Università degli Studi di Roma Tor Vergata - Facoltà di Giurisprudenza
Corso di Laurea in Scienze dell'Amministrazione e delle Relazioni Internazionali

Microeconomia
Esercitazioni svolte in classe

Luisa Lorè

A.A. 2020/2021

Elementi di Matematica per il corso di Microeconomia

Luisa Lorè*

1 Potenze e radicali

1.1 Potenze

La potenza n-esima di un numero x, x^n, si calcola moltiplicando x per se stesso n volte. Ad esempio, elevare 2 alla terza significa moltiplicare 2 tre volte per se stesso:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

è importante ricordare che:

1. ogni numero positivo elevato alla 0 dà come risultato 1; ad esempio, $323^0 = 1$
2. ogni numero elevato alla 1 è uguale a se stesso; ad esempio, $2^1 = 2$
3. elevare un numero x alla meno n significa calcolare $\frac{1}{x^n}$; ad esempio, $2^{-3} = \frac{1}{8}$

1.2 Radicali

La radice n-esima di un numero x si definisce come quel numero che, elevato alla n, dà come risultato x. Facendo riferimento all'esempio precedente:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

è importante ricordare che:

1. ogni radicale può essere espresso come una potenza, secondo la seguente regola: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
2. dalla regola del punto 1, deriva che: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Intuitivamente, se $m = n$, allora vale che: $\sqrt[n]{x^m} = x$
3. tutti i numeri possono essere elevati a potenza, ma solo i numeri positivi possono essere portati sotto radici di indici pari; ad esempio, non si può calcolare la radice quadrata (di indice uguale a 2 e, dunque, pari) di -5

*luisa.lore@uniroma2.it

1.3 Proprietà di potenze e radicali

$$x^n x^m = x^{n+m}$$
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$
$$x^n y^n = (xy)^n$$
$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

2 Equazioni di primo grado ad un'incognita

Le equazioni di primo grado ad una incognita sono uguaglianze tra due polinomi che hanno grado 0 o 1, dove per grado del polinomio si intende l'esponente più alto associato alla x (l'incognita). Un esempio è dato da:

$$2x + 3 = 1$$

Risolvere un'equazione vuol dire individuare il valore dell'incognita (la x) per cui l'uguaglianza è verificata; nel farlo, è di cruciale importanza ricordare due tecniche:

1. è possibile sommare o sottrarre uno stesso da numero da entrambi i membri

2. è possibile moltiplicare o dividere per uno stesso numero entrambi i membri

Facendo riferimento all'esempio mostrato in precedenza, l'equazione può essere risolta attraverso due passaggi:

1. si sottrae il numero 3 da entrambi membri, ottenendo:

$$2x + 3 = 1 \rightarrow 2x + 3 - 3 = 1 - 3 \rightarrow 2x = -2$$

2. si dividono entrambi i membri per 2, ottenendo:

$$2x = -2 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \rightarrow x = -1$$

3 Le funzioni

3.1 Il concetto di funzione

Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme detto dominio uno ed un solo elemento di un insieme detto codominio. Detto diversamente, una funzione consente di trasformare i valori di una variabile input x in valori di una variabile output y, secondo la relazione:

$$Y = f(x)$$

Le funzioni ad una variabile si rappresentano nel piano cartesiano, costruito con un asse orizzontale e un asse verticale. Sull'asse orizzontale vengono rappresentati i valori della variabile input x e sull'asse verticale i valori assunti dalla variabile output y. La funzione si disegna come l'insieme dei punti del piano cartesiano che rappresentano combinazioni di x e di y, individuate secondo la relazione espressa dalla funzione stessa. Nel corso di Microeconomia assume rilevanza il primo quadrante (quello in alto a destra) del piano cartesiano.

3.2 La retta

Nel corso di Microeconomia, la classe di funzioni che assume la maggiore importanza sin dai primi argomenti trattati dal libro di testo è quella delle rette.
La generica equazione di una retta è:

$$y = mx + q$$

Oltre alle due variabili x ed y, due elementi, costanti, sono presenti:

1. il coefficiente angolare m, che indica la pendenza della retta. 4 casi sono importanti da ricordare:
   - $m > 0$ indica che la retta è inclinata positivamente (va verso l'alto)
   - $m < 0$ indica che la retta è inclinata negativamente (va verso il basso)
   - $m = 0$ indica che la retta è orizzontale e la sua equazione è: y=q
   - m non esiste (o, più precisamente, è pari a ∞) nel caso di una retta verticale, del tipo $x = k$
2. l'intercetta q, che indica il valore assunto dalla variabile y quando la x è pari a zero e dunque l'intersezione tra la retta e l'asse verticale; ovviamente, nel caso di retta verticale, questo valore non esiste, in quanto la retta non interseca l'asse verticale ma è alla stessa parallela

3.3 Retta passante tra due punti

Spesso nel corso di Microeconomia si è chiamati a rappresentare una funzione lineare (una retta) nel piano. Posto che tra due punti passa una e una sola retta, per disegnare una retta su un piano cartesiano basta individuare i valori assunti dalla funzione che la rappresenta in corrispondenza di due valori della x (o, più in generale, della variabile i cui valori sono rappresentati sull'asse orizzontale).
Spesso nel corso di Microeconomia si è chiamati ad individuare l'equazione di una retta passante tra due punti. In questo caso bisogna partire dal calcolo del coefficiente angolare, per poi determinare il valore dell' intercetta secondo la formula dell'equazione di una retta generica. Questo procedimento può essere chiarito da un esempio.

Esercizio Si determini l'equazione della retta passante per i punti 1 e 2, di coordinate $P_1 = (3; 8)$ e $P_2 = (4; 5)$
Svolgimento:

- Il primo passaggio consiste nella determinazione del coefficiente angolare m secondo questa formula:
  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
  Nell'esempio in esame,
  $$m = \frac{5 - 8}{4 - 3} = \frac{-3}{1} = -3$$
  Dal momento che il coefficiente angolare è negativo, deduciamo che questa retta è inclinata negativamente, il che non ci deve stupire, dal momento che se la x aumenta da 3 a 4 la y decresce da 8 a 5.

- Nel secondo passaggio, una volta determinato m, si utilizza l'equazione di una retta generica, si sostituiscono le variabili x ed y con le coordinate di uno dei due punti (non importa quale dei due), si sostituisce m con il valore trovato e si risolve l'equazione per q. In particolare, l'equazione di una retta è

  $$y = mx + q$$

  Facendo riferimento alle coordinate del punto 1 e al coefficiente angolare individuato, si ottiene

  $$8 = (-3)(3) + q$$

  Da cui

  $$q = 17$$

  Di conseguenza l'equazione della retta passante per i punti 1 e 2 è:

  $$y = -3x + 17$$

3.4 Intersezione tra due rette: i sistemi lineari

Nella risoluzione degli esercizi del Corso di Microeconomia spesso vi sarà chiesto di individuare il punto di intersezione tra due rette (vale a dire, il punto in corrispondenza del quale due rette si incontrano, assumendo lo stesso valore). Per svolgere un esercizio di questo tipo, bisogna inserire all' interno di un sistema lineare le equazioni delle due rette e trovare i valori della x e della y (o, più in generale, delle due variabili presenti nelle equazioni) che risolvono il sistema stesso. Per risolvere i sistemi lineari ci sono 4 metodi: sostituzione, confronto, addizione o sottrazione, Cramer. Il più semplice ed intuitivo è il metodo di sostituzione. Siete comunque liberi di applicare il metodo che preferite. Chiariamo tutto con un esempio.

Esercizio Date le rette di equazioni $3x + 2y = 5$ e $x + y = 7$, individuare le coordinate del punto di intersezione.

Svolgimento

1. il primo passaggio consiste nel porre a sistema le due equazioni:

   $$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

2. in accordo al metodo di sostituzione, bisogna esplicitare un'equazione (possibilmente quella più facile da gestire) rispetto ad un'incognita; nel nostro caso, espliciteremo la seconda equazione rispetto alla y, nella consapevolezza che altre scelte sono possibili ed ugualmente corrette:

   $$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

3. il terzo passaggio consiste nel trascrivere la seconda equazione nella prima, sostituendo il valore ricavato al posto dell'incognita precedentemente esplicitata (nel nostro caso, sostituiamo all'interno della prima equazione y con (7 – x)); la seconda equazione viene copiata così com'è:

$$\begin{cases} (3x + 2(7 - x) = 5 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

4. a questo punto la prima equazione è diventata un' equazione di primo grado ad un'incognita e si può risolvere attraverso le regole esposte all' inizio di questa esercitazione:

$$\begin{cases} 3x + 14 - 2x = 5 \to x + 14 = 5 \to x = -9 \\ y = 7 - x \end{cases}$$

5. a questo punto abbiamo individuato il valore della x; per determinare quello della y basta sostituire, nella seconda equazione, la variabile x con il valore individuato (-9):

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 7 - x \to y = 7 - (-9) \to y = 16 \end{cases}$$

6. il punto di intersezione tra le rette ha coordinate $x^* = -9$ e $y^* = 16$

4 Funzione logaritmica ed esponenziale

Un'equazione esponenziale si presenta nel seguente modo:

$$a^x = b$$

Ad esempio

$$2^x = 8$$

Per risolverla è necessario esprimere le costanti come numeri elevati a potenza in modo tale da ottenere potenze con la stessa base in entrambi i membri dell'equazione e poter occuparsi delle incognite, in questo modo:

$$2^x = 2^3 \to x = 3$$

Ripartiamo ora dalla forma generica di equazione esponenziale

$$a^x = b$$

E definiamo il logaritmo nel seguente modo

$$log_a(b) = x$$

(si legge: *logaritmo di b in base a uguale ad x*)
Il logaritmo quindi è una funzione che ha come valore l'indice della potenza (x) a cui dobbiamo elevare la base (a) per ottenere l'argomento (b).

