UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

ÍTEMS DE CÁLCULO III (UNIDAD III)

RUEDAS PRADO LUISA GUADALUPE
417099677

PROFESOR

MTRA. JEANETT LÓPEZ GARCÍA

MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

SEPTIEMBRE 2021

ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 04 DE DICIEMBRE DE 2020

1. Está definida por

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{||\triangle||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \triangle_i A$$

   a) Límite de una función de una variable.
   b) Integral doble.
   c) Integral triple.
   d) Sumatoria.

   Solución: **Integral doble**.

2. Es denotada por $|| \triangle ||$ y está determinada por la longitud diagonal más grande de las subregiones rectangulares de la partición.

   a) Partición.
   b) Integral iterada.
   c) Norma de la partición.
   d) Región rectangular.

   Solución: Norma de la partición.

3. En la definición del límite de una suma de Riemann conforme la norma de la partición se aproxima a cero, ¿qué le sucede a n (número de subregiones)?

   a) Crece sin límites.
   b) Crece hasta el valor de n.
   c) Decrece sin límites.
   d) Decrece hasta el valor de n.

   Solución: Crece sin límites

4. Es el tipo más simple de región cerrada en $\mathbf{R}^2$, se define como: dos puntos diferentes A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) tales que $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$

   a) Región rectangular cerrada.
   b) Región triangular cerrada.
   c) Región rectangular abierta.
   d) Región rectangular semiabierta.

   Solución: Región rectangular cerrada

5. En matemáticas el teorema de Fubini, fue llamado así en honor al matemático italiano:

   a) Enrico Fubini.
   b) Federico Fubini.
   c) Paolo Fubini.
   d) Guido Fubini.

   Solución: **Guido Fubini**

6. Evalue la siguiente integral doble
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-x} dydx$$
a) $\frac{3}{8}$. b) $\frac{8}{3}$. c) $\frac{13}{8}$. d) $\frac{8}{13}$.

Solución:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}[\int_0^{1-x} dy]dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)dx = x - [\frac{x^2}{2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

7. Evaluar
$$\int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{x^2}(x^2-y)dxdy$$
a) $\frac{5}{4}$. b) $\frac{4}{3}$. c) $\frac{5}{8}$. d) $\frac{4}{5}$.

Solución:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{x^2}(x^2-y)dxdy = \int_{-1}^{1}[x^2y - \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{x^2}dx = 2\int_{-1}^{1}x^4dx = \frac{4}{5}$$

8. Evalue la siguiente integral doble
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-x}(x^3y)dydx$$
a) $\frac{5}{3850}$. b) $\frac{11}{3840}$. c) $\frac{5}{3850}$. d) $\frac{11}{3800}$.

Solución:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}[\int_0^{1-x}(x^3y)dy]dx = \int_0^{\frac{1}{2}}x^3[\frac{y^2}{2}]_0^{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}x^3\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^3(1-x)^2dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(x^3-2x^4+x^5)dx = [\frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{12}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^4\cdot 8} - \frac{1}{2^5\cdot 5} + \frac{1}{2^6\cdot 12} = \frac{11}{3840}$$

9. Evalue la integral doble, si R es la región del plano xy que consiste en todos los puntos (x,y) para los cuales $0 \le x \le 1$ y $1 \le y \le 3$

a) -16. b) 8. c) -8. d) 16.

Solución:

$$\int\int_R (y+x-3xy^2)dA = \int\int_R (y+x-3xy^2)dA = \int_0^1\int_1^3 (y+x-3xy^2)dydx = \int_0^1 (-24x+4)dx = -8$$

10. Evalue la integral doble, si R es la región del plano xy que consiste en todos los puntos (x,y) para los cuales $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq \pi$

    a) $-\frac{\pi^2}{2}$. b) $\frac{\pi^2}{2}$. c) $-\frac{\pi^2}{4}$. d) $\frac{\pi^2}{4}$.

