5- Conservação de energia

5.1- Um exemplo muito simples ($d=1$)

Uma partícula, inicialmente livre de forças, é actuada por uma força constante $\vec{F} = F\hat{y}$ a partir de $t=0$. Então:

$$F = M\ddot{y}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \ddot{y}\, dt = \int_0^t \frac{F}{M}\, dt \Rightarrow v = v_0 + \frac{F}{M}t$$

(admite-se que $\vec{v}_0 \parallel \hat{y}$ também)

A equação anterior pode escrever-se:

$$M(v - v_0) = Ft$$

Isto é: a variação da quantidade de movimento é igual a Ft, quantidade que designamos por <u>impulso</u> da força F (constante, neste caso).

$$\Delta(Mv) = I = \int_0^t F\, dt$$

(A variação da quantidade de movimento é igual ao impulso da força.

Podemos continuar a integrar:

$$Y(t) - Y_0 = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{M} t\right) dt = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{M} t^2$$

Repare que

$$t = \frac{M}{F}(v - v_0)$$

$$Y(t) - Y_0 = v_0 \frac{M}{F}(v - v_0) + \frac{1}{2}\frac{M}{F}(v - v_0)^2$$

$$= (v - v_0)\frac{M}{F}\left(v_0 + \frac{1}{2}(v - v_0)\right) =$$

$$= (v^2 - v_0^2)\frac{1}{2}\frac{M}{F} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) = F(Y - Y_0)$$

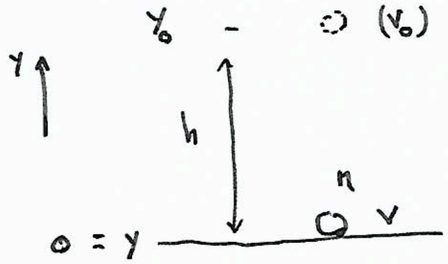
À semelhança com o que fizemos com a noção de impulso, podemos aqui definir as noções de Energia cinética e de trabalho da força F

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 \qquad\qquad F \Delta Y = \Delta W$$

↓ energia cinética ↳ trabalho

$$[E_c] = M L^2 T^{-2} = M L T^{-2} \cdot L = [\Delta W] \; ; \qquad \text{Newton . metro} \equiv \text{Joule}$$

Exemplo: Queda vertical de um grave (g = const.)



$$\Delta W = F_g \, (Y - Y_0) = (-Mg)(-h) =$$

$$= Mgh$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) = Mg(Y_0 - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Y})$$

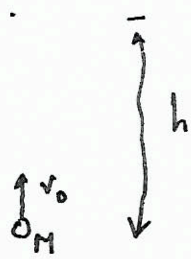
$$\frac{1}{2} M v^2 + MgY = \frac{1}{2} M v_0^2 + MgY_0 = \text{Const.} \qquad (*)$$

Definimos $MgY \equiv$ energia potencial $\equiv$ trabalho que é necessário realizar para repor M em Y_0.

Note que apenas variações de energia têm significado. Em resultado disso podemos sempre definir o zero da energia potencial à nossa vontade.

A equação (*) exprime então a conservação de uma quantidade a que chamamos energia mecânica: a soma da energia cinética e da energia potencial.

Exemplo: lançamento vertical de um grave:

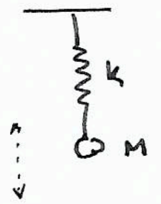


$h(v_0) = ?$

$$\frac{1}{2} \cancel{M} v_0^2 = \cancel{M} g h$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Exemplo:



$$E = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{const}$$

[Nota: $F = -kx \rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2)$ $\quad (x_0 = 0)$]

Então

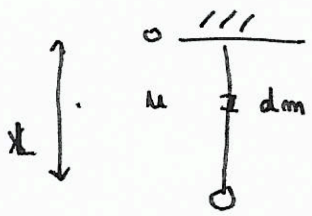
$$\dot{E} = M \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} \left[M \ddot{x} + k x \right] = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = 0 \ \text{(trivial)} \quad \text{ou} \quad M \ddot{x} = -kx \ \text{(2ª lei)}.$$

Exemplo (*): O que muda no problema anterior se considerarmos a massa da mola?

