Cálculo Vetorial (FIS)

8 de Maio de 2013

Questão 1 () Calcule o integral

$$I = \int\int \left(x\,y^2 + 2\,x^2\,y\right) dxdy$$

no conjunto $D = \{(x, y) \mid x \in [2, 5],\ y \in [-x-2, x+4]\}$.

....

O integral duplo é igual ao integral repetido:

$$I = \int_2^5 dx \int_{-x-2}^{x+4} \left(x\,y^2 + 2\,x^2\,y\right) dy$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{x\,y^3}{3} + x^2\,y^2\right)\Bigg|_{-x-2}^{x+4} dx$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{x\,(x+4)^3}{3} + x^2\,(x+4)^2 - (-x-2)^2\,x^2 - \frac{(-x-2)^3\,x}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{7225}{2}\right) - \left(\frac{888}{5}\right) = \frac{34349}{10}.$$

Questão 2 () Calcule o integral

$$I = \int\int \left(x\,y^2 - x^2\,y^2\right) dxdy$$

no conjunto $D = \{(x, y) \mid x \in [1, 2],\ y \in [-2\,x-1, x+2]\}$.

....

O integral duplo é igual ao integral repetido:

$$I = \int_1^2 dx \int_{-2\,x-1}^{x+2} \left(x\,y^2 - x^2\,y^2\right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x\,y^3}{3} - \frac{x^2\,y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2\,x-1}^{x+2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{x^2\,(x+2)^3}{3} + \frac{x\,(x+2)^3}{3} + \frac{(-2\,x-1)^3\,x^2}{3} - \frac{(-2\,x-1)^3\,x}{3}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{186}{5}\right) - \left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{193}{5}.$$

Questão 3 () Calcule o integral

$$I = \int\int \left(2\,x^2\,y^2 - x\,y^2\right) dxdy$$

no conjunto $D = \{(x, y) \mid x \in [2, 5],\ y \in [-x-1, x+2]\}$.

....

O integral duplo é igual ao integral repetido:

$$I = \int_2^5 dx \int_{-x-1}^{x+2} \left(2\,x^2\,y^2 - x\,y^2\right) dy$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{2\,x^2\,y^3}{3} - \frac{x\,y^3}{3} \right)\Bigg|_{-x-1}^{x+2} dx$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{2\,x^2\,(x+2)^3}{3} - \frac{x\,(x+2)^3}{3} - \frac{2\,(-x-1)^3\,x^2}{3} + \frac{(-x-1)^3\,x}{3} \right) dx$$

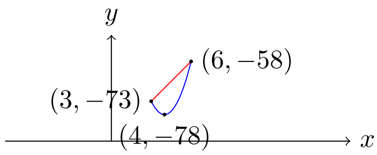
$$= \left(\frac{284525}{36} \right) - \left(\frac{3286}{45} \right) = \frac{156609}{20}.$$

Questão 4 () Inverta a ordem de integração do integral duplo

$$\int_3^6 \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx,$$

onde $p(x) = 5\,x^2 - 40\,x + 2$ e $q(x) = 5\,x - 88$.

....



Como $p(3) = q(3) = -73 < -58 = p(6) = q(6)$ e $p(x) \geq p(4) = -78$ (veja a figura), obtemos

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy + \int_{y_2}^{y_3} \int_{\chi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy,$$

onde

$$y_1 = -78, \quad y_2 = -73, \quad y_3 = -58,$$

$$\phi(y) = \frac{40 - \sqrt{20\,y + 1560}}{10},$$

$$\psi(y) = \frac{\sqrt{20\,y + 1560} + 40}{10}$$

e

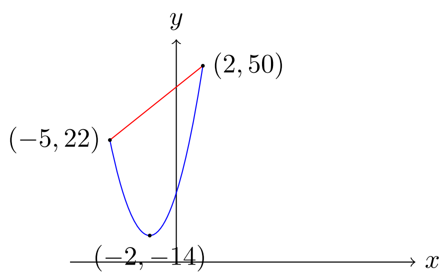
$$\chi(y) = \frac{y + 88}{5}.$$

Questão 5 () Inverta a ordem de integração do integral duplo

$$\int_{-5}^2 \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx,$$

onde $p(x) = 4\,x^2 + 16\,x + 2$ e $q(x) = 4\,x + 42$.

....