Solución:

$$\int\int_R \sin^2 x \sin^2 y dA = \int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2 x \sin^2 y dydx = \int_0^\pi \sin^2 x dx \int_0^\pi \sin^2 y dy$$
$$= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx \int_0^\pi \frac{1-\cos 2y}{2}dy = \frac{\pi^2}{4}$$

11. Calcular

$$\int_0^1\int_{-1}^2 (xy^2)dydx$$

    Usando el teorema de Fubini:

    a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{8}{3}$.

Solución:

$$\int_0^1 [\int_{-1}^2 (xy^2)dy]dx = \int_0^1 [x[\frac{y^3}{3}]_{-1}^3]dx = \int_0^1 [x\frac{2^3}{3} - x\frac{(-1)^3}{3}]dx = \int_0^1 [\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}x]dx$$
$$= \int_0^1 (3x)dx = 3\cdot[\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{3}{2}$$

12. Calcular

$$\int\int_R xdA$$

    donde R es la región limitada por $y = 2x$ y $y = x^2$

    a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{4}{3}$. c) $\frac{3}{4}$. d) $\frac{8}{3}$.

Solución:

Tipo I

La integral doble con límites será

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x)dydx$$

$$\int_0^2 [\int_{x^2}^{2x} (x)dy]dx = \int_0^2 [xy]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 [x(2x) - x(x^2)]dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx$$

$$= 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

Tipo II

La integral doble con límites será

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x)dxdy$$

$$\int_0^4 [\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x)dx]dy = \int_0^4 [[\frac{x^2}{2}]_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{y}}]dy = \int_0^4 [\frac{\sqrt{y}^2}{2} - \frac{(\frac{y}{2})^2}{2}]dy = \int_0^4 [\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}]dy$$

$$= [\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{24}]_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

13. Calcular

$$\int\int_R xdA$$

donde R es la región limitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ y $y = 0$.

a) $\frac{1}{2} - \ln 2$. b) $\frac{3}{2} - \ln 2$. c) $2 - \ln \frac{1}{2}$. d) $\frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2}$.

Solución:

Al hacer el barrido vertical obtenemos la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_0^x dydx + \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} dydx$$

$$\int_0^1 [\int_0^x dy]dx + \int_1^2 [\int_0^{\frac{1}{x}} dy]dx = \int_0^1 [y]_0^x + \int_1^2 [y]_0^{\frac{1}{x}} = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 + [\ln x] = \frac{1}{2} + \ln 2$$

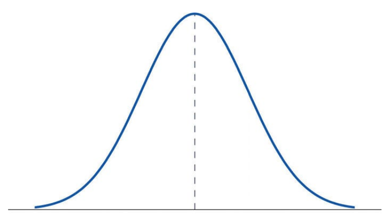
ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 08 DE ENERO DE 2021

1. El Jacobiano de x y y respecto de u y v es denotado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

   a) El Jacobiano de x y y respecto de u y v.
   b) El Jacobiano de u y v respecto de x y y.
   c) Parcial de x y y con respecto a u.
   d) Parcial de x y y con respecto a v.

2. La gráfica de la distribución normal es conocida como la campana de Gauss.



   a) La gráfica de la distribución geométrica.
   b) La gráfica de la distribución uniforme discreta.
   c) La gráfica de la distribución normal.
   d) La gráfica de la distribución Poisson.

3. Los términos **"centro de masa" y "centro de gravedad"** se utilizan como sinónimos en un campo gravitatorio uniforme, para representar el punto único de un objeto o sistema que se puede utilizar para describir la respuesta del sistema a las fuerzas y pares externos.

   a) Centro de masa.
   b) Centroide.
   c) Centro de inercia.
   d) Centro de gravedad.

4. Evalúe $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)dydx$

   a) $\frac{\pi}{4}$.
   b) $\frac{\pi}{3}$.
   c) $\frac{\pi}{6}$.
   d) $\frac{\pi}{8}$.

