Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MIEBIOM

Cálculo Vetorial

Folha 3 — fevereiro de 2020

Entenda que o domínio das funções definidas por uma expressão analítica é o conjunto onde a expressão analítica está "bem definida".

Exercício 1. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 y$, calcule, usando a definição:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$;

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,2)$;

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$;

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,2)$;

f) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$.

Exercício 3. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$;

b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - 3xy)$;

c) $f(x,y) = x^2 y^2 e^{2xy}$;

d) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x\sqrt{y})}$;

e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 y^3)$;

f) $f(x,y) = x + y^2 x + \ln(\operatorname{sen}(x^2 + y))$;

g) $f(x,y,z) = \ln(e^x + z^y)$;

h) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^3 + e^z}{x^3 y - e^z}$.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Exercício 5. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

b) $f(x,y) = \cos(xy^2)$;

c) $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3 x^4$;

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

Exercício 6. Mostre que:

a) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 + xy\right) \quad \Rightarrow \quad xf_x + yf_y = 2;$

b) $f(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z} \quad \Rightarrow \quad f_x + f_y + f_z = 1.$

Exercício 7. Mostre que a função $g(x,t) = 2 + e^{-t}\operatorname{sen} x$, satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Exercício 8. Verifique se alguma das seguintes funções é solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2.$

b) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2.$

c) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$

d) $f(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x.$