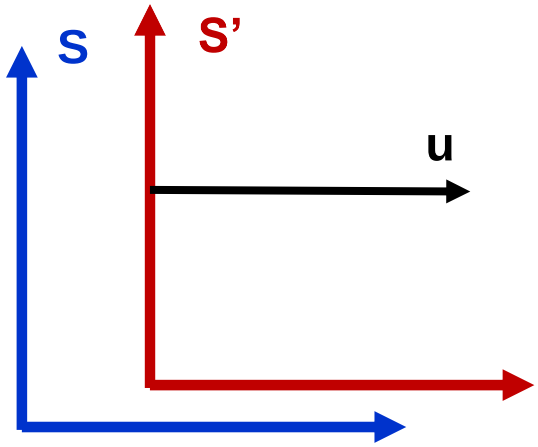
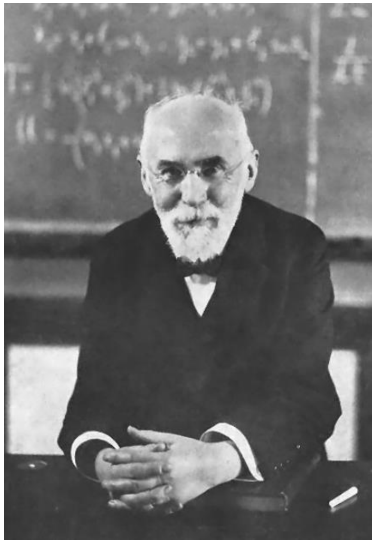
Transformações do Lorentz





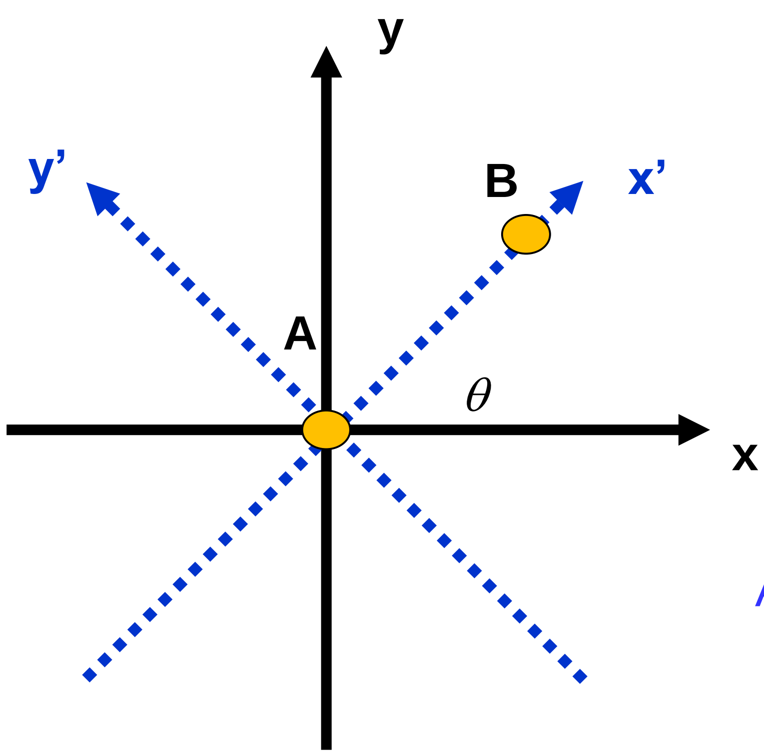
$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$
$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$

$$x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right)$$
$$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right)$$

com

$$\beta = u / c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Analogia com rotações



Rotação dum sistema de coordenados

$$x' = \cos\theta x + \sin\theta y$$

$$y' = \cos\theta y - \sin\theta x$$

As coordenados do ponto B são diferentes
No sistema x,y e no sistema x',y'

As transformações de Lorentz são semelhantes

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$

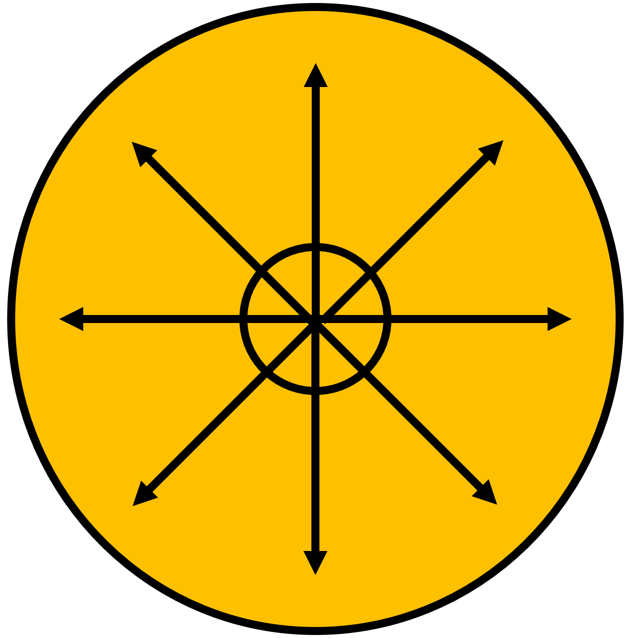
Sobre as rotações a distância entre pontos A e B mantêm se invariante.

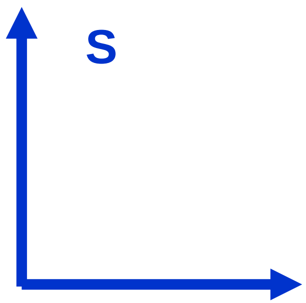
$$\sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(x'_B - x'_A\right)^2 + \left(y'_B - y'_A\right)^2}$$

Haverá uma quantidade invariante sobre transformações de Lorentz?

O Intervalo Invariante

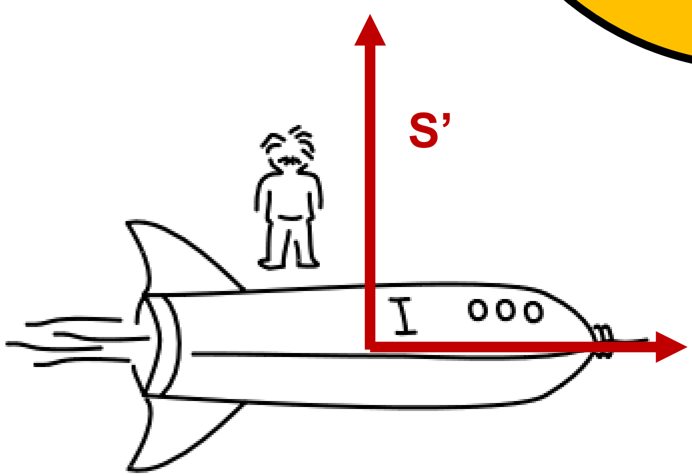
Todos os observadores concordam a cerca de velocidade da luz.
Considere um flash da luz esférica emitida no origem no instante t = t’ = 0





Por um observador em S, a fronteira do pulso da luz é dada pela relação

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \vec{r} \bullet \vec{r}$$



Por um observador em S’, a fronteira do pulso da luz é dada pela relação

$$(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \vec{r}' \bullet \vec{r}'$$

