LUISS Guido Carli
Laurea Magistrale in Economia e Finanza

Economia dell'Incertezza e dell'Informazione
Esercitazioni, esperimenti ed approfondimenti

Luisa Lorè

A.A. 2023/2024

Esercitazione 1
Scelte in condizione di incertezza
Economia dell'incertezza e dell'informazione
LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

8/2/2024

Investimenti

Esercizio 1

Si consideri una compagnia petrolifera che stia valutando se effettuare un investimento per la ricerca di giacimenti di petrolio in mare. La compagnia può investire in due tipi diversi di tecnologia, distingueremo quindi i due tipi di investimento: l'investimento A e l'investimento B.

Investimento A Con l'investimento in questo tipo di tecnologia, se la ricerca ha successo, la compagnia scoprirà un giacimento molto grande e otterrà un guadagno di 40 milioni di euro; in caso di insuccesso, cioè se la compagnia scoprirà un giacimento piccolo, il guadagno sarà pari a 20 milioni di euro. Sulla base dell'esperienza passata il 75% delle esplorazioni effettuate non sono andate a buon fine. Di conseguenza i possibili esiti saranno 40 con probabilità pari a $p_{successo} = 0.25$ e 20 con probabilità pari a $p_{insuccesso} = 1 - p_{successo} = 0.75$.

Investimento B Questa diversa tecnologia rende in grado la compagnia petrolifera di effettuare delle ricerche che permettono di scoprire giacimenti petroliferi a grande profondità e dunque di grande estensione e valore. La scoperta di un giacimento a grande profondità permetterebbe di ottenere un guadagno pari a 125 milioni; tuttavia questa tecnologia ha una probabilità di successo pari solamente al 20% e non consente di individuare altri tipi di giacimenti più superficiali; dunque in caso di insuccesso la compagnia non avrà nessun guadagno.

Calcolare il Valore Atteso e la varianza di ciascun investimento. Quale dei due investimenti è più rischioso? Perché?

*llore@luiss.it

Soluzione

Prima di iniziare estrapoliamo i dati dal testo:

Investimento A
$x_{successo} = 40$
$p_{successo} = 0.25$
$x_{insuccesso} = 20$
$p_{insuccesso} = 1 - 0.25 = 0.75$

Investimento B
$x_{successo} = 125$
$p_{successo} = 0.2$
$x_{insuccesso} = 0$
$p_{insuccesso} = 1 - 0.2 = 0.8$

Per calcolare il valore atteso di un investimento possiamo seguire la seguente formula:

$$EV = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

Perciò il valore atteso dell'investimento A è:

$$EV_A = 0.25 \cdot 40 + 0.75 \cdot 20 = \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{40} + \frac{3}{\cancel{4}}\cancel{20} = 10 + 15 = 25$$

Mentre il valore atteso dell'investimento B è:

$$EV_B = 0.20 \cdot 125 + \cancel{0.80 \cdot 0} = \frac{1}{\cancel{5}}\cancel{125} = 25$$

Per calcolare la varianza di un investimento possiamo seguire la seguente formula:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - EV)^2$$

Perciò la varianza dell'investimento A è:

$$\sigma_A^2 = 0.25(40 - 25)^2 + 0.75(20 - 25)^2 = \frac{1}{4}15^2 + \frac{3}{4}(-5)^2 = \frac{225 + 75}{4} = \frac{300}{4} = 75$$

Mentre la varianza dell'investimento B è:

$$\sigma_B^2 = 0.20(120 - 25)^2 + 0.80(0 - 25)^2 = \frac{1}{5}100^2 + \frac{4}{5}(-25)^2 = \frac{10000 + 625}{5} = 2500$$

Fra i due investimenti il più rischioso è l'investimento B. Nonostante il valore atteso di entrambi sia 25, la varianza dell'investimento B è molto maggiore rispetto a quella dell'investimento A ($2500 > 75$).

Esercizio 2

State per investire 100 Euro, e avete di fronte due opportunità:
A. comprare azioni di una società start-up che lavora con i social network;
B. comprare azioni di una società di pubblica utilità (energia elettrica, gas...)
Per la start up stimate che ci sia una probabilità di 0.3 che il valore cresca del 20%, e una uguale probabilità che decresca del 20%; nel restante 0.4 di probabilità il valore resterà costante. Nel caso della società di pubblica utilità, stimate invece che il valore resterà costante con probabilità 0.8, crescerà del 20% con probabilità 0.1 e decrescerà del 20% con probabilità 0.1.

a) Calcolate il valore atteso e la varianza di questi due prospetti e rappresentateli in un Diagramma Media-Varianza;

b) Ipotizzate che la vostra funzione di utilità sia $u(x) = x$, in cui x è il reddito generato dal prospetto.

c) Ipotizzate di essere amanti del rischio, con utilità data da $u(x) = x^2$. Quale prospetto scegliete? Rappresentate la situazione in un Diagramma dell'utilità.

Soluzione

Prima di iniziare estrapoliamo i dati dal testo:

A. Start-up
$p_1 = 0.3 \quad x_1 = 100 \cdot 1.2 = 120$
$p_2 = 0.3 \quad x_2 = 100 \cdot 0.8 = 80$
$p_3 = 0.4 \quad x_3 = 100$

B. Società di pubblica utilità
$p_1 = 0.1 \quad x_1 = 120$
$p_2 = 0.1 \quad x_2 = 80$
$p_3 = 0.8 \quad x_3 = 100$

a) Calcoliamo il valore atteso con la formula utilizzata in precedenza:

$$EV_A = 0.3 \cdot 120 + 0.3 \cdot 80 + 0.4 \cdot 100 = 100$$

$$EV_B = 0.1 \cdot 120 + 0.1 \cdot 80 + 0.8 \cdot 100 = 100$$

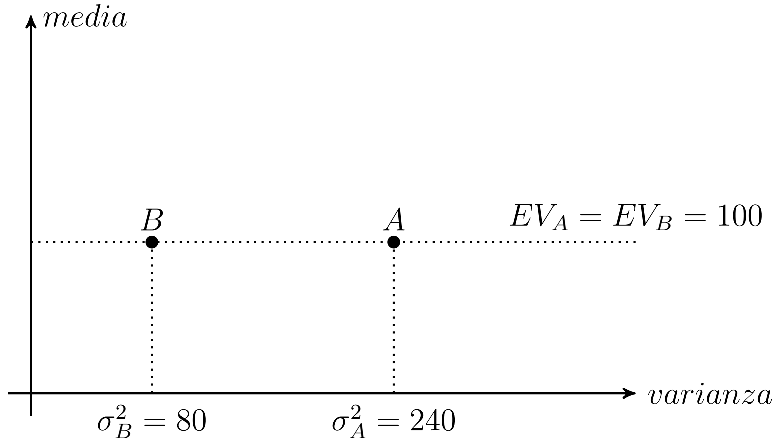
I due prospetti hanno la stesso valore atteso.

