Linhas e superfícies de nível

1 Linhas de nível

Se $\mathcal{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parciais, chamamos linha de nível c de f ao conjunto

$$\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathcal{U} : f(x,y) = c\} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Recordando que, se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$, chamamos imagem recíproca de A por f ao conjunto

$$f^{-1}(A) = \{(x,y) \in \mathcal{U} : f(x,y) \in A\},$$

contatamos que $\Sigma_c = f^{-1}(\{c\})$.

Exemplos

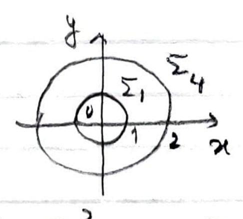
1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$

$$\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$$

Assim:

i) Se $c = 0$, $\Sigma_c = \{(0,0)\}$ ii) Se $c < 0$, $\Sigma_c = \emptyset$

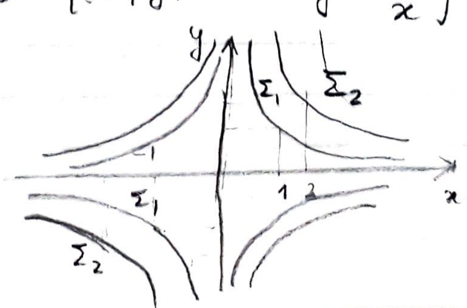
iii) Se $c > 0$, $\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$ é a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\sqrt{c}$.



2) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto xy$

i) $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$

ii) $\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{c}{x}\}$ se $c \neq 0$



(2) Superfícies de nível

Seja $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais. Chamamos superfície de nível c de f ao conjunto

$$\Sigma_c = \{(x,y,z) \in \mathcal{U} : f(x,y,z) = c\} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Notem que $\Sigma_c = f^{-1}(\{c\})$

Exemplos

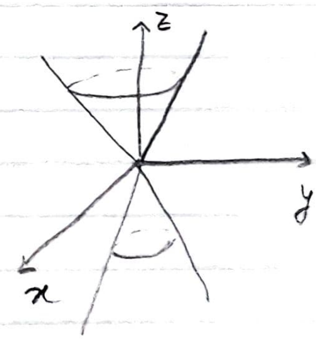
1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$

Assim:

i) $\Sigma_0 = \{(0,0,0)\}$ ii) $\Sigma_c = \emptyset$ se $c<0$

iii) Para $c>0$,
$$\Sigma_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = c\}$$
superfície esférica (casca da esfera) de centro em $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{c}$.

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2-z^2$



$$\Sigma_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\}$$
é a superfície cônica desenhada ao lado

Observação

Uma linha de nível é o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $f(x,y)=c$. Como temos 2 variáveis e uma equação, é fácil perceber que, se conseguíssemos resolver a equação, teríamos uma variável em função da outra.

Suponhamos que escrevíamos y como função de x. Teríamos, então, uma parametrização da curva de nível c:

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, y(x))$$

Quando $D_f \subseteq \mathbb{R}^3$, temos a equação $f(x,y,z)=c$ e dois graus de liberdade. Suponhamos que z se escreve em função de x e de y. Temos, assim, a equação de uma superfície

$$\Phi : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x,y,z(x,y))$$

Peço-vos, agora, que leiam o ficheiro linhas_superficies_nivel.

Como o ficheiro contém apenas um resumo da matéria (porque os exemplos iam sendo feitos ao longo da aula), vou resolver agora alguns exemplos.

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in \Sigma_c = f^{-1}(\{c\}) \\ \nabla f(x_0) \neq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \nabla f(x_0) \perp \Sigma_c \\ \perp \text{ significa ortogonal} \end{array}}$$

Exemplo 1

Seja $f(x,y) = x\ln y + e^{xy}$. Considere a superfície de nível e desta função,

$$\Sigma_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ : x\ln y + e^{xy} = e\}$$

Notem que $(1,1) \in \Sigma_e$.