   Solución:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2)rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{r^4}{4}]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

5. Evalúe $\int_0^\pi \int_1^2 (y\sin(xy))dxdy$

a) 0. b) π. c) 12. d) $\frac{32}{3}$.

Solución:

$R = \{1 \le x \le 2; 0 \le y \le \pi\}$. Si primero integramos con respecto a x, obtenemos

$$\int\int_R (4-y^2)(y\sin(xy))dA = \int_0^\pi \int_1^2 (y\sin(xy))dxdy = \int_0^\pi [-\cos(xy)]_1^2 dy$$

$$= \int_0^\pi [-\cos(2y)+\cos(y)]dy = [-\frac{1}{2}\sin(2y)+\sin y]_0^\pi = 0$$

6. Evalúe $\int_0^2 \int_0^3 (4-y^2)dxdy$

a) 6. b) 3. c) 16. d) $-\frac{2}{3}$.

Solución:

$$\int\int_R (4-y^2)dA = \int_0^2 \int_0^3 (4-y^2)dxdy = \int_0^2 [(4-y^2)x]_0^3 dy = \int_0^2 3\cdot(4-y^2)dy = 3\int_0^2 (4-y^2)dy$$

$$= 3[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2 = 16$$

7. Evaluar la integral doble $\int\int_R e^{x^2+y^2}dydx$

a) $\frac{\pi}{8}(e-1)$. b) $\frac{\pi}{5}(e-1)$. c) $\frac{\pi}{7}(e-1)$. d) $\frac{\pi}{2}(e-1)$.

Solución:

R es la región limitada por el eje de las equis y la curva $y=\sqrt{1-x^2}$

Dibujamos la región de integración, con límites de integración en coordenadas rectangulares

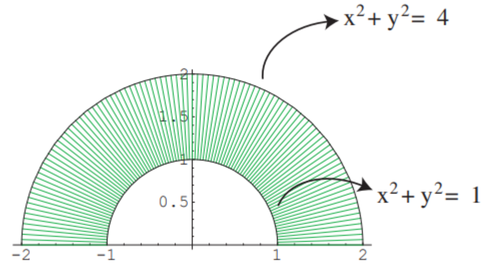
$$-1 \le x \le ; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

Y en coordenadas polares son $0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le \pi$. Y luego la integral en coordenadas polares es:

$$\int\int_R e^{x^2+y^2}dydx = \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi [\frac{e^{r^2}}{2}]_0^1 d\theta = [\frac{e-1}{2}]_0^\pi \int_0^\pi d\theta$$

$$= [\frac{e-1}{2}][\theta]_0^\pi = [\frac{e-1}{2}]\pi = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

8. ¿Cuál es la doble integral que corresponde a la región $R = \{1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq \pi\}$?



a) $\int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos(\theta) + 4(r\sin(\theta))^2) r dr d\theta$.

b) $\int_0^\pi \int_0^2 (3r\cos(\theta) + 4(r\sin(\theta))^2) r dr d\theta$.

c) $\int_1^\pi \int_0^2 (3r\cos(\theta) + 4(r\sin(\theta))^2) r dr d\theta$.

d) $\int_1^\pi \int_1^3 (3r\cos(\theta) + 4(r\sin(\theta))^2) r dr d\theta$.

Solución:

Dada la región tenemos

$$\int\int_R (3x + 4y^2) dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos(\theta) + 4(r\sin(\theta))^2) r dr d\theta$$

9. ¿Cuál es la integral doble de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = 3 + 3\sin(\theta)$?

a) $\int_0^{2\pi} \int_{3+3\sin\theta}^{\pi} r dr d\theta$.

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{3+3\sin\theta} r dr d\theta$.

c) $\int_0^{2\pi} \int_0^{3+3\sin\theta} r^2 dr d\theta$.

d) $\int_0^{\pi} \int_0^{3+3\sin\theta} r^2 dr d\theta$.

