Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

LFIS e MIENGFIS

Cálculo Vetorial

Folha 7 — maio de 2020

Exercício 1. Determine os integrais de linha $\int_{\boldsymbol{c}} f\, ds$, quando:

a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, t),\ t \in [0, 2\pi]$;
b) $f(x,y,z) = \cos z$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in [0, 2\pi]$;
c) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (1, 2, t^2),\ t \in [0, 1]$;
d) $f(x,y,z) = yz$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (t, 3t, 2t),\ t \in [1, 3]$.

Exercício 2. Determine o comprimento do gráfico da função $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln x$.

Exercício 3. Determine o comprimento do caminho $\boldsymbol{c} : t \mapsto (t^2, t, 3),\ t \in [0,1]$.

Exercício 4. Calcule os seguintes integrais de linha:

a) $\int_{\boldsymbol{c}} x\, dy - y\, dx, \quad \boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi$;
b) $\int_{\boldsymbol{c}} x\, dx + y\, dy, \quad \boldsymbol{c}(t) = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t)), \quad 0 \le t \le 2$;
c) $\int_{\boldsymbol{c}} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, onde $\boldsymbol{c}$ consiste nos segmentos de recta ligando os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$;
d) $\int_{\boldsymbol{c}} x^2\, dx - xy\, dy + dz$, onde $\boldsymbol{c}$ consiste no arco de parábola de equações $z = x^2$, $y = 0$, unindo os pontos $(-1,0,1)$ e $(1,0,1)$.

Exercício 5. Considere a função real $f(x,y,z) = xe^y \cos(\pi z)$.

a) Calcule $\boldsymbol{F} = \nabla f$.
b) Determine $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, onde $\boldsymbol{c}(t) = (3\cos^4 t, 5\operatorname{sen}^7 t, 0)$, $0 \le t \le \pi$.

Exercício 6. Considere o campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$.

a) Verifique que $\boldsymbol{F}$ é um campo de gradientes.
b) Determine o integral de linha de $\boldsymbol{F}$ ao longo de qualquer caminho de classe C^1 que una o ponto $(1,0,1)$ ao ponto $(0,1,0)$.

Exercício 7. Verifique se os seguintes campos de vectores são conservativos:

a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy + \operatorname{sen} y, x^2 + x\cos y)$;
b) $\boldsymbol{G}(x,y) = \left(\frac{x-2y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \right)$.

Exercício 8. Verifique o Teorema de Green para $P(x,y) = x$ e $Q(x,y) = xy$ e D o círculo unitário centrado na origem.

Exercício 9. Seja $\boldsymbol{F}$ um campo vectorial definido por

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{-y\vec{e_1} + x\vec{e_2}}{x^2+y^2}.$$

a) Calcule $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, para $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
b) Calcule $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, quando C é um círculo unitário centrado na origem e orientado no sentido anti-horário.
c) Explique porque razão as respostas das alíneas anteriores não contrariam o Teorema de Green.