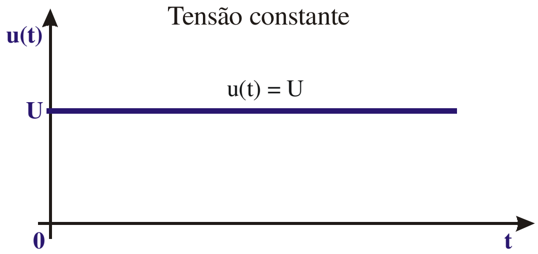
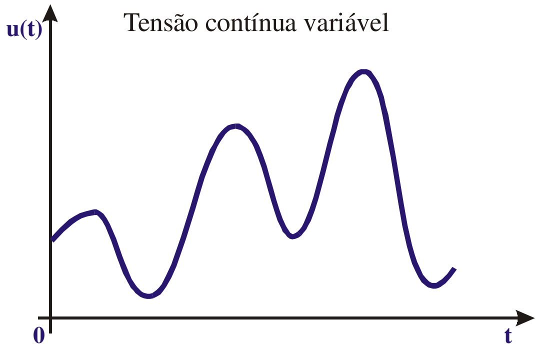
22. Evolução Temporal de Tensões e de Correntes

Neste capítulo serão consideradas tensões e correntes que evoluem ao longo do tempo (são funções do tempo).

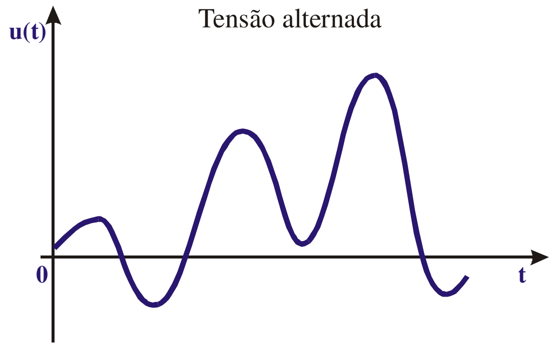
- **Tensões e Correntes Contínuas**
  - **Constantes** **u(t) = U** **i(t) = I**



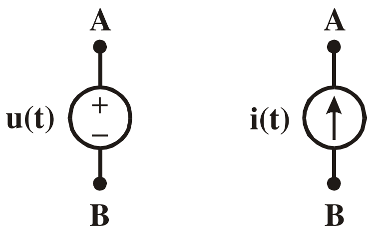
  - **Variáveis no tempo** **u(t)** **i(t)**



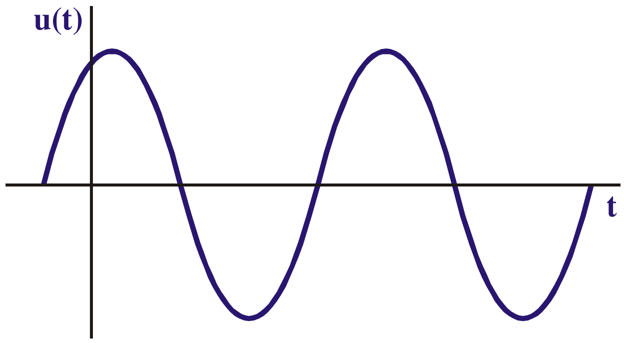
- **Tensões e Correntes Alternadas** **u(t)** **i(t)**



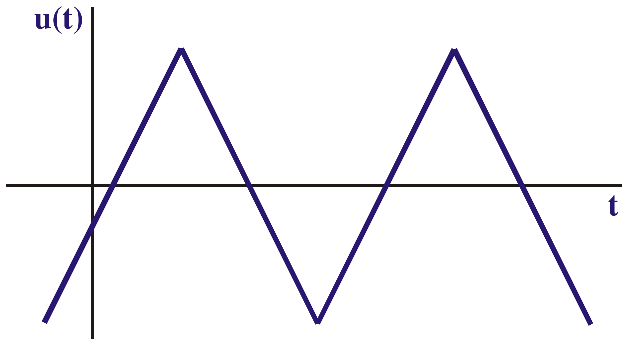
Fonte ideal de tensão que evolui ao longo do tempo e fonte ideal de corrente que evolui ao longo do tempo