O Intervalo Invariante

Isso sugere que consideramos a quantidade

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \qquad y = y'$$

$$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \qquad z = z'$$

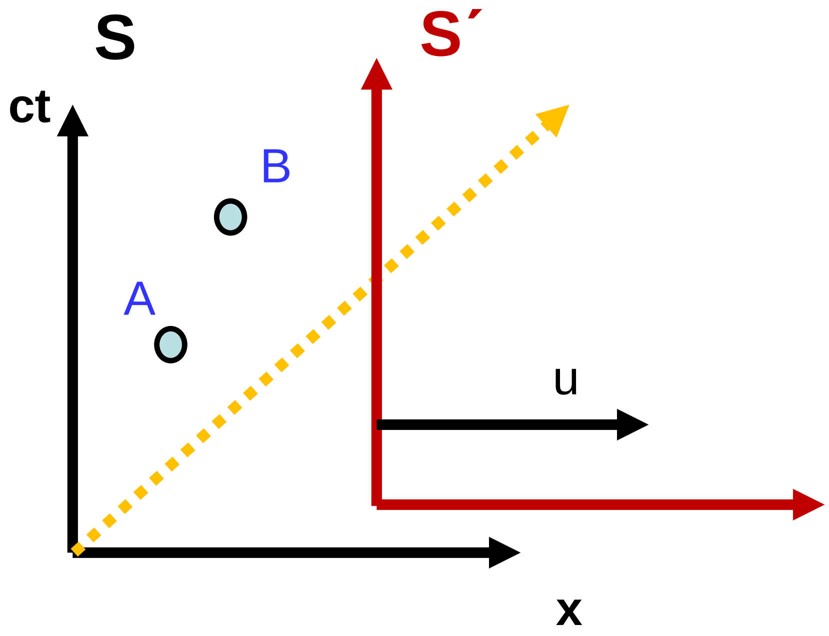
$$\begin{aligned}
\Delta s^2 &= \gamma^2\left(ct' + \beta x'\right)^2 - \gamma^2\left(x' + \beta ct'\right)^2 - y'^2 - z'^2 \\
&= \gamma^2\left(c^2t'^2 + 2\beta cx't' + \beta^2 x'^2\right) - \gamma^2\left(x'^2 + 2\beta cx't' + \beta^2 c^2 t'^2\right) - y'^2 - z'^2 \\
&= \gamma^2 c^2 t'^2\left(1 - \beta^2\right) - \gamma^2 x'^2\left(1 - \beta^2\right) - y'^2 - z'^2 \\
&= c^2 t'^2 - x' - y'^2 - z'^2 \\
&= \Delta s'^2
\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Em coordenados 3d a distância entre 2 pontos é sempre positiva

Na relatividade (4d, espaço-tempo) Δs^2 pode ser positivo, nulo, ou negativo

$\Delta s^2>0$ Separação temporal



$$\Delta s^2 = c^2\left(t_B - t_A\right)^2 - \left(x_B - x_A\right)^2$$
$$= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$
$$> 0$$

É possível encontrar um referencial onde os eventos ocorrem no mesmo sitio $\Delta x' = 0$

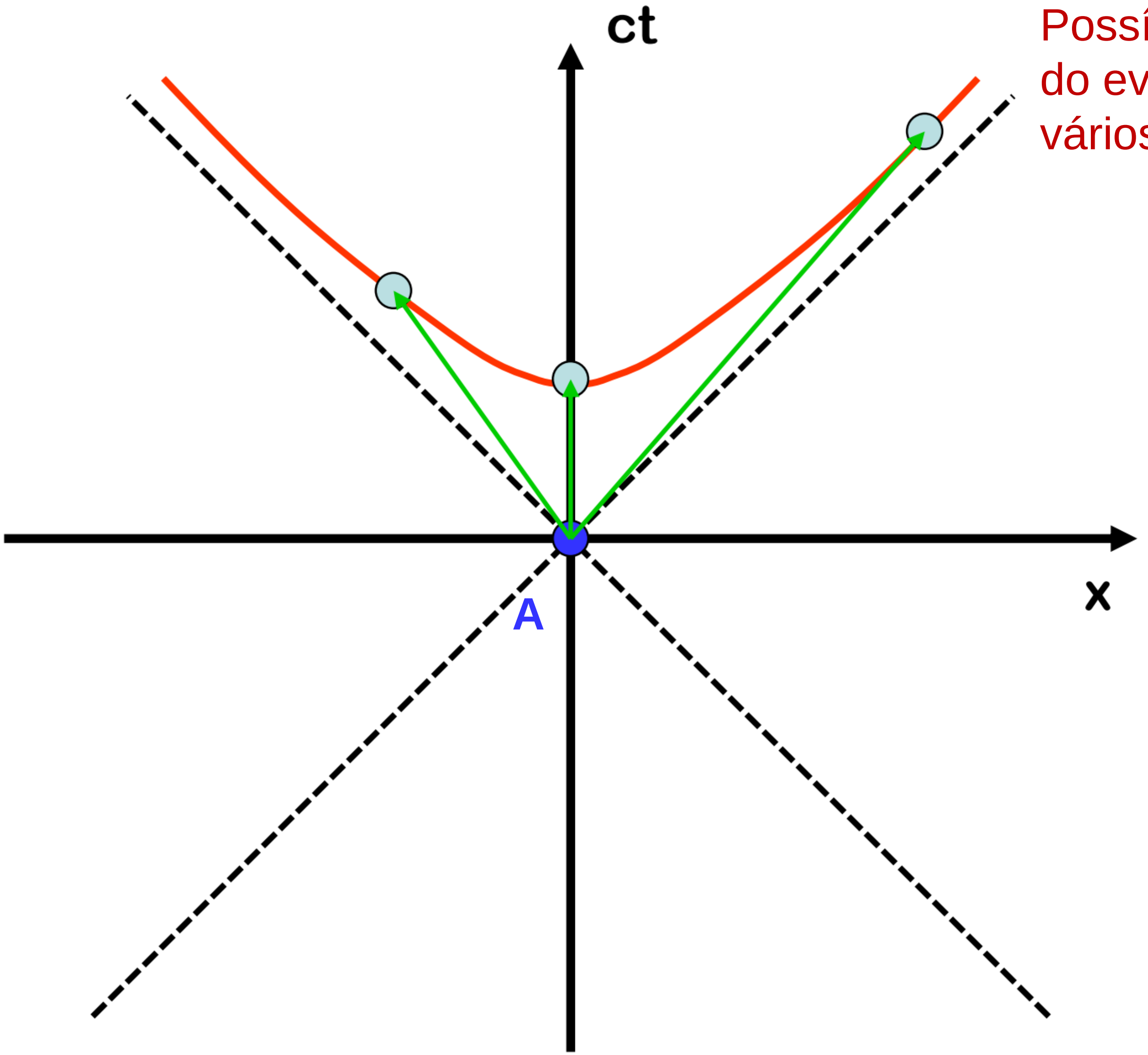
$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c \Delta t\right)$$
$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta \Delta x\right)$$

$$\Delta x' = 0 \Rightarrow \quad \Delta x = \beta c \Delta t$$
$$\beta c = u = \Delta x / \Delta t$$