Calculemos a recta tangente a Σ_e no ponto $(1,1)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\ln y + y e^{xy}, \frac{x}{y} + x e^{xy}\right)$$

$$\nabla f(1,1) = (e, 1+e)$$

Então, podemos calcular a recta tangente em $(1,1)$ de várias maneiras:

(i) usando a fórmula

$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y)-(x_0,y_0)) = 0$$

$(e,1+e)\cdot((x,y)-(1,1)) = 0 \Longleftrightarrow (e,1+e)\cdot(x-1,y-1) = 0$
$\Longleftrightarrow ex - e + (1+e)y - (1+e) = 0 \Longleftrightarrow (1+e)y = -ex + 1 + 2e$
$\Longleftrightarrow y = -\dfrac{e}{1+e}x + \dfrac{1+2e}{1+e}$

(ii) como $\nabla f(1,1) \perp \Sigma_e$, então a recta de equação
$$ex+(1+e)y=d$$
é tangente a Σ_e desde que determinemos d de modo a $(1,1)$ pertencer à recta. Então
$$d = e+1+e = 1+2e$$
e obtemos, igualmente, a equação $ex+(1+e)y=1+2e$

(iii) A equação da recta normal a Σ_e que passe em $(1,1)$ é
$$(x,y)=(1,1)+\lambda(e,1+e), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1+e\lambda \\ y=1+(1+e)\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{e} \\ - \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{e} \\ y = 1+\frac{(1+e)}{e}(x-1) \end{cases}$$

Então o declive da recta normal é $\frac{1+e}{e}$. Portanto, o declive da recta tangente é $\frac{-1}{\frac{1+e}{e}} = -\frac{e}{1+e}$ e a recta tangente é $y=-\frac{e}{1+e}x+d$, sendo d tal que $(1,1)$ pertence à recta, i.e, $d=1+\frac{e}{1+e}$ e
$$y=-\frac{e}{1+e}x+\frac{1+2e}{1+e}$$

Exemplo 2

Seja $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ e considere-se a superfície de nível 1 de f,
$$\Sigma_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z=1\}$$

O plano tangente a Σ_1 no ponto $(1,1,1)$ tem equação
$$((x,y,z)-(1,1,1))\cdot\nabla f(1,1,1)=0$$

$\nabla f(x,y,z)=(2x,2y,-1)$ e, portanto, temos

$$(x-1,y-1,z-1)\cdot(2,2,-1)=0 \Leftrightarrow 2x-2+2y-2-z+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y-z=3$$
ou, <u>alternativamente</u>, como $\nabla f(1,1,1)=(2,2,-1)\perp\Sigma_1$ em $(1,1,1)$ temos que a equação cartesiana do plano tangente

a Σ_1 no ponto $(1,1,1)$ é da forma

$$2x+2y-z=d,$$

sendo $d=2+2-1=3$.

Alguns exemplos extraídos da Folha de Exercícios 4

7) a) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ $\qquad X_0=(1,\sqrt{3},1)$

$$\Sigma_{10}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2=10\}$$

i) $X_0\in\Sigma_{10}$ pois $f(1,\sqrt{3},1)=1+2.3+3=10$

ii) $\nabla f(x,y,z)=(2x,4y,6z)$, $\quad \nabla f(1,\sqrt{3},1)=2(1,2\sqrt{3},3)$

Como $\nabla f(1,\sqrt{3},1)\neq(0,0,0)$, podemos escrever a equação da recta normal a Σ_{10} que passa em $(1,\sqrt{3},1)$:

$$(x,y,z)=(1,\sqrt{3},1)+\lambda(1,2\sqrt{3},3), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Notem que os vectores $(1,2\sqrt{3},3)$ e $2(1,2\sqrt{3},3)=\nabla f(1,\sqrt{3},1)$ são colineares. É preferível simplicar as expressões utilizadas, sempre que possível. Claro que vocês podem usar qualquer vector não nulo colinear com $\nabla f(X_0)$...