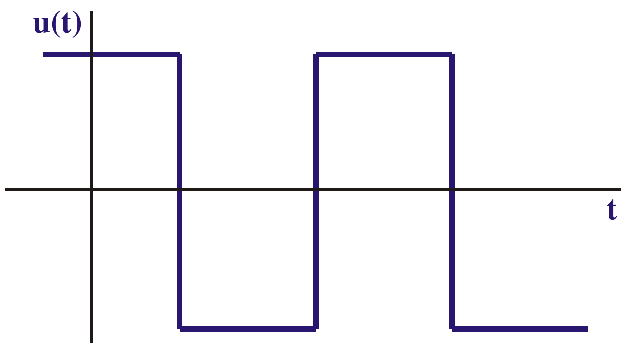
Tensão com forma de onda sinusoidal



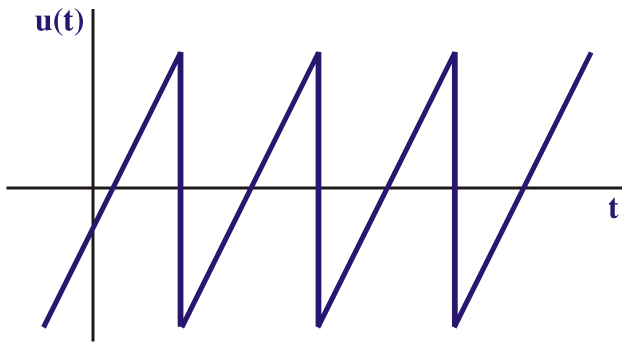
Tensão com forma de onda triangular



Tensão com forma de onda quadrada



Tensão com forma de onda em dente de serra



Para uma **tensão**

Valor máximo: $U_{Máx}$

Valor mínimo: $U_{mín}$

Valor médio: $U_{méd}$

O **valor máximo da tensão u(t)** é o maior valor assumido por u(t).

O **valor mínimo da tensão u(t)** é o menor valor assumido por u(t).

O **valor médio da tensão u(t)** no intervalo de tempo compreendido entre os instantes t_0 e t_1 mede-se em **volt (V)** e é dado por

$$U_{méd} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot dt$$

As tensões **não constantes** podem ser:

- **Não periódicas** (ou aperiódicas)
- **Periódicas**

Tensão periódica: tensão que se repete a cada **T** segundos.

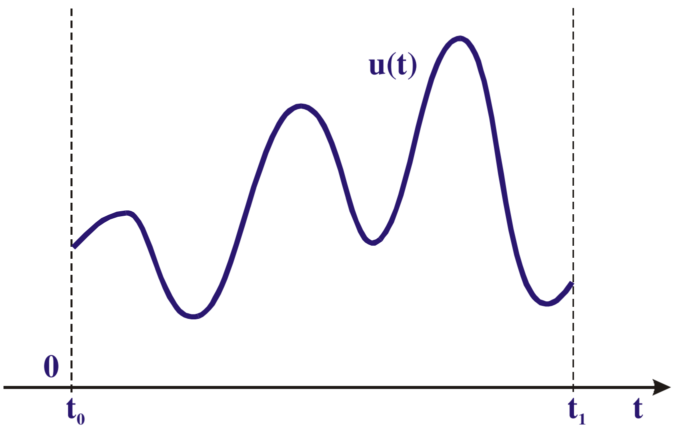
O **período (T)** é o menor intervalo de tempo que uma tensão periódica se deve deslocar para produzir uma tensão idêntica a si própria. Mede-se em **segundos (s)**.

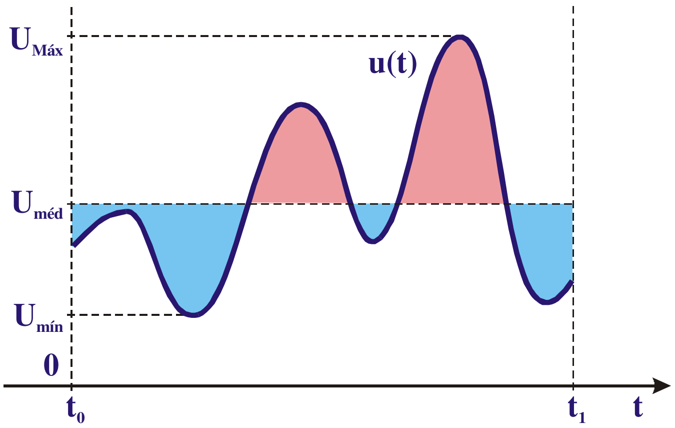
A **frequência (f)**, medida em **hertz (Hz)**, é o número de períodos que ocorrem num segundo.

