UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

# ÍTEMS DE CÁLCULO III (UNIDAD II)

**RUEDAS PRADO LUISA GUADALUPE**
**417099677**

PROFESOR

**MTRA. JEANETT LÓPEZ GARCÍA**

**MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN**

SEPTIEMBRE 2021

# ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 06 DE NOVIEMBRE DE 2020

(Propuesta)

1. Sea

$$f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y};$$

Hallar

$$f_y(x,y)$$

Aplicando la definición:

a) $\frac{2x^2+x}{(x-y)(x+y)}$

b) $\frac{x^2+y}{(x-y)^2}$

c) $\frac{2x^2+x}{(x-y)^2}$

d) $\frac{x^2+y}{(x-y)(x+y)}$

**Solución:**

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{x+2y}{x^2-y}] = \frac{2(x^2-y)-(-1)(x+2y)}{(x^2-y)^2} = \frac{2x^2+x}{(x^2-y)^2}$$

2. Sea

$$f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + 2xz$$

Hallar

$$f_y(x,y,z)$$

a) $2xy - 3y^2 + 2z$

b) $x^2 - 6xy + 2x$

c) $x^2 - 6xy$

d) $-6xy + 2x$

**Solución:**

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y - 3xy^2 + 2xz] = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) = x^2 - 6xy + 0$$

3. Sea

$$u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hallar

$$\frac{\partial u}{\partial z}$$

a) $\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

b) $\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

c) $\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

d) $\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)}$

**Solución:**

$$\frac{\partial}{\partial z}[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}[(x^2+y^2+z^2)] = \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2z = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

4. Sea

$$f(x,y,z) = 4xyz + \ln 2xyz$$

Hallar

$$f_3(x,y,z)$$

a) $4xz + \frac{1}{z}$ b) $4xy + \frac{1}{2z}$ c) $4xy + \frac{1}{z}$ d) $4yz + \frac{1}{2z}$

**Solución:**

$$f_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(4xyz + \ln(2xyz)) = 4xy + \frac{1}{2xyz}(2xy) = 4xy + \frac{1}{z}$$

5. Sea

$$f(x,y) = x\cos y - ye^x$$

Hallar

$$D_{12}f(x,y)$$

a) $-ye^x$ b) $-x\cos y$ c) $-\sin y - e^x$ d) $-z + e^x$

**Solución:**

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y - ye^x) = \cos y - ye^x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} x\cos y - ye^x = -\sin y - e^x$$

6. Sea

$$u = x\cos y - y\sin x$$

Calcular la diferenciabilidad total $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

a) $8x^2 + 30xy$ b) $6x^3 + 30x^2y$ c) $18x^2 + 60xy$ d) $6x^3 + 60xy^2$

**Solución:**

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y - y\sin x) = \cos y - y\sin x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\cos y - y\sin x) = -x\sin y - \sin x$$

7. Sean

$$u = 3xy - 4y^2$$

$$x = 2ae^b$$

$$y = be^{-a}$$

Calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b}$$

Empleando la regla de la cadena:

a) $(\cos y - y\cos x)dx + (-x\sin y - \sin x)dy$

b) $(-\cos y + y\cos x)dx + (x\sin y + \sin x)dy$

c) $(\sin y - y\sin x)dx + (-x\cos y - \cos x)dy$

d) $(-\sin y + y\cos x)dx - (-x\cos y - \cos x)dy$

**Solución:**

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial b}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial b}) = 3y(2ae^b) + (3x-8y)e^{-a} = 6yae^b + (3x-8y)e^{-a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial b} & 6e^b(\frac{\partial y}{\partial a}a + 1(y)) + \frac{\partial(3x-8y)}{\partial a}e^{-a} + (3x-8y)(-e^{-a}) \\ &= 6e^b(-rae^{-a} + y) + (6e^b + 8be^{-a})e^{-a} + (3x-8y)(-e^{-a}) \\ &= -6abe^{(b-a)} + 6ye^b + 6e^{b-a} + 8be^{-2a} - 3xe^{-a} + 8ye^{-a}\end{aligned}$$

8. Sean

$$u = 9x^2 + 4y^2$$
$$x = a\cos(\theta)$$
$$y = a\sin(\theta)$$

Hallar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}$$

Empleando la regla de la cadena.