Calcoliamo ora invece la varianza con la formula utilizzata in precedenza:

$$\sigma_A^2 = 0.3 \cdot (120 - 100)^2 + 0.3 \cdot (80 - 100)^2 + 0.4 \cdot (100 - 100)^2 = 240$$

$$\sigma_B^2 = 0.1 \cdot (120 - 100)^2 + 0.1 \cdot (80 - 100)^2 + 0.8 \cdot (100 - 100)^2 = 80$$

Diagramma media-varianza



b) La funzione di utilità è $u(x) = x$ dove x è il reddito.

$$EU = \sum_{i=1}^{N} p_i u(x_i)$$

Dove $u(x_i)$ è l'utilità associata al payoff quando il risultato è i.

$$EU_A = 0.3 \cdot u(120) + 0.3 \cdot u(80) + 0.4 \cdot u(100) =$$

$$= 0.3 \cdot 120 + 0.3 \cdot 80 + 0.4 \cdot 100 = 100$$

$$EU_B = 0.1 \cdot u(120) + 0.1 \cdot u(80) + 0.8 \cdot u(100) =$$

$$= 0.1 \cdot 120 + 0.1 \cdot 80 + 0.8 \cdot 100 = 100$$

Poiché $EU_A = EU_B$ siamo indifferenti tra le due opportunità di investimento. Un consumatore che è indifferente tra due alternative rischiose con lo stesso valore atteso ($EV_A = EV_B = 100$) è considerato *neutrale al rischio*. Un consumatore neutrale al rischio ha una funzione di utilità lineare la cui pendenza rimane costante quando il reddito aumenta. Tale consumatore è indifferente tra un certo dato reddito e ogni distribuzione rischiosa del reddito con lo stesso valore atteso ($U(EV) = EU$). Egli è anche indifferente tra due distribuzioni rischiose del reddito con lo stesso valore atteso ($EU_A = EU_B$). Ne consegue che $EU_A = EU_B = U(EV)$.

c) Funzione di utilità: $u(x) = x^2$ dove x è il reddito.

$$EU_A = 0.3 \cdot u(120) + 0.3 \cdot u(80) + 0.4 \cdot u(100) =$$

$$= 0.3 \cdot (120)^2 + 0.3 \cdot (80)^2 + 0.4 \cdot (100)^2 = 10240$$

$$EU_B = 0.1 \cdot u(120) + 0.1 \cdot u(80) + 0.8 \cdot u(100) =$$

$$= 0.1 \cdot (120)^2 + 0.1 \cdot (80)^2 + 0.8 \cdot (100)^2 = 10080$$

Poiché $EU_A > EU_B$, preferiamo la prima opportunità di investimento (start up). Tra due alternative rischiose con lo stesso valore atteso, un consumatore amante del rischio preferisce l'alternativa con la varianza maggiore (alternativa più rischiosa).

Un consumatore amante del rischio ha una funzione di utilità convessa - la pendenza aumenta quando il reddito aumenta. Un consumatore amante del rischio preferisce una distribuzione del reddito rischiosa ad un dato ammontare di reddito con lo stesso valore atteso ($EU > U(EV)$). Tra due alternative rischiose con lo stesso valore atteso, un consumatore amante del rischio preferisce quella con una varianza maggiore: $EU_A > EU_B > u(EV)$.

Assicurazioni

Esercizio 3

Anna è avversa al rischio ed ha l'obiettivo di massimizzare la propria utilità, data da $u(x) = \sqrt{x}$. Anna possiede 50,000 euro in investimenti sicuri, e in più possiede una casa che vale 200,000 euro. In caso d'incendio, che ha una probabilità di 0.01, Anna può rivendere il terreno e le rovine per 40,000 euro.

a) Calcola la ricchezza attesa di Anna.

b) Calcola l'utilità attesa.

c) Calcola l'equivalente certo per Anna.

d) Immagina che Anna possa comprare un'assicurazione sulla casa al prezzo di 1 euro per ogni 100 euro assicurati. Anna è completamente assicurata se la sua ricchezza è esattamente la stessa, che ci sia o non ci sia l'incendio. Quanta assicurazione deve comprare Anna per essere completamente assicurata?

e) Qual è la ricchezza attesa di Anna quando è completamente assicurata? A quanto sono uguali l'utilità attesa e l'equivalente certo?

f) Ad Anna conviene assicurarsi o meno?

Soluzione

Prima di iniziare estrapoliamo i dati dal testo:

Evento A: l'incendio non avviene
$x_A = 50,000 + 200,000 = 250,000$
$p_A = 0.99$

Evento B: l'incendio avviene
$x_B = 50,000 + 40,000 = 90,000$
$p_B = 0.01$

a) Calcoliamo il valore atteso con la formula utilizzata in precedenza:

$$EV = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B = 0.99 \cdot 250,000 + 0.01 \cdot 90,000 = 248,400$$

b) Calcoliamo l'utilità attesa con la formula utilizzata in precedenza:

$$EU = p_A \cdot u(x_A) + p_B \cdot u(x_B) = 0.99 \cdot u(250,000) + 0.01 \cdot u(90,000) =$$

$$= 0.99 \cdot \sqrt{250,000} + 0.01 \cdot \sqrt{90,000} = 0.99 \cdot 500 + 0.01 \cdot 300 = 498$$

c) L'equivalente certo è calcolato tramite la sua definizione, come la somma monetaria tale per cui l'utilità è uguale all'utilità attesa:

$$U(CE) = EU$$

$$U(CE) = 498 \rightarrow \sqrt{CE} = 498 \rightarrow CE = (498)^2 = 248,004$$

d) Chiamiamo a l'ammontare di assicurazione acquistato da Anna. Il prezzo dell'assicurazione è 1 euro per 100 euro di assicurazione: $p_a = 1/100 = 0.01$. Se Anna è completamente assicurata allora, la ricchezza nel caso si verifichi l'evento A è uguale alla ricchezza nel caso si verifichi l'evento. B.

$$A : 250,000 - 0.01 \cdot a$$

$$B : 90,000 + a - 0.01 \cdot a$$

$$250,000 - 0.01 \cdot a = 90,000 + a - 0.01 \cdot a$$

$$a = 250,000 - 90,000 = 160,000$$

Anna deve acquistare 160,000 euro di assicurazione per essere completamente assicurata.

e) Se Anna è completamente assicurata, la sua ricchezza sarà la stessa qualsiasi evento si verifichi.

$$x_A = 250,000 - 0.01 \cdot 160,000 = 248,400$$

$$x_B = 90,000 + 160,000 - 0.01 \cdot 160,000 = 248,400$$

$$EV = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B = 0.99 \cdot 248.400 + 0.01 \cdot 248.400 = 248.400$$

$$EU = p_A \cdot u(x_A) + p_B \cdot u(x_B) = 0.99 \cdot u(248.400) + 0.01 \cdot u(248.400) =$$

$$= u(248.400) = \sqrt{248.400} \approx 498.40.$$

$$U(CE) = EU$$

$$u(CE) = 498.40 \rightarrow \sqrt{CE} = 498.40 \rightarrow CE = (498.40)^2 = 248.400$$

f) L'utilità attesa nel caso in cui Anna si assicuri completamente è maggiore dell'utilità attesa nel caso in cui scelga di non assicurarsi.

Esercitazione 2
Scelte in condizione di incertezza
Economia dell'incertezza e dell'informazione
LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

15/2/2024

Lotterie

Esercizio 1

Si considerino le seguenti lotterie:

$$L^A : (x_1^A = 16, x_2^A = 144, p_1^A = 0.8, p_2^A = 0.2)$$
$$L^B : (x_1^B = 9, x_2^B = 225, p_1^B = 0.8, p_2^B = 0.2)$$

a) Si calcoli il valore atteso di ciascuna lotteria.

b) Quale lotteria giocherebbe una persona con la seguente funzione di utilità $u(x) = \sqrt{x}$? Come definiamo tale soggetto?

c) Si calcoli il premio per il rischio per giustificare la risposta.

d) Se la funzione di utilità fosse $u(x) = x^2$, quale sarebbe la scelta dell'agente?

