Orthogonalität und Orthonormalität

Daria Pigasova Miha Kacicnik

LMU

München, 14.01.2020

Outline

Outline

Euklidischer Vektorraum

Unter einem euklidischen Vektorraum versteht man ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V.

Euklidischer Vektorraum

Unter einem euklidischen Vektorraum versteht man ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V.

Standardskalarprodukt

Im euklidischen Vektorraum ist das Skalarprodukt für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ definiert als

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Euklidische Norm

Im euklidischen Vektorraum ist die Länge eines Vektors $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ definiert als

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$
$$\|\vec{a}\|_2^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

Outline

Orthogonalität von Vektoren

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ heißen orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) genau dann, wenn ihr Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Orthogonalität von Vektoren

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ heißen orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) genau dann, wenn ihr Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Bemerkung 1

Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 90^\circ$

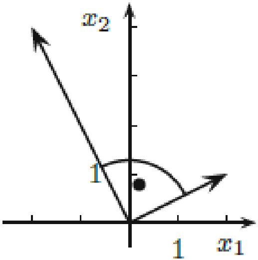


Abbildung: Orthogonale Vektoren
Quelle: Hoever, Georg (2013). *Höhere Mathematik Kompakt.* Springer Spektrum. (S. 149)

Beispiel orthogonaler Vektoren im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$$

Beispiel orthogonaler Vektoren im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$$

Bemerkung 2

orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^2$: Zu einem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ erhält man einen orthogonalen Vektor $\vec{a'}$ durch Vertauschen der Komponenten und Vorzeichenwechsel in einer der beiden Komponenten, sodass z.B.:

$$\langle \vec{a}, \vec{a'} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot (-a_1) = 0$$

Orthogonalität als Eigenschaft des Vektorprodukts

Orthogonalität als Eigenschaft des Vektorprodukts

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ gilt:

Orthogonalität als Eigenschaft des Vektorprodukts

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ gilt:

- Orthogonalität: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

Orthogonalität als Eigenschaft des Vektorprodukts

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ gilt:

- Orthogonalität: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt

$$\vec{a} x \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität als Eigenschaft des Vektorprodukts

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$ gilt:

- Orthogonalität: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt

$$\vec{a} x \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{a} x \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Prüfe auf Orthogonalität:

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 0$$

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = 0$$

also: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{a}$

Satz (Pythagoras)

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Sind $\vec{a}, \vec{b} \in V$ orthogonal zueinander, so gilt:

$$\left\|\vec{a} \oplus \vec{b}\right\|_2^2 = \|\vec{a}\|_2^2 + \left\|\vec{b}\right\|_2^2$$

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a}\|_2^2 = 5^2 + 2^2 = 29, \ \left\|\vec{b}\right\|_2^2 = (-2)^2 + 5^2 = 29$$

$$\left\|\vec{a} \oplus \vec{b}\right\|_2^2 = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$\left\|\vec{a} \oplus \vec{b}\right\|_2^2 = \|\vec{a}\|_2^2 + \left\|\vec{b}\right\|_2^2$$

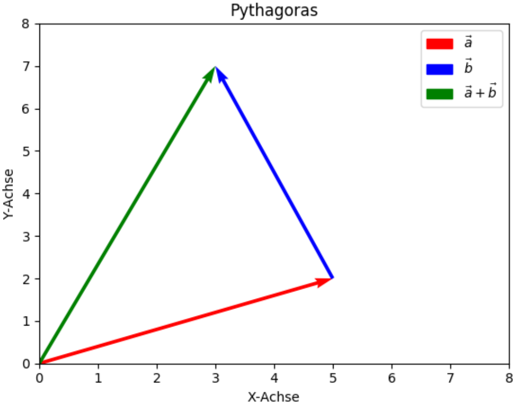


Abbildung: Darstellung des obigen Beispiels

Outline

- **Orthogonalsystem**

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:

  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:
  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:

  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$
  3. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:
  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$
  3. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig

- **Orthogonalbasis**

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:
  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$
  3. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig

- **Orthogonalbasis**
  Ein System oder eine Teilmenge B eines euklidischen Vektorraums V wird als Orthogonalbasis von V bezeichnet, wenn B folgende Bedingungen erfüllt:

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:
  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$
  3. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig

- **Orthogonalbasis**
  Ein System oder eine Teilmenge B eines euklidischen Vektorraums V wird als Orthogonalbasis von V bezeichnet, wenn B folgende Bedingungen erfüllt:
  1. B ist eine Basis von V

Orthogonalsystem und Orthogonalbasis

- **Orthogonalsystem**
  Ein System oder eine Teilmenge M eines euklidischen Vektorraums V heißt Orthogonalsystem, wenn folgende Eigenschaften gelten:
  1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in M : \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
  2. $\vec{0} \notin M$
  3. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig

- **Orthogonalbasis**
  Ein System oder eine Teilmenge B eines euklidischen Vektorraums V wird als Orthogonalbasis von V bezeichnet, wenn B folgende Bedingungen erfüllt:
  1. B ist eine Basis von V
  2. B ist ein Orthogonalsystem

Outline

Definition orthogonaler Matrizen

Orthogonalität von Matrizen

Eine quadratische Matrix $Q = (q_1\ q_2\ ...\ q_n) \in \mathbb{R}^{nxn}$ ist orthogonal, wenn $Q^T Q = \mathbb{I}$ gilt. Dies bedeutet zugleich, dass die Spalten der Matrix Q eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Die Zeilen der Matrix Q bilden ebenso eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, wodurch auch $QQ^T = \mathbb{I}$ erfüllt ist.

Beispiel einer orthogonalen Matrix

$$Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q^T Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9+16 & 12-12 \\ 12-12 & 16+9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

Outline

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)
- $Q^{-1} = Q^T$

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)
- $Q^{-1} = Q^T$
- wenn Q orthogonal, dann auch Q^T orthogonal

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)
- $Q^{-1} = Q^T$
- wenn Q orthogonal, dann auch Q^T orthogonal
- $det(Q) = \pm 1$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)
- $Q^{-1} = Q^T$
- wenn Q orthogonal, dann auch Q^T orthogonal
- $det(Q) = \pm 1$
- das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Für jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ gelten folgende Eigenschaften:

- Q ist invertierbar (regulär)
- $Q^{-1} = Q^T$
- wenn Q orthogonal, dann auch Q^T orthogonal
- $det(Q) = \pm 1$
- das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal
- $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$: Q ist längenerhaltend, also $\|Q\vec{v}\|_2 = \|\vec{v}\|_2$

Definition

Der Vektor $\vec{a}$ heißt normiert, wenn

$$\|\vec{a}\|_2 = 1$$

Definition

Der Vektor $\vec{a}$ heißt normiert, wenn

$$\|\vec{a}\|_2 = 1$$

Orthonormalität

Vektoren aus einem Vektorraum heißen orthonormal, wenn sie auf die Länge eins normiert und zueinander orthogonal sind

Outline

Sei $\vec{a_1} = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$, $\vec{a_2} = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$ und $\vec{a_3} = (0; 0; 1)$

- Skalarprodukte berechnen

$$\langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle = 1/\sqrt{2} * 1/\sqrt{2} + (-1/\sqrt{2}) * 1/\sqrt{2} + 0 * 0 = 1/2 - 1/2 + 0 = 0$$
$$\langle \vec{a_1}, \vec{a_3} \rangle = 1/\sqrt{2} * 0 + (-1/\sqrt{2}) * 0 + 0 * 1 = 0$$
$$\langle \vec{a_2}, \vec{a_3} \rangle = 1/\sqrt{2} * 0 + 1/\sqrt{2} * 0 + 0 * 1 = 0$$

Sei $\vec{a_1} = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$, $\vec{a_2} = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$ und $\vec{a_3} = (0; 0; 1)$

- Skalarprodukte berechnen

$$\langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle = 1/\sqrt{2} * 1/\sqrt{2} + (-1/\sqrt{2}) * 1/\sqrt{2} + 0 * 0 = 1/2 - 1/2 + 0 = 0$$
$$\langle \vec{a_1}, \vec{a_3} \rangle = 1/\sqrt{2} * 0 + (-1/\sqrt{2}) * 0 + 0 * 1 = 0$$
$$\langle \vec{a_2}, \vec{a_3} \rangle = 1/\sqrt{2} * 0 + 1/\sqrt{2} * 0 + 0 * 1 = 0$$

- Länge jedes Vektors berechnen

$$\|\vec{a_1}\|_2 = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (-1/\sqrt{2})^2 + 0^2} = 1$$
$$\|\vec{a_2}\|_2 = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 + 0^2} = 1$$
$$\|\vec{a_3}\|_2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Schritte, um einen Vektor zu normieren:

- die Länge des Vektors berechnen
- den Vektor durch seine Länge teilen

Schritte, um einen Vektor zu normieren:

- die Länge des Vektors berechnen
- den Vektor durch seine Länge teilen

Sei $\vec{a} = (3, 4, 0)$

- $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0} = 5$
- $(3, 4, 0) * 1/5 = (3/5, 4/5, 0)$

Outline

Funktionen können auch Elemente eines Vektorraums sein.

Funktionen können auch Elemente eines Vektorraums sein.

