UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

# ÍTEMS DE CÁLCULO IV


PROFESOR

**MTRA. JEANETT LÓPEZ GARCÍA**


**MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN**

DICIEMBRE 2021

# 1. ÍTEMS DEL 26 DE FEBRERO DE 2021

1. Dadas las ecuaciones paramétricas de la curva en $\mathbb{R} :< 8\cos t, 8\sin t >$ ¿qué tipo de gráfica se dibuja?

   a) Elipse.
   b) Circunferencia.
   c) Parábola.
   d) Recta.

   **Solución:** **Circunferencia**.

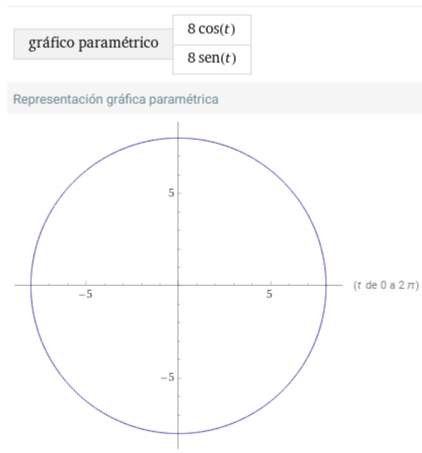


Figura 1: Ítem 01 (26 de febrero).

`Tiempo estimado: 60 segundos`

2. ¿Cómo se ve representada la curva dada por las ecuaciones paramétricas $\overrightarrow{g}(t) =< 8\cos t{+}3, 8\sin t{+}6 >$, comparada con la curva dada por $\overrightarrow{f}(t) =< 8\cos t, 8\sin t >$?

   a) Hay una traslación en los ejes.
   b) Cambia la dirección.
   c) Es otra curva.
   d) Se mantiene la dirección solamente.

   **Solución:** Hay una traslación en los ejes.

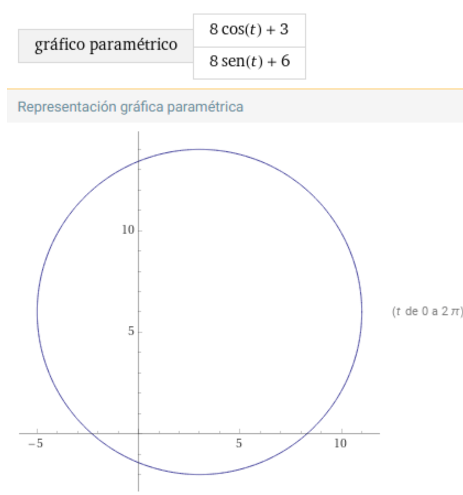


Figura 2: Ítem 02 (26 de febrero).

`Tiempo estimado: 60 segundos`

3. Dada la curva $\overrightarrow{f}(t) =< 8\cos t, 8\sin t >$, ¿cómo cambia la curva original cuando el coseno y el seno se intercambian?

   a) No cambia la gráfica.
   b) El contradominio es el mismo.
   c) Se invierte la dirección.
   d) Ninguna de las anteriores.

   **Solución:** Se invierte la dirección.

   `Tiempo estimado: 60 segundos`

4. Dada la ecuación $f(x) = 6x - 5(y = 6x - 5)$, elige entre las siguientes opciones una de sus posibles parametrizaciones.

   a) $x = t, y = 6t - 5$.
   b) $x = t + 1, y = 6t + 1$.
   c) $x = -t, y = 6t + 5$.
   d) $x = -t - 5, y = -6t + 1$.

   **Solución:** $x = t, y = 6t - 5(a); x = t + 1, y = 6t + 1(b)$ .

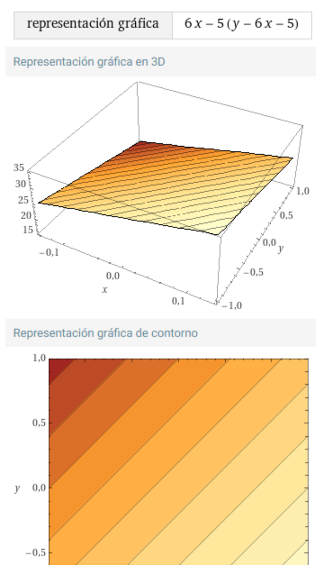


Figura 3: Ítem 04 (26 de febrero).

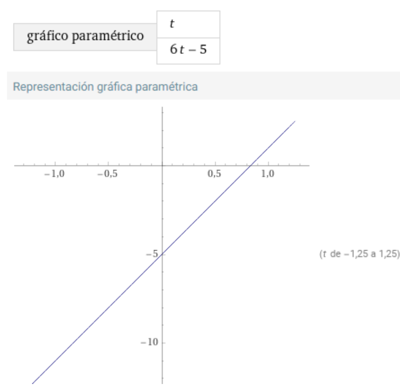


Figura 4: Ítem 04 (a) (26 de febrero).

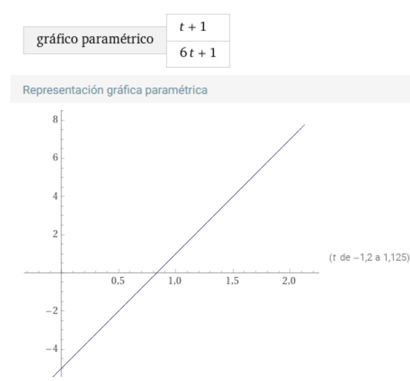


Figura 5: Ítem 04 (b) (26 de febrero).

`Tiempo estimado: 60 segundos`

5. Dada la ecuación $y = x^3$, elige entre las siguientes opciones una de sus posibles parametrizaciones.

   a) $x = 2t, y = t^2$.
   b) $x = t^3, y = t^9$.
   c) $x = t, y = t^3$.
   d) $x = \tan t, y = \tan^3 t$.

   **Solución:** $x = \tan t, y = \tan^3 t(d); x = t, y = t^3(c)$

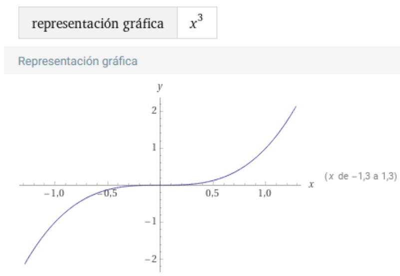


Figura 6: Ítem 05 (26 de febrero).

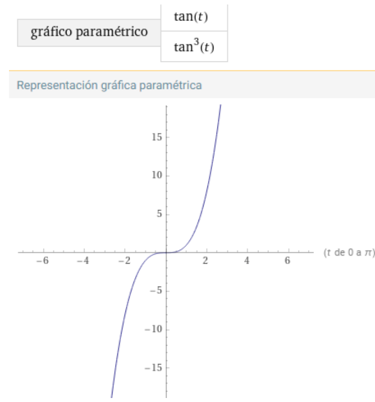


Figura 8: Ítem 05 (d) (26 de febrero).

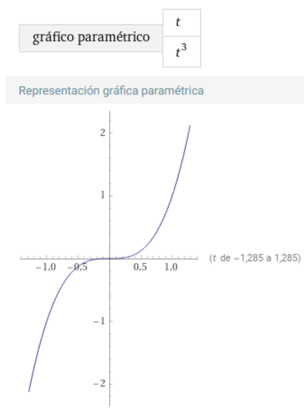


Figura 7: Ítem 05 (c) (26 de febrero).

`Tiempo estimado: 60 segundos`

6. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: “Si $y$ es función de $t$ y $x$ es función de $t$, entonces $y$ es función de $x$”.

   a) True.
   b) False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

7. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

   *La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^2$ es la recta dada por $y = x$.*

   a) True.
   b) False.

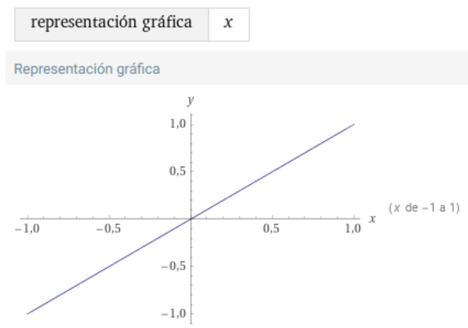


Figura 9: Ítem 07 gráfica de y=x (26 de febrero).

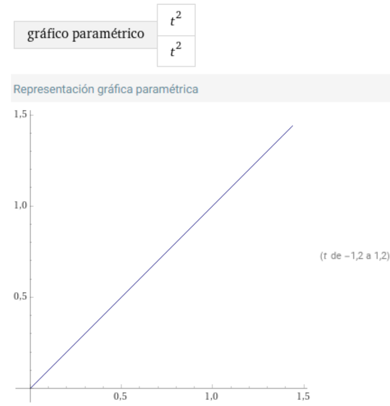


Figura 10: Ítem 07 (26 de febrero).

`Tiempo estimado: 30 segundos`

8. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas es un campo vectorial?

   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. b) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. c) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. d) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

**Solución:** A; D.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

9. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas es función real?

   a) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$. b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. c) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

**Solución:** B; C.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

10. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas **NO** es función vectorial?

    a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. b) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^7$. c) $F:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3$. d) $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$.

**Solución:** D.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

11. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas es un campo vectorial?

    a) $f(r,\theta)=3r^2\hat{\imath}+e^{\theta}\hat{\jmath}$.
    c) $F(x,y)=<x^2,e^y,\tan x>$.
    b) $F(x,y,z)=\left(5z^2+1\right)\hat{\imath}+e^y\hat{\jmath}+x\hat{k}$.
    d) $G(m)=(-2m+1)\,e^m$.

**Solución:** A; B.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

12. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas es función real?

    a) $h(t)=\left(\frac{t}{2+\sin t}\right)\hat{\imath}+t^3\hat{\jmath}-t\hat{k}$.
    c) $g(u,v,w)=e^u\cosh(vw)$.
    b) $F(t)=\frac{2\cos t}{t}$.
    d) $f(r,s)=<r\tan r,s\cos r>$.

**Solución:** B; C.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

13. De las siguientes funciones diga ¿cuál de ellas **NO** es función vectorial?

    a) $H(x, y, z, t, r) = \sec^2(t) - r^3 + \sin x + y^2 z$.
    b) $f(x, y) =< \tanh(x, y), \cos y >$.
    c) $h(\theta) =< \theta - e^\theta, \theta^2, 1 - \theta >$.
    d) $F(x, y, z, u, v, w) =< e^{ux} + v, y + z^2, \sec w - xv >$.

**Solución:** A.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

## 2. ÍTEMS DEL 05 DE MARZO DE 2021

1. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

   *Una función vectorial de una variable es aquella cuyo dominio es un conjunto de vectores y su rango son los números reales.*

   a) True. b) False.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

2. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

   *Una función vectorial de una variable real $f(t)$ es denotada por: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

   a) True. b) False.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

3. Se refiere al mapeo de escalares a vectores en el espacio.

   a) Curva parametrizada por $f$.
   b) Traza.
   c) Vector.
   d) Paramétro.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

4. Es una variable que permite identificar en una familia de elementos, a cada uno de ellos mediante su valor numérico.

   a) Curva parametrizada por $f$.
   b) Traza.
   c) Vector.
   d) Parámetro.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

5. Es definida mediante la siguiente función:

$$\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v)),$$

Es decir

$$= \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

a) Desparametrización.
b) Parametrización de Monge.
c) Curva plana.
d) Curva parametrizada por $f$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

6. ¿Cuál es una posible parametrización del siguiente gráfico?

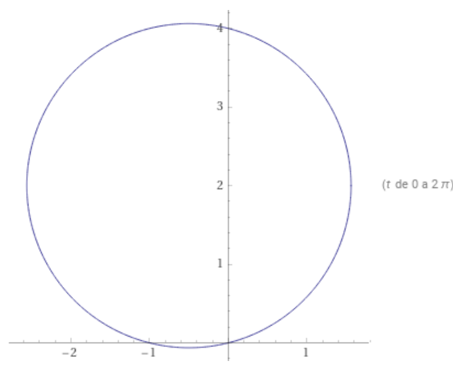


Figura 11: Ítem 06 (05 de marzo).

a)

$$= \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\cos(t) \\ y = 2 + \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

b)

$$= \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\cos(t) \\ y = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

c)

$$= \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}}{2}\sin(t) \\ y = 2 + \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\cos(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

d)

$$= \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}}{2}\sin(t) \\ y = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\cos(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

**Solución:** A.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

7. ¿Cuál es una posible parametrización del siguiente gráfico?

