Comunicaciones 2: Ejemplo de Clase 6.15*

Luis Carlos Paniagua Davila, 201700435[1, **]

[1] *Escuela de Mecánica Eléctrica , Universidad de San Carlos, Guatemala.*

(Dated: 22 de agosto de 2022)

I. ENUNCIADO DEL EJEMPLO

A) ¿Para qué valor de $\alpha > 0$ la función $f(x) = \alpha x^{-2}u(x-\alpha)$ es una función de densidad de probabilidad? Usa un boceto para ilustrar tu razonamiento y recuerda que un pdf tiene que integrarse a uno. [$u(x)$ es la función escalón unitario.]

B) Encuentre la función de distribución acumulativa correspondiente.

C) Calcular $P(X \geq 10)$.

II. INCISO A

Se estable que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{1}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha x^{-2}u(x-\alpha)dx = 1 \tag{2}$$

En la ecuación 2 se presenta una función escalón gracias al termino $u(x-\alpha)$.

Teniendo las siguientes relaciones:

$$u(x-\alpha) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; x-\alpha \leq 0 \\ 0 \;\; si \;\; otro\ lugar \end{cases} \tag{3}$$

$$u(x-\alpha) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; x \leq \alpha \\ 0 \;\; si \;\; otro\ lugar \end{cases} \tag{4}$$

Se determina la siguiente función escalón por medio de la siguiente figura:

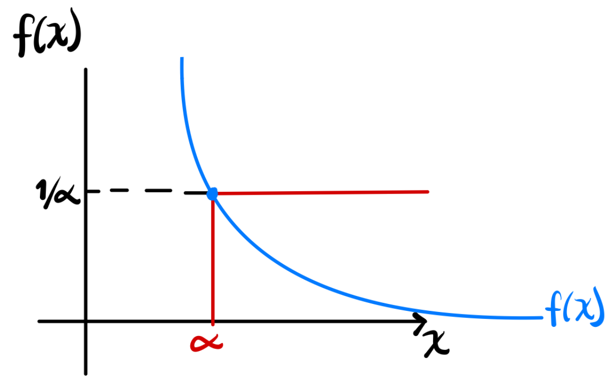

Figura 1: Función escalón

Fuente: Elaboración propia.

Modificando la integral tenemos que:

$$\int_{\alpha}^{\infty} \alpha x^{-2}dx \tag{5}$$

Resolviendo la integral llegamos a

$$\alpha(-x^{-1})\Big|_{\infty}^{\alpha} \tag{6}$$

Evaluando amos limites se obtiene el siguiente resultado:

$$= -\alpha\left(\frac{1}{\infty} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \tag{7}$$

Simplificando se obtiene el siguiente resultado:

$$= \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1 \tag{8}$$

III. INCISO B

Recordando que la función de la distribución es la antiderivada de la función de densidad:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \alpha y^{-2}u(y-\alpha)dy \tag{9}$$

---

* Escuela de Mecánica Eléctrica

** luiscpd06@gmail.com

Resolviendo la integral:

$$F_x(x) = \alpha \int_{\infty}^{x}$$

$$F_x(x) = \alpha \left[-y^{-1}\right] \Big|_{\alpha}^{x}$$

$$F_x(x) = -\alpha \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$F_x(x) = 1 - \frac{\alpha}{x} \tag{10}$$

A. Propiedades de $F_x(x)$

Evaluando F_x en:

$$F_x(-\infty) = 0 \tag{11}$$

$$F_x(\infty) = 1 \tag{12}$$

Verificando el resultado anterior:

$$F_x(-\infty) = 1 - \frac{\alpha}{-\infty} = 1 \tag{13}$$

$$F_x(\infty) = 1 - \frac{\alpha}{\infty} = 1 \tag{14}$$

En la ecuación 13 denotamos un error debido a que la función escalón no empieza en infinito, sino en α, por lo tanto la función debe evaluarse en alfa quedando de la siguiente manera:

$$F_x(-\infty) = 1 - \frac{\alpha}{-\alpha} = 0 \tag{15}$$

Evaluando F_x en:

$$F_x(x_1) < F_x(x_2) Si x_1 < x_2 \tag{16}$$

Esta relación nos indica que es una función creciente. Gráficamente se puede representar por medio de la siguiente figura:

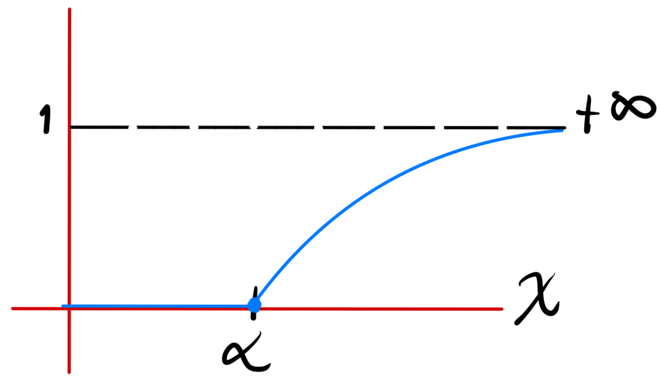

Figura 2: Función creciente
Fuente: Elaboración propia.

Asignando valores de *alpha* se puede obtener una comparación y determinar como crece la función.

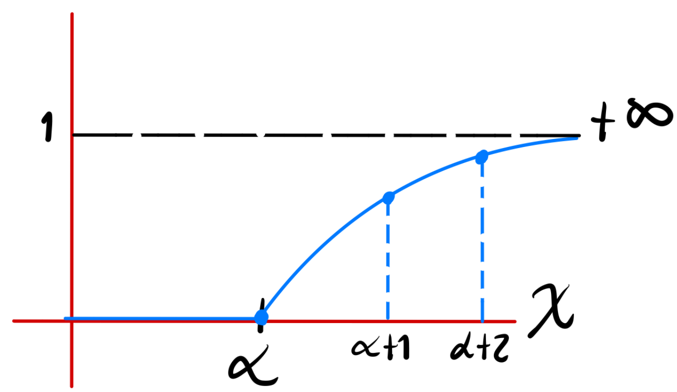

Figura 3: Crecimiento de la función
Fuente: Elaboración propia.

La mejor forma de probar una tercera condición es aplicando la derivada de la función de distribución dada por la siguiente ecuación:

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{-2} \tag{17}$$

IV. INCISO C

Para calcular la $P(x \geq 10)$ existen dos formas.

A. Forma 1

Asumiendo que $10 > \alpha$ tenemos lo siguiente:

$$P(x \geq 10) = \int_{10}^{\infty} \alpha x^{-2} u(x-\alpha) dx \tag{18}$$

$$P(x \geq 10) = \int_{10}^{\infty} x^{-2} dx = -\alpha x^{-1} \Big|_{10}^{\infty}$$

$$P(x \geq 10) = \frac{\alpha}{10} \tag{19}$$

B. Forma 2

Recordando que $F_x(x) \triangleq P(x \leq X)$ se pueden utilizar probabilidades complementarias.

$$P(X \leq x) = 1 - P(X > x) \tag{20}$$

$$P(x \leq 10) = 1 - P(x > 10)$$

$$P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10)$$

$$P(x \geq 10) = 1 - F_x(10)$$

$$P(x \geq 10) = 1 - \left[1 - \frac{\alpha}{10}\right]$$

$$P(x \geq 10) = \frac{\alpha}{10} \tag{21}$$