Minimização De Funções Booleanas

Apesar de não existir um critério geral para obtenção de forma mais simples de uma expressão booleana, é possível definir uma forma simples a qual chegamos por métodos sistemáticos (representação em 2 níveis).

Formas Padrão de Função Booleanas

1. **Literal –** Uma variável qualquer ou seu complemento

   Ex.: $A, \overline{A}, B, \overline{B},$ etc

2. **Termo Produto -** Uma série de variáveis relacionadas pela função "E".

   Ex.: $A\overline{B}C \quad A\overline{B}\overline{C}D,$ etc.

3. **Termo Soma** – Uma série de literais relacionadas pela função "OU".

   Ex.: $A + B + \overline{C}, \quad A + \overline{D},$ etc.

4. **Termo Normal** – Um termo produto ou termo soma onde nenhuma variável aparece mais de uma vez.

   Ex.:
   $$A B \overline{C} A \rightarrow A B \overline{C}$$
   $$A \overline{C} D C \rightarrow 0$$
   $$A + B + C + \overline{B} \rightarrow 1$$

5. Soma de produtos

$$Ex.\ :\ f(A, B, C, D, E) = (\overline{AC} + \overline{D})\,.\,(\overline{B + CE}) \qquad \text{DE MORGAN}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}\,.\,\overline{CE}) \qquad \overline{(a + b)} = \overline{a}\,.\,\overline{b}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}.\,(\overline{C} + \overline{E})\,) \qquad \overline{(a - b)} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{E})$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\ +\ \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E} \quad \text{- SDP}$$

Seja agora a função:

$$f\,(A, B, C, D) = A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C} + B\,C\,D + \overline{A}\,B\,D$$

$$= A\,\overline{B}\,C(D + \overline{D}) + A\,\overline{C}(B + \overline{B}) + B\,C\,D\,(A + \overline{A}) + \overline{A}\,B\,D\,(C + \overline{C})$$

$$= A\,\overline{B}\,C\,D + A\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}(D + \overline{D}) + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,(D + \overline{D}) + A\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$$

$$= A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D$$

Nesta expressão, que é uma soma de produtos, todos os termos contêm tantas literais quantas as variáveis da função. Cada produto é chamado *produto canônico*, *produto padrão* ou ***mintermo***. A expressão está na forma <u>*padrão*</u> ou <u>*canônica*</u> de soma de produtos.

Teorema – Todas as funções de chaveamento de N variáveis $f(x_1, x_2, ... x_n)$ podem ser colocadas na forma de *soma de produtos padrão* (SDP).

Pelo princípio da dualidade é de se esperar que funções de chaveamento também possam ser representadas por na forma de *produtos de somas padrão* (PDS) ou produtos de ***maxtermos***.

$$
\begin{aligned}
Ex.: f(A,B,C,D) &= A + C + \overline{B}\,\overline{D} \\
&= A + (C + \overline{B}\,\overline{D}) \\
&= A + (C + \overline{B}).(C + \overline{D}) \\
&= (A + C + \overline{B}).(A + C + \overline{D}) \\
&= (A + C + \overline{B} + D\overline{D}).(A + C + \overline{D} + B\overline{B}) \\
&= (A + \overline{B} + C + D).(A + \overline{B} + C + \overline{D}).(A + B + C + \overline{D}).(A + \overline{B} + C + \overline{D})
\end{aligned}
$$

Tabela de Mintermos (m) e Maxtermos (M) para uma função de 3 variáveis

ABC	Mintermo	Maxtermo
000	m_0 - $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	M_0 - $(A+B+C)$
001	m_1 - $\overline{A}.\overline{B}.C$	M_1 - $(A+B+\overline{C})$
010	m_2 - $\overline{A}.B.\overline{C}$	M_2 - $(A+\overline{B}+C)$
011	m_3 - $\overline{A}.B.C$	M_3 - $(A+\overline{B}+\overline{C})$
100	m_4 - $A.\overline{B}.\overline{C}$	M_4 - $(\overline{A}+B+C)$
101	m_5 - $A.\overline{B}.C$	M_5 - $(\overline{A}+B+\overline{C})$
110	m_6 - $A.B.\overline{C}$	M_6 - $(\overline{A}+\overline{B}+C)$
111	m_7 - $A.B.C$	M_7 - $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

