Sistemas Numéricos

Representação de “N” na base “b” $N = a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0$

$N = a_{n-1} \times b^{n-1} + a_{n-2} \times b^{n-2} + \ldots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$

b - base do sistema,
n - no. de dígitos que compõe o número do sistema,
a_i - { 0, 1, ..., (b - 1)}.

- Base 10

$2537 = 2*10^3 + 5*10^2 + 3*10^1 + 7*10^0$

- Base 2

$1010011 = 1*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$

Conversão entre bases

Seja “N” expresso na base “s”. Converter para base “r”

$$
\begin{array}{lllll}
N & \underline{|\ r} & & & \\
A_0 & N_1 & \underline{|\ r} & & \\
 & A_1 & N_2 & \underline{|\ r} & \\
 & & A_2 & N_3 &
\end{array}
$$

$$. \; . \; .$$

$$
\begin{array}{llll}
N_{n-1} & \underline{|\ r} & & \\
A_{n-1} & N_n & \underline{|\ r} & \\
 & & A_n & 0
\end{array}
$$

$N \;\; = r \, . \, N_1 \; + \; A_0$

$N_1 \;\; = r \, . \, N_2 \; + \; A_1$

$N_{n-1} = r \, . \, N_n \; + \; A_{n-1}$

$N_n \;\; = r \, . \, 0 \; + \; A_n$

$N = A_n \, r^n \; + \; A_{n-1} \, r^{n-1} \; + \; \; . \; . \; . \; \; + A_1 \, r \; \; + \; A_0$

- Número Negativo

  - Sinal Magnitude
    +9 = 0.1001   -9 = 1.1001

  - Complemento a dois
    - Nc = 2 – N (N < 1)   +9 = 0.1001   2 = 10.0000   -9 = 1.0111
      +10= 0.1010   2 = 10.0000 -10 = 1.0110

    - Método prático
      Percorra o número da direita para esquerda até encontrar o primeiro bit = 1. Mantenha este e inverta todos os outros.

Ex.   0.1100110100   - 1.0011001100

- Base 10 -> Binário

$(67)_{10} = (1000011)_2$
$(154)_{10} = (10011010)_2$

- Base 10 -> Binário

$(67)_{10} = (1000011)_2$
$(154)_{10} = (10011010)_2$

- Base 10 -> Hexadecimal

$(67)_{10} = (100\,0011)_2 = (43)_{16}$

$(154)_{10} = (1001\,1010)_2 = (9A)_{16}$

- Base 10 -> Binário

$(67)_{10} = (1000011)_2$
$(154)_{10} = (10011010)_2$

- Base 10 -> Hexadecimal

$(67)_{10} = (100|0011)_2 = (43)_{16}$

$(154)_{10} = (1001|1010)_2 = (9A)_{16}$

- BCD (Binary Coded Decimal)

$(1394)_{10} = (0001\ 0011\ 1001\ 0100)_{BCD}$

Decimal	Binário	Hexadecimal	BCD
0	0000	0	0000
1	0001	1	0001
2	0010	2	0010
3	0011	3	0011
4	0100	4	0100
5	0101	5	0101
6	0110	6	0110
7	0111	7	0111
8	1000	8	1000
9	1001	9	1001
10	1010	A	1 0000
11	1011	B	1 0001
12	1100	C	1 0010
13	1101	D	1 0011
14	1110	E	1 0100
15	1111	F	1 0101

Álgebra Booleana

Postulados de Huntigton

I Existe um conjunto de ***K*** objetos sujeitos a uma relação de equivalência denotada por ***"="*** que satisfaz o princípio da substituição

IIa. A regra $a + b$ está em ***K*** sempre que a e b estão em ***K***

IIb. A regra $a \,.\, b$ está em ***K*** sempre que a e b estão em ***K***

IIIa. Existe um elemento ***0*** em ***K*** tal que para todo ***a*** em ***K*** $a + 0 = a$

IIIb. Existe um elemento ***1*** em ***K*** tal que para todo ***a*** em ***K*** $a \,.\, 1 = a$

IVa. $a + b = b + a$

IVa. $a \,.\, b = b \,.\, a$

Va. $a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$

Va. $a \,.\, (b +. c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$

VI. Para todo elemento ***a*** em ***K*** existe um elemento ***ä*** tal que:

$$a \,.\, \overline{a} = 0 \quad \text{e} \quad a + \overline{a} = 1$$

VII. Existem pelo menos dois elementos ***x*** e ***y*** em ***K*** tal que $x \neq y$

Teorema Fundamental da Álgebra Booleana

1 - Os elementos ***0*** e ***1*** são únicos

2 - Para todo elemento a em ***K***, $a + a = a$ e $a \cdot a = a$

3 - Para todo elemento a em ***K***, $a + 1 = 1$ e $a \cdot 0 = 0$

4 - Os elementos ***1*** e ***0*** são distintos e $1 = \overline{\overline{0}}$

5 - Para todo par de elementos ***a*** e ***b*** em ***K***, $a + a.b = a$ e $a.(a + b) = a$

6 - O complemento de ***a*** (***ä***) é único

7 - Para todo elemento ***a*** em K, $a = \overline{\overline{a}}$

8 - $a.[(a + b) + c] = [(a + b) + c].a = a$

9 - Para qualquer três elementos ***a, b c*** em ***K***,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{e} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

10 - Para qualquer par de elementos ***a*** e ***b*** em ***k***,

$$a + \overline{a} \cdot b = a + b \qquad \text{e} \qquad a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$$

11 - Para qualquer par de elementos ***a*** e ***b*** em ***k***,

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \qquad \text{e} \qquad \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Minimização De Funções Booleanas

Apesar de não existir um critério geral para obtenção de forma mais simples de uma expressão booleana, é possível definir uma forma simples a qual chegamos por métodos sistemáticos (representação em 2 níveis).