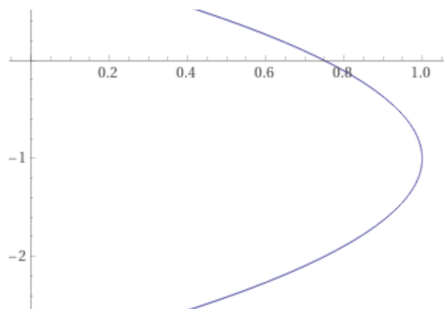


Figura 12: Ítem 7 (05 de marzo).

a) $$= \begin{cases} y = \frac{t^2}{4} + 1 \\ x = -t - 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$$

b) $$= \begin{cases} y = \frac{t^2}{4} + 1 \\ x = t - 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$$

c) $$= \begin{cases} y = t - 1 \\ x = \frac{t^2}{4} + 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$$

d) $$= \begin{cases} y = t + 1 \\ x = \frac{t^2}{4} + 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$$

**Solución:** C.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

8. ¿Cuál es la ecuación rectangular de la siguiente curva de ecuaciones paramétricas?

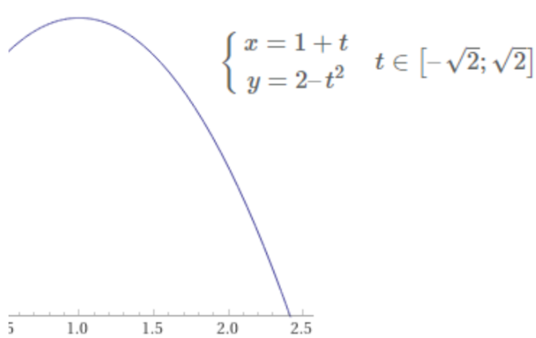


Figura 13: Ítem 7 (05 de marzo).

a) $y = 2 - (x - 1)^2$.

b) $y = 2 - (x + 1)^2$.

c) $y = 2 - (x + 1)^2$.

d) $y = -2 + (x - 1)^2$.

**Solución:** A.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

9. Se refiere a encontrar la ecuación rectangular que representa la gráfica de un conjunto de ecuaciones paramétricas:

   a) Parametrizar.
   b) Eliminación del parámetro.
   c) Parametrización de Monge.
   d) Curva parametrizada en $f$.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

10. ¿Cuál es una posible parametrización del siguiente gráfico?

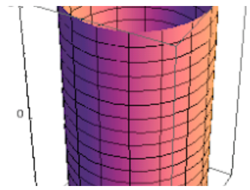


Figura 14: Ítem 10 (05 de marzo).

   a)
$$\begin{cases} x(t,v) = 3\sin(t) \\ y(t,v) = \cos(t) \\ z(t,v) = v \end{cases}$$

   b)
$$\begin{cases} x(t,v) = 3\sin(t) \\ y(t,v) = 3\cos(t) \\ z(t,v) = v \end{cases}$$

   c)
$$\begin{cases} x(t,v) = 3\sin(t) \\ y(t,v) = 3\cos(t) \\ z(t,v) = 3v \end{cases}$$

   d)
$$\begin{cases} x(t,v) = \sin(t) \\ y(t,v) = \cos(t) \\ z(t,v) = 3v \end{cases}$$

   **Solución:** B.

   `Tiempo estimado: 60 segundos`

11. El gráfico representa la parábola con las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t; y(t) = t^2; z(t) = 1$$

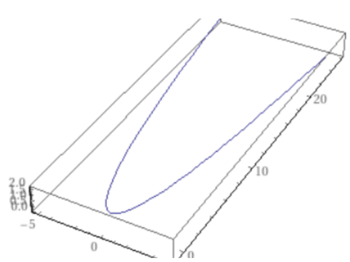


Figura 15: Ítem 11 (05 de marzo).

a) True. b) False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

12. Determina si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Si $f$, $g$ y $h$ son funciones polinomiales de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta.

a) True. b) False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

13. Determina si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Dos particulas viajan a través de las curvas de espacio $r(t)$ y $u(t)$. La intersección de sus trayectorias depende sólo de las curvas trazadas por $r(t)$ y $u(t)$, en tanto la colisión depende de la parametrización.

a) True. b) False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

14. Determina si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

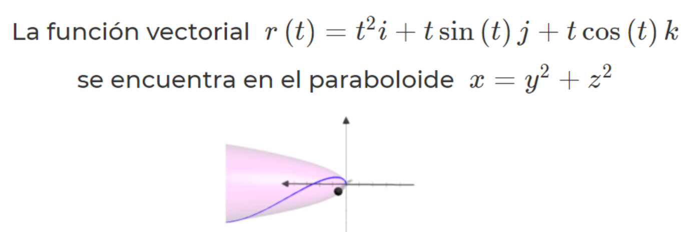


Figura 16: Ítem 14 (05 de marzo).

a) True. b) False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

# 3. ÍTEMS DEL 12 DE MARZO DE 2021

1. La siguiente definición de límite de una función vectorial hace referencia a...

Si $r$ es una función vectorial tal que

$$r(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath}$$

Entonces

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\hat{\jmath}$$

Siempre que existan los límites de $f$ y $g$ cuando $t \to a$

a) Un plano.
b) Una recta.
c) Un espacio.
d) Un vector en $\mathbb{R}^2$.

**Solución:** Un vector en $\mathbb{R}^2$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

2. Si

$$r(t) = \left(1+t^3\right)\hat{\imath} + \left(te^{-t}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\sin t}{t}\right)\hat{k}$$

escoge el valor correcto para

$$\lim_{t\to 0} r(t)$$

a) $(1,1,1)$.
b) $(1,0,1)$.
c) $(0,0,0)$.
d) $(0,0,1)$.

**Solución:** b) $(1,0,1)$.

Para comprobar lo anterior obtenemos los limites correspondientes:

$$\lim_{r\to 0}(1+t^3) = \lim_{r\to 0} 1 + \lim_{r\to 0} t^3 = 1 + 0^3 = 1$$

$$\lim_{r\to 0}(te^{-t}) = 0 \cdot e^{-0} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{\cos t}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto el vector resultante es $(1,0,1)$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

3. Si

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, t^2 + t + 3\right)$$

escoge el valor correcto para

$$\lim_{t\to 0} f(t)$$

a) $(1,3)$.
b) $(1,0)$.
c) $(3,1)$.
d) $(0,1)$.

**Solución:** a) $(1,3)$.

Si obtenemos el límite correspondiente a cada parte del vector:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{\cos t}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Si se aplica linealidad sobre la segunda función tenemos:

$$\lim_{t\to 0} t^2 + t + 3 = \lim_{t\to 0} t^2 + \lim_{t\to 0} t + \lim_{t\to 0} 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

Por lo anterior concluimos que

$$\lim_{t\to 0} = (1,3)$$

`Tiempo estimado: 60 segundos`

4. La siguiente función es continua $\forall\mathbb{R}$

$$g(t) = (\sqrt{t}, \tfrac{\sin t}{t})$$

a) True.

b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

El dominio de $\frac{\sin t}{t}$ : $t \neq 0$, i.e. la función es continua en $t > 0$ y $t < 0$. Por otra parte podemos ver que $\sqrt{t}$ es continua siempre y cuando $t \geq 0$.

5. Si la función

$$\vec{r}\,(t) = \left(2t^2\right) i - (5t)\, j + (1 - 2t)\, k$$

El valor correcto para

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t)$$

es:

a) $\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = 0i + 0j + k$.

b) $\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = 0i + 0j + 0k$.

c) $\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = i + j + k$.

d) $\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = 0i + j + 0k$.

**Solución:** a) $\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = 0i + 0j + k$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Al evaluar los límites tenemos:

$$\lim_{t \to 0}(2t^2) = 2 \lim_{t \to 0} t^2 = 2 \cdot 0^2 = 0$$
$$\lim_{t \to 0} 5t = 5 \lim_{t \to 0} t = 5 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{t \to 0}(1 - 2t) = \lim_{t \to 0}(1) - 2 \lim_{t \to 0} t = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

De lo anterior concluimos que

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}\,(t) = 0i + 0j + k$$

6. Si

$$h\,(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1}\right) i + \left(\frac{t^2 - 1}{t + 1}\right) j$$

escoge el valor correcto para

$$\lim_{t \to 1} \vec{h}\,(t)$$

es:

a) $\lim_{t \to 1} \vec{h}\,(t) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.

b) $\lim_{t \to 1} \vec{h}\,(t) = 2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.

c) $\lim_{t \to 1} \vec{h}\,(t) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

d) $\lim_{t \to 1} \vec{h}\,(t) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

**Solución:** b) $\lim_{t \to 0} \vec{h}\,(t) = 2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Al evaluar los límites tenemos:

$$\lim_{t \to 1}(\frac{t^2 - 1}{t - 1}) = \lim_{t \to 1}(\frac{(t+1)(t-1)}{t - 1}) = \lim_{t \to 1}(t + 1) = \lim_{t \to 1} t + \lim_{t \to 1} 1 = 1 + 1 = 2$$
$$\lim_{t \to 1}(\frac{t^2 - 1}{t + 1}) = \lim_{t \to 1}(\frac{(t+1)(t-1)}{t + 1}) = \lim_{t \to 1}(t - 1) = \lim_{t \to 1} t - \lim_{t \to 1} 1 = 1 - 1 = 0$$

7. Obtener si existe el siguiente límite

$$\lim_{t \to 0} \left[\left(\frac{\sin{(2t)}}{t}\right) \hat{\imath} + (t - 5)^2 \hat{\jmath} + t \ln{(t)} \hat{k}\right]$$

a) No existe el límite.

b) $i + 5j + 2k$.

c) $2i + 25j + 0k$.

d) $2i + 0j + 25k$.

**Solución:** $2i + 25j + 0k$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Si evaluamos el límite propuesto:

$$\lim_{t\to 0}[\left(\frac{\sin(2t)}{t}\hat{i}\right) + (t-5)^2\,\hat{j} + (t\ln t)\,\hat{k}] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(2t)}{t}\hat{i}\right) + \lim_{t\to 0}(t-5)^2\,\hat{j} + \lim_{t\to 0}(t\ln t)\,\hat{k}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(2t)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos(2t)\cdot 2}{1}\right) = \frac{\cos(2\cdot 0)\cdot 2}{1} = \frac{\cos 0\cdot 2}{1} = \frac{1\cdot 2}{1} = 2$$

$$\lim_{t\to 0}(t-5)^2 = (0-5)^2 = (-5)^2 = 25$$

$$\lim_{t\to 0}(t\ln t) = 0;\, si \lim_{t\to 0^+}$$

8. Obtener el valor correcto para

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{r}(t)$$

Si

$$\vec{r}\,(t) = (\cos t)\,i + (\sin t)\,j + (t)\,k$$

a) $\frac{\pi}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{\pi}{2}k$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{\pi}{4}k$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{\pi}{4}k$.

d) $\frac{\pi}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k$.

**Solución:** $\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{\pi}{4}k$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Si evaluamos el límite propuesto:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(\cos t)\,i + (\sin t)\,j + (t)\,k = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(\cos t)\,i + \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(\sin t)\,j + \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(t)\,k =$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(\cos t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(\sin t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}(t) = \frac{\pi}{4}$$

9. Dada la función

$$r\,(t) = (\cos t)\,i + (\sin t)\,j + (t)\,k$$

¿cuál es el dominio de $r(t)$?

a) $(-\infty, 0]$.

b) $\mathbb{R}$.

c) $\mathbb{R}\backslash 0$.

d) $[0, \infty)$.

**Solución:** $\mathbb{R}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

10. Si
$$f(t) = \left(t^2 + 1, 2t, \sin t\right)$$
escoge el valor correcto para
$$\lim_{t \to 0} \vec{f}(t)$$
es:

a) $(1, 1, 1)$.
b) $(1, 0, 0)$.
c) $(0, 1, 1)$.
d) $(0, 1, 0)$.

