o algoritmo de Gauss-Jordan

O método de eliminação de Gauss, além de nos facultar um algoritmo de resolução de um sistema de equações lineares, dá-nos também um processo de cálculo da inversa de uma matriz quadrada (se esta existir). De facto, se uma matriz quadrada A de ordem n tiver característica n, a sua inversa vai ser a matriz X que satisfaz $AX = I_n$.
Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as colunas de X, e $e_1, e_2, \ldots, e_n$ as colunas de I_n. Isto é,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, determinar X tal que

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = AX = I_n = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

é o mesmo que determinar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots, \quad Ax_n = e_n.$$

A ideia do chamado algoritmo de Gauss-Jordan é efetuar a eliminação de Gauss em todos os n sistemas em simultâneo, não terminando quando se obtém a matriz em forma de escada U; usando os pivôs para obter zeros por cima da diagonal, continuamos o algoritmo na sua forma ascendente, e finalmente dividimos cada linha pelo pivô correspondente. Os sucessivos passos são aplicados à matriz $n \times 2n$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right].$$

ALGORITMO. Cálculo da inversa de uma matriz

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertível. Para calcular a inversa de A, efetua-se a parte descendente do método de eliminação de Gauss na matriz aumentada $[A \,|\, I_n]$. Como há n pivôs (caso contário A não seria invertível), anulam-se com operações elementares todos os elementos por cima da diagonal na matriz à esquerda. Finalmente, divide-se cada linha pelo respectivo pivô. A matriz obtida é $\left[I_n \,|\, A^{-1}\right]$.

Exemplo 14.1. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pretendemos verificar se A é invertível e, em caso, afirmativo, calcular a sua inversa. Para tal, começamos por aplicar a parte descendente do método de eliminação de Gauss à matriz

$$[A \,|\, I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Temos

$$[A \,|\, I_3] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

exemplo

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Como podemos observar, há 3 pivôs, 1, -3 e -1, pelo que A é invertível. Iniciamos, agora, a eliminação ascendente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

exemplo

Temos já uma matriz diagonal do lado esquerdo.

Resta-nos dividir a segunda linha por -3 e a terceira por -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] = \left[I_3 \,|\, A^{-1} \right]$$

Concluimos, assim, que A é invertível e que a sua inversa é

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right].$$