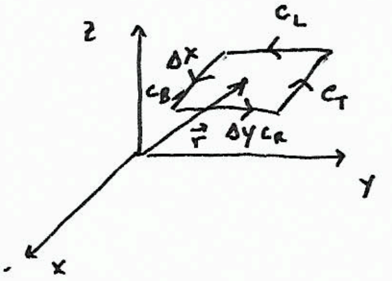
Uma observação sobre o Rotacional

1. Trabalho num campo de forças e o Rotacional:

$\vec{F}(\vec{r}) \equiv$ é um campo de forças conservativo. Então, por definição

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \forall_C .$$



$$\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

Consideremos o percurso (Rectangular) representado na figura, e o integral de linha de $\vec{F}$ ao longo desse percurso.

percurso: $C_B \rightarrow \int_{C_B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{C_B} F_x\, dx \simeq F_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)\cdot \Delta x$

$C_T \rightarrow \int_{C_T} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{C_T} F_x\, dx \simeq -F_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)\, \Delta x$

A contribuição destes dois percursos para a circulação de $\vec{F}$ é

$$\int_{C_B + C_T} \vec{F}\cdot d\vec{l} \simeq -\left[F_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - F_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\right] \Delta x$$

$$\simeq -\frac{F_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - F_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y}\, \Delta x \Delta y$$

$\Delta S = \Delta x\, \Delta y \equiv$ área do Rectângulo; Então:

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{C_B + C_T} \vec{F} \cdot d\vec{l} \simeq - \frac{\left[F_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - F_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\right]}{\Delta y}$$

Para os outros 2 lados (C_L e C_R) do rectângulo temos de forma similar:

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{C_L + C_R} \vec{F} \cdot d\vec{l} \simeq \frac{F_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - F_y \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x}$$

Então:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\square} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Claro que este resultado corresponde a um percurso no plano $\perp$ $\hat{z}$; [Observe a regra do saca-rolhas ou da mão direita ligando o sentido da circulação e a orientação da normal à área delimitada pelo circuito $\square$).

Para um circuito elementar num plano $\perp$ a $\hat{z}$ temos então que a circulação é $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $(\hat{z})$

De forma análoga, para circuitos semelhantes em plano $\perp$ a $\hat{x}$ e $\hat{y}$ temos:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (\hat{x})$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad (\hat{y})$$

Podemos ∴ definir uma quantidade que tem, como um vector (polar) uma grandeza, uma direcção e um sentido. Podemos construir essa quantidade "vectorial" (é na realidade um pseudo-vector ou uma densidade vectorial, ou um vector axial), cujas componentes cartesianas são:

$$\text{ROT}\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\hat{\jmath} +$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Se $\nabla\wedge\vec{F} = 0 \quad \forall \vec{F}$, então isto garante que a circulação elementar de $\vec{F}$ em torno de um contorno qualquer é nula. Por outras palavras, garante que $\vec{F}$ é conservativo: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \quad \forall_C \iff \text{Rot}\,\vec{F} = 0$

Claro que se $\vec{F} = -\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]$

Então $\nabla\wedge\vec{F} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}\right]\hat{\imath} + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right]\hat{\jmath} +$

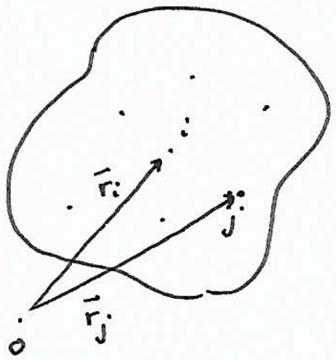
$$+\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\right]\hat{k} = [0, 0, 0]$$

De facto, $\vec{F} = -\nabla U$ e $\nabla\wedge\vec{F} = 0$ são inteiramente equivalentes.

6 - Forças internas e conservação do momento linear e angular.

