

# Modelos fenomenológicos aplicados al estudio de la COVID-19 en el estado de Yucatán

Jose Alejandro Mesejo-Chiong<sup>1\*</sup>, Angela Mireya-León Mecías<sup>1</sup>, Julian Bravo-Castillero<sup>2</sup>, Nidiyare Hevia-Montiel<sup>2</sup>, Jorge Luis Perez-Gonzalez<sup>2</sup>

## Resumen

En el presente trabajo se aplican modelos llamados fenomenológicos al estudio de la COVID-19 en el estado de Yucatán, México. Como fuente de datos solo se requiere el reporte diario que efectúan las autoridades sanitarias desde el inicio de la epidemia. Se demuestra que los modelos fenomenológicos tienen valor para realizar pronósticos que pueden guiar las intervenciones que los sistemas nacionales de salud realizan para contener la expansión de la COVID-19.

## Palabras Clave

COVID-19, Modelos fenomenológicos, Crecimiento de epidemias

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba, mesejo@matcom.uh.cu, angela@matcom.uh.cu

<sup>2</sup>Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas - Unidad Académica de Yucatán, Universidad Nacional Autónoma de México, Mérida - Yucatán, México, julian@mym.iimas.unam.mx, nidiyare.hevia@iimas.unam.mx, jorge.peres@iimas.unam.mx, mcj@mym.iimas.unam.mx

\*Autor para Correspondencia, Corresponding Author

## Introducción

Existen diferentes categorías de modelos matemáticos empleados en el estudio temprano de epidemias [1]. Los modelos deterministas son aquellos que se expresan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. A esta clase pertenecen los clásicos y bien estudiados modelos de compartimentos SIS, SIR, SEIR y sus numerosas variantes. Otra clase la constituyen los llamados modelos fenomenológicos. Estos modelos se emplean en diferentes fenómenos como crecimiento de poblaciones, tumores, economía y epidemias, cuando se asume que la tasa de crecimiento puede ser representada mediante una única ecuación diferencial ordinaria. Entre estos podemos citar, el modelo de crecimiento exponencial (de Malthus) [2], el logístico [3], el de Richards [4] y el de Gompertz [5], así como sus variantes generalizadas, entre otros. Estos son modelos simples que hacen énfasis en incorporar observaciones empíricas y permiten reproducir características esenciales del fenómeno bajo estudio. Este proceder se ha empleado con éxito en otras epidemias y se aplica en la actual ([6], [7], [8], [9]).

## 1. Modelos fenomenológicos empleados

Los modelos que estudiaremos se plantean mediante un problema de valor inicial (PVI) del tipo

$$\frac{dC}{dt} = f(C, \mathbf{p}), \quad C(0) = C_0, \quad (1)$$

donde  $C(t)$  representa la **cantidad de casos confirmados acumulados** reportados hasta el instante  $t$  (tiempo en días).

Los Modelos de Crecimiento que se emplean son: el exponencial (MCE), el logístico (MCL), el de Richards (MCR), el de Gompertz (MCG) y sus variantes generalizadas denotadas con MCEG, MCLG, MCRG y MCGG respectivamente. En la tabla 1 se presentan las ecuaciones diferenciales que definen cada modelo con las respectivas soluciones analíticas cuando estas existen. La condición inicial de los PVI es  $C(0) = C_0$ , que representa la cantidad de casos confirmados en el primer día de la epidemia.

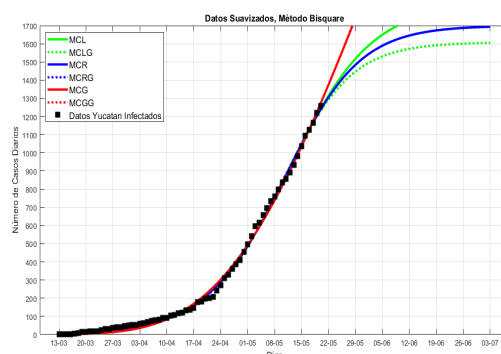
Los modelos MCE y MCEG se emplean fundamentalmente en la fase de crecimiento exponencial del número de casos acumulados de una epidemia. EL MCL, el MCR y el MCG tienen soluciones analíticas que permiten estimar dos importantes parámetros, el número de casos máximos posibles  $K$  y el punto de inflexión  $\tau_p$ , que define el momento en el cual, el crecimiento abandonará la tendencia exponencial. Los métodos generalizados presentan un parámetro  $\mu$ , que mide si existe una desviación con respecto a la tendencia exponencial usual en el crecimiento de las epidemias.