a) $-6abe^{(b-a)} + 6ye^b + 6e^{b-a} + 8be^{-2a} - 3xe^{-a} + 8ye^{-a}$

b) $6be^{-a} + 6ye^b - 6e^{b-a} + 8be^{(b-a)} - 3xe^{-a} + 8ye^{-a}$

c) $-6abe^{-a} + 6ye^b - 6e^{b-a} + 8be^{(b-a)} - 3xe^{-a} + 8ye^{-a}$

d) $8ae^{-a} - 6ye^b + 6e^b + 8be^{(b-a)} + 3e^{-a} + 8xe^{-a}$

**Solución:**

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial a}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial a}) = 18x\cos\theta + 8y\sin\theta = 18a\cos^2\theta + 8a\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 18\cos^2(\theta) + 8\sin^2\theta$$

# ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 13 DE NOVIEMBRE DE 2020

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa $\frac{\partial f}{\partial x}$ de $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$?

   a) $-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$
   b) $-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$
   c) $-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$
   d) $\frac{2x}{\ln(x^2+y^2)}$

   **Solución:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}((x^2+y^2)^{-1})$$

   Por regla de la cadena

$$= -\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}(2x) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

2. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la dirección de más rápido crecimiento de la función: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en el punto (1,-2,1)?

   a) $\frac{-1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
   b) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
   c) $\frac{-2}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
   d) $\frac{-1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$

   **Solución:**

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\hat{\imath} + f_y(x,y,z)\hat{\jmath} + f_z(x,y,z)\hat{k} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{\jmath}$$

$$+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{k}$$

$$\nabla f(1,-2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

3. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a el plano tangente de la superficie $z = x^2 - y^2$ en el punto (5,-4,9)?

   a) $z - 9 = 8(x-5) + 10(y+4)$
   b) $z - 9 = 5(x-8) + 4(y-8)$
   c) $z - 9 = 10(x-5) + 8(y-4)$
   d) $z - 9 = 10(x-5) + 8(y+4)$

   **Solución**

   Sea $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\hat{\imath} + f_y(x,y,z)\hat{\jmath} + f_z(x,y,z)\hat{k} = (2x)\,\hat{\imath} + (-2y)\,\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\nabla f(5,-4,9) = (2(5))\,\hat{\imath} + (-2(-4))\,\hat{\jmath} - \hat{k} = 10\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - \hat{k}$$

   $\therefore$ De lo anterior se obtiene que la ecuación del plano tangente es $10(x-5) + 8(y+4) = z - 9$

4. De las siguientes opciones ¿cuál representa al gradiente de la siguiente función $f(x,y) = e^{x^2}\cos y$?

 a) $e^{x^2}\hat{\imath} + \cos y\hat{\jmath}$
 b) $(2xe^{x^2}\cos y)\hat{\imath} + (-e^{x^2}\sin y)\hat{\jmath}$
 c) $(xe^{x^2}\cos y)\hat{\imath} - (e^{x^2}\sin y)\hat{\jmath}$
 d) $2xe^{x^2}\cos y - e^{x^2}\sin y$

**Solución:**

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath} = \left(2xe^{x^2}\cos y\right)\hat{\imath} + \left(-e^{x^2}\sin y\right)\hat{\jmath}$$

5. De las siguientes opciones ¿cuál representa al gradiente de la siguiente función $f(x,y) = \sqrt{x+y}$?

 a) $\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\jmath}$
 b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)\hat{\jmath}$
 c) $\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)\hat{\jmath}$
 d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\jmath}$

**Solución:**

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)\hat{\jmath}$$

6. De las siguientes opciones ¿cuál representa al gradiente de la siguiente función $f(x,y) = e^y\tan(2x)$?

 a) $2e^y\sec^2(2y)i + 2e^y\tan(2x)j$
 b) $e^y\sec^2(2y)i + 2e^y\tan(2x)j$
 c) $e^y\sec^2(2y)i + e^y\tan(2x)j$
 d) $2e^y\sec^2(2x)\hat{\imath} + \tan(2x)e^y\hat{\imath}$