Solución:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{3+3\sin\theta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2}]_0^3 + 3\sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} [\frac{(3+3\sin\theta)^2}{2}] d\theta =$$

$$= [\frac{9\theta - 6\cos theta + 9}{2}(\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2(2\pi)}{4})]_0^{2\pi} = \frac{[}{9(2\pi)} 2 - \frac{6\cos(2\pi)}{2} + \frac{9}{2}(\frac{1(2\pi)}{2} - \frac{\sin 2(2\pi)}{4})]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{3+3\sin\theta} r dr d\theta = [9\pi - 3 + \frac{9}{2}(\pi - 0)] - [0 - 3 + \frac{9}{2}(0)] = (9\pi - 3 + \frac{9}{2}\pi) - (-3)$$

$$= 9\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{18\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = \frac{27\pi}{2} u^2$$

10. **La masa** es denotada por:

a) Masa.

b) Área.

c) Volumen.

d) Momento.

Solución:

$$M = \int\int_R \rho(x, y) dA$$

11. Calcula el volumen del sólido limitado por la superficie

$$z = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$$

y los planos $y = 2$ y $x = 3$

$$V = \int_0^3 \int_0^2 (4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}) dy dx$$

a) $\frac{371}{27}$. b) $\frac{1583}{72}$. c) $\frac{43}{2}$. d) $\frac{43}{72}$.

Solución:

Resolviendo la integral interna aplicando linealidad

$$\int_0^2 (4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}) dy = 4\int_0^2 dy - \frac{1}{9}\int_0^2 x^2 dy - \frac{1}{16}\int_0^2 y^2 dy = 8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{1}{6}$$

Al sustituir en la integral original y resolviendo

$$\int_0^3 (8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{1}{6}) dx = 8\int_0^3 dx - \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx - \frac{1}{6} dx = 24 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{43}{2}$$

12. Calcula el área del círculo de radio a

a) πa^2. b) $a(2\pi)^2$. c) $2a\pi^2$. d) $(a\pi)^2$.

Solución:

$$\int\int_R 1 \cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a r dr d\theta = \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2}]_0^a d\theta = [\frac{a^2}{2}\theta]_0^{2\pi} = \pi a^2$$

ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 15 DE ENERO DE 2021

1. Evalúa la siguiente integral triple

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xdzdydx$$

a) $\frac{1}{10}$. b) $\frac{y}{4}$. c) $\frac{x^3}{y}$. d) $\frac{16}{5}$.

Solución:

Resolviendo la primera integral interna tenemos

$$\int_0^{xy} xdz = x\int_0^{xy} dz = x[xy] = x^2y$$

Sustituimos el resultado para continuar con la integral siguiente

$$\int_0^x [x^2y]dy = x^2\int_0^x ydy = x^2[\frac{y^2}{2}]_0^x = x^2[\frac{x^2}{2}] = \frac{x^4}{2}$$

Por último sustituimos el valor anterior en la integral original para resolver la integral más externa

$$\int_0^1 [\frac{x^4}{2}]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{2}[\frac{x^5}{5}]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

2. Evalúa la siguiente integral triple

$$\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} zdzdxdy$$

a) $\frac{625}{36}$. b) $\frac{1024}{9}$. c) $\frac{729}{3}$. d) $\frac{729}{4}$.

Solución:

Resolviendo la primera integral interna tenemos

$$\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} zdz = [\frac{z^2}{2}]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} = \frac{(\sqrt{y^2-9x^2})^2}{2} = \frac{y^2-9x^2}{2}$$

Sustituimos el resultado para continuar con la integral siguiente

$$\int_0^{\frac{y}{3}} \frac{y^2-9x^2}{2}dx = \frac{1}{2}[\int_0^{\frac{y}{3}} y^2dx - 9\int_0^{\frac{y}{3}} x^2dx] = \frac{1}{2}\cdot[\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{9}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y^3}{9} = \frac{y^3}{9}$$

Por último sustituimos el valor anterior en la integral original para resolver la integral más externa

$$\int_0^9 \frac{y^3}{9}dy = \frac{1}{9}\int_0^9 y^3dy = \frac{1}{9}[\frac{y^4}{4}]_0^9 = \frac{1}{9}\cdot\frac{6561}{4} = \frac{6561}{36} = \frac{729}{4}$$

3. Sea la región acotada por $z=0$, $z=\frac{y}{2}$, $x=1$, $x=0$, $y=0$, $y=2$ calcular

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}y}(x+y-z)dzdydx$$

a) $\frac{3}{2}$. b) $\frac{2}{9}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{2}{4}$.

