Observação: Qual a frequência ciclotrónica ω_c para um electrão num campo de 1 Tesla?

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} (C) \cdot 1 \text{ (Tesla)}}{9,1 \times 10^{-31} (Kg)} = 0,175 \times 10^{12} =$$

$$= 1,75 \times 10^{11} \text{ Rad } s^{-1}$$

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 2,8 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

No caso de um protão, a frequência será reduzida de um factor $\frac{m_e}{m_p} \sim \frac{1}{1836}$ e o sentido de rotação invertido dado que o carga tem sinal oposto.

Observação: Qual o raio ciclotrónico de um electrão que se move com velocidade $v = 10^6 \, m.s^{-1}$ num plano $\perp \vec{B}$: $|\vec{B}| = 1$ Tesla?

$$r_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{10^6 \, m \cdot s^{-1}}{1,75 \times 10^{11} \, s^{-1}} = 0,57 \times 10^{-5} \, m = 5,7 \cdot 10^{-6} \, m$$

$$= 5,7 \, \mu m$$

(No caso de um protão $r_c^p = 5,7 \cdot 1836 \, \mu m \sim 1,04 \, cm$

3. Conservação do momento linear (3ª lei de Newton)

Duas partículas interagem entre si, num espaço livre de forças externas. As forças de interação obedecem à 3ª lei de Newton

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1)$$

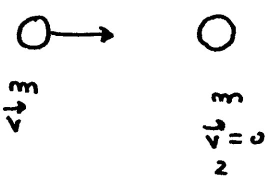
$$+\quad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2)$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

Se $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (3ª lei), então

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{const}.$$

<u>Exemplo - 1</u> :



$(m_1 = m_2)$

Qual a velocidade final das partículas?

Precisamos de mais informações. Por exemplo:

1.1 – as partículas ficam ligadas após a colisão; neste caso:

$$m\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f \rightarrow \vec{v}_f = \frac{m_1}{2m_1}\vec{v}_1$$

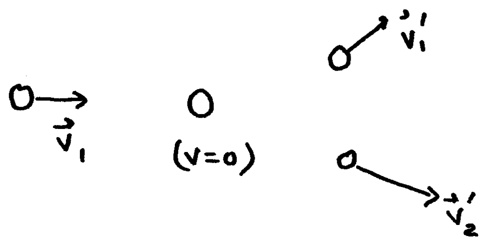
1.2 - A partícula incidente fica parada. Neste caso:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_2 \vec{v}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = \vec{v}_1 \quad (\text{se } m_1 = m_2)$$

1.3. - Definimos energia cinética de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ como $\frac{1}{2} m \, \vec{v} \cdot \vec{v}$.

Definimos colisão elástica como uma colisão na qual a energia cinética total é conservada.

Consideremos o exemplo anterior com a informação adicional de que a colisão é elástica



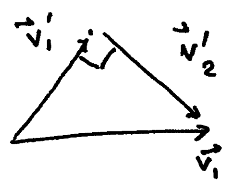
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$(m_1 = m_2) \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \qquad (1)$$

Mas a colisão é elástica:

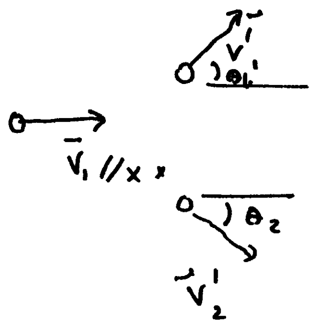
$$\frac{1}{2} m \, v_1^2 = \frac{1}{2} m \, v_1'^2 + \frac{1}{2} m \, v_2'^2$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \qquad (2)$$



(1), (2) + Teorema de Pitágoras $\Rightarrow \quad \vec{v}_1' \perp \vec{v}_2'$

Podemos confirmar isto de outra forma



$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v'_1 \cos\theta_1 + v'_2 \cos\theta_2 \\ 0 = v'_1 \sin\theta_1 - v'_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