**Solución:** b) $(1, 0, 0)$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

Al evaluar los límites tenemos:
$$\lim_{t \to 0} t^2 + 1 = \lim_{t \to 0} t^2 + \lim_{t \to 0} 1 = 0^2 + 1 = 1$$
$$\lim_{t \to 0} 2t = 2 \lim_{t \to 0} t = 2 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{t \to 0} \sin t = 0$$

11. Dada la función
$$r(t) = \left(8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t}\right)$$
¿cuál es el dominio de $r(t)$?

a) $(-\infty, 0]$.
b) $\mathbb{R}$.
c) $\mathbb{R} \backslash 2$.
d) $[0, \infty)$.

**Solución:** $[0, \infty)$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

# 4. ÍTEMS DEL 19 DE MARZO DE 2021

1. De la siguiente función vectorial ¿cuál es la opción que indica el valor de
$$\overrightarrow{r}'(t) = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + 2t\hat{k}?$$

a) $-\sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + 2\hat{k}$.
b) $-\cos(t)\,\hat{i} - \sin(t)\,\hat{j} + 0\hat{k}$.
c) $\cos(t)\,\hat{i} - \sin(t)\,\hat{j} + 0\hat{k}$.
d) $\sin(t)\,\hat{i} - \cos(t)\,\hat{j} + 2\hat{k}$.

**Solución:** $-\sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + 2\hat{k}$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

Evaluando las tres derivadas obtenemos:
$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$$
$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$$
$$\frac{d}{dt}2t = 2$$

2. ¿Cuál es opción que representa a la primitiva de la siguiente función vectorial con la condición inicial dada?

$$\overrightarrow{r}'(t) = \cos(2t)\,\hat{i} - 2\sin(t)\,\hat{j} + \tfrac{1}{1+t^2}\hat{k}$$
$$\overrightarrow{r}(0) = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

a) $(\sin 2t)\,\hat{i} + (2\cos t)\,\hat{j} + (\tan t + 1)\hat{k}$.

b) $(\cos 2t)\,\hat{i} + (2\sin t)\,\hat{j} + (\tan t)\hat{k}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 3\right)\hat{i} + (2\cos t - 4)\,\hat{j} + (\arctan t + 1)\hat{k}$.

d) $\left(\frac{1}{2}\cos 2t + 3\right)\hat{i} + (\sin 2t - 4)\,\hat{j} + (\tan 2t)\hat{k}$.

**Solución:** $\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 3\right)\hat{i} + (2\cos t - 4)\,\hat{j} + (\arctan t + 1)\hat{k}$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

Evaluando las tres derivadas de la respuesta c obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 3\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{d}{dt}(3) = \cos(2t) + 0 = \cos(2t)$$
$$\frac{d}{dt}(2\cos t - 4) = \frac{d}{dt}(2\cos t) - \frac{d}{dt}(4) = 2(\cos t) - 0 = 2\cdot(-\sin t) = -2\sin t$$
$$\frac{d}{dt}(\arctan t + 1) = \frac{d}{dt}(\arctan t) + \frac{d}{dt}(1) = \frac{1}{1+t^2} + 0$$

O bien integrando la respuesta tenemos

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t + C_1$$
$$\int -2\sin t dt = -2\int \sin t dt = -2\cdot(-\cos(t)) = 2\cos t + C_2$$
$$\int \cos(2t)dt = \int \cos u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin(2x) + C_3; u = 2x$$

3. De la siguiente función vectorial ¿cuál es la opción que indica el valor de

$$\overrightarrow{r}'(t) = \frac{1}{t}\hat{i} - \hat{j} + \ln(t)\hat{k}?$$

a) $\frac{1}{t}\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{k}$.

b) $-\frac{1}{t^2}\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{k}$.

c) $\frac{1}{t^2}\hat{j} + \frac{1}{t}\hat{k}$.

d) $-t^{-2}\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{1}{t}\hat{k}$.

**Solución:** $-\frac{1}{t^2}\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{k}$ y $-t^{-2}\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{1}{t}\hat{k}$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

Evaluando las tres derivadas obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{t} = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{d}{dt} - 1 = 0$$
$$\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t}$$

4. ¿Cuáles son los intervalos para los que la epicicloide C, dada por la siguiente función es suave?

$$\vec{r}(t) = (5\cos t - \cos 5t)\hat{\imath} + (5\sin t - \sin 5t)\hat{\jmath}$$

a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

b) $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$.

c) $\left(\pi, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 2\pi\right)$.

d) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

**Solución:** $\left(0, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

Debemos probar para la epicicloide en $0 \leq t \leq 2\pi$, dada la primera derivada

$$\frac{d}{dt}[(5\cos t - \cos 5t)\hat{\imath} + (5\sin t - \sin 5t)\hat{\jmath}] = (5\frac{d}{dt}\cos t - \frac{d}{dt}\cos 5t)\hat{\imath} + (5\frac{d}{dt}\sin t - \frac{d}{dt}\sin 5t)\hat{\jmath} =$$

$$= (-5\cos t + 5\sin 5t)\hat{\imath} + (5\cos t - 5\cos 5t)\hat{\jmath}$$

Usando el intervalo $[0, 2\pi]$ e igualando $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (0, 0)$ tenemos que los intervalos donde $\vec{r}(t)$ es suave, son:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

5. De la siguiente función vectorial ¿cuál es la opción que indica el valor de

$$\overrightarrow{r}'(t) = (1 + t^3)\hat{\imath} + (te^{-t})\hat{\jmath} + (\sin(2t))\hat{k}?$$

a) $t^2\hat{\imath} + (e^{-t}t)\,\hat{\jmath} + \cos 2t\hat{k}$.

b) $3t^2\hat{\imath} + (1-t)\,e^{-t}\hat{\jmath} + (2\cos 2t)\,\hat{k}$.

c) $3t\hat{\imath} + te^{-t}\hat{\jmath} + \cos t\hat{k}$.

d) $3t^2\hat{\imath} + (e^{-t} - e^{-t}t)\,\hat{\jmath} + 2\cos 2t\hat{k}$.

**Solución:** $3t^2\hat{\imath} + (1-t)\,e^{-t}\hat{\jmath} + (2\cos 2t)\,\hat{k}$ y $3t^2\hat{\imath} + (e^{-t} - e^{-t}t)\,\hat{\jmath} + 2\cos 2t\hat{k}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Evaluando las tres derivadas obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(1 + t^3) = \frac{d}{dt}(1) + \frac{d}{dt}(t^3) = 0 + 3t^2$$

$$\frac{d}{dt}(te^{-t}) = \frac{d}{dt}(t)\cdot(e^{-t}) + \frac{d}{dt}(e^{-t})\cdot(t) = 1\cdot(e^{-t}) + (-e^{-t})\cdot t = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}(\sin(2t)) = 2\cos(2t)$$

6. De la siguiente función vectorial ¿cuál es la opción que indica el valor de

$$\overrightarrow{r}'(t) = (\sqrt{t})\hat{\imath} + (2 - t)\hat{\jmath}?$$

a) $\frac{1}{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$.

b) $\frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{t}}\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

d) $\frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

**Solución:** $\frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

Evaluando las dos derivadas obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{d}{dt}(2-t) = \frac{d}{dt}(2) - \frac{d}{dt}(t) = 0 - 1 = -1$$

$\therefore$ se obtiene el resultado como:

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

7. Para la siguiente función, ¿cuál es el valor para $\int \overrightarrow{r}(t)\,dt$?

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t))\hat{\imath} + (\sin t)\hat{\jmath} + (2t)\hat{k}$$

a) $2\sin t\hat{\imath} - \cos t\hat{\jmath} + t^2\hat{k} + C$.

b) $2\cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath} + t^2\hat{k} + C$.

c) $(\sin t)\,\hat{\imath} + (\cos t)\,\hat{\jmath} + t\hat{k} + C$.

d) $2\cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath} + 2t\hat{k} + C$.

**Solución:** $2\sin t\hat{\imath} - \cos t\hat{\jmath} + t^2\hat{k} + C$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

Evaluando las tres integrales obtenemos:

$$\int (2\cos(t))dt = 2\int (\cos(t))dt = 2\sin(t) + C_1$$

$$\int (\sin t)dt = -\cos t + C_2$$

$$\int (2t)dt = 2\int (t)dt = 2\cdot\frac{x^2}{2} = x^2 + C_3$$

8. Para la siguiente función, ¿cuál es el valor para $\int \overrightarrow{r}(t)\,dt$?

$$\vec{r}(t) = (\frac{1}{t})\hat{\imath} + (4t^3)\hat{\jmath} + (\sqrt{t})\hat{k}$$

a) $\ln t\hat{\imath} + 3t^4\hat{\jmath} + \left(\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right)\hat{k} + C$.

b) $\ln t\hat{\imath} + t^4\hat{\jmath} + \left(\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right)\hat{k} + C$.

c) $\ln t\hat{\imath} + 3t^4\hat{\jmath} + \left(\frac{2\sqrt{t^3}}{5}\right)\hat{k} + C$.

d) $\ln t\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + \left(\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right)\hat{k}$.

**Solución:** $\ln t\hat{\imath} + t^4\hat{\jmath} + \left(\frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right)\hat{k} + C$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

Evaluando las tres integrales obtenemos:

$$\int (\frac{1}{t})dt = \ln t + C_1$$

$$\int (4t^3)dt = 4\int (t^3)dt = 4\cdot\frac{t^4}{4} = t^4 + C_2$$

$$\int (\sqrt{t})dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C_3$$

9. ¿Cuál es la ecuación para la recta tangente dada por la siguiente función con $t \in \mathbb{R}$ y $t_0 = \frac{\pi}{4}$?

$$\vec{r}(t) = 4\cos t\hat{i} + 4\sin t\hat{j} + 3t\hat{k}$$

a) $x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}u; y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u; z = \frac{3\pi}{4} + 3u; u \in \mathbb{R}$.
b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{2}u; y = \sqrt{2} + \sqrt{2}u; z = \frac{\pi}{4} + 3u; u \in \mathbb{R}$.
c) $x = 2 - 2\sqrt{2}u; y = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}u; z = \frac{5\pi}{4} + u; u \in \mathbb{R}$.
d) $x = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u; y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u; z = \frac{3\pi}{4} + 3u; u \in \mathbb{R}$.

**Solución:** $x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}u; y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}u; z = \frac{3\pi}{4} + 3u; u \in \mathbb{R}$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

10. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

*El vector tangente $\vec{f}(t)$ apunta en la dirección en que la curva es trazada en $\vec{f}(t)$ cuando $t$ aumenta...*

a) True.
b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

11. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

*Una curva $C$ representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo $I$, se dice que es suave si: $f'$ y $g'$ son discontinuas en $I$ y son simultáneamente $0$.*

a) True.
b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

12. La integral

$$\int_a^b \vec{f} dt$$

Existe siempre que: cada una de las integrales $\int_a^b \vec{f}_i dt$, i=1,...,n, existen y en particular también si $\vec{f}$ es continua sobre $[a, b]$

a) True.
b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

# 5. ÍTEMS DEL 30 DE ABRIL DE 2021

1. Es un movimiento que resulta de la unión de dos movimientos: el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento vertical.

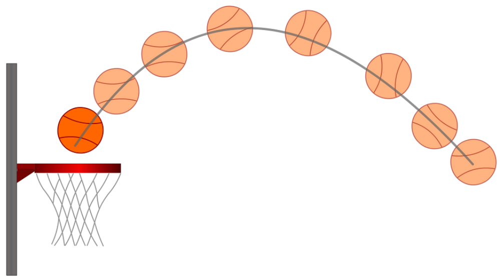

Figura 17: Ítem 01 (30 de abril).

a) Velocidad inicial.
b) Tiro parabólico.
c) MRU.
d) Ecuación parámetrica.

