Pablo Salazar 202124801
Luisa Silva 202124806

Taller Álgebra lineal.

4. Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$

Tenemos la consideración si $i = j$
$a_{ij} = 1$ (diagonal de 1's)

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ \\ ④ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

al hacer una sustitución hacia adelante obtenemos una matriz triangular inferior

① $A_{11} \cdot X_1 = b_1$ $\quad X_1 = \frac{b_1}{A_{11}}$ al A_{11} ser 1 por el enunciado obtenemos $X_1 = b_1$

② $A_{21} X_1 + \cancel{A_{22}}^{1} X_2 = b_2$
$A_{21} X_1 + X_2 = b_2$ $\quad X_2 = b_2 - A_{21} X_1$

③ $A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + \cancel{A_{33}}^{1} X_3 = b_3$
$X_3 = b_3 - A_{31} X_1 - A_{32} X_2$

④ $A_{i1} X_1 + A_{i2} X_2 + A_{i3} X_3 + \ldots + \cancel{A_{ij}}^{1} X_i = b_1$

$$X_i = b_i - \underbrace{A_{i1} X_1 - A_{i2} X_2 - A_{i3} X_3 - A_{i(j-1)} X_{(j-1)}}_{\sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} X_j}$$

Por lo que podemos verificar que

$$\boxed{x_1 = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} X_j}$$

5. Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

donde $i = n$, $n = 1, \ldots, 0$. Note que la diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow a_{ii}$

$a_{ij} x_i = b_i \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ij}} \xrightarrow{i=j} \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

$a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + \ldots + a_{3j} x_j = b_3 \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{34} x_4 - a_{35} x_5 - \ldots a_{3j} x_j}{a_{33}}$

$\underbrace{a_{11} x_1}_{a_{ii} x_i} + a_{12} x_2 + \ldots + \underbrace{a_{ij} x_j}_{a_{ij} x_j} = \underbrace{b_1}_{b_i} \qquad x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1j} x_j}{a_{11}}$

Con base en esto podemos generalizar que

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$