Como $p(-5) = q(-5) = 22 < 50 = p(2) = q(2)$ e $p(x) \geq p(-2) = -14$ (veja a figura), obtemos

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy + \int_{y_2}^{y_3} \int_{\chi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy,$$

onde

$$y_1 = -14, \quad y_2 = 22, \quad y_3 = 50,$$

$$\phi(y) = \frac{-\sqrt{16\,y + 224} - 16}{8},$$

$$\psi(y) = \frac{\sqrt{16\,y + 224} - 16}{8}$$

e

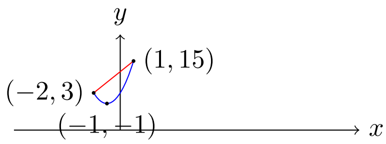
$$\chi(y) = \frac{y - 42}{4}.$$

Questão 6 () Inverta a ordem de integração do integral duplo

$$\int_{-2}^{1} \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx,$$

onde $p(x) = 4\,x^2 + 8\,x + 3$ e $q(x) = 4\,x + 11$.

....



Como $p(-2) = q(-2) = 3 < 15 = p(1) = q(1)$ e $p(x) \geq p(-1) = -1$ (veja a figura), obtemos

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy + \int_{y_2}^{y_3} \int_{\chi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy,$$

onde

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 15,$$

$$\phi(y) = \frac{-\sqrt{16\,y + 16} - 8}{8},$$

$$\psi(y) = \frac{\sqrt{16\,y + 16} - 8}{8}$$

e

$$\chi(y) = \frac{y - 11}{4}.$$

Questão 7 () Escreva o integral triplo,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz,$$

que permite calcular o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \mid 3\,y^2 + 5\,x^2 \leq z \leq -48\,y - 40\,x - 263\}.$$

....

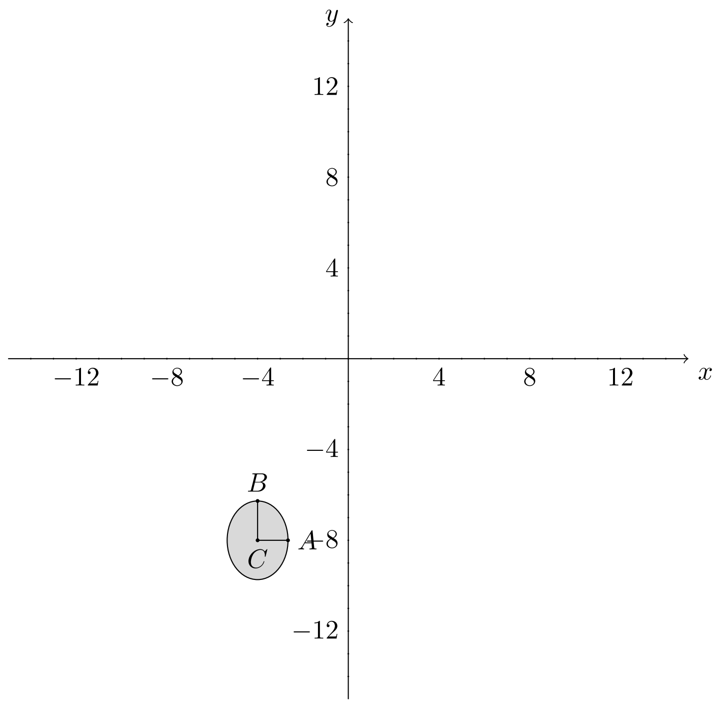
Notemos que a igualdade

$$3\,y^2+5\,x^2=-48\,y-40\,x-263$$

é equivalente à igualdade

$$3\,(y+8)^2+5\,(x+4)^2=9.$$

Esta equação descreve uma elipse (veja o desenho).



$$A=\left(-4+\sqrt{\frac{9}{5}},-8\right)\quad B=\left(-4,-8+\sqrt{\frac{9}{3}}\right)\quad C=(-4,-8)$$

Fazendo $y=-8$, encontramos que

$$-4-\sqrt{\frac{9}{5}}\le x\le -4+\sqrt{\frac{9}{5}}.$$

Para x deste intervalo temos

$$\frac{-\sqrt{-5\,x^2-40\,x-71}-8\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\le y\le \frac{\sqrt{-5\,x^2-40\,x-71}-8\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Portanto o volume é dado pelo integral

$$I=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{f(x)}^{g(x)}dy\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)}dz,$$

onde

$$x_1=-4-\sqrt{\frac{9}{5}},$$

$$x_2=-4+\sqrt{\frac{9}{5}},$$

$$f(x)=\frac{-\sqrt{-5\,x^2-40\,x-71}-8\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{-5\,x^2-40\,x-71}-8\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$\phi(x,y)=-48\,y-40\,x-263$$

e

$$\psi(x,y)=3\,y^2+5\,x^2.$$

Questão 8 () Escreva o integral triplo,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz,$$

que permite calcular o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \mid y^2 + 8\,x^2 \leq z \leq -18\,y - 96\,x - 368\}.$$