**Solución:** Tiro parabólico.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

2. Sea $C$ una curva suave en el intervalo abierto $I$ representado por $\vec{r}$. Se define como:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{||\vec{r'}(t)||}, \vec{r'}(t) \neq \vec{0}$$

a) Vector unitario normal.
b) Vector binomial.
c) Vector de posición.
d) Vector unitario tangente.

**Solución:** Vector unitario tangente.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

3. Calcular el valor del vector tangente de la curva dada por:

$$\vec{r}(t) = (t^2)\hat{\imath} + (t)\hat{\jmath}$$

a) $\frac{(2t)\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{4t^2+1}}$.
b) $\frac{\hat{\imath}+(2t)\hat{\jmath}}{\sqrt{4t^2+1}}$.
c) $\frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{4t^2+1}}$.
d) $\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{4t^2+1}}$.

**Solución:** $\frac{(2t)\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{4t^2+1}}$.

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}'(t)}{||\vec{F}'(t)||} = \frac{(2t)\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{(2t)^2+(1)^2}} = \frac{(2t)\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{4t^2+1}}$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

4. Calcular el valor del vector tangente de la curva dada por:

$$\vec{r}(t) = (t)\hat{\imath} + (t^2)\hat{\jmath} + (t^3)\hat{k}$$

a) $\frac{\hat{\imath}+(t)\hat{\jmath}+(t^2)\hat{k}}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. b) $\frac{\hat{\imath}+(2t)\hat{\jmath}+(3t^2)\hat{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$. c) $\frac{\hat{\imath}+(t)\hat{\jmath}+(t^2)\hat{k}}{\sqrt{1+4t^2+3t^4}}$. d) $\frac{\hat{\imath}+(4t)\hat{\jmath}+(9t^2)\hat{k}}{\sqrt{1+4t^2+3t^4}}$.

**Solución:** $\frac{\hat{\imath}+(2t)\hat{\jmath}+(3t^2)\hat{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$.

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}'(t)}{||\vec{F}'(t)||} = \frac{(1)\hat{\imath} + (2t)\hat{\jmath} + (3t^2)\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (3t)^2}} = \frac{(1)\hat{\imath} + (2t)\hat{\jmath} + (3t^2)\hat{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

5. Calcular el valor del vector tangente de la curva dada por:

$$\vec{r}(t) = (3t^2)\hat{\imath} + (t^3 - 3t)\hat{\jmath}$$

a) $\frac{2t}{t^2+1}\hat{\imath} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\hat{\jmath}$. b) $\frac{t}{t+1}\hat{\imath} + \frac{t^2-1}{t+1}\hat{\jmath}$. c) $\frac{-2t}{t^2-1}\hat{\imath} + \frac{t^2+1}{t^2-1}\hat{\jmath}$. d) $\frac{t}{t+1}\hat{\imath} + \frac{2t^2}{t+1}\hat{\jmath}$.

**Solución:** $\frac{2t}{t^2+1}\hat{\imath} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\hat{\jmath}$.

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = \frac{(6t)\hat{\imath} + (3t^2 - 3)\hat{\jmath}}{\sqrt{((6t)^2 + 3t^2 - 3)^2}} = \frac{(6t)\hat{\imath} + (3t^2 - 3)\hat{\jmath}}{\sqrt{((36t^2) + 9t^4 - 18t^2 + 9)}} \\ &= \frac{(6t)\hat{\imath} + (3t^2 - 3)\hat{\jmath}}{\sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}} = \frac{3((2t)\hat{\imath} + (t^2 - 1)\hat{\jmath})}{\sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)}} = \frac{3((2t)\hat{\imath} + (t^2 - 1)\hat{\jmath})}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}} \\ &= \frac{(2t)\hat{\imath} + (t^2 - 1)\hat{\jmath}}{\sqrt{(t^2 + 1)^2}} = \frac{(2t)\hat{\imath} + (t^2 - 1)\hat{\jmath}}{t^2 + 1} \frac{2t}{t^2 + 1}\hat{\imath} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\hat{\jmath}\end{aligned}$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

6. Si $\vec{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave $C$ y $\vec{N}(t)$ no existe, entonces, el vector aceleración $\vec{a}(t)$ se encuentra en el plano determinado por $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$.

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

7. Si $\vec{r}(t)$ es el vector posición de una curva $C$, entonces la componente tangencial esta dada por:

$$a_{\vec{T}} = \frac{||\vec{v} \times \vec{a}||}{||\vec{v}||}$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

8. Calcular el valor del vector unitario tangente en el punto $t = \frac{\pi}{3}$ de la curva

$$\vec{r}(t) = (t)\hat{\imath} + \sin(2t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$$

a) $\frac{1}{2} < 1, 0, -1 >$.

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1, -1, 0 >$.

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1, 0, -1 >$.

d) $\frac{1}{2} < 1, -1, 0 >$.

**Solución:** $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1, -1, 0 >$.

$$\vec{r}'(t) = \hat{\imath} + 2\cos(2t)\hat{\jmath} - 3\sin(3t)\hat{k} \to ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{1^2 + (2\cos(2t))^2 + (-3\sin(3t))^2}$$

$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{1 + 4\cos^2(2t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$T(t) = \frac{\hat{\imath} + 2\cos(2t)\hat{\jmath} - 3\sin(3t)\hat{k}}{\sqrt{1 + 4\cos^2(2t) + 9\sin^2(3t)}} = \frac{\hat{\imath} + 2\cos(2(\frac{\pi}{3}))\hat{\jmath} - 3\sin(3(\frac{\pi}{3}))\hat{k}}{\sqrt{1 + 4\cos^2(2(\frac{\pi}{3})) + 9\sin^2(3(\frac{\pi}{3}))}}$$

$$= \frac{\hat{\imath} + 2(-\frac{1}{2})\hat{\jmath} - 3(0)\hat{k}}{\sqrt{1 + 4(\frac{1}{4} + 9(0)}} = \frac{\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 0\hat{k}}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, -1, 0 >$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

9. Calcular el valor del vector unitario normal en el punto $t = 2$ de la curva

$$\vec{r}(t) = (4t - 5)\hat{\imath} + (3t^2 - 4)\hat{\jmath} + (5t - 2)\hat{k}$$

a) $\frac{1}{\sqrt{53136t^2 + 60516}} < -144t, 246, -180t >$.

b) $\frac{1}{\sqrt{36t^2 + 41}} < 4, 6t, 5 >$.

c) $0.294\hat{\imath} + 0.882\hat{\jmath} + 0.368\hat{k}$.

d) $-0.551\hat{\imath} + 0.47\hat{\jmath} - 0.688\hat{k}$.

**Solución:** $-0.551\hat{\imath} + 0.47\hat{\jmath} - 0.688\hat{k}$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

10. Calcular el valor del vector normal de la curva dada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t))\hat{\imath} + (\sin(t))\hat{\jmath} + (t)\hat{k}$$

a) $-\cos(t)\,\hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

b) $\cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

c) $-\cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath}$.

d) $\cos(t)\,\hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath} + (t)\,\hat{k}$.

**Solución:** $-\cos(t)\,\hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + 1\hat{k} \to ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1\hat{k}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{-\sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + 1\hat{k}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sin t\hat{\imath}}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t\hat{\jmath}}{\sqrt{2}} + \frac{1\hat{k}}{\sqrt{2}}$$

$$T'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$= ||T'(t)|| = \sqrt{-\frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\hat{\jmath}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

11. Calcular el valor del vector tangente de la curva dada por:

$$\vec{r}(t) = (t)\hat{\imath} + \sin(2t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$$

a) $\frac{\hat{\imath}+2\cos(2t)\hat{\jmath}-3\hat{k}}{\sqrt{1+4\cos^2(2t)+9\sin^2(3t)}}$.

b) $\frac{\hat{\imath}+2\cos(2t)\hat{\jmath}-3\hat{k}}{\sqrt{(1)^2+(2\cos(2t))^2+(-3\sin(3t))^2}}$.

c) $\frac{-\sin(t)\hat{\imath}+\cos(t)\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{\sin(t)+\cos(t)}}$.

d) $\frac{\sin(t)\hat{\imath}-\cos(t)\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}}$.

**Solución:** a; b.

$$\vec{r}'(t) = 1 + 2\cos(2t) - 3\sin(3t) \rightarrow ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{(1)^2 + (2\cos(2t))^2 + (-3\sin(3t))^2}$$

$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{1 + 4\cos^2(2t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$T(t) = \frac{\hat{\imath} + 2\cos(2t)\hat{\jmath} - 3\sin(3t)\hat{k}}{\sqrt{1 + 4\cos^2(2t) + 9\sin^2(3t)}}$$

`Tiempo estimado: 120 segundos`

12. Depende sólo de la componente radial de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e_r}$$

$$\vec{r}(t) = r\hat{e_r} = r(t)\hat{e_r}(t)$$

a) Posición.

b) Velocidad.

c) Base en coordenadas polares.

d) Aceleración.

**Solución:** Posición.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

# 6. ÍTEMS DEL 07 DE MAYO DE 2021

1. Representa el vector unitario normal principal $N$ si $C$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ y $T = (a, b)$ es un vector tangente unitario a $C$.

a) $T^{\perp} = (-b, a)$.

b) $T^{\perp} = (b, -a)$.

c) $T^{\perp} = (-b, -a)$.

d) $T^{\perp} = (b, a)$.

**Solución:** a;b.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

2. La longitud de una curva suave $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ recorrida exactamente una vez, es definida por:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2} dt$$

a) True.

b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

3. ¿Cuándo la longitud de arco s varía con el tiempo se le llama parámetro longitud de arco?

   a) True.

   b) False.

   **Solución:** True.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

4. Con esta función se obtiene el parámetro adecuado para estudiar las propiedades geométricas de una curva, y está definida por:

   Sea una curva $C$ dada por $\vec{r}(t)$ definida en el intervalo $[a, b]$, para $a \leq t \leq b$:

   $$\int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du$$

   a) Función longitud de arco.

   b) Vector unitario tangente.

   c) Componente tangencial de la aceleración.

   d) Parámetro longitud de arco.

   **Solución:** Función longitud de arco.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

5. Es la medida de cuán agudamente se dobla una curva y se representa por la letra griega kappa:

   a) Torsión.

   b) Longitud de arco.

   c) Aceleración.

   d) Curvatura.

   **Solución:** Curvatura.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

6. Sea la curva $C$ dada por $\vec{r}(s)$ donde $s$ es el parámetro longitud de arco y esta definida por:

   $$\left|\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|\right| = ||\mathbf{T}'(s)||$$

   a) Torsión.

   b) Longitud de arco.

   c) Aceleración.

   d) Curvatura k.

   **Solución:** Curvatura k.

   `Tiempo estimado: 30 segundos`

7. Si $\vec{r}(t)$ es el vector posición de una curva $C$, entonces el vector aceleración esta dado por:

   $$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}K + T\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 N$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

8. Es el resultado de la siguiente operación:

a) Vector normal.
b) Vector binormal.
c) Vector tangente.
d) Vector Unitario.

**Solución:** Vector binormal.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

9. Considere la curva parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \left(2t, t^2, -\frac{1}{3}t^3\right)$ para $t \in \mathbb{R}$ ¿cuál es la longitud de la curva entre $t = -3$ y $t = 3$?

a) 0. b) 30. c) 90. d) 60.