$$\begin{array}{lll} \text{T segundos} & \rightarrow & \text{1 período} \\ \text{1 segundo} & \rightarrow & \text{f períodos} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T}$$

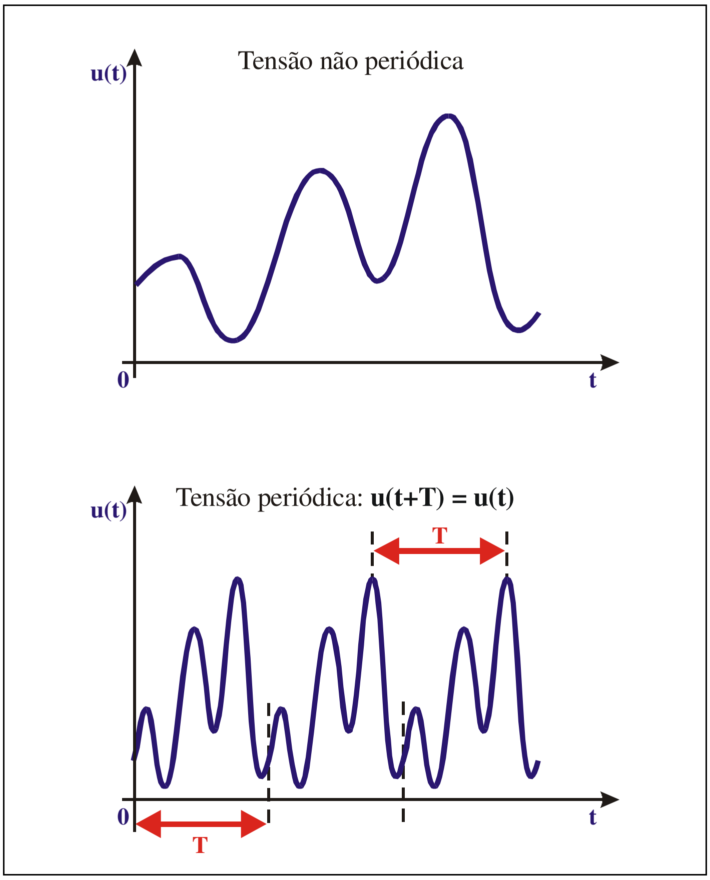
O **valor médio da tensão periódica u(t)** de período T mede-se em **volt (V)** e é dado por

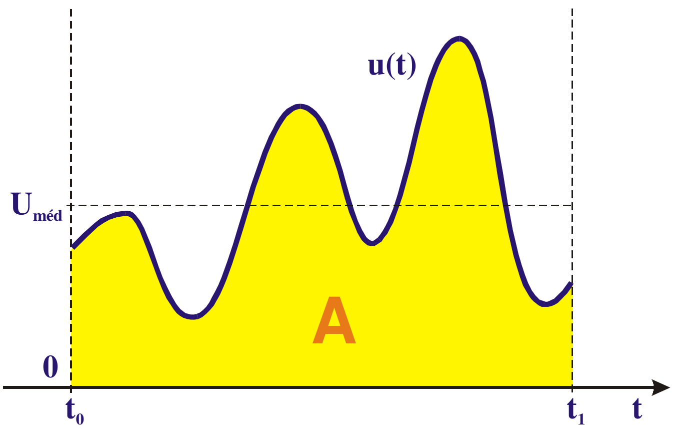
$$U_{méd} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot dt \qquad \forall t_0$$

