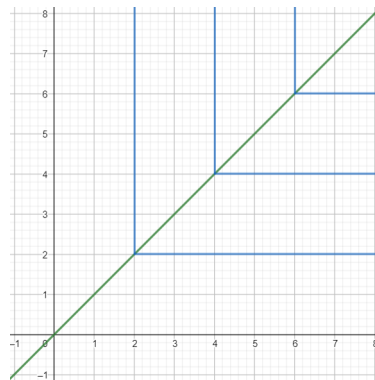
e dei prezzi di mercato  $p_1 = 5$  e  $p_2 = 10$

#### SOLUZIONE

Il caso dei beni perfetti complementi è un caso particolare, in cui il consumatore desidera consumare i due beni congiuntamente ed in una specifica proporzione espressa dalla funzione di utilità (il classico esempio è quello del caffè e dello zucchero), che si presenta nella seguente formula:

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1; \beta x_2\}$$

Da un punto di vista grafico le curve d'indifferenza appaiono così (in blu):



Il lungo in cui il consumo del consumatore è ottimo, è dato dai punti di angolo, quelli in cui è rispettata la proporzione ottima tra le quantità. Che giace sulla retta (in verde nel grafico):

$$\alpha x_1 = \beta x_2 \rightarrow x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$$

Quindi il paniere ottimo è dato dall'intersezione tra il vincolo di bilancio e dalla retta  $x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$ . Possiamo quindi costruire il sistema nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1 \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_2 \frac{\alpha}{\beta} x_1 \rightarrow x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{\alpha}{\beta} p_2}$$

$$R = p_1 \frac{\beta}{\alpha} x_2 + p_2 x_2 \rightarrow x_2 = \frac{R}{\frac{\beta}{\alpha} p_1 + p_2}$$

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Impostiamo il sistema di risoluzione che abbiamo appena appreso, con le informazioni forniteci dalla funzione di utilità:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} x_1 \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_2 \frac{3}{5} x_1 \rightarrow x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{3}{5} p_2}$$

$$R = p_1 \frac{5}{3} x_2 + p_2 x_2 \rightarrow x_2 = \frac{R}{\frac{5}{3} p_1 + p_2}$$

2. Calcoliamo le funzioni di domanda dei beni nel reddito e nei prezzi riportati nel testo dell'esercizio:

$$x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{3}{5} p_2} = \frac{220}{5 + \frac{3}{5} 10} = \frac{220}{11} = 20$$

$$x_2 = \frac{R}{\frac{5}{3} p_1 + p_2} = \frac{220}{\frac{5}{3} 5 + 10} = \frac{220}{\frac{55}{3}} = 12$$

# Microeconomia

## Esercitazione 7 - Le scelte dell'imprenditore (1)

Luisa Lorè\*

16/04/2020

### Esercizio 1 (E4.1, E4.2)

#### ARGOMENTI

- Funzione di produzione
- Concetto di isoquanto
- Produttività media e marginale dei fattori di produzione
- Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica
- Proprietà dell'isoquanto

Data la funzione di produzione

$$Y = f(L, K) = 4L^2K^2$$

1. Individuate l'equazione di un generico isoquanto, spiegando il procedimento con cui lo si è ottenuto.

#### SOLUZIONE

Prima di risolvere l'esercizio facciamo chiarezza su due argomenti: cos'è una funzione di produzione, e cos'è un isoquanto (ma anche cosa rappresenta e come si calcola).

**La funzione di produzione** è l'insieme di punti, il luogo geometrico, che associa qualsiasi combinazione di input disponibile al massimo livello di output ottenibile. Ed è quindi una funzione in cui la quantità prodotta  $Y$  dipende dai fattori di produzione, come ad esempio il capitale  $K$  e il lavoro  $L$ .

$$Y = f(K, L)$$

**L'isoquanto** è una funzione che rappresenta tutte le combinazioni  $(K, L)$  di input che forniscono in maniera output-efficiente un determinato livello di output,  $\bar{q}$ . L'isoquanto descrive quindi tutte le combinazioni di capitale e lavoro, tutte le tecniche produttive, che

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

permettono di produrre l'output  $\bar{q}$  in maniera output-efficiente (tutte le combinazioni che hanno come output efficiente  $Y = \bar{q}$ ).

$$\bar{q} = Y = f(K, L)$$

Sappiamo quindi che l'isoquante è il luogo geometrico (l'insieme dei punti) in cui la funzione di produzione è massimizzata. E come abbiamo sempre detto finora se vogliamo massimizzare una funzione il metodo più immediato (sempre a patto che ci siano le condizioni necessarie per farlo) è calcolare la derivata prima ed uguagliarla a zero. Quindi sappiamo che lungo l'isoquante la seguente condizione è verificata:

$$dY = 0 \rightarrow dK \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} + dL \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = 0 \rightarrow f^k dK + f^l dL = 0$$

dove  $f^k = PmgK$  è la produttività marginale del capitale, mentre  $f^l = PmgL$  è la produttività marginale del lavoro. E quindi otteniamo:

$$f^k dK + f^l dL = 0 \rightarrow PmgK \cdot dK + PmgL \cdot dL = 0 \rightarrow \frac{PmgL}{PmgK} = -\frac{dK}{dL}$$

Definiamo infine il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica nel seguente modo:

$$\frac{PmgL}{PmgK} = \left| \frac{dK}{dL} \right| = SMST$$

Sappiamo quindi che sull'isoquante il  $SMST$ , che per definizione è il rapporto tra le produttività marginali, è uguale al modulo del rapporto delle derivate totali.

Dopo aver quindi richiamato alla mente questi importanti concetti passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare l'equazione di un generico isoquante, basta semplicemente riscrivere la funzione di produzione fissando un livello  $\bar{q}$  di output, nel seguente modo:

$$\bar{q} = f(K, L) = 4L^2 K^2$$

Questo perché l'isoquante è la curva di livello della funzione di produzione (come la curva d'indifferenza lo era per la funzione d'utilità).

