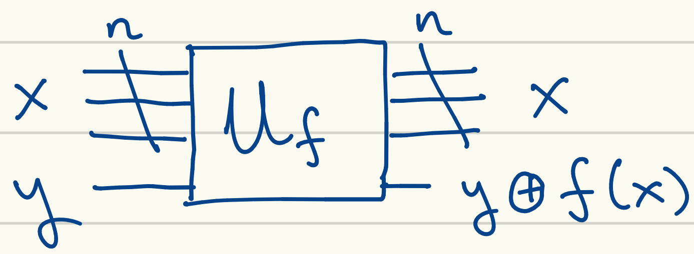
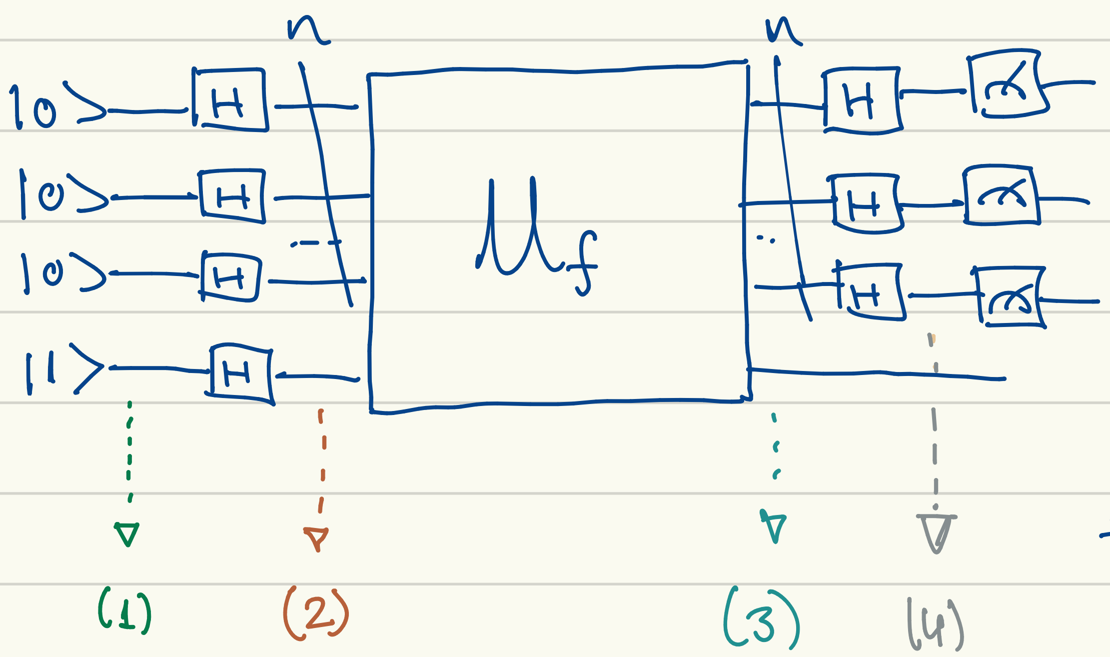
Algoritmo Deutsch-Jozsa

→ Sea U_f la puerta cuántica unitaria de la función f



f es constante o balanceada.

Aplicando el algoritmo:



si observamos todo ceros, es constante, si no sería balanceada.

El estado en (1) es $\boxed{|0\rangle^{\otimes n} \; |1\rangle}$, donde el símbolo "$\otimes n$" indica que esta multiplicando n ceros que están en paralelo. Por seguir con esta notación diremos que a continuación pasará por la puerta $H^{\otimes n+1}$.

Al pasar el estado $|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$ por la puerta $H^{\otimes n+1}$ el estado será:

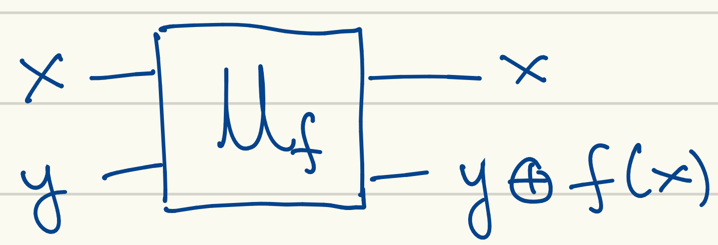
$$\boxed{\sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}$$

esto quiere decir que vamos a sumar para cada valor posible de x, por ejemplo si $n=2$, x tomaría los valores 00, 01, 10, 11.

Parece complejo pero realmente $\sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{2}^n}$ es una simplificación de:

$$\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Antes de pasar a (3) veamos que dado:



si $y=\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, entonces se pasa de

$$|xy\rangle = |x\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \longrightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Vayamos paso a paso:

por como está construido U_f

$$|x\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)=\frac{|x0\rangle-|x1\rangle}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{|xf(x)\rangle-|x\,!f(x)\rangle}{\sqrt{2}}$$

$!f(x)$ es el opuesto a $f(x)$ (ya que se le suma 1)

$$\frac{|xf(x)\rangle-|x\,!f(x)\rangle}{\sqrt{2}}=(-1)^{f(x)}|x\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Bastaría comprobar que se cumple si $f(x)=0$ y si $f(x)=1$.

(3): Teniendo claro esto, si antes de pasar por la puerta U_f tenemos:

$$\sum_{x\in\{0,1\}^n}\frac{|x\rangle}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

nos encontramos en una situación como la anterior y por linealidad, la salida sería:

$$\boxed{\sum_{x\in\{0,1\}^n}\frac{(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}$$

Antes de acabar hay que dar una nueva igualdad que será muy utilizada y es que podemos representar:

$$H|x\rangle = \sum_{z\in\{0,1\}} \frac{(-1)^{x\cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2}}$$

para probarlo sería suficiente
con ver que se cumple para $x=0$ y $x=1$.

Se puede generalizar de forma sencilla llegando a que:

$$H^{\otimes n}|x_1,\dots,x_n\rangle = \sum_{z_1,\dots,z_n\in\{0,1\}} \frac{(-1)^{x_1z_1+\dots+x_nz_n}|z_1,\dots,z_n\rangle}{\sqrt{2}^n}$$

Que por simplificar pondremos:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \sum_{z\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{x\cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2}^n}$$

Juntando todo esto, podemos obtener (4) teniendo en cuenta que:

$$|x\rangle \longrightarrow \sum_{z\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{x z}|z\rangle}{\sqrt{2}^n}$$

entonces:

$$\sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \longrightarrow \sum_{x\in\{0,1\}} \frac{(-1)^{f(x)}\left(\sum_{z\in\{0,1\}^n}\frac{(-1)^{xz}|z\rangle}{\sqrt{2}^n}\right)}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

que simplificando:

$$= \boxed{\sum_{x,z\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(x)+x\cdot z}|z\rangle}{2^n}\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}$$

Ahora nos preguntamos, ¿cuál es la amplitud del $|0\rangle^{\otimes n}$? (es decir $z=0\cdots0$). Pues sería:

$$\sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n}$$

- $$\underbrace{\sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n}}$$

Este valor será 1 o -1 si la función es constante.

Como la amplitud indica la probabilidad de obtener dicho valor, en caso de ser constante, veremos todo ceros.

Por otro lado, si la función es balanceada la amplitud valdrá cero, es decir; en caso de ser balanceada. nunca veremos el estado $|0\ldots0\rangle$

Hasta aquí el algoritmo!
Si algo no se entiende o necesitáis cualquier cosa os dejo mi contacto

correo : canalKet.g@gmail.com

twitter : @Ketpuntog