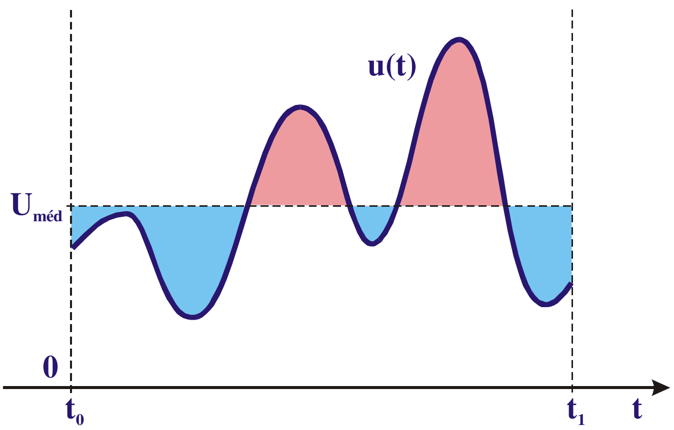


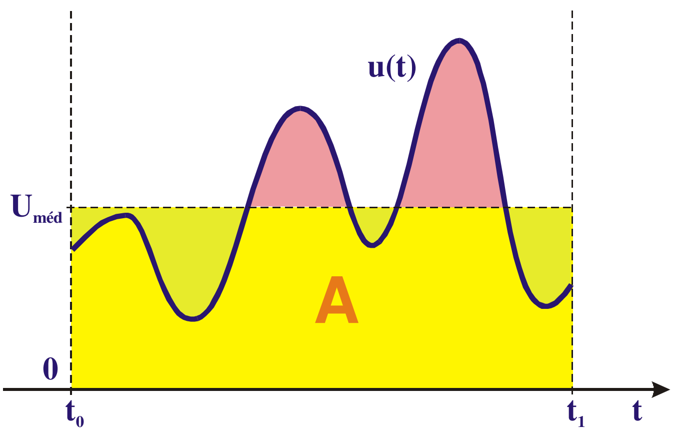


A **soma das áreas a azul** é igual à **soma das áreas a rosa**.