## Esercizio 2 (E4.3)

### ARGOMENTI

- Funzione di costo totale
- Concetto di isocosto
- Proprietà dell'isocosto

Data la funzione di spesa

$$CT = 20L + 10K$$

1. Individuate l'equazione di un generico isocosto, spiegando il procedimento con cui lo si è ottenuto.
2. Individuate l'equazione degli isocosti corrispondenti ai livelli  $\bar{c} = 1$  e  $\bar{c} = 5$ , e tracciate una rappresentazione grafica.

## SOLUZIONE

Di nuovo, prima di cominciare l'esercizio facciamo un rapido ripasso di cosa sono e come vengono espressi la funzione di costo totale dell'impresa e l'isocosto.

**La funzione di costo totale dell'impresa** rappresenta il costo minimo di produrre una qualsiasi quantità  $Q$ . Possiamo facilmente suddividere il costo totale dell'impresa in costi fissi, quei costi che l'imprenditore dovrà sostenere indipendentemente dalla quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una costante, e costi variabili, quei costi che variano a seconda della quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una funzione della quantità.

$$CT(Q) = CF + CV(Q)$$

**L'isocosto** è quel luogo geometrico di combinazioni di tecniche produttive fattore lavoro - fattore capitale tutte caratterizzate da uno stesso costo per l'imprenditore. Nel caso dei due fattori di produzione già introdotti nella funzione di produzione,  $L$  e  $K$ , definendo le loro remunerazioni rispettivamente  $w$  il salario, lo stipendio, dei lavoratori e  $r$  il tasso d'interesse del capitale, possiamo scrivere:

$$\bar{c} = CT(L, K) = wL + rK \longrightarrow K = -\frac{w}{r}L + \frac{\bar{c}}{r}$$

Dopo aver quindi richiamato alla mente questi importanti concetti passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare l'equazione di un generico isocosto, basta semplicemente riscrivere la funzione di costo totale fissando un livello  $\bar{c}$  di costo, nel seguente modo:

$$\bar{c} = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{\bar{c}}{10}$$

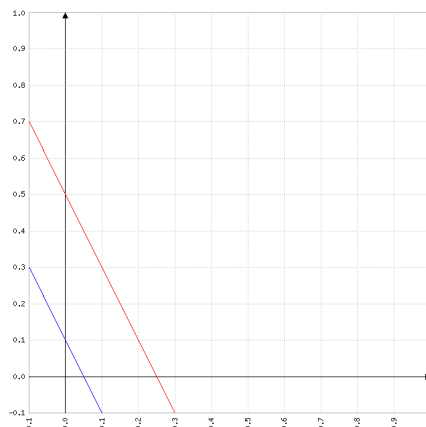
2. Per calcolare l'equazione di isocosti specifici sostituiamo  $\bar{c}$  con il valore di costo totale desiderato:

(a)  $\bar{c} = 1$

$$1 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{1}{10}$$

(b)  $\bar{c} = 5$

$$5 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{1}{2}$$



### Esercizio 3 (E4.6)

#### ARGOMENTI

- Costi
- Produttività

Date le seguenti funzioni di produzioni e di costi

$$Y = f(K, L) = K^{\frac{2}{5}} L^{\frac{3}{5}}$$
$$C(Q) = 2Q(Q + 20) + 100 = 2Q^2 + 40Q + 100$$

Calcolare:

1. Costo variabile
2. Costo fisso
3. Costo medio
4. Costo medio variabile
5. Costo medio fisso
6. Costo marginale
7. Produttività media del lavoro
8. Produttività media del capitale
9. Produttività marginale del lavoro
10. Produttività marginale del capitale

#### SOLUZIONE

1.  $CV(Q) = 2Q(Q + 20) = 2Q^2 + 40Q$
2.  $CF(Q) = 100$
3.  $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 40Q + 100}{Q} = 2Q + 40 + \frac{100}{Q}$
4.  $CMeV(Q) = \frac{CV(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 40Q}{Q} = 2Q + 40$
5.  $CMeF(Q) = \frac{CF(Q)}{Q} = \frac{100}{Q}$
6.  $CMa(Q) = \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = 4Q + 40$
7.  $PMeL = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\frac{2}{5}} L^{\frac{3}{5}}}{L}$
8.  $PMeK = \frac{Y}{K} = \frac{K^{\frac{2}{5}} L^{\frac{3}{5}}}{K}$
9.  $PMaL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{3}{5} K^{\frac{2}{5}} L^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{5}}$
10.  $PMaK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{2}{5} K^{\frac{2}{5}-1} L^{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{5}}$

## Esercizio 4 (E4.4)

### ARGOMENTI

- Funzione di produzione e funzione di costo totale
- Isoquanto ed isocosto
- Minimizzazione della spesa
- Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica

Dato l'isoquanto

$$Y = 100 = f(L, K) = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$

per  $w = 1$  e  $r = 3$  individuate quale combinazione di input consente all'imprenditore di realizzare in modo economicamente efficiente, nel lungo periodo, il livello di produzione individuato.

### SOLUZIONE

Possiamo ora finalmente passare alla risoluzione del problema di minimizzazione dei costi seguendo un parallelo con la teoria del consumatore e la relativa massimizzazione del profitto, possiamo impostare un problema nel seguente modo:

#### Massimizzazione dell'Utilità

In questo tipo di problemi dobbiamo massimizzare l'utilità che un consumatore può trarre data la sua funzione di utilità (e quindi il suo  $SMS$ ) e dati un reddito e i prezzi di mercato dei due beni tra cui il consumatore può scegliere (e quindi il suo vincolo di bilancio e i conseguenti prezzi relativi). Per calcolare il paniere di consumo ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza relativa, quello è il punto di massimo.

Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

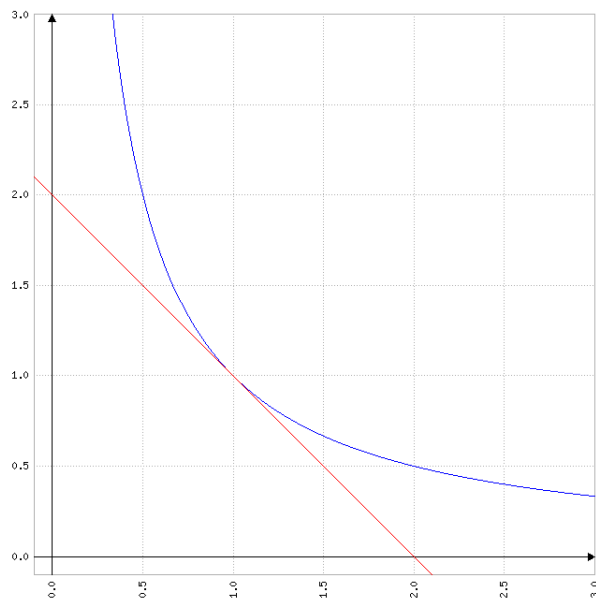
#### Minimizzazione della Spesa

In questo tipo di problemi dobbiamo minimizzare la spesa che un imprenditore deve sostenere data la sua funzione di costo totale e le remunerazioni di lavoro e capitale (e quindi il rapporto tra le remunerazioni, la pendenza di tutti gli isocosti) e data la sua tecnologia, la sua funzione di produzione, e un livello di output (e quindi il suo  $SMST$  e uno specifico isoquanto). Per calcolare il costo totale ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra l'isoquanto e isocosto, quello è il punto di minimo.

Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ q = f(K, L) \end{cases}$$





Detto ciò, risolviamo l'esercizio. Calcoliamo prima il  $SMST$ , in questo modo:

$$SMST = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\frac{1}{4}L^{\frac{1}{4}-1}K^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}-1}} = \frac{1}{3}L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+1} = \frac{1}{3}\frac{K}{L}$$

Impostiamo il sistema come spiegato precedentemente:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f(L, K) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1K}{3L} = \frac{1}{3} \\ 100 = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = L \\ 100 = L^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = 100 \\ L = 100 \end{cases}$$

## Esercizio 5 (E4.4)

### ARGOMENTI

- Minimizzazione della spesa

Dato la seguente funzione di produzione:

$$f(L, K) = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

1. Calcolare l'isoquante corrispondente al livello  $q = 200$ ;
2. Risolvere il problema della minimizzazione dei costi con la classica formula dei costi totali ( $CT = wL + rK$ ), per l'isocosto calcolato nel primo punto e per i seguenti dati  $w = 16$  e  $r = 1$ ;
3. Ripetere l'esercizio per la seguente funzione di produzione:

$$f(L, K) = L^2K^2$$

## SOLUZIONE

1.  $K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 200 \rightarrow K = \frac{200^4}{L};$

2. Risolviamo il problema di minimizzazione:

$$SMST = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\frac{1}{4}L^{\frac{1}{4}-1}K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}-1}} = L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \frac{K}{L}$$

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} & \begin{cases} \frac{K}{L} = 16 \rightarrow K = 16L \\ 200 = K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} \end{cases} \\ \bar{q} = f(L, K) \end{cases}$$

$$200 = (16L)^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

$$200 = 16^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$L = 100^2$$

$$K = 160\,000$$

$$L = 10\,000$$

3. (a)  $K^2L^2 = 200 \rightarrow K = \frac{\sqrt{200}}{L};$

(b) Risolviamo il problema di minimizzazione:

$$SMST = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{2LK^2}{2L^2K} = L^{1-2}K^{2-1} = \frac{K}{L}$$

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} & \begin{cases} \frac{K}{L} = 16 \rightarrow K = 16L \\ 200 = K^2L^2 \end{cases} \\ \bar{q} = f(L, K) \end{cases}$$

$$200 = (16L)^2L^2$$

$$200 = 256 \cdot L^4$$

$$K = 16 \left( \frac{200}{256} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$L = \left( \frac{200}{256} \right)^{\frac{1}{4}}$$

# Microeconomia

## Esercitazione 8 - Le scelte dell'imprenditore (2)

Luisa Lorè\*

20/04/2020

### Esercizio 1 (E4.7, E4.8, E4.9)

#### ARGOMENTI

- Rendimenti di scala

Date le seguenti funzioni di produzione stabilire i relativi rendimenti di scala, dando inoltre una chiara definizione di ogni tipologia di rendimento spiegandone il concetto:

1.  $f(K, L) = 2(L + K)$
2.  $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$
3.  $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
4.  $f(K, L) = L + K^2$
5.  $f(K, L) = L^3 K^5$

#### SOLUZIONE

Prima di tutto partiamo dalle definizioni dei rendimenti di scala per affrontare l'esercizio avendo chiaro il concetto di rendimento. Una funzione di produzione ha rendimenti di scala:

**Crescenti** se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera più che proporzionale.

**Costanti** se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera proporzionale.

**Decrescenti** se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera meno che proporzionale.

In generale, per verificare i rendimenti di scala possiamo semplicemente moltiplicare l'intera funzione per una costante  $\lambda$  (dove  $\lambda > 0$ ), e i rendimenti di scala saranno:

**Crescenti** se  $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$  perché aumentando i fattori di produzione di una costante  $\lambda$  l'aumento della quantità prodotta è maggiore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

**Costanti** se  $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$  perché aumentando i fattori di produzione di una costante  $\lambda$  l'aumento della quantità prodotta è uguale all'aumento della quantità della stessa costante.

**Decrescenti** se  $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$  perché aumentando i fattori di produzione di una costante  $\lambda$  l'aumento della quantità prodotta è minore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

Se però, abbiamo davanti una funzione cosiddetta Cobb-Douglas, possiamo fare affidamento sugli esponenti a cui sono elevati i fattori di produzione. Una funzione Cobb-Douglas è scritta nel seguente modo:

$$f(K, L) = K^\alpha L^\beta$$

Perciò se applichiamo lo stesso ragionamento fatto finora, otteniamo:

$$f(\lambda K, \lambda L) \leq \lambda [f(K, L)]$$

$$\lambda^\alpha K^\alpha \lambda^\beta L^\beta \leq \lambda K^\alpha L^\beta$$

$$\lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta \leq \lambda K^\alpha L^\beta$$

$$\lambda^{\alpha+\beta} \leq \lambda$$

$$\alpha + \beta \leq 1$$

Quindi, questa funzione avrà rendimenti di scala:

**Crescenti** se  $\alpha + \beta > 1$

**Costanti** se  $\alpha + \beta = 1$

**Decrescenti** se  $\alpha + \beta < 1$

Ora passiamo alla risoluzione dell'esercizio, tramite due differenti strategie da applicare di volta in volta a seconda di come è espressa la nostra funzione.

