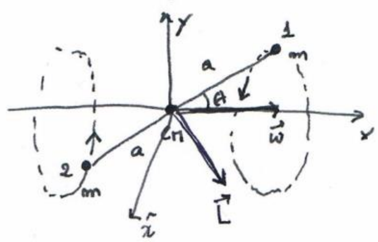
O momento angular $\vec{L}$ e a velocidade de rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad \text{(ref. inercial)}$$

Nos exemplos anteriores procuramos saber como $\omega \equiv \omega(t)$ varia no tempo a velocidade angular de um corpo rígido (eixo de rotação fixo); mas como varia o momento angular?

Vejamos um exemplo simples: duas massas ligadas por um eixo rígido de massa desprezável



$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_1\right) + \vec{r}_2 \times m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_2\right)$$

$$\vec{r}_1 = a\cos\theta\,\hat{x} + a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\bar{A} \times \bar{B} \times \vec{C} = (\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B} - \bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$$

$$\vec{r}_2 = -a\cos\theta\,\hat{x} - a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{x}$$

$$\vec{L} = m r_1^2\vec{\omega} - \vec{r}_1\left(m\,\vec{r}_1\cdot\vec{\omega}\right) + m r_2^2\vec{\omega} - r_2\left(m\,\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}\right)$$

$$= m\left(r_1^2 + r_2^2\right)\vec{\omega} - \omega m a\cos\theta\cdot\vec{r}_1 + \omega m a\cos\theta\,\vec{r}_2$$

$$= m\,2a^2\omega\,\hat{x} - 2ma^2\cos\theta\left(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right)$$

$$= \left(2ma^2\omega - 2ma^2_{\omega}\cos^2\theta\right)\hat{x} - 2ma^2\omega\cos\theta\sin\theta\,\hat{y}$$

$$= \omega\,2ma^2\left(\sin^2\theta\,\hat{x} - \cos\theta\sin\theta\,\hat{y}\right) =$$

$$= 2ma^2\omega\sin\theta\left(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}\right)$$

É fácil verificar que $\vec{L} \perp \vec{r}_{1(2)}$ $(\vec{L}\cdot\vec{r}=0)$, e que

$\vec{L}$ mantém a sua orientação (ângulo) com $\vec{\omega}$ fixa.

Mesmo que $\vec{\omega}$ seja constante, $\vec{L}$ não é constante.

Tal como $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, também aqui:

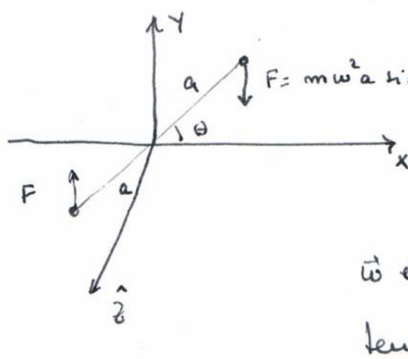
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{L}$$

$$= \omega\,\hat{x}\times 2ma^2\omega\sin\theta\left[\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}\right]$$

$$= -2ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{z}$$

Mas, se $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \neq 0 \Rightarrow \vec{M} = -2ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{z}$

De onde vem este momento não nulo? Bem, o movimento circular das duas massas exige uma força normal. O raio da trajectória de cada partícula é $a\sin\theta$. A aceleração normal requerida é $\omega^2 a\sin\theta$



$$\vec{M} = -m\,a\,\omega^2\sin\theta\cdot 2a\cos\theta\,\hat{z}$$

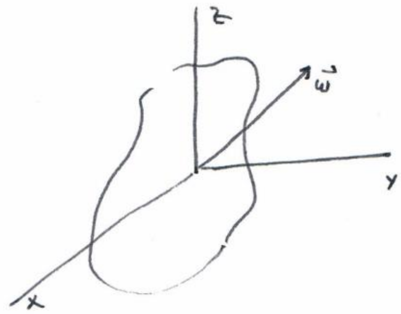
$$= -2ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{z}$$

$\vec{\omega}$ é constante mas $\vec{L}$ varia no tempo.

Qual a relação entre $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$?

$\vec{L} \leftrightarrow \vec{\omega}$; Com generalidade, para um sistema de partículas ($\vec{\omega}$ = const.)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$



$$\vec{r}_i = x_i\,\hat{x} + y_i\,\hat{y} + z_i\,\hat{z}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\,\hat{x} + \omega_y\,\hat{y} + \omega_z\,\hat{z}$$

(com os eixos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ fixos relativamente ao corpo rígido)

$$L_x = \sum_i \left[m_i r_i^2 \omega_x - m_i x_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right]$$

$$= \sum_i \left\{ m_i r_i^2 \omega_x - m\, x_i \,(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right\}$$

$$= \sum_i \left\{ m_i \,(\cancel{x_i^2} + y_i^2 + z_i^2)\, \omega_x - m\, \cancel{x_i^2}\, \omega_x - m_i x_i y_i \omega_y - m_i x_i z_i \omega_z \right\}$$

$$= \sum_i m_i \,(y_i^2 + z_i^2)\, \omega_x - \sum_i m_i x_i y_i\, \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i\, \omega_z$$

$$L_x = I_{xx}\,\omega_x + I_{xy}\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_z$$