Convenzionalmente la base del logaritmo è 10, ma esiste anche una base "speciale" che è molto frequentemente utilizzata in economia e in statistica, il numero del Nepero, e. Il logaritmo in base e si definisce logaritmo naturale e si scrive così

$$ln(b) = x$$

(si legge: *logaritmo naturale di b uguale ad x*)
La funzione esponenziale è la funzione inversa a quella logaritmica, per comprendere il suo significato ripartiamo dall'equazione esponenziale che abbiamo utilizzato all'inizio

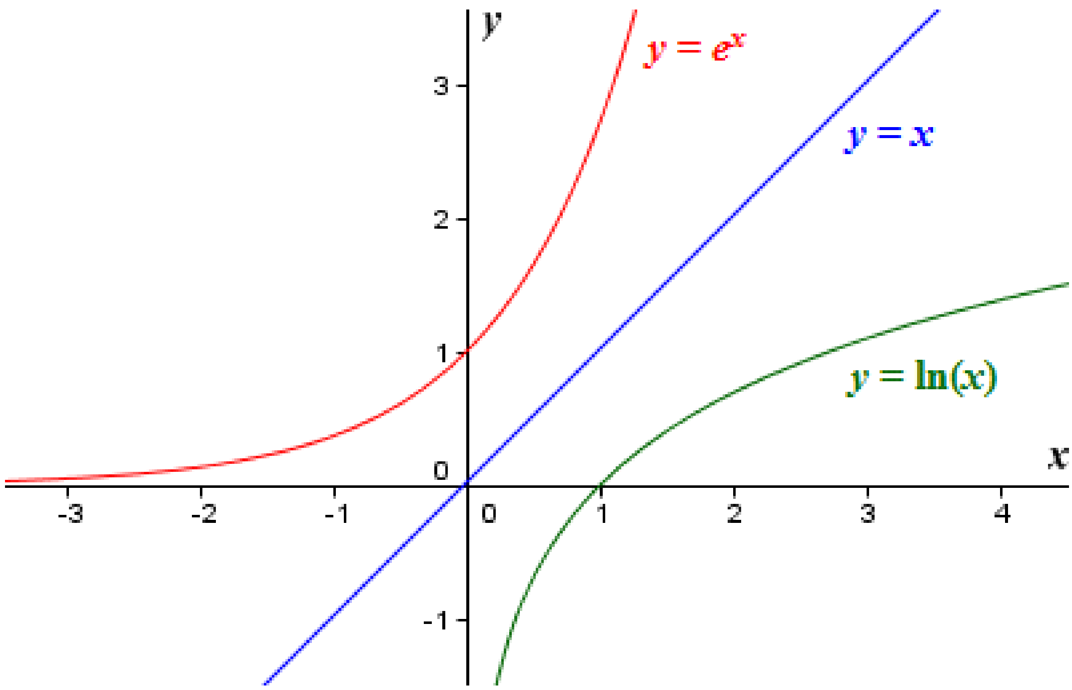
$$a^x = b \rightarrow log_a(b) = x$$

$$ln(b) = log_e(b) = x \rightarrow e^x = b$$

Durante la prossima esercitazione daremo un'occhiata alla rappresentazione grafica della funzione logaritmica e di quella esponenziale.

5 Funzione logaritmica ed esponenziale: reppresentazione sul piano cartesiano

Per concludere il discorso aperto durante la prima esercitazione riguardo queste funzioni, osserviamone la rappresentazione grafica:



Sia l'esponenziale sia il logaritmo sono due funzioni crescenti, ma il primo cresce più velocemente rispetto al secondo. L'intercetta della funzione esponenziale con l'asse delle y è 1, perché questa funzione vale 1 quando e è elevato a 0 (qualsiasi numero elevato alla 0 risulta 1), mentre non è possibile che y sia zero perché non esistono valori di x tali per cui un numero diverso da zero elevato a x risulti 0, e quindi questa funzione non avrà un'intercetta sull'asse delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto orizzontale per la funzione esponenziale quando essa tende a infinito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano). L'intercetta della funzione logaritmica con l'asse delle x è 1, perché questa funzione vale 0 quando l'argomento del logaritmo è 1, mentre non c'è nessun valore che x possa assumere tale per cui il valore della funzione sia uguale a 0 e quindi questa funzione non avrà un'intercetta sul piano delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto verticale per la funzione logaritmica quando essa tende a infnito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano, ma trovando il *muro* che gli pone davanti l'asintoto è portata verso il basso).

6 Le derivate

Le derivate rappresentano il concetto matematico più importante nel corso di Microeconomia. Siete pertanto invitati a prestare particolare attenzione a questo paragrafo. La piena comprensione delle derivate è la premessa necessaria per la comprensione di tutti gli esercizi che verranno discussi durante il corso di Microeconomia.

6.1 La derivata prima di una funzione

La derivata prima di una funzione $f(x)$ in un punto di ascissa x_0, $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, indica il coefficiente angolare (e dunque la pendenza) della retta tangente alla funzione $f(x)$ in x_0.

6.2 Interpretazione economica del concetto di derivata

È importante ricordare un'ulteriore interpretazione del concetto di derivata, coerente rispetto alla precedente definizione e di grande rilevanza nell'ambito del Corso di Microeconomia. In particolare, la derivata prima di una funzione indica l'impatto sulla variabile output y di una unità aggiuntiva della variabile input x.

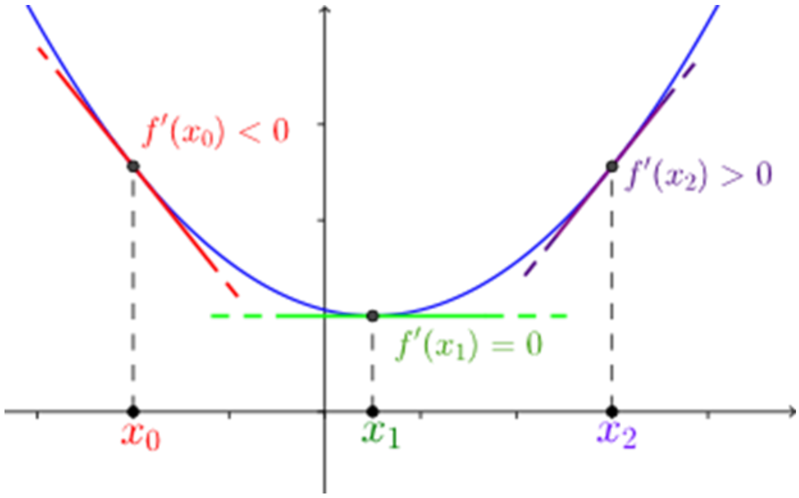
6.3 Calcolo delle derivate

Per effettuare il calcolo delle derivate, si utilizzano le regole di derivazione, le quali consentono, a partire da una funzione $f(x)$, di individuare la funzione che esprime la sua derivata prima $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$.
La seguente tabella riporta in modo esaustivo le regole di derivazione.

funzione	**derivata prima**
$f(x) = k$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$
$f(x) = x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1$
$f(x) = kh(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k\frac{\partial h(x)}{\partial x}$
$f(x) = kx$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k$
$f(x) = x^{(n)}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = nx^{(n-1)}$
$f(x) = g(h(x))$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial g(h(x))}{\partial x}$
$f(x) = ln(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$
$f(x) = log(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{xln(a)}$
$f(x) = e^x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = e^x$
$f(x) = a^x$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = a^x ln(a)$
$f(x) = h(x) + g(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x}$
$f(x) = h(x)g(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x}h(x)$
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial h(x)}{\partial x}g(x)+\frac{\partial g(x)}{\partial x}h(x)}{[g(x)]^2}$

6.4 Derivata e andamento della funzione

Calcolare la derivata di una funzione è di fondamentale importanza dal momento che ci consente di comprendere quale sia l'andamento della funzione stessa, come si evince chiaramente dalla seguente rappresentazione grafica.



In particolare, siamo interessati a tre casi:

1. Se la derivata è minore di zero, significa che la funzione è decrescente (vale a dire, va verso il basso);
2. Se la derivata è maggiore di zero, significa che la funzione è crescente (vale a dire, va verso l'alto);
3. Se la derivata è pari a zero, significa che la funzione è né crescente né decrescente: è caratterizzata da un punto stazionario e la retta tangente alla funzione è orizzontale.

7 La derivata seconda

La derivata seconda di una funzione $f(x)$, $f''(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x}$, si calcola come la derivata della derivata prima $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$. Ad esempio, data la funzione $f(x) = x^2$, la derivata prima è $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ e la derivata seconda è $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} = 2$.
La derivata seconda è utile dal momento che indica se la funzione sia concava o convessa. Una funzione concava è caratterizzata da una derivata seconda negativa, mentre una funzione convessa ha derivata seconda positiva.
Studiare la derivata seconda di una funzione è utile per minimizzare o massimizzare la funzione stessa. In particolare, una funzione ha un punto di minimo (un punto tale che non ci sono valori più bassi della y) quando:

- La derivata prima è pari a zero (il punto è stazionario)
- La derivata seconda è positiva (la funzione è convessa)

Una funzione ha un punto di massimo (un punto tale che non ci sono valori più alti della y) quando:

- La derivata prima è pari a zero (il punto è stazionario)
- La derivata seconda è negativa (la funzione è concava)

Nel Corso di Microeconomia si svolgono vari problemi di massimizzazione e minimizzazione; tuttavia, negli esercizi, non vi sarà chiesto di calcolare derivate seconde. Vi troverete di fronte a funzioni concave o convesse per costruzione. Per risolvere tali problemi, dunque, basta ricordare due cose:

- Quando la funzione è concava, per massimizzarla si azzera la derivata prima
- Quando la funzione è convessa, per minimizzarla si azzera la derivata prima

Azzerare la derivata prima di una funzione significa calcolare l'equazione della derivata prima e individuare il valore della variabile input che la rende pari a zero.