**Solución:** 30.

$$\vec{r}'(t) = 2\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} - t^2\hat{k} \rightarrow ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{(2)^2 + (2t)^2 + (-t^2)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}$$

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}dt = \int_{-3}^{3} t^2 dt + \int_{-3}^{3} 2dt = (\frac{t^3}{3} + 2t)|_{-3}^{3} = 18 + 12 = 30$$

`Tiempo estimado: 60 segundos`

10. Considere la curva parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \left(2t, t^2, -\frac{1}{3}t^3\right)$ para $t \in \mathbb{R}$. Encuentre el vector binormal $\vec{B}$, en el punto $(2, 1, -\frac{1}{3})$

a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. b) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. d) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

**Solución:** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

$$\overrightarrow{r'}(t) = (2, 2t, -t^2)$$

$$||\overrightarrow{r'}(t)|| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (-t^2)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2 + 2)^2} = t^2 + 2$$

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{2\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} - t^2\hat{k}}{t^2 + 2} = \frac{2}{t^2 + 2}\hat{\imath} + \frac{2t}{t^2 + 2}\hat{\jmath} - \frac{t^2}{t^2 + 2}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = -\frac{4t}{(t^2 + 2)^2}\hat{\imath} - \frac{2(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4t}{(t^2 + 2)^2}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{T}(1) = \frac{2}{(1)^2 + 2}\hat{\imath} + \frac{2(1)}{(1)^2 + 2}\hat{\jmath} - \frac{(1)^2}{(1)^2 + 2}\hat{k} = \frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath} - \frac{1}{3}\hat{k} = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{-\frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{\imath} - \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{k}}{\sqrt{(-\frac{4t}{(t^2+2)^2})^2 + (-\frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2})^2 + (-\frac{4t}{(t^2+2)^2})^2}} = \frac{-\frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{\imath} - \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{k}}{\sqrt{\frac{16t^2}{(t^2+2)^4} + \frac{4(t^2+2)^2}{(t^2+2)^4} + \frac{16t^2}{(t^2+2)^4}}}$$

$$= \frac{-\frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{\imath} - \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{k}}{\sqrt{\frac{32t^2}{(t^2+2)^4} + \frac{4(t^2+2)^2}{(t^2+2)^4}}} = \frac{-\frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{\imath} - \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4t}{(t^2+2)^2}\hat{k}}{\sqrt{\frac{4t^4+48t^2+16}{(t^2+2)^4}}}$$

$$\overrightarrow{N}(1) = \frac{-\frac{4(1)}{((1)^2+2)^2}\hat{\imath} - \frac{2((1)^2+2)}{((1)^2+2)^2}\hat{\jmath} - \frac{4(1)}{((1)^2+2)^2}\hat{k}}{\sqrt{\frac{4(1)^4+48(1)^2+16}{((1)^2+2)^4}}} = \frac{-\frac{4}{(3)^2}\hat{\imath} - \frac{2(3)}{(3)^2}\hat{\jmath} - \frac{4}{(3)^2}\hat{k}}{\sqrt{\frac{4+48+16}{(3)^4}}} =$$

$$= \frac{-\frac{4}{9}\hat{\imath} - \frac{6}{9}\hat{\jmath} - \frac{4}{9}\hat{k}}{\frac{\sqrt{68}}{9}} = -\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{\imath} - \frac{3}{\sqrt{17}}\hat{\jmath} - \frac{2}{\sqrt{17}}\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

11. El cilindro parabólico $y = x^2$ intersecta al plano $x + y - z = 1$ en una curva. ¿Cuál es la curvatura en dicha curva?

Hint:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

a) $\frac{\sqrt{12}}{(8t^2+4t+2)^{\frac{3}{2}}}$. b) $\frac{12}{(8t^2+4t+2)^3}$. c) $\frac{\sqrt{12}}{(8t^2+4t+2)^2}$. d) $\frac{12}{(8t^2+4t+2)^2}$.

**Solución:** $\frac{\sqrt{12}}{(8t^2+4t+2)^{\frac{3}{2}}}$.

`Tiempo estimado: 240 segundos`

12. Para la curva $\overrightarrow{r}(t) = \left(1 - t, t, t^2 - t^3\right)$. ¿Cuál es su curvatura en el punto $(1, 0, 0)$?

Hint:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. b) 1. c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$. d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

**Solución:** 1.

`Tiempo estimado: 240 segundos`

$$\overrightarrow{r'}(t) = (-1, 1, 2t - 3t^2)$$

$$\overrightarrow{r''}(t) = (0, 0, 2 - 6t)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2t - 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 - 6t \end{vmatrix} = [1(2 - 6t) - (2t - 3t^2(0)]$$

$$+[(-1)(2 - 6t) - (2t - 3t^2)(0)] + [(-1)(0) - (1)(0)] = (2 - 6t, -2, 6t, 0)$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{(2 - 6t)^2, (-2, 6t)^2, 0^2)} = \sqrt{4 - 24t + 36t^2 + 4 - 24t + 36t^2} =$$

$$= \sqrt{8 - 48t + 72t^2} = \sqrt{4 \cdot (2 - 12t + 18t^2} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - 6t + 9t^2)} =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-1 + 3t)^2}$$

$$||\overrightarrow{r'}(t)||^3 = [\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2t - 3t^2)^2}]^3 = [\sqrt{2 + (2t - 3t^2)^2}]^3$$

$$= (2 + (2t - 3t^2)^2)^{\frac{3}{2}}$$

De lo anterior y remmplazando los valores correspondientes en la fórmula de la curvatura con $t = 0$ obtenemos:

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(-1+3t)^2}}{(2+(2t-3t^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(0) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(-1+3(0))^2}}{(2+(2(0)-3(0)^2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2}}{(2+(0-(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

13. Es una medida que se representa por la letra griega Tau y se mide respecto al plano osculador

    a) Torsión. b) Longitud de arco. c) Curvatura. d) Aceleración.

    **Solución:** Torsión.

    `Tiempo estimado: 20 segundos`

14. ¿Cuál de estas operaciones con los vectores $\left\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right\}$ **NO** se cumple?

    a) $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$. b) $\vec{T} \cdot \vec{T} = \vec{1}$. c) $\vec{B} \times \vec{N} = -\vec{T}$. d) $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$.

    **Solución:** $\vec{T} \cdot \vec{T} = \vec{1}$.

    `Tiempo estimado: 30 segundos`

# 7. ÍTEMS DEL 14 DE MAYO DE 2021

1. Es el plano que pasa por $\overrightarrow{f}(t)$ determinado por los vectores $T(t)$ y $N(t)$.

    a) Plano normal.
    b) Plano rectificante.
    c) Plano osculador.
    d) Plano tangente.

    **Solución:** Plano osculador.

    `Tiempo estimado: 30 segundos`

2. Dada la curva $\overrightarrow{r}(t) = \left(t^2, \ln t, 2t\right)$ hallar el plano osculador en el punto: $P = (1, 0, 2)$

    a) $(x-1, y, z-2)(1, 2, -2) = 0$.
    b) $x + 2y - 2z = -3$.
    c) $(x+1, y, z+2)(1, 2, 2) = 0$.
    d) $x - 2y + 2z = 3$.

    **Solución:** a; b.

$$\overrightarrow{r'}(t) = (2t, \frac{1}{t}, 2)$$

$$||\overrightarrow{r'}(t)|| = \sqrt{(2t)^2 + (\frac{1}{t})^2 + 2^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2} + 4} = \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t}$$

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{t}{2t^2+1}\left(2t, \frac{1}{t}, 2\right)$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = \frac{4t}{(2t^2+1)^2}, -\frac{4t}{(2t^2+1)^2}, \frac{2-4t^2}{(2t^2+1)^2} = \frac{1}{(2t^2+1)^2}(4t, -4t, 2-4t^2)$$

$$= \frac{1}{(2t^2+1)^2}(4t, -4t, 2-4t^2)$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\sqrt{(4t)^2+(-4t)^2+(2-4t^2)^2} = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\sqrt{(16t^2+16t^2+4-16t^2+16t^4}$$

$$= \frac{1}{(2t^2+1)^2}\sqrt{16t^4+16t^2+4}$$

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{16t^4+16t^2+4}}(4t, -4t, 2-4t^2)$$

$$\overrightarrow{T}(1) = \frac{1}{2(1)^2+1}\left(2(1), \frac{1}{(1)}, 2\right) = \frac{1}{3}(2,1,2)$$

$$\overrightarrow{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{16(1)^4+16(1)^2+4}}(4(1), -4(1), 2-4(1)^2) = \frac{1}{\sqrt{16+16+4}}(4,-4,2-4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{36}}(4,-4,-2) = \frac{1}{6}(4,-4,-2)$$

$$\overrightarrow{B}(1) = \overrightarrow{T}(1) \times \overrightarrow{N}(1) = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1,2,-2)$$

$$\therefore (x-1, y, z-2)\cdot(1,2,-2) = 0; x+2y-2z = -3$$

`Tiempo estimado: 240 segundos`

3. Dada la curva $\overrightarrow{r}(t) = \hat{i} + \sin t\hat{j} + \cos t\hat{k}$ hallar el plano osculador cuando: $t = \frac{\pi}{4}$

   a) $x + y - 2y = -1$.
   
   b) $2y - z$.
   
   c) El plano osculador no está definido.
   
   d) $x = 1$.

**Solución:** $x = 1$.

`Tiempo estimado: 240 segundos`

$$\overrightarrow{r}(t) = \hat{i} + \sin t\hat{j} + \cos t\hat{k}$$

$$\overrightarrow{r'}(t) = (0, \cos(t), -\sin(t))$$

$$||\overrightarrow{r'}(t)|| = \sqrt{0^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{(0, \cos(t), -\sin(t))}{1} = (0, \cos(t), -\sin(t))$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = (0, -\sin(t), -\cos(t))$$

$$||\overrightarrow{T'}(t)|| = \sqrt{0^2, (-\sin(t))^2, (-\cos(t))^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{(0, -\sin(t), -\cos(t))}{1} = (0, -\sin(t), -\cos(t))$$

$$\overrightarrow{T}(\frac{\pi}{4}) = \left(0, \cos(\frac{\pi}{4}), -\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{N}(\frac{\pi}{4}) = \left(0, -\sin(\frac{\pi}{4}), -\cos(\frac{\pi}{4})\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{B}(\frac{\pi}{4}) = \overrightarrow{T}(\frac{\pi}{4}) \times \overrightarrow{N}(\frac{\pi}{4}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (-1, 0, 0)$$

$\therefore$ el plano osculador es $x = 1$

4. El vector binormal es un vector unitario tangente al plano osculador:

   a) True. b) False.

   **Solución:** False.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

5. El punto $f(t) + \rho(t) N(t)$ se conoce como **centro de curvatura** de $C$.

   a) True. b) False.

   **Solución:** True.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

6. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   Los **campos vectoriales** son funciones que asignan vectores a los puntos en el espacio.

   a) True. b) False.

   **Solución:** True.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

7. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   Un **campo vectorial sobre una región sólida** $Q$ en el espacio es una función $F$ que asigna un vector $F(x, y, z)$ a ciertos puntos $Q$.

   a) True. b) False.

   **Solución:** False.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

8. Un campo vectorial es continuo si y sólo si:

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$$

   a) Ninguna de sus funciones componentes es continua en un punto.
   b) Una de sus funciones componentes es continua en un punto.
   c) Cada una de sus funciones componentes es continua en un punto.
   d) Ninguna de las anteriores..

**Solución:** Cada una de sus funciones componentes es continua en un punto.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Sea $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ un vector posición. El campo vectorial $F$ es un **campo cuadrático inverso** si:

$$F(x, y, z) = \frac{k}{||r||}u$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. La siguiente gráfica ¿a qué campo vectorial representa?

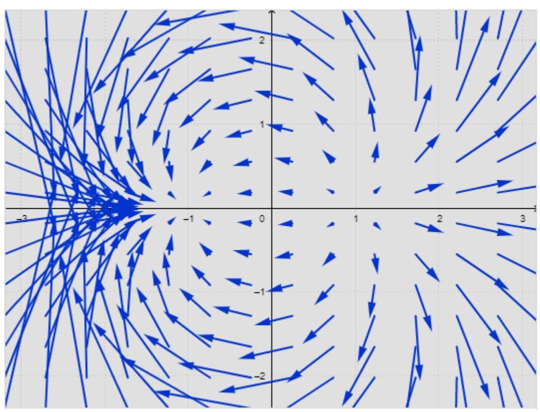


Figura 18: Ítem 10 (14 de mayo).

a) $F(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 1)\hat{i} + \frac{xy}{2}\hat{j}$.

b) $F(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 1)\hat{i} + \frac{xy}{2}\hat{j}$.

c) $F(x, y) = \ln(xy)\hat{i} + \frac{xy}{2}\hat{j}$.

d) $F(x, y) = \cos(x + y)\hat{i} + \frac{xy}{2}\hat{j}$.

