Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung (CIS)
Übungen zum Masterkurs P2 „Vertiefung Grundlagen der Computerlinguistik“
WS 2019/20 Klaus U. Schulz

Aufgabe 1.1 Nachfolgend stehen α und β für beliebige Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe der Methode der Wahrheitswerttabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien darstellen:

1. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$
2. $(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \Leftrightarrow \alpha$

Was sagt die erste Tautologie über die Möglichkeiten aus, eine Aussage in Form einer Implikation zu beweisen?

Aufgabe 1.2 Geben Sie die folgenden mathematisch formulierten Aussagen in natürlicher Sprache wieder - welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Wie kann man das beweisen?

1. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x = 3y \vee x = 3y + 1 \vee x = 3y + 2)$
2. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (x < z \Leftrightarrow y \leq z)$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ ((x < y) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}\ (x < z < y))$
4. $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x < y \vee y < x)$

Aufgabe 1.3 Geben Sie mehrere unterschiedliche Beschreibungen der Menge mit den Elementen 2, 4, 6, 8. Verwenden Sie hier auch die Zeichen $\bigcup$ (Vereinigung einer Mengenfamilie), $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

Aufgabe 1.4 Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Zahlen sollen hierbei *nicht* als Mengen aufgefasst werden, P steht für die Potenzmenge. Vorsicht: Glatteis!

(a)	$\{8,9\} \setminus \{8\} \subset \{9\}$	(b)	$\{\{1,2\}\} \in \{5,\{1,2\},3\}$
(c)	$4 \not\in \bigcup\{\{5\},\{1\},\{\{4\}\},\{3\}\}$	(d)	$P(\{\{2,6\}\}) \subset P(\{\{2,4,6\}\})$
(e)	$\{1,\emptyset\} \in \mathbb{N} \cup \{1,\{\}\}$	(f)	$\{\emptyset\} \subset P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})$

Aufgabe 1.5 Für welche der folgenden Gleichungen gibt es keine, genau eine, endlich viele, für welche gibt es unendlich viele Lösungen B? Wie lassen sich jeweils die möglichen Mengen B charakterisieren?

$$\begin{aligned}
(\{1,2,3\} \cap B) \cup B &= \{1,2,3,4\},\\
(\{1,2,3\} \cap B) \cup B &= B,\\
\{1,2,3\} \cap B &= \{1,2\},\\
\{1,2,3,4,5\} \setminus B &= \{1,2\},\\
B \setminus \{1,2,3\} &= \{4,5,6\},\\
B \bowtie \{1,2,3\} &= \{1\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.6 Gegeben seien folgenden Mengenpaare:

$$\begin{aligned} \{1,2,5\} &\quad \text{und} \quad \{2,3,4\}, \\ \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y+1\} &\quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}, \\ \{0,2,3,4\} &\quad \text{und} \quad \{5,0,1,7\}, \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &\quad \text{und} \quad \{\emptyset\}, \\ \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &\quad \text{und} \quad \{\{\emptyset\}\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie jeweils Vereinigung, Durchschnitt, symmetrische Differenz und (beide) Differenzen.

Aufgabe 1.7 Beweisen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B einer Menge M stets gilt $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$. Hierbei steht das Zeichen "$-$" für Komplementbildung in M. Fhren Sie den Beweis, indem sie diesen auf eine aussagenlogische Tautologie zurückführen.

Aufgabe 1.8 Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $2(1+2+\ldots+n) = n(n+1)$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 1.9 Durch die Angaben $2 \in M$ und die Regel

falls $m \in M$, so auch $m \cdot m$

wird induktiv eine Menge M definiert. Geben Sie eine vereinfachte Beschreibung dieser Menge.

Aufgabe 1.10 Es seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ zweistellige Relationen. Die endlichen Mengen A, B, C sollen gleichgroß sein und jeweils n Elemente enthalten. Wieviele Paare müssen R bzw. S enthalten, dass garantiert $R \circ S$ nichtleer ist?

Aufgabe 1.11 Es sei $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige Relation. Welche Eigenschaften muss R besitzen, dass die Umkehrrelation R^{-1} eine (totale) Funktion von B nach A ist?

Aufgabe 1.12 Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie: ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 1.13 Geben Sie alle reflexiven (alle transitiven, alle symmetrischen, alle antisymmetrischen) Relationen auf der Menge $\{1,2\}$ an.

Aufgabe 1.14 Geben Sie eine Menge M und drei Äquivalenzrelationen auf M an, so dass die Vereinigung von je zwei dieser Äquivalenzrelationen jeweils KEINE Äquivalenzrelation darstellt. Wie sieht der Durchschnitt über alle drei Äquivalenzrelationen aus? Wie sieht der Durchschnitt über je zwei Äquivalenzrelationen aus?

Aufgabe 1.15 Gegeben sei ein Wort w der Länge n über einem Alphabet Σ der Form $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$. Bekanntlich ist ein Wort $v \in \Sigma^*$ ein Infix von w, wenn w in der Form $w = uvu'$ fr Wörter $u, u' \in \Sigma$ dargestellt werden kann. Ist hierbei $u = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}$ und $u' = \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n$, so sagen wir, dass i eine Startposition und j eine Endposition von v in w ist. Beachten Sie, dass ein Infix v mehrere Start- bzw. Endpositionen in w haben kann. Auf der Menge Wörter in Σ^* definieren wir die Relation $\sim_w^S$, durch $v \sim_w^S v'$ genau dann, wenn die Menge der Startpositionen von v und v' in w identisch sind. Analog definieren wir die Relation $\sim_w^E$, durch $v \sim_w^E v'$ genau dann, wenn die Menge der Endpositionen von v und v' in w identisch sind. Zeigen Sie, dass beide Relationen Äquivalenzrelationen sind. Geben Sie Beispiele für Wörter w und interessante Äquivalenzklassen von Infixen mit Elementen. Stellen Sie sich nun vor, wir haben (an Stelle von w) ein Lexikon L mit vielen Wörtern. Wir könnten definieren (1) $\sim_L^S$ genau dann, wenn es ein Wort w in L gibt mit $v \sim_w^S v'$, oder (2) $\sim_L^S$ genau dann, wenn für alle Wörter w in L stets $v \sim_w^S v'$ gilt. Welche dieser Definitionen ergibt eine Äquivalenzrelation? (Die genannten Relationen sind die Grundlage für bestimmte Indexstrukturen).

Aufgabe 1.16 Geben Sie auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ Quasiordnungen an, die keine partiellen Ordnungen darstellen. Geben Sie auf M auch partielle Ordnungen an, die keine linearen Ordnungen darstellen. Unter diesen partiellen Ordnungen sollen sowohl Beispiele wie Gegenbeispiele für Verbände sein. Geben Sie jeweils die minimalen und ggf. kleinsten Elemente an. Begründen Sie, warum ein bzw. kein Verband vorliegt.

Aufgabe 1.17 Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier unterschiedlicher linearer Ordnungen auf einer Menge selbst keine lineare oder partielle Ordnung sein kann.

Aufgabe 1.18 Die Algebra B sei definiert als die Menge aller Wörter A^* über dem Alphabet $A = \{a, b\}$ mit der Konkatenation $\circ$ als einziger Operation. Geben Sie einige Homomorphismen von B nach B und einige Kongruenzrelationen auf B an.