[Noção de massa efectiva]

Se a mola tem massa mas desprezável, então devemos aplicar considerações de energia também à mola. Vejamos:



$\frac{m}{L} = \text{const.}$ (m = massa da mola)

Seja u a velocidade do elemento dm da mola. Claro que se $x = 0$, $u = 0$ e se $x = L$, $u = \dot{x}$ (velocidade da massa).

Para uma mola uniforme:

$$u = \frac{x}{L} \dot{x}$$

(*) Útil para a cadeira laboratorial do próximo semestre

Vejamos então a energia cinética da mola:

$$dE_c = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}\right) dx'\, u^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m}{L}\left(\frac{x'}{L}\right)^2 \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{L^2}\left(\frac{m}{L}\right)\dot{x}^2\, x'^2$$

$$E_c = \int_0^L dE_c = \frac{1}{2}\,\frac{m}{L^3}\,\dot{x}^2 \int_0^L x'^2 dx' = \frac{1}{2}\,\frac{m}{L^3}\,\dot{x}^2\,\frac{L^3}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)\dot{x}^2$$

A energia potencial é: $-mg\frac{x}{2}$ (x = posição da massa = comp. instantâneo da mola)

Então, a energia total do sistema é:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - Mgx + \frac{1}{2}\,\frac{m}{3}\,\dot{x}^2 - m\frac{x}{2}g + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

Procedendo da mesma forma que antes:

$$\dot{E}_{TOT} = M\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x} + \frac{m}{3}\dot{x}\ddot{x} - \frac{mg}{2}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$= \dot{x}\left[M\ddot{x} - Mg + \frac{m}{3}\ddot{x} - \frac{mg}{2} + kx\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(M + \frac{m}{3}\right)\ddot{x} = Mg + \frac{mg}{2} - kx$$

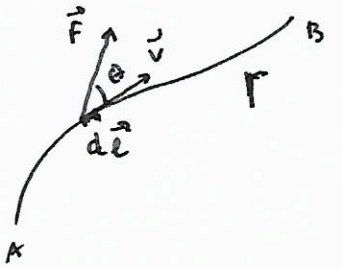
$$\frac{Mg + \frac{mg}{2}}{k} = x_0$$

$$\left(M + \frac{m}{3}\right)\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

$$\bar{x} = x - x_0 \Rightarrow \left(M + \frac{m}{3}\right)\ddot{\bar{x}} = -k\bar{x} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

□

5.2 - Uma formulação mais geral:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F\, d\ell \cos\theta$$

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ ≡ integral de linha da força ao longo da trajecto Γ entre $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$.

Note que $d\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \vec{v}\, dt$

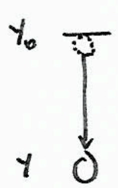
$$\vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$W_{AB} = \int_A^B M \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \int_A^B \frac{1}{2} M \frac{dv^2}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} M \left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

= variação da energia cinética:

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} M \left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

<u>Observação:</u> No caso simples da queda vertical de um grave $\vec{F} = -mg\,\hat{y}$; então $-mg\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) =$

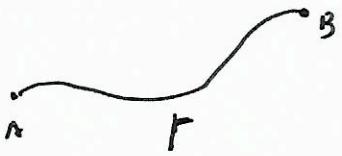


$$= -Mg\,(Y - Y_0)\,\hat{y} = \frac{1}{2} M \left(v^2 - v_0^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 + Mg\,Y = \frac{1}{2} M v_0^2 + Mg\,Y_0 = \text{const.}$$

5.3 - Forças conservativas

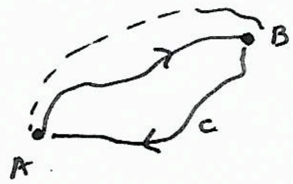
$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv$$ é definido ao longo de um caminho Γ
(é um integral de linha)



Pode acontecer que, para certas forças, (campos de força), o resultado de W só depende do ponto inicial e final e não do caminho escolhido. Nesse caso, a força $\vec{F}$ diz-se <u>conservativa</u>

Vejamos as consequências desta definição:

i) Se $\vec{F}$ é conservativa então $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$



O teorema de Stokes impõe que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma \equiv 0$$

Logo $\iint_\Sigma (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma = 0 \implies \nabla \wedge \vec{F} = 0$:

ii) Se uma força é conservativa então o seu rotacional é nulo.

iii) Se W_{AB} é independente do caminho, então o seu valor só depende dos pontos inicial e final.