**Solución:** $F(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 1)\hat{i} + \frac{xy}{2}\hat{j}$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

11. La siguiente gráfica ¿a qué campo vectorial representa?

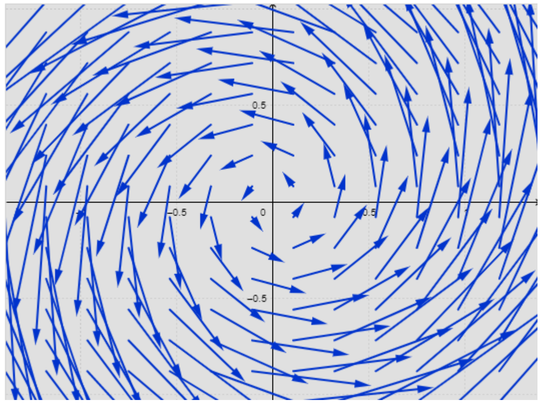


Figura 19: Ítem 11 (14 de mayo).

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\hat{\imath} - (y^2+1)\hat{\jmath}$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$.

c) $\overrightarrow{F}(x,y) = \ln x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$.

d) $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{xy}{2}i - y\hat{\jmath}$.

**Solución:** $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

12. Independientemente de la representación de la curva paramétrica $(t, s)$ ¿cuál de las siguientes no es una ecuación de Serret Frenet?:

a) $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau\overrightarrow{T}$.

b) $B' = -\tau l' N$.

c) $\frac{dN}{ds} = -kT + \tau B$.

d) $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{B}$.

**Solución:** $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau\overrightarrow{T}$.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

## 8. ÍTEMS DEL 21 DE MAYO DE 2021

1. Si $C$ está dada por $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_C xyds = \int_0^1 t^2dt$$

a) True.

b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

2. Calcular

$$\int_C \left(x^3y + \frac{y^3x}{3}\right)dx + ax^2dy$$

Siendo $C$ el contorno de la región definida por:

$$x^2 + y^2 - 2ay < 0, y > a (a > 0)$$

Cuyas parametrizaciones son:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = a \end{cases} \quad (-a \leq t \leq a)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a + \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

a) $\pi$.

b) $-\frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{4}$.

c) $0$.

d) $-\frac{a^5}{3} + a^4\cos^3 t$.

**Solución:** 0.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

Calculando $C_1$ tenemos dado $dx = 1, dy = 0$

$$\int_{C_1} \left(x^3 y + \frac{y^3 x}{3}\right) dx + ax^2 dy = \int_{-a}^{a} (t^3 \cdot a + \frac{a^3 x}{3}) dt =$$

$$a\int_{-a}^{a} t^3 dt + \frac{a^3}{3}\int_{-a}^{a} t dt = 0 + 0 = 0$$

Lo anterior dado $t$ y $t^3$ son funciones impares en el intervalo $[-a, a]$, ahora bien si $dx = -a\sin(t)dt, dy = a\cos(t)dt$, $C_2$ esta dada por:

$$\int_{C_2} \left(x^3 y + \frac{y^3 x}{3}\right) dx + ax^2 dy =$$

$$= \int_0^{\pi} [a^3\cos^3(t)(a + a\sin(t)) + \frac{a\cos(t)(a + a\sin(t))^3}{3}] \cdot (-a\sin(t$$

$$+ \int_0^{\pi} a \cdot a^2\cos^2(t) \cdot a\cos(t)dt = -\frac{a^5}{3}\int_0^{\pi} (3\sin(t)\cos^3(t) + 3\sin^2(t)\cos^3(t) + \sin(t)\cos(t)$$

$$+3\sin^2(t)\cos(t) + 3\sin^3(t)\cos(t) + \sin^4(t)\cos(t))dt + a^4\int_0^{\pi} cos^3(t)dt = 0$$

3. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Sea $f$ continua en una región que contiene la curva suave $C$. Si $C$ esta dada por $r(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, donde $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 - [y'(t)]^2} dt$$

a) True.

b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

4. Calcular $\int_C (x + y)\, ds$, donde $\sigma$ es el borde del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Cuyas parametrizaciones son:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \geq t \geq 1) \qquad\qquad C_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \quad (0 \geq t \geq 1)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (0 \geq t \geq 1)$$

a) $\sqrt{2} - 1$. b) $\sqrt{2} + 1$. c) 0. d) $-\sqrt{2} - 1$.

**Solución:** $\sqrt{2} + 1$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

Con las parametrizaciones calculamos valores para $\sigma$

$$\sigma_1(t) = (t, 0) \therefore \sigma_1'(t) = (1, 0) \therefore |\sigma_1'(t)| = 1$$
$$\sigma_2(t) = (1 - t, t) \therefore \sigma_2'(t) = (-1, 1) \therefore |\sigma_2'(t)| = \sqrt{2}$$
$$\sigma_3(t) = (0, 1 - t) \therefore \sigma_3'(t) = (0, -1) \therefore |\sigma_3'(t)| = 1$$

con lo anterior la integral de línea correspondiente es:

$$\int_C (x + y) ds = \int_{C_1} (x + y) ds + \int_{C_2} (x + y) ds + \int_{C_3} (x + y) ds$$
$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \sqrt{2} dt + \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1$$

5. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Las funciones vectoriales $r_1 = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$, $0 \leq t \leq 1$ y $r_2 = (1-t)\hat{\imath} + (1-t)^2\hat{\jmath}$, $0 \leq t \leq 1$, definen la misma curva.

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

6. Si $C(t) = \left(t, t^2, 1\right)$, la integral $\int_C zx^2 dx + xy dy + y^3 dz$ es:

a) $\frac{11}{15}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{2}{5}$. d) $\frac{15}{11}$.

**Solución:** $\frac{11}{15}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

7. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Sea $F$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que sea discontinuo sobre la trayectoria $C^1$, $\underset{\rightarrow}{C} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\int_C \underset{\rightarrow}{F} \cdot \underset{\rightarrow}{ds}$, la integral de línea de $\underset{\rightarrow}{C}$, por la fórmula:

$$\int_C \underset{\rightarrow}{F} \cdot \underset{\rightarrow}{ds} = \int_a^b \underset{\rightarrow}{F}(\underset{\rightarrow}{C}(t) \cdot \underset{\rightarrow}{C}'(t) dt$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

8. Calcular $\int_C (3x^2 + 3y^2)\, ds$, con $C$ intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $z = 0$

a) 1. b) $a^3\pi$. c) 0. d) $6a^3\pi$.

**Solución:** $6a^3\pi$.

Si sustituimos $z = 0$ en $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tenemos

$$x^2 + y^2 + (0)^2 = a^2 \to x^2 + y^2 = a^2$$

Dado

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (0)^2} = a$$

Además de que tenemos una esfera de rario r, podemos tener las sigientes parametrizaciones

$$x = a\cos(t); y = a\sin(t); z = 0; t \in [0, 2\pi]$$

De lo anterior tenemos que la integral queda de la siguiente forma:

$$\int_C (3x^2 + 3y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} [3(a\cos(t))^2 + 3(a\sin(t))^2] \cdot adt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [3(a^2\cos(t)^2 + a^2\sin(t)^2)] \cdot adt = \int_0^{2\pi} [3a^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)] \cdot adt =$$

$$= 3a^3 \int_0^{2\pi} 1dt = 3a^3 \cdot (2\pi) = 6a^3\pi$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

La integral de una formula diferencial es

$$\int_\sigma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left( F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

donde $F_1, F_2, F_3$ son las componentes del campo vectorial $F$

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. Calcular la masa M de un arco de resorte que tiene la forma de una hélice y cuya ecuación vectorial es:

$$r(t) = a\cos t\hat{i} + asent\hat{j} + bt\hat{k} \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi], \text{ y su densidad lineal es}$$
$$\delta = x^2 + y^2 + z^2$$
$$M = \int_C \delta\, ds = \int_0^{2\pi} \delta(x(t),\, y(t),\, z(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

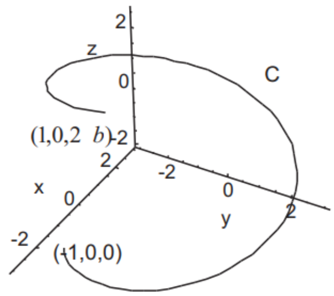


Figura 20: Ítem 10 (21 de mayo

.

a) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}b^2\right)$.

b) $2\pi\sqrt{a^2-b^2}\left(a^2 - \frac{4}{3}b^2\right)$.

c) $\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + b\right)$.

d) $2\pi\sqrt{(a+b)^2}\left(a + \frac{2}{3}b\right)$.

**Solución:** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}b^2\right)$.

$$\vec{r}'(t) = -a\sin t\hat{i} + a\cos t\hat{j} + b\hat{k}$$
$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} =$$
$$= \sqrt{a^2(1) + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$M = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2) = \sqrt{a^2+b^2}(2\pi)(a^2 + \frac{4}{3}b^2)$$

`Tiempo estimado: 120 segundos`

11. Si $C_2 = -C_1$, entonces
$$\int_{C_1} f(x,y)\, ds + \int_{C_2} f(x,y)\, ds = 0$$

a) True.

b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

12. Evaluar la integral de línea: $\int_C xy^4 ds$ siendo $C$ la parte derecha del círculo $x^2 + y^2 = 16$ rotando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

a) 0.
b) $\frac{8192}{5}$.
c) Ninguna de las opciones.
d) $\frac{4096}{5}$.

**Solución:** $\frac{8192}{5}$.

Dada la siguiente parametrización

$$x = 4\cos t; y = 4\sin t$$

y tomando un intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos lo siguiente

$$\vec{r}(t) = 4\cos t\hat{i} + 4\sin t\hat{j} \to \vec{r}'(t) = -4\sin t\hat{i} + 4\cos t$$

$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} = \sqrt{16\sin t^2 + 16\cos t2} = \sqrt{16\sin t^2 + 16\cos t2}$$
$$= \sqrt{16(\sin t^2 + \cos t2)} = \sqrt{16(1)} = \sqrt{16} = 4$$

Ahora bien de lo anterior tenemos

$$ds = ||\vec{r}'(t)||dt = 4dt$$

Si sustituimos lo anterior en la integral de línea

$$\int_C xy^4 ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t)(4\sin t)^4 \cdot 4dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^6 \cos(t)\sin^4(t)dt$$

$$= 4096 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)d(\sin t) = 4096\left(\frac{\sin^5(t)}{5}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8192}{5}$$

`Tiempo estimado: 90 segundos`

# 9. ÍTEMS DEL 28 DE MAYO DE 2021

1. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   El teorema de Green se aplica principalmente a funciones escalares.

   a) True.
   b) False.

   **Solución:** False.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

2. ¿En honor de quién recibe su nombre el teorema de Green?

   a) Gregory Green.
   b) George Green.
   c) Gustav Green.
   d) Gerald Green.

   **Solución:** George Green.

   `Tiempo estimado: 20 segundos`

3. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

   El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada $C$ en el plano $\mathbb{R}^2$, con una integral doble sobre la región encerrada por $C$.

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

4. Si $F = \left(z^3 + 2xy\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$. Calcule la integral de línea de $F$ a lo largo del perímetro del cuadrado unidad con vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{3}{4}$. d) 0.

**Solución:** 0.

Aplicandoel teorema de Green tenemos

$$\int_C (z^3 + 2xy)dx + (x^2)dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2y - 0)dxdy = \int_{-1}^{1}(4y)dy = 4\int_{-1}^{1}(y)dy = 0$$

`Tiempo estimado: 240 segundos`

5. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Al evaluar integrales de línea sobre curvas cerradas, en campos conservativos, el valor de dicha integral es 0.

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

6. Utilice el Teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva orientada de manera positiva

$$\int_C \left(xy + e^{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \ln(1+y)\right)dy$$

Donde $C$ consiste del segmento de recta que va desde $(0,0)$ a $(\pi, 0)$ y de la curva $y = \sin(x)$ con $0 \leq x \leq \pi$

a) $2\pi$. b) 0. c) $\frac{\pi}{2}$. d) $\pi$.