1.  $f(K, L) = 2(L + K)$   
 $f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda L + \lambda K) = 2\lambda(L + K)$   
 $\lambda[f(K, L)] = 2\lambda(L + K)$   
 $2\lambda(L + K) = 2\lambda(L + K) \rightarrow \text{rendimenti di scala costanti}$
2.  $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} < 1 \rightarrow \text{rendimenti di scala decrescenti}$
3.  $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \text{rendimenti di scala costanti}$
4.  $f(K, L) = L + K^2$   
 $f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda L + (\lambda K)^2) = (\lambda L + \lambda^2 K^2) = \lambda(L + \lambda K^2)$   
 $\lambda[f(K, L)] = \lambda(L + K^2)$   
 $\lambda(L + \lambda K^2) > \lambda(L + K^2) \rightarrow \text{rendimenti di scala crescenti}$
5.  $f(K, L) = L^3 K^5$   
 $3 + 5 = 8 > 1 \rightarrow \text{rendimenti di scala crescenti}$

## Esercizio 2 (E4.9)

### ARGOMENTI

- Rendimenti di scala e costo medio

Date le seguenti funzioni di costo calcolate i rendimenti di scala tramite lo studio dell'andamento del costo medio.

1.  $CT(Q) = 5Q$
2.  $CT(Q) = 3Q^{\frac{1}{3}}$
3.  $CT(Q) = 8Q^4$

### SOLUZIONE

Prima di tutto cerchiamo di capire quale collegamento c'è tra i rendimenti di scala e il costo medio: i rendimenti di scala ci indicano come aumenta la produzione all'aumentare dei fattori di produzione. Se capiamo come varia il costo medio di un'impresa capiamo anche cosa succede all'aumentare della sua produzione. Se infatti, un'impresa ha:

**Costo medio costante** Se il costo medio è costante all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte rimane stabile, questo significa che anche i costi rimangono stabili, perché i fattori di produzione aumentano in maniera proporzionale.

→ **Rendimenti di scala costanti**

**Costo medio crescente** Se il costo medio aumenta all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte cresce, questo significa che anche i costi aumentano, perché i fattori di produzione aumentano in maniera meno che proporzionale e continuare a produrre costa di meno. → **Rendimenti di scala decrescenti**

**Costo medio decrescente** Se il costo medio diminuisce all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte decresce, questo significa che anche i costi diminuiscono, perché i fattori di produzione aumentano in maniera più che proporzionale e continuare a produrre costa di più. → **Rendimenti di scala crescenti**

1.  $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{5Q}{Q} = 5 \rightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \rightarrow \text{Rendimenti di scala costanti}$
2.  $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{3Q^{\frac{1}{3}}}{Q} = 3Q^{\frac{1}{3}-1} = 3Q^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = -\frac{2}{3}3Q^{-\frac{2}{3}-1} = -2Q^{-\frac{5}{3}} < 0 \rightarrow \text{Rendimenti di scala crescenti}$
3.  $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{8Q^4}{Q} = 8Q^3 \rightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 8 \cdot 3Q^{3-1} = 24Q^2 > 0 \rightarrow \text{Rendimenti di scala decrescenti}$

# Microeconomia

## Esercitazione 9 - Le scelte dell'imprenditore (3)

### I regimi di mercato (1)

Luisa Lorè\*

30/04/2020

#### Esercizio 1 (E4.11)

##### ARGOMENTI

- Massimizzazione del profitto

Data la seguente funzione di produzione e i seguenti dati, calcolare la funzione di domanda di lavoro che risolve il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

$$f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 10$$

$$\bar{K} = 100$$

$$w = 5$$

$$r = 5$$

##### SOLUZIONE

Prima di tutto cerchiamo di capire come impostare un problema di massimizzazione del profitto. Richiamiamo alla mente i problemi di ottimizzazione visti fin ora:

**Massimizzazione dell'Utilità**  $\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ s.v. } R = p_1 x_1 + p_2 x_2$

**Minimizzazione dei Costi**  $\min_{K, L} wL + rK \text{ s.v. } q = f(L, K)$

Dobbiamo quindi ora capire cosa vogliamo ottimizzare e sotto quale vincolo, sappiamo che vogliamo massimizzare il profitto, ma cos'è il profitto? Definiamo il profitto come la differenza tra tutti i guadagni (quindi tutto quello che possiamo produrre per il prezzo a cui lo possiamo vendere) e tutti i costi (tutti i fattori di produzione che utilizziamo per il loro prezzo), nel seguente modo:

$$\pi = pY - (wL + rK) = pY - wL - rK$$

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Qual è il vincolo che un produttore potrebbe avere in un problema del genere? Sicuramente riguarda la sua possibilità e capacità di produzione di  $Y$ , quindi la sua funzione di produzione  $f(L, K)$ . Quindi il nostro problema sarà massimizzare il profitto, sotto il vincolo della funzione di produzione. Questa volta però, non costruiremo un sistema per risolvere il problema, ma sostituiamo direttamente il vincolo all'interno della funzione da massimizzare nel seguente modo:

$$\textbf{Massimizzazione del Profitto} \quad \max_{K,L} \pi = pY - wL - rK \text{ s.v. } f(L, K) \longrightarrow \max_{K,L} \pi = p[f(L, K)] - wL - rK$$

Dobbiamo inoltre caratterizzare questo problema per ottenere una massimizzazione nel breve periodo. Convenzionalmente consideriamo  $L$ , il lavoro, un fattore di produzione che può essere facilmente modificato in un'impresa, mentre  $K$ , il capitale, un fattore di produzione che difficilmente può essere modificato in un'impresa. Quindi nel breve periodo "fissiamo", teniamo costante, il capitale e ottimizziamo solo in funzione del lavoro, nel seguente modo:

$$\textbf{Massimizzazione del Profitto (nel breve periodo)} \quad \max_L \pi = p[f(L, \bar{K})] - wL - r\bar{K}$$

Cos'è facendo ciò che otteniamo è una funzione in un'unica variabile,  $L$ , e per ottimizzare questa funzione ci basterà calcolarne la derivata prima, uguagliarla a zero, e risolvere per  $L^*$ .