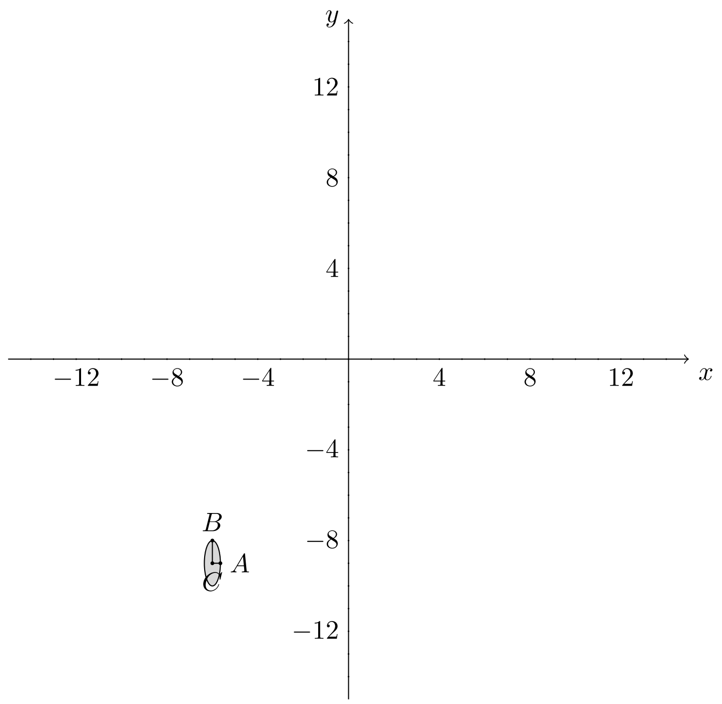
....
Notemos que a igualdade

$$y^2 + 8\,x^2 = -18\,y - 96\,x - 368$$

é equivalente à igualdade

$$(y + 9)^2 + 8\,(x + 6)^2 = 1.$$

Esta equação descreve uma elipse (veja o desenho).



$$A = \left(-6 + \sqrt{\frac{1}{8}}, -9\right) \quad B = \left(-6, -9 + \sqrt{\frac{1}{1}}\right) \quad C = (-6, -9)$$

Fazendo $y = -9$, encontramos que

$$-6 - \sqrt{\frac{1}{8}} \leq x \leq -6 + \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Para x deste intervalo temos

$$-\sqrt{-8\,x^2 - 96\,x - 287} - 9 \leq y \leq \sqrt{-8\,x^2 - 96\,x - 287} - 9.$$

Portanto o volume é dado pelo integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz,$$

onde

$$x_1 = -6 - \sqrt{\frac{1}{8}},$$

$$x_2 = -6 + \sqrt{\frac{1}{8}},$$
$$f(x) = -\sqrt{-8\,x^2 - 96\,x - 287} - 9,$$
$$g(x) = \sqrt{-8\,x^2 - 96\,x - 287} - 9,$$
$$\phi(x,y) = -18\,y - 96\,x - 368$$

e

$$\psi(x,y) = y^2 + 8\,x^2.$$

Questão 9 () Escreva o integral triplo,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz,$$

que permite calcular o volume do sólido

$$S = \{(x,y,z) \mid 9\,y^2 + 2\,x^2 \le z \le -90\,y - 8\,x - 226\}.$$

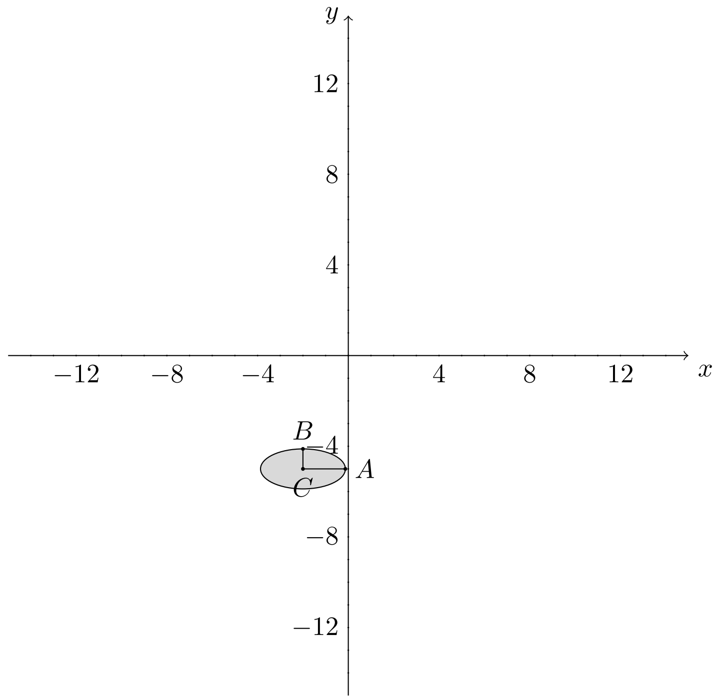
....
Notemos que a igualdade

$$9\,y^2 + 2\,x^2 = -90\,y - 8\,x - 226$$

é equivalente à igualdade

$$9\,(y+5)^2 + 2\,(x+2)^2 = 7.$$

Esta equação descreve uma elipse (veja o desenho).