No entanto para qualquer referencial evento B ocorre depois evento A

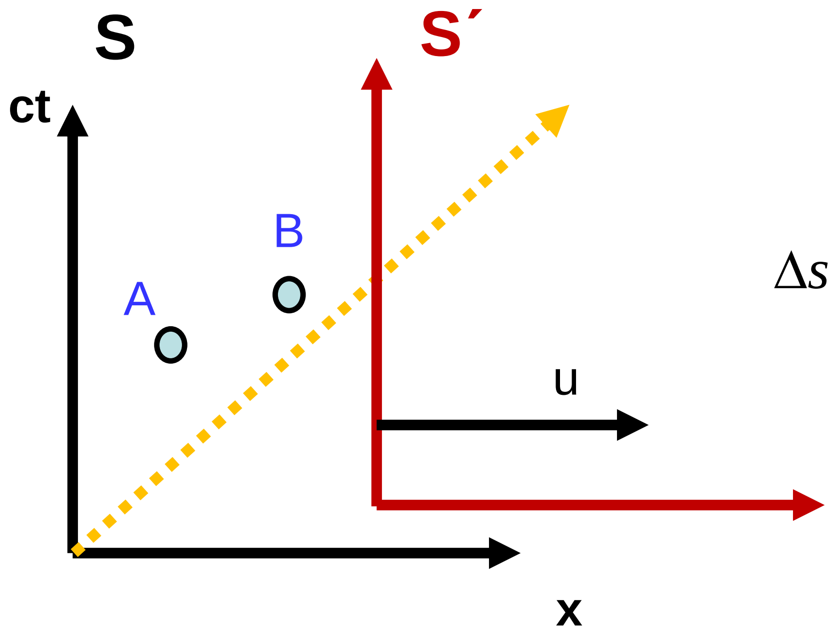
Separação temporal

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad \Delta s^2 > 0 \Rightarrow (c\Delta t)^2 > (\Delta x)^2$$



Possíveis posições do evento **B** em vários referenciais

$\Delta s^2<0$ Separação espacial



$$\Delta s^2 = c^2\left(t_B - t_A\right)^2 - \left(x_B - x_A\right)^2$$
$$= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$
$$< 0$$

É possível encontrar um referencial onde os eventos ocorrem simultaneamente $\Delta t' = 0$

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c\Delta t\right)$$
$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta\Delta x\right)$$

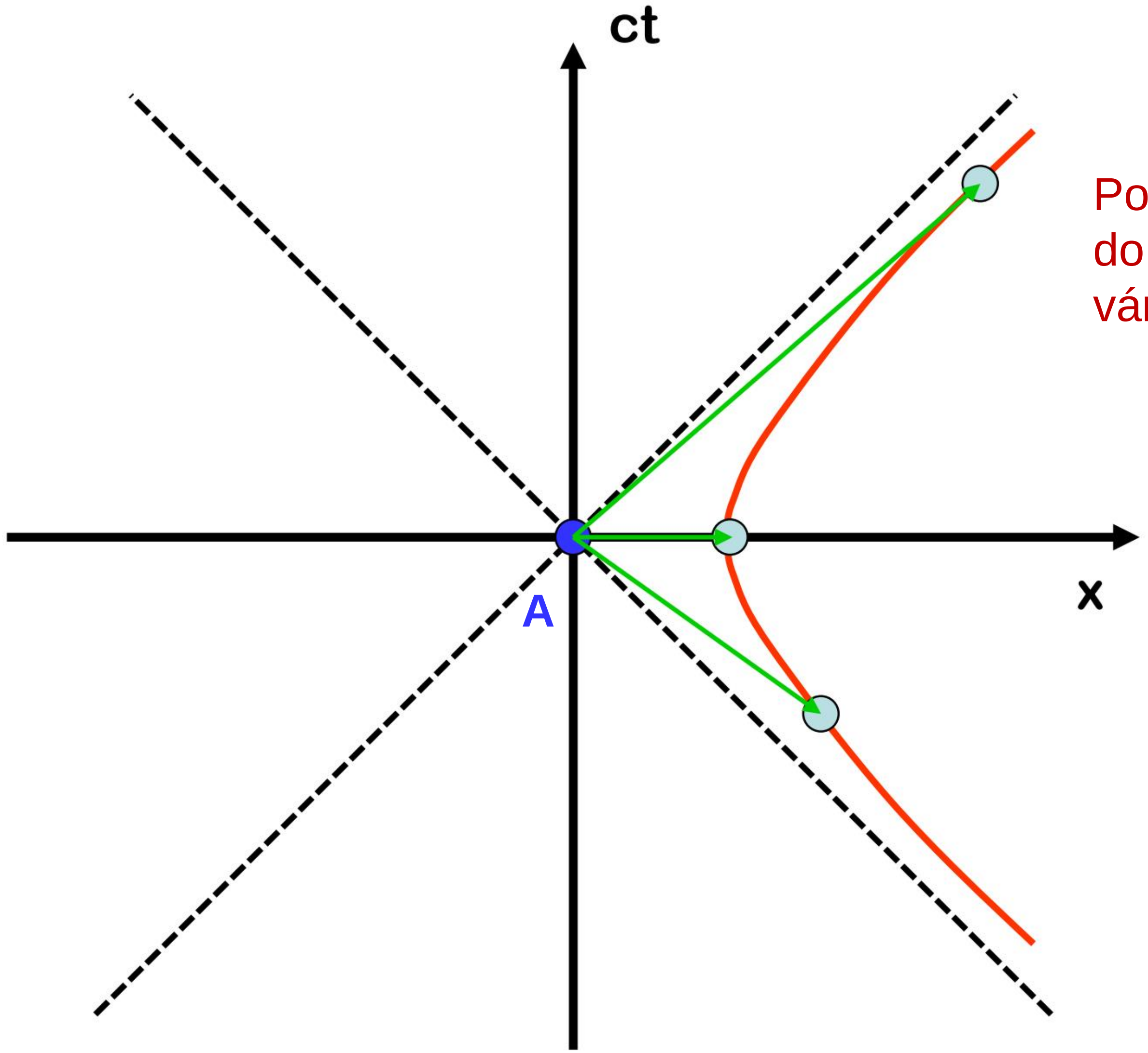
$$\Delta t' = 0 \Rightarrow \quad c\Delta t = \beta\Delta x$$
$$\beta c = u = c^2\Delta t / \Delta x$$

Até para $c^2\Delta t/\Delta x < u < c$ Evento B ocorre antes de evento A.
Logo nunca poderá haver uma relação causal entre eventos com $\Delta s^2<0$

No entanto para qualquer referencial evento B ocorre sempre mais a direita.

