CCGA

porque é = 0 — tudo o que acompanha a variável são nºs constantes (e ñ funções)

EDOs LINEARES HOMOGÉNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

EDO → equação que envolve derivadas.

exemplos: i) $\frac{dy}{dx} = x$ ii) $y'' - 5y' + 6y = 0$ iii) $x^3 f''' + x f' = 3$

vamos estudar esta!

↳ É de 2ª ordem porque a maior derivada nela é de 2ª ordem.

DE MANEIRA GERAL:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são números!!! daí ser "coeficientes constantes"

A solução é dessa forma: $y(x) = e^{rx}$

substituindo:

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0 \Leftrightarrow$$

$(e^{rx})' = e^{rx} \cdot r$

$(e^{rx})'' = (e^{rx} \cdot r)' = r^2 e^{rx}$

$\Leftrightarrow a\, r^2 e^{rx} + b\, r e^{rx} + c\, e^{rx} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\text{nunca pode ser } 0} (\underbrace{ar^2 + br + c}_{\text{equação característica}}) = 0$

logo $ar^2 + br + c = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ } raízes reais distintas

$\Delta = 0$ } raízes reais iguais

$\Delta < 0$ } raízes complexas

CASO 1: $\Delta > 0$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (+6) = 25 - 24 = 1 > 0$

SOLUÇÃO GERAL: $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Calculando r_1 e r_2: → são raízes do polinómio $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$\therefore y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

CASO 2: $\Delta = 0$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 = 0$

o r é único (pois $r_1 = r_2$)

é colocado para ficar ≠.

SOLUÇÃO GERAL: $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Calculando r:

$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow r = 3 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

CASO 3: $\Delta < 0$

$y'' + 4y = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0 \longrightarrow r = \alpha \pm \beta i$

SOLUÇÃO GERAL: $y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$

Calculando r:

$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow r = \pm 2i$

$y(x) = \overset{=1}{\cancel{e^{0x}}}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

Problema do valor inicial: (PVI)

trocar o y'' por r^2, o y' por r e o y por $r^0 = 1$. Obtenho a equação característica. (resolvo-a e obtenho as raízes)

1) Resolver a equação diferencial
2) Calcular a 1ª derivada da solução
3) Substituir valores iniciais $\longrightarrow$ 2 equações
4) Resolver o sistema de equações encontrado no passo 3
5) Encontrar solução para PVI.

exemplo:

Resolva $y'' - 5y' + 6y = 0$ sabendo que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2 \vee r_2 = 3$

SOLUÇÃO GERAL: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

2) $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$

3) $y(0) = 2$ $\quad$ $y'(0) = 5$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + 3C_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

5) $y(x) = e^{2x} + e^{3x}$

CCGA

→ MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

EDOs LINEARES NÃO HOMOGÉNEAS

EDO de 2^a ordem $\overline{n}$ homogénea:

$$\underbrace{a y'' + b y' + c y}_{\text{são números}} = f(x)$$

$f(x)$ → é uma função que pode aparecer de 3 maneiras ≠: e^{mx}, x^m, $\cos(mx)$ ou $\sin(mx)$

exemplos:

i) $y'' + y' - 2y = 3t$

ii) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$

Como resolver: $ay'' + by' + cy = f(x)$

1) Resolver EDO como se fosse homogénea

Colocar $ay'' + by' + cy$ igual a zero e encontrar a solução: $y_H(x)$.

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow y_H(x)$$ → solução homogénea

2) Encontrar solução particular

Considerar $ay'' + by' + cy = f(x)$ e aí encontrar uma solução particular $y_p(x)$

$$ay'' + by' + cy = f(x) \Rightarrow y_p(x)$$ → solução particular

3) Encontrar a solução geral

soma-se a solução do passo 1, a homogénea, com a do passo 2, a particular.

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

CASO 1: $f(x) = e^{dx} \Rightarrow y_p(x) = A e^{dx}$

exemplo: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

$y_p(x) = Ae^{3x}$

se é solução então:

$$(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) = 2e^{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x}) + 2Ae^{3x} = 2e^{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3x}(9A - 9A + 2A) = 2e^{3x} \Leftrightarrow 2Ae^{3x} = 2e^{3x} \Leftrightarrow \underline{A = 1}$$

Logo,

$$y_p(x) = e^{3x}$$

CASO 2: $f(x) = \cos(dx)$ ou $f(x) = \sin(dx)$

⇓

$$y_p(x) = A\sin(dx) + B\cos(dx)$$

exemplo: $y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$

→

exercício: Encontre a solução geral da equação diferencial

$y'' - 9y = \cos(3x)$

OBJETIVO: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$y'' - 9y = \underline{\cos(3x)}$

$y_H(x) = ?? \Rightarrow y'' - 9y = 0$

PASSO 1: Encontrar a solução da homogénea

$y'' - 9y = 0 \Rightarrow r^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow \underbrace{r = \pm 3}_{r_1 \neq r_2}$

$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_H(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

$y_p(x) = ?? \Rightarrow y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

PASSO 2: Encontrar a solução particular.

$$\begin{cases} y'_p(x) = A(-\sin(3x))\cdot 3 + B(\cos(3x))\cdot 3 = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) \\ y_p''(x) = -3A(\cos(3x))\cdot 3 + 3B(-\sin(3x))\cdot 3 = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) \end{cases}$$

Substituindo:

$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) - 9(A\cos(3x) + B\sin(3x)) = \cos(3x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -18A\cos(3x) - 18B\sin(3x) = \cos(3x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -18A = 1 \\ -18B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{18} \\ B = 0 \end{cases}$

$y_p(x) = -\frac{1}{18}\cos(3x)$

Além disso, $y_H(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

PASSO 3: somar as 2 soluções encontradas.

