Apontamentos II

Transformações lineares

Álgebra Linear | aulas teóricas

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

1º semestre 2016/17

Lina Oliveira
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

1

Transformações lineares

Transformações lineares

Definição de transformação linear em espaços lineares reais. Exemplos de funções: reflexão, projeção ortogonal e translação. Matriz associada a uma transformação linear considerando as bases canónicas em $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^k$. Imagem de um segmento de recta através de uma transformação linear; imagem de um triângulo a partir das imagens dos seus vértices.

Sejam U e V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos). Uma função $T : U \to V$ diz-se uma **transformação linear** se, quaisquer que sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

(i) $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T\boldsymbol{x} + T\boldsymbol{y}$

(ii) $T(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha T\boldsymbol{x}$

Proposição 1. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então*

$$T\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V \ .$$

Note que este resultado tanto pode ser visto como uma consequência tanto de (i) como de (ii).

Exemplos. Determine quais das funções seguintes são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reflexão relativa ao eixo dos xx.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano xoy.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ translação pelo vetor $\boldsymbol{u} = (1, 0)$.

Solução. a) A função T desta alínea é definida, para todo o $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, por

$$T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2).$$

Verificar se se trata duma transformação linear consiste em verificar se ambas as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas por esta função T. Começando com (ii), consideremos um real α e um vetor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} T(\alpha(x_1, x_2)) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha x_1, -\alpha x_2) \\ &= \alpha(x_1, -x_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2), \end{aligned}$$

O que mostra que a propriedade (ii) é satisfeita.

Considerando agora os vetores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$\begin{aligned} T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1, -(x_2 + y_2)) \\ &= (x_1, -x_2) + (y_1, -y_2) \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2), \end{aligned}$$

donde se conclui que T satisfaz (i). Tem-se assim que a função T é uma transformação linear em $\mathbb{R}^2$.

b) Notando que a função T desta alínea é definida, para todo o vetor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

e usando um procedimento análogo ao da alínea anterior, é fácil verificar que também se trata duma transformação linear.

c) Neste caso a expressão da função é $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$, sendo portanto $T(0, 0) = (1, 0)$. Deste modo $T(0, 0) \neq (0, 0)$, contrariando a Proposição 1. Temos pois que T não é uma transformação linear.

Imagem de um segmento de reta. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e considere o triângulo de vértices $\boldsymbol{a} = (0, 0), \boldsymbol{b} = (1, 1)$ e $\boldsymbol{c} = (2, 0)$. Sabendo que $T(\boldsymbol{b}) = (2, 1)$ e $T(\boldsymbol{c}) = (1, 0)$, represente geometricamente a imagem do triângulo através da transformação linear T.

Sendo $\boldsymbol{x}$ um ponto que pertence ao segmento de extremos $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, tem-se

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \qquad \text{com} \qquad \alpha \in [0, 1],$$

donde

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{c}) + \alpha(T(\boldsymbol{b}) - T(\boldsymbol{c})) \qquad \text{com} \qquad \alpha \in [0, 1].$$

Os segmentos de reta que unem dois pontos são transformados em segmentos de reta que unem as imagens desses pontos.

Matriz associada a uma transformação linear $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$. Sendo $\mathcal{E}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ a base canónica ordenada de $\mathbb{R}^n$ (respetivamente, de $\mathbb{C}^n$) e $\mathcal{E}_k$ a base canónica de $\mathbb{R}^k$ (respetivamente, de $\mathbb{C}^k$), tem-se

$$T\boldsymbol{x} = T(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1 T\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 T\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n T\boldsymbol{e}_n.$$

Representando por $[\boldsymbol{x}]$ um vetor $\boldsymbol{x}$ quando escrito em forma de vetor coluna, obtemos

$$[T(\boldsymbol{x})] = \underbrace{\big[[T\boldsymbol{e}_1] \quad | \quad [T\boldsymbol{e}_2] \quad | \quad \dots \quad | \quad [T\boldsymbol{e}_n]\big]}_{\text{matriz associada a } T} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Atendendo a que, qualquer que seja o vetor $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^m$, se tem $[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}]_{\mathcal{E}_m}$, onde $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{E}_m}$ é o vetor das coordenadas de $\boldsymbol{u}$ na base $\mathcal{E}_m$, podemos reescrever (1) como

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_k} = \underbrace{\big[[T\boldsymbol{e}_1]_{\mathcal{E}_k} \quad | \quad [T\boldsymbol{e}_2]_{\mathcal{E}_k} \quad | \quad \dots \quad | \quad [T\boldsymbol{e}_n]_{\mathcal{E}_k}\big]}_{[T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n}} [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_n} \tag{2}$$

Ou seja,

$$[T\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_k} = [T]_{\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_n}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_n} \tag{3}$$

A **matriz** $[T]_{\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_n}$ **que representa** T **em relação às bases canónicas de** $\mathbb{R}^n$ **e** $\mathbb{R}^k$ também pode ser designada abreviadamente por $[T]$.

