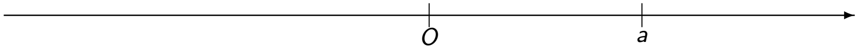
álgebra vetorial

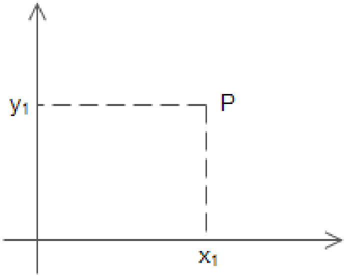
Vetores no espaço $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ Quando $n = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$ que pode ser representado por uma reta orientada:



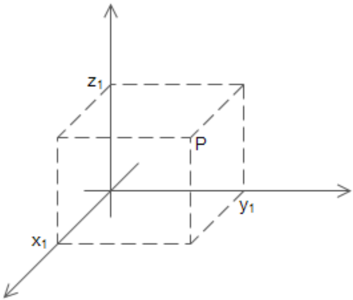
Um real a é identificado com o ponto P de abcissa a ou com o vetor $\overrightarrow{OP}$ definido pela origem da reta e pelo ponto P.

$n = 2$ Quando $n = 2$, temos o conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, que pode ser representado por um plano definido por duas retas orientadas (às quais chamamos eixos cartesianos):



Um par (x_1, y_1) é identificado com o ponto P de abcissa x_1 e ordenada y_1 ou com o vetor $\overrightarrow{OP}$ definido pela origem dos eixos e pelo ponto P.

$n = 3$ Quando $n = 3$, temos o conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$, que pode ser representado pelo espaço real definido por três eixos:



Um triplo (x_1, y_1, z_1) é identificado com o ponto P de abcissa x_1, ordenada y_1 e cota z_1 ou com o vetor $\overrightarrow{OP}$ definido pela origem dos eixos e pelo ponto P.

vetores

Embora se perca a interpretação geométrica, é fácil generalizar estas definições a dimensões maiores e definir o espaço $\mathbb{R}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1. Para um inteiro positivo n, o conjunto
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ diz-se o espaço euclidiano de dimensão n.

Um elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ diz-se um ponto ou um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2. $(1, 2)$ é um vetor do espaço $\mathbb{R}^2$ e $(-1, 0, 0, 3, 7)$ é um vetor do espaço $\mathbb{R}^5$.

operações com vetores

As definições de soma de vetores e de produto de um número real por um vetor decorrem naturalmente das definições análogas no plano e no espaço.

Definição 1.3. Dados dois vetores $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se uma adição $x + y$ e uma multiplicação por um escalar αx (onde $\alpha \in \mathbb{R}$) por

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \qquad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Exemplo 1.4. $(1, 3, -2, 5, 4) + (2, 0, 4, 1, -6) = (3, 3, 2, 6, -2)$;
$4(-1, 0, 2, 6) = (-4, 0, 8, 24)$.

Observação 1.5. O elemento zero da adição é o vetor nulo $0 = (0, 0, ..., 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

propriedades da adição e da multiplicação por um escalar

Teorema 1.6. Seja $n \in \mathbb{N}$. Para todos os vetores $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $x + 0 = x$
4. $x + (-x) = 0$
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $1x = x$

produto interno euclidiano

Definição 1.7. O produto interno euclidiano (ou produto escalar usual) de dois vetores $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ representa-se por $x \cdot y$ ou $\langle x, y \rangle$ e é o real definido por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemplo 1.8. Em $\mathbb{R}^5$,

$$\begin{aligned} (1, 2, 0, -1, -3) \cdot (2, -1, 8, -1, 0) \quad & = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 0 \times 8 \\ & +(-1) \times (-1) + (-3) \times 0 \\ & = 2 - 2 + 0 + 1 + 0 \\ & = 1. \end{aligned}$$

propriedades do produto interno euclidiano

O produto interno euclidiano satisfaz as seguintes condições.

Proposição 1.9. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $x \cdot y = y \cdot x$;
2. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
3. $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$;
4. $x \cdot x \geq 0$, e $x \cdot x = 0$ se e só se $x = 0$.