8 Le funzioni a due variabili

Questo paragrafo potrebbe risultare difficile a livello teorico, ma, come vedrete, negli esercizi tutto sarà facile ed intuitivo.
Le funzioni a due variabili si esprimono nella forma $Z = f(X,Y)$, dipendono da due variabili (X e Y) e si rappresentano nello spazio individuato da tre assi (X,Y,Z). Queste funzioni associano a combinazioni di X e Y determinati valori di Z.
Un esempio è dato da $Z = X^2Y^3$. Questa funzione ci dice, ad esempio, che ad una combinazione di X e Y per cui $X = 1$ e $Y = 2$ corrisponde un valore di Z pari ad 8.

8.1 Le curve di livello

Data una funzione $Z = f(X,Y)$, una curva di livello, costruita sul piano $X - Y$, è l'insieme dei punti che rappresentano combinazioni di X e Y associate dalla funzione ad un medesimo livello di Z.
Facciamo un esempio:
Data la funzione a due variabili $Z = X^2Y^3$, la curva di livello $8 = X^2Y^3$ rappresenta tutte le combinazioni di X ed Y che secondo la funzione Z danno come risultato 8. Ovviamente, il punto $(1, 2)$ dell' esempio precedente fa parte di questa curva di livello.
Per rappresentare nel piano $X - Y$ questa curva di livello, si fa riferimento alla funzione

$$Y^3 = \frac{8}{X^2}$$

Cioè

$$Y = \frac{2}{X^{\frac{2}{3}}}$$

8.2 Le derivate parziali

Data una funzione a due variabili, $Z = f(X,Y)$, è possibile calcolare due derivate parziali.
La derivata parziale di Z rispetto a X, $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}$, indica la variazione subita dalla Z in corrispondenza di una variazione infinitesimale della variabile X, tenendo costante la Y.
La derivata parziale di Z rispetto a Y, $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}$, indica la variazione subita dalla Z in corrispondenza di una variazione infinitesimale della variabile Y, tenendo costante la X.

8.3 Calcolo delle derivate parziali

Per calcolare la derivata parziale di una funzione $Z = f(X, Y)$ rispetto a X, si deriva la funzione Z considerando X come una variabile e Y come una costante. Per calcolare la derivata parziale rispetto a Y, si considera Y come una variabile e X come una costante. Tutto ciò può essere chiarito con un esempio.

Esercizio Data la funzione $Z = X^2Y^3$, si determinino le derivate parziali.

Svolgimento La formula che bisogna ricordare è quella della derivata di una funzione moltiplicata per una costante, secondo cui, se $f(x) = kh(x)$, allora $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = k\frac{\partial h(x)}{\partial x}$.
Iniziando dalla derivata parziale rispetto a x, si ha che $h(x) = X^2$, mentre $k = Y^3$. Essendo $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 2X$, si ottiene che:

$$\frac{\partial f(X, Y)}{\partial X} = 2XY^3$$

Seguendo un ragionamento del tutto analogo, si ottiene che:

$$\frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y} = 3X^2Y^2$$

ESERCIZI

1.1 Calcolare le seguenti potenze:

1. 6^2
2. 3^3
3. 2^4
4. 6^{-2}
5. 3^{-3}
6. 2^{-4}

1.2 Scrivere i seguenti radicali in forma di potenza e le seguenti potenze in forma di radicali:

1. $\sqrt[5]{3}$
2. $\sqrt[6]{3^5}$
3. $2^{\frac{1}{2}}$
4. $3^{\frac{4}{5}}$
5. $\sqrt[6]{10^6}$
6. $2^{-\frac{1}{2}}$

1.3 Semplificare le seguenti espressioni utilizzando le proprietà di potenze e radicali:

1. $5^3 5$
2. $2^4 2^{0.25}$
3. $\frac{6^5}{6}$
4. $\frac{30^9}{30^{10}}$
5. $\frac{6}{2^2 3^2}$
6. $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$

2 Risolvere le seguenti equazioni:

1. $3x + 5 - 7x = 4x + 1$
2. $3 + 80x = -3 + 6x$
3. $2 + \frac{(x+1)}{4} = 5$

3.2 Individuare il coefficiente angolare e l'intercetta delle seguenti rette; rappresentare le rette in un piano cartesiano.

1. $5 = 3x + 2y$
2. $3y = 18 + 6x$
3. $25 = 5y + 10x$
4. $y = 5x + 10 - 2x + 3$

3.3 Individuare l'equazione della rette passanti tra i seguenti punti e rappresentarle graficamente:

1. $(5;2)$ $(3;1)$
2. $(5;2)$ $(5;1)$
3. $(6;1)$ $(4;1)$
4. $(8;3)$ $(7;2)$

3.4 Individuare il punto di intersezione tra le seguenti rette:

1. $y = 3x + 2$ e $5 = 2y + 3x$
2. $25 = 3x + 2y$ e $2y = 4x + 6$
3. $20x = 100$ e $25 = 5y + 10x$

6 Derivare le seguenti funzioni:

1. $f(x) = 10x + 100$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 10$
3. $f(x) = 200x - x^2 - 20x - 200$
4. $f(x) = x + 10 + \frac{100}{x}$
5. $f(x) = x^3 + x^{\frac{1}{2}} + 3281$

7 Massimizzare le seguenti funzioni concave:

1. $f(x) = 50x - x^2 + 28$
2. $f(x) = -3x^2 + x + 3$
3. $f(x) = -4x^2 + 5x - 45$

Minimizzare le seguenti funzioni convesse:

1. $f(x) = x + 10 + \frac{10000}{x}$
2. $f(x) = 4x^2 - 8x - 21$
3. $f(x) = 2x + \frac{56}{x}$

8.1 Determinare l'equazione che esprime la curva di livello per le seguenti funzioni, dati i seguenti livelli:

1. $Z = X^{0.5}Y^{0.5}$ con $Z_0 = 3$
2. $Z = X^2Y$ con $Z_0 = 5$
3. $Z = X^{0.25}Y^{0.25}$ con $Z_0 = 8$
4. $Z = X^2Y^3$ con $Z_0 = 27$

8.2 Determinare le derivate parziali relative alle funzioni del precedente esercizio.

SOLUZIONI

1.1

1. 32
2. 27
3. 16
4. $\frac{1}{36}$
5. $\frac{1}{27}$
6. $\frac{1}{16}$

1.2

1. $3^{\frac{1}{5}}$
2. $3^{\frac{5}{6}}$
3. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt[5]{3^4}$
5. 10
6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1.3

1. 5^4
2. $2^{4.25}$
3. 6^4
4. $\frac{1}{30}$
5. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

2

1. $\frac{1}{2}$
2. $-\frac{3}{37}$
3. 11

3.2

1. $m = -\frac{3}{2}$, $q = \frac{5}{2}$
2. $m = 2$, $q = 6$
3. $m = -2$, $q = 5$
4. $m = 3$, $q = 13$

3.3

1. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
2. $x = 5$
3. $y = 1$
4. $y = x - 5$

3.4

1. $(x^*, y^*) = (\frac{1}{9}, \frac{7}{3})$
2. $(x^*, y^*) = (\frac{19}{7}, \frac{59}{7})$
3. $(x^*, y^*) = (5, -5)$

6

1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 10$
2. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x + 4$
3. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 180 - 2x$
4. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1 + \frac{100}{x^2}$
5. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

7

1. $x = 25$
2. $x = \frac{1}{6}$
3. $x = \frac{5}{8}$

1. $x = \pm 100$
2. $x = 1$
3. $x = \sqrt{28}$

8.1

1. $Y = \frac{9}{X}$
2. $Y = \frac{5}{X^2}$
3. $Y = \frac{8^4}{X}$
4. $Y = \frac{3}{X^{\frac{2}{3}}}$

8.2

1. $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 0.5X^{-0.5}Y^{0.5}$; $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 0.5X^{0.5}Y^{-0.5}$
2. $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 2XY$; $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = X^2$
3. $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 0.25X^{-0.75}Y^{0.25}$; $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 0.25X^{0.25}Y^{-0.75}$
4. $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X} = 2XY^3$; $\frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y} = 3X^2Y^2$

Microeconomia
Esercitazione 1
Il problema di massimizzazione dell'utilità

Luisa Lorè*

01/04/2021

Il problema di massimizzazione dell'utilità

Il problema di massimizzazione dell'utilità è uno, se non il, problema principale della Teoria del Consumatore. Per essere in grado di risolverlo è necessario ripassare alcuni concetti preliminari.

Le curve d'indifferenza

Una curva d'indifferenza è un insieme di punti sul diagramma (x_1, x_2) che rappresenta i panieri dei beni 1 e 2 associati allo stesso livello di utilità dalla funzione di utilità. Dal punto di vista matematica, le curve d'indifferenza sono le curve di livello della funzione di utilità. Per poterli disegnare su un diagramma cartesiano facilmente, è importante sapere come esplicitare la funzione di utilità come x_2 in funzione di x_1 (nella forma $x_2 = f(x_1)$), dopo aver fissato un livello di utilità $\bar{U}$. Adesso concentriamoci, invece, sulla pendenza delle curve d'indifferenza, tutte le curve della stessa funzione hanno la stessa espressione per la pendenza, che è rappresentata dall'opposto del modulo del rapporto dalle utilità marginali. Il rapporto delle utilità marginali è il saggio marginale di sostituzione:

$$SMS_{1,2} = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}}$$

Quindi, la pendenza è:

$$-|SMS_{1,2}|$$

Esercizio 1

Data la seguente funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}},$$

Determinate

*luisa.lore@uniroma2.it

a) l'equazione di una curva d'indifferenza generica,

b) l'equazione della curva d'indifferenza relativa al livello di utilità $\bar{U} = 3$,

c) la pendenza delle curve d'indifferenza.