Possiamo quindi passare alla risoluzione dell'esercizio:

$$\max_L \pi = pY - wL - r\bar{K} \text{ s.v. } f(L, \bar{K}) \longrightarrow \max_L \pi = p[f(L, \bar{K})] - wL - r\bar{K}$$

$$\max_L \pi = 10Y - 5L - 500 \text{ s.v. } L^{\frac{1}{2}}10 \longrightarrow \max_L \pi = 100L^{\frac{1}{2}} - 5L - 500$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 100L^{-\frac{1}{2}} - 5 = 0$$

$$\frac{10}{\sqrt{L}} = 1 \longrightarrow (\sqrt{L})^2 = 10^2 \longrightarrow L = 100$$

Possiamo ora completare l'esercizio calcolando, ad esempio, il livello ottimale di output da produrre e il relativo profitto:

$$q^* = f(K, L) = 100^{\frac{1}{2}}100^{\frac{1}{2}} = 100$$

$$\pi = pQ - CT(Q) = 1000 - 1000 = 0$$

## Esercizio 2 (E5.1, E5.2)

### ARGOMENTI

- Funzione dei costi

Data la seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^2 + 4Q + 10$$

Calcolare, per un livello di output  $Q = 10$ :

1. Costi totali
2. Costo variabile
3. Costo fisso
4. Costo medio
5. Costo medio variabile
6. Costo medio fisso
7. Costo marginale

### SOLUZIONE

1.  $CT(Q) = Q^2 + 4Q + 10 \longrightarrow CT(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 + 10 = 150$
2.  $CV(Q) = Q^2 + 4Q \longrightarrow CV(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 = 140$
3.  $CF(Q) = 10 \longrightarrow CF(10) = 10$
4.  $CMe(Q) = Q + 4 + \frac{10}{Q} \longrightarrow CMe(10) = 10 + 4 + \frac{10}{10} = 10 + 4 + 1 = 15$
5.  $CMeV(Q) = Q + 4 \longrightarrow CMeV(10) = 10 + 4 = 14$
6.  $CMeF(Q) = \frac{10}{Q} \longrightarrow CMeF(10) = \frac{10}{10} = 1$
7.  $CMa(Q) = 2Q + 4 \longrightarrow CMa(10) = 2 \cdot 10 + 4 = 24$



### Esercizio 3 (E5.3, E5.4, E5.5)

#### ARGOMENTI

- Massimizzazione del profitto nel BP
- Massimizzazione del profitto nel LP

Data la seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^2 + 30Q + 300$$

e il prezzo  $p = 300$ , calcolare:

1. La quantità di output  $Q$  che massimizza il profitto  $\pi$  nel breve periodo
2. Il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo
3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo

#### SOLUZIONE

Per risolvere questo esercizio, abbiamo bisogno di richiamare alla mente il problema di massimizzazione che abbiamo impostato nel primo esercizio:

$$\max \pi = RT - CT \text{ s.v. } Y = f(\cdot)$$

Siamo abituati quindi a riscrivere tutto ciò in funzione dei fattori di produzione, nel seguente modo:

$$\max_{K,L} \pi = pY - wL - rK \text{ s.v. } f(L, K) \longrightarrow \max_{K,L} \pi = p[f(L, K)] - wL - rK$$

E nel breve periodo a “fissare”, tenere costante, uno dei due fattori di produzione, convenzionalmente  $K$  e successivamente ottimizzare calcolando la derivata prima, uguagliandola a zero e risolvendo per  $L$ . Ma se avessimo a disposizione solo la funzione dei costi in funzione dell'output piuttosto che quella in funzione dei fattori di produzione? Il problema non cambierebbe di molto. Dobbiamo sempre massimizzare il profitto, quindi la differenza tra i ricavi totali e i costi totali rispetto all'unica variabile che abbiamo a disposizione,  $Q$ . In questo caso inoltre potremmo non avere informazioni sulla funzione di produzione, ma solo sul prezzo di mercato a cui è venduto questo bene, quindi potremmo eseguire una massimizzazione senza vincoli. Impostiamo quindi il nostro problema nel seguente modo:

$$\max_Q \pi = RT - CT = pQ - CT(Q)$$

Deriviamo la funzione di profitto rispetto all'output ed uguagliamo la sua derivata prima a zero, nel seguente modo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ - CT(Q))}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ)}{\partial Q} - \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = p - CMa(Q)$$

$$p - CMa(Q) = 0 \longrightarrow p = CMa(Q)$$

La condizione di profitto ottimale è quindi data dall'uguaglianza tra prezzo e costi marginali. E di conseguenza il profitto nel breve periodo sarà:

$$\pi^{BP} = pQ^{BP} - CT(Q^{BP})$$

Per quanto riguarda il livello di output e il profitto (o la perdita) corrispondenti alla condizione di equilibrio nel lungo periodo, dobbiamo prima definire la condizione di equilibrio. Sappiamo infatti che nel lungo periodo,

$$p = CMe(Q^{min})$$

Il prezzo a cui l'impresa decide di vendere nel lungo periodo risponde a questa condizione, ed è per questo che l'impresa deve far sì che la quantità che vuole produrre rispetti questa condizione. E di conseguenza il profitto nel lungo periodo sarà:

$$\pi^{LP} = pQ^{LP} - CT(Q^{LP})$$

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel breve periodo, uguagliamo il prezzo di mercato ai costi marginali per le ragioni che abbiamo già discusso in precedenza:

$$300 = 2Q + 30 \longrightarrow Q^{BP} = \frac{300 - 30}{2} = \frac{270}{2} = 135$$

2. Per calcolare il profitto massimo nel breve periodo inseriamo  $Q^{BP}$  nella funzione di profitto:

$$\pi^{BP} = 300 \cdot 135 - [(135)^2 + 30 \cdot 135 + 300] = 40500 - 18225 - 4050 - 300 = 17925$$