Soluzione

a) Il valore atteso di ciascuna lotteria è:

$$EV^A = p_1^A x_1^A + p_2^A x_2^A = 0.8 \cdot 16 + 0.2 \cdot 144 = 41.6$$

*llore@luiss.it

$$EV^B = p_1^B x_1^B + p_2^B x_2^B = 0.8 \cdot 9 + 0.2 \cdot 225 = 52.2$$
$$EV^A < EV^B$$

Quindi il valore atteso della lotteria B è superiore a quello della lotteria A.

b) L'utilità attesa di ciascuna lotteria è:

$$EU^A = p_1^A \sqrt{x_1^A} + p_2^A \sqrt{x_2^A} = 0.8 \cdot \sqrt{16} + 0.2 \cdot \sqrt{144} = 5.6$$

$$EU^B = p_1^B \sqrt{x_1^B} + p_2^B \sqrt{x_2^B} = 0.8 \cdot \sqrt{9} + 0.2 \cdot \sqrt{225} = 5.4$$
$$EU^A > EU^B$$

L'utilità attesa dalla lotteria A è maggiore dell'utilità attesa dalla lotteria B. La lotteria A sarà dunque preferita alla lotteria B:

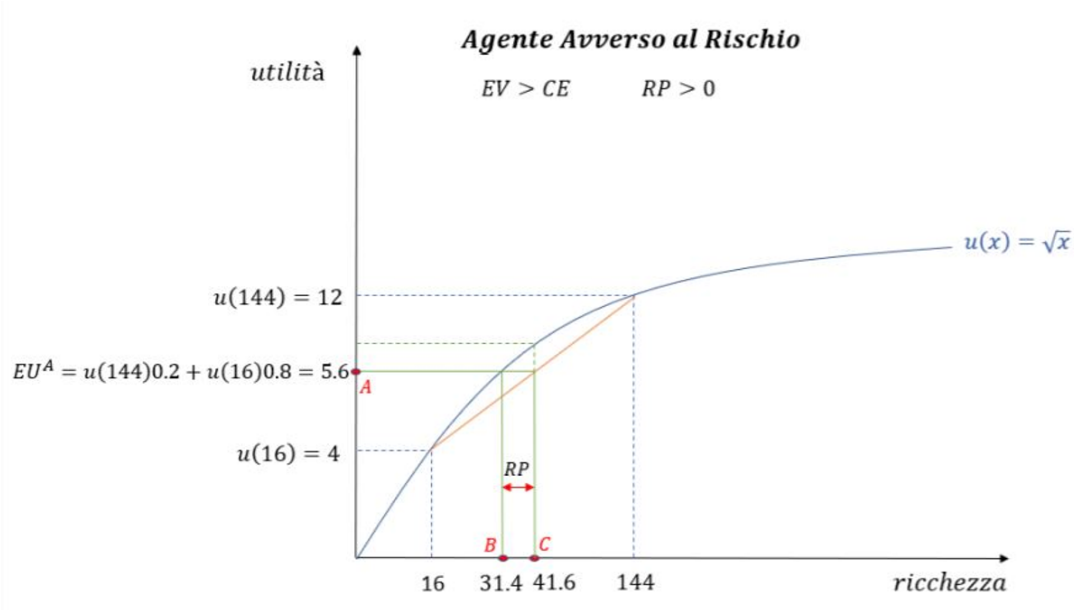
$$L^A \succ L^B$$

Le funzione di utilità concava rappresenta le preferenze di un agente avverso al rischio poiché l'utilità marginale decrescente implica che a partire da un dato livello di ricchezza, se la ricchezza aumentasse, si avrebbe un aumento dell'utilità inferiore alla diminuzione dell'utilità che si avrebbe se si avesse una diminuzione della stessa misura. Questo implica che sarà preferita una quantità certa di denaro alla stessa quantità ricevuta in modo aleatorio, in quanto i potenziali incrementi di guadagno rispetto al valore atteso danno un incremento dell'utilità minore di quanto il potenziale guadagno inferiore al valore atteso faccia diminuire l'utilità. Dunque, se ad una persona avversa al rischio, venisse offerta una quantità certa di soldi pari al valore atteso della lotteria A, cioè 41.6 euro, egli preferirebbe accettare tale somma piuttosto che giocare la lotteria A. La quantità di soldi certa che rendono indifferente l'agente avverso al rischio ad una lotteria deve essere quindi inferiore al valore atteso della lotteria, cioè l'equivalente certo della lotteria sarà inferiore al suo valore atteso $CE < EV$. In generale definiamo e quindi calcoliamo l'equivalente certo CE come quella quantità di moneta che ricevuta in modo certo fornisce la stessa utilità all'agente di quella che si attende di ricevere dalla lotteria: $u(CE) = EU$. Per la lotteria A:

$$5.6 = \sqrt{CE^A} \rightarrow CE^A = (5.6)^2 = 31.4$$

L'agente dell'esercizio è dunque indifferente tra giocare alla lotteria A e ricevere 31.4 euro, dunque gli si dovranno offrire almeno 31.4 euro per non farlo rinunciare alla lotteria A. Si noti che, a conferma del ragionamento precedente, l'equivalente certo è inferiore al valore atteso della lotteria A, 41.6

euro. Detto in altri termini, l'agente avverso al rischio preferirebbe ricevere il valore atteso della lotteria con certezza che giocare alla lotteria. La figura rappresenta graficamente l'esempio appena illustrato.



c) Il premio per il rischio si calcola come la differenza tra il valore atteso e l'equivalente certo:

$$RP = EV - CE = 41.6 - 31.4 > 0$$

Il premio per il rischio è positivo perché l'agente è avverso al rischio ed indica a quanti soldi l'agente è disposto a rinunciare per eliminare il rischio.

d) L'utilità attesa di ciascuna lotteria è:

$$EU^A = p_1^A(x_1^A)^2 + p_2^A(x_2^A)^2 = 0.8 \cdot 16^2 + 0.2 \cdot 144^2 = 4352$$
$$EU^B = p_1^B(x_1^B)^2 + p_2^B(x_2^B)^2 = 0.8 \cdot 9^2 + 0.2 \cdot 225^2 = 10189.9$$
$$EU^B > EU^A$$

L'utilità attesa dalla lotteria B è maggiore dell'utilità attesa dalla lotteria A. La lotteria B sarà dunque preferita alla lotteria A:

$$L^B \succ L^A$$

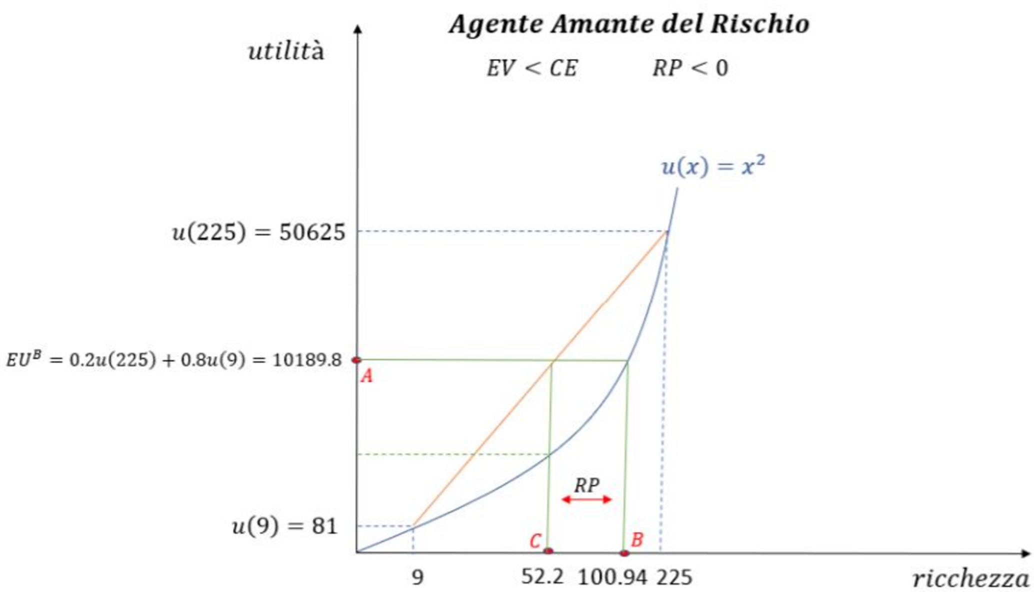
L'agente economico si dimostra amante del rischio preferendo la lotteria con dei risultati più variabili, cioè la lotteria B. Questa caratteristica delle preferenze è catturata dalla forma assunta dalla funzione $u(x) = x^2$; essa è infatti una funzione convessa, implica che l'utilità marginale di ciascun risultato della lotteria, x_i, sia crescente. Tale funzione di utilità rappresenta le preferenze di un agente amante del rischio poiché l'utilità marginale crescente nel premio monetario implica che, a partire da un dato livello di ricchezza, se la ricchezza aumentasse, si avrebbe un aumento dell'utilità superiore alla diminuzione dell'utilità che si avrebbe se si avesse una diminuzione della stessa misura. Questo implica che sarà preferita una quantità aleatoria di soldi alla stessa quantità ricevuta in modo certo, in quanto i potenziali incrementi di guadagno rispetto al valore atteso danno un incremento dell'utilità maggiore di quanto il potenziale guadagno inferiore al valore atteso faccia diminuire l'utilità. Dunque, se ad una persona amante del rischio venisse offerta una quantità certa di soldi pari al valore atteso della lotteria B, cioè 52.2 euro, egli preferirebbe giocare la lotteria B. La quantità di soldi certi che rendono indifferente l'agente amante del rischio ad una lotteria deve essere quindi superiore al valore atteso della lotteria, cioè l'equivalente certo della lotteria sarà superiore al suo valore atteso, $CE > EV$.