Soluzione

a) L'equazione di una curva d'indifferenza generica può essere trovata semplicemente fissando un livello di utilità $\bar{U}$ ed esplicitando la funzione come $x_2 = f(x_1)$:

$$x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}} = \bar{U} \rightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{U}}{x_1^{\frac{1}{4}}} \rightarrow x_2 = \frac{\bar{U}^2}{x_1^{\frac{1}{2}}}$$

b) Considerata la funzione di utilità e il livello di utilità $\bar{U} = 3$, si ottiene che:

$$x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{x_1^{\frac{1}{4}}} \rightarrow x_2 = \frac{9}{x_1^{\frac{1}{2}}}$$

c) La pendenza delle curve d'indifferenza è determinata dall'opposto del modulo del $SMS_{1,2}$. Come prima cosa calcoliamo le utilità marginali:

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{\frac{1}{4}-1} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{1}{2}}$$

Adesso, calcoliamo il $SMS_{1,2}$ come il rapporto delle utilità marginali:

$$SMS_{1,2} = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{2}} \cdot 2 x_1^{-\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$SMS_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{x_2}{x_1}$$

La pendenza delle curve d'indifferenza è:

$$-|SMS_{1,2}| = -\frac{1}{2} \frac{x_2}{x_1}$$

Il vincolo di bilancio

Il vincolo di bilancio esprime le possibilità di consumo individuali del consumatore che stiamo studiando, e mostra tutte le combinazioni di beni, panieri, che sono acquistabili per il consumatore. Per essere facilmente rappresentato su un grafico, viene espresso nella forma $x_2 = f(x_1)$; ma allo stesso tempo è molto importante conoscere, ed iniziare la nostra analisi da questa forma:

$$R = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

E poi eventualmente riscriverla nel suguente modo:

$$R = p_1x_1 + p_2x \longrightarrow p_2x_2 = R - p_1x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Questo perché la forma espressa dalla prima formula ci aiuta a comprendere meglio il concetto del vincolo di bilancio ed il suo funzionamento. Adesso, cerchiamo di capire dalla forma generica quali siano le intercette ed il coefficiente angolare.

- Partiamo dal **coefficiente angolare**, questo in ogni retta è la costante che nella forma $x_2 = f(x_1)$ è moltiplicata per x_1, quindi $-\frac{p_1}{p_2}$. La pendenza del vincolo di bilancio è data dai prezzi relativi, cioè dal rapporto tra i due prezzi.

- Passiamo ora alle **intercette**, sappiamo dalla forma $x_2 = f(x_1)$ che l'intercetta sull'asse x_2, cioè il valore che la retta assume quando $x_1 = 0$ è $x_2 = \frac{R}{p_2}$. Quale intuizione economica ci suggerisce questo? Le intercette del vincolo di bilancio rappresentano quante unità di un bene il consumatore avrebbe la possibilità di acquistare nel caso decidesse di comprare solo quel bene, quindi se allocasse il suo intero reddito in un bene. Appare quindi evidente che le intercette sugli assi, in assenza di ulteriori condizioni, saranno sempre individuate nel seguente modo: $x_1 = \frac{R}{p_1}$ e $x_2 = \frac{R}{p_2}$.

Esercizio 2

Dati il prezzo del bene 1, $p_1 = 5$, il prezzo del bene 2, $p_2 = 10$, ed il reddito del consumatore, $R = 100$, determinate:

a) l'equazione del vincolo derivata dalla definizione,

b) l'equazione del vincolo per poterlo disegnare su un grafico,

c) la pendenza e le intercette con gli assi.

Soluzione

a) Il vincolo di bilancio mostra tutti i panieri che sono acquistabili dal consumatore:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$100 = 5x_1 + 10x_2$$

b) Per poter disegnare il vincolo su un diagramma, dobbiamo esprimere x_2 in funzione di x_1:

$$100 = 5x_1 + 10x_2 \rightarrow 10x_2 = 100 - 5x_1$$

$$x_2 = 10 - \frac{1}{2}x_1$$

c) La pendenza del vincolo di bilancio è data dall'opposto dei prezzi relativi:

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Mentre le intersezioni con gli assi sono date dal consumo di un bene quando si consuma solo quel bene e non si consuma nessuna unità dell'altro bene:

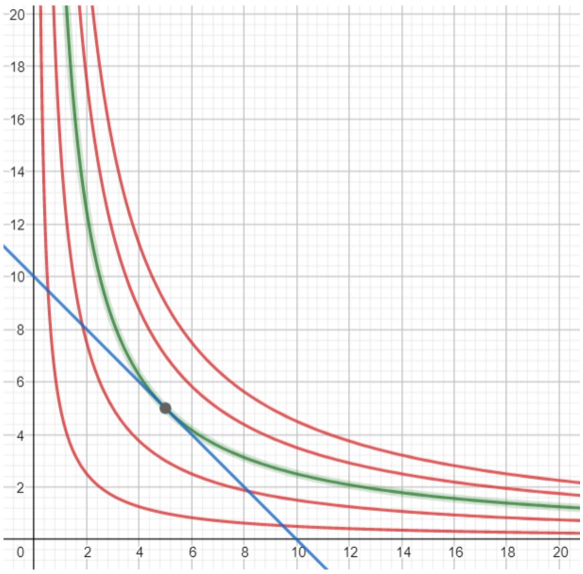
$$x_1 = 0 \to x_2 = \frac{R}{p_2} \to x_2 = \frac{100}{10} = 10$$
$$x_2 = 0 \to x_1 = \frac{R}{p_1} \to x_1 = \frac{100}{5} = 20$$

Il paniere ottimo

Il punto di ottimo del consumatore è il punto in cui l'individuo preso in analisi gode dell'utilità maggiore che può raggiungere dato il suo vincolo di bilancio, in parole povere è il più felice possibile rispetto a quelle che sono le sue risorse economiche. Dalla teoria sappiamo di dover risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \to \text{Condizione di Tangenza (soluzione interna)} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \text{Vincolo di Bilancio} \end{cases}$$

Ma perché? Come abbiamo detto già tante volte, un sistema ci aiuta ad individuare i punti in due rette si incontrano e quindi punti di intersezione o di tangenza tra le due curve. In questo caso noi stiamo ponendo uguali nella prima equazione le due pendenze delle curve di cui ci interessa trovare il punto di tangenza, la funzione della curva d'indifferenza (SMS) e il vincolo di bilancio $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$.



La prima equazione ci esprime, quindi, come ricavare da un punto di vista matematico la situazione ottimale per il consumatore. La seconda equazione pone una restrizione al nostro problema, cioè individua al massimo quanto il consumatore può acquistare per massimizzare la sua funzione di utilità, ed è semplicemente il vincolo di bilancio. Ora, la risoluzione di questo sistema non è estremamente complessa, ma è importante sottilineare perché stiamo cercando esattamente il punto di tangenza, e non semplicemente un punto di intersezione tra le due curve. La curva di utilità tangente al vincolo di bilancio è quella che corrisponde al livello più alto possibile tra quelle che sono ancora parte del vincolo di bilancio, è la più estrema, quindi in un'ottica di massimizzazione è la migliore.

Esercizio 3

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito $R = 200$ in un mercato in cui i prezzi dei beni sono $p_1 = p_2 = 10$.

Soluzione

Passiamo ora alla risoluzione numerica:

$$Umg_1 = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} x_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$Umg_1 = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2 \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{10} \rightarrow x_1 = x_2 \\ 200 = 10x_1 + 10x_2 \rightarrow 200 = 10x_1 + 10x_1 \rightarrow x_1 = \frac{200}{20} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 = 10 \end{cases}$$

$$\textbf{Paniere Ottimo: } (\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}) = (\mathbf{10}, \mathbf{10})$$

Microeconomia
Esercitazione 2
Costruire una curva di domanda

Luisa Lorè*

01/04/2021

Esercizio 1

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = lnx_1 lnx_2$$

1. Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito $R = 120$ in un mercato in cui i prezzi dei beni sono $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$.
2. Determinate come cambia la scelta di ottimo se il reddito del consumatore raddoppia ($R' = 240$).
3. Le domande ottime per i due beni

Soluzione

1. Come già visto, per risolvere questo tipo di esercizi dobbiamo impostare un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

   Prima di passare al sistema, calcoliamo il SMS della funzione attraverso le utilità marginali:

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{1} = \frac{x_2}{x_1}$$

*luisa.lore@uniroma2.it

Passiamo ora alla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 120 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow 120 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \rightarrow x_1 = \frac{120}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}30 = 20 \\ x_1 = 30 \end{cases}$$

$$\textbf{Paniere Ottimo: } (\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}) = (\mathbf{30}, \mathbf{20})$$

2. Come per il punto precedente, il sistema di risoluzione è sempre quello relativo al Problema di Massimizzazione dell'Utilità:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R' = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Dovendo variare solo ed esclusivamente il reddito, l'intera prima condizione del sistema rimane invariata.