- $\frac{0}{v_1} = \operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2$

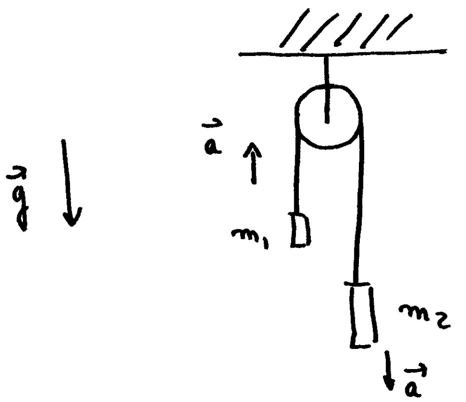
  $\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_2$

- $v'_1 = v'_2$

$$v_1^2 = 2 v_1'^2$$

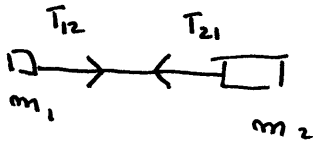
(Discutiremos mais tarde colisões em sistemas de várias partículas).

3.2 - Máquina de Atwood (a 2ª e 3ª leis em jogo)



Duas massas diferentes são suspensas numa roldana de massa desprezável por um fio inextensível e também com massa desprezável. Suponha $\vec{g}$ = const. Calcule $|\vec{a}|$.

A interacção entre m_1 e m_2 é aqui mediada pelo fio.



$$\vec{T}_{12} = -\vec{T}_{21} \qquad \text{(3ª lei)}$$

$$\downarrow$$

$$\left(|\vec{T}_{21}| = |\vec{T}_{12}| = T \right)$$

Entas:

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

Somando ordenadamente as duas equações temos:

$$(m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a \implies$$

$$\implies \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Substituindo este resultado numa das equações obtemos:

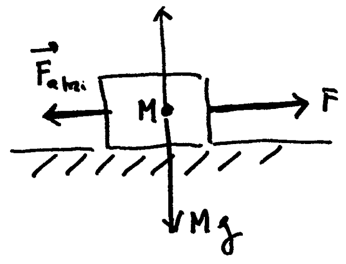
$$m_2 g - T = m_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$m_2 \left[1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right] g = T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

O fio tem de ser suficientemente forte para suportar uma massa efectiva de $\dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

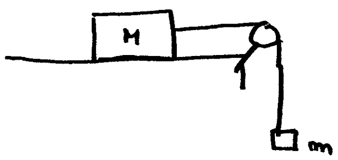
4 - Forças de atrito

4.1- Atrito de Coulomb (atrito de contacto)



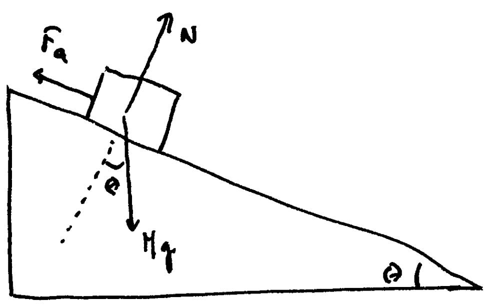
$\longrightarrow \hat{x}$

$\vec{F}_{atr.} = -\mu M g \, \hat{x}$; $\mu \equiv$ coeficiente de atrito (estático ou dinâmico, se o objecto estiver parado ou a mover-se).



$mg < \mu_s M g$ → Não há deslizamento de M ($\mu_s \equiv$ coeficiente atrito estático)

$mg > \mu_s M g$ → há deslizamento ; Como determinar μ_s?



$N = Mg \cos\theta$

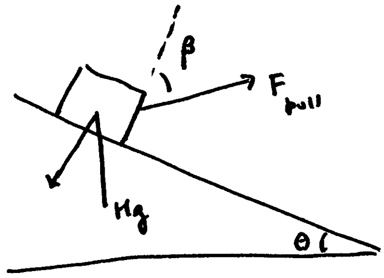
$Mg \sin\theta - F_{at} = 0$ (se o bloco permanecer estático.

$F_{at} = Mg \sin\theta$

$$\mu = \frac{F_{atrit}}{N} = \frac{Mg \sin\theta}{Mg \cos\theta} = tg\,\theta$$

$\mu \equiv tg\,\theta_c$ → $\theta_c \equiv$ ângulo para o qual o bloco desliza se $\theta_c \to \theta_c + \delta$ ($\delta \ll 1$).