$$EU^B = 10189.9$$

$$u(CE^B) = (CE^B)^2$$

$$10189.9 = (CE^B)^2 \rightarrow CE^B = \sqrt{10189.9} = 100.94$$

$$RP = EV - CE = 52.2 - 100.94 < 0$$



Rank Dependent Utility

Esercizio 2

Si consideri un'urna con 100 palline numerate da 1 a 100. Ogni pallina ha la stessa probabilità di essere estratta.
Sono associati dei premi monetari all'estrazione di ciascuna pallina numerata dall'urna come da seguente tabella

Numero pallina	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
Premio (€)	80	60	40	20	0

a) Ordinare i risultati in base al premio.

b) Calcolare le rispettive probabilità.

c) Calcolare il rank di ciascun risultato.

Soluzione

a) Ordiniamo i risultati in base al premio grazie alla seguente tabella:

Numero pallina	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
Premio (€)	80	60	40	20	0
Evento	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$$

b) Le probabilità per ciascun evento sono:

$$p_i = \frac{20}{100} = 0.2 \forall i$$

c) Calcoliamo il rank di ciascun risultato tramite la seguente formula:

$$r_i = p_{i-1} + p_{i-2} + ... + p_1 = p_{i-1} + (p_{i-2} + ... + p_1) = p_{i-1} + r_{i-1}$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = p_1 = 0.2$$

$$r_3 = p_1 + p_2 = 0.4$$

$$r_4 = p_1 + p_2 + p_3 = 0.6$$

$$r_5 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.8$$

Esercizio 3

Si consideri una probability weighting function $\pi(r) = r^2$ e una funzione di utilità lineare $u(x) = x$. Si calcoli la rank dependent utility di un prospetto che darà un risultato pari a 50 con probabilità 0.5, un risultato pari a 80 con probabilità 0.2 ed un risultato pari a 10 con probabilità 0.3

Soluzione

Iniziamo col descrivere il prospetto, ed ordinare i possibili risultati:

$$x_1 = 80; p_1 = 0.2$$

$$x_2 = 50; p_2 = 0.5$$

$$x_3 = 10; p_3 = 0.3$$

$$x_1 > x_2 > x_3$$

Calcoliamo ilrank di ciascun risultato:

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = 0.2$$

$$r_3 = 0.7$$

Successivamente calcoliamo i pesi, tramite la seguente formula:

$$w_i = \pi(p_i + p_{i+1} + ... + p_n) - \pi(p_{i+1} + ... + p_n)$$

$$w_i = \pi(p_i + r_i) - \pi(r_i)$$

Prima di preseguire con il calcolo dei pesi, ricoriamo che la probability weighting function presa in esame è $\pi(r) = r^2$, quindi:

$$w_1 = \pi(0.2 + 0) - \pi(0) = 0.2^2 = 0.04$$

$$w_2 = \pi(0.5 + 0.2) - \pi(0.2) = 0.7^2 - 0.2^2 = 0.45$$

$$w_3 = \pi(0.3 + 0.7) - \pi(0.3) = 1^2 - 0.7^2 = 0.51$$

Calcoliamo l'utilità di ciascuno dei risultati:

$$u(x_1) = u(80) = 80$$

$$u(x_2) = u(50) = 50$$

$$u(x_3) = u(10) = 10$$

Ed infine la rank dependent utility, tramite la seguente formula:

$$RDU = \sum_{i=1}^{3} w_i u(x_i)$$

$$RDU = 0.04 \cdot 80 + 0.45 \cdot 50 + 0.51 \cdot 10 = 30.8$$

Il valore atteso di questo prospetto, invece è:

$$EV = 0.2 \cdot 80 + 0.5 \cdot 50 + 0.3 \cdot 10 = 44$$

Infine, confrontando la RDU e il EV, possiamo comprendere l'attitudine al rischio di questo soggetto:

$$RDU < EV \rightarrow \text{Avverso al rischio}$$

$$RDU = EV \rightarrow \text{Neutrale al rischio}$$

$$RDU > EV \rightarrow \text{Propenso al rischio}$$

$$30.8 < 44 \rightarrow \text{Avverso al rischio}$$

Esercitazione 3
Teoria dei Giochi
Economia dell'incertezza e dell'informazione
LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

29/2/2024

Strategie pure

Esercizio 1

Si considerino due imprese che operano sullo stesso mercato. Entrambe devono scegliere, in modo simultaneo e senza comunicare, la loro strategia di mercato, che può essere aggressiva (guerra di prezzi) o cooperativa (mantenere i prezzi alti). I payoff derivanti dalle strategie sono rappresentati nella matrice sottostante.

Impresa 1 \ **Impresa 2**	*Coop.*	*Aggr.*
Coop.	(15, 15)	(35, 50)
Aggr.	(50, 35)	(0, 0)

a) Trovare, se esistono, tutte le strategie dominanti e dominate.

b) Trovare, se esistono, tutti gli equilibri di Nash in strategie pure.

Soluzione

a) Non sono presenti strategie dominanti o dominate.

b) Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: $NE = (Aggr., Coop)$ e $(Coop., Aggr.)$

Impresa 1 \ **Impresa 2**	*Coop.*	*Aggr.*
Coop.	(15, 15)	(35, 50)
Aggr.	(50, 35)	(0, 0)

*llore@luiss.it

Esercizio 2

Si considerino due giocatori che devono scegliere tra tre strategie, A, B e C. I payoff derivanti dalle strategie sono rappresentati nella matrice sottostante.

		Giocatore 2		
		A	B	C
	A	(5,8)	(15,10)	(10,5)
Giocatore 1	B	(10,15)	(20,9)	(15,0)
	C	(20,20)	(10,10)	(10,8)

a) Ridurre, se possibile, il gioco.

b) Trovare, se esistono, tutti gli equilibri di Nash in strategie pure.

Soluzione

a) La strategia A è dominata per il Giocatore 1 mentre la strategia C è dominata per il giocatore 2. Quindi è possibile ridurre il gioco 3x3 ad uno 2x2 eliminando le due strategie dominate.

		Giocatore 2	
		A	B
Giocatore 1	B	(10,15)	(20,9)
	C	(20,20)	(10,10)

Ora, la strategia B è dominata per il Giocatore 2, quindi è possibile ridurre ulteriormente il gioco.

		Giocatore 2
		A
Giocatore 1	B	(10,15)
	C	(20,20)

Infine possiamo eliminare anche la strategia B per il giocatore 1.