Plano tangente a Σ_{10} em $(1,\sqrt{3},1)$:

$$((x,y,z)-(1,\sqrt{3},1)).(1,2\sqrt{3},3)=0 \Leftrightarrow x+2\sqrt{3}y+3z=1+2.3+3$$

$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{3}y+3z=10$$

b) Resolvam sozinhos – mais tarde coloco a correcção integral.

8) $f(x,y)=x(x^2+y^2)+9x^2+y^2=0$, $\qquad \Sigma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$.

Queremos determinar os pontos $(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma_0$ onde a tangente à curva nesse ponto é horizontal ou vertical

CASO 1: tangente horizontal

Queremos resolver o sistema

$$\begin{cases}(x_0,y_0)\in\Sigma_0\\ \nabla f(x_0,y_0) \text{ vertical}\end{cases} \qquad \begin{cases}x_0(x_0^2+y_0^2)+9x_0^2+y_0^2=0\\ \nabla f(x_0,y_0)\parallel(0,1)\end{cases} \qquad (\parallel \text{ significa paralelo})$$

(porque $\nabla f(x_0,y_0)$ é ortogonal à curva, logo ortogonal a qualquer vector tangente)

$$\begin{cases} x_0(x_0^2+y_0^2)+9x_0^2+y_0^2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \end{cases} \begin{cases} - \\ x_0^2+y_0^2+2x_0^2+18x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ y_0^2=-3x_0^2-18x_0 \end{cases} \begin{cases} x_0(x_0^2-3x_0^2-18x_0)+9x_0^2-3x_0^2-18x_0=0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_0^3-18x_0^2+6x_0^2-18x_0=0 \\ - \end{cases} \begin{cases} 2x_0^3+12x_0^2+18x_0=0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0(x_0^2+6x_0+9)=0 \\ - \end{cases} \begin{cases} x_0=0 \vee (x_0+3)^2=0 \\ - \end{cases} \begin{cases} x_0=0 \vee x_0=-3 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0^2=0 \end{cases} \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=-3 \\ y_0^2=-27+54 \end{cases} \begin{cases} x_0=-3 \\ y_0^2=27 \end{cases} \begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=\pm\sqrt{27}=\pm 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Temos, então, os pontos $A=(0,0)$, $B=(-3,3\sqrt{3})$, $C=(-3,-3\sqrt{3})$

Notem que $\nabla f(x,y)=(3x^2+y^2+18x,\ 2xy+2y)$. Então

$\nabla f(A)=(0,0)$ e não podemos resolver o problema em A porque o vector $\nabla f(A)$ não aponta uma direcção

$\nabla f(B)=(*,\ -18\sqrt{3}+6\sqrt{3})\neq(0,0)$ $\quad \nabla f(C)=(*,\ 18\sqrt{3}-6\sqrt{3})\neq(0,0)$

Então a recta tangente a Σ_0 é horizontal em B e em C

<u>Caso 2</u>: tangente vertical

$$\begin{cases} (x_0,y_0)\in\Sigma_0 \\ \nabla f(x_0,y_0) \text{ horizontal} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0(x_0^2+y_0^2)+9x_0^2+y_0^2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad (\nabla f(x_0,y_0) \parallel (1,0))$$

$$\begin{cases} - \\ 2x_0y_0+2y_0=0 \end{cases} \begin{cases} - \\ 2y_0(x_0+1)=0 \end{cases} \begin{cases} \\ y_0=0 \vee x_0=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^3+9x_0^2=0 \\ y_0=0 \end{cases} \begin{cases} x_0^2(x_0+9)=0 \\ - \end{cases} \begin{cases} x_0=0 \vee x_0=-9 \\ y_0=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A&=(0,0) \\ D&=(-9,0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -1-y_0^2+9+y_0^2=0 \\ x_0=-1 \end{cases} \begin{cases} 8=0 \\ x_0=-1 \end{cases} \quad \text{Impossível}$$

O ponto $A=(0,0)$ está novamente excluído visto que $\nabla f(A)=(0,0)$
Então o único ponto de Σ_0 onde a recta tangente a Σ_0 é vertical é o ponto D.