Solución:

Resolviendo la primera integral interna tenemos por linealidad

$$\int_0^{\frac{1}{2}y}(x+y-z)dz=\int_0^{\frac{1}{2}y}xdz+\int_0^{\frac{1}{2}y}ydz-\int_0^{\frac{1}{2}y}zdz=x\cdot(\frac{y}{2})+y\cdot(\frac{y}{2})+[\frac{z^2}{2}]_0^{\frac{1}{2}y}=\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{8}$$

Sustituimos el resultado para continuar con la integral siguiente

$$\int_0^2\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{8}dy=\int_0^2\frac{xy}{2}dy+\int_0^2\frac{y^2}{2}dy-\int_0^2\frac{y^2}{8}dy=\frac{x}{2}\int_0^2 ydy+\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dy-\frac{1}{8}y^2dy=$$

$$=\frac{x}{2}\cdot[\frac{y^2}{2}]_0^2+\frac{1}{2}\cdot[\frac{y^3}{3}]_0^2-\frac{1}{8}\cdot[\frac{y^3}{3}]_0^2=(\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{2})+(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3})-(\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3})=x+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$$

Por último sustituimos el valor anterior en la integral original para resolver la integral más externa

$$\int_0^2(x+\frac{4}{3}-\frac{1}{3})dx=\int_0^2(x)dx+\int_0^2(\frac{4}{3})dx-\int_0^2(\frac{1}{3})dx=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

4. Calcular la integral triple limitada por la superficie $z=xy$ y los planos $y=x$, $x=1$ y $z=0$

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}(xy^2z^2)dzdydx$$

a) $\frac{1024}{9}$. b) $\frac{1}{198}$. c) $\frac{1024}{198}$. d) $\frac{1}{99}$.

Solución:

Resolviendo la primera integral interna

$$\int_0^{xy}(xy^2z^2)dz=xy^2\int_0^{xy}(z^2)dz=xy^2\cdot[\frac{z^3}{3}]_0^{xy}=xy^2\cdot[\frac{x^3y^3}{3}]=\frac{x^4y^5}{3}$$

Sustituimos el resultado para continuar con la integral siguiente

$$\int_0^x(\frac{x^4y^5}{3})dy=\frac{x^4}{3}\int_0^x(y^5)dy=\frac{x^4}{3}\cdot[\frac{y^6}{6}]_0^x=\frac{x^4}{3}\cdot[\frac{x^6}{6}]=\frac{x^{10}}{18}$$

Por último sustituimos el valor anterior en la integral original para resolver la integral más externa

$$\int_0^1(\frac{x^{10}}{18})dx=\frac{1}{18}\int_0^1(x^{10})dx=\frac{1}{18}\cdot[\frac{x^{11}}{11}]=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{198}$$

5. Calcular la integral triple limitada por el plano $x+y+z=1$ y los planos coordenados

$$\int\int\int_D (1+x+y+z)^{-3}dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dzdydx$$

   a) $\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{5}{16}$.
   b) $\frac{5}{16}\ln(2)+\frac{1}{2}$.
   c) $\frac{3}{2}\ln(2)-\frac{7}{16}$.
   d) $\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{5}{16}$.