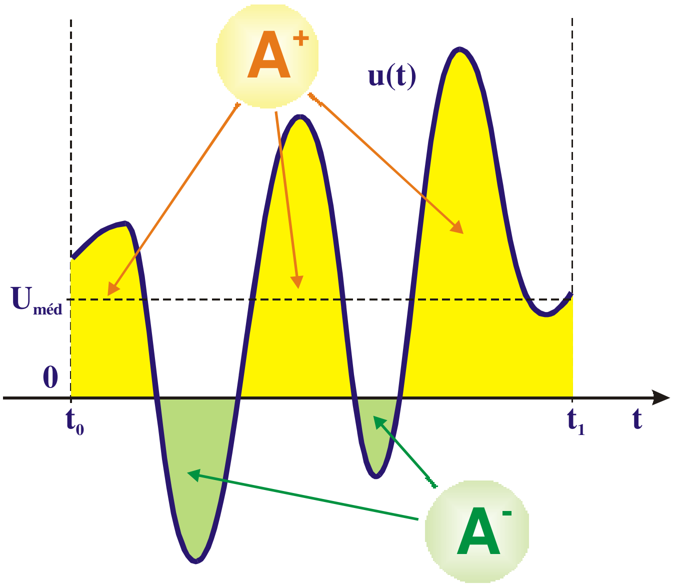


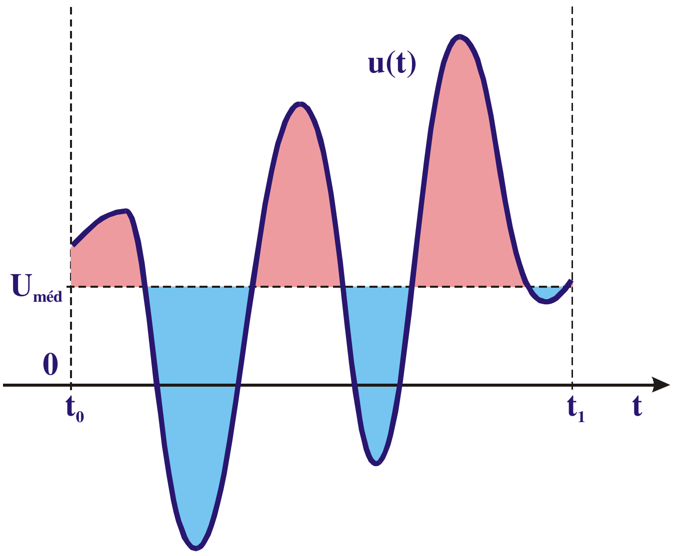


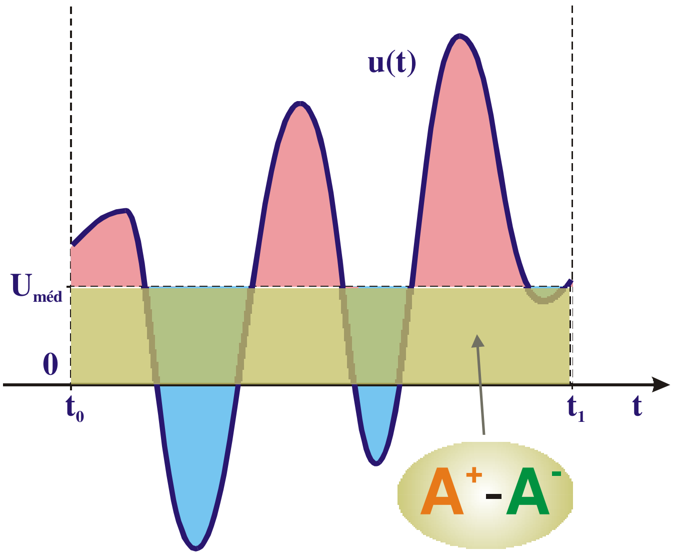




$$U_{méd} = \frac{A}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot dt$$

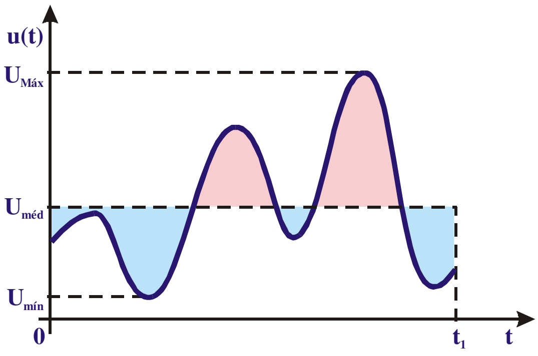




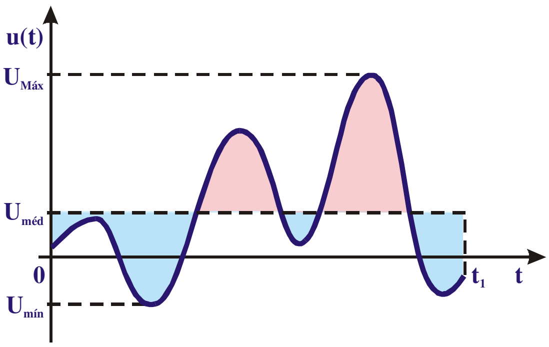


$$U_{méd} = \frac{A^+ - A^-}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t)\cdot dt$$

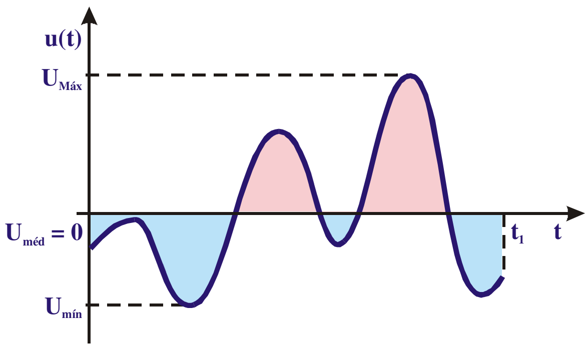
- Tensão não periódica contínua variável:



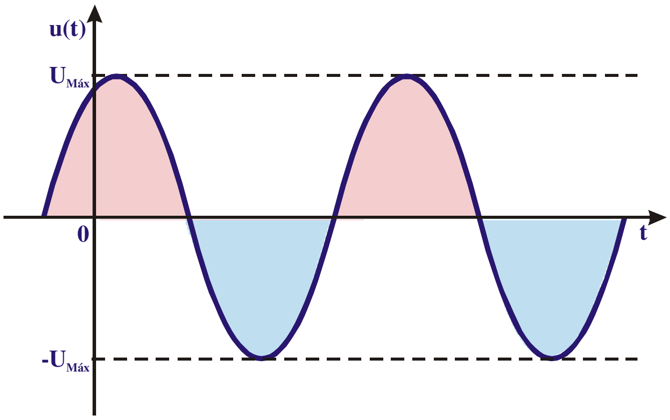
- Tensão não periódica alternada:



- Tensão não periódica puramente alternada:



- Tensão periódica puramente alternada sinusoidal:



22.1 Potência Instantânea e Potência Média em Jogo numa Resistência

A **potência instantânea p(t)** em jogo num componente de um circuito submetido à **tensão u(t)** e percorrido pela **corrente i(t)** é dada por

