Universidade do Minho
Álgebra Linear e Geometria Analítica EC
Exercícios 2 - Matrizes

1. Determine as matrizes A, B e C, quadradas de ordem 4, cujas entradas são dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & se \quad i > j \\ 0 & se \quad i = j \\ 1 & se \quad i < j \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i + j > 5 \\ 0 & se \quad i + j \leq 5 \end{cases} \qquad c_{ij} = (-1)^{i-j}$$

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule: a) BA b) $AB - 3C$ c) C^2 d) DE e) ED f) BB^T

3. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + A = 2(X - B)$
b) $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$

4. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

a) Calcule AB
b) Calcule A^{-1}

5. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Calcule a inversa de A.
b) Determine a matriz quadrada X, de ordem 3, tal que $AX = B$.

6. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcule AB.
b) Mostre que, em geral, se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = O$ e A é invertível então $B = O$.
c) A matriz A, dada no enunciado deste exercício, é invertível?

7. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Calcule AB e AC.

b) Mostre que, em geral, se A, B e C são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = AC$ e A é invertível então $B = C$.

c) A matriz A, dada no enunciado deste exercício, é invertível?

8. Verifique se:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Mostre que, em geral, se A e B são matrizes quadradas com a mesma ordem, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ se e só se $AB = BA$.

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule a matriz $(A^T)^T$ e compare-a com a matriz A.

b) Calcule as matrizes AC, $(AC)^T$ e $C^T A^T$ e compare-as.

c) Calcule as matrizes $(B^T C + D^T C)^T$ e $C^T(B + D)$ e compare-as.

11. Mostre que qualquer que seja a matriz A, a matriz AA^T é uma matriz quadrada simétrica.

12. Mostre que o produto de 2 matrizes ortogonais ainda é uma matriz ortogonal.

13. Sendo A uma matriz quadrada de ordem n designa-se por **traço** de A, e representa-se por trA, o elemento definido por:

$$tr\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Mostre que, quaisquer que sejam as matrizes A e B, quadradas de ordem n, se tem

$$tr(AB) = tr(BA).$$