Exemplos. Determine a matriz associada a cada uma das transformações lineares seguintes.

a) Em $\mathbb{R}^2$: reflexão em relação ao eixo dos xx.

b) Em $\mathbb{R}^3$: projeção no plano xy.

c) Em $\mathbb{R}^2$: rotação em $\mathbb{R}^2$ em torno da origem de um ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (neste caso, determine também a expressão analítica).

c) A matriz $[T]$ que representa a rotação T desta alínea tem como colunas as imagens dos vetores da base canónica $\mathcal{E}_2$. Sendo $T(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $T(0,1) = (-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, tem-se

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, qualquer que seja $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} &= [T]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A expressão analítica é $T(x_1, x_2) = (x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta, x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta)$.

Matriz associada a uma transformação linear

Relação entre $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ e o conjunto das transformações lineares $T\colon U \to V$ entre um espaço linear U de dimensão n e um espaço linear V de dimensão k.

Matriz associada a uma transformação linear $T : U \to V$

Sejam U e V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) tais que $\dim U = n$ e $\dim V = k$. Sendo $B_1 = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ uma base de U e B_2 uma base de V , tem-se

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n).$$

Assim:

$$\begin{aligned}(T\boldsymbol{x})_{B_2} &= T(\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n)_{B_2}\\ &= \alpha_1(T\boldsymbol{b}_1)_{B_2} + \alpha_2(T\boldsymbol{b}_2)_{B_2} + \cdots + \alpha_n(T\boldsymbol{b}_n)_{B_2}\end{aligned}$$

$$[T\boldsymbol{x}]_{B_2} = \big[[T\boldsymbol{b}_1]_{B_2} \quad | \quad [T\boldsymbol{b}_2]_{B_2} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [T\boldsymbol{b}_n]_{B_2}\big] \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$$[T\boldsymbol{x}]_{B_2} = \underbrace{\big[[T\boldsymbol{b}_1]_{B_2} \quad | \quad [T\boldsymbol{b}_2]_{B_2} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [T\boldsymbol{b}_n]_{B_2}\big]}_{[T]_{B_2,B_1}}[\boldsymbol{x}]_{B_1}$$

Ou seja,

$$[T\boldsymbol{x}]_{B_2} = [T]_{B_2,B_1}[\boldsymbol{x}]_{B_1}$$

onde $[T]_{B_2,B_1}$ é a **matriz que representa a transformação relativamente às bases B_1 e B_2.**

Temos assim que à transformação

$$\begin{aligned} T\colon U &\to V \\ \boldsymbol{x} &\mapsto T(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

corresponde uma outra transformação linear entre os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ (respetivamente, entre os espaços $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^k$) definida por

$$\mathbf{y} \mapsto A\mathbf{y},$$

onde $A = [T]_{B_2,B_1}$.

Exemplo. Considere a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ definida por

$$p \mapsto p',$$

onde p' designa a derivada de p. Determine a matriz que representa a transformação linear T quando se consideram as bases canónicas de $\mathbb{P}_2$ e de $\mathbb{P}_1$.

Núcleo e imagem

Núcleo duma transformação linear T e núcleo da matriz associada a T. A imagem de uma transformação linear e o espaço das colunas da matriz que a representa. Transformações lineares injetivas e transformações lineares sobrejetivas; isomorfismo. Teorema das dimensões para transformações lineares.