<u>Problema</u> (Berkeley pg 87)



Qual a maneira mais eficaz de pôr um bloco a escorregar?

$F_{atrito} = \mu Mg \cos\theta \qquad (\mu > tg\,\theta)$

$$\vec{F}_{pull} = F_{pull}\left(\cos\beta\, \hat{n} + \sin\beta\, \hat{t}\right)$$

$$F_{atrito} = \mu N \rightarrow \mu\left(Mg\cos\theta - F_{pull}\cos\beta\right)$$

$$F_{//} = F_{pull}\sin\beta + Mg\sin\theta$$

O bloco começará a deslizar quando:

$$\mu\left[Mg\cos\theta - F_{pull}\cos\beta\right] = F_{pull}\sin\beta + Mg\sin\theta$$

$$F_{pull}\left[\sin\beta + \mu\cos\beta\right] = \mu Mg\cos\theta - Mg\sin\theta$$

$$= Mg\left[\mu\cos\theta - \sin\theta\right]$$

$$F_{pull} = \frac{Mg\left[\mu\cos\theta - \sin\theta\right)}{\left[\sin\beta + \mu\cos\beta\right]}$$

$(\mu \gg tg\,\theta)$

F_{pull} é extremo? $\qquad \beta = 0 \Rightarrow F_{pull}(0) = \dfrac{Mg\left[\mu\cos\theta - \sin\theta\right]}{\mu}$

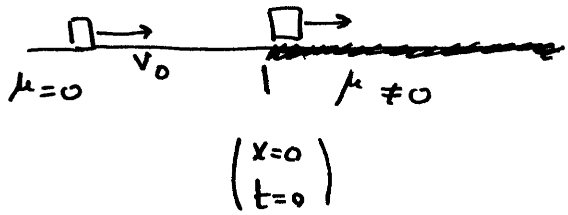
$$\beta = \pi/2 \rightarrow F_{pull}(\pi/2) = \frac{Mg\left[\mu\cos\theta - \sin\theta\right]}{1}$$

F_{pull} será mínima quando $f = \sin\beta + \mu\cos\beta$ for máximo.

$$\frac{df}{d\beta} = \cos\beta - \mu\sin\beta = 0 \Rightarrow 1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta = 0$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{\mu}}$$

Problema: Distância percorrida por um corpo sob acção de uma força de atrito constante:
(útil para multas por excesso de velocidade)



$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu M g \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g$$

$$V_x = -\mu g t + V_0$$

$$x = V_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

O corpo para a t^*: $\quad t^* = \dfrac{V_0}{\mu g}$

A distância percorrida é:

$$x(t^*) = V_0\frac{V_0}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\frac{V_0^2}{\mu^2 g^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\mu g}$$

ou

$$V_0 = \sqrt{2\mu g\, x(t^*)}$$

(Medindo a distância de travagem, sabido μ, podemos determinar V_0).

4.2- Atrito proporcional à velocidade(*) (fluidos c/ velocidades baixas):

Projéctil com atrito proporcional à velocidade.

$$\vec{f} = -b\vec{v}$$

Qual a equação da trajectória?

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\,\hat{y} - b\,\vec{v} \qquad (b>0)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\,\hat{y} - \frac{b}{m}\vec{v}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\vec{r}(0) = Y(0)\,\hat{y} \\ &\vec{v}(0) = v_0\left[\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}\right] \end{aligned}\right\} \text{ condições iniciais.}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = -\frac{b}{m}V_x \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = -\frac{b}{m}V_y - g = -\frac{b}{m}\left(V_y + g\frac{m}{b}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dV_x(t)}{V_x} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \ln V_x(t) = -\frac{b}{m}t + C' \Rightarrow \\ &\_\_\_ \end{aligned}\right.$$

$$V_x(t) = c\,e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$V_x(0) = c = V_0\cos\theta$$

$$V_x(t) = (V_0\cos\theta)\,e^{-b/m\,t}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v_y + g\frac{m}{b}\right)$$

$$\frac{dv_y}{v_y + g\frac{m}{b}} = -\frac{b}{m}dt \qquad ; \quad \left(v_y(0) = v_0 \sin\theta\right)$$

$$v_y(t) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

Temos então:

$$(*) \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \; e^{-\frac{b}{m}t} \\ v_y(t) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} \end{cases}$$