1. Forças internas e conservação do momento linear

Consideremos um sistema de N-partículas. Definamos o momento linear total do sistema como a soma dos momentos lineares das partículas que o constituem

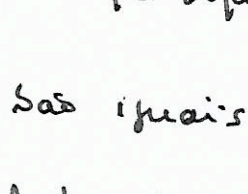


$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Admitamos que as forças de interacção entre estas partículas (forças internas) obedecem à 3ª lei de Newton:

$$\vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji}$$

($\vec{F}_{ij}$ = força que a partícula j exerce sobre a partícula i



Nestas condições as variações dos momentos que daqui resultam:

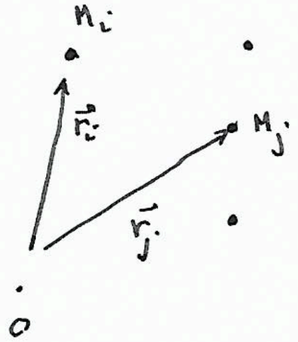
$$\frac{\partial \Delta p_i}{\partial t} = F_{ij} = - F_{ji} = \frac{\partial \Delta p_j}{\partial t}$$

São iguais e de sinal contrário. A soma total destas variações é nula. Dito de outro modo:

As forças internas não alteram o momento linear total do sistema

Centro de Massa

2



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{r}_i M_i}{\sum_i M_i} \qquad (1)$$

O raio-vector de posição do centro de massa de um sistema de partículas corresponde à média pesada das posições das partículas constituintes (sendo M_i o peso considerado). Por exemplo, para 2 partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 M_1 + \vec{r}_2 M_2}{M_1 + M_2}$$

Se derivarmos em ordem ao tempo (1) obtemos:

$$(2) \qquad \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{\sum_i \dot{\vec{r}}_i M_i}{\sum_i M_i} = \frac{\sum_i \vec{v}_i M}{\sum_i M_i} \equiv \frac{\vec{P}}{M_{TOT}}$$

(Se admitirmos que a massa das partículas não varia). $\vec{P} \equiv$ momento linear total do sistema.

Na ausência de forças externas $\vec{P}$ = const. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM}$ = const. :

Na ausência de forças externas a velocidade do C.M. é constante

Forças externas:

A força total que actua na partícula i é:

$$\vec{F}_i^{TOT} = \sum_j \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i$$

(onde $\vec{F}_i$ = força externa (Resultante) que actua nessa partícula). Então, derivando novamente (2) em ordem ao tempo temos:

$$\ddot{\vec{R}}_{CM} = \frac{\sum_i \ddot{\vec{r}}_i M_i}{\sum_i M_i} = \frac{\sum_i \left[\sum_j \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i \right]}{\sum_i M_i} =$$

$$= \frac{\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i}{\sum_i M_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) + \sum_i \vec{F}_i}{\sum_i M_i} = \frac{\vec{F}_{TOT}}{M_T}$$

(visto que $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$)

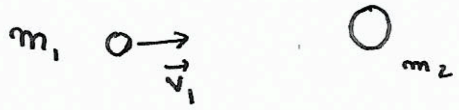
$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{TOT}$. Isto é

$$\boxed{(\vec{F}_{ext})_{TOT} = M_T \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

O movimento do C.M. pode ser predicto se soubermos que forças externas actuam no sistema.

Exemplo:

Antes



Após a colisão as duas partículas ficam juntas.

$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$ $\qquad$ $|\vec{v}_2| = 0$ (Repouso)

Como se move a "partícula" resultante?

A colisão gera apenas forças de interacção entre as partículas (internas) que não podem afectar o momento linear total do sistema. Então:

$$M_1 v_1 = (M_1 + M_2) v$$

$$v = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1$$

Após a colisão $(t>0)$: $\vec{X}_{cm} = v t \hat{x} = \underbrace{\frac{M_1}{M_1+M_2} v_1}_{V_{cm}} t \hat{x}$

Mas V_{cm} é constante (na ausência de forças externas). Então, antes da colisão: $(t<0)$, também

$$\vec{X}_{cm} = \frac{M_1}{M_1+M_2} v_1 t \hat{x}$$

O que acontece à energia cinética do sistema?

$$E_c^i = \frac{1}{2} M_1 v_1^2$$

$$E_c^f = \frac{1}{2}(M_1+\cancel{M_2}) \frac{M_1^2}{(M_1+M_2)^{\cancel{2}}} v_1^2$$

$$\frac{E_c^f}{E_c^i} = \frac{M_1}{M_1+M_2} < 1$$; a energia cinética inicial é parcialmente dissipada.