Solución:

Resolviendo la primera integral haciendo $u=1+x+y+z$

$$\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz = \int_{1+x+y}^{2}(\frac{1}{(u)^3})du = \int_{1+x+y}^{2}u^{-3}du = [\frac{u^{-2}}{-2}]_{1+x+y}^{2}$$

$$= [-\frac{1}{2u^2}]_{1+x+y}^{2} = \frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}$$

Sustituimos el resultado para continuar con la integral siguiente con $u=1+x+y$

$$\int_0^{1-x}(\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8})dy = \frac{1}{2}\int_0^{1-x}\frac{1}{2(1+x+y)^2}dy - \int_0^{1-x}\frac{1}{8}dy = \frac{1}{2}\int_{x+1}^{2}\frac{1}{2(u)^2}du - \int_{x+1}^{2}\frac{1}{8}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[-\frac{1}{u}]_{x+1}^{2} - \frac{1}{8}\cdot(-1-x)-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}) - \frac{-1-x}{8}-\frac{1}{4} = \frac{1-x}{4(x+1)}-\frac{-1-x}{8}-\frac{1}{4}$$

Por último sustituimos el valor anterior en la integral original para resolver la integral más externa

$$\int_0^1(\frac{1-x}{4(x+1)}-\frac{-1-x}{8}-\frac{1}{4})dx = \int_0^1(\frac{1-x}{4(x+1)})dx - \int_0^1(\frac{-1-x}{8})dx - \int_0^1(\frac{1}{4})dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(-1+2\ln(2)) - (-\frac{3}{16}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{5}{16}$$

6. La integral triple existe siempre que: **(f es continua)**.

   a) Se ocupan funciones de 2 variables.
   b) f es discontinua.
   c) f es continua.
   d) El límite no existe.

Solución:

Una de las condiciones necesarias para que exista la integral triple de una función es que esta sea continua.

7. **TEOREMA DE FUBINI PARA INTEGRALES TRIPLES**. Si f es continua en el paralelepípedo $Q = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)dV = \int_s^r \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

   a) Teorema de Fubini para integrales triples.
   b) Teorema de Gauss para integrales triples.
   c) Teorema de Green.
   d) Teorema de la divergencia.

8. Dada la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ señala ¿cuál es la integral correspondiente?

   a) $2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$.
   b) $2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\int_0^a dzdydx$.
   c) $\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$.
   d) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\int_0^a dydzdx$.

Solución:

Si despejamos la variable z en la ecuación original

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2$$

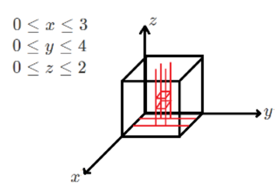
$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Ahora bien dado $r = a$ podemos decir que la integral triple es

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydy$$

9. Señala la integral triple que representa el volumen del cubo en base a la gráfica.

   a) $\int_0^3\int_0^2\int_0^4 dydzdx$.
   b) $\int_0^3\int_0^4\int_0^2 dzdydx$.
   c) $\int_0^2\int_0^3\int_0^4 dydxdz$.
   d) $\int_0^4\int_0^2\int_0^3 dxdzdy$.



Solución:

Dado que el cubo esta ubicado en el primer cuadrante del plano y cumple que $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 2$

$$V = \int_0^3\int_0^4\int_0^2 dzdydx$$

10. ¿Cuál es la integral triple de la región limitada en el primer octante por $z^2 + 4y^2 = 4$ y $x + y = 2$ proyectado en el plano YZ?

a) $\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} \int_0^{2-z} dxdzdy$.

b) $\int_0^{2\sqrt{1-y^2}} \int_0^{2-z} \int_0^2 dydxdz$.

c) $\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} dzdxdy$.

d) $\int_0^{2-z} \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} dzdydx$.

Solución:

$$V = \int \int \int_R dV$$

$$dV = dxdzdy$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} \int_0^{2-z} dxdzdy$$

ÍTEMS DEL KAHOOT DEL 22 DE ENERO DE 2021

1. **La inercia** es la propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en su estado de reposo relativo o movimiento relativo.

   a) Fuerza.
   b) Acción y reacción.
   c) Fragmentación.
   d) Inercia.