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 240 = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow 240 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \rightarrow x_1 = \frac{240}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}30 = 40 \\ x_1 = 60 \end{cases}$$

$$\textbf{Paniere Ottimo: } (\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}) = (\mathbf{60}, \mathbf{40})$$

3. Calcoliamo le domande ottime per i due beni con il solito sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1 \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \rightarrow R = p_1x_1 + p_2\frac{p_1}{p_2}x_1 \rightarrow R = 2p_1x_1 \end{cases}$$

$$x_1(R, p_1, p_2) = \frac{R}{2p_1}$$

$$x_2(R, p_1, p_2) = \frac{R}{2p_2}$$

Esercizio 2

Data una generica funzione di utilità Coob-Douglas

$$U(x_1,\, x_2) = Ax_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni

2. Le elasticità delle domande ottime al prezzo, sia dirette che incrociate

3. Le elasticità delle domande ottime al reddito ed indicare se i due beni sono normali (superiori) o Giffen (inferiori)

Soluzione

1. Calcoliamo le domande ottime per i due beni con il solito sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_1} = A\alpha\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_2} = A\beta\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1}$$

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{A\alpha\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta}}{A\beta\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow x_2 = x_1 \frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_1 x_1 \frac{\beta}{\alpha}$$

$$R = x_1 \left(p_1 + p_1 \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$x_1(R, p_1, p_2) = \frac{R}{p_1(1 + \frac{\beta}{\alpha})} = \frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

$$x_2(R, p_1, p_2) = \frac{R}{p_2(1 + \frac{\alpha}{\beta})} = \frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

2. Calcoliamo le elasticità dirette delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_1) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} = -1$$

$$\epsilon(x_2,\, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2^2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} = -1$$

Ora invece, calcoliamo le elasticità incrociate domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1,\, p_2) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0$$

$$\epsilon(x_2,\, p_1) = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = 0$$

3. Calcoliamo le elasticità delle domande ottime al reddito:

$$\epsilon(x_1,\, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R}\frac{R}{x_1} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{R}{x_1} = \frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} = 1$$

$$\epsilon(x_2,\, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R}\frac{R}{x_2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{R}{x_2} = \frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} = 1$$

Cosa possiamo quindi imparare da questo esercizio? La funzione di Cobb-Douglas, è una forma funzionale estremamente usata in Economia, ci permette di descrivere molto bene i fenomeni economici, e gode di diverse proprietà. Analizziamo, ad esempio, la domanda per il bene x_1 ed alcune sue caratteristiche (i.e. come varia al variare del reddito R, del proprio prezzo p_1 e del prezzo dell'altro bene p_2):

$$x_1(R, p_1, p_2) = \frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

- Partiamo da p_1, se osserviamo la funzione possiamo renderci conto che all'aumentere del proprio prezzo, la domanda per il bene 1 diminuisce. Intuitivamente, dato che stiamo parlando di beni normali, ce lo saremmo aspettato, inoltre avevamo anche già verificato che l'elasticità della domanda al prezzo diretto è negativa.

- Per quanto riguarda R, invece, guardando la funzione capiamo come all'aumentere del reddito del consumatore, la domanda per il bene 1 aumenta. Intuitivamente, dato che stiamo parlando di beni superiori, ce lo saremmo aspettato, inoltre avevamo anche già verificato che l'elasticità della domanda al reddito è positiva.

- Infine come possiamo notare dalla funzione, il prezzo del secondo bene p_2 è assente, per questo possiamo dire che la domanda del bene 1 è completamente indipendente rispetto alle variazioni del prezzo dell'altro bene. Per questo l'elasticità della domanda al prezzo incrociato è uguale a zero.

Microeconomia
Esercitazione 3 - Perfetti Sostituti

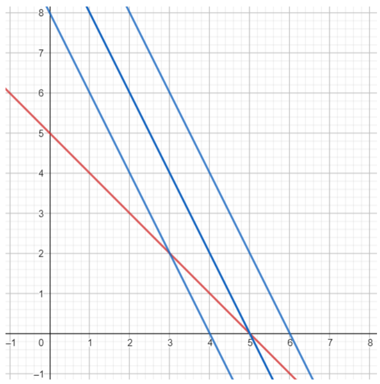
Luisa Lorè*

08/04/2021

Perfetti Sostituti

Il caso dei beni perfetti sostituti è un caso particolare, in cui il consumatore considera il consumo dei due beni equivalente (il classico esempio è quello del tè e del caffè), la scelta tra i due beni è dettata, come vedremo, unicamente dal loro prezzo.
Per comprendere come costruire la curva di domanda di questi beni, ed il paniere ottimo ai prezzi e al reddito indicati, utilizziamo una rappresentazione grafica. Possiamo osservare tre casi (in blu ci sono le curve d'indifferenza, mentre in rosso il vincolo di bilancio):

1. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno pendenze diverse, e la pendenza del primo è maggiore di quella delle seconde, quindi $-\frac{p_1}{p_2} > -MRS \rightarrow MRS > \frac{p_1}{p_2}$, il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è l'intercetta con l'asse x_1, come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per il bene x_1 è data dall'intero reddito diviso per il prezzo del bene 1, come abbiamo potuto vedere nelle precedenti esercitazioni, mentre la domanda per il bene x_2 è uguale a zero.

$$x_1 = \frac{R}{p_1} \text{ se } MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

*luisa.lore@uniroma2.it

$$x_2 = 0 \text{ se } MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

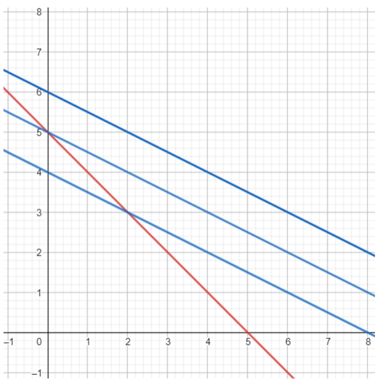
$$MRS > \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} > \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} > \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è superiore a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è maggiore rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. E facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito nell'acquisto del bene 1.

2. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno pendenze diverse, e la pendenza del primo è minore di quella delle seconde, quindi $-\frac{p_1}{p_2} < -MRS \rightarrow MRS < \frac{p_1}{p_2}$, il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è l'intercetta con l'asse x_2, come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per il bene x_2 è data dall'intero reddito diviso per il prezzo del bene 2, come abbiamo potuto vedere nelle precedenti esercitazioni, mentre la domanda per il bene x_1 è uguale a zero.

$$x_1 = 0 \text{ se } MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} \text{ se } MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

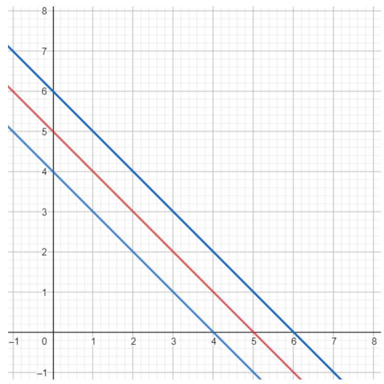
$$MRS < \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} < \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} < \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è inferiore a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è minore rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. E facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito nell'acquisto del bene 2.

3. Se il vincolo di bilancio e le curve d'indifferenza hanno la stessa pendenza, quindi $-\frac{p_1}{p_2} = -MRS \rightarrow MRS = \frac{p_1}{p_2}$, il punto d'utilità maggiore che può raggiungere economicamente il consumatore è un qualsiasi punto del vincolo di bilancio come è possibile vedere dalla seguente immagine:



Quindi la domanda per i bene x_1 e x_2 è data da una qualsiasi combinazione lineare dei due punti che giacia sul vincolo di bilancio.

$$x_1 = [0; \frac{R}{p_1}] \text{ se } MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = [0; \frac{R}{p_2}] \text{ se } MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

Dal punto di vista matematico, sappiamo che se vale la condizione:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Umg_1}{p_1} = \frac{Umg_2}{p_2}$$

E che quindi, l'utilità marginale del bene 1 relativa al proprio prezzo è uguale a quella del bene 2 sempre relativa al proprio prezzo. In altri termini, sappiamo che il valore associato al consumo del bene 1 considerato il suo costo è uguale rispetto al valore associato al consumo del bene 2 considerato il suo costo. E facile quindi intuire perché, se il consumatore è indifferente tra i due beni, scelga di allocare il proprio intero reddito in una qualsiasi combinazione dei due bene.