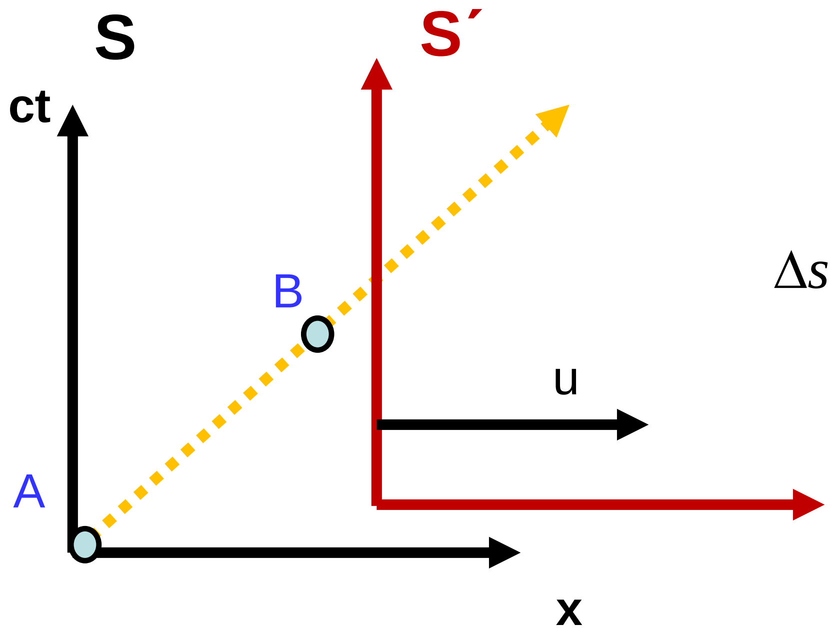
Separação Espacial

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \qquad \Delta s^2 < 0 \Rightarrow (c\Delta t)^2 < (\Delta x)^2$$



Possíveis posições do evento **B** em vários referenciais

$\Delta s^2 = 0$ Separação luminosa



$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2\left(t_B - t_A\right)^2 - \left(x_B - x_A\right)^2 \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Afirma que a velocidade da luz é igual para todos os referências

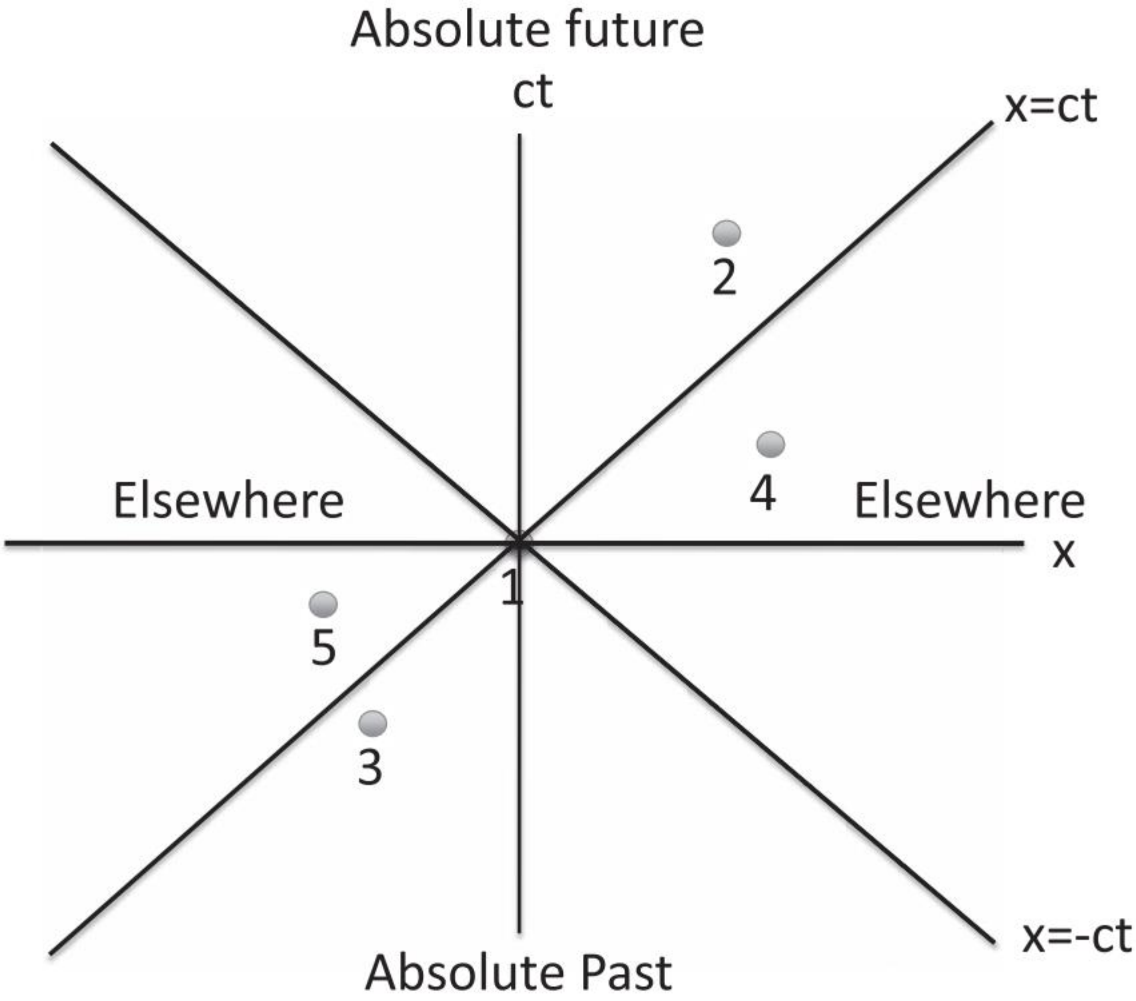
$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c \Delta t\right) = \gamma c \Delta t \left(1 - \beta\right)$$

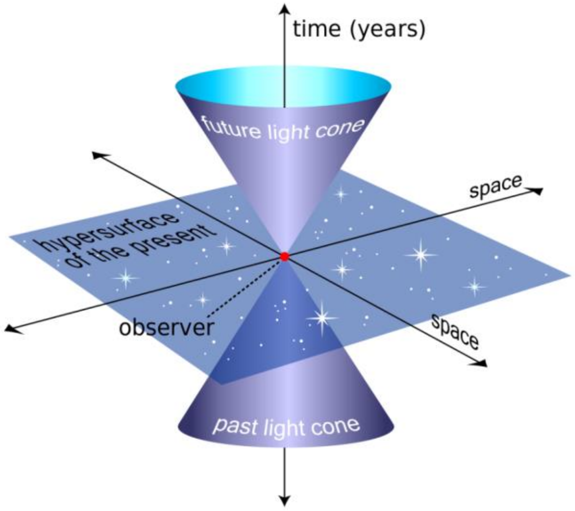
$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta \Delta x\right) = \gamma c \Delta t \left(1 - \beta\right)$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma c \Delta t\left(1-\beta\right)}{\left[\dfrac{\gamma c \Delta t\left(1-\beta\right)}{c}\right]} = c$$