		Giocatore 2
		A
Giocatore 1	C	(20,20)

b) $NE = (C, A)$

Esercizio 3

Due individui hanno a disposizione una dotazione di 100€ e devono decidere se contribuire o meno ad un bene pubblico. Il loro payoff è dato da:

$$\Pi_i = 100 - c_i + 0.7 \cdot \sum_{i=1}^{N} c_i$$

dove c_i è la contribuzione dell'individuo i-esimo e N è il numero di individui coinvolti nel bene pubblico (nel nostro caso 2).
I due individui hanno a disposizione due strategie: contribuire con la loro intera dotazione o fare *free-riding* e non contribuire affatto al bene pubblico.

a) Costruire la matrice dei payoff.

b) Trovare, se esiste, l'equilibrio di Nash in strategie pure.

c) Siamo in presenza di un social dilemma?

Soluzione

a) Nella seguente matrice ci sono due strategie: non contribuire NC, $c_i = 0$, e contribuire C, $c_i = 100$.

Giocatore 2

Giocatore 1	NC	C
NC	(100, 100)	(170, 70)
C	(70, 170)	(140, 140)

b) $NE = (NC, NC)$

Giocatore 2

Giocatore 1	NC	C
NC	(<u>100</u>, <u>100</u>)	(<u>170</u>, 70)
C	(70, <u>170</u>)	(140, 140)

c) Sì poichè, senza comunicare e giocando simultaneamente, i due giocatori realizzano un payoff aggregato pari a 200, che è più basso di quello che potrebbero realizzare se entrambi contribuissero la loro intera dotazione, pari a 280.

Strategie miste

Esercizio 4

Si considerino due giocatori di calcio, un attaccante ed un portiere. L'attaccante deve tirare un calcio di rigore e deve decidere se tirare a destra o a sinistra; il portiere deve decidere se buttarsi a destra o a sinistra. I payoff sono elencati nella seguente matrice:

		Portiere	
		D	S
Attaccante	D	(-1, 1)	(1, -1)
	S	(1, -1)	(-1, 1)

a) Trovare, se esiste, l'equilibrio di Nash in strategie pure.

b) Trovare, se esiste, l'equilibrio di Nash in strategie miste.

Soluzione

a) Il gioco non ha equilibri di Nash in strategie pure.

		Portiere	
		D	S
Attaccante	D	(-1, 1)	(1, -1)
	S	(1, -1)	(-1, 1)

b) Per trovare l'equilibrio di Nash in strategie miste procediamo assegnando ad ognuna delle possibili strategie una probabilità, nel seguente modo:

- p è la probabilità che l'Attaccante tiri a destra (D), $1-p$ è la probabilità che l'Attaccante tiri a sinistra (S),
- q è la probabilità che il Portiere si butti a destra (D), $1-q$ è la probabilità che il Portiere si butti a sinistra (S).

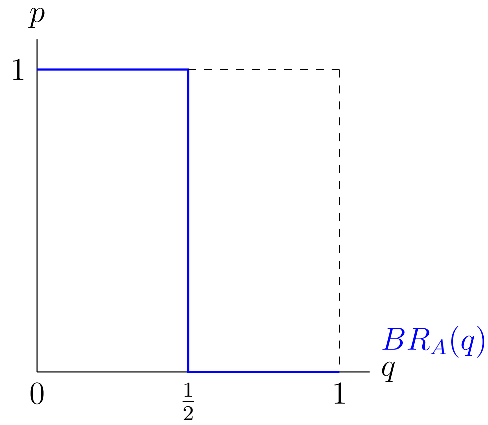
Adesso confrontiamo le utilità che l'Attaccante trae rispettivamente, dal tirare a destra e a sinistra in funzione di q, la probabilità che il Portiere si butti a destra.

$$U_A(D) = -1(q) + 1(1-q) = -q + 1 - q = 1 - 2q$$
$$U_A(S) = +1(q) - 1(1-q) = q - 1 + q = 2q - 1$$
$$U_A(D) > U_A(S)$$
$$1 - 2q > 2q - 1 \to 4q < 2 \to q < \frac{1}{2}$$

Possiamo ora ricavare la funzione di best response per l'Attaccante:

$$BR_A(q) = \begin{cases} D & \text{if} \quad q < 1/2 \\ \{D, S\} & \text{if} \quad q = 1/2 \\ S & \text{if} \quad q > 1/2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad p = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad q < 1/2 \\ [0,1] & \text{if} \quad q = 1/2 \\ 0 & \text{if} \quad q > 1/2 \end{cases}$$

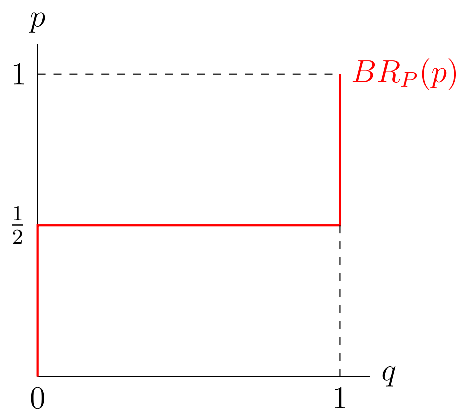
e rappresentarla graficamente:



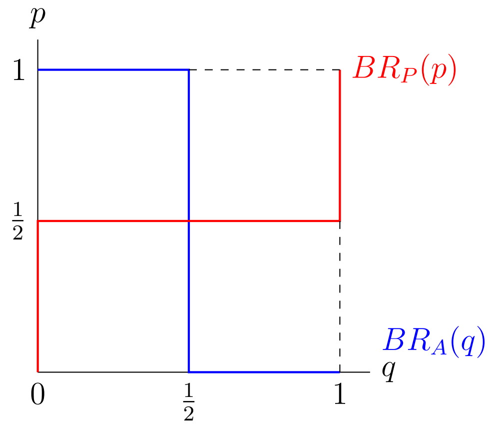
Per simmetria, per il Portiere:

$$U_P(D) = +1(p) - 1(1-p) = p - 1 + p = 2p - 1$$
$$U_P(S) = -1(p) + 1(1-p) = -p + 1 - p = 1 - 2p$$
$$U_P(D) > U_P(S)$$
$$2p - 1 > 1 - 2p \rightarrow 4p > 2 \rightarrow p > \frac{1}{2}$$

$$BR_P(p) = \begin{cases} D & \text{if} \quad p > 1/2 \\ \{D, S\} & \text{if} \quad p = 1/2 \\ S & \text{if} \quad p < 1/2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad q = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p > 1/2 \\ [0,1] & \text{if} \quad p = 1/2 \\ 0 & \text{if} \quad p < 1/2 \end{cases}$$



Unendo i due grafici troviamo l'equilibrio di Nash nel punto di intersezione tra le due funzioni: $(q = \frac{1}{2}; p = \frac{1}{2})$:



L'equilibrio di Nash in strategie miste è: l'attaccante tira a destra con probabilità $\frac{1}{2}$ e a sinistra con probabilità $\frac{1}{2}$. Simmetricamente, il Portiere si butta a sinistra con probabilità $\frac{1}{2}$ e a destra con probabilità $\frac{1}{2}$.

Dai giochi statici ai giochi dinamici

Esercizio 5

Due imprese, Blue ed Orange, operano nel mercato della telefonia mobile. Entrambe devono decidere se aprire (strategia A) o non aprire (strategia NA) un nuovo punto vendita nella stessa città.
I profitti associati alle loro scelte strategiche sono descritti nella seguente matrice:

		Orange	
		A	NA
Blue	A	(20, 30)	(10, 25)
	NA	(25, 15)	(15, 20)

a) Indicare, se esistono, le strategie dominanti e dominate per le due imprese.

b) Se le due imprese devono scegliere la loro strategia in modo simultaneo, quale sarebbe l'equilibrio (o gli equilibri) di Nash in strategie pure?

c) Supponiamo ora che l'impresa Blue abbia la possibilità di scegliere la sua strategia prima di Orange. Illustrare il gioco sequenziale ed indicare l'equilibrio di Nash; è diverso da quello del gioco statico? C'è stato un aumento dei profitti?