Sendo U, V espaços vetoriais e sendo $T\colon U \to V$ uma transformação linear, o **núcleo** $N(T)$ da transformação T é o subespaço de U definido por

$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \in U \ : \ T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_V\}.$$

A **imagem** $I(T)$ da transformação $T\colon U \to V$ é o subespaço de V definido por

$$I(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \in V \ : \ \boldsymbol{x} \in U\}.$$

Núcleo e imagem de $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma transformação linear. Então

$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^k}\}.$$

Sendo $A = [T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n}$ a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$, tem-se

$$T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad \text{sse} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

donde se conclui que

$$N(T) = N(A).$$

Quanto à imagem $I(T)$, temos, por definição, que

$$I(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^k \ : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Atendendo a que
$$[T(\boldsymbol{x})] = A\mathbf{x},$$
a imagem $I(T)$ corresponde a obter todas as combinações lineares $A\mathbf{x}$ das colunas de A. Por outras palavras,

$$I(T) = C(A).$$

Obviamente tem-se

$$I(T) = \mathcal{L}(\{T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), \dots, T(\boldsymbol{e}_n)\})$$

Ou seja, $\{T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), \dots, T(\boldsymbol{e}_n)\}$ é um conjunto gerador de $I(T)$.

Teorema 1. *(**Teorema das dimensões**) Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ uma transformação linear. Então*

$$n = \dim N(T) + \dim I(T).$$

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata do teorema das dimensões para matrizes. Seja A a matriz $k \times n$ que representa T em relação às bases $\mathcal{E}_n$ e $\mathcal{E}_k$. Então

$$\begin{aligned} n &= \dim N(A) + \operatorname{car} A \\ &= \dim N(A) + \dim C(A) \\ &= \dim N(T) + \dim I(T)\ . \end{aligned}$$

□

Injetividade e sobrejetividade

Uma transformação linear $T\colon U \to V$ diz-se **injetiva** se, quaisquer que sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$,
$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \Rightarrow T(\boldsymbol{x}) \neq T(\boldsymbol{y})$$
ou, equivalentemente, se

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Note-se que
$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$$

se e só se

$$T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in N(T),$$

donde se conclui que

$$T(\{\boldsymbol{x}\}+N(T))=\{T(\boldsymbol{x})\}$$

Proposição 2. *Seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. T é injetiva se e só se $N(T)=\{0\}$.*

Uma transformação linear $T\colon U \to V$ diz-se **sobrejetiva** se $I(T)=V$. Se T é injetiva e sobrejetiva, T diz-se uma transformação linear **bijetiva** ou um **isomorfismo**.

Exemplos. Determine a matriz $[T]$, o núcleo e a imagem das transformações T seguintes:

(a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - rotação em torno da origem de $\pi/2$ radianos no sentido positivo ou direto (contrário aodos ponteiros do relógio);

(b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - projecção ortogonal no eixo dos xx;

(c) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - reflexão relativa ao eixo dos yy;

(d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y)=(x-y,z)$.

Verifique se as transformações são sobrejetivas, injetivas ou isomorfismos.

Proposição 3. *Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) T é injetiva.

(ii) T é sobrejetiva.

(iii) T é um isomorfismo.

Demonstração. Provar-se-á apenas que (i)$\Rightarrow$ (ii). O teorema das dimensões garante que

$$n = \dim N(T) + \dim I(T) \qquad \text{donde} \qquad n = 0 + \dim I(T)$$

e, consequentemente, $I(T) = \mathbb{R}^n$. $\square$

N.B.- Todos os resultados acima relativos ao núcleo e à imagem duma transformação linear definida entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ são igualmente válidos para transformações lineares $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$.

Núcleo e imagem de $T\colon U \to V$

Sejam U e V espaços lineares reais (respetivamente, complexos), e considere a base $B_1 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ de U e a base $B_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ de V. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

Como vimos anteriormente, o núcleo $N(T)$ da transformação T é o subespaço de U definido por

$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \in U \ : \ T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

Sendo $A = [T]_{B_2,B_1}$, tem-se

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{se e só se} \qquad [T(\boldsymbol{x})]_{B_2} = \boldsymbol{0},$$

donde se conclui que

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{se e só se} \qquad A[\boldsymbol{x}]_{B_1} = \boldsymbol{0},$$

e, portanto,

$$N(T) = \{\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n \ : \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N(A)\}.$$

Note-se que $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ (respetivamente, $\mathbb{C}^n$).

Tal como foi definido anteriormente, a imagem $I(T)$ da transformação $T\colon U \to V$ é o subespaço de V definido por

$$I(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x} \in U\}.$$

Sendo

$$[T(\boldsymbol{x})]_{B_2} = A[\boldsymbol{x}]_{B_1},$$

pretendemos obter todas as combinações lineares $A[\boldsymbol{x}]_{B_1}$ das colunas de A. Por outras palavras, o conjunto dos vetores das coordenadas dos vetores de $I(T)$ coincide com $C(A)$. Note-se que $C(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ (respetivamente, $\mathbb{C}^k$).