Podemos descrever agora este processo no Referencial do Centro de massa do sistema:

$$\vec{X}_{CM} = \frac{M_1 v_1}{M_1+M_2} t \hat{x}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{M_1 v_1}{M_1+M_2} \hat{x}$$

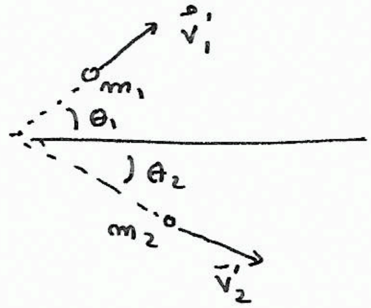
As velocidades das partículas antes do colisão são:

$$\vec{u}_1 = v_1 \hat{x} - \vec{V}_{CM} = \left(1 - \frac{M_1}{M_1+M_2}\right) v_1 \hat{x} = \frac{M_2}{M_1+M_2} v_1 \hat{x}$$

$$\vec{u}_2 = 0 \hat{x} - \vec{V}_{CM} = -\vec{V}_{CM} = -\frac{M_1}{M_1+M_2} v_1 \hat{x}$$

$$\vec{P}_{TOT} = M_1 \vec{u}_1 + M_2 u_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} v_1 (1-1) \hat{x} = 0$$

Exemplo: Colisão **elástica** entre partículas



$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$, $v_2 = 0$

Momento
$$\begin{cases} M_1 v_1 = M_1 v_1' \cos\theta_1 + M_2 v_2' \cos\theta_2 \\ 0 = M_1 v_1' \sin\theta_1 + M_2 v_2' \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

Podemos resolver este sistema de equações. É no entanto enfadonho. Podemos em alternativa usar o referencial de centro de massa como auxiliar. Vejamos:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1$$

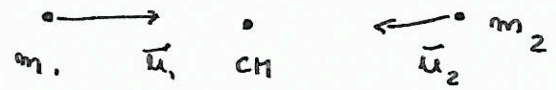
As velocidades no referencial C.M. serão designadas por $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$; $\vec{u}_1'$ e $\vec{u}_2'$ (antes e depois da colisão, respectivamente). Então:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{V}_{CM} \qquad \vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{V}_{CM}$$

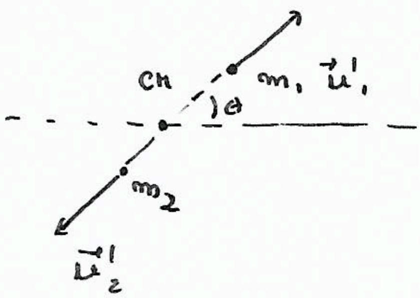
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{V}_{CM} \qquad \vec{v}_2' = \vec{u}_2' + \vec{V}_{CM}$$

O momento total, no ref. C.M. é nulo. Consequentemente, as velocidades $\vec{u}_1'$ e $\vec{u}_2'$ têm que ser colineares

(antes)



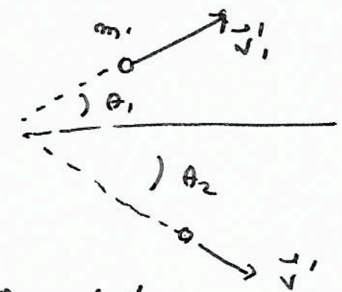
(depois)



Por outro lado, se a energia cinética também é conservada, então o módulo das velocidades das partículas (no ref. CM) antes e depois da colisão tem que ser o mesmo ($u_1' = u_1$; $u_2' = u_2$)

(θ pode ser qualquer ângulo)

Voltemos ao Referencial do Laboratório:



$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v'_1 \sin\theta_1}{v'_1 \cos\theta_1} = \frac{(v'_1)_y}{(v'_1)_x} = \frac{(u'_1)_y}{(u'_1)_x + V_{cm}} = \frac{u'_1 \sin\theta}{u'_1 \cos\theta + V_{cm}}$$

Mas $u'_1 = u_1$ e $u'_2 = u_2$ (como vimos). Então:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{V_{cm}}{u_1}} \qquad (*)$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{v}_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2}\left(\vec{u}_1 + \vec{V}_{cm}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{M_1}{M_1+M_2}\right)\vec{V}_{cm} = \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{u}_1 \iff \frac{M_2}{M_1+M_2}\vec{V}_{cm} = \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{u}_1$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{cm} = \frac{M_1}{M_2}\vec{u}_1 \Rightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2} \qquad \square$$