$$A = \left(-2 + \sqrt{\frac{7}{2}}, -5\right) \quad B = \left(-2, -5 + \sqrt{\frac{7}{9}}\right) \quad C = (-2,-5)$$

Fazendo $y = -5$, encontramos que

$$-2 - \sqrt{\frac{7}{2}} \le x \le -2 + \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Para x deste intervalo temos

$$\frac{-\sqrt{-2\,x^2-8\,x-1}-15}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{-2\,x^2-8\,x-1}-15}{3}.$$

Portanto o volume é dado pelo integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz,$$

onde

$$x_1 = -2 - \sqrt{\frac{7}{2}},$$
$$x_2 = -2 + \sqrt{\frac{7}{2}},$$
$$f(x) = \frac{-\sqrt{-2\,x^2-8\,x-1}-15}{3},$$
$$g(x) = \frac{\sqrt{-2\,x^2-8\,x-1}-15}{3},$$
$$\phi(x,y) = -90\,y - 8\,x - 226$$

e

$$\psi(x,y) = 9\,y^2 + 2\,x^2.$$

Questão 10 () Calcule o volume, V, da região limitada pelas superfícies $f(x,y) = 9\,\left(y^2+x^2\right)+2$ e $g(x,y) = 5-3\,\left(y^2+x^2\right)$

....

Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$V = \int_{x^2+y^2\leq\rho^2} dxdy \int_{9\,(y^2+x^2)+2}^{5-3\,\left(y^2+x^2\right)} dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho} rdr \int_{f(r)}^{g(r)} dz,$$

onde $f(r) = 9\,r^2+2 = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, $g(r) = 5-3\,r^2 = g(r\cos\phi, r\sin\phi)$ e $\rho = \sqrt[2]{\frac{3}{9+3}}$ é a solução da equação

$$9\,r^2+2 = 5-3\,r^2.$$

Portanto

$$V = 2\pi\int_0^{\rho}(3-12\,r^2)rdr$$
$$= 2\pi\left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{3+9}{2(1+1)}\rho^{2(1+1)}\right) = 2\pi\left[\frac{3}{2}\frac{1}{4} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Questão 11 () Calcule o volume, V, da região limitada pelas superfícies $f(x,y) = \left(y^2+x^2\right)^4 - 10$ e $g(x,y) = -7\,\left(y^2+x^2\right)^4 - 9$

....

Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$V = \int_{x^2+y^2\leq\rho^2} dxdy \int_{(y^2+x^2)^4-10}^{-7\,\left(y^2+x^2\right)^4-9} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho} r dr \int_{f(r)}^{g(r)} dz,$$

onde $f(r) = r^8 - 10 = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, $g(r) = -7\,r^8 - 9 = g(r\cos\phi, r\sin\phi)$ e $\rho = \sqrt[8]{\frac{1}{1+7}}$ é a solução da equação

$$r^8 - 10 = -7\,r^8 - 9.$$

Portanto

$$V = 2\pi \int_0^{\rho} (1 - 8\,r^8) r dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1\rho^2}{2} - \frac{7+1}{2(4+1)} \rho^{2(4+1)} \right) = 2\pi \left[\frac{1}{2} \frac{1}{8^{\frac{1}{4}}} - \frac{4}{5} \left(\frac{1}{8^{\frac{1}{4}}} \right)^5 \right].$$

Questão 12 () Calcule o volume, V, da região limitada pelas superfícies $f(x,y) = 5\,\left(y^2 + x^2\right)^3 + 4$ e $g(x,y) = 6 - 9\,\left(y^2 + x^2\right)^3$

....

Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$V = \int_{x^2+y^2 \le \rho^2} dxdy \int_{5\,(y^2+x^2)^3+4}^{6-9\,\left(y^2+x^2\right)^3} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho} r dr \int_{f(r)}^{g(r)} dz,$$

onde $f(r) = 5\,r^6 + 4 = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, $g(r) = 6 - 9\,r^6 = g(r\cos\phi, r\sin\phi)$ e $\rho = \sqrt[6]{\frac{2}{5+9}}$ é a solução da equação

$$5\,r^6 + 4 = 6 - 9\,r^6.$$

Portanto

$$V = 2\pi \int_0^{\rho} (2 - 14\,r^6) r dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{2\rho^2}{2} - \frac{9+5}{2(3+1)} \rho^{2(3+1)} \right) = 2\pi \left[1\frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} - \frac{7}{4} \left(\frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} \right)^4 \right].$$