3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo, minimizziamo il costo medio, e uguagliamo il costo medio calcolato nel punto di minimo al prezzo di mercato come visto precedentemente:

$$CMe(Q) = \frac{Q^2 + 30Q + 300}{Q} = Q + 30 + \frac{300}{Q}$$

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 1 - \frac{300}{Q^2} = 0 \longrightarrow Q^{min} = \sqrt{300} = 17,32 \approx 17$$

$$p^{LP} = CMe(17) = 17 + 30 + \frac{300}{17} \approx 17 + 30 + 18 = 65$$

# Microeconomia

## Esercitazione 10 - I regimi di mercato (2)

Luisa Lorè\*

07/05/2020

### Esercizio 1 (E5.6, E5.7, E5.8)

#### ARGOMENTI

- Competizione perfetta nel breve periodo

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 10 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 100 - 20p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

#### SOLUZIONE

1. Per calcolare la funzione d'offerta nel breve periodo è necessario calcolare l'equilibrio del breve periodo per una generica impresa  $i$  ed esprimere la quantità in funzione del prezzo:

$$p = CMa(Q_i) \longrightarrow p = 2Q_i \longrightarrow Q_i = \frac{1}{2}p$$

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

2. Per calcolare la funzione d'offerta dell'intera industria, sommiamo linearmente le funzioni d'offerta delle singole imprese, nel seguente modo:

$$Q^s = 10 \left( \frac{1}{2}p \right) = 5p$$

3. Per calcolare l'equilibrio di mercato dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, questo perché dobbiamo trovare il punto in cui la curva di domanda e la curva d'offerta s'incontrano.

$$\begin{cases} Q^d(p) = 100 - 20p \\ Q^s(p) = 5p \end{cases}$$

Per risolvere un sistema di questo tipo basta uguagliare le due funzioni (di domanda e d'offerta), poiché esprimono entrambe la quantità in funzione del prezzo

$$100 - 20p = 5p \longrightarrow 25p = 100 \longrightarrow p = \frac{100}{25} = 4$$

Infine sostituiamo il prezzo trovato in una qualsiasi delle due funzioni, ad esempio in quella dell'offerta:

$$Q^s(p) = 5 \cdot 4 = 20$$

La condizione di equilibrio è:

$$Eq. = \{Q^E = 20, p^E = 4\}$$

4. Essendoci 10 imprese in perfetta concorrenza ognuna di queste produrrà un decimo della quantità domandata:

$$Q_i^E = \frac{Q^E}{\# imprese} = \frac{20}{10} = 2$$

Sostituiamo ora il prezzo in equilibrio e la quantità per ogni impresa all'interno della formula del profitto:

$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

In questo caso le imprese hanno un profitto di 4.

## Esercizio 2 (E5.6, E5.7, E5.8)

### ARGOMENTI

- Competizione perfetta nel lungo periodo

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 100 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 10$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 300 - 20p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
4. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

### SOLUZIONE

1. Per calcolare il prezzo e la quantità, partiamo dalla condizione di equilibrio di un'impresa nel lungo periodo:

$$p = CMe(Q^{min})$$

Perciò minimizziamo la funzione di costi medi,

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left( Q + \frac{10}{Q} \right)}{\partial Q} = 1 - \frac{10}{Q^2} = 0 \longrightarrow Q^2 = 10 \longrightarrow Q_i^{LP} = \sqrt{10}$$

Dopo aver trovato il punto minimo per i costi medi inseriamoli nella funzione di partenza e poniamola uguale al prezzo:

$$p = CMe(\sqrt{10}) = \sqrt{10} + \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} + \sqrt{10} \longrightarrow p^{LP} = 2\sqrt{10}$$

2. Per calcolare invece l'offerta dell'intera industria, moltiplichiamo per 5 la quantità offerta dalla singola impresa:

$$nQ_i = 100\sqrt{10} \approx 316$$

3. Il numero d'impresе operanti è dato dal rapporto fra la funzione di domanda del mercato nel prezzo trovato:

$$Q^d(2\sqrt{10}) = 300 - 20p = 300 - 40\sqrt{10} \approx 300 - 126 = 174 \longrightarrow Q^E \approx 174$$

e la massima quantità che ogni singola impresa è disposta ad offrire nel lungo periodo:

$$n^{LP} = \frac{Q^E}{Q_i} = \frac{174}{\sqrt{10}} \approx 55$$

Possiamo quindi notare che nel lungo periodo, l'offerta eccede la domanda e poco più della metà dell'impresе parteciperà al mercato.

4. Infine, calcoliamo il profitto nel punto di equilibrio per ogni singola impresa:

$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} - \left(\sqrt{10}\right)^2 - 10 = 20 - 10 - 10 = 0$$

In questo caso le impresе hanno un profitto pari a 0.

# Microeconomia

## Esercitazione 11 - I regimi di mercato (3)

Luisa Lorè\*

12/05/2020

### Esercizio 1 (E5.9, E5.10, E5.11, E5.12)

#### ARGOMENTI

- Monopolio

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q) = 100Q$$

la domanda è data da:

$$Q^d = 400 - 2p$$

Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)
2. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker (operi in regime di concorrenza perfetta)
3. La perdita netta al monopolio

#### SOLUZIONE

1. Nel caso in cui un'impresa operi in regime di monopolio, massimizza la seguente funzione:

$$\max_Q \pi^m = RT(Q) - CT(Q) = p(Q)Q - CT(Q) \longrightarrow RMa(Q) - CMa(Q) = 0$$

$$RMa(Q) = CMa(Q)$$

Dobbiamo quindi calcolare  $p(Q)$  la funzione inversa della domanda di mercato, nel seguente modo:

$$Q^d = 400 - 2p \longrightarrow 2p = 400 - Q \longrightarrow p = 200 - \frac{1}{2}Q$$

