Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
Mestrado Integrado em Engenharia Física

Cálculo Vetorial

1^0 teste — 17.06.2020

- O teste deve ser enviado num ficheiro único em formato pdf. Pode usar a aplicação Adobe Scan (ou outra). No entanto, em caso de dificuldade, aceito o envio de fotografias de cada uma página do teste.

- Escreva, no início da sua resolução, a seguinte frase:

  > "Declaro, por minha honra, que o conteúdo relativo à resolução deste teste, que vou enviar à Prof. Lisa Santos, é da minha integral autoria. Limitei-me a utilizar a pesquisa bibliográfica permitida e a calculadora gráfica ou científica. Em nenhuma resposta tive ajuda de pessoa alguma ou de *software* adicional."

- Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos.

- O teste tem a duração de 2h30. Os alunos têm de enviar a resolução do teste nos 15 minutos após o término do teste.

- O teste tem 5 perguntas e cada uma das quatro primeiras tem 4 versões (A, B, C, D). Deverá, para cada questão, escolher a versão que lhe corresponde, segundo a tabela da página seguinte

  Escreva o seu nome e número de aluno em todas as folhas que constituem a sua resolução do teste.
  Escreva, no início do teste, de forma bem visível, o dia em que nasceu e a identificação das questões que tem de resolver, como no exemplo:

  Dia de nascimento = 27 — 1B — 2A — 3C — 4D — 5

  Não se esqueça de considerar, em cada uma das quatro primeiras questões, apenas a letra que lhe diz respeito: uma e uma só de entre (A), (B), (C) ou (D)!
  Recorde que a sua letra varia de pergunta para pergunta.
  Seja organizado nas suas respostas.

Dia de nascimento	Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3	Pergunta 4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C
5	A	D	B	C
6	D	B	C	A
7	B	C	D	C
8	C	A	D	B
9	B	D	C	A
10	D	C	A	B
11	C	A	B	D
12	A	B	D	C
13	D	B	A	C
14	B	A	C	D
15	A	C	B	D
16	C	D	B	A
17	D	C	B	A
18	C	B	A	D
19	B	A	D	C
20	A	D	C	B
21	D	A	C	B
22	A	C	B	D
23	C	B	D	A
24	B	D	A	C
25	C	D	B	A
26	D	B	A	C
27	B	A	C	D
28	A	C	D	B
29	C	A	D	B
30	A	D	B	C
31	D	B	C	A

Exercício 1.

$$\text{(A)} \qquad \int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2-2x+2} x\,dy\,dx.$$

$$\text{(B)} \qquad \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x^2+2x+2} y\,dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx.$$

$$\text{(C)} \qquad \int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2-2y+2} x\,dx\,dy.$$

$$\text{(D)} \qquad \int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2+2y+2} y\,dx\,dy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy.$$

a) Esboce o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pelos limites de integração.
b) Inverta a ordem de integração.
c) Calcule o integral, usando a ordem de integração que entender.

Exercício 2. Considere as funções

$$\text{(A)} \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = x + y.$$

$$\text{(B)} \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = x - y.$$

$$\text{(C)} \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = x + y.$$

$$\text{(D)} \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = x - y.$$

a) Determine os pontos críticos de f e verifique se são maximizantes, minimizantes.
b) Seja $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$. Sabendo que existe $\min f_{|\Sigma}$, calcule-o.

Exercício 3. Considere o conjunto

(A) $$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1,\ 2x^2 + 2y^2 \leq z + 3\right\}.$$

(B) $$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 5,\ \sqrt{4x^2+4y^2} \geq 2z^2 + 5\right\}.$$

(C) $$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -1,\ z \leq -(x^2+y^2) + 2\right\}.$$

(D) $$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \geq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq -z^2 + 3\right\}.$$

a) Explicite os limites de integração e a função a integrar para o cálculo do volume da região em coordenadas cilíndricas;

b) Explicite os limites de integração e a função a integrar para o cálculo do volume da região em coordenadas cartesianas.

Exercício 4. Considere o campo de vectores

(A) $$\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy + y\cos(xy), x^2 + x\cos(xy) + y^2).$$

(B) $$\boldsymbol{F}(x,y) = (y^2 - y\,\mathrm{sen}\,(xy) + x^2, 2xy - x\,\mathrm{sen}\,(xy)).$$

(C) $$\boldsymbol{F}(x,y) = (y^2 + y\cos(xy) + x^2, 2xy + x\cos(xy)).$$

(D) $$\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy - y\,\mathrm{sen}\,(xy), x^2 - x\,\mathrm{sen}\,(xy) + y^2).$$

a) Mostre que $\boldsymbol{F}$ é conservativo.

b) Calcule $\int_c \boldsymbol{F} \cdot ds$, sendo c uma curva que liga o ponto $(1, \pi)$ ao ponto $(-1, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 5. Sejam $R, a > 0$ tais que $\alpha = \frac{R}{2a} < 1$ e sejam

$$C_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \quad \text{e} \quad D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Mostre que

$$\frac{1}{2}\iint_{D_a} dxdy = \iint_{D_a \setminus C_R} dxdy \iff (1 - 2\alpha^2)\arccos\alpha + \alpha\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{\pi}{4}.$$