Assim,

$$I(T) = \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_n \, : \, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in C(A)\}.$$

Exemplo. Considere a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida por

$$p \mapsto p'$$

a) Determine a matriz que representa a transformação linear T quando se consideram as bases canónicas de $\mathbb{P}_2$ e de $\mathbb{P}_2$.

b) Determine o núcleo e a imagem de T.

c) Verifique se T é injetiva, sobrejetiva ou um isomorfismo.

Proposição 4. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, e seja $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ uma base de U. A transformação linear $T : U \to \mathbb{K}^n$ definida por*

$$\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x})_B$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Exercício. □

Teorema 2. *(**Teorema das dimensões**) Sejam U e V espaços lineares reais (respetivamente, complexos), e seja $\dim U = n$. Seja $T \colon U \to V$ uma transformação linear. Então*

$$n = \dim N(T) + \dim I(T).$$

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata do Teorema 1 e da Proposição 4. □

Composição e invertibilidade

Transformação inversa e composição de transformações lineares. Espaços próprios e subespaços invariantes.

Composição de transformações lineares

Sejam U, V e W espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos), e sejam $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$

Consideremos a função composta $S \circ T$ definida por

$$\begin{aligned} S \circ T\colon U &\to W \\ \boldsymbol{x} &\mapsto S(T\boldsymbol{x}) \ . \end{aligned}$$

Esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S\circ T"'] & V \arrow[d, "S"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Facto 1. A função $S \circ T\colon U \to W$ é uma transformação linear.

A transformação linear $S \circ T$ é designada por **transformação composta**.

Suponhamos que U, V, W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensões

$$\dim U = n \qquad \dim V = p \qquad \dim W = k \ ,$$

e sejam B_U, B_V, B_W bases de U, V, W, respetivamente.

Considerando as matrizes $A = [T]_{B_V,B_U}$ e $B = [S]_{B_W,B_V}$ que representam as transformações T e S em relação às bases fixadas em U, V e W, tem-se que, qualquer que seja $\boldsymbol{x} \in U$,

$$\begin{aligned} [(S \circ T)(\boldsymbol{x})]_{B_W} &= [S(T\boldsymbol{x})]_{B_W} \\ &= B[(T\boldsymbol{x})]_{B_V} \\ &= BA[\boldsymbol{x}]_{B_U} \ . \end{aligned}$$

Donde se conclui que a matriz $[S \circ T]_{B_W, B_U}$ que representa a transformação $S \circ T$ é

$$[S \circ T]_{B_W, B_U} = BA.$$

Facto 2. A matriz $[S \circ T]_{B_W, B_U}$ que representa a transformação linear $S \circ T$ é

$$[S \circ T]_{B_W, B_U} = [S]_{B_W, B_V} [T]_{B_V, B_U}.$$

Os esquemas correspondentes em termos dos vetores das coordenadas são:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "{[S \circ T]_{B_W, B_U}}"'] & \mathbb{K}^p \arrow[d, "B"] \\ & \mathbb{K}^k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[\boldsymbol{x}]_{B_U}} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[dr, mapsto, "{[S \circ T]_{B_W, B_U}}"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{B_V}} \arrow[d, mapsto, "B"] \\ & {[S(T(\boldsymbol{x}))]_{B_W}} \end{tikzcd}$$

Exemplo. Sendo T a reflexão relativa ao eixo dos xx em $\mathbb{R}^2$ e sendo S a rotação em torno da origem em $\mathbb{R}^2$, no sentido direto, determine:

a) a matriz que representa $S \circ T$ em relação à base canónica $\mathcal{E}_2$;

b) uma expressão analítica para $S \circ T$.

Transformação inversa

Sejam U, V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) de dimensão n e sejam B_U, B_V as suas bases. Seja $T\colon U \to V$ um isomorfismo. Nestas circunstâncias, é possível definir a função

$$\begin{aligned} T^{-1}\colon V &\to U \\ \boldsymbol{y} &\mapsto \boldsymbol{x} \ , \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$.

Facto 3. A função T^{-1} é uma transformação linear.