**Solución:**

Para encontrar el gradiente de $f(x,y)$, ocupamos

$$\nabla(f) = \frac{\partial(f)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(f)}{\partial y}\hat{\imath}$$

Por lo anterior tenemos que aplicando la regla de la cadena sobre $f(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial(e^y\tan(2x))}{\partial x} = e^y\frac{\partial(\tan(2x))}{\partial x} = \sec^2(2x)\frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2e^y\sec^2(2x)$$

Ahora bien para $\frac{\partial f}{\partial y}$ obtenemos

$$\frac{\partial(e^y\tan(2x))}{\partial y} = \tan(2x)\frac{\partial(e^y}{)}\partial y = \tan(2x)e^y$$

Por lo anterior tenemos que el gradiente es:

$$\nabla(f) = \frac{\partial(f)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(f)}{\partial y}\hat{\imath} = 2e^y\sec^2(2x)\hat{\imath} + \tan(2x)e^y\hat{\imath}$$

7. ¿Cuál opción representa la recta normal a la superficie $x^2 = 12y$ en el punto $(6, 3, 3)$?

a) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{-1} z = 3$
b) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{-1} z = 3$
c) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-6}{-1} z = 3$
d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} z = 3$

**Solución:**

$$= \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{-1} z = 3$$

8. La relación de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ con el plano tangente a la superficie es:

a) Paralelos.
b) **Ortogonales**.
c) **Perpendiculares**.
d) Ninguno de los anteriores.

**Solución: Ortogonal y perpendicular.**

9. La relación de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y la línea normal es:

a) **Paralelos**.
b) **Linealmente dependientes**.
c) Ortogonales.
d) Ninguno de los anteriores.

**Solución: aralela y linealmente independiente.**

10. La relación de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y las superficies de nivel de la superficie en el punto $P_0$ es:

a) Paralelos.
b) **Normales**.
c) **Ortogonales**.
d) Ninguno de los anteriores.

**Solución: Normal y ortogonal.**

11. Dados los elementos de una base para un espacio vectorial tridimensional, ¿cuál es la forma de designar $\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$?

a) Paralelos.
b) Linealmente dependientes.
c) Ortogonales.
d) **Combinación lineal**.

**Solución: Son designados como combinación lineal.**

12. Dadas las siguientes superficies y sus vectores normales ¿cuál de las siguientes relaciones entre ellos no es posible?

    a) Linealmente dependientes y $(N_1 \times N_2)$.
    b) Paralelos y ortogonales.
    c) Todas las anteriores.
    d) **Ninguno de los anteriores**.

**Solución:**

$$F(x, y, z) = 0 \wedge G(x, y, z)$$
$$N_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0); N_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

# ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 20 DE NOVIEMBRE DE 2020

1. ¿Qué opción representa la derivada direccional de

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$$

En dirección del vector unitario:

$$U = (\cos\frac{1}{3}\pi)\hat{\imath} + (\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi)\hat{\jmath}?$$

a) $3x + 4\sqrt{3}y$

b) $\sqrt{3}x - 4y$

c) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y$

d) $3x - 4\sqrt{3}y$

**Solución:**

$$D_U f(x,y) = f_x(x,y)(\cos\frac{1}{3}\pi) + f_y(x,y)(\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi)$$
$$= 6x(\frac{1}{2}) - 8y(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3x - 4\sqrt{3}y$$

2. ¿Cuál es la opción que representa el gradiente de

$$f(x,y) = e^y \tan(2x)?$$

a) $(2e^y \sec^2 2y)i + (e^y \tan(2x))j$

b) $(2e^y \sec^2 x)i + (2e^y \tan(2y))j$

c) $(e^y \sec^2 y)i + (e^y \tan(x))j$

d) $(2e^y \tan^2 x)i + (e^y \sec(y^2))j$

**Solución:**

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath} = 2e^y \sec 2x\hat{\imath} + e^y \tan 2x\hat{\jmath}$$

