

Cálculo Vetorial

1^o teste

27.03.2019

Exercício 1. [2,0 valores] Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 1 < y < 2\}.$$

- a) Esboce o conjunto A .
- b) Determine os conjuntos \overline{A} e $fr(A)$ (pode fazer apenas um esboço de cada conjunto).

Exercício 2. [4,5 valores] Seja $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 4}, (x + y) \ln(xy) \right)$.

- a) Faça um esboço do domínio da função f .
- b) Calcule $f'(1, 2)$.
- c) Denotando a primeira função componente de f por f_1 , calcule $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}$.

Exercício 3. [1,5 valores] Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin x}{x^2 + y^2}$ não existe.

Exercício 4. [7,5 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.
- b) Calcule $f'((0, 0); (a, b))$ para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- c) Mostre que $f'(0, 0)$ não existe.
- d) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercício 5. [2,5 valores] Sendo $w(x, y) = x^2 + xy$, $x(s, t) = e^{st^2}$ e $y(s, t) = \cos(s^2 t^2)$, calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Nota: Não é necessário simplificar a expressão obtida.

Exercício 6. [2,0 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(tx, ty) = tf(x, y).$$

- a) Calcule $f'((0, 0); (a, b))$.
- b) Justifique que f é uma aplicação linear.

FIM
BOA SORTE