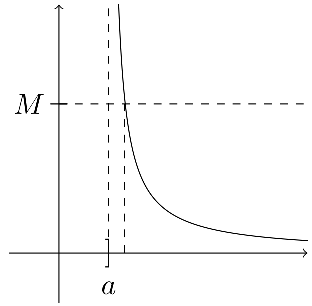
Limites infinitos e no infinito

Limites infinitos



Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que f *tende para* $+\infty$ *quando* x *tende para* a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Limites infinitos

Dizemos que f *tende para* $-\infty$ *quando* x *tende para* a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Exemplos

(a) Seja $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Então $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

(b) Seja $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Então $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Cálculo com limites infinitos

Sejam $f \colon D \to \mathbb{R}$ e $g \colon D \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D.

1. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
2. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
3. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
4. Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
5. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $c > 0$ é um número real, então $\lim_{x \to a} cf(x) = +\infty$.
6. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $c < 0$ é um número real, então $\lim_{x \to a} cf(x) = -\infty$.

Cálculo com limites infinitos

7. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $c > 0$ é um número real, então $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = -\infty$.
8. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $c < 0$ é um número real, então $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = +\infty$.
9. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L > 0$ real, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.
10. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L < 0$ real, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.
11. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L > 0$ real, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.
12. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L < 0$ real, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

Cálculo com limites infinitos

13. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.
14. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.
15. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.
16. Se $\forall x \in D\ f(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
17. Se $\forall x \in D\ f(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
18. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) e se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in D \setminus \{a\}$,
$$|x - a| < r \Longrightarrow g(x) \geq f(x) \qquad (\text{resp. } g(x) \leq f(x)),$$
então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Indeterminações

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, não é possível dizer alguma coisa de geral sobre o limite $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$. Exprimimos este facto dizendo que $+\infty + (-\infty)$ *é uma indeterminação*. Outras indeterminações são:
$$0\cdot\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0.$$

Exemplo: indeterminação $+\infty + (-\infty)$

Sejam $f, g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definidas por

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$. Então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x) = 0$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$. Então
$$\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}(1 - \tfrac{1}{x}) = -\infty.$$

Funções compostas

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ duas funções, a um ponto de acumulação de A e b um ponto de acumulação de B tais que

- $b \notin B$;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;
- $\lim\limits_{y\to b} g(y) = +\infty\ (-\infty)$.

Então $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = +\infty\ (-\infty)$.

Exemplo

Pretende-se calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_2 \cos x$. Consideremos as funções $f\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]0,+\infty[$, $f(x) = \cos x$ e $g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(y) = \log_2 y$ e os pontos de acumulação $\frac{\pi}{2}$ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e 0 de $]0,+\infty[$. Como $0 \notin]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ e $\lim\limits_{y\to 0} \log_2 y = -\infty$, temos
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_2 \cos x = -\infty.$$

A notação 0^+ e 0^-

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^+ \qquad \text{(resp. } 0^-\text{)}$$

se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e se existir $r > 0$ tal que, para todo o $x \in D \setminus \{a\}$,

$$|x-a| < r \Longrightarrow f(x) > 0 \qquad \text{(resp. } f(x) < 0\text{)}.$$

A notação 0^+ e 0^-

Proposição

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Suponha que f nunca se anula em D. Então

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Exemplos

(i) Consideremos a função $f\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Temos $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0^+$ e então $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ii) Consideremos a função $f\colon]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Temos $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0^-$ e então $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Limites laterais infinitos

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto

$$A = D \cap]a,+\infty[= \{x \in D \,|\, x > a\}.$$

Se $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x) = +\infty$, dizemos que o *limite lateral à direita de f em a* é $+\infty$ e escrevemos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. Se $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x) = -\infty$, dizemos que o *limite lateral à direita de f em a* é $-\infty$ e escrevemos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Seja $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto

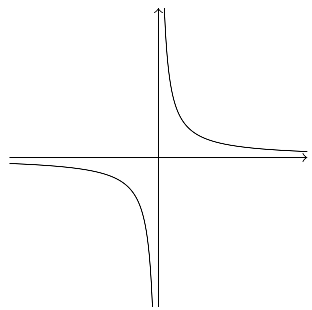
$$B = D \cap]-\infty, b[= \{x \in D \,|\, x < b\}.$$

Se $\lim\limits_{x\to b} f|_B(x) = +\infty$, dizemos que o *limite lateral à esquerda de f em b* é $+\infty$ e escrevemos $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Se $\lim\limits_{x\to b} f|_B(x) = -\infty$, dizemos que o *limite lateral à esquerda de f em b* é $-\infty$ e escrevemos $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

Limites laterais infinitos

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.



Então $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Limites no infinito

Sejam $f : D \to E$ uma função e $L \in \mathbb{R}$.

(a) Suponhamos que o conjunto D é não majorado. Dizemos que f *tende para* L *quando* x *tende para* $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dizemos que f *tende para* $+\infty$ *quando* x *tende para* $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x > N \Rightarrow f(x) > M.$$

Dizemos que f *tende para* $-\infty$ *quando* x *tende para* $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x > N \Rightarrow f(x) < M.$$

Limites no infinito

(b) Suponhamos que o conjunto D é não minorado. Dizemos que f *tende para* L *quando* x *tende para* $-\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dizemos que f *tende para* $+\infty$ *quando* x *tende para* $-\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x < -N \Rightarrow f(x) > M.$$

Dizemos que f *tende para* $-\infty$ *quando* x *tende para* $-\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall x \in D \quad x < -N \Rightarrow f(x) < M.$$

Limites no infinito

Exemplos

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ não existe

Nota

As regras de cálculo com limites continuam válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to +\infty$ ou por $x \to -\infty$.