3. Calcula $D_u f(-2,1,3)$ de la función

$$f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4xz$$

En dirección:

$$U = \frac{2}{7}\hat{\imath} + \frac{6}{7}\hat{\jmath} + \frac{3}{7}\hat{k}$$

a) $\frac{6}{7}$

b) $\frac{42}{7}$

c) $\frac{12}{7}$

d) $\frac{24}{7}$

**Solución:**

$$D_U f(-2,1,3) = (\frac{2}{7}\hat{\imath} + \frac{6}{7}\hat{\jmath} + \frac{3}{7}\hat{k})(-12\hat{\imath} + 2j + \hat{}14\hat{k})$$
$$= -\frac{24}{7} - \frac{12}{7} + \frac{42}{7} = \frac{6}{7}$$

4. Selecciona la opción que corresponde a una ecuación de la recta normal de la función en el punto (2,-2,3): $x^2 + y^2 + z^2 = 17$

   a) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$
   b) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-9}{3}$
   c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$
   d) $\frac{x+2}{-5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{8}$

   **Solución:**

$$\nabla F(x,y,z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$
$$\nabla F(2,-2,3) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

   El vector normal es $2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

   Ecuación del plano tangente:

$$2(x-2) - (y+2) + 3(z-3) = 0 \to 2x - 2y + 3z = 17$$
$$\therefore \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$$

   Es una ecuación de la recta normal de la función.

5. Determina las ecuaciones de la recta tangente a las funciones $x^2 + y^2 - z = 8; x - y^2 + z^2 = -2$ en el punto (2,-2,0)

   a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$
   b) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$
   c) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{20}$
   d) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{20}$

   **Solución:**

$$\nabla F(x,y,z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - \hat{k}; \nabla G(x,y,z) = \hat{i} - 2y\hat{j} - 2z\hat{k}$$
$$= n_1 = \nabla F(2,-2,0) = 4\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}; n_2 = \nabla G(2,-2,0) = \hat{i} + 4\hat{j};$$
$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{i} - \hat{j} + 20\hat{k}$$

6. Calcula la derivada direccional de $f(x,y,z) = 6x^2 - 2xy + yz$ en dirección del vector unitario:

$$U = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$$

   a) $\frac{24}{7}y + \frac{2}{7}z$
   b) $\frac{32}{7}y + \frac{2}{7}z$
   c) $\frac{32}{7}x + \frac{2}{7}z$
   d) $\frac{3}{7}x + \frac{24}{7}y + \frac{1}{7}z$

   **Solución:**

$$D_U f(x,y,z) = (12x - 2y)\frac{3}{7} + (-2x + z)\frac{2}{7} + \frac{6}{7}y$$
$$= \frac{32}{7}x + \frac{2}{7}z$$

7. Una derivada direccional de una función diferenciable se puede obtener mediante:

   a) **El producto punto del gradiente y un vector unitario**.
   b) La regla de la cadena.
   c) La diferencial total de la función.
   d) El calculo de la ecuación de la recta normal.

8. Sea f una función definida en una región R que contiene al punto $(x_0, y_0)$ que representa que exista la siguiente relación $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y)$

   a) Tiene un máximo relativo.
   b) **Tiene un mínimo relativo**.
   c) Tiene un punto silla.
   d) Ninguna de las anteriores.

9. ¿Qué condición cumple el punto $x_0$ para decir que se trata de un punto crítico?

   a) **La función no es diferenciable**.
   b) La función necesariamente debe ser diferenciable.
   c) $f(x) \geq f(x_0)$.
   d) $D_f(x_0) = 0$.

10. ¿Cuál es una condición necesaria para que una función de dos variables tenga un extremo relativo en un punto?

    a) Sus primeras derivadas parciales deben ser distintas de cero en el punto.
    b) Que sus dos derivadas parciales existan en el punto.
    c) **Sus primeras derivadas parciales deben ser cero en el punto**.
    d) Ninguna de las anteriores.

11. Un vector ortogonal a un vector tangente de toda curva C que pase por un punto $P_0$ de una superficie S se denomina:

    a) Vector ortonormal $S$ en $P_0$.
    b) **Vector normal a $S$ en $P_0$**.
    c) Vector tangente a $S$ en $P_0$.
    d) Plano tangente de $S$.

12. Es la recta que pasa por $P_0$ y tiene como números directores las componentes del vector gradiente unitario a C en $P_0$

    a) Recta normal.
    b) **Recta tangente**.
    c) Recta secante.
    d) REcta paralela.