Sendo $B = [T^{-1}]_{B_U,B_V}$ a matriz que representa T^{-1} quando se consideram as bases B_U de U e B_V de V, e sendo $A = [T]_{B_V,B_U}$ a matriz que representa T quando se consideram as mesmas bases, tem-se então que, qualquer que seja $\boldsymbol{x} \in U$,

$$\begin{aligned} [(T^{-1} \circ T)(\boldsymbol{x})]_{B_U} &= [T^{-1}(T\boldsymbol{x})]_{B_U} \\ &= [T^{-1}]_{B_U,B_V}[(T\boldsymbol{x})]_{B_V} \\ &= [T^{-1}]_{B_U,B_V}[T]_{B_V,B_U}[\boldsymbol{x}]_{B_U} \\ &= BA[\boldsymbol{x}]_{B_U} \ . \end{aligned}$$

Atendendo a que $T^{-1} \circ T$ é a transformação linear **identidade** I_U em U, i.e, a função que a cada $\boldsymbol{x} \in U$ faz corresponder $I_U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, resulta $BA = I$. Deste modo

$$[T^{-1}]_{B_U,B_V} = \left([T]_{B_V,B_U}\right)^{-1} \ .$$

Exemplo. Seja U o subespaço do espaço dos polinómios reais $\mathbb{P}_2$ definido por

$$U = \{a_1 t + a_2 t^2 \colon a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

e considere a transformação linear $T\colon U \to \mathbb{P}_1$ que a cada polinómio faz corresponder a sua derivada. Determine a matriz que representa a transformação T^{-1} relativamente à base $B_U = (t, t^2)$ em U e à base canónica de $\mathbb{P}_1$.

No exercício seguinte vai encontrar um método diferente para deduzir que $[T^{-1}]_{B_U,B_V} = [T]^{-1}_{B_V,B_U}$.

Exercício. Seja $T\colon U \to V$ um isomorfismo e considere a transformação linear inversa

$$\begin{aligned} T^{-1}\colon V &\to U \\ \boldsymbol{y} &\mapsto \boldsymbol{x} \ , \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$.

a) Designando por A a matriz $[T]_{B_V,B_U}$ e supondo que $\dim U = n$, mostre que A é uma matriz $n \times n$ invertível. (Sugestão: use os Teoremas 1 e 2.)

b) Use a alínea a) e a igualdade $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ para obter $\boldsymbol{x}$ em função de $\boldsymbol{y}$, e conclua que $[T^{-1}]_{B_U,B_V} = A^{-1}$.

Mudança de base

Matriz associada a uma transformação linear em diferentes bases; matrizes semelhantes.

Matriz associada a uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em diferentes bases

Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e consideremos uma base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Dado um vetor arbitrário $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$, o vetor das coordenadas da imagem de $\boldsymbol{x}$ pode ser calculado, quer usando a matriz $A = [T]_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_n}$, quer usando a matriz $B = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, tendo-se:

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_n} = A[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_n} \qquad\qquad [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Por outro lado, podemos ver na figura seguinte que $[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_n}$ também pode ser calculado à custa da matriz B:

$$\begin{aligned}[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_n} &= M^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} \\ &= M^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}B[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} \\ &= M^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}BM_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_n}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} {[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_n}} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_n}} \\ {[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, "B"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, mapsto, "M_{\mathcal{E}_n\leftarrow\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Obtemos assim

$$A = M^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}BM_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_n}.$$

Exemplo. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão relativa à reta de equação $y = 2x$. Obtenha uma expressão analítica de T usando a matriz que representa a transformação relativamente à base $\mathcal{B} = ((1,2),(2,-1))$.

Matriz associada a uma transformação linear $T\colon U \to U$ em diferentes bases

Consideremos agora o caso geral de se ter um espaço vetorial U e duas bases $B_1 = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ e $B_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$. Considerações análogas às anteriores, levar-nos -ão à seguinte situação:

$$\begin{aligned}[T]_{B_1,B_1} &= M_{B_1 \leftarrow B_2}[T]_{B_2,B_2}M_{B_2 \leftarrow B_1}\\ M_{B_1 \leftarrow B_2} &= M^{-1}_{B_2 \leftarrow B_1}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
[\boldsymbol{x}]_{B_1} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "M_{B_2 \leftarrow B_1}"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{B_1}} \\
{[\boldsymbol{x}]_{B_2}} \arrow[r, mapsto, "B"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{B_2}} \arrow[u, mapsto, "M_{B_1 \leftarrow B_2}"']
\end{tikzcd}$$

onde $A = [T]_{B_1,B_1}$ e $B = [T]_{B_2,B_2}$.