Teorema 1.10. **Teorema de Cauchy-Schwarz.** Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq \sqrt{x \cdot x}\sqrt{y \cdot y}.$$

norma euclidiana

Definição 1.11. A norma euclidiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

Observação 1.12. A norma de um vetor é um escalar não negativo. Se $n = 1$, $\| x \| = |x|$ e, se $n = 2$, então $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é dada pelo Teorema de Pitágoras.

Exemplo 1.13. Em $\mathbb{R}^2$, $\| (3, 4) \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

propriedades da norma euclidiana

A norma euclidiana satisfaz as seguintes condições.

Proposição 1.14. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\| x \| \geq 0$, e $\| x \| = 0$ se e só se $x = 0$;
2. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$;
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Observação 1.15. A condição (3) é conhecida como **desigualdade triangular**.

Observação 1.16. A desigualdade do Teorema de Cauchy-Schwarz pode ser escrita como

$$|x \cdot y| \leq \| x \| \| y \| \, .$$

ângulo de dois vetores

A noção de ângulo entre dois vetores pode ser generalizada a vectores de $\mathbb{R}^n$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Através desta desigualdade, tem-se, para x e y não nulos

$$|x \cdot y| \leq \| x \| \| y \| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|x \cdot y|}{\| x \| \| y \|} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{x \cdot y}{\| x \| \| y \|} \leq 1.$$

Como é sabido, se θ é um ângulo cuja medida varia entre 0 e π, então $\cos\theta$ percorre todos os valores entre -1 e 1. Este facto e as desigualdades acima permitem a seguinte definição.

ângulo de dois vetores

Definição 1.17. Sejam x e y dois vetores de $\mathbb{R}^n$. O ângulo θ formado pelos dois vetores é o ângulo tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ e

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\| x \| \| y \|}.$$

Exemplo 1.18. Em $\mathbb{R}^5$, consideremos os vetores $(1, 1, 1, 0, 1)$ e $(-1, -1, -1, \sqrt{6}, 0)$ e representemos por θ o ângulo por eles formado. Então,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(1,1,1,0,1)\cdot(-1,-1,-1,\sqrt{6},0)}{\| (1,1,1,0,1) \| \| (-1,-1,-1,\sqrt{6},0) \|} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{4}\sqrt{9}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}.$$

O ângulo $\theta \in [0, \pi]$ cujo cosseno é $-\frac{1}{2}$ é o ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Assim, o ângulo formado pelos vetores $(1, 1, 1, 0, 1)$ e $(-1, -1, -1, \sqrt{6}, 0)$ é $\frac{2\pi}{3}$.

ortogonalidade

Definição 1.19. Dois vetores dizem-se ortogonais se o ângulo formado por eles for um ângulo reto.

Observação 1.20. Dois vetores são ortogonais se e só se o ângulo por eles formado for $\frac{\pi}{2}$, ou seja, se e só se o produto interno euclidiano entre eles for nulo.

Exemplo 1.21. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Temos que

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 &= 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \\ e_2 \cdot e_3 &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

Assim, os vetores e_1, e_2 e e_3 são ortogonais dois a dois.

conjuntos ortonormais

Definição 1.22. Um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se ortogonal se os vetores do conjunto forem ortogonais dois a dois. Um conjunto ortogonal diz-se ortonormado se a norma de cada vetor do conjunto é 1.

Exemplo 1.23. Consideremos de novo os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Facilmente se verifica que

$$\| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1.$$

Como já vimos no Exemplo 1.21, o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é ortogonal. Logo, $\{e_1, e_2, e_3\}$ é ortonormado. Ao conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ chamamos base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.24. Se nenhum dos vetores de um conjunto ortogonal é o vetor nulo, podemos obter um conjunto ortonormado efetuando o produto de cada vetor pelo inverso da sua norma, uma vez que, dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\left\| \frac{1}{\| x \|} x \right\| = \left| \frac{1}{\| x \|} \right| \, \| x \| = \frac{1}{\| x \|} \, \| x \| = 1.$$

distância euclidiana

Definição 1.25. A distância euclidiana entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definida pela norma do vector $x - y$, ou seja,

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}.$$

A distância euclidiana satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.26. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

1. $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Observação 1.27. A condição (3) dá-nos a já vista **desigualdade triangular**.

produto externo

O produto externo e o produto misto de vetores apenas se calculam em espaços a três dimensões.