Teorema do confronto

Teorema

Sejam D um conjunto não majorado e $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ três funções. Suponhamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, x \in D : x > N \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Nestas condições, se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Corolário

Sejam D um conjunto não majorado e $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f for limitada e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$.

Exemplo

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ pois o seno é limitado e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Funções compostas

Proposição 1

Sejam D um conjunto não majorado e $f : D \to E$ e $g : E \to F$ duas funções.

(a) Seja $L \in E$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Se g for contínua em L, então $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(L)$.

(b) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} g(y)$.

(c) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to-\infty} g(y)$.

Exemplos

(i) Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e sen é contínua, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} 0 = 0$.

(ii) Como $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = \lim_{y\to-\infty} 2^y = 0$.

Funções compostas

Proposição 2

Sejam E um conjunto não majorado, $f : D \to E$ e $g : E \to F$ duas funções e a um ponto de acumulação de D. Suponhamos que $\lim_{y\to+\infty} g(y)$ existe (finito ou infinito) e que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Então

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} g(y).$$

Exemplo

Temos $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to+\infty} 2^y = +\infty$.

Funções monótonas

Proposição

Seja $f : D \to E$ uma função cujo domínio é um conjunto não majorado. Se f for crescente e majorada ou decrescente e minorada, então existe um número real L tal que $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Sucessões

Uma *sucessão* é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cuja domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq q\}$ onde $q \in \mathbb{N}$ é um número natural fixo.

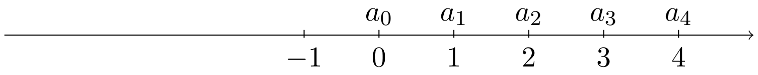
Em vez de usar uma frase da forma "*Seja $f : D \to E$ a sucessão dada por $f(x) = \ldots$*"costuma-se definir uma sucessão dizendo, por exemplo, "*Seja $(a_n)_{n\geq 3}$ a sucessão de termo geral $a_n = \ldots$*".

Dizemos que uma sucessão $(a_n)_{n\geq q}$ *converge para* $a \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Uma sucessão diz-se *convergente* se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que a sucessão converge para a. Este número a diz-se o *limite* da sucessão. Uma sucessão que não é convergente diz-se *divergente*. Dizemos que uma sucessão $(a_n)_{n\geq q}$ *diverge para* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*)* se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$).

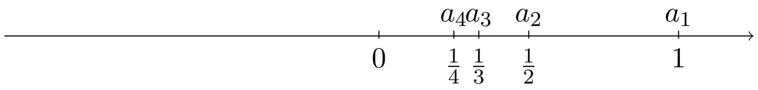
Sucessões

Exemplos

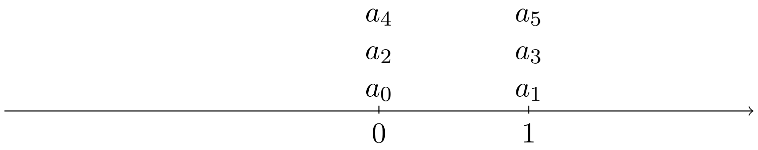
(a) A sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ de termo geral $a_n = n$ diverge para $+\infty$.



(b) A sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$ de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0.



(c) A sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por $a_{2k} = 0$ e $a_{2k+1} = 1$ é divergente.



Sucessões

Como sucessões são funções especiais, todos os conceitos e resultados sobre funções aplicam-se às sucessões. Por exemplo:

Teorema

Toda a sucessão limitada e monótona é convergente.

Proposição

A sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$ de termo geral

$$a_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

é convergente.

$a_1 = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$, $a_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$, $a_3 = \frac{64}{27} \approx 2.37, \ \ldots,$ $a_{1000000} = 2.71828\ldots$

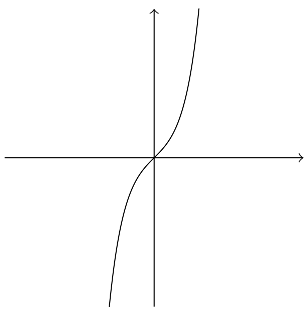
Definição

O limite desta sucessão é o *número de Euler* e. O logaritmo na base e é indicado por $\ln$, assim $\ln x = \log_e x$.

Funções hiperbólicas

A função *seno hiperbólico* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



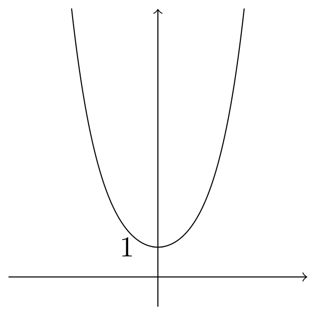
Proposição

A função sh *é ímpar, contínua e estritamente crescente. A imagem de* sh *é* $\mathbb{R}$.

Funções hiperbólicas

A função *cosseno hiperbólico* $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



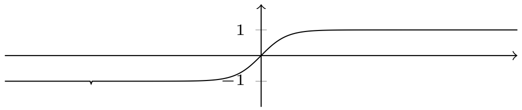
Proposição

A função ch *é par, contínua, estritamente decrescente em* $]-\infty, 0]$ *e estritamente crescente em* $[0, +\infty[$. *A imagem de* ch *é o intervalo* $[1, +\infty[$.

Funções hiperbólicas

A função *tangente hiperbólica* $\operatorname{th}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$



Proposição

A função th *é ímpar, contínua e estritamente crescente. A imagem de* th *é o intervalo* $]-1, 1[$.

Funções hiperbólicas

Proposição

As funções sh, ch *e* th *têm as seguintes propriedades:*

(a) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$;

(b) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

(c) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

(d) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

(e) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.