Descrição da função por mintermos (**m**) e maxtermos (**M**)

Linha	**A**	**B**	**C**	**f**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Descrição da função por mintermos (**m**) e maxtermos (**M**)

Linha	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(A,B,C)=\sum \mathrm{m}\,(1,2,5,7) \Rightarrow \text{ linha onde f } =1$$

Descrição da função por mintermos (**m**) e maxtermos (**M**)

Linha	**A**	**B**	**C**	**f**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \sum \mathrm{m}\,(1,2,5,7) \Rightarrow \text{linha onde f} = 1$$

$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.B.C$ **(SDP)**

Descrição da função por mintermos (**m**) e maxtermos (**M**)

Linha	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \sum \mathrm{m}\,(1,2,5,7) \;\Rightarrow\; \text{linha onde f } = 1$$

$$f(A,B,C) = \pi M\,(0,3,4,6) \;\Rightarrow\; \text{linha onde f } = 0$$

$f(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.C$ **(SDP)**

$(A,B,C) = (A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$ **(PDS)**

Simplificação de Funções

Uma expressão de **SDP** de dois níveis será considerada mínima se não existe outra expressão equivalente:

- com menos termos produto,
- com mesmo número de produtos mas com menor número de literais (entradas).

Observe que definimos **UMA** expressão e não **A** expressão.

Exemplo: $f(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.B.C = (A + \overline{A}).B.C = B.C$

Os dois termos da expressão original são chamados de termos **VIZINHOS** ou **LOGICAMENTE ADJACENTES**, ou seja, diferem de apenas uma variável e assim se prestam para minimização.

Esta característica pode ser vista mais claramente por meio de uma representação gráfica.

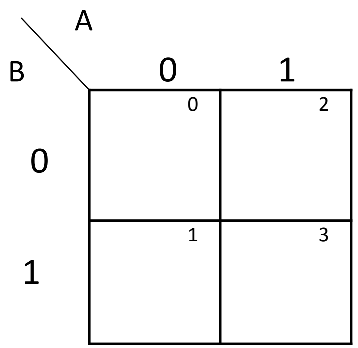
Mapas de Karnaugh

Meta: Colocar como “vizinhos” termos logicamente adjacentes e com isso facilitar a visualização das simplificações.

Mapas de Karnaugh

Meta: Colocar como “vizinhos” termos logicamente adjacentes e com isso facilitar a visualização das simplificações.

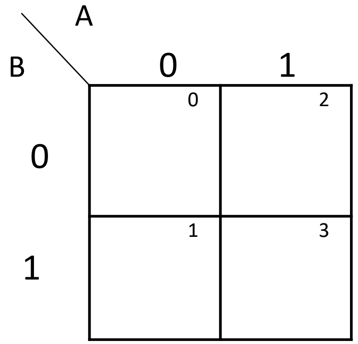
- Mapa de Karnaugh para funções de 2 variáveis:



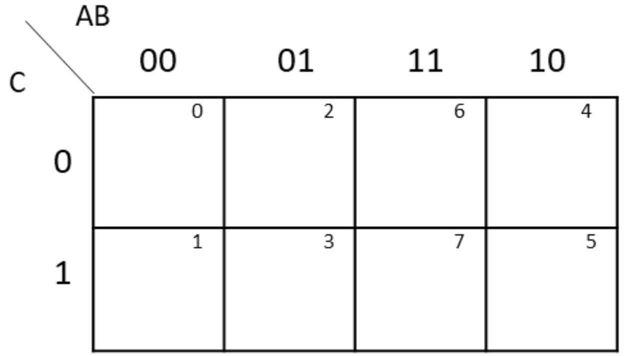
Mapas de Karnaugh

Meta: Colocar como “vizinhos” termos logicamente adjacentes e com isso facilitar a visualização das simplificações.