Esercizio 1

Data la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Il paniere ottimo per un reddito del consumatore

   $$R = 30$$

   e dei prezzi di mercato $p_1 = 3$ e $p_2 = 1$

Soluzione

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per prima cosa calcoliamo il SMS:

   $$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2$$

   $$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1$$

   $$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = 2$$

   Le domande per i beni sono le seguenti:

   $$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{p_1}{p_2} > 2 \\ 0; \frac{R}{p_1} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \frac{R}{p_1} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} < 2 \end{cases}$$

   $$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{p_1}{p_2} < 2 \\ 0; \frac{R}{p_2} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \frac{R}{p_2} & \text{se } \frac{p_1}{p_2} > 2 \end{cases}$$

2. Sapendo le domande per i due beni, dobbiamo solo confrontare il SMS calcolato nel precedente punto e confrontarlo con i prezzi relativi:

   $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{1}$$

   $$2 < 3 \rightarrow SMS < \frac{p_1}{p_2}$$

   $$x_1^* = 0$$

   $$x_2^* = \frac{R}{p_2} = \frac{30}{1} = 30$$

Microeconomia
Esercitazione 4 - Perfetti Complementi

Luisa Lorè[*]

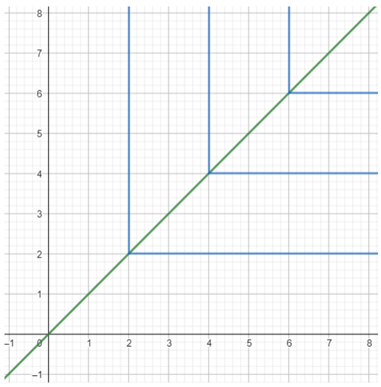
20/04/2021

Perfetti Complementi

Il caso dei beni perfetti complementi è un caso particolare, in cui il consumatore desidera consumare i due beni congiuntamente ed in una specifica proporzione espressa dalla funzione di utilità (il classico esempio è quello del caffè e dello zucchero), che si presenta nella seguente formula:

$$U(x_1, x_2) = min\{\alpha x_1; \beta x_2\}$$

Da un punto di vista grafico le curve d'indifferenza appaiono così (in blu):



Il lungo in cui il consumo del consumatore è ottimo, è dato dai punti di angolo, quelli in cui è rispettata la proporzione ottima tra le quantità. Che giace sulla retta (in verde nel grafico):

$$\alpha x_1 = \beta x_2 \rightarrow x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$$

Quindi il paniere ottimo è dato dall'intersezione tra il vincolo di bilancio e dalla retta $x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$. Possiamo quindi costruire il sistema nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1 \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_2 \frac{\alpha}{\beta} x_1 \rightarrow x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{\alpha}{\beta} p_2}$$

[*]luisa.lore@uniroma2.it

$$R = p_1 \frac{\beta}{\alpha} x_2 + p_2 x_2 \rightarrow x_2 = \frac{R}{\frac{\beta}{\alpha} p_1 + p_2}$$

Esercizio 1

Data la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1, x_2) = min\{3x_1; 5x_2\}$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Il paniere ottimo per un reddito del consumatore

$$R = 220$$

   e dei prezzi di mercato $p_1 = 5$ e $p_2 = 10$

Soluzione

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Impostiamo il sistema di risoluzione che abbiamo appena appreso, con le informazioni forniteci dalla funzione di utilità:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} x_1 \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

$$R = p_1 x_1 + p_2 \frac{3}{5} x_1 \rightarrow x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{3}{5} p_2}$$

$$R = p_1 \frac{5}{3} x_2 + p_2 x_2 \rightarrow x_2 = \frac{R}{\frac{5}{3} p_1 + p_2}$$

2. Calcoliamo le funzioni di domanda dei beni nel reddito e nei prezzi riportati nel testo dell'esercizio:

$$x_1 = \frac{R}{p_1 + \frac{3}{5} p_2} = \frac{220}{5 + \frac{3}{5} 10} = \frac{220}{11} = 20$$

$$x_2 = \frac{R}{\frac{5}{3} p_1 + p_2} = \frac{220}{\frac{5}{3} 5 + 10} = \frac{220}{\frac{55}{3}} = 12$$

Microeconomia
Esercitazione 5 - Minimizzazione dei Costi

Luisa Lorè*

29/04/2021

Minimizzazione dei Costi

La funzione di produzione e gli isoquanti

La funzione di produzione è l'insieme di punti, il luogo geometrico, che associa qualsiasi combinazione di input disponibile al massimo livello di output ottenibile. Ed è quindi una funzione in cui la quantità prodotta Y dipende dai fattori di produzione, come ad esempio il capitale K e il lavoro L.

$$Y = f\,(K,\, L)$$

L'isoquanto è una funzione che rappresenta tutte le combinazioni $(K,\, L)$ di input che forniscono in maniera output-efficiente un determinato livello di output, $\overline{q}$. L'isoquanto descrive quindi tutte le combinazioni di capitale e lavoro, tutte le tecniche produttive, che permettono di produrre l'output $\overline{q}$ in maniera output-efficiente (tutte le combinazioni che hanno come output efficiente $Y = \overline{q}$).

$$\overline{q} = Y = f\,(K,\, L)$$

Sappiamo quindi che l'isoquanto è il luogo geometrico (l'insieme dei punti) in cui la funzione di produzione è massimizzata. E come abbiamo sempre detto finora se vogliamo massimizzare una funzione il metodo più immediato (sempre a patto che ci siano le condizioni necessarie per farlo) è calcolare la derivata prima ed uguagliarla a zero. Quindi sappiamo che lungo l'isoquanto la seguente condizione è verificata:

$$dY = 0 \rightarrow dK \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} + dL \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = 0 \rightarrow f^k dK + f^l dL = 0$$

dove $f^k = PmgK$ è la produttività marginale del capitale, mentre $f^l = PmgL$ è la produttività marginale del lavoro. E quindi otteniamo:

$$f^k dK + f^l dL = 0 \rightarrow PmgK \cdot dK + PmgL \cdot dL = 0 \rightarrow \frac{PmgL}{PmgK} = -\frac{dK}{dL}$$

*luisa.lore@uniroma2.it

Definiamo infine il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica nel seguente modo:

$$\frac{PmgL}{PmgK} = \left|\frac{dK}{dL}\right| = SMST$$

Sappiamo quindi che sull'isoquanto il $SMST$, che per definizione è il rapporto tra le produttività marginali, è uguale al modulo del rapporto delle derivate totali.

Isocosti

La funzione di costo totale dell'impresa rappresenta il costo minimo di produrre una qualsiasi quantità Q. Possiamo facilmente suddividere il costo totale dell'impresa in costi fissi, quei costi che l'imprenditore dovrà sostenere indipendentemente dalla quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una costante, e costi variabili, quei costi che variano a seconda dalla quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una funzione della quantità.

$$CT(Q) = CF + CV(Q)$$

L'isocosto è quel luogo geometrico di combinazioni di tecniche produttive fattore lavoro - fattore capitale tutte caratterizzate da uno stesso costo per l'imprenditore. Nel caso dei due fattori di produzione già introdotti nella funzione di produzione, L e K, definendo le loro remunerazioni rispettivamente w il salario, lo stipendio, dei lavoratori e r il tasso d'interesse del capitale,possiamo scrivere:

$$\bar{c} = CT(L,\, K) = wL + rK \longrightarrow K = -\frac{w}{r}L + \frac{\bar{c}}{r}$$

Il problema della minimizzazione dei costi nel lungo periodo

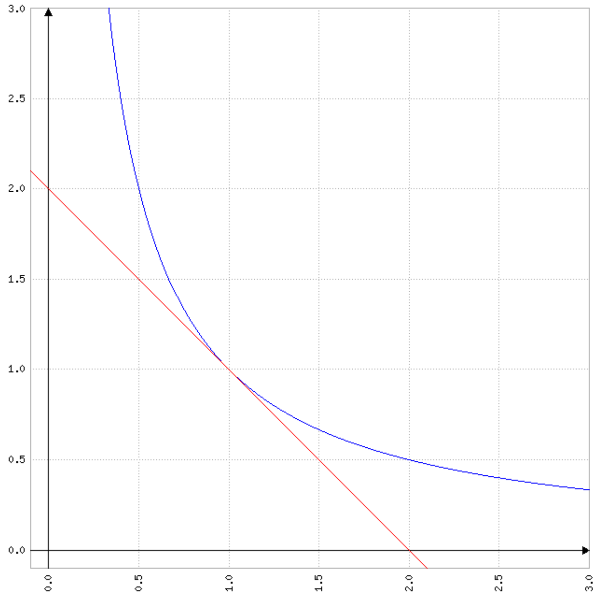
Passiamo ora alla risoluzione del problema di minimizzazione dei costi seguendo un parallelo con la teoria del consumatore e la relativa massimizzazione del profitto, possiamo impostare un problema nel seguente modo:
Massimizzazione dell'Utilità
In questo tipo di problemi dobbiamo massimizzare l'utilità che un consumatore può trarre data la sua funzione di utilità (e quindi il suo SMS) e dati un reddito e i prezzi di mercato dei due beni tra cui il consumatore può scegliere (e quindi il suo vincolo di bilancio e i conseguenti prezzi relativi). Per calcolare il paniere di consumo ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza relativa, quello è il punto di massimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

Minimizzazione dei Costi
In questo tipo di problemi dobbiamo minimizzare la spesa che un imprenditore deve sostenere data la sua funzione di costo totale e le remunerazioni di lavoro e capitale (e quindi il rapporto tra le remunerazioni, la pendenza di tutti gli isocosti) e data la sua tecnologia, la sua funzione di produzione, e un livello di output (e quindi il suo $SMST$ e

uno specifico isoquanto). Per calcolare il costo totale ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra l'isoquanto e isocosto, quello è il punto di minimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ q = f(K,\, L) \end{cases}$$



Esercizio 1

Data la seguente funzione di produzione:

$$f\,(L,\, K) = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

1. Calcolare l'isoquanto corrispondente al livello $q = 200$.

2. Risolvere il problema della minimizzazione dei costi con la classica formula dei costi totali ($CT = wL + rK$), per l'isocosto calcolato nel primo punto e per i seguenti dati $w = 16$ e $r = 1$.