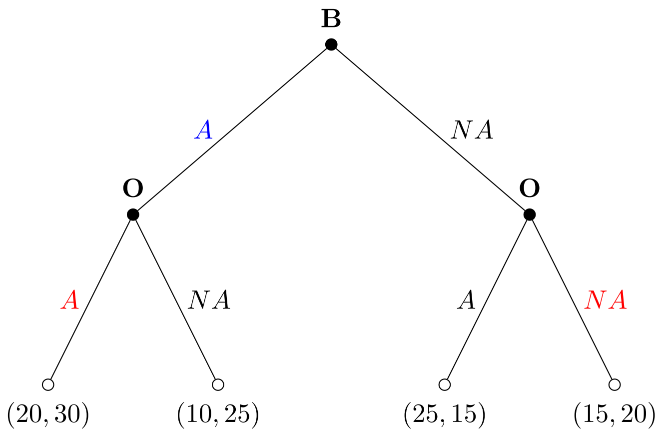
Soluzione

a) La strategia NA è dominante per Blue, di conseguenza la strategia A dominata. Orange non ha strategie dominanti e dominate.

b) L'equilibrio di Nash in strategie pure del gioco simultaneo è $NE = (NA, NA)$

		Orange	
		A	NA
Blue	A	(20, 30)	(10, 25)
	NA	(25, 15)	(15, 20)

c) L'equilibrio di Nash in strategie pure del gioco sequenziale è $SPNE = (A; A, NA)$



Sì, c'è stato un aumento di profitti per entrambe le imprese.

Esercitazione 4
Bayesian Updating
Economia dell'incertezza e dell'informazione
LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

20/3/2024

La Regola di Bayes ed il Bayesian Updating

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B, qual è la probabilità di osservare A se si è osservato B?

- La risposta è la *probabilità condizionata*, $P(A|B)$
- Se i due eventi sono indipendenti, la probabilità condizionata è solo $P(A)$.
- Se non sono indipendenti, aver osservato B ci dà più informazioni.
- La probabilità condizionata si calcola con

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Concetti di base

Probabilità congiunta
Dalla formula della probabilità condizionata possiamo ricavare la formula di probabilità congiunta:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Se gli eventi sono indipendenti la formula diventa

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Eventi esclusivi
Ipotizziamo che il verificarsi dell'evento A renda impossibile l'evento B (esempio: se adesso è nuvoloso non possiamo osservare il sole). Prendiamo ora l'evento C 'Essere a ritardo a lezione'. In questo caso vale:

$$P(C) = P(C \cap A) \cup P(C \cap B)$$

*llore@luiss.it

Inoltre applicando le formule di cui sopra,

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B)$$

Regola di Bayes

La regola di Bayes ci permette di aggiornare la probabilità di un evento E quando entriamo in possesso di informazioni I aggiuntive sull'evento.

- Innanzitutto, si possono ricevere informazioni sia che l'evento sia avvenuto, sia che non si avvenuto: le informazioni possono essere spurie.

$$P(I) = P(I|E) \cdot P(E) + P(I|\neg E) \cdot P(\neg E)$$

- Inoltre, secondo la formula della probabilità congiunta, la probabilità di osservare insieme l'evento e le informazioni è

$$P(E \cap I) = P(E|I) \cdot P(I) + P(I|E) \cdot P(E)$$

- Quest'ultimo passaggio implica che la probabilità che l'evento sia avvenuto, se osserviamo l'informazione, è

$$P(E|I) = \frac{P(I|E) \cdot P(E)}{P(I)}$$

La probabilità di osservare l'informazione può essere scomposta nelle sue componenti di informazione veritiera e spuria, risultando in

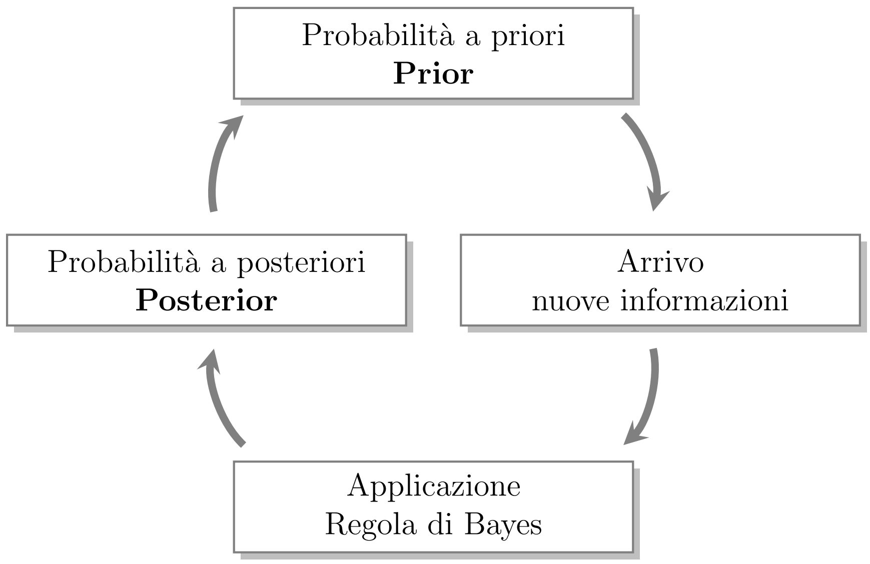
$$P(E|I) = \frac{P(E) \cdot P(I|E)}{P(I|E) \cdot P(E) + P(I|\neg E) \cdot P(\neg E)}$$

Regola di Bayes schema

$$P(E|I) = P(E) \cdot \frac{P(I|E)}{P(I|E) \cdot P(E) + P(I|\neg E) \cdot P(\neg E)}$$

- Posterior
- Prior
- Probabilità di ottenere l'informazione dato l'evento
- Probabilità totale di ottenere l'informazione

Bayesian updating



- Se le nuove informazioni sono *I.I.D.*, la *posterior* converge al valore vero;
- e questo avviene esponenzialmente nel tempo.

Esercizio 1

In una data città americana risulta che 30% dei votanti sono Conservatori, 50% sono Liberali ed il 20% sono Indipendenti. Se in una data elezione hanno votato rispettivamente il 65%, l'82% ed il 50% dei Conservatori, Liberali ed Indipendenti, e se si sceglie a caso una persona nella stessa città che non ha votato, qual è la probabilità che sia Liberale?

Soluzione

Si considerino gli eventi:

C: la persona scelta è un Conservatore

L: la persona scelta è un Liberale

I: la persona scelta è un Indipendente

V: la persona scelta ha votato

NV: la persona scelta non ha votato

L'esercizio viene risolto attraverso il teorema di Bayes, ovvero:

$$P(L|NV) = \frac{P(L \cap NV)}{P(NV)}$$

$$P(L \cap NV) = P(NV|L) \cdot P(L) = 0,18 \cdot 0,5 = 0,09$$

$$P(NV) = P(NV|C) \cdot P(C) + P(NV|L) \cdot P(L) + P(NV|I) \cdot P(I) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,3 + 0,18 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,105 + 0,09 + 0,1 = 0,295$$

$$P(L|NV) = \frac{P(L \cap NV)}{P(NV)} = \frac{0,09}{0,295} = 0,305$$

Esercizio 2

Un banditore di mercato deve decidere come prezzare un'azione di cui ignora il valore vero, pur sapendo che l'azione ha solo due valori, Basso (B) e Alto (A), e il valore è B con probabilità $P(B) = \delta$. Il banditore può però inferire il valore dell'azione dal fatto che osserva i trader comprare o vendere l'azione. Alcuni trader sono informati cioè conoscono il valore vero dell'azione, mentre altri non sono informati.
Supponendo che:

1. I trader informati vendono con probabilità 1 se l'azione ha valore B, e comprano con probabilità 1 se l'azione è A;
2. I trader non informati comprano o vendono con probabilità 0.5;
3. I trader si dividono a metà tra informati e non informati
4. La prior del banditore è $P(B) = \delta = 0.5$.

