Cálculo EC

Exercícios

1. Determine o maior domínio possível das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{1}{x^2-1}; \quad (b)\ f(x) = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x}; \quad (c)\ f(x) = \sqrt{1-\cos(3x^3+x)}.$$

2. (a) Sejam $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}+1$ e $g(x) = \cos x - 2x^2 + 5x$. Descreva a função $g \circ f$.

   (b) Para a função h dada indique duas funções f e g tais que $h = g \circ f$:

$$\begin{array}{l} (i)\ h(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2-3}\right); \\ (ii)\ h(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{2}{x^2+1}. \end{array}$$

3. Determine a imagem das seguintes funções:

$$\begin{array}{l} (a)\ f : [-1,3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2-3x; \\ (b)\ f :]-4,2[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |2x-1|. \end{array}$$

4. Estude a paridade das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

$$(a)\ f(x) = 3x - x^3; \quad (b)\ g(x) = |x+1| + |x-1|; \quad (c)\ h(x) = x^3 - x^2.$$

5. Seja $f(x) = |x|$. Esboce o gráfico de $g(x)$:

   (a) $g(x) = f(x) + 2$;

   (b) $g(x) = f(x-1)$;

   (c) $g(x) = 2f(x)$;

   (d) $g(x) = f(-x)$.

6. Calcule os números $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ sabendo que $\cos\alpha = -3/5$ e $-\pi < \alpha < -\pi/2$.

7. Resolva a equação $\operatorname{sen}(2x) = 1/2$.

8. Mostre que $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$.

9. Calcule, caso existam, os limites seguintes:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-3x^4+2x^3-x}{x^3-x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$

10. Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|\frac{f(x)}{x}| \leq 2000$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

11. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função $f(x) = ax + b$ satisfaça $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 5$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

12. Diga se é possível prolongar f por continuidade em a. Justifique.

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2-16}{|x-4|},\quad a = 4;\quad (b)\ f(x) = \frac{x^3+27}{x+3},\quad a = -3.$$

13. Mostre que o polinómio $P(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ tem uma raiz no intervalo $[-1; 0]$.

14. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique a sua resposta.

   (a) A equação $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\cos x = 0$ admite pelo menos uma solução em $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) Existe pelo menos um ponto $x \in]0, \pi/2[$ tal que $x(\operatorname{sen} x)^{17} = (\cos x)^{13}$.

15. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+3}{2x-7} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \cos x \qquad \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x + \cos x$$

16. Determine o valor do parâmetro a para que a seguinte função seja contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2a\ln\left(\frac{xe}{2}\right) & 0 < x \leq 2 \\ \ln(x^2 - 4) - \ln(x - 2) & x > 2 \end{cases}$$

17. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

seja contínua.

18. Calcule as derivadas $f'(x)$ das funções (no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (d) $f(x) = \cos(\ln(x))$

(e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$

19. Estude a derivabilidade em 0 das seguintes funções

$$f(x) = x - |x| \qquad f(x) = (x - |x|)x$$

20. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Demonstre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule o valor da derivada nesse ponto. Calcule a derivada em todo $\mathbb{R}$. Esta derivada é contínua?

21. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Indique os coeficientes a e b necessários para que f seja derivável em 1.

22. Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

    (a) Calcule as derivadas das funções f e g dadas por $f(x) = \cos(u(x))$ e $g(x) = e^{u(x)} + (u(x))^4$.

    (b) Sabendo que $u(1) = 0$ e $u'(1) = 1$, determine a equação da recta tangente em 1 ao gráfico de f, e ao gráfico de g.

23. Determine os intervalos de monotonia da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

24. Estude a função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (i.e. indique o domínio, os intervalos de monotonia, os extremos locais, o sentido da concavidade por intervalos, os pontos de inflexão e esboce o gráfico).

25. Aplicando o teorema de Lagrange à função $f : [0; 0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \ln(1+t)$, mostre que $0 < \ln(1,1) < 0,1$.

26. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll} (a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x} & (b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x} & (c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} \\ (d)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x^2+1} & (e)\ \lim\limits_{x\to 0} x \ln x & (f)\ \lim\limits_{x\to 0} x^x \end{array}$$

27. Considere a função $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

    Mostre que f é derivável em 0 e que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

28. Calcule:

$$\begin{array}{llll} (a) & \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-1/2)); & (b) & \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\pi/6)); \\ (c) & \cos(\arccos(\sqrt{3}/2)); & (d) & \arccos(\cos(-\pi/3)); \\ (e) & \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\pi/4)); & (f) & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1)). \end{array}$$

29. Sabendo que $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e que $\operatorname{argsh}(0) = 0$, mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

30. Determine as seguintes primitivas:

$$1)\int (x^2-4x+\frac{5}{x})\,dx \quad 2)\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx \quad 3)\int \frac{3}{2x-1}\,dx$$

$$4)\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \qquad 5)\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x}\,dx \quad 6)\int \operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx$$

31. Recorrendo à primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

$$1)\int x\operatorname{sen} 2x\,dx \quad 2)\int (2x^2-1)e^x\,dx \quad 3)\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

32. Recorde que $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x+1}{2}$ e determine $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$.

33. Determine as primitivas seguintes :

$$1)\int \ln x\,dx \qquad 2)\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx \qquad 3)\int \frac{-3}{x(\ln x)^3}\,dx$$

$$4)\int -3x^2\cos x\,dx \quad 5)\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx \quad 6)\int \operatorname{arcsen} x\,dx$$

34. Calcule os seguintes integrais:

$$1)\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad 2)\int_0^{\pi} (x+2)\cos x\,dx$$

$$3)\int_1^2 x2^x\,dx \qquad 4)\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

35. a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\operatorname{sen} x\,dx$.

b) Determine todas as primitivas de $f(x)=e^x\cos x$.