**Solución:** $\pi$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

7. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

El teorema de Green proporciona las fórmulas siguientes para el área de $D$:

$$A = \oint_C xdy = \oint_C ydx = \oint_C xdy + ydx$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

8. Usando el teorema de Green, hallar la integral de línea $\int_C \left(xydy - y^2dx\right)$, donde $C$ es el borde del cuadrado del primer cuadrante limitado por las rectas $x = 1$; $y = 1$, recorrido en sentido positivo.

a) 0. b) $\frac{6}{5}$. c) $\frac{3}{2}$. d) $\frac{9}{2}$.

**Solución:** $\frac{3}{2}$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Si $C$ es una curva cerrada simple que corta una región para la cual se aplica el teorema de Green, entonces, el área de la región $D$ acotada por $C = \partial D$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. Calcular el área de la región encerrada por la curva hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ con $a > 0$ o, la cual tiene la parametrización $\alpha(\theta) = (a\cos^3(\theta), a\sin^3(\theta))$, para $0 \geq \theta \geq 2\pi$.

a) $\frac{3a^2\pi}{8}$. b) 0. c) $\pi$. d) $a\pi$.

**Solución:** $\frac{3a^2\pi}{8}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2}) = 1$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}a\sin^3(t)\cdot a\cdot 3\cos^2(t)(-\sin(t))dt + \frac{1}{2}\cdot a\cos^3(t)\cdot a\cdot 3(\sin^2(t)\cos(t))dt$$

$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^4(t)\cos^2(t)dt + \cos^4(t)\sin^2(t)dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t))dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)(1)dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{3}{2}a^2\frac{\pi}{4} = \frac{3a^3\pi}{8}$$

`Tiempo estimado: 120 segundos`

11. Dada la forma vectorial del Teorema de Green

$$\oint_C F\cdot nds = \oint_C Mdy - Ndx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy$$

Indique ¿cuál es la interpretación asociada a esta forma vectorial?

a) Flujo hacia afuera del campo a través de la curva.
b) Circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj del campo a través de la curva.
c) Campo conservativo.
d) Divergencia.

**Solución:** a; d.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

12. Dada la forma vectorial del Teorema de Green

$$\oint_C F \cdot T ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Indique ¿cuál es la interpretación asociada a esta forma vectorial?

a) Rotacional.
b) Circulación el sentido contrario a las manecillas del reloj del campo a través de la curva.
c) Campo conservativo.
d) Divergencia.

**Solución:** a; b.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

## 10. ÍTEMS DEL 04 DE JUNIO DE 2021

1. Evalúe

$$\oint_C \left(-2y + x\sqrt{x^2+y^2}\right) dx + \left(y\sqrt{x^2+y^2}\right) dy$$

Donde $C$ es la curva frontera de la región acotada por las gráficas $y = 1+\sqrt{1-x^2}$ y $y = 1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, con orientación positiva.

a) 0. b) $\frac{3\pi}{2}$. c) $\pi$. d) $2\pi$.

**Solución:** $\frac{3\pi}{2}$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

2. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Si consideramos la superficie de un cono, no podemos definir un plano tangente si $(u, v) = (0, 0)$ dado

$$r_u \times r_v = (0, 0, 0)$$

$$r_u = (\cos(v), \sin(v), 1)$$

$$r_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$$

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

3. Selecciona la opción que complete el siguiente enunciado

Sea $S$ una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta $D$ en el plano $uv$. Sea $(u_0, v_0)$ un punto en $D$. Un ____________________ en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Figura 21: Ítem 03 (04 de Junio)

a) Vector normal.
b) Plano tangente.
c) Ecuación del plano.
d) Superficie paramétrica.

**Solución:** Vector normal.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

4. Dada la superficie pararmetrizada. Elija ¿cuál de los siguientes es el dominio correcto?

```
In[18]:= ParametricPlot3D[{(2 + Cos[u]) * Cos[v], (2 + Cos[u]) * Sin[v], Sin[u]}, {u, 0, 2 π}, {v, 0, 2 π}, Axes → True,
 Boxed → True]
```

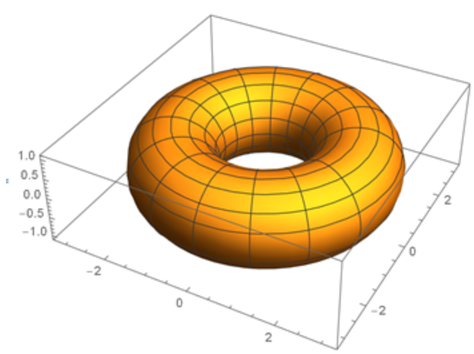


Figura 22: Ítem 04 (04 de Junio).

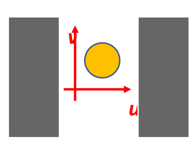


Figura 23: Ítem 04 opción a (04 de junio).

a)

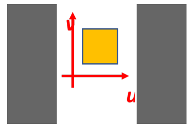

Figura 24: Ítem 04 opción b (04 de junio).

b)

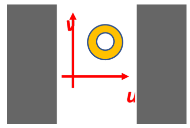

Figura 25: Ítem 04 opción c (04 de junio).

c)

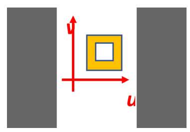

Figura 26: Ítem 04 opción d (04 de junio).

d)

**Solución:** Gráfica b.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

5. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $S$ en el punto $P$

$$S : \{z = Ln(x^2 + y^2)\},$$
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

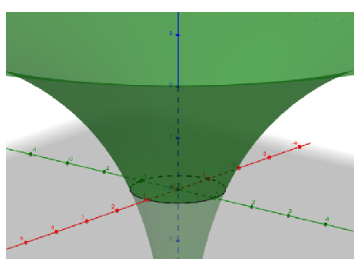

Figura 27: Ítem 5 (04 de junio).

a) $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2.$

b) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} - 2z = 4.$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 2.$

d) $-\sqrt{2x} - 2\sqrt{y} - \sqrt{2}z = 2.$

**Solución:** $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2.$

`Tiempo estimado: 120 segundos`

6. Calcula la integral de la superficie $\iint_S x^2 dS$ donde $S$ es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

a) 1. b) $\frac{4}{3}\pi$. c) $\pi$. d) $\frac{\pi}{3}$.

**Solución:** $\frac{4}{3}\pi$.

$$\vec{r}(s,t) = \cos(t)\cos(s)\hat{\imath} + \cos(t)\sin(s)\hat{\jmath} + \sin(t)\hat{k}$$

Derivando la con respecto de s y t lo anterior

$$\vec{r}_s = (-\cos(t)\sin(s))\hat{\imath} + (\cos(t)\cos(s))\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_t = (-\sin(t)\cos(s))\hat{\imath} + (-\sin(t)\sin(s))\hat{\jmath} + (\cos(t))\hat{k}$$

Aplicando el producto cruz de las derivadas parciales

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\cos(t)\sin(s) & \cos(t)\cos(s) & 0 \\ -\sin(t)\cos(s) & -\sin(t)\sin(s) & \cos(t) \end{vmatrix}$$

$$= [(\cos(t)\cos(s))(\cos(t)) - (0)((-\sin(t)\cos(s))]\hat{\imath} - [(-\cos(t)\sin(s))(-\sin(t)\sin(s))$$
$$-(\cos(t)\cos(s))(0)]\hat{\jmath} + [(-\cos(t)\sin(s))(-\sin(t)\sin(s))$$
$$-(\cos(t)\cos(s))(-\sin(t)\sin(s))]\hat{k} = (\cos^2(t)\cos(s))\hat{\imath} - (-\cos^2(t)\sin(s))\hat{\jmath}$$
$$+(\cos(t)\sin(t)\sin^2(s) + \cos(t)\sin(t)\cos^2(s))\hat{k} = (\cos^2(t)\cos(s))\hat{\imath} + (\cos^2(t)\sin(s))\hat{\jmath}$$
$$+(\cos(t)\sin(t)(\sin^2(s) + \cos^2(s)))\hat{k} = (\cos^2(t)\cos(s))\hat{\imath} + (\cos^2(t)\sin(s))\hat{\jmath}$$
$$+(\cos(t)\sin(t)(1))\hat{k}$$

Posteriormente se calcula $||\vec{r}_t \times \vec{r}_s||$

$$||\vec{r}_t \times \vec{r}_s|| = \sqrt{\cos^4(t)\cos^2(s) + \cos^4(t)\sin^2(s) + \cos^2(t)\sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{\cos^4(t)(\cos^2(s) + \sin^2(s)) + \cos^2(t)\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^4(t)(1) + \cos^2(t)\sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)(1)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

$\therefore dS = \cos(t)dsdt$. Por esto tenemos entonces

$$x(s,t) = \cos(t)\cos(s) \to \iint_S x^2 dS = \iint_S \cos^2(t)\cos^2(s)\cos(t)dsdt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\cos^2(s)\cos(t)dsdt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\cos^2(s)dsdt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\int_0^{2\pi} \cos^2(s)dsdt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)dt \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(s)ds$$

$$\cos^3(t) = \cos^2(t)\cos(t) = \cos(t)(1 - \sin^2(t)) = \cos(t) - \cos(t)\sin^2(t)$$

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2s$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) - \cos(t)\sin^2(t))dt \cdot \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2s)ds = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) \cdot \pi$$

$$= (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) \cdot \pi = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{4}{3}\pi)$$

`Tiempo estimado: 60 segundos`

7. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Sean $x, y, z$ funciones de $u, v$, discontinuas en un dominio $D$ del plano $uv$. La superficie paramétrica de puntos $(x, y, z)$ esta dada por:

$$r(u,v) = x(u,v)\hat{\imath} + y(u,v)\hat{\jmath} + z(u,v)\hat{k}$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

8. Calcula la integral de la superficie $\iint_S ydS$ donde $S$ es la superficie $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

   a) $\frac{13}{3}\sqrt{2}$. b) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ c) 0. d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Solución:** $\frac{13}{3}\sqrt{2}$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

   Sea $S$ una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea $R$ su proyección sobre el plano $xy$. Si $g, gx, gy$ son continuas en $R$ y $f$ es continua en $S$, entonces la integral de superficie de $f$ sobre $S$ es

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_R f(x, y, z)\sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 - 1}$$

   a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. Calcula la integral de la superficie $\iint_S (z - x)dS$ donde $S$ es la superficie $z = x + y^2$ sobre el triángulo $D$ dado por $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$

    a) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$. b) $\frac{1}{5}\sqrt{6} + \frac{1}{30}\sqrt{2}$ c) 0. d) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

**Solución:** $\frac{1}{5}\sqrt{6} + \frac{1}{30}\sqrt{2}$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

11. Halle el área de la superficie de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ comprendida entre los planos $z = 0$, $x = 0$, $\sqrt{3}y - 3x = 0$

    a) 1. b) $\frac{\pi}{72}\left(\sqrt{(17)^3} - 1\right)$. c) $\pi$. d) $\frac{\pi}{3}\left(5^{\frac{2}{3}} - 1\right)$.

**Solución:** $\frac{\pi}{72}\left(\sqrt{(17)^3} - 1\right)$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

12. Halle el área de la parte del plano de ecuación $x + y + z = 1$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$

    a) $4\sqrt{3}\pi$. b) 0. c) $\pi$. d) $\sqrt{2}\pi$.

**Solución:** $4\sqrt{3}\pi$.

`Tiempo estimado: 120 segundos`

13. Dada la forma paramétrica de la superficie (banda de Möbius)

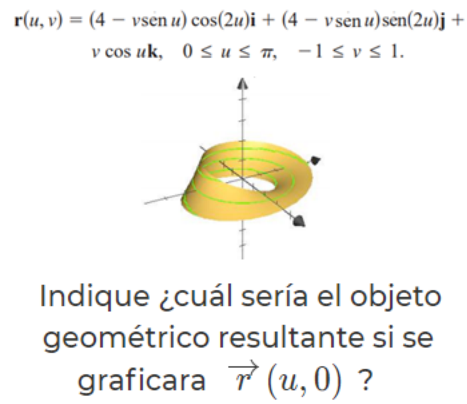


Figura 28: Ítem 13 (04 de junio)

a) Curva.
b) Plano.
c) Curva reticular.
d) Recta tangente.