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

A **potência média P** em jogo num componente de um circuito, no intervalo de tempo compreendido entre os **instantes t_0 e t_1**, é dada por

$$P = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot dt$$

Quando a **potência instantânea** em jogo num componente de um circuito é **periódica** com **período T_P**, a **potência média P** em jogo nesse componente é dada por

$$P = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_0 + T_P} p(t) \cdot dt \qquad \forall t_0$$

A **potência instantânea $p_R(t)$** em jogo numa **resistência R** sujeita a uma **tensão u(t)** e percorrida por uma **corrente i(t)** é dada por qualquer uma das expressões

$$p_R(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$p_R(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

A **potência instantânea $p_R(t)$** em jogo numa **resistência R** sujeita a uma **tensão constante U** e percorrida por uma **corrente constante I** é dada por qualquer uma das expressões

$$p_R(t) = R \cdot I^2$$

$$p_R(t) = \frac{U^2}{R}$$

A **potência média P_R** em jogo numa **resistência R** sujeita a uma **tensão periódica u(t)** de período T e percorrida por uma **corrente periódica i(t)** de período T é dada por qualquer uma das expressões

$$P_R = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R \cdot i^2(t) \cdot dt = R \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) \cdot dt \qquad \forall t_0$$

$$P_R = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{u^2(t)}{R} \cdot dt = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \cdot dt \qquad \forall t_0$$

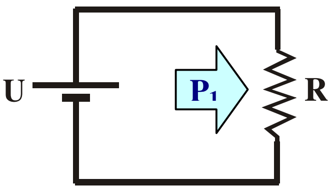
A **potência média P_R** em jogo numa **resistência R** sujeita a uma **tensão constante U** e percorrida por uma **corrente constante I** coincide com a **potência instantânea $p_R(t)$** em jogo nessa resistência, pode chamar-se simplesmente **potência** em jogo na resistência e é dada por qualquer uma das expressões

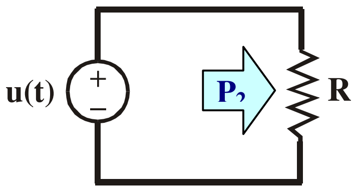
$$P_R = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} R \cdot I^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt = R \cdot I^2 = p_R(t) \qquad \forall t_0, t_1$$

$$P_R = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{U^2}{R} \cdot dt = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{U^2}{R} = p_R(t) \qquad \forall t_0, t_1$$

22.2 Valores Eficazes de Tensões e Correntes Periódicas

O **valor eficaz de uma tensão periódica** $u(t)$ de período T é igual ao valor da tensão constante que, aplicada a uma resistência, produz nessa resistência uma potência igual à potência média produzida na mesma resistência pela tensão periódica.





$$P_1 = \frac{U^2}{R}$$

$$P_2 = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt \qquad \forall t_0$$

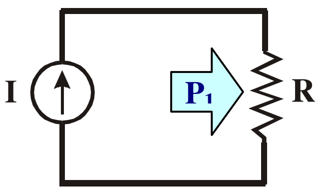
$$P_1 = P_2$$

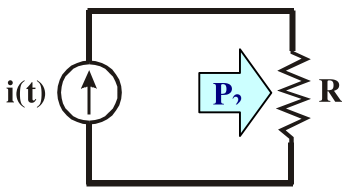
$$\Rightarrow \frac{U^2}{R} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt} \qquad \forall t_0}$$

O **valor eficaz de uma corrente periódica** $i(t)$ de período T é igual ao valor da corrente constante que, ao percorrer uma resistência, produz nessa resistência uma potência igual à potência média produzida na mesma resistência pela corrente periódica.





$$P_1 = R\cdot I^2$$

$$P_2 = R\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\cdot dt \qquad \forall t_0$$