36. Usando uma substituição, calcule os seguintes integrais

$$1)\int_{-1}^{1} e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx \quad 2)\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$3)\int_{0}^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\,dx \quad 4)\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

37. Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

a) A é o conjunto do plano limitado pelas rectas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva de $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \leq y \leq -x + 2\}$.

c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y = -x^2 + \frac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2 - 1$.

38. Para cada função $f(x)$, determine o polinómio de Taylor e escreve as fórmulas de Taylor-Young e de Taylor-Lagrange à ordem dada e em volta do ponto x_0 dado.

$$\begin{array}{lll} a)\ f(x) = \cos x, & \text{ordem } 2, & x_0 = 0 \\ b)\ f(x) = \sqrt{x}, & \text{ordem } 1, & x_0 = 4 \\ c)\ f(x) = \operatorname{tg} x, & \text{ordem } 3, & x_0 = 0 \end{array}$$

39. Utilizando a fórmula de Taylor-Lagrange obtida no exercício 38 mostre que que $0,98$ é um valor arredondado de $\cos(0,2)$, isto é $0,975 \leq \cos(0,2) < 0,985$.

40. Utilizando fórmulas de Taylor-Young à ordem 2 em volta de 0, calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\operatorname{sen} x}{x^3+2x^2}$$

41. Calcule:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{4^k}$

42. Convergente ou divergente? Justifique a sua resposta.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-3)^k$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\frac{1}{3}}}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$

43. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o raio de convergência:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}x^k$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}x^k$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^kx^k$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}x^k$

44. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares (isto é, determine a sua solução geral).

(a) $2y'(x)-6y(x)=e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R}$ (b) $y'(x)+\dfrac{1}{x}y(x)=2e^{-x^2}, \quad x\in]-\infty,0[$

(c) $y'(x)+2y(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}$ (d) $y'(x)+\dfrac{1}{2x}y(x)=\sqrt{x}\operatorname{sen}(x^2), \quad x>0$

45. Determine a solução dos seguintes problemas com condição inicial:

(a) $\begin{cases} t^2x'(t)+x(t)=1, \quad t\in]0,+\infty[\\ x(1)=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} r'(\theta)+r(\theta)\operatorname{tg}\theta=\cos\theta, \ \theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ r(0)=2 \end{cases}$

46. Pretende-se determinar uma função f que passa pelo ponto $(0,1)$ e tal que, em cada ponto do seu gráfico, o declive da recta tangente é igual ao produto das coordenadas do ponto multiplicado por -1.

(a) Indique a equação diferencial correspondente.

(b) Determine a função procurada.

47. Uma materia radioactiva desintegra-se a uma taxa $Q'(t)$ proporcional à quantidade $Q(t)$ de materia existente no instante t, isto é a função Q satisfaz a relação

$$Q'(t)=-\lambda Q(t)$$

onde λ é uma constante positiva dependente da materia considerada e da unidade de tempo (constante de desintegração).

(a) Exprime $Q(t)$ em função de t, de λ e da quantidade Q_0 de materia no instante inicial $t=0$.

(b) Seja $p\in]0,1[$. Determine o instante em que a proporção de materia existente relativamente à quantidade inicial é igual a p. Este instante depende da quantitade de materia inicial?

(c) Sendo o ano a unidade de tempo, a constante de desintegração do Carbono 14 é igual a $1,238\times10^{-4}$. Sabendo que a quantidade actual presente num osso de um fóssil é 40% da quantidade inicial Q_0, indique a idade do fóssil.

48. Suponha que no instante $t = 0$ um bolo é tirado do forno e é colocado numa sala cuja temperatura é mantida a 25°C. A temperatura $T(t)$ no instante t do bolo segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$T'(t) = -k\,(T(t) - 25)$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Mostre que, se a temperatura do bolo à saída do forno é T_0, a temperatura no instante t é dada por:
$$T(t) = 25 + (T_0 - 25)e^{-kt}.$$

(b) Sabendo que $T_0 = 225°C$ e que depois de 10 minutos a temperatura do bolo é 125°C, determine o instante em que o bolo atingirá a temperatura de 50°C.

49. Resolva as seguintes equações diferenciais.

(a) $y'(x) = x\cos^2 y(x), \quad -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

(b) $y'(x) = \dfrac{y(x)^2 + 1}{2xy(x)}, \quad x > 0,\ y < 0$

(c) $y'(x) = -xe^{-y(x)}$

50. Determine a solução dos seguintes problemas com condição inicial:

(a) $\begin{cases} r'(\theta) = -\dfrac{(r(\theta)^2 + 1)\cos(\theta)}{2r(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}, & \theta \in]0, \pi[,\ r > 0 \\ r(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy'(x) + y(x) = 0, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 1, & x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\cos x \operatorname{sen} x}{y(x)}, & y < 0 \\ y(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$

51. Escreva uma equação diferencial correspondente à situação descrita e indique se a equação obtida é linear ou separável.

(a) Ao longo do tempo, a temperatura $T(t)$ de um objecto varia a uma taxa proporcional à diferença entre essa temperatura e a temperatura T_a do meio ambiante (suposta constante).

(b) A taxa de variação no instante t do tamanho de uma população é proporcional ao quadrado desse tamanho no instante t.