- Mapa de Karnaugh para funções de 2 variáveis:



- Mapa de Karnaugh para funções de 3 variáveis:



- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\ m(0,1,6,7)$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

- Minimizar a função f(A,B,C) = Σ m(0,1,6,7)

C \ AB	00	01	11	10
0	0 1	2	6 1	4
1	1 1	3	7 1	5

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1 (0)	(2)	1 (6)	(4)
1	1 (1)	(3)	1 (7)	(5)

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1 (0)	(2)	1 (6)	(4)
1	1 (1)	(3)	1 (7)	(5)

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,3,4,7)$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1 ^{0}	^{2}	1 ^{6}	^{4}
1	1 ^{1}	^{3}	1 ^{7}	^{5}

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,3,4,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1 ^{0}	^{2}	^{6}	1 ^{4}
1	^{1}	1 ^{3}	1 ^{7}	^{5}

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} 1	^{2}	^{6} 1	^{4}
1	^{1} 1	^{3}	^{7} 1	^{5}

$$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B} + A.B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,3,4,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} 1	^{2}	^{6}	^{4} 1
1	^{1}	^{3} 1	^{7} 1	^{5}

$$f(A,B,C) = B.C + \bar{B}.\bar{C}$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

- Minimizar a função f(A,B,C) = Σ m(0,1,3,6,7)

C \ AB	00	01	11	10
0	0 1	2 	6 1	4
1	1 1	3 1	7 1	5

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	(0) 1	(2)	(6) 1	(4)
1	(1) 1	(3) 1	(7) 1	(5)

$$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B} + A.B + \bar{A}.C$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} 1	^{2}	^{6} 1	^{4}
1	^{1} 1	^{3} 1	^{7} 1	^{5}

$$f(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B} + A.B + \overline{A}.C$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(2,3,6,7)$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	(0) 1	(2)	(6) 1	(4)
1	(1) 1	(3) 1	(7) 1	(5)

$$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B} + A.B + \bar{A}.C$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(2,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	(0)	(2) 1	(6) 1	(4)
1	(1)	(3) 1	(7) 1	(5)

$$f(A,B,C) = \bar{A}.B + A.B = (\bar{A} + A).B = B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	(0) 1	(2)	(6) 1	(4)
1	(1) 1	(3) 1	(7) 1	(5)

$$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B} + A.B + \bar{A}.C$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(2,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	(0)	(2) 1	(6) 1	(4)
1	(1)	(3) 1	(7) 1	(5)

$$f(A,B,C) = \bar{A}.B + A.B = (\bar{A} + A).B = B$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(0,1,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1 ^{0}	^{2}	1 ^{6}	^{4}
1	1 ^{1}	1 ^{3}	1 ^{7}	^{5}

$$f(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B} + A.B + \bar{A}.C$$

- Minimizar a função $f(A,B,C) = \Sigma\, m(2,3,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0}	1 ^{2}	1 ^{6}	^{4}
1	^{1}	1 ^{3}	1 ^{7}	^{5}

$$f(A,B,C) = B$$

- Minimizar a função f(A,B,C) = Σ m(0,1,2,3,4,6,7)

C \ AB	00	01	11	10
0	1 [0]	1 [2]	1 [6]	1 [4]
1	1 [1]	1 [3]	1 [7]	[5]

f(A,B,C) =

- Mapa de Karnaugh para funções de 4 variáveis:

- Mapa de Karnaugh para funções de 4 variáveis:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

- Minimizar a função f(A,B,C,D) = Σ m(0,5,7,8,12,14)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	4	12 1	8 1
01	1	5 1	13	9
11	3	7 1	15	11
10	2	6	14 1	10

- Minimizar a função f(A,B,C,D) = Σ m(0,5,7,8,12,14)

CD \ AB	00	01	11	10
00	1 (0)	(4)	1 (12)	1 (8)
01	(1)	1 (5)	(13)	(9)
11	(3)	1 (7)	(15)	(11)
10	(2)	(6)	1 (14)	(10)

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}.B.D + \bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{D}$$

- Minimizar a função $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(0,1,4,5,7,8,10,13,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0: 1	4: 1	12	8: 1
01	1: 1	5: 1	13: 1	9
11	3	7: 1	15: 1	11
10	2	6	14	10: 1

- Minimizar a função $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(0,1,4,5,7,8,10,13,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12	8 1
01	1 1	5 1	13 1	9
11	3	7 1	15 1	11
10	2	6	14	10 1

