$1^{\underline{o}}$ Teste de Álgebra Linear e Geometria Analítica EC

14 de novembro de 2020 duração 1h 45m

Nome : ______________________________ Nº __________

Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:
i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação, quando adequado, nos espaços indicados.
ii) a resolução de sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss ou de Gauss- Jordan.

1. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v} = (1,1,\sqrt{2})$.
   (a) Determine o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.
   (b) Determine um vetor $\overrightarrow{w}$ tal que o paralelipípedo definido pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tenha volume 4.

a) O ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é

$$\theta = \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \arccos \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2} = \pi/4$$

b) Seja $\vec{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. O volume do paralelipípedo definido por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a:

$$|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}| = |(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)\cdot(x,y,z)| = |\sqrt{2}x-\sqrt{2}y|$$

O volum é igual a 4 se:

$$|\sqrt{2}x-\sqrt{2}y| = 4$$

1º caso $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y \geq 0$

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y = 4 \Leftrightarrow y = -2\sqrt{2}+x$$

2º caso $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y < 0$

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y = -4 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2}+x$$

Podemos entаo escolher $\vec{w} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$.

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere três pontos de coordenadas: $(1,2,-1)$, $(1,2,2)$ e $(0,1,1)$.

(a) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que contém esses três pontos.

(b) Determine um sistema de equações cartesianas da reta que passa no ponto de coordenadas $(1,0,1)$ e que é ortogonal aos vetores do plano $\mathcal{P}$.

a) Um vetor ortogonal ao plano é um vetor $\vec{n}$ paralelo a $((1,2,-1)-(0,1,1))\times((1,2,2)-(0,1,1))$

Podemos então tomar

$$\vec{n}=\frac{1}{3}(1,1,-2)\times(1,1,1) = \frac{1}{3}(3,-3,0) = (1,-1,0).$$

Sendo $(0,1,1)$ um ponto do plano, qualquer ponto $P(x,y,z)$ do plano, verifica

$$((x,y,z)-(0,1,1))\cdot(1,-1,0)=0$$

ou seja, $x-(y-1)=0$.

Uma equaç. cartesiana do plano é $x-y+1=0$.

b) Se a reta é ortogonal ao plano, então a direção da reta é definida pelo vetor $\vec{n}=(1,-1,0)$. Logo uma equaç. vetorial da reta é

$$P=(1,0,1)+\lambda(1,-1,0) \quad \text{com } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Se as coordenadas de P são x, y e z, então

$$(x,y,z)=(1+\lambda,-\lambda,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=x-1 \\ \lambda=-y \\ z=1 \end{cases}$$

pelo que um sistema de equaç. cartesianas da reta é

$$\begin{cases} x-1=-y \\ z=1 \end{cases}.$$

3. Seja $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^j 3(i-j) & \text{se } i > j \\ i+j & \text{se } i = j \\ -2j & \text{se } i < j \end{cases}$.

Sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Escreva a tabela da matriz A e verifique se A é uma matriz simétrica e/ou se é ortogonal.

(b) Verifique se $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz B.

(c) Determine a matriz X tal que $B \cdot (X + A) = B \cdot A + C \cdot C^T \cdot B$.

(d) Verifique se D é invertível e, em caso afirmativo, calcule a inversa de D.

a)

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -3 & 4 & -6 \\ -6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. A não é simétrica, pois $A \neq A^T$. Basta notar que $a_{21} = -3 \neq -4 = a_{12}$.

A é ortogonal se e só se $A \cdot A^T = I_3$.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -3 & 4 & -6 \\ -6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 \\ -4 & 4 & 3 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \neq I_3 .$$

Logo A não é ortogonal.

b)

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Então $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ é a inversa de B.

c) Como B é invertível,

$$B(X+A) = B \cdot A + CC^T B \iff X + A = B^{-1}(B.A + CC^T B)$$
$$\iff X + A = B^{-1}BA + B^{-1}CC^T B$$
$$\iff X = A + B^{-1}CC^T B - A$$
$$\iff X = B^{-1}CC^T B$$
$$\iff X = B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot B$$
$$\iff X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\iff X = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3/2 & 2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Aqui já podemos concluir que a matriz é invertível porque $r(D) = 3$.

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Logo $D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Seja $t \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte sistema de 4 equações lineares em 3 incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +3x_3 = & 2 \\ & (t+2)\,x_2 & -x_3 = & -3 \\ x_1 & +(t+3)\,x_2 & +2x_3 = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 = & t+1 \end{cases}.$$

(a) Resolva o sistema no caso particular em que $t = -2$.

(b) Considerando que t é um número real qualquer, estude a classificação do sistema em função do parâmetro t, ou seja, determine os valores reais de t para os quais o sistema é:
(*i*) impossível (*ii*) possível e determinado, (*iii*) possível e indeterminado.

a) Seja $t=-2$. Resolvendo o sistema pelo método de condensação de Gauss tem-se que:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 1 & t+3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & t+1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{array}\right] \underset{(t=-2)}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema dado é então equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_3 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 7 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

O conjunto das soluções é $\{(-\alpha-7, \alpha, 3) \; : \; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b) Usando as três primeiras etapas da condensação de Gauss efetuada em a) temos que

$$[A \mid B] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & t+2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Se $t=-2$, pelo que vimos em a), o sistema é possível e indeterminado.

Se $t \neq -2$, $r(A) = r(A \mid B) = 3$ = nº de incógnitas, pelo que o sistema é possível e determinado.

O sistema não é impossível, qualquer que seja o valor de t.

COTAÇÃO:

$1 - a)2 \quad b)2 \qquad 2 - a)2 \quad b)2 \qquad 3 - a)1.5 \quad b)1.5 \quad c)2 \quad d)2 \qquad 4 - a)2.5 \quad b)2.5$