Calcolare:

a) la δ *posterior* che il banditore formula dopo aver osservato una vendita,

b) la δ *posterior* che il banditore formula dopo aver osservato un aquisto,

c) la δ *posterior* che il banditore formula dopo aver osservato due vendite di fila.

Soluzione

- Denotiamo una transazione osservata come T; se è una vendita, V, se è un acquisto, C.
- Quello che cerchiamo è la probabilità che il valore sia basso dopo aver osservato una o più transazioni, $\delta = P(B|T)$.
- Per rispondere possiamo usare in generale la regola di Bayes, per cui

$$P(B|T) = P(B) \cdot \frac{P(T|B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|A) \cdot P(A)}$$

- e poi applicarla ai singoli casi.

Ci mancano però alcune informazioni:

- $P(T|A)$, per vendita (V) e acquisto (C)
- $P(T|B)$, per vendita (V) e acquisto (C)

P(T|A)
Se il valore dell'azione è alto, i trader informati (inf) comprano di sicuro, e i non informati ($non\,inf$) comprano con probabilità 0.5. Quindi avremo un acquisto con la seguente probabilità

$$P(C|A) = P(inf) \cdot 1 + P(non\,inf) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

e contestualmente, una vendita con la seguente probabilità

$$P(V|A) = P(inf) \cdot 0 + P(non\,inf) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

P(T|B)
Se il valore dell'azione è basso, i trader informati (inf) vendono di sicuro, e i non informati ($non\,inf$) vendono con probabilità 0.5. Quindi avremo un acquisto con la seguente probabilità

$$P(C|B) = P(inf) \cdot 0 + P(non\,inf) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

e contestualmente, una vendita con la seguente probabilità

$$P(V|B) = P(inf) \cdot 1 + P(non\,inf) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

Con queste informazioni possiamo risolverei problemi uno a uno
Calcolare:

a) **Posterior dopo una vendita**, $P(B|V)$

Secondo la regola di Bayes,

$$P(B|V) = P(B) \cdot \frac{P(V|B)}{P(V|B) \cdot P(B) + P(V|A) \cdot P(A)}$$

Dalle considerazioni precedenti:

$$P(B) = 0.5,\ P(V|B) = 0.75,\ P(A) = 0.5,\ P(V|A) = 0.25$$

Sostituendo, otteniamo

$$P(B|V) = 0.5 \cdot \frac{0.75}{0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Che significa che il banditore, dopo aver osservato una vendita, assegna probabilità maggiore (0.75 invece di 0.5) al fatto che il vero valore dell'azione sia Basso.

b) **Posterior dopo un aquisto**, $P(B|C)$

Secondo la regola di Bayes,

$$P(B|C) = P(B) \cdot \frac{P(C|B)}{P(C|B) \cdot P(B) + P(C|A) \cdot P(A)}$$

Dalle considerazioni precedenti:

$$P(B) = 0.5,\ P(C|B) = 0.25,\ P(A) = 0.5,\ P(C|A) = 0.75$$

Sostituendo, otteniamo

$$P(B|C) = 0.5 \cdot \frac{0.25}{0.5 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.75} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Che significa che il banditore, dopo aver osservato un acquisto, assegna probabilità minore (0.25 invece di 0.5) al fatto che il vero valore dell'azione sia Basso.

c) **Posterior dopo due vendite**, $P(B|V, V)$

In questo caso possiamo avvalerci dell'iterazione del bayesian updating: la posterior della prima vendita è inserita come prior, e si fa un secondo updating. La risultante regola di Bayes sarà:

$$P(B|V, V) = P(B/V) \cdot \frac{P(V|B)}{P(V|B) \cdot P(B|V) + P(V|A) \cdot P(A|V)}$$

Dalle considerazioni precedenti:

$$P(B|V) = 0.75,\ P(V|B) = 0.75,\ P(A|V) = 0.25,\ P(V|A) = 0.25$$

Sostituendo, otteniamo

$$P(B|V, V) = 0.75 \cdot \frac{0.75}{0.75 \cdot 0.75 + 0.25 \cdot 0.25} = \frac{9}{10} = 0.9$$

Ciò significa che se il banditore osserva due vendite di seguito, crederà che l'azione abbia un vero valore Basso con il 90% di probabilità.

Esercitazione 5
Informazione
Economia dell'incertezza e dell'informazione

LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

4/4/2024

Selezione Avversa

Esercizio 1

Nel mercato delle biciclette di seconda mano, esiste una probabilità del 30% di comprare una bicicletta di alta qualità. I costi unitari sostenuti dai rivenditori di biciclette di alta (A) qualità sono pari a 2000, mentre quelli sostenuti dai rivenditori di biciclette di bassa (B) qualità sono 500. La disponibilità a pagare dell'acquirente tipo è 6000 per una bicicletta di alta qualità e 3000 per una bicicletta di bassa qualità. Al momento dell'acquisto però l'acquirente tipo non è in grado di distinguere tra biciclette di alta e bassa qualità.

a) Quanto è disposto a pagare l'acquirente tipo?

b) Qual è il profitto atteso dei due tipi di rivenditori?

c) Supponiamo che ai rivenditori di biciclette di alta qualità sia concessa l'opportunità di acquistare una certificazione che garantisce la qualità delle biciclette vendute. Qual è il valore massimo che i rivenditori di biciclette di alta qualità sarebbero disposti a pagare per ottenere il certificato di qualità?

d) Supponendo che la certificazione sia pagata il prezzo massimo identificato al punto d), l'equilibrio in presenza di certificazione garantisce un esito migliore, peggiore o uguale in termini di benessere sociale rispetto a quello di concorrenza perfetta con perfetta informazione?

*llore@luiss.it

Soluzione

a) Il disponibilità a pagare (WP) dell'acquirente coincide con il Valore Atteso:

$$WP = EV = 0.3 \cdot 6000 + 0.7 \cdot 3000 = 1800 + 2100 = 3900$$

b) Il profitto atteso dei due tipi di rivenditori è:

$$\pi(A) = 3900 - 2000 = 1900$$

$$\pi(B) = 3900 - 500 = 3400$$

c) Il valore massimo che i rivenditori di biciclette di alta qualità sono disposti a pagare per ottenere il certificato di qualità è:

$$6000 - 2000 - x = 0 \rightarrow x = 4000$$

d) Peggiore. A parità di quantità scambiata sul mercato, infatti, il livello dei profitti delle imprese è più basso, e quindi anche il surplus totale.

Esercizio 2

La serra *Green Finger* acquista dai produttori olandesi bulbi di tulipani da rivendere in Italia ai propri clienti. Il 60% dei produttori è di bassa qualità, mentre nel 40% dei casi i bulbi sono di ottima specie. I produttori di buona qualità sostengono un costo di produzione per ciascun bulbo pari a 6.5 Euro, mentre quelli di bassa qualità pari a 3.5 Euro. Il proprietario non è in grado di distinguere a priori tra prodotti di buona o bassa qualità. Egli sarebbe disposto a pagare fino a 10 Euro per un bulbo di tulipano di buona qualità, ma solo 4 Euro per un bulbo di bassa qualità.

a) Quanto è disposto a pagare il proprietario della serra per un bulbo di tulipano?

b) Quale tipo di bulbi vi aspettate che possa comprare il proprietario della serra? Perché?

c) Se i produttori di buona qualità potessero ottenere una certificazione della loro qualità prodotta, che costa 2 Euro a bulbo, da poter esporre pubblicamente, quale sarebbe l'equilibrio sul mercato?

d) Quale è la cifra massima che i produttori di bulbi di buona qualità sono disposti a pagare per ottenere la certificazione? Perché?