Definição 1.28. Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. O produto externo de x e y é o vetor

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Exemplo 1.29. Sejam $x = (1, 2, 3)$ e $y = (4, 5, 6)$. Então,

$$x \times y = (2 \times 6 - 3 \times 5, -1 \times 6 + 3 \times 4, 1 \times 5 - 2 \times 4) = (-3, 6, -3).$$

Verifica-se que $(-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = 0$ e $(-3, 6, -3) \cdot (4, 5, 6) = 0$, ou seja, o vetor $x \times y$ é ortogonal ao vetor x e ao vetor y.

propriedades do produto externo

O produto externo satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.30. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $x = \beta y$ ou $y = \beta x$, então $x \times y = (0,0,0)$.
2. Em particular, $x \times x = (0,0,0)$ e $x \times (0,0,0) = (0,0,0) \times x = (0,0,0)$.
3. $(x \times y) \cdot x = 0$ ($x \times y$ é ortogonal a x).
4. $(x \times y) \cdot y = 0$ ($x \times y$ é ortogonal a y).
5. $\| x \times y \| = \| x \| \| y \| \sin\theta$, onde θ é o ângulo formado por x e y.
6. $x \times y = -(y \times x)$.
7. $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$.
8. $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.
9. $\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y = x \times (\alpha y)$.

aplicações do produto externo

Aplicações do produto externo 1.31.

1. Dois vetores x e y não nulos são paralelos se e só se $x \times y$ é o vetor nulo.
2. A área do paralelogramo definido por dois vetores u e v é dada por $\| u \times v \|$.

produto misto

Definição 1.32. Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $z = (z_1, z_2, z_3)$ três vetores de $\mathbb{R}^3$. O produto misto de x, y e z é

$$[x, y, z] = x \cdot (y \times z)$$

O produto misto satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.33. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

1. $x \cdot (y \times z) = 0$ se e só se um dos vetores x, y ou z é combinação dos outros (por exemplo, se $x = (1, 2, 3)$, $y = (1, 0, 1)$ e $z = (1, 4, 5)$, então $x \cdot (y \times z) = 0$ uma vez que $z = (1, 4, 5) = 2(1, 2, 3) - (1, 0, 1) = 2x - y$).
2. $x \cdot (y \times z) = (x \times y) \cdot z$ (no produto misto, as operações podem ser trocadas, mantendo a ordem dos vetores).

O volume do paralelipípedo definido por três vetores x, y e z é dada por $|[x, y, z]|$.

Consideremos a reta que passa num ponto A e que tem a direção de um vetor b.

Representemos por a o vetor com origem em 0 e extremidade em A (ou seja, $a = \overrightarrow{0A}$).

É claro que o vetor r de origem em 0 e extremidade final num ponto R da reta pode ser escrito como

$$r = a + \lambda b,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diferentes valores de λ correspondem a diferentes pontos R da reta.

Se $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$, temos que $r = (x, y, z)$ é dado por

$$(x, y, z) = (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, a_3 + \lambda b_3),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = constante.$$

Considerando o produto externo de cada um dos membros da equação $r = a + \lambda b$ e b, temos

$$r \times b = (a + \lambda b) \times b$$

Como $b \times b = 0$, obtemos uma equação alternativa para a reta:

$$(r - a) \times b = 0.$$

Exemplo 1.34. Se $A(1,2,3)$ e $b = (-1,0,4)$, temos que a reta r que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor b é dada pela equação $(x-1, y-2, z-3) \times (-1,0,4) = 0$, ou seja,

$$(4y-8, -4x-z+7, y-2) = (0,0,0).$$

A equação de um plano com vetor normal n que contém um ponto A é

$$(r - a) \cdot n = 0.$$

Exemplo 1.35. Se $A(1, 2, 3)$ e $b = (-1, 0, 4)$, temos que o plano π que contém o ponto A e tem vetor normal b é dado pela equação $(x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (-1, 0, 4) = 0$, ou seja,

$$-(x - 1) + 4(z - 3) = 0.$$

Por definição, uma esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que são equidistantes a um ponto fixo do espaço, sendo essa distância comum igual ao raio da esfera.

Isto pode ser expresso em notação vetorial por

$$||r - c||^2 = (r - c) \cdot (r - c) = a^2,$$

onde c é o vetor de origem em 0 e extremidade final no centro da esfera e a é o seu raio.