Formas Padrão de Função Booleanas

Para obter uma forma padrão de minimização precisamos definir pontos de partida e de chegada padrão.

1. **Literal –** Uma variável qualquer ou seu complemento

   Ex.: $A,\ \overline{A},\ B,\ \overline{B},$ etc

2. **Termo Produto -** Uma série de variáveis relacionadas pela função "E".

   Ex.: $A\overline{B}C \qquad A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D,$ etc.

3. **Termo Soma** – Uma série de literais relacionadas pela função "OU".

   Ex.: $A+B+\overline{C}, \quad A+\overline{D},$ etc.

4. **Termo Normal** – Um termo produto ou termo soma onde nenhuma variável aparece mais de uma vez.

   Ex.:

   $$A B\overline{C} A \rightarrow A B\overline{C}$$

   $$A\overline{C} D C \rightarrow 0$$

   $$A+B+C+\overline{B} \rightarrow 1$$

Minimização De Funções Booleanas

Apesar de não existir um critério geral para obtenção de forma mais simples de uma expressão booleana, é possível definir uma forma simples a qual chegamos por métodos sistemáticos (representação em 2 níveis).

Formas Padrão de Função Booleanas

1. **Literal –** Uma variável qualquer ou seu complemento

   Ex.: $A, \overline{A}, B, \overline{B},$ etc

2. **Termo Produto -** Uma série de variáveis relacionadas pela função "E".

   Ex.: $A\overline{B}C \quad A\overline{B}\,\overline{C}D,$ etc.

3. **Termo Soma** – Uma série de literais relacionadas pela função "OU".

   Ex.: $A+B+\overline{C}, \quad A+\overline{D},$ etc.

4. **Termo Normal** – Um termo produto ou termo soma onde nenhuma variável aparece mais de uma vez.

   Ex.:
   $$A B\overline{C} A \rightarrow A B \overline{C}$$
   $$A\overline{C}DC \rightarrow 0$$
   $$A+B+C+\overline{B} \rightarrow 1$$

5. Soma de produtos

$$Ex.\ :\ f(A, B, C, D, E) = (\overline{AC} + \overline{D})\,.\,(\overline{B + CE}) \qquad \text{DE MORGAN}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}\,.\,\overline{CE}) \qquad \overline{(a + b)} = \overline{a}\,.\,\overline{b}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}.\,(\overline{C} + \overline{E})\,) \qquad \overline{(a - b)} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{E})$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E} \quad \text{- SDP}$$

Seja agora a função:

$$f\,(A, B, C, D) = A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C} + B\,C\,D + \overline{A}\,B\,D$$

$$= A\,\overline{B}\,C(D + \overline{D}) + A\,\overline{C}(B + \overline{B}) + B\,C\,D\,(A + \overline{A}) + \overline{A}\,B\,D\,(C + \overline{C})$$

$$= A\,\overline{B}\,C\,D + A\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}(D + \overline{D}) + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,(D + \overline{D}) + A\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$$

$$= A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABCD + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D$$

Nesta expressão, que é uma soma de produtos, todos os termos contêm tantas literais quantas as variáveis da função. Cada produto é chamado *produto canônico*, *produto padrão* ou ***mintermo***. A expressão está na forma <u>*padrão*</u> ou <u>*canônica*</u> de soma de produtos.

Teorema – Todas as funções de chaveamento de N variáveis $f(x_1, x_2, ...x_n)$ podem ser colocadas na forma de *soma de produtos padrão* (SDP).

Pelo princípio da dualidade é de se esperar que funções de chaveamento também possam ser representadas por na forma de *produtos de somas padrão* (PDS) ou produtos de ***maxtermos***.

$$
\begin{aligned}
Ex.:\ f(A,B,C,D) &= A + C + \overline{B}\,\overline{\mathrm{D}} \\
&= A + (C + \overline{B}\,\overline{\mathrm{D}}) \\
&= A + (C + \overline{B}).(\mathrm{C} + \overline{\mathrm{D}}) \\
&= (A + C + \overline{B}).(\mathrm{A} + \mathrm{C} + \overline{\mathrm{D}}) \\
&= (A + C + \overline{B} + \mathrm{D}\,\overline{\mathrm{D}}).(A + C + \overline{D} + \mathrm{B}\,\overline{\mathrm{B}}) \\
&= (A + \overline{B} + C + D).(A + \overline{B} + C + \overline{D}).(A + B + C + \overline{D}).(A + \overline{B} + C + \overline{D})
\end{aligned}
$$