2. **El centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

   a) Centro de masa.
   b) Centro de gravedad.
   c) Centro de carga.
   d) Centro de inercia.

3. La siguiente matriz representa el Jacobiano de transformación **de coordenadas rectangulares a esféricas**.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} cos\theta sen\phi & \rho cos\theta cos\phi & -\rho sen\theta sen\phi \\ sen\theta sen\phi & \rho sen\theta cos\phi & \rho cos\theta sen\phi \\ cos\phi & -\rho sen\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 sen\phi$$

   a) ... de coordenadas rectangulares a cilíndricas.
   b) ... de coordenadas esféricas a rectangulares.
   c) ... de coordenadas rectangulares a esféricas.
   d) ... de coordenadas cilíndricas a rectangulares.

4.
$$\int_0^4 \int_0^{16-x^2} \int_0^{16-x^2-y^2} (\sqrt{x^2+y^2})dzdydx$$

   En coordenadas cilíndricas es:

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho \sin\phi \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.
   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} (r^2) dzdrd\theta$.
   c) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{r^2}} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} (r) dzdrd\theta$.
   d) $64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho \sin\phi \rho \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

   Solución:

   Tenemos que los límites de las integrales son

$$0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2} \to z = \sqrt{16-x^2-y^2} \to x^2+y^2+z^2 = 16 \to r = 4$$

De lo anterior tenemos una esfera de radio 4.

$$0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \rightarrow y = \sqrt{16-x^2} \rightarrow x^2+y^2 = 16 \rightarrow r = 4$$

Por lo que tenemos un cilindro de radio 4.

$$0 \leq x \leq 4$$

Ahora bien si tomamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ por el radio vector $r = 4$ obtenemos que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \;\;\&\;\; 0 \leq r \leq 4$$

Por último tendremos que el valor para z, estará dado por

$$z = \sqrt{16-r^2} \rightarrow 0 \leq z \leq 16 - r^2$$

Así la nueva integral en coordenadas cilíndricas es

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} \sqrt{r^2} \cdot r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2 dz dr d\theta$$

5. Calcula el volumen del sólido comprendido entre las gráficas $z = x+y$, $z = 0$, $y = x$, $x = 0$, $x = 3$.

$$V = \int\int\int_Q dV = \int_0^3 \int_0^x \int_0^{x+y} dz dy dx$$

a) $\frac{27}{2}$. b) $\frac{29}{2}$. c) $\frac{76}{5}$. d) $\frac{7}{5}$.

Solución:

Resolviendo la integral interna

$$\int_0^{x+y} 1 dz = [1 \cdot z]_0^{x+y} = x+y$$

Continuando con la integral respecto a la variable y

$$\int_0^x (x+y) dy = \int_0^x x dy + \int_0^x y dy = x \int_0^x 1 dy + \int_0^x y dy = x \cdot [1 \cdot]_0^x + [\frac{y^2}{2}]_0^x = x \cdot x + \frac{x^2}{2} = x^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{3x^2}{2}$$

$$\int_0^3 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{3}{2} \cdot [\frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{3} = \frac{27}{2}$$

6. Calcula el volumen del sólido acotado por las gráficas $z = 3$, $z = 0$, exterior a $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2-z^2 = 1$.

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{10}} \int_{\sqrt{r^2-1}}^3 r dz dr d\theta$$

a) 45π. b) $\frac{45\pi}{2}$. c) 54π. d) $\frac{2\pi}{45}$.