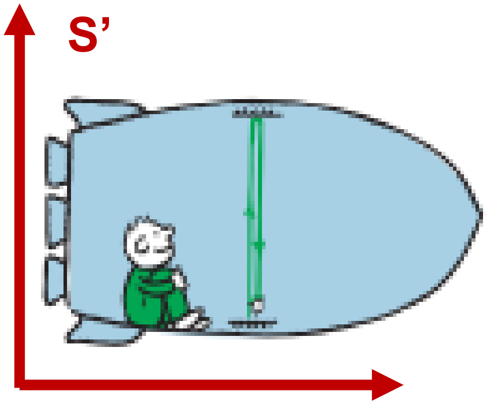
$$\Delta x = c\Delta t$$

causalidade





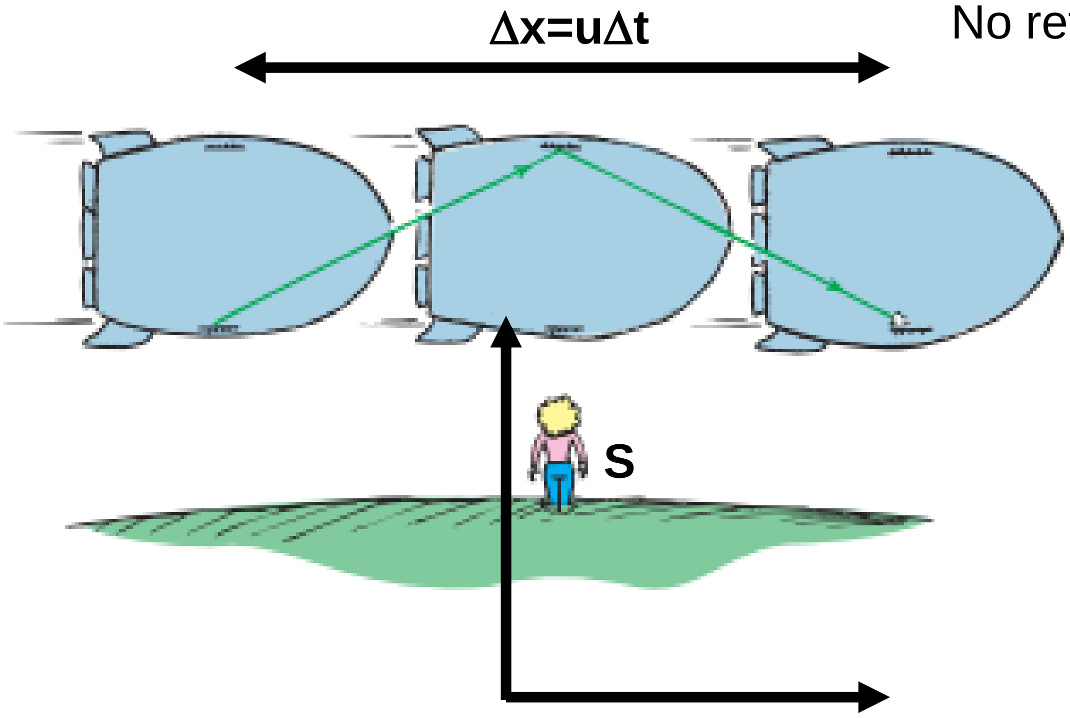
Aplicação –dilatação do tempo



No referencial S´ temos

$$\Delta x' = 0,\ \Delta t' = \Delta t_0$$

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t_0^2$$



No referencial S temos

$$\Delta x = u\Delta t,\ \Delta t$$

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$= c^2\Delta t^2 - u^2\Delta t^2$$

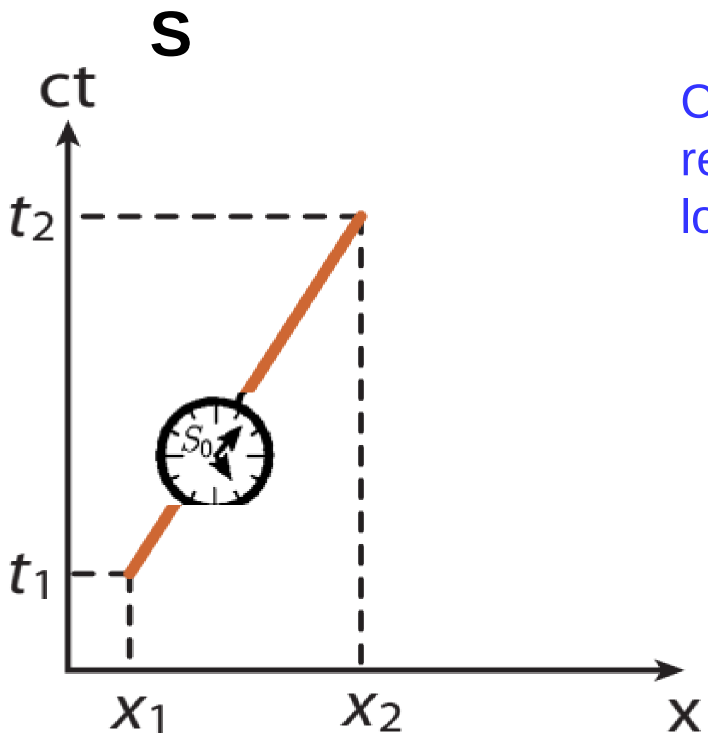
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2\left(1-\beta^2\right)$$

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

$$c^2\Delta t_0^2 = c^2\Delta t^2\left(1-\beta^2\right)$$

$$\gamma\Delta t_0 = \Delta t$$

Diagramas de Minkowski



Considere um relógio que se desloca no referencial S com uma velocidade u ao longo do eixo dos xxs.

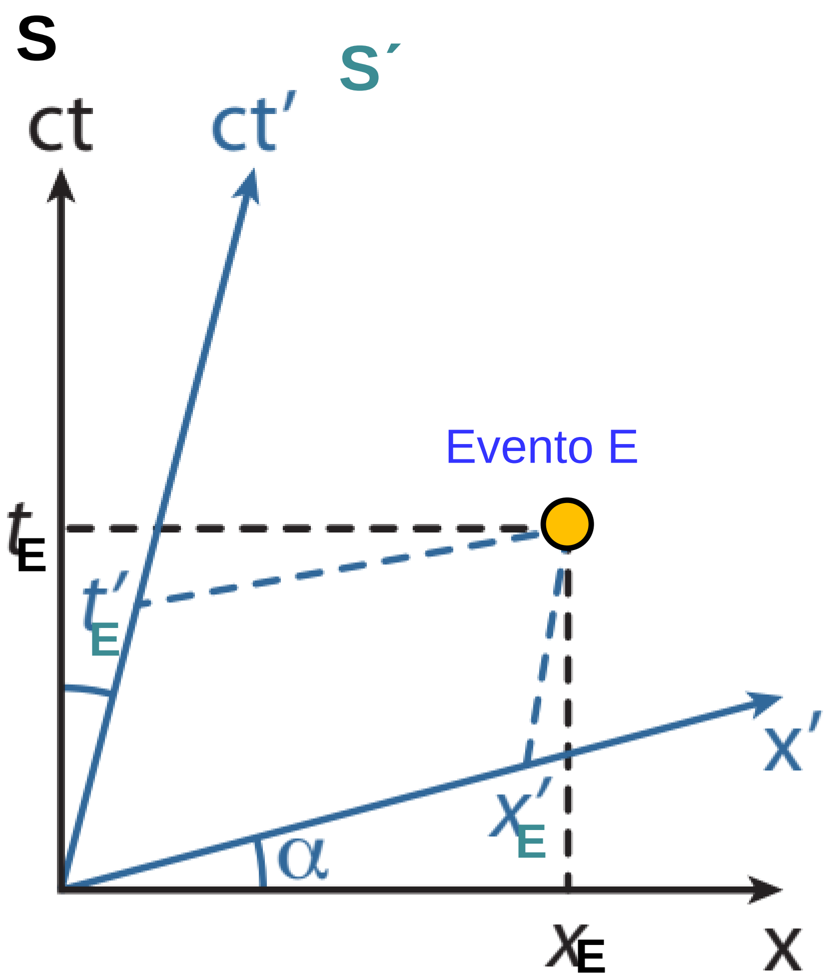
$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Hermann Minkowski
1864-1909

Como podemos incluir o referencial S´ nesta diagrama?