Soluzione

1. $K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} = 200 \rightarrow K = \frac{200^4}{L}$;

2. Risolviamo il problema di minimizzazione:

$$SMST = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}-1} K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}-1}} = L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \frac{K}{L}$$

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f\,(L,\, K) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{K}{L} = 16 \rightarrow K = 16L \\ 200 = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$200 = (16L)^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$200 = 16^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{2}}$$
$$L = 100^2$$
$$K = 160\,000$$
$$L = 10\,000$$

Il problema della minimizzazione dei costi nel breve periodo

Il problema di minimizzazione dei costi nel breve periodo consiste nello scegliere le quantit degli input variabili che minimizzano i costi totali necessari a produrre un livello di output scelto dal produttore, sotto il vincolo che le quantit dei fattoti fissi non cambino. Nel breve periodo il capitale fisso, e lo indicheremo come $\bar{K}$. Per calcorare la quantità ottimale di lavoro per una specifica quantità di bene da produrre, baster risolvere l'equazione in un'unica incognita che otteniamo sostituendo il capitale all'interno dell'isoquanto:

$$\bar{q} = f(\bar{K}, L) \rightarrow L^* = ...$$

Esercizio 2

Dato l'isoquanto
$$\bar{q} = 100 = f\,(L,\, K) = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$
per $w = 1$ e $r = 3$ individuate quale combinazione di input consente all'imprenditore di realizzare in modo economicamente efficiente, nel breve periodo (con $\bar{K} = 1000$) e nel lungo periodo, il livello di produzione individuato.

Soluzione

1. Breve Periodo
$$100 = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$
$$100 = L^{\frac{1}{4}} \bar{K}^{\frac{3}{4}}$$
$$100 = L^{\frac{1}{4}} 1000^{\frac{3}{4}}$$
$$L^{\frac{1}{4}} = \frac{100}{1000^{\frac{3}{4}}} \rightarrow L = \frac{1}{10}$$

2. Lungo Periodo
$$SMST = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}-1} K^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}-1}} = \frac{1}{3} L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+1} = \frac{1}{3}\frac{K}{L}$$
$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f\,(L,\, K) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1K}{3L} = \frac{1}{3} \\ 100 = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = L \\ 100 = L^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = 100 \\ L = 100 \end{cases}$$

Microeconomia
Esercitazione 6 - I Rendimenti di Scala e la Massimizzazione del Profitto

Luisa Lorè*

6/05/2021

Rendimenti di scala

Una funzione di produzione ha rendimenti di scala:
Crescenti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera più che proporzionale.
Costanti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera proporzionale.
Decrescenti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera meno che proporzionale.
In generale, per verificare i rendimenti di scala possiamo semplicemente moltiplicare l'intera funzione per una costante λ (dove $\lambda > 0$), e i rendimenti di scala saranno:
Crescenti se $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è maggiore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.
Costanti se $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantitṗrodotta è uguale all'aumento della quantità della stessa costante.
Decrescenti se $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è minore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.
Se però, abbiamo davanti una funzione cosidetta Cobb-Douglas, possiamo fare affidamento sugli esponenti a cui sono elevati i fattori di produzione. Una funzione Cobb-Douglas è scritta nel seguente modo:

$$f\left(K,\, L\right) = K^{\alpha} L^{\beta}$$

Perciò se applichiamo lo stesso ragionamento fatto finora, otteniamo:

$$f\left(\lambda K,\, \lambda L\right) \lesseqgtr \lambda \left[f\left(K,\, L\right)\right]$$
$$\lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} L^{\beta} \lesseqgtr \lambda K^{\alpha} L^{\beta}$$
$$\lambda^{\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{\beta} \lesseqgtr \lambda K^{\alpha} L^{\beta}$$

*luisa.lore@uniroma2.it

$$\lambda^{\alpha+\beta} \lesseqgtr \lambda$$

$$\alpha+\beta \lesseqgtr 1$$

Quindi, questa funzione avrà rendimenti di scala:
Crescenti se $\alpha+\beta > 1$
Costanti se $\alpha+\beta = 1$
Decrescenti se $\alpha+\beta < 1$

Esercizio 1

Date le seguenti funzioni di produzione stabilire i relativi rendimenti di scala, dando inoltre una chiara definizione di ogni tipologia di rendimento spiegandone il concetto:

1. $f(K, L) = 2(L+K)$
2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{6}}$
3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
4. $f(K, L) = L+K^2$
5. $f(K, L) = L^3K^5$

Soluzione

1. $f(K, L) = 2(L+K)$
   $f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda L+\lambda K) = 2\lambda(L+K)$
   $\lambda[f(K, L)] = 2\lambda(L+K)$
   $2\lambda(L+K) = 2\lambda(L+K) \rightarrow \textit{rendimenti di scala costanti}$

2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{6}}$
   $\frac{1}{2}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6} < 1 \rightarrow \textit{rendimenti di scala decrescenti}$

3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
   $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \rightarrow \textit{rendimenti di scala costanti}$

4. $f(K, L) = L+K^2$
   $f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda L+(\lambda K)^2) = (\lambda L+\lambda^2K^2) = \lambda(L+\lambda K^2)$
   $\lambda[f(K, L)] = \lambda(L+K^2)$
   $\lambda(L+\lambda K^2) > \lambda(L+K^2) \rightarrow \textit{rendimenti di scala crescenti}$

5. $f(K, L) = L^3K^5$
   $3+5 = 8 > 1 \rightarrow \textit{rendimenti di scala crescenti}$

Rendimenti di scala e costo medio

I rendimenti di scala ci indicano come aumenta la produzione all'aumentare dei fattori di produzione. Se capiamo come varia il costo medio di un'impresa capiamo anche cosa succede all'aumentare della sua produzione. Se infatti, un'impresa ha:
Costo medio costante Se il costo medio è costante all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte rimane stabile, questo significa che anche i costi rimangono stabili, perché i fattori di produzione aumentano in maniera proporzionale. $\longrightarrow$ **Rendimenti di scala costanti**
Costo medio cresente Se il costo medio aumenta all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte crese, questo significa che anche i costi aumentano, perché i fattori di produzione aumentano in maniera meno che proporzionale e continuare a produrre costa di meno. $\longrightarrow$ **Rendimenti di scala decrescenti**
Costo medio decrescente Se il costo medio diminuisce all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte decresce, questo significa che anche i costi diminuiscono, perché i fattori di produzione aumentano in maniera più che proporzionale e continuare a produrre costa di più. $\longrightarrow$ **Rendimenti di scala crescenti**

Esercizio 2

Date le seguenti funzioni di costo calcolate i rendimenti di scala tramite lo studio dell'andamento del costo medio.

1. $CT(Q) = 5Q$
2. $CT(Q) = 3Q^{\frac{1}{3}}$
3. $CT(Q) = 8Q^4$

Soluzione

1. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{5Q}{Q} = 5 \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala costanti*
2. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{3Q^{\frac{1}{3}}}{Q} = 3Q^{\frac{1}{3}-1} = 3Q^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = -3\frac{2}{3}Q^{-\frac{2}{3}-1} = -2Q^{\frac{5}{3}} < 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala crescenti*
3. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{8Q^4}{Q} = 8Q^3 \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 8 \cdot 3Q^{3-1} = 24Q^2 > 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala decrescenti*

Massimizzazione del profitto

Richiamiamo alla mente i problemi di ottimizzazione visti fin ora:

Massimizzazione dell'Utilità $\underset{x_1,\, x_2}{max}\, U(x_1,\, x_2)\ s.v.\ R = p_1x_1 + p_2x_2$

Minimizzazione dei Costi $\underset{K,\, L}{min}\, wL + rK\ s.v.\ q = f\,(L,\, K)$

Dobbiamo quindi ora capire cosa vogliamo ottimizzare e sotto quale vincolo, sappiamo che vogliamo massimizzare il profitto, ma cos'è il profitto? Definiamo il profitto come la differenza tra tutti i guadagni (quindi tutto quello che possiamo produrre per il prezzo a cui lo possiamo vendere) e tutti i costi (tutti i fattori di produzione che utiliziamo per il loro prezzo), nel seguente modo:

$$\pi = pY - (wL + rK) = pY - wL - rK$$

Qual è il vincolo che un produttore potrebbe avere in un problema del genere? Sicuramente riguarda la sua possibilità e capacità di produzione di Y, quindi la sua funzione di produzione $f(L, K)$. Quindi il nostro problema sarà massimizzare il profitto, sotto il vincolo della funzione di produzione. Questa volta però, non costruiremo un sistema per risolvere il problema, ma sostituiremo direttamente il vincolo all'interno della funzione da massimizzare nel seguente modo:

Massimizzazione del Profitto $\underset{K,L}{max}\,\pi = pY - wL - rK \ s.v. \ f(L, K) \longrightarrow \underset{K,L}{max}\,\pi = p\,[f(L, K)] - wL - rK$

Dobbiamo inoltre caratterizzare questo problema per ottenere una massimizzazione nel breve periodo. Convenzionalmente consideriamo L, il lavoro, un fattore di produzione che può essere facilmente modificato in un'impresa, mentre K, il capitale, un fattore di produzione che difficilmente può essere modificato in un'impresa. Quindi nel breve periodo "fissiamo", teniamo costante, il capitale e ottimizziamo solo in funzione del lavoro, nel seguente modo:

Massimizzazione del Profitto (nel breve periodo) $\underset{L}{max}\,\pi = p\left[f(L, \overline{K})\right] - wL - r\overline{K}$

Cos` facendo ciò che otteniamo è una funzione in un'unica variabile, L, e per ottimizzare questa funzione ci basterà calcolarne la derivata prima, uguagliarla a zero, e risolvere per L^*.

