

Proyecto de Optimización Numérica

Programación Cuadrática Sucesiva

1. Introducción

El problema es colocar, np , puntos,

$$u_i = (x_i, y_i, z_i)^T, \quad i = 1, 2, \dots, np,$$

en la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 , que resuelvan el problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=i+1}^{np} \frac{1}{\|u_i - u_j\|_2} \\ \text{Sujeto a} \quad & u_i^T u_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, np. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Programación Cuadrática Sucesiva

Para el problema general

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{Sujeto a} \quad & h(x) = 0, \end{aligned}$$

con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y mínimo local, x^* , se tiene el método de programación cuadrática sucesiva (**pcs**) con las siguientes características:

Función Lagrangeana

$$L(x, \lambda) = f(x) + h(x)^T \lambda,$$

con

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + A(x)^T \lambda,$$

donde $A(x)$ es la matriz jacobiana de la restricción $h(x)$.

Las condiciones necesarias de primer orden para el problema son

$$v = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Función de mérito

$C > 0$ es un parámetro,

$$\phi(x, C) = f(x) + C\|h(x)\|_1.$$

Actualización BFGS con esquema de Powell

Sean $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica positiva definida y vectores $s, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

Si $s^T y \leq (0, 2)(s^T B s)$

$$\theta = \frac{(0, 8)(s^T B s)}{s^T B s - s^T y}$$

$$r = \theta y + (1 - \theta) B s$$

de otro modo

$$r = y$$

Fin

Hacer

$$B \leftarrow B - \frac{B s s^T B}{s^T B s} + \frac{r^T r}{s^T r}.$$

Si $\text{con}(B) > 10^4$ **hacer**

$$B = I_n$$

Fin

Notación:

Para el iterando (x_k, λ_k) usamos:

$$h_k = h(x_k), \nabla f_k = \nabla f(x_k), \nabla_x L_k = \nabla_x L(x_k, \lambda_k), v_k = (\nabla_x L_k, h_k)$$

2.1. Método

1. Parámetros: $tol = 10^{-5}$, $maxk = 100$, $c_1 = 10^{-2}$, $C_0 = 1$
2. Valores iniciales: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \approx x^*$ y $\lambda = 0_{mx1}$ y $B_0 = I_n$.
3. **Mientras** $\|v_k\| \geq tol$ y $k \leq maxk$ **hacer**

a) Resuelva el subproblema cuadrático:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (1/2)p^T B p + \nabla f_k^T p \\ \text{Sujeto a} \quad & A_k p + h_k = 0 \end{aligned}$$

con solución única, p_k y multiplicador de Lagrange λ_{k+1} .

- b) Escoga el parámetro C_{k+1} tal que $D_{p_k} \phi(x_k, C_{k+1}) < 0$.
- c) Sean $\alpha_k = 1$, $\phi_k = \phi(x_k, C_{k+1})$ y $D_k = D_{p_k} \phi(x_k, C_{k+1})$
Mientras $(\phi(x_k + \alpha_k p_k, C_{k+1}) > \phi_k + \alpha_k c_1 D_k)$ **hacer**
 $\alpha_k = \alpha_k / 2$.

Fin

- d) Actualizar
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
 $s_k = x_{k+1} - x_k$
 $y_k = \nabla_x L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \nabla_x L(x_k, \lambda_{k+1})$
- e) Actualizar B_{k+1} de acuerdo a la fórmula BFGS con esquema de Powell.
- f) Resolver para el nuevo multiplicador de Lagrange, λ_{k+1} :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|\nabla f_{k+1} + A_{k+1}^T \lambda\|_2 \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

- g) Actualizar: $x_k \leftarrow x_{k+1}$, $\lambda_k \leftarrow \lambda_{k+1}$ $B_k \leftarrow B_{k+1}$ y $k = k + 1$.
- h) Calcular $v_k = (\nabla_x L(x_k, \lambda_k), h_k)$ e ir al **Paso 3**.

Fin

3. Proyecto

Escribir en Matlab la función:

```
function [x, λ, k] = pcsglobal(fx, hx, x0)
% Método de programación Cuadrática Sucesiva con búsqueda de lineal,
% usando la función de mérito L-1 y actualización de la hessiana
% con la fórmula BFGS para el problema
% Min      fx
% Sujeto a hx = 0
%
% fx y hx son cadenas de caracteres con las funciones en Matlab
% de la función objetivo y las restricciones del problema
% El vector x0 es el valor inicial
% Salida
% x.- aproximación al mínimo local
% λ.- multiplicador de Lagrange asociado a x.
% k.- número de iteraciones realizadas.
%
% Debe usar las funciones: gradiente.m y jacobiana.m para calcular
% las primeras derivadas.
%
% Nombres completos de los integrantes del equipo
% Instrucciones del programa documentados.
```

Hacer el script, **esfera.m**, donde resuelva y grafique el problema inicial (1) con $np = 21$ puntos. Se fija el primer punto en $u_1 = (1, 0, 0)^T$.

4. Entrega del Proyecto

1. Entrega Jueves 5 de noviembre a las 18 horas.
2. Entrega única por TEAMS.
3. Equipos de a lo más tres integrantes.