

# Introdução à Física Experimental

2020/21

(Lic. Física, M.I. Eng. Física)

## Exercícios sobre medidas e incertezas

1. Um indivíduo relatou para a medida da altura de uma porta o valor de 210 cm, afirmando que a altura estava seguramente entre 205 cm e 215 cm. Reescreva este resultado usando a notação recomendada  $x \pm \delta x$ . (Sol.:  $210 \pm 5$  cm)

2. Um estudante mediu a posição, a velocidade e a aceleração de um corpo que se desloca numa calha de ar e apresentou os resultados na tabela seguinte. Reescreva os resultados na notação recomendada  $x \pm \delta x$ .

Variável	Melhor estimativa	Intervalo mais provável
Posição, $x$	53.3 cm	53.1 a 53.5 cm
Velocidade, $v$	-13.5 cm/s	-14.0 a 13.0 cm/s
Aceleração, $a$	93 cm/s <sup>2</sup>	90 a 96 cm/s <sup>2</sup>

(Sol.:  $x = 53.3 \pm 0.2$  cm;  $v = -13.5 \pm 0.5$  cm/s;  $a = 93 \pm 3$  cm/s<sup>2</sup>)

3. Reescreva os resultados seguintes de forma mais clara e utilizando o número adequado de algarismos significativos (exprima a incerteza com um só algarismo significativo):

a) altura =  $5.03 \pm 0.04329$  m

b) carga elétrica =  $-3.21 \times 10^{-19} \pm 2.67 \times 10^{-20}$  C

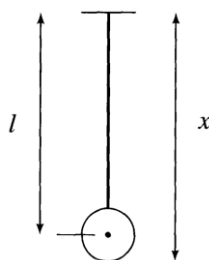
c) comprimento de onda =  $0.000\,000\,563 \pm 0.000\,000\,07$  m

d) momento linear =  $3.267 \times 10^3 \pm 42$  g cm/s

(Sol.: a)  $5.03 \pm 0.04$ ; b)  $(-3.2 \pm 0.3) \times 10^{-19}$  C; c)  $(5.6 \pm 0.7) \times 10^{-7}$  m; d)  $(3.27 \pm 0.04) \times 10^3$  g cm/s)

4. Dois estudantes mediram o comprimento da mesma vareta tendo reportado os valores de  $135 \pm 3$  mm e  $137 \pm 3$  mm. Qual é a discrepância (ou desvio) entre os dois valores? É significativa? (Sol.: 2 mm; não)

5. Numa experiência com o pêndulo simples usa-se uma esfera de aço suspensa por um fio muito leve (ver esquema na figura abaixo).



O comprimento efetivo do pêndulo,  $l$ , é a distância entre a parte superior do fio e o centro da esfera. Para medir  $l$  um estudante começa por medir a distância,  $x$ , desde a parte superior do fio

até à parte inferior da esfera, depois mede o raio,  $r$ , da esfera e, finalmente, faz a subtração  $l = x - r$ . As medidas de  $x$  e  $r$  são:

$$x = 95.8 \pm 0.1 \text{ cm}, \quad r = 2.30 \pm 0.02 \text{ cm}$$

Qual deve ser o valor da medida de  $l$  apresentado pelo estudante? (Sol.:  $93.5 \pm 0.1 \text{ cm}$ )

6. Numa experiência para verificar a conservação do momento angular num sistema em rotação, obtiveram-se os resultados para o momento angular inicial ( $L$ ) e final ( $L'$ ) em várias situações e que são mostrados na tabela abaixo.

$L \text{ (kg m}^2\text{/s)}$	$L' \text{ (kg m}^2\text{/s)}$
$3.0 \pm 0.3$	$2.7 \pm 0.6$
$7.4 \pm 0.5$	$8 \pm 1$
$14 \pm 1$	$16 \pm 1$
$25 \pm 2$	$24 \pm 2$
$32 \pm 2$	$31 \pm 2$
$37 \pm 2$	$40 \pm 2$

Adicione uma nova coluna à tabela para apresentar a diferença  $L-L'$  e a correspondente incerteza. Estes resultados são consistentes com a conservação do momento angular?

(Sol.: coluna de  $L-L'$ :  $0.3 \pm 0.7$ ,  $-0.6 \pm 1.1$ ,  $-2.0 \pm 1.4$ ,  $1 \pm 3$ ,  $1 \pm 3$ ,  $-3 \pm 3$ ;  $L-L'$  é sempre menor que a incerteza, exceto no caso  $-2.0 \pm 1.4$  em que é ligeiramente maior; assim, podemos afirmar que globalmente os valores observados para  $L-L'$  são consistentes com o valor esperado de zero)

7. Numa experiência pretende-se verificar se o período ( $T$ ) do pêndulo simples é independente da amplitude angular (ângulo máximo da oscilação,  $\theta_{\max}$ , medido em relação à vertical). Os resultados obtidos são apresentados na tabela seguinte:

$\theta_{\max} \text{ (grau)}$	$T \text{ (s)}$
$5 \pm 2$	$1.932 \pm 0.005$
$17 \pm 2$	$1.94 \pm 0.01$
$25 \pm 2$	$1.96 \pm 0.01$
$40 \pm 4$	$2.01 \pm 0.01$
$53 \pm 4$	$