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}.\overline{C} + B.D + A.\overline{B}.\overline{D}$$

- Mapa de Karnaugh para funções de 5 variáveis:

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

- Minimizar a função f(A,B,C,D,E) = Σ m(4,5,8,10,12,13,14,17,20,24,26,28,30)

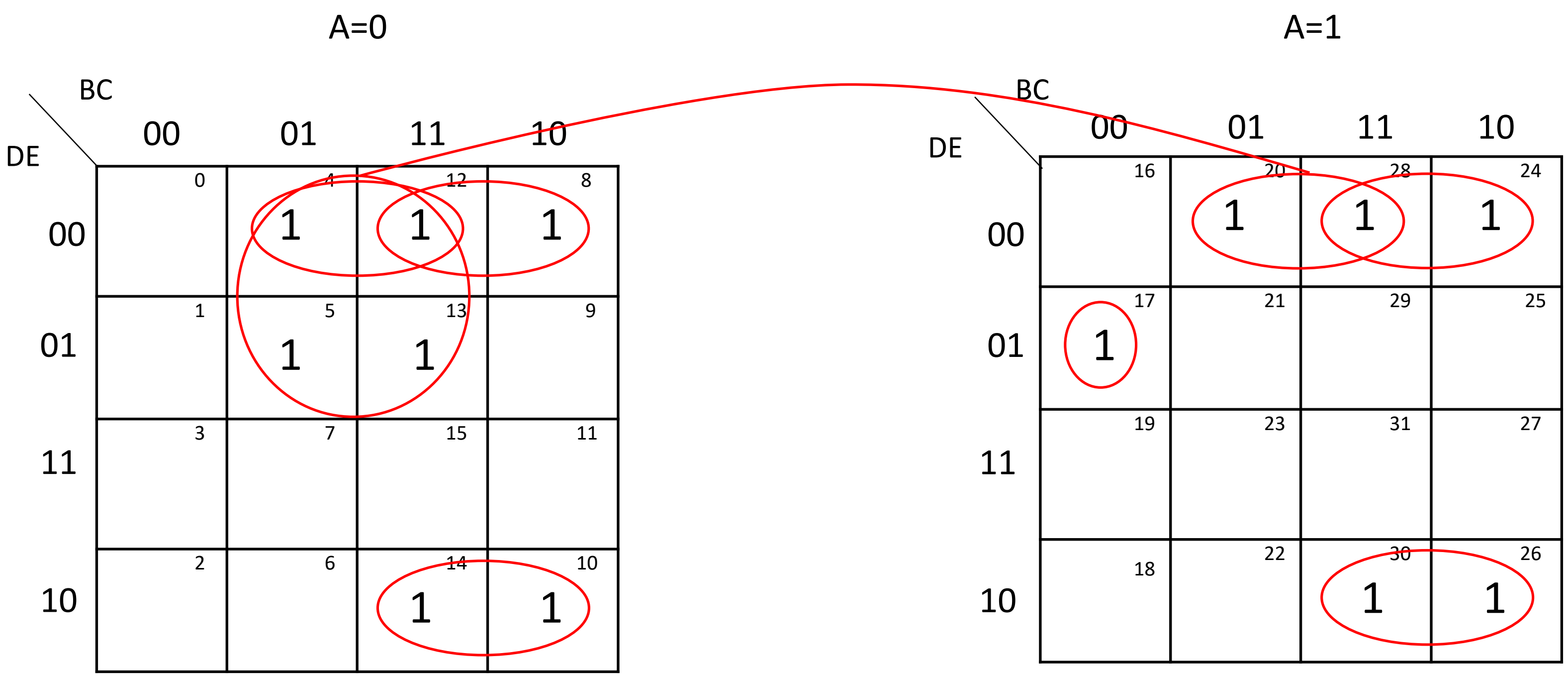
A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	(0)	(4) 1	(12) 1	(8) 1
01	(1)	(5) 1	(13) 1	(9)
11	(3)	(7)	(15)	(11)
10	(2)	(6)	(14) 1	(10) 1