## 2. Resultados con datos del estado de Yucatán

En las figuras 1 y 2 se muestran los resultados de los diferentes ajustes de datos a los modelos MCL, MCLG, MCR, MCRG, MCG y MCGG, con datos proporcionados por las autoridades del estado de Yucatán hasta el día 17 de Mayo de

**Tabla 1.** Ecuación diferencial de cada modelo y sus respectivas soluciones como se emplean en el ajuste de datos

Mod.	EDO	Solución
MCE	$C' = \gamma C$	$C_0 \exp(\gamma t)$
MCEG	$C' = \gamma C^\mu$	$\left(\gamma(1-\mu)t + C_0^{1-\mu}\right)^{1/1-\mu}$
MCL	$C' = \gamma C(1 - C/K)$	$K(1 + \exp(-\gamma(t - \tau_p)))^{-1}$
MCLG	$C' = \gamma C^\mu(1 - \beta C)$	Método Numérico
MCR	$C' = \gamma C(1 - (C/K)^\alpha)$	$(1 + \exp(-\alpha\gamma(t - \tau_p)))^{-1/\alpha}$
MCRG	$C' = \gamma C^\mu(1 - (C/K)^\alpha)$	Método Numérico
MCG	$C' = \gamma C \exp(-\beta t)$	$K \exp(-\exp(-\beta(t - \tau_p)))$
MCGG	$C' = \gamma C^\mu \exp(-\beta t)$	$C_0(1 + \bar{\gamma} - \exp(-\beta(t - \tau_p)))^{1/\bar{\mu}}$

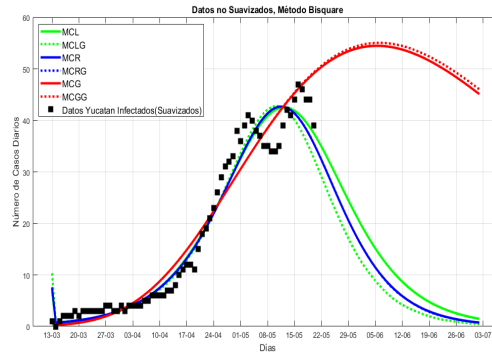
**Figura 1.** Ajuste a casos acumulados de los diferentes modelos. Los datos son los originales.

2020. Los ajustes se realizan con los datos originales y con una variante de estos que denominamos suavizados. En esta, los datos se presentan promediados mediante media móvil a 7 días.

La figura 1 reproduce la variante de ajuste a datos originales. En ella se observa que los métodos MCR, MCRG y MCLG pronostican un número máximo de casos por debajo de los 1400. Los restantes modelos pronostican números por encima de éste, siendo el más bajo el del MCL con 1800 casos, mientras que el MCGG pronostica un número máximo de casos por encima de los 9000. La razón de esta amplia diferencia se puede apreciar en la figura 2 donde los datos originales se presentan en su variante suavizada. Se observa que entre los días 1 y 8 de Mayo el número de casos comenzó un descenso que los métodos MCL, MCLG, MCR y MCRG tratan de seguir. Sin embargo después del 11 de Mayo el número de casos ha abandonado la tendencia decreciente, por una nuevamente exponencial. Esta situación es la que provoca que tanto el MCG como el MCGG desvíen sus predicciones de las de los restantes métodos. Este resultado es una señal de alarma sobre la evolución de la COVID-19 en el estado de Yucatán.

## Referencias

- [1] Gerardo Chowell, Lisa Sattenspiel, Shweta Bansal, and Cécile Viboud. Mathematical models to characterize early epidemic growth: A Review. *Physics Life Reviews*, 18:66–97, 2016.
- [2] I. Seidl and C.A. Tisdell. Carrying capacity reconsidered: From Malthus’ population theory to cultural carrying capacity. *Ecological Economics*, 31(3):395–408, 1999.
- [3] P.F. Verhulst. A Note on the Law of Population Growth. In *Mathematical Demography*, pages 333–337. Springer-Verlag, 1977.
- [4] F.J. Richards. A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*, 10(29):290–300, 1959.
- [5] Kathleen M.C. Tjørve and Even Tjørve. The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family. *Public Library of Science ONE (PLOS ONE)*, 12(6):1–17, 2017.
- [6] Kimberlyn Roosa, Yiseul Lee, Ruiyan Luo, Alexander Kirpich, Richard Rothenberg, James M. Hyman, Ping Yan, and Gerardo Chowell. Short-term Forecasts of the COVID-19 Epidemic in Guangdong and Zhejiang, China: February 13–23, 2020. *Journal of Clinical Medicine*, 9:596:1–9, 2020.
- [7] H.M. Singer. The COVID-19 pandemic: growth patterns, power law scaling, and saturation. *arXiv preprint arXiv:2004.03859*, pages 1–10, 2020.



**Figura 2.** Ajuste a casos acumulados de los diferentes modelos pero representados en forma de casos por día. Los datos originales se suavizan por media móvil y así aparecen representados.

- [8] Ke Wu, Didier Darcet, Qian Wang, and Didier Sornette. Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak in 29 provinces in China and in the rest of the world. preprint, Infectious Diseases (except HIV/AIDS), 2020.
- [9] Wuyue Yang, Dongyan Zhang, Liangrong Peng, Chang-jing Zhuge, Liu Hong, and Zhou Pei-Yuan. Rational evaluation of various epidemic models based on the COVID-19 data of China. *arXiv preprint arXiv:2003.05666*, pages 1–18, 2020.