Tendo-se

$$\begin{aligned}[T(\boldsymbol{x})]_{B_1} &= M^{-1}_{B_2 \leftarrow B_1}[T(\boldsymbol{x})]_{B_2}\\ &= M^{-1}_{B_2 \leftarrow B_1}B[\boldsymbol{x}]_{B_2}\\ &= M^{-1}_{B_2 \leftarrow B_1}BM_{B_2 \leftarrow B_1}[\boldsymbol{x}]_{B_1}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$A = M^{-1}_{B_2 \leftarrow B_1}BM_{B_2 \leftarrow B_1}.$$

Proposição 5. *Seja U um espaço vetorial, seja $T\colon U \to U$ uma transformação linear e sejam B_1, B_2 bases de U. Então as matrizes $[T]_{B_1,B_1}$ e $[T]_{B_2,B_2}$ são matrizes semelhantes.*

Matriz associada a uma transformação linear $T\colon U \to V$ em diferentes bases

Sejam U, V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) e sejam B_1 e B_1' duas bases de U e sejam B_2 e B_2' duas bases de V. Analogamente ao que tem vindo a ser deduzido nesta secção, tem-se:

$$[T]_{B_2,B_1} = M_{B_2 \leftarrow B_2'}[T]_{B_2',B_1'}M_{B_1' \leftarrow B_1}$$

$$\begin{tikzcd}
[\boldsymbol{x}]_{B_1} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "M_{B_1' \leftarrow B_1}"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{B_2}} \\
{[\boldsymbol{x}]_{B_1'}} \arrow[r, mapsto, "B"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{B_2'}} \arrow[u, mapsto, "M_{B_2 \leftarrow B_2'}"']
\end{tikzcd}$$

onde $A = [T]_{B_2,B_1}$ e $B = [T]_{B_2',B_1'}$.

Calculando, tem-se

$$\begin{aligned}[T(\boldsymbol{x})]_{B_2} &= M_{B_2 \leftarrow B_2'}[T(\boldsymbol{x})]_{B_2'} \\ &= M_{B_2 \leftarrow B_2'} B[\boldsymbol{x}]_{B_1'} \\ &= M_{B_2 \leftarrow B_2'} B M_{B_1' \leftarrow B_1}[\boldsymbol{x}]_{B_1}\end{aligned}$$

donde

$$A = M_{B_2 \leftarrow B_2'} B M_{B_1' \leftarrow B_1}.$$

Espaços próprios e subespaços invariantes

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $T: U \to U$ uma transformação linear.

Diz-se que o vetor $\boldsymbol{x} \in U$, não nulo, é um **vetor próprio** de T se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$T\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Nestas condições, λ diz-se um **valor próprio** de A associado (ou correspondente) a $\boldsymbol{x}$. O **espetro de** T, designado por $\sigma(T)$, é o conjunto dos valores próprios da transformação linear T.

Dado um valor próprio λ, o **espaço próprio** $E(\lambda)$ associado ao valor próprio λ é o núcleo da transformação linear $T - \lambda I$ (onde I designa a identidade em U):

$$E(\lambda) = N(T - \lambda I).$$

Sendo B uma base de U e $A = [T]_{B_U, B_U}$, tem-se

$$T\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \text{se e só se} \qquad (A - \lambda I)[\boldsymbol{x}]_B = \boldsymbol{0} \ ,$$

donde

$$\sigma(T) = \sigma(A),$$

e

$$E(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in U : (\boldsymbol{x})_B \in N(A - \lambda I)\}.$$

Exemplo. Determine os valores próprios e vetores próprios da reflexão em relação à reta de $\mathbb{R}^2$ com a equação cartesiana $y = x$.

Exemplo.

a) Determine os valores próprios e vetores próprios da rotação em torno da origem em $\mathbb{R}^2$ de $\pi/2$, no sentido direto.

b) Calcule os valores próprios (reais e complexos) da matriz que representa a rotação em relação à base canónica.

Subespaços invariantes

Seja U um espaço linear e seja $T : U \to U$ uma transformação linear. Diz-se que um subespaço W de U é um **subespaço invariante** de T se

$$T(W) \subseteq W.$$

Os subespaços $\{\mathbf{0}\}$, U e os espaços próprios de T (se existirem) são exemplos de subespaços invariantes de T.