A=1

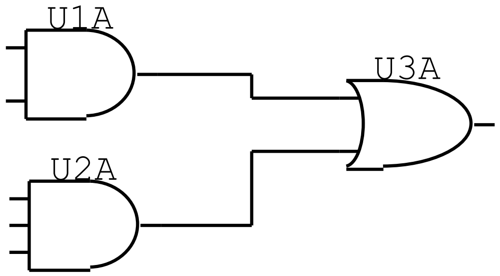
DE \ BC	00	01	11	10
00	(16)	(20) 1	(28) 1	(24) 1
01	(17) 1	(21)	(29)	(25)
11	(19)	(23)	(31)	(27)
10	(18)	(22)	(30) 1	(26) 1

- Minimizar a função $f(A,B,C,D,E) = \Sigma\, m(4,5,8,10,12,13,14,17,20,24,26,28,30)$

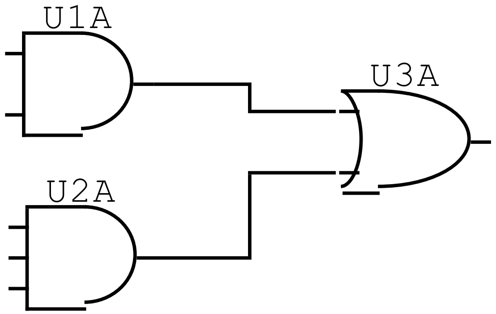


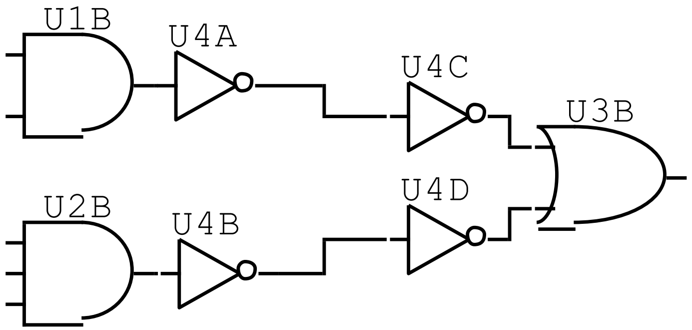
$$f(A,B,C,D,E) = A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}.E + \overline{A}.C.\overline{D} + B.\overline{E} + C.\overline{D}.\overline{E}$$

Implementação de circuitos AND-OR com NAND-NAND



Implementação de circuitos AND-OR com NAND-NAND





0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Implementação de circuitos AND-OR com NAND-NAND

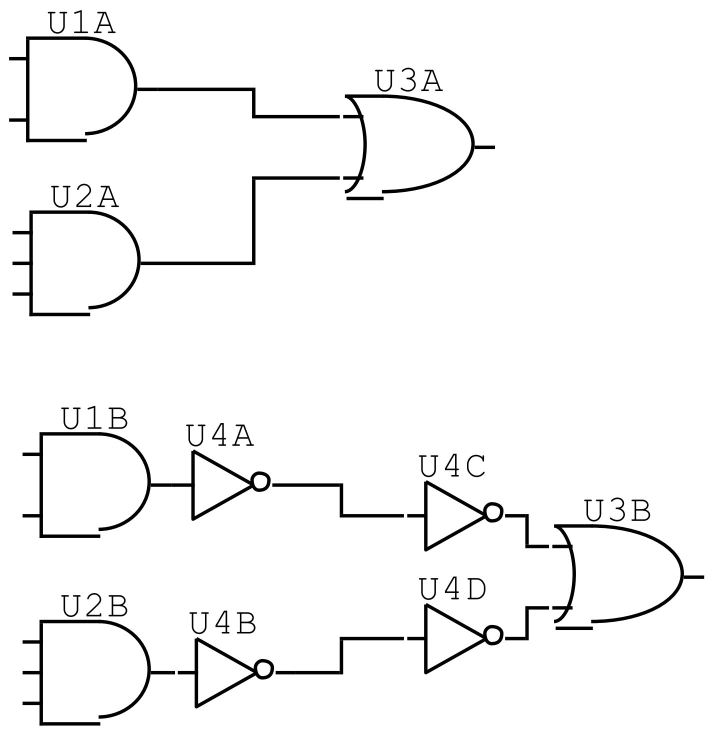


Tabela Verdade Nand

AB	Saída
00	1
01	1
10	1
11	0