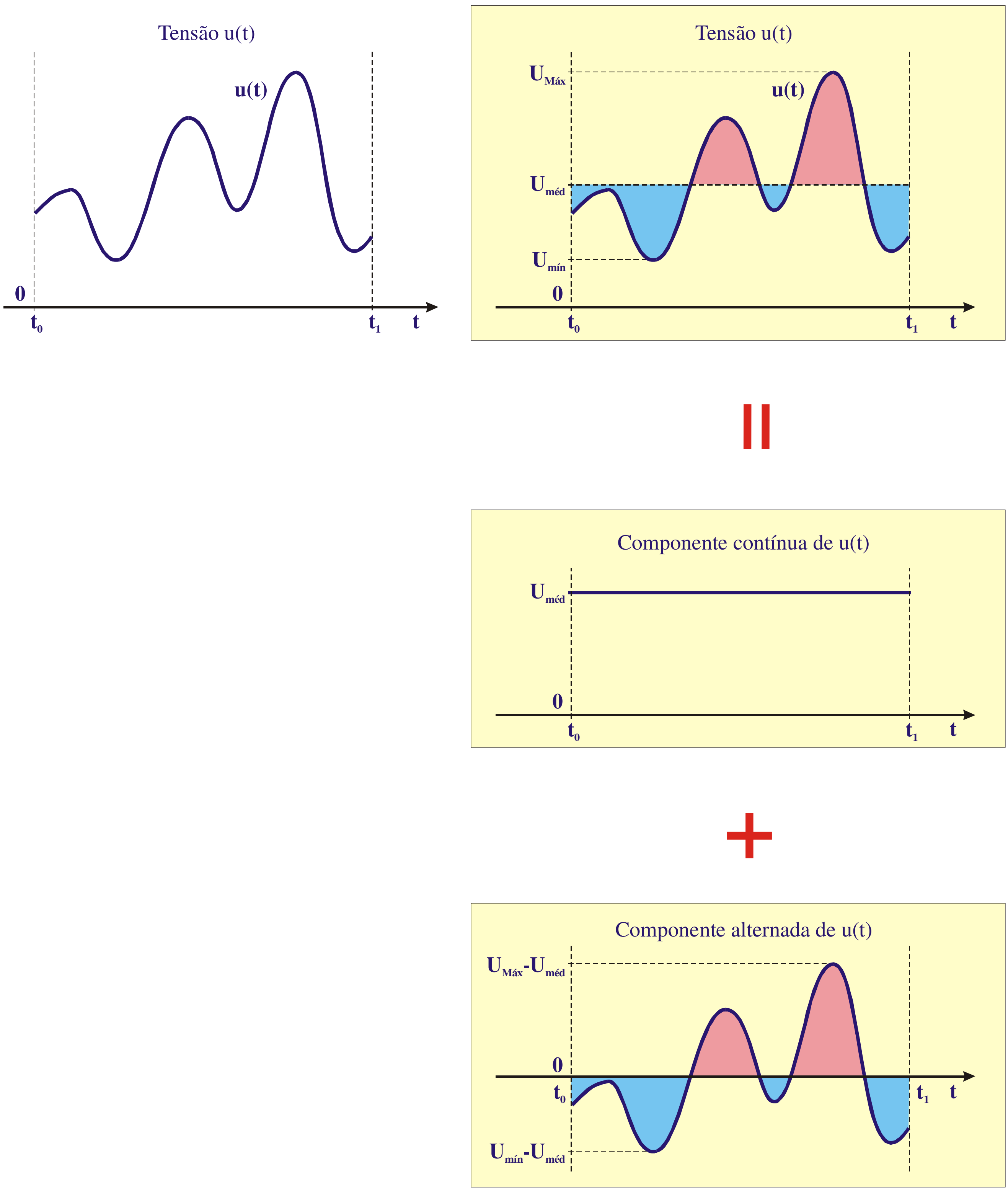
$$P_1 = P_2$$

$$\Rightarrow R\cdot I^2 = R\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\cdot dt$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\cdot dt$$