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Perciò marginalizziamo costi e ricavi e poniamoli uguali:

$$\frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial (200Q - \frac{1}{2}Q^2)}{\partial Q} = 200 - Q$$

$$\frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial (100Q)}{\partial Q} = 100$$

$$RMa(Q) = CMa(Q) \longrightarrow 200 - Q = 100 \longrightarrow Q^m = 100$$

Per trovare il prezzo inseriamo tutto nella funzione di domanda:

$$p = 200 - \frac{1}{2}Q = 200 - \frac{1}{2}100 \longrightarrow p^m = 150$$

$$Eq^{mon} = \{Q^m = 100, p^m = 150\}$$

2. Supponiamo ora che il monopolista per una qualsiasi ragione non possa o rinunci ad influenzare il mercato, sia un'impresa price-taker ed operi quindi secondo le regole della concorrenza perfetta:

$$p = CMa(Q) \longrightarrow 200 - \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow Q^{cp} = 200$$

$$p = 200 - \frac{1}{2}200 = 200 - 100 \longrightarrow p^{cp} = 100$$

$$Eq^{cp} = \{Q^{cp} = 200, p^{cp} = 100\}$$

Come ci aspettavamo, l'equilibrio dell'impresa monopolistica presenta una quantità inferiore ed un prezzo maggiore rispetto a quella price-taker, infatti un monopolio produce meno e vende a prezzi più alti rispetto ad un'impresa che opera in concorrenza perfetta.

3. Calcoliamo ora la differenza tra profitto in monopolio e profitto in concorrenza perfetta:

$$\pi^m = RT(Q^m) - CT(Q^m) = p^m Q^m - CT(Q^m) = 150 \cdot 100 - 100 \cdot 100 = 15000 - 10000 = 5000$$

$$\pi^{cp} = RT(Q^{cp}) - CT(Q^{cp}) = p^{cp} Q^{cp} - CT(Q^{cp}) = 100 \cdot 200 - 100 \cdot 200 = 20000 - 20000 = 0$$

$$\pi^{cp} - \pi^m = 0 - 5000 = -5000$$



# Microeconomia

## Ripasso

Luisa Lorè\*

14/05/2020

Di seguito una lista di alcuni (**non tutti!**) esercizi svolti in classe con i relativi metodi di risoluzione utilizzati.

### Teoria del consumatore: La massimizzazione dell'utilità

#### ARGOMENTI

- Curva d'Utilità e curve d'indifferenza
- Utilità marginale e SMS
- Vincolo di bilancio

#### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la domanda del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.
2. Calcolare il paniere ottimo del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.

#### COSA DEVO FARE?

1. Impostare il classico sistema di risoluzione:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Senza sostituire  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$ , ma lasciando i risultati  $x_1$  e  $x_2$  in funzione di questi.

2. Impostare il classico sistema di risoluzione (vedi sopra) e risolverlo matematicamente, i punti risultanti sono le coordinate del paniere ottimo.

#### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 5

---

\*luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

## Teoria del consumatore: Beni Perfetti Sostituti

### ARGOMENTI

- Curva d'Utilità e curve d'indifferenza
- Utilità marginale e SMS
- Vincolo di bilancio

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la domanda del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.
2. Calcolare il paniere ottimo del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.

### COSA DEVO FARE?

1. Calcolare le utilità marginali ed eseguire il seguente confronto:

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} \rightarrow x_1^* = [0, \frac{R}{p_1}], x_2^* = [0, \frac{R}{p_2}]$$

$$\frac{MU_1}{p_1} > \frac{MU_2}{p_2} \rightarrow x_1^* = \frac{R}{p_1}, x_2^* = 0$$

$$\frac{MU_1}{p_1} < \frac{MU_2}{p_2} \rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = \frac{R}{p_2}$$

Senza sostituire  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$ , ma lasciando i risultati  $x_1$  e  $x_2$  in funzione di questi.

2. Eseguire il punto precedente sostituendo  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$  per ottenere il paniere ottimo.

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 6

## Teoria del consumatore: Beni Perfetti Complementi

### ARGOMENTI

- Curva d'Utilità e curve d'indifferenza
- Utilità marginale e SMS
- Vincolo di bilancio

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la domanda del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.
2. Calcolare il paniere ottimo del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.

### COSA DEVO FARE?

1. Per i beni perfetti complementi è necessario impostare un diverso sistema di risoluzione:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

$$\begin{cases} ax_1 = bx_2 \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Senza sostituire  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$ , ma lasciando i risultati  $x_1$  e  $x_2$  in funzione di questi.

2. Eseguire il punto precedente sostituendo  $p_1$ ,  $p_2$  e  $R$  per ottenere il paniere ottimo.

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 6

## **Teoria del produttore: La minimizzazione dei costi**

### **ARGOMENTI**

- Funzione di produzione e isoquanto
- Produttività marginale e SMST
- Funzione dei costi e isocosto

### **COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?**

1. Calcolare la scelta ottima dei fattori di produzione per minimizzare i costi per ogni livello di output.
2. Calcolare la quantità ottimale dei fattori di produzione per minimizzare i costi per un determinato livello di output.
3. Calcolare l'isocosto corrispondente alla minimizzazione dei costi.

### **COSA DEVO FARE?**

1. Impostare il classico sistema di risoluzione:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f(L, K) \end{cases}$$

Per un generico isoquanto, lasciando i risultati  $L$  e  $K$  in funzione di questo.

2. Impostare il classico sistema di risoluzione (vedi sopra) e risolverlo matematicamente, i punti risultanti sono le quantità ottimali dei fattori di produzione.
3. Sostituire le quantità ottimali dei fattori di produzione nella funzione di costo totale.

### **RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 7**

## Teoria del produttore: La massimizzazione del profitto nel breve periodo (rispetto ai fattori di produzione)

### ARGOMENTI

- Concetto di breve periodo
- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Massimizzare il profitto nel breve periodo
2. Calcolare la quantità di output corrispondente alla massimizzazione del profitto.
3. Calcolare il profitto corrispondente alla massimizzazione del profitto.

### COSA DEVO FARE?

1. Impostare il problema di massimizzazione del profitto, svincolandolo dalla funzione di produzione e tenendo costante uno dei due fattori (convenzionalmente  $K$ ):

$$\max_{K,L} \pi = pY - wL - rK \text{ s.v. } f(L, K)$$

$$\max_{K,L} \pi = p[f(L, K)] - wL - rK$$

$$\max_L \pi = p[f(L, \bar{K})] - wL - r\bar{K}$$

Calcolare la derivata prima della funzione di profitto (che ora è in un'unica variabile) ed uguagliarla a zero (**N.B.!** Il risultato è il valore ottimale del lavoro  $L$ , non la quantità ottimale, né tantomeno il profitto massimo!).