Solución:

Resolviendo desde la itegral interna a la externa tenemos

$$= \int_{\sqrt{r^2-1}}^{3} r dz = 3r - r\sqrt{r^2-1}$$

$$u = \sqrt{r^2-1}$$

$$= \int_1^{\sqrt{10}} [3r - r\sqrt{r^2-1}]dr = 3 \cdot \int_1^{\sqrt{10}} [r]dr - \int_1^{\sqrt{10}} [r\sqrt{r^2-1}]dr = 3 \cdot [\frac{r^2}{2}]_1^{\sqrt{10}} - \int_0^3 u^2 du$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{2} - \frac{u^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} [\frac{9}{2}]d\theta = [\frac{9}{2}\theta]_0^{2\pi} = 9\pi$$

7. Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, empleando coordenadas esféricas

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

a) $\frac{a^3}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. b) $\frac{\pi a^3}{5}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. c) $\frac{2(\pi a)^3}{5}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. d) $\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Solución:

Resolviendo desde la integral más interna

$$\int_0^a \rho^2 \sin\phi d\rho = \frac{a^3 \sin\phi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3 \sin\phi}{3} d\phi = \frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}} d\theta = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}\sqrt{2} - \pi a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{4}}{3} - \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{2a^3\pi}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

8. Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$

a) 2π. b) $\frac{\pi}{2}$. c) 5π. d) 0.

Solución:

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta; y = r\sin\theta; z = z; J(r,\theta,z) = r$$

Descripción de D en cilíndricas:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq z \leq 2 - r\cos\theta$$

$$V = \int\int\int_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2-r\cos\theta} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(2 - r\cos\theta)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r - r^2\cos\theta)drd\theta = \int_0^{2\pi}(1 - \frac{1}{3}\cos\theta)d\theta = [\theta - \frac{1}{3}\sin\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

9. Calcular el momento de inercia con respecto al eje z limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$$I_z = \int\int\int k(x^2 + y^2)dV = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^4\sin^3\phi d\rho d\theta d\phi$$

a) $\frac{256}{7}k\pi$. b) $\frac{15}{3}k\pi$. c) $\frac{256}{15}k\pi$. d) $\frac{15}{7}k\pi$.

Solución:

Resolviendo desde la integral más interna

$$\int_0^2 \rho^4\sin^3\phi d\rho = \frac{32}{5}\sin^3\phi$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{32}{5}\sin^3\phi d\theta = \frac{64}{5}\pi\sin^3\phi$$

$$k\int_0^{\pi}\frac{64}{5}\pi\sin^3\phi d\phi = \frac{256}{15}k\pi$$

10. Calcular la masa del solido acotado por la esfera de radio 3 metros y densidad $\rho(x,y,z)$

$$\rho(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$M = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-r^2}} k(r^2 + z^2)rdzdrd\theta$$

a) $\frac{15}{3}k\pi$. b) $\frac{972}{5}k\pi$. c) $\frac{172}{5}k\pi$. d) $\frac{172}{3}k\pi$.

Solución:

Resolviendo desde la integral más interna

$$\int_0^{\sqrt{9-r^2}} k(r^2 + z^2)rdz = kr(r^2\sqrt{9-r^2} + \frac{\sqrt{(9-r^2)^3}}{3})$$

$$\int_0^3 [kr(r^2\sqrt{9-r^2}+\frac{\sqrt{(9-r^2)^3}}{3})]dr = \frac{243}{5}k$$

$$\int_0^{2\pi} [\frac{243}{5}k]d\theta = \frac{486}{5}k\pi$$

$$2\cdot[\frac{486}{5}k\pi] = \frac{972}{5}k\pi$$

11. Evalúa la integral

$$\int\int\int_S xyzdV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\sin^3\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta d\phi$$

a) $\frac{\pi^7\sin^2(1)\sin^3(\phi)}{1536}\cos\phi$.

b) $\frac{\pi^6\sin^2(1)}{3072}$.

c) $\frac{1}{48}$.

d) $\frac{1}{1536}$.

Solución:

Resolviendo desde la integral más interna

$$\int_0^1 \rho^2\sin^3\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta d\rho = \frac{1}{6}\sin^3\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6}\sin^3\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\sin^3\phi\cos\phi}{12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\phi\cos\phi}{12}d\phi = \frac{1}{48}$$