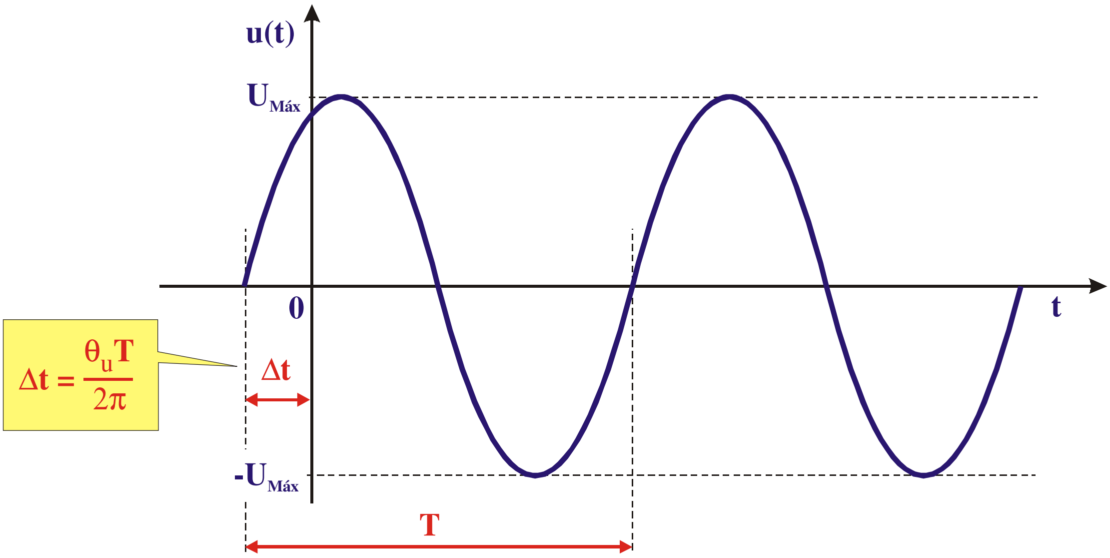
$$\Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\cdot dt} \qquad \forall t_0}$$

22.3 Componentes de uma Tensão Variável no Tempo



22.4 Tensão Periódica Puramente Alternada Sinusoidal

$$u(t) = U_{Máx} \cdot sen(\omega t + \theta_u)$$



$$\begin{matrix} 2\pi & \rightarrow & T \\ \theta_u & \rightarrow & \Delta t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\theta_u \cdot T}{2\pi}$$

$$t = -\frac{\theta_u \cdot T}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0$$

- **Amplitude**: $\mathbf{U_{Máx}}$ [V]
- **Período**: **T** [s]
- **Frequência**: **f** [Hz]
- **Fase**: $\boldsymbol{\theta_u}$ [rad]
- **Frequência angular**: $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$ [rad/s]
- **Valor médio**: **0V**

$$U_{méd} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot dt = 0V \qquad \forall t_0$$

- **Valor eficaz**: **U** [V]

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \cdot dt} = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

Exemplo: rede eléctrica.

$$\begin{cases} U = 230V \\ f = 50Hz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{Máx} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 230 \cong 325V \\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20ms \end{cases}$$

Exemplo: Determinar o valor eficaz da tensão u(t) tal que

$$u(t) = U_{Máx}\operatorname{sen}\omega t$$

Resolução:

O que se pretende é calcular: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}$

Recordar que...

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{sen}^2 ax \cdot dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2ax}{4a}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$\operatorname{sen}[a(x_0 + T)] = \operatorname{sen}(ax_0)$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (U_{Máx}\operatorname{sen}\omega t)^2 \cdot dt}$$

$$= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}^2 \omega t \cdot dt}$$

$$= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega t}{4\omega}\right]_{t_0}^{t_0+T}}$$

$$= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\left(\frac{t_0+T}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega(t_0+T)}{4\omega}\right) - \left(\frac{t_0}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega t_0}{4\omega}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{t_0}{2} + \frac{T}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega(t_0+T)}{4\omega} - \frac{t_0}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\omega t_0}{4\omega}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\cdot\left[\frac{T}{2}\right]}$$

$$= \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

Exemplo: Determinar o valor eficaz da tensão u(t) tal que

$$u(t) = U_{Máx}\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$$

Resolução:

O que se pretende é calcular: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}$

Recordar que...

$$\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\cdot\mathrm{sen}\beta$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sen}^2(\omega t+\theta)\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-\cos 2(\omega t+\theta)]\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2\omega t+2\theta)]\\
&= \frac{1}{2}\cdot[1-(\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta - \mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[U_{Máx}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)]^2\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{sen}^2(\omega t+\theta)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left(\frac{1}{2}\cdot[1-(\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta-\mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta)]\right)\cdot dt}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{2T}\cdot\left[\int_{t_0}^{t_0+T}1\cdot dt - \int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\omega t\cdot\cos 2\theta\cdot dt + \int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{sen}2\omega t\cdot\mathrm{sen}2\theta\cdot dt\right]}\\
&= \sqrt{\frac{U_{Máx}^2}{2T}\cdot\left[T-\cos 2\theta\cdot\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\omega t\cdot dt}_{=0}+\mathrm{sen}2\theta\cdot\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{sen}2\omega t\cdot dt}_{=0}\right]}\\
&= \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$