Soluzione

a) La disponibilità a pagare (WP) del proprietario della serra che non possiede perfetta informazione sulla qualità è pari al valore atteso:

$$WP = EV = 0.4 \cdot 10 + 0.6 \cdot 4 = 6.4$$

b) Essendo la disponibilità a pagare WP del proprietario pari a 6.4 Euro i produttori di buona qualità non saranno disposti a vendere il loro prodotto in quanto il costo unitario di produzione, pari a 6.5, non consentirebbe loro di realizzare profitti non negativi. Quindi solo i produttori di bulbi di bassa qualità saranno disposti a vendere.

c) I produttori di bulbi di tulipani di buona qualità sono incentivati a segnalare la qualità del loro prodotto. Se acquistassero la certificazione al costo di 2 Euro a bulbo, segnalando così la buona qualità del loro prodotto, allora il proprietario potrebbe riconoscere i bulbi di buona qualità e sarebbe disposto a pagare 10 Euro per bulbo. I produttori di bulbi buoni venderebbero ora una quantità positiva e realizzerebbero profitti unitari positivi pari a

$$(10 - 6.5 - 2) = 1.5 > 0$$

d) La cifra massima è 3.5 euro. Infatti se la certificazione costasse piu' di 3.5 Euro a bulbo allora i produttori di buona qualità non avrebbero incentivo ad acquistarla dato che farebbero profitti negativi

$$(10 - 6.5 - x) < 0 \rightarrow x > 3.5$$

Esercitazione 6
Informazione
Economia dell'incertezza e dell'informazione
LUISS Guido Carli

Luisa Lorè*

11/4/2024

Rischio Morale

Esercizio

Consideriamo il caso di un proprietario e di un manager. Il proprietario desidera massimizzare la sua funzione di profitto $\pi = y - w$, che dipende direttamente dalla produzione y e dal salario w pagato al manager. Il manager desidera invece rendere massima la propria funzione di utilità, $U = w - s$, che dipende direttamente dal salario percepito w e inversamente dall'impegno lavorativo s.

a) A quali condizioni tale situazione rappresenta un problema di principale-agente con rischio morale?

b) Supponiamo che l'impegno lavorativo possa assumere due valori, $s = (1, 2)$, e che la produzione dipenda dall'impegno del manager (s) nel seguente modo. Se l'impegno è pari a $s = 1$, la produzione sarà pari a: $y = 10$ con $p = 1/2$ e $y = 50$ con $p = 1/2$. Se l'impegno del manager è invece pari a $s = 2$, la produzione sarà pari a 50 con $p = 1$. Il valore dell'utilità di riserva del manager è $\bar{U} = 10$. Si formalizzi il problema di principale-agente.

c) Si verifichi che un livello di salario indipendente dalla produzione e pari a $w = 12$ soddisfa sempre il vincolo di partecipazione del manager ma non

*llore@luiss.it

soddisfa il vincolo di compatibilità degli incentivi. Si calcoli il profitto atteso del principale in corrispondenza di ciascuno dei due livelli di impegno del manager ed il corrispondente livello di salario che soddisfa il vincolo di partecipazione.

d) Si verifichi che il contratto ottimo per il principale consiste nel cedere all'agente l'attività di produzione del bene y a un prezzo $p = 38$.

Soluzione

a) Il problema è quello di un rapporto principale-agente con rischio morale, dove il proprietario è il principale e il manager è l'agente, se il proprietario non è in grado di conoscere, dopo la stipula del contratto, il livello dell'impegno profuso dal manager, e se, come indicato nel punto b), la produzione y dipende direttamente dall'impegno lavorativo s. In tali condizioni le funzioni obiettivo del proprietario e del manager divergono.

b) Il problema del principale è quello di scegliere la retribuzione dell'agente (w) in modo che questi applichi un livello di impegno tale da realizzare quella produzione (y) che rende massimo il profitto del principale. II principale vuole quindi scegliere quella struttura di salario che massimizza il proiftto π:

$$\max \pi = y(s) - w$$

Nell'impostare il suo problema di massimo, il principale deve tener conto di due vincoli. Il primo vincolo (vincolo di partecipazione) dice che l'agente accetterà il contratto proposto dal principale se il Iivello di utilità che consegue risulta almeno pari al suo valore di riserva, $\bar{U} = 10$. Avremo di conseguenza: $U = w - s \geq 10$. Il secondo vincolo (vincolo di compatibilità degli incentivi) dice che l'agente sceglierà quell'impegno che rende massimo il valore della propria funzione di utilità:

$$\max U = w - s$$

La struttura ottima del salario è una funzione $w(y)$, cioè una relazione che assegna livelli salariali diversi in corrispondenza della realizzazione di differenti valori di produzione y.

c) Se $s = 1$, il vincolo di partecipazione, $w - s \geq \bar{U}$, è rispettato quando il salario dell'agente è $w > s + \bar{U}$, cioè $w_1 = 11$. Se $s = 2$, il vincolo di partecipazione è rispettato quando il salario dell'agente è $w_2 = 12$: Quindi $w_2 = 12$ soddisfa sempre il vincolo di partecipazione. Tuttavia se venisse firmato un contratto che garantisse all'agente un salario $w_2 = 12$, non essendovi il modo di influire direttamente sul livello di impegno di quest'ultimo, questi tenderà a ridurre il proprio sforzo e ad impegnarsi al livello $s = 1$. La sua utilità e infatti pari a $U(s_1) = 12 - 1 = 11$, se l'impegno e pari a s_1, e a $U(s_2) = 12 - 2 = 10$ se l'impegno è pari a s_2. Quando $s = s_1$, il minimo livello di salario che soddisfa il vincolo di partecipazione è $w_1 = 11$. II profitto atteso dal principale, in corrispondenza di ciascun livello di impegno e del relativo livello di salario che soddisfa il corrispondente vincolo di partecipazione, è calcolabile nel modo seguente:

$$E(\pi|s_1) = E(y|s_1) - w_1 = 10 \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.5 - 12 = 18$$

$$E(\pi|s_2) = E(y|s_2) - w_2 = 50 - 12 = 38$$

Di conseguenza, il contratto che offre all'agente un salario indipendente dalla produzione e pari a $w_2 = 12$ non è efficiente, poiché non è in grado di incentivare l'agente ad applicare l'impegno ottimo $s_2 = 2$, inducendo in tal modo il più elevato profitto atteso per il principale.

d) Supponiamo che il manager acquisti l'attività ad un prezzo $p = 38$. Se applica un impegno pari a s_1 e si appropria della produzione $y(s_1)$, la sua utilità attesa sarà:

$$E[U(s_1)] = E(y|s_1) - s_1 - p = (10 \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.5) - 1 - 38 = -9$$

Se applica un impegno pari a s_2 e si appropria della produzione $y(s_2)$, la sua utilità attesa sarà:

$$E[U(s_2)] = E(y|s_2) - s_2 - p = 50 - 2 - 38 = 10$$

Poiché $E[U(s_2)]$ soddisfa il vincolo di partecipazione, il manager acquisterà l'attività e applicherà un impegno s_2. La cessione dell'attività dal principale all'agente è la soluzione efficiente nel caso esaminato, perché l'agente è neutrale al rischio. Se l'agente fosse avverso al rischio converrebbe al principale mantenere l'attività e pagare all'agente, per incentivarlo a scegliere l'impegno s_2, un salario che dipenda da y, ma nel contempo lo assicuri rispetto al rischio associato alla produzione di y.