**Solución:** Curva reticular.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

14. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Suponga $S$ la esfera de radio $R$.

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

a) True.
b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

15. Resuelva usando el resultado válido del ejercicio anterior:

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

Para calcular la integral de superficie, con $S$ la esfera de radio $R$:

$$\iint_S x^2 dS$$

a) $\frac{4}{3}\pi R^3$.
b) $\frac{4}{3}\pi R^4$.
c) $8\pi R$.
d) $4\pi R^2$.

**Solución:** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

El volumen de una esfera es bien sabido esta dado por:

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

`Tiempo estimado: 30 segundos`

16. Tomando en consideración la pregunta anterior, ¿cuál sería la solución del problema siguiente?

Una superficie metálica $S$ tiene la forma de un hemisferio $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde $(x, y)$ satisface $0 \leq x^2 - y^2 \leq R^2$. La densidad de la masa en $(x, y, z) \in S$, está dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Hallar la masa total de $S$

a) $\frac{4}{3}\pi R^3$. b) $\frac{4}{3}\pi R^4$. c) $8\pi R$. d) $4\pi R^2$.

**Solución:** $\frac{4}{3}\pi R^4$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

# 11. ÍTEMS DEL 11 DE JUNIO DE 2021

1. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

En una superficie **orientable**, el vector gradiente proporciona una manera adecuada para hallar un vector unitario normal.

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

2. Selecciona la posible parametrización de la superficie plana cuyo borde es la curva dada por:

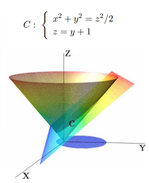


Figura 29: Ítem 2 (11 de junio).

a) $r(x, y) = (x, y, y + 1), (x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1\}$.
b) $r(x, y) = (x, y, y), (x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R} : x + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 2\}$.
c) $r(x, y) = (x, y), (x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R} : x + (y - 1)^2 \leq 2\}$.
d) $r(x, y) = (x, y + 1), (x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R}^2 : \frac{(y-1)^2}{2} \leq x\}$.

**Solución:** $r(x, y) = (x, y, y + 1), (x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1\}$.

Sea S la superficie del plano $z = y + 1$ limitada por $C$; se puede parametrizar como

$$r(x, y) = (x, y, y + 1)$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) =\in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1\}$$

`Tiempo estimado: 60 segundos`

3. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

El volumen del fluido que atraviesa la superficie $S$ por unidad de tiempo o (**flujo a través de** $S$) está dada por la integral de superficie:

$$\iint_S F \cdot N dS.$$

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

4. Halle el área de la superficie de ecuación $x = 2y^2 + 2z^2$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $y^2 + z^2 = 9$

a) $\frac{\pi}{24}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right)$. b) 1. c) $\frac{1}{2}$. d) 4.

**Solución:** $\frac{\pi}{24}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

5. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

La integral de superficie con $F$ campo vectorial

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_R F \cdot [-g_x(x,y)\hat{i} - g_y(x,y)\hat{j} + \hat{k}] dA$$

es orientada hacia **ABAJO**.

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

6. Calcule el flujo del fluido que atraviesa $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ siendo $N$ la normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera.

a) $\frac{\pi}{24}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right)$. b) 1. c) $\frac{1}{2}$. d) 4.

**Solución:** $\frac{\pi}{24}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

7. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Si la superficie suave orientable $S$ está dada en forma paramétrica por

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} dS = \iint_D \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})\, dA$$

El vector esta dirigido hacia el **EXTERIOR** de la curva

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

8. Calcule el flujo de $F(x, y, z) = 3z\hat{i} - 4\hat{j} + y\hat{k}$ a través de $S: z = 1 - x - y$ en el primer octante, donde $N$ es el vector normal unitario ascendente a $S$ y cuya proyección este en el plano $XY$

a) $-\frac{4}{3}$. b) 0. c) $\frac{4}{3}\pi$. d) $\pi$.

**Solución:** $-\frac{4}{3}$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Si $z = g(x, y)$ una superficie orientable se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y)$$

que corresponde a una superficie de nivel. Entonces $S$ puede orientarse por el vector unitario normal:

$$N = \frac{-\bigtriangledown G(x, y, z)}{||-\bigtriangledown G(x, y, z)||} = \frac{g_x(x, y) + g_y(x, y)\hat{j} - \hat{k}\hat{i}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}}$$

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. Calcule, aplicando el teorema de Stokes, la integral

$$\int_C (y-1)dx + x^2dy + ydz$$

Donde

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2} \\ z = y + 1 \end{cases}$$

a) $-\sqrt{2}\pi$. b) 0. c) $\pi$. d) $\sqrt{2}\pi$.

**Solución:** $-\sqrt{2}\pi$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

11. Dada una superficie $S: y = g(x, z)$ con $\mathbb{R}$ su proyección en el plano $XZ$. Elija ¿cuál sería la expresión que mejor se ajusta para calcular la integral de superficie de un campo escalar?

a) $\iint_S f dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2} dudv$.

b) $\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_R f(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_z(x, z)]^2} dA$.

c) $\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v))\, ||T_u \times T_v||\, dudv$.

d) $\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_R f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} dA$

**Solución:** $\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_R f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_z(x,z)]^2}dA$.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

12. Si $S: x = g(y,z)$ es una superficie orientable con **vector unitario normal hacia arriba**, elija de las siguientes opciones el vector normal que se ajuste para calcular una integral de superficie para campos vectoriales:

a) $\vec{N} = \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$.

b) $\vec{N} = \frac{\hat{i} - g_y(y,z)\hat{j} - g_z(y,z)\hat{k}}{\sqrt{1+[g_y(y,z)]^2+[g_z(y,z)]^2}}$.

c) $\vec{N} = \frac{-\bigtriangledown G(x,y,z)}{||-\bigtriangledown G(x,y,z)||}$.

d) $\vec{N} = \frac{-\bigtriangledown G(x,y,z)}{||\bigtriangledown G(x,y,z)||}$.

**Solución:** $\vec{N} = \frac{\hat{i} - g_y(y,z)\hat{j} - g_z(y,z)\hat{k}}{\sqrt{1+[g_y(y,z)]^2+[g_z(y,z)]^2}}$ ; $\vec{N} = \frac{-\bigtriangledown G(x,y,z)}{||\bigtriangledown G(x,y,z)||}$.

Podemos encontrar el vector unitario normal $\vec{N}$ al dividir la derivada del vector unitario tangente por la magnitud de la derivada del vector unitario tangente. Es decir

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||} = \frac{\vec{T}'(t)}{\sqrt{\vec{T}'(t)}}$$

Además sabemos que

$$\bigtriangledown G = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} = \pm\frac{\partial G}{\partial x}\hat{i} \pm \frac{\partial G}{\partial y}\hat{j} \pm \frac{\partial G}{\partial z}$$

`Tiempo estimado: 20 segundos`

13. Si se deseara calcular el flujo exterior de calor a través de la superficie, señale aquellas superficies que requieren calcular **TRES** integrales de la forma

$$\iint_{\Phi} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Phi} \vec{F} \cdot \vec{N} ds$$

**Hint:** Identifique ¿cuál de ellas requiere TRES vectores normales exteriores para caracterizarla?

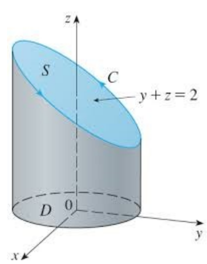


Figura 30: Ítem 13 opción a (11 de junio).

a)

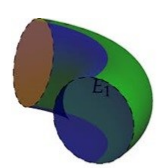


Figura 31: Ítem 13 opción b (11 de junio).

b)

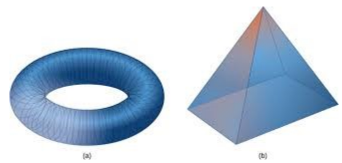


Figura 32: Ítem 13 opción c (11 de junio).

c)

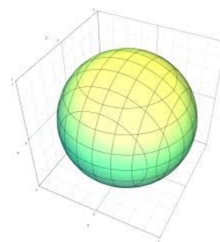

Figura 33: Ítem 13 opción d (11 de junio).

d)

**Solución:** A; B.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

14. Hallar el **flujo de F dirigido hacia el exterior** a través de la **superficie del sólido limitado** por las gráficas de las ecuaciones:

$$F(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

**Hint:** Utilice el **Teorema de la Divergencia** (Gauss)

a) $32\pi$.　b) 0.　c) $108\pi$.　d) $48\pi$.

**Solución:** $108\pi$.

`Tiempo estimado: 60 segundos`

## 12. ÍTEMS DEL 18 DE JUNIO DE 2021

1. La siguiente fórmula representa al teorema de...

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{D} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{F}}_{\text{DIVERGENCIA}} dV$$

Figura 34: Ítem 01 (18 de junio).

a) Green.
b) Stokes.
c) Gauss.
d) Ninguna de las opciones.

**Solución:** Gauss.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

2. Calcula el flujo del rotacional del siguiente campo usando el teorema de Stokes

$$F(x,y,z) = \left(y - 2x, yz^2, y^2 z\right) \ ,$$
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\} \ , \ z > 1$$

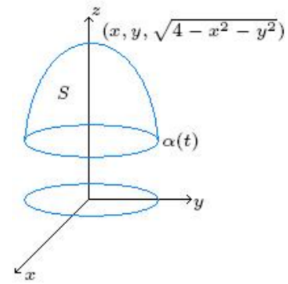


Figura 35: Ítem 02 (18 de junio).

a) $-3\pi$. b) 0. c) $\pi$. d) $-\pi$.

**Solución:** $-3\pi$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

3. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple $S \in \mathbb{R}^3$, con la integral sobre una superficie de la curva $S$ como frontera.

a) True. b) False.

**Solución:** True.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

4. Calcula, utilizando el teorema de Stokes:

$$\int_S (2x + y - z)dx + (2x + z)dy + (2x - y - z)dz$$

Siendo $S$ una parametrización de la curva intersección de las superficies

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4; 2x - z = 0$$

a) 0. b) $\pi$. c) $\frac{5\pi}{\sqrt{2}}$. d) $\frac{\pi}{2}$.

**Solución:** $\frac{\pi}{2}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

5. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

La fórmula

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \nabla \times F \cdot dS$$

Representa el teorema de Green.

a) True.
b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

6. Determine el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie $S$ aplicando el teorema de Stokes.

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$$

$$S : z = 1 - x^2$$

$$0 \leq y \leq 1; z \geq 0$$

a) $\pi$.
b) 0.
c) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$.
d) $-\pi$.

**Solución:** 0.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

7. La integral de superficie de un campo vectorial $\vec{F}$ también se llama ________ $\vec{F}$ a través de $S$ y esta representada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \left(\vec{T_u} \times \vec{T_v}\right) dudv = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

a) La circulación.
b) El flujo.
c) El trabajo.
d) Ninguna de las opciones.

**Solución:** El flujo.

`Tiempo estimado: 30 segundos`

8. Determine el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie $S$ aplicando el teorema de Stokes.

$$\vec{F}(x, y, z) = 3y\hat{i} + 4z\hat{j} - 6x\hat{k}$$

Y la parte superior del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

Situada sobre el plano $XY$ orientada hacia arriba.

a) $\frac{\pi}{2}$.
b) 0.
c) $-27\pi$.
d) $-\pi$.

**Solución:** $-27\pi$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`

9. Determina si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial discontinuo definido
sobre una curva suave $C$ dada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$.
La integral de línea de $\vec{F}$ sobre $C$ está dada por:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot dt = \int_a bMdx + Ndy$$

a) True. b) False.

**Solución:** False.

`Tiempo estimado: 20 segundos`

10. Calcular por el teorema de Stokes la integral

$$\oint_c 3yz^2dx + xz^2dy + 4xyzdz$$

Siendo $C$ la intersección del paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

Con el cilindro

$$x^2 + y^2 = y$$

a) $-\frac{5\pi}{16}$. b) 0. c) $-\frac{\pi}{4}$. d) $\frac{\pi}{4}$.

**Solución:** $-\frac{5\pi}{16}$.

`Tiempo estimado: 90 segundos`