Então é possível definir uma função $U(\vec{r})$:

$$\Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left[U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)\right]$$

[Podemos Tomar $U(\vec{r}_A) = 0$ (escolha do zero da energia potencial)]

Então:

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} M V_B^2 - \frac{1}{2} M V_A^2 = -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} M V_B^2 + U(\vec{r}_B) = \frac{1}{2} M V_A^2 + U(\vec{r}_A)$$

Essa função $U(\vec{r})$ corresponde a nossa energia potencial

iv) Seja $U(\vec{r}_0) = 0$; $\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r})$

diferenciando:

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

Isto é: a força $\vec{F}$ deriva de um gradiente de um campo escalar $U(\vec{r})$ (a energia potencial):

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

(em coordenadas Cartesianas)

Observaţii:

$$dU(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\nabla U$$

Exemplo simples $d=1$:

Uma partícula de massa m move-se a 1 dim sob acção de um potencial $V(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$ $(A, B > 0)$.

a) Obtenha a força que actua na partícula como função de x

b) Obtenha o ponto de equilíbrio

c) Obtenha a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio

---

a) $$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}$$

b) $$F=0 \Rightarrow \frac{2A}{x_0^3} = \frac{B}{x_0^2} \Rightarrow 2A = B\,x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2A}{B}$$

c) $$V(x-x_0) = V(x_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_0}}_{0 \text{ (equil.)}}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

(Série de Taylor)

$$V(x-x_0) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{ef} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{x_0} \quad e \quad \omega \sim \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +\frac{6A}{x^4} - \frac{2B}{x^3} \quad \Rightarrow \quad k_{ef} = \frac{6A}{(2A/B)^4} - \frac{2B}{(2A/B)^3} =$$

$$= \frac{B^4}{8A^3}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{B^4}{8A^3 m}}}$$

Exemplo: Mostre que uma força central:

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{r} = F(r)\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right]$$

é necessariamente conservativa

Solução: podemos provar que $\nabla \wedge \vec{F} = 0$; $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$

Se usarmos coordenadas polares esféricas temos

$$\nabla \wedge \vec{F}(r) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\frac{\partial F(r)}{\partial \varphi}}\right)\hat{\theta} - \frac{1}{r}\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\frac{\partial F(r)}{\partial \theta}}\,\hat{\varphi} = 0$$

Mas podemos trabalhar com coordenadas cartesianas directamente. Vejamos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,\frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{x}{r} \quad ; \text{ etc.}$$

$$(\nabla \wedge \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(r)\,\frac{y}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F(r)\,\frac{x}{r}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial F(r)}{\partial r} \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} - F(r)\, y \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} \right) - \left(\frac{x}{r} F' \frac{y}{r} - x \frac{F}{r^2} \frac{y}{r} \right)$$

$$= \left(\frac{xyF'}{r^2} - \frac{xyF}{r^3} \right) - \left(\frac{xy}{r^2} F' - \frac{xyF}{r^3} \right) = 0$$

(de forma semelhante para as outras componentes)

<u>Exemplo:</u> Considere o campo de forças

$$\vec{F} = \left(\frac{2}{3} xy - 2z \right) \hat{\imath} + \frac{x^2}{3} \hat{\jmath} - 2x\, \hat{z}$$

a) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo

b) Mostre (calculando explicitamente o integral de linha entre dois percursos) que o trabalho entre $(0,0,0)$ e $(1,1,0)$ é independente do caminho

c) Obtenha a energia potencial correspondente

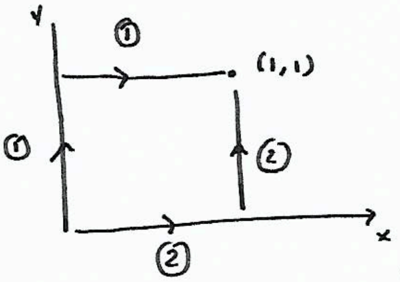
---

a)
$$(\nabla \wedge \vec{F})_x = \partial_y F_z - \partial_z F_y = 0 - 0 = 0$$

$$(\nabla \wedge \vec{F})_y = \partial_z F_x - \partial_x F_z = -2 + 2 = 0$$

$$(\nabla \wedge \vec{F})_z = \partial_x F_y - \partial_y F_x = \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} x = 0$$

b)