Diagramas de Minkowski

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$
$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$



O eixo x´ corresponde a ct´=0

$$ct' = 0 \Rightarrow ct = \beta x \qquad \frac{ct}{x} = \beta$$

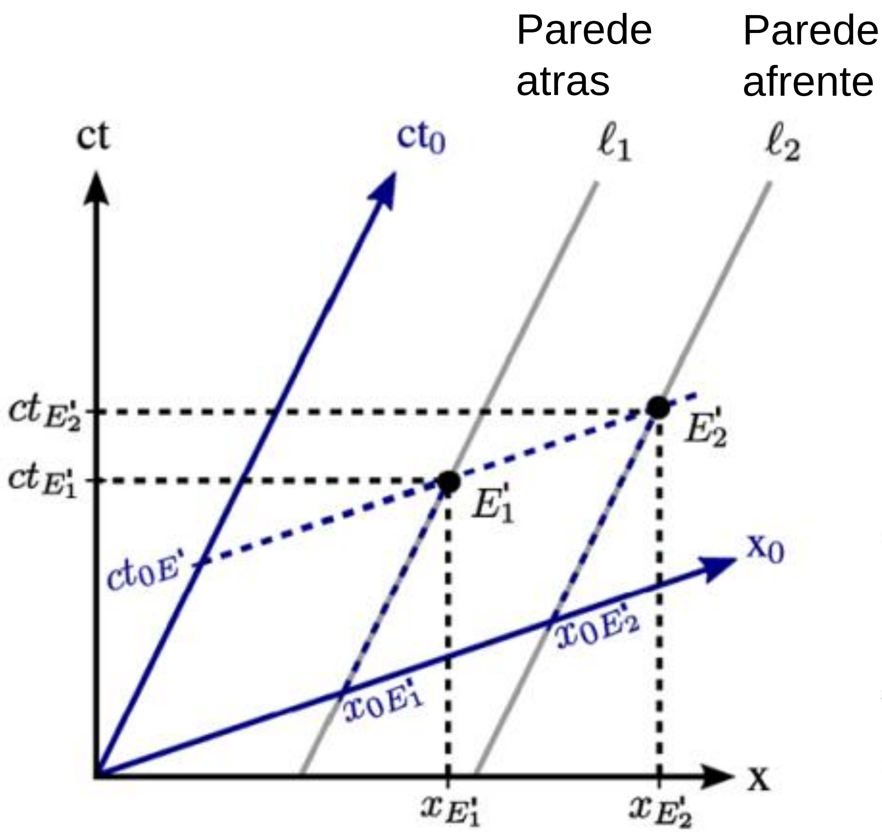
$$\tan(\alpha) = \beta$$

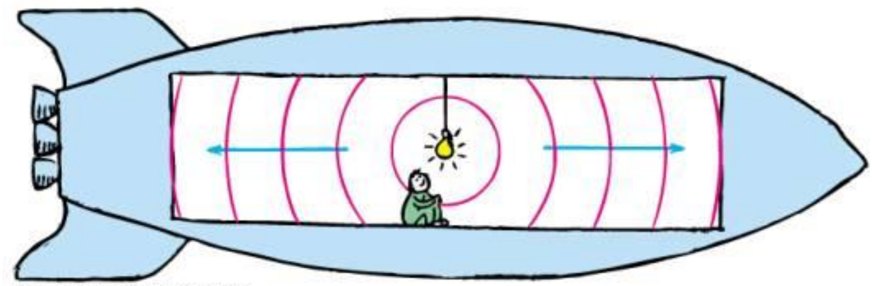
O eixo ct´ corresponde a x´=0

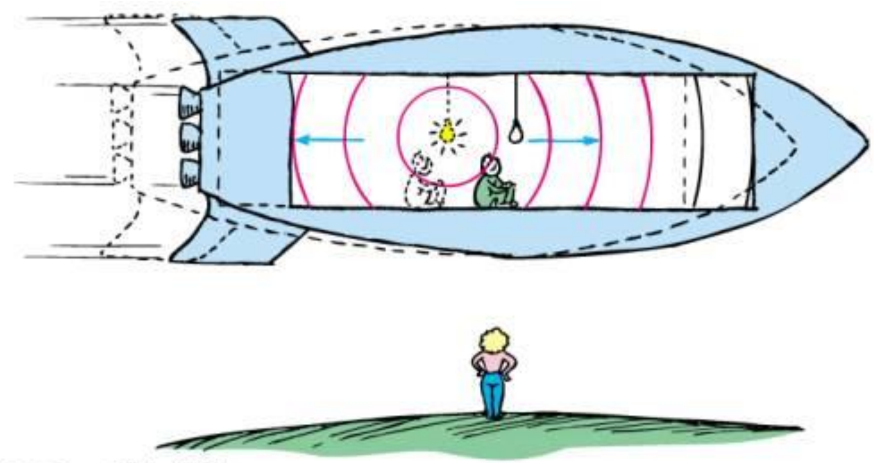
$$x' = 0 \Rightarrow x = \beta ct \qquad \frac{x}{ct} = \beta$$

Quanto maior β mais inclinados os (eixos)´
Limite superior β = 1, inclinação á 45º

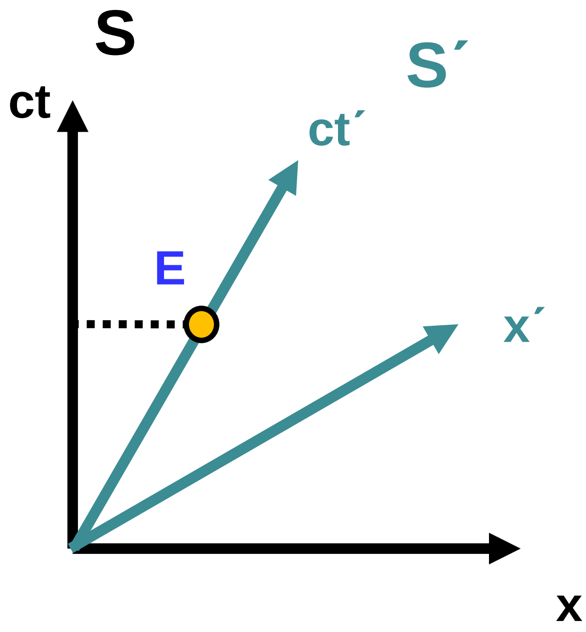
Não simultaneidade







Pormenor – as escalas são diferentes

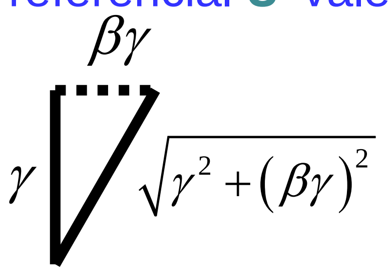


Os coordenadas do evento E em:

$$S' : (x' = 0, ct' = 1)$$

$$S : (x = \gamma\beta, ct = \gamma)$$

Um unidade no referencial **S’** vale em **S**

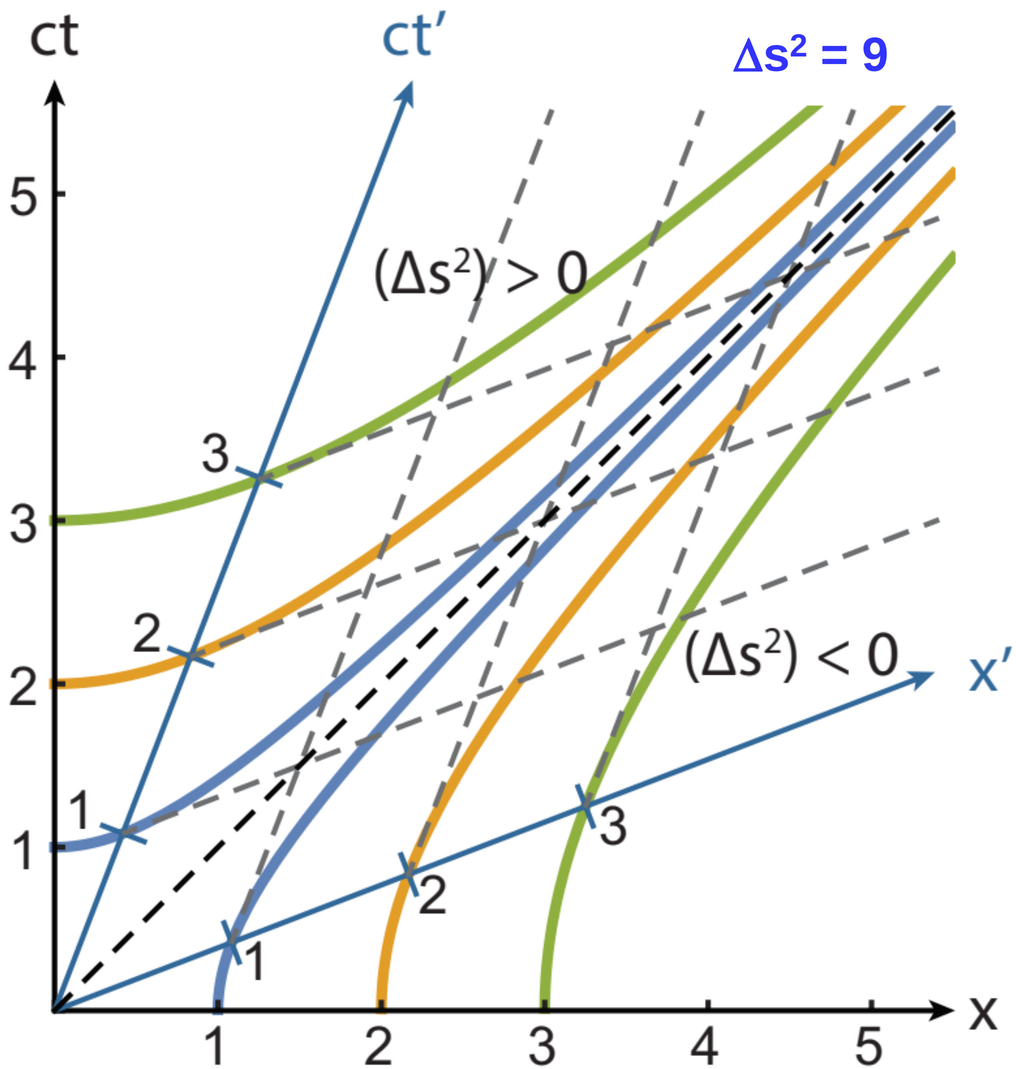


$$x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right)$$

$$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right)$$

1 unidade em **S’** vale $\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ unidades em **S**

Diferença nas escalas II



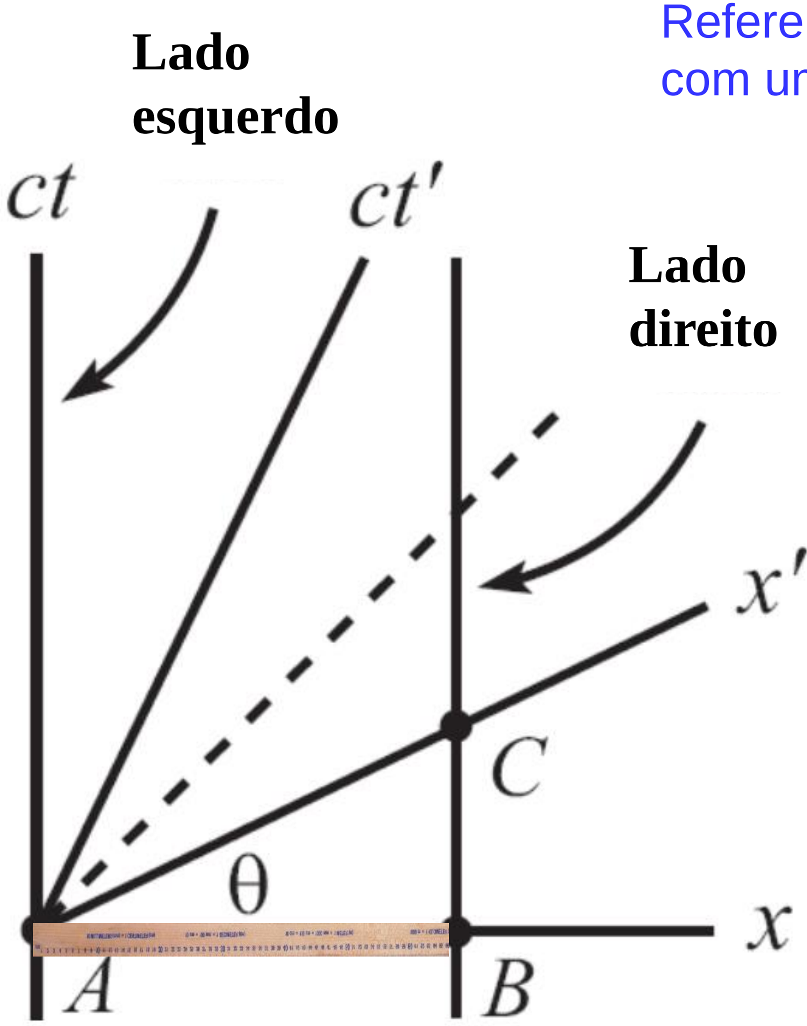
$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2$$

hiperbola

Contração de comprimento

Uma pau de 1 metro em comprimento é estacionário no referencial **S**
Distância AB = 1 metro

Referencial **S´** em movimento relativo ao referencial **S** com uma velocidade u ao longo dos eixos dos xxs