Esercizio 3

Data la seguente funzione di produzione e i seguenti dati, calcolare la funzione di domanda di lavoro che risolve il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

$$f(K, L) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 10$$

$$\overline{K} = 100$$

$$w = 5$$

$$r = 5$$

Soluzione

Possiamo quindi passare alla risoluzione dell'esercizio:

$$\underset{L}{max}\,\pi = pY - wL - r\overline{K}\; s.v.\; f\left(L,\, \overline{K}\right) \longrightarrow \underset{L}{max}\,\pi = p\left[f\left(L,\, \overline{K}\right)\right] - wL - r\overline{K}$$

$$\underset{L}{max}\,\pi = 10Y - 5L - 500\; s.v.\; L^{\frac{1}{2}}10 \longrightarrow \underset{L}{max}\,\pi = 100L^{\frac{1}{2}} - 5L - 500$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 100L^{-\frac{1}{2}} - 5 = 0$$

$$\frac{10}{\sqrt{L}} = 1 \longrightarrow \left(\sqrt{L}\right)^2 = 10^2 \longrightarrow L = 100$$

Possiamo ora completare l'esercizio calcolando, ad esempio, il livello ottimale di output da produrre e il relativo profitto:

$$q^* = f\left(K,\, L\right) = 100^{\frac{1}{2}}100^{\frac{1}{2}} = 100$$

$$\pi = pQ - CT(Q) = 1000 - 1000 = 0$$

Microeconomia
Esercitazione 7 - La Concorrenza Perfetta

Luisa Lorè*

13/05/2021

Concorrenza Perfetta nel Breve e nel Lungo Periodo

Dobbiamo massimizzare il profitto, quindi la differenza tra i ricavi totali e i costi totali rispetto all'unica variable che abbiamo a disposizione, Q. In questo caso inoltre potremmo non avere informazioni sulla funzione di produzione, ma solo sul prezzo di mercato a cui è venduto questo bene, quindi eseguiremo una massimizzazione senza vincoli. Impostiamo quindi il nostro problema nel sequente modo:

$$\underset{Q}{max}\, \pi = RT - CT = pQ - CT(Q)$$

Deriviamo la funzione di profitto rispetto all'output ed uguagliamo la sua derivata prima a zero, nel seguente modo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ - CT(Q))}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ)}{\partial Q} - \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = p - CMa(Q)$$

$$p - CMa(Q) = 0 \longrightarrow p = CMa(Q)$$

La condizione di profitto ottimale è quindi data dall'uguaglianza tra prezzo e costi marginali. E di conseguenza il profitto nel breve periodo sarà:

$$\pi^{BP} = pQ^{BP} - CT(Q^{BP})$$

Per quanto riguarda il livello di output e il profitto (o la perdita) corrispondenti alla condizione di equilibrio nel lungo periodo, dobbiamo prima definire la condizione di equilibrio. Sappiamo infatti che nel lungo periodo,

$$\pi = 0 \to \pi = pQ - CMe(Q)Q = Q(p - CMe(Q)) \to p = CMe(Q^{min})$$

$$p = CMe(Q^{min})$$

Il prezzo a cui l'impresa decide di vendere nel lungo periodo risponde a questa condizione, ed è per questo che l'impresa deve far si che la quantità che vuole produrre rispetti questa condizione. E di conseguenza il profitto nel lungo periodo sarà:

$$\pi^{LP} = pQ^{LP} - CT(Q^{LP})$$

*luisa.lore@uniroma2.it

Esercizio 1

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 10 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 100 - 20p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

Soluzione

1. Per calcolare la funzione d'offerta nel breve periodo è necessario calcolare l'equilibrio del breve periodo per una generica impresa i ed esprimere la quantità in funzione del prezzo:
$$p = CMa(Q_i) \longrightarrow p = 2Q_i \longrightarrow Q_i = \frac{1}{2}p$$

2. Per calcolare la funzione d'offerta dell'intera industria, sommiamo linearmente le funzioni d'offerta delle singole imprese, nel seguente modo:
$$Q^s = 10\left(\frac{1}{2}p\right) = 5p$$

3. Per calcolare l'equilibrio di mercato dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, questo perché dobbiamo trovare il punto in cui la curva di domanda e la curva d'offerta s'incontrano.
$$\begin{cases} Q^d(p) = 100 - 20p \\ Q^s(p) = 5p \end{cases}$$
Per risolvere un sistema di questo tipo basta uguagliare le due fuzioni (di domanda e d'offerta), poiché esprimono entrambe la quantità in funzione del prezzo
$$100 - 20p = 5p \longrightarrow 25p = 100 \longrightarrow p = \frac{100}{25} = 4$$
Infine sostituiamo il prezzo trovato in una qualsiasi delle due funzioni, ad esempio in quella dell'offerta:
$$Q^s(p) = 5 \cdot 4 = 20$$
La condizione di equilibrio è:
$$Eq. = \{Q^E = 20,\, p^E = 4\}$$

4. Essendoci 10 imprese in perfetta concorrenza ognuna di queste produrrà un decimo della quantità domandata:

$$Q_i^E = \frac{Q^E}{\# imprese} = \frac{20}{10} = 2$$

Sostituiamo ora il prezzo in equilibrio e la quantità per ogni impresa all'interno della formula del profitto:

$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

In questo caso le imprese hanno un profitto di 4.

Esercizio 2

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 100 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 10$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 300 - 20p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
4. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

Soluzione

1. Per calcolare il prezzo e la quantità, partiamo dalla condizione di equilibrio di un'impresa nel lungo periodo:

$$p = CMe(Q^{min})$$

Perciò minimizziamo la funzione di costi medi,

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left(Q + \frac{10}{Q}\right)}{\partial Q} = 1 - \frac{10}{Q^2} = 0 \longrightarrow Q^2 = 10 \longrightarrow Q_i^{LP} = \sqrt{10}$$

Dopo aver trovato il punto minimo per i costi medi inseriamoli nella funzione di partenza e poniamola uguale al prezzo:

$$p = CMe(\sqrt{10}) = \sqrt{10} + \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} + \sqrt{10} \longrightarrow p^{LP} = 2\sqrt{10}$$

2. Per calcolare invece l'offerta dell'intera industria, moltiplichiamo per 5 la quantità offerta dalla singola impresa:

$$nQ_i = 100\sqrt{10} \approx 316$$

3. Il numero d'imprese operanti è dato dal rapporto fra la funzione di domanda del mercato nel prezzo trovato:

$$Q^d(2\sqrt{10}) = 300 - 20p = 300 - 40\sqrt{10} \approx 300 - 126 = 174 \longrightarrow Q^E \approx 174$$

   e la massima quantità che ogni singola impresa è disposta ad offrire nel lungo periodo:

$$n^{LP} = \frac{Q^E}{Q_i} = \frac{174}{\sqrt{10}} \approx 55$$

   Possiamo quindi notare che nel lungo periodo, l'offerta eccede la domanda e poco più della metà dell'imprese parteciperà al mercato.

4. Infine, calcoliamo il profitto nel punto di equilibrio per ogni singola impresa:

$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} - \left(\sqrt{10}\right)^2 - 10 = 20 - 10 - 10 = 0$$

   In questo caso le imprese hanno un profitto pari a 0.

Microeconomia
Esercitazione 8 - Il Monopolio

Luisa Lorè*

14/05/2021

Il Monopolio

Nel caso in cui un'impresa operi in regime di monopolio, massimizza la seguente funzione:

$$\underset{Q}{max}\pi^m = RT(Q) - CT(Q) = p(Q)Q - CT(Q) \longrightarrow RMa(Q) - CMa(Q) = 0$$

$$RMa(Q) = CMa(Q)$$

Esercizio 1

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q) = 100Q$$

la domanda è data da:

$$Q^d = 400 - 2p$$

Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)

2. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker (operi in regime di concorrenza perfetta)

3. La perdita netta al monopolio

Soluzione

1. Calcoliamo $p(Q)$ la funzione inversa della domanda di mercato, nel seguente modo:

$$Q^d = 400 - 2p \longrightarrow 2p = 400 - Q \longrightarrow p = 200 - \frac{1}{2}Q$$

*luisa.lore@uniroma2.it

Perciò marginalizziamo costi e ricavi e poniamoli uguali:

$$\frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left(200Q - \frac{1}{2}Q^2\right)}{\partial Q} = 200 - Q$$

$$\frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial (100Q)}{\partial Q} = 100$$

$$RMa(Q) = CMa(Q) \longrightarrow 200 - Q = 100 \longrightarrow Q^m = 100$$

Per trovare il prezzo insieriamo tutto nella funzione di domanda:

$$p = 200 - \frac{1}{2}Q = 200 - \frac{1}{2}100 \longrightarrow p^m = 150$$

$$Eq^{mon} = \{Q^m = 100,\, p^m = 150\}$$

2. Supponiamo ora che il monopolista per una qualsiasi ragione non possa o rinunci ad influenzare il mercato, sia un'impresa price-taker ed operi quindi secondo le regole della concorrenza perfetta:

$$p = CMa(Q) \longrightarrow 200 - \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow Q^{cp} = 200$$

$$p = 200 - \frac{1}{2}200 = 200 - 100 \longrightarrow p^{cp} = 100$$

$$Eq^{cp} = \{Q^{cp} = 200,\, p^{cp} = 100\}$$

Come ci aspettavamo, l'equilibrio dell'impresa monopolistica presenta una quantità inferiore ed un prezzo maggiore rispetto a quella price-taker, infatti un monopolio produce meno e vende a prezzi più altri rispetto ad un'impresa che opera in concorrenza perfetta.

3. Calcoliamo ora la differenza tra profitto in monopolio e profitto in concorrenza perfetta:

$$\pi^m = RT(Q^m) - CT(Q^m) = p^m Q^m - CT(Q^m) = 150 \cdot 100 - 100 \cdot 100 = 15000 - 10000 = 5000$$

$$\pi^{cp} = RT(Q^{cp}) - CT(Q^{cp}) = p^{cp} Q^{cp} - CT(Q^{cp}) = 100 \cdot 200 - 100 \cdot 200 = 20000 - 20000 = 0$$

$$\pi^{cp} - \pi^m = 0 - 5000 = -5000$$