Percurso - 1

$$\int_{0,0}^{0,1} \vec{F} \cdot dy\,\hat{j} + \int_{0,1}^{1,1} F \cdot dx\,\hat{i} =$$

$$= \int_{0,0}^{0,1} \frac{x^3}{3}\,dy + \int_{0,1}^{1,1} \frac{2}{3} xy\,dx \qquad (z=0)$$

$$= \left.\frac{x^2 y}{3}\right|_{0,0}^{0,1} + \left.\frac{1}{3} x^2 y\right|_{0,1}^{1,1} = \frac{1}{3}$$

Percurso - 2:

$$\int_{0,0}^{1,0} F_x\,dx + \int_{1,0}^{1,1} F_y\,dy = \int_{0,0}^{1,0} \frac{2}{3} xy\,dx + \int_{1,0}^{1,1} \frac{x^2}{3}\,dy = 0 + \frac{1}{3} = 1/3$$

c) $\vec{F} = -\nabla U$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{3} xy - 2z = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = -\frac{x^2 y}{3} + 2zx + C_1(y,z)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow U = -\frac{x^2 y}{3} + C_2(x,z)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow -2x = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow U = 2xz + C_3(x,y)$$

$C_1(y,z) = C$

$$\boxed{U = -\frac{x^2 y}{3} + 2zx + C}$$

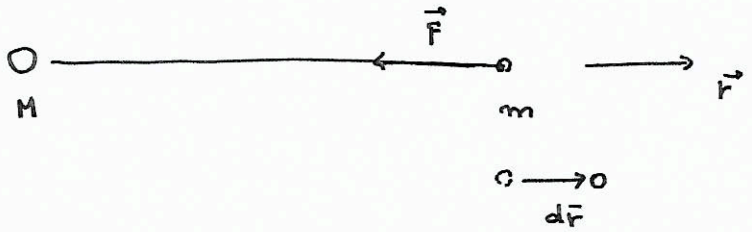
$C_2(x,z) = 2zx$

$C_3(x,y) = -\frac{x^2 y}{3}$

Conservação de energia num campo gravitacional: energia potencial.

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r}$$

É uma força central e logo, como vimos, uma força conservativa



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r}\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,dr$$

O trabalho realizado entre $\vec{r}_A$ e $\vec{r}$ é:

$$W = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \frac{GMm}{r'^2}\,dr'$$

$$= \left.\frac{GMm}{r'}\right|_{r_A}^{r} = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r_A}$$

Repare que se $r > r_A$, $W < 0 \Rightarrow \Delta U_p > 0$
(trabalho realizado pela força gravítica)

O trabalho é igual à variação da energia cinética e igual ao negativo da variação da energia potencial

Se escolhermos $U(r_A)=0 \rightarrow U = -\frac{GMm}{r}$

Repare que $U=0$ se $r \to \infty$; é ∴ conveniente escolher $r_R = 0$ $(U(\infty)=0)$ como referencia. Então a energia potencial é sempre negativa!

$$\vec{F} = -\nabla U = +\nabla\left(\frac{GMm}{r}\right) = -GMm\,\frac{\hat{r}}{r^2}$$

e a força gravítica sempre atractiva.

<u>Exemplo</u>: Velocidades de escape:

Qual a velocidade inicial necessaria para uma partícula de massa m possa escapar do campo gravítico da Terra?
(ignorando o efeito da rotação da Terra)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \text{const.} = 0$$

$\downarrow$ partícula em $r = \infty$ ↳ energia cinética nula.

$$\downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Como $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$; $v = \sqrt{2gR_T} \approx 10^4\ m.s^{-1}$

<u>Exemplo</u>: energia potencial perto da superfície da Terra:

$$r > R_T \quad , \qquad U(r) = -\frac{G m M_T}{r}$$

$$r = R_T + y \qquad (y \ll 1)$$

$$U(r) = -\frac{G m M_T}{R_T\left(1+\frac{y}{R_T}\right)} \sim -\frac{G m M_T}{R_T}\left(1-\frac{y}{R_T}+\dots\right)$$

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2} \Rightarrow U(r) = -m g R_T \left(1 - \frac{y}{R_T} + \frac{y^2}{R_T^2} + \dots\right)$$

$$= \underset{\text{Const}}{\underset{\equiv}{-m g R_T}} + \underline{\underline{m g y}} + \dots$$