Em **S´** medir o comprimento no t´ =0

No referencial **S**

$$AC = AB/\cos\theta \qquad \tan\theta = \beta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

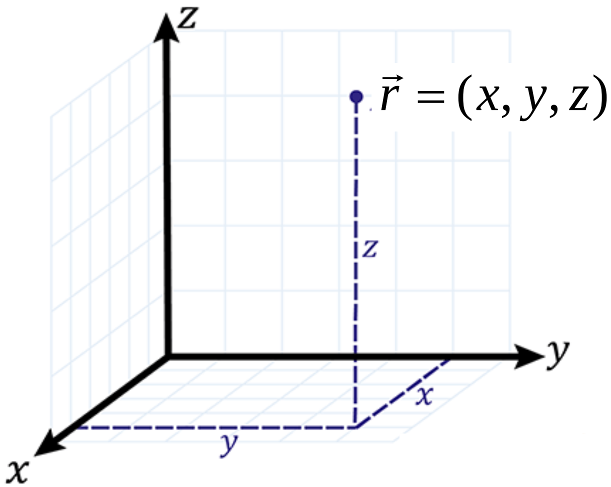
1 unidade em **S'** vale $\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ unidades em **S**

Em **S´**

$$AC = \sqrt{1+\beta^2}\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)1m = \frac{1m}{\gamma}$$

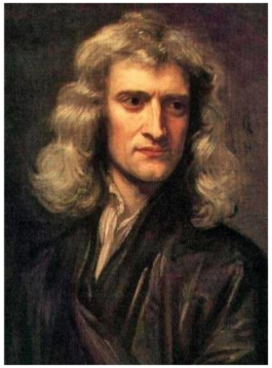
Tetra-vetores

Em física Newtoniana o vetor de distância é $\vec{r} = (x, y, z)$



A distância da origem é invariante sobre rotações do sistema de coordenados

$$\vec{r} \bullet \vec{r} = (x, y, z) \bullet (x, y, z)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$

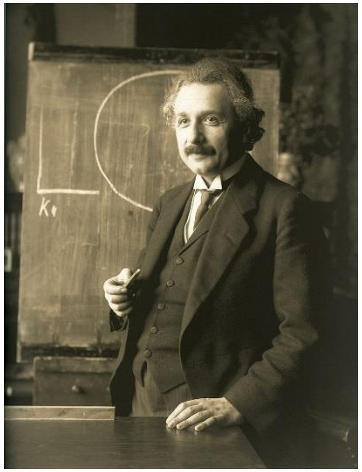


Na relatividade

Definimos tetra vetores dos eventos A e B como

$$\vec{X}_A = (ct_A, \vec{r}_A) \qquad \vec{X}_B = (ct_B, \vec{r}_B)$$

$$\Delta\vec{X} = (c\Delta t, \Delta\vec{r})$$



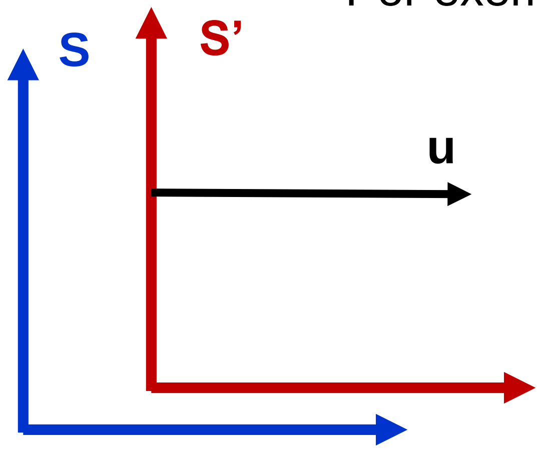
O produto interno de tetra vetores é definido como

$$\Delta E \bullet \Delta E = (c\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 \equiv \Delta s^2$$

O intervalo invariante

Tetra vetores

Um tetra vetor é um vetor com 4 elementos (1 temporal e 3 espaciais) cujos elementos obedecem as transformações de Lorentz



Por exemplo se no referencial **S** o tetra-vetor é $\mathrm{A} = (a_t, a_x, a_y, a_z)$

No referencial **S´** $\mathrm{A}' = (a_t', a_x', a_y', a_z')$

$$a_t' = \gamma\left(a_t - \beta a_x\right) \quad a_y' = a_y$$

$$a_x' = \gamma\left(a_x - \beta a_t\right) \quad a_z' = a_z$$

Se temos 2 tetra-vetores $\mathrm{A} = (a_t, a_x, a_y, a_z)$ $\mathrm{B} = (b_t, b_x, b_y, b_z)$

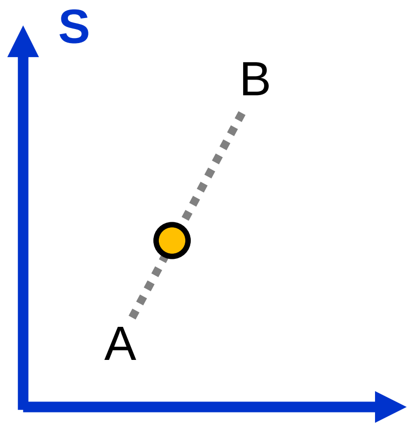
O produto interno

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \bullet \mathrm{B} &= a_t b_t - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= a_t' b_t' - (a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z') \\ &= \mathrm{A}' \bullet \mathrm{B}' \end{aligned}$$

É igual em todos os referenciais de inércia

Tempo próprio

Considere uma partícula que se desloca entre ponto A e ponto B



Numa parte infinitesimal da trajetória
a partícula desloca uma distância dx num intervalo dt

O intervalo invariante infinitesimal correspondente será

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 = (cdt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$$

$$ds = cdt \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c} \right)^2}$$ (Separação temporal)

Na referencial da partícula v = 0 e o intervalo do tempo é dt´ = dτ

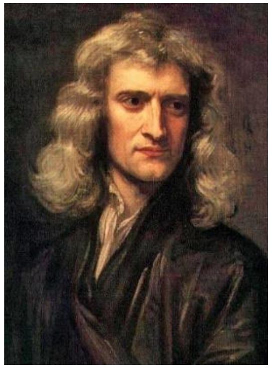
dτ é o tempo próprio

$$ds' = cd\tau$$

Como o intervalo ds é invariante $d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c} \right)^2}$ ou $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathrm{v/c})^2}}$

Onde v é a velocidade que o observador associa com a partícula.

Tetra vetor de velocidade



$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Na física Newtoniana a velocidade

$\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ é um vetor porque $d\vec{r}$ é um vetor e dt é um escalar

Na relatividade

Se tento formar um tetra vetor de velocidade como $\vec{\mathrm{V}} = \dfrac{d\vec{X}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(ct, \vec{r}\right)$

Terei problemas porque o valor de dt depende do referencial

Temos usar um medida de tempo que é invariante sobre transformações de Lorentz, o tempo próprio $\mathrm{d}\tau = ds / c$

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{d\vec{X}}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\mathrm{v/c}\right)^2}}$$

Em termos da velocidade observado

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{d\vec{X}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} = \frac{\left(c, \vec{\mathrm{v}}\right)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

$$\vec{\mathrm{V}} \bullet \vec{\mathrm{V}} = c^2$$