$y(x) = y_p(x) + y_H(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{18}\cos(3x)$

Se é solução então ie substitui na equação:

$(A\sin(x)+B\cos(x))'' - 3(A\sin(x)+B\cos(x))' + 2(A\sin(x)+B\cos(x)) = \sin(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -A\sin(x) - B\cos(x) - 3A\cos(x) + 3B\sin(x) + 2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3B+A)\sin(x) - (3A-B)\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + 3B = 1 \\ 3A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{10}$ e $B = \frac{3}{10}$

Logo, $y_p(x) = \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{3}{10}\cos(x)$

CASO 3: $f(x) = ax^d + bx^{d-1} + \dots + c$ } polinómio

$$\Downarrow$$

$$y_p(x) = Ax^d + Bx^{d-1} + \dots + C$$

exemplo: $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$

$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Se é solução então ie substitui na equação:

$(Ax^2+Bx+C)'' - 3(Ax^2+Bx+C)' + 2(Ax^2+Bx+C) = x^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2Ax^2 + (2B-6A)x + 2A + 2C - 3B = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 6A = 0 \\ 2A + 2C - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{2}$ e $C = \frac{9}{4}$

Logo,

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

exemplo geral: $y'' - 2y' + y = -2e^x$

1) $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

2) $y_p(x) = Ae^x$ } errado porque temos que comparar com a homogénea $\longrightarrow$ porque esta y_p também aparece na homogénea. Para solucionar este problema:

$y_p(x) = Ae^x \cdot x$ } continua errado porque aparece na homogénea.

$y_p(x) = Ae^x \cdot x^2$ ✓

NOTA: se $y_p(x)$ tiver termos iguais aos da homogénea, multiplique por x até que $y_p(x)$ fique diferente.

$\rightarrow$ = produto escalar

ESPAÇOS EUCLIDIANOS { espaço vetorial E, real ou complexo, que contém um produto interno (ou hermítico, se for complexo), isto é, em E, o produto interno é uma função

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

par de vetores $\leftarrow (x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle \rightarrow$ escalar

tal que:

i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ $\quad \langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle$

ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ e $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

iii) $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$

o resultado é sempre um nº real

⚠ Se o espaço é real, então $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

NOTA: Sabemos que $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, mas ter em atenção que $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

$\longrightarrow$ No espaço euclidiano real, $\mathbb{R}^n$,
$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \rightarrow$ ou $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$ ∢ entre os 2 vetores

$\longrightarrow$ No espaço euclidiano complexo, $\mathbb{C}^n$,
$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n$

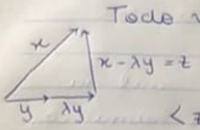
Norma euclidiana: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \iff \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

- O único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\vec{0}$: $\|\vec{0}\| = 0$.
- $\|\lambda x\| = \overbrace{|\lambda| \|x\|}^{\text{sempre positiva}} \longrightarrow$ pois $\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$
- $\|x\| = 1$ } então o vetor é unitário.
  $\hookrightarrow x = \dfrac{v}{\|v\|}$ } normalização (transformar qualquer vetor em unitário).

x e y são ortogonais/perpendiculares se $\langle x, y \rangle = 0$

$$x \perp y$$

$\rightarrow$ se eles são ortogonais então $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



Todo vetor $x \in E$, existe um único vetor λy tal que

$$x = \lambda y + z \longrightarrow \langle z, y \rangle = 0$$
$$z = x - \lambda y \qquad \text{são ortogonais}$$

$$\langle z, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x - \lambda y, y \rangle = 0 \longrightarrow \langle x - \lambda y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda \| y^2 \|$$

Por isso, $\lambda = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\| y \|^2}$

componente de x ao longo de y

$\lambda y \rightarrow$ projeção ortogonal de x no vetor y.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

e $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ se e só se x e y são $\overbrace{\text{dependentes}}^{\text{linearmente dependentes}}$

CONSEQUÊNCIA:

- a norma satisfaz a desigualdade do Triângulo:
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

NOTA: se o espaço euclidiano é real, então é possível definir o ângulo θ entre 2 vetores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

$\longrightarrow$ BASE ORTOGONAL

$\hookrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ é um conjunto ortogonal se $x_i \perp x_j \ \forall i \neq j$ e $|x_i| \neq 0$. $\longrightarrow$ ou seja, se os vetores forem todos perpendiculares uns aos outros.

$\downarrow$

os vetores são todos linearmente independentes

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = 0$$

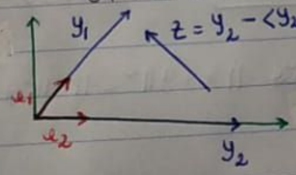
BASE ORTONORMADA { base de E formada apenas por vetores unitários ortogonais.

norma = 1

⚠ Conjuntos independentes, ñ necessariamente finitos, podem ser transformados em ortogonais. Exemplo:

ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

$\mathbb{R}^2$



$z = y_2 - \langle y_2, e_1 \rangle e_1$

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \qquad e_2 = \frac{z}{\|z\|} = \frac{f_2}{\|f_2\|}$$

$$f_2 = y_2 - \langle y_2, e_1 \rangle e_1$$
$$f_3 = y_3 - \langle y_3, e_1 \rangle e_1 - \langle y_3, e_2 \rangle e_2$$

$$e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|}$$

NOTA: Todo o espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.