De forma semelhante,

$$L_y = +I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z$$

Isto é:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} são momentos de inércia;

I_{xy} etc produtos de inércia: Repare que a matriz I_{ij} é real e simétrica.

$$(\; I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i \;)$$

Logo é diagonalizável. Isto é, é possível encontrar um sistema de eixos ligado ao corpo de tal forma que, nesse sistema, I_{ij} é diagonal. Esse sistema de eixos é designado o sistema de eixos principais de inércia. Neste sistema de eixos, a relação entre $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ é particularmente simples:

$$\vec{L} = I_{xx} \omega_x \hat{x} + I_{yy} \omega_y \hat{y} + I_{zz} \omega_z \hat{z}$$

e como I_{ii} não variam no tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} \hat{x} + I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} \hat{y} + I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} +$$

$$+ I_{xx} \omega_x \frac{d\hat{x}}{dt} + I_{yy} \omega_y \frac{d\hat{y}}{dt} + I_{zz} \omega_z \frac{d\hat{z}}{dt}$$

Os últimos termos resultam do facto de os eixos principais de inércia estarem ligados ao corpo (não constituem em geral um referencial inercial) e os versores serem ∴ funções do tempo.

Como discutimos em detalhe (no caso do movimento circular)

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x} \qquad \underline{etc}.$$

Logo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_{xx}\,\dot{\omega}_x\,\hat{x} + I_{yy}\,\dot{\omega}_y\,\hat{y} + I_{zz}\,\dot{\omega}_z\,\hat{z} + $$

$$+ \; \vec{\omega} \times \vec{L} \;\equiv \vec{M} \equiv$$ momento das forças referido aos eixos principais de inércia.

Isto é:

$$I_{xx}\,\dot{\omega}_x + (\vec{\omega}\times\vec{L})_x = M_x \qquad \underline{etc}.$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{L})_x = \omega_y L_z - \omega_z L_y = \omega_y I_{zz}\,\omega_z - \omega_z I_{yy}\,\omega_y$$

$$= (I_{zz} - I_{yy})\,\omega_y\omega_z$$

$$I_{xx}\,\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\,\omega_y\omega_z = M_x$$

De forma semelhante:

$$I_{yy}\,\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\,\omega_z\omega_x = M_y$$

$$I_{zz}\,\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\,\omega_x\omega_y = M_z$$

[Equações de Euler]

Podemos também exprimir de forma simples o momento cinético de rotação do corpo neste sistema de eixos:

Como vimos

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left| \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\left(\omega_y z_i - \omega_z y_i\right)^2 + \left(\omega_z x_i - \omega_x z_i\right)^2 + \left(\omega_x y_i - \omega_y x_i\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \omega_y^2 z_i^2 + \omega_z^2 y_i^2 - 2\omega_y \omega_z y_i z_i + \omega_z^2 x_i^2 + \omega_x^2 z_i^2 - \right.$$

$$\left. - 2\omega_z \omega_x x_i z_i + \omega_x^2 y_i^2 + \omega_y^2 x_i^2 - 2\omega_x \omega_y x_i y_i \right\}$$

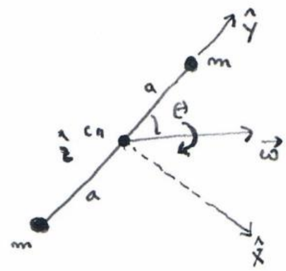
Mas, nestes eixos, os productos de inércia são nulos, pelo que:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ (z_i^2 + y_i^2)\,\omega_x^2 + (z_i^2 + x_i^2)\,\omega_y^2 + (x_i^2 + y_i^2)\,\omega_z^2 \right.$$

$$= \frac{1}{2} \left(I_{xx}\, \omega_x^2 + I_{yy}\, \omega_y^2 + I_{zz}\, \omega_z^2 \right)$$

Consideremos agora dois exemplos ilustrativos simples

• Duas massas ligadas por um fio de massa desprezável:



Eixos principais de inércia?
(ligados ao corpo):

$$I_{xx} = 2ma^2$$

$$I_{yy} = 0$$

$$I_{zz} = 2ma^2$$

$$\vec{\omega} = \omega\left[\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}\right]$$

(Nota: $I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = 0$

$I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = 0$

$I_{yz} = -\sum m_i y_i z_i = 0$)

Então:

$$\vec{L} = I_{xx}\omega_x\,\hat{x} + I_{yy}\omega_y\,\hat{y} + I_{zz}\,\omega_z\,\hat{z}$$

$$= 2ma^2\omega\sin\theta\,\hat{x}$$

$\vec{M}$ Usando as eq. de Euler podemos calcular o momento necessário para o sistema rodar com velocidade angular constante:

$$(I_{xx} - I_{zz})\,\omega_z\omega_x = M_y$$

$$(I_{yy} - I_{xx})\,\omega_x\omega_y = M_z$$

$$(I_{zz} - I_{yy})\,\omega_y\,\omega_z = M_x$$

$\Rightarrow \quad M_y = 0$

$M_z = -2ma^2 \omega_x \omega_y$.

$M_x = 0$

$M_z = -2ma^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta$ (em acordo com o resultado anterior)

II

$$E_c = \frac{1}{2}\left[I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} I_{xx}\, \omega^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2}\, 2ma^2\omega^2 \sin^2\theta$$