Integrando novamente:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,dt' = \int_0^t (v_0 \cos\theta)\, e^{-\frac{b}{m}t'}\,dt'$$

$$= -\frac{m}{b}(v_0 \cos\theta)\, e^{-\frac{b}{m}t'}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{m}{b} v_0 \cos\theta \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)$$

$$= v_0 \cos\theta \; \frac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{b/m}$$

$$y(t) = \left[-\frac{m}{b}\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t'} - \frac{mg}{b}t' + C\right]_0^t$$

$$= \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\frac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{b/m} - \frac{mg}{b}t + y_0$$

Temos o jeito de eliminar t das equações paramétricas da trajetória para obter $Y(x)$:

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta \, \dfrac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{b/m} \\[2ex] Y(t) = \left(V_0 \sin\theta + \dfrac{mg}{b}\right) \dfrac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{b/m} - \dfrac{mg}{b} t + Y_0 \end{cases}$$

Vejamos:

$$-\frac{\frac{b}{m} x}{V_0 \cos\theta} + 1 = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$-\frac{b}{m} t = \ln\left[1 - \frac{b}{m}\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right]$$

$$t = -\frac{1}{b/m} \ln\left[1 - \frac{b}{m}\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right]$$

$$-Y_0 + Y(x) = \left(V_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\frac{1}{b/m}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}\left(-\frac{1}{b/m}\ln\left(1 - \frac{b}{m}\frac{x}{V_0\cos\theta}\right)\right)}\right] -$$

$$- \frac{g}{b/m}\left[-\frac{1}{b/m}\ln\left[1 - \frac{b}{m}\frac{x}{V_0\cos\theta}\right]\right]$$

$$Y(x) - Y_0 = \left(V_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{b/m}} \, \cancel{b/m} \, \frac{x}{V_0 \cos\theta} + \frac{g}{(b/m)^2} \ln\left[1 + \frac{b}{m}\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right]$$

$$(**) \quad Y(x) = Y_0 + \left[\operatorname{tg}\theta + \frac{g}{b/m \, V_0 \cos\theta}\right] x + \frac{g}{(b/m)^2} \ln\left[1 - \frac{b}{m}\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right]$$

Conferindo os limites:

(*) $b \to 0$ $\qquad V_x(t) \to V_0 \cos\theta$

$$\lim_{b\to 0} V_y(t) = \underbrace{V_0 \sin\theta \; e^{-b/m\, t}}_{V_0 \sin\theta} + \underbrace{\frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)}_{g\,\underbrace{\frac{\left(e^{-b/m\, t} - 1\right)}{b/m}}}$$

$$\lim_{b\to 0} \frac{e^{-b/m\, t} - 1}{b/m} = \lim_{b\to 0} \frac{-\frac{t}{m}\, e^{-\frac{b}{m}t}}{1/m} = -t$$

$$\lim_{b\to 0} V_y(t) = V_0 \sin\theta - gt$$ (como seria de esperar)

De forma semelhante:

(**)

$$X(t) \xrightarrow[b\to 0]{} V_0 \cos\theta\, t$$

$$Y(t) \xrightarrow[b\to 0]{} V_0 \sin\theta\, t + \left[\frac{mg}{b}\left(\frac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{b/m}\right) - t\right]_{b\to 0} + Y_0$$

$$\left[g\, \frac{1 - e^{-\frac{b}{m}t}}{(b/m)^2} - \frac{t}{b/m}\right]_{b\to 0}$$

$$g\, \frac{1 - e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{b}{m}t}{(b/m)^2}$$

Regra de L'Hôpital :

$$\frac{+\frac{t}{\cancel{m}}\, e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{t}{\cancel{m}}}{2\,\frac{b}{m}\cdot\frac{1}{\cancel{m}}}$$

derivando novamente:

$$\downarrow$$

$$\frac{\frac{t^2}{m}\, e^{-\frac{b}{m}}}{2/m} = -\frac{t^2}{2}$$

Logo:

$$Y(t) \longrightarrow v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 + Y_0$$

$\square$