2. Sostituire il livello di  $L$  ottimale all'interno della funzione di produzione (**N.B.!** Il valore di  $K$  è noto!).
3. Sostituire il livello di  $L$  ottimale all'interno della funzione di profitto (**N.B.!** Il valore di  $K$  è noto!).

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 9

## **Il mercato: La massimizzazione del profitto nel breve periodo (rispetto alla quantità)**

### **ARGOMENTI**

- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali
- Funzione d'offerta

### **COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?**

1. Calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel breve periodo.
2. Calcolare il prezzo corrispondente alla massimizzazione del profitto.
3. Calcolare il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo.

### **COSA DEVO FARE?**

1. Risolvere la seguente equazione ricavando  $Q$  in funzione di  $p$ , cosa che può essere fatta sia in forma generica se non si è a conoscenza del prezzo, sia risolvendo l'equazione in forma numerica.

$$p = CMa(Q)$$

2. Risolvere la funzione della domanda (in cui  $p$  è in funzione di  $Q$ ) con il livello di output che si è ricavato dalla funzione precedente.
3. Sostituire i livelli di  $p$  e  $Q$  ottimali all'interno della funzione di profitto:

$$\pi = RT(Q) - CT(Q) = pQ - CT(Q)$$

### **RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 9**

## **Il mercato: La massimizzazione del profitto nel lungo periodo (rispetto alla quantità)**

### **ARGOMENTI**

- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali
- Funzione d'offerta

### **COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?**

1. Calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel lungo periodo.
2. Calcolare il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel lungo periodo.

### **COSA DEVO FARE?**

1. Minimizzare il costo medio

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow Q^{min} = Q^{LP}$$

e risolvere la seguente equazione:

$$p = CMe(Q^{LP})$$

2. Calcolare il profitto in funzione di  $Q^{LP}$  e  $p^{LP}$

$$\pi = RT(Q^{LP}) - CT(Q^{LP}) = p^{LP} \cdot Q^{LP} - CT(Q^{LP})$$

### **RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 9**

## Il mercato: La concorrenza perfetta nel breve periodo

### ARGOMENTI

- Concorrenza Perfetta

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. Calcolare la funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Calcolare il livello di produzione realizzato dalla singola impresa nel breve periodo
5. Calcolare il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

### COSA DEVO FARE?

1. La funzione d'offerta per una singola impresa,  $Q_i$  è espressa dalla condizione d'equilibrio:

$$p = CMa(Q)$$

2. Sommare linearmente tutte le funzioni d'offerta presenti nel mercato (moltiplicare per  $n$  la funzione d'offerta di una singola impresa  $Q_i$ ):

$$Q^s = nQ_i$$

3. Calcolare il punto d'intersezione tra curva d'offerta e curva di domanda tramite il sistema:

$$\begin{cases} Q^d(p) \\ Q^s(p) \end{cases} \quad \begin{cases} Q^E \\ p^E \end{cases}$$
$$Eq. = \{Q^E, p^E\}$$

4. Dividere la quantità caratterizzante l'equilibrio per il numero di imprese presenti nell'industria:

$$Q_i^E = \frac{Q^E}{n}$$

5. Calcolare il profitto in funzione di  $Q_i^E$  e  $p^E$

$$\pi_i = RT(Q_i^E) - CT(Q_i^E) = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E)$$

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 10



## Il mercato: La concorrenza perfetta nel lungo periodo

### ARGOMENTI

- Concorrenza Perfetta

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'impresa
2. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. Calcolare il numero di imprese operanti del lungo periodo
4. Calcolare il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

### COSA DEVO FARE?

1. Minimizzare la funzione di costi medi,

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow Q_i^{LP}$$

Risolvere la condizione di equilibrio del lungo periodo. Dopo aver trovato il punto minimo per i costi medi inseriamoli nella funzione di partenza e poniamola uguale al prezzo:

$$p = CMe(Q_i^{LP}) \longrightarrow p^{LP}$$

2. Sommare linearmente la quantità offerta da ciascuna delle imprese presenti nel mercato (moltiplicare per  $n$  la quantità  $Q_i$  di una singola impresa):

$$Q^s = nQ_i^{LP}$$

3. Dividere la quantità caratterizzante l'equilibrio (che va calcolato tramite la funzione di domanda) per la quantità offerta da ogni singola impresa:

$$n^{LP} = \frac{Q^E}{Q_i^{LP}}$$

4. Calcolare il profitto in funzione di  $Q_i$  e  $p^E$

$$\pi_i = p^{LP} \cdot Q_i^{LP} - CT(Q_i^{LP})$$

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 10

## Il mercato: Il monopolio

### ARGOMENTI

- Monopolio

### COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare l'equilibrio dell'impresa monopolistica (impresa price-setter)
2. Calcolare il profitto dell'impresa monopolistica
3. Calcolare l'equilibrio dell'impresa in concorrenza perfetta (impresa price-taker)
4. Calcolare la perdita netta al monopolio

### COSA DEVO FARE?

1. Risolvere la seguente equazione, per trovare  $Q^m$ :

$$RMa(Q) = CMa(Q)$$

E sostituire  $Q^m$  in  $p(Q)$  per trovare  $p^m$ .

$$Eq^{mon} = \{Q^m, p^m\}$$

2. Calcolare la classica formula del profitto nei valori di  $p$  e  $Q$  trovati

$$\pi^m = RT(Q^m) - CT(Q^m) = p^m Q^m - CT(Q^m)$$

3. Risolvere l'equilibrio di breve periodo per le imprese in concorrenza perfetta:

$$p = CMa(Q)$$

4. Calcolare il profitto in concorrenza perfetta:

$$\pi^{cp} = RT(Q^{cp}) - CT(Q^{cp}) = p^{cp} Q^{cp} - CT(Q^{cp})$$

e fare la differenza tra i due profitti:

$$\pi^m - \pi^{cp}$$

### RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 11