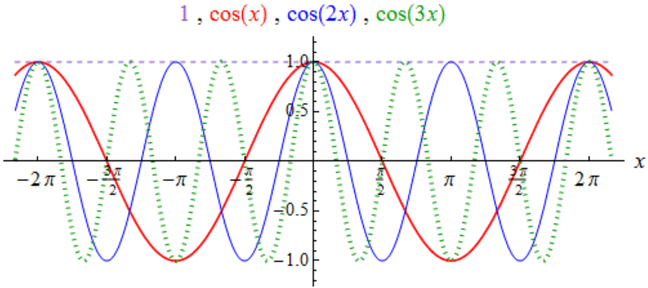
Als Beispiel nehmen wir Funktionen, die auf einem Abschnitt periodisch sind. Einfachheitshalber wählen wir den Abschnitt $[-\pi; \pi)$.

Als Skalarprodukt wird das folgende Integral verwendet:

$(g(x), h(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$

Als Basis können dann folgende Funktionen verwendet werden:

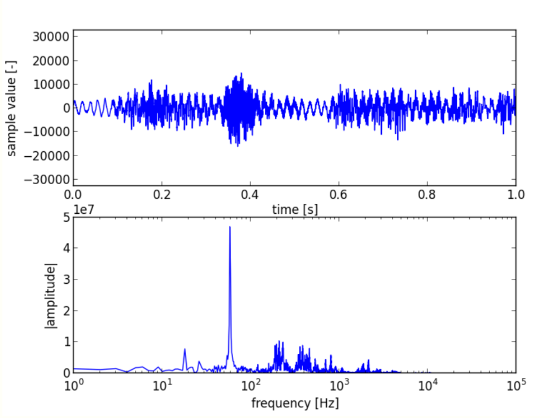
$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} cos(0 \cdot x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(x)$
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(2x)$
...
$f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx)$



- Funktionen sind orthogonal. Zum Beispiel:
  - $(f_0, f_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot cos(x)dx = \frac{1}{\pi}(sin(\pi) - sin(-\pi)) = 0$
- Funktionen sind normiert. Zum Beispiel:
  - $(f_1, f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cos(x) \cdot cos(x)dx = \frac{1}{\pi}(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}sin(2x))|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 1$

Fourier-Transformation

- wird in der Signalverarbeitung verwendet
- Funktionen sind als Elemente eines Vektorraums dargestellt
- jeder Vektor lässt sich bzgl. der Vektorbasis zerlegen



Zerlegung bzgl. Orthonormalbasis

Fourier-Reihe aus dem obigen Beispiel:
$s(t) = s_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + s_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)...$

Allgemeine Formel zur Vektorenzerlegung:

$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_n \vec{a}_n$

Zerlegung bzgl. Orthonormalbasis

Fourier-Reihe aus dem obigen Beispiel:
$s(t) = s_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + s_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)...$

Allgemeine Formel zur Vektorenzerlegung:

$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n$

Wie finden wir Koeffizienten? $\langle\vec{x}, \vec{a}_1\rangle = x_1\langle\vec{a}_1, \vec{a}_1\rangle + x_2\langle\vec{a}_2, \vec{a}_1\rangle + ... + x_n\langle\vec{a}_n, \vec{a}_1\rangle$

Fourier-Reihe aus dem obigen Beispiel:
$s(t) = s_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + s_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(t)...$

Allgemeine Formel zur Vektorenzerlegung:

$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + ... + x_n \vec{a}_n$

Wie finden wir Koeffizienten? $\langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle = x_1 \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle + x_2 \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle + ... + x_n \langle \vec{a}_n, \vec{a}_1 \rangle$

Wenn Basis orthonormal ist, $(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 1$ und $(\vec{a}_2, \vec{a}_1), ...(\vec{a}_n, \vec{a}_1) = 0$, dann
$(\vec{x}, \vec{a}_1) = x_1 \underbrace{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)}_{=1} + x_2 \underbrace{(\vec{a}_2, \vec{a}_1)}_{=0} + ... + x_n \underbrace{(\vec{a}_n, \vec{a}_1)}_{=0} = x_1$

Zusammenfassung

- zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt null beträgt
- eine Matrix M kann auch orthogonal sein gdw, sie quadratisch ist und $M^T M$ die Identitätsmatrix bildet.
- eine Menge von Basisvektoren bildet eine Orthonormalbasis, wenn die Vektoren paarweise zueinander orthogonal sind und ihre Länge gleich 1 ist.
- Verwendung der Orthonormalbasis vereinfacht die Berechnungen deutlich

Danke!

Literatur

Eldén, Lars (2007). *Matrix methods in data mining and pattern recognition.* Siam. Kap. 4.

Kapfinger, Christian (2017). *Höhere Mathematik in Rezepten.* Springer Spektrum

Hoever, Georg (2013). *Höhere Mathematik Kompakt.* Springer Spektrum.

Anthony, Martin and Harvey, Michele (2012). *Linear Algebra: Concepts and Methods.* Cambridge University Press

https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Transformation

https://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html

https://rsmith.home.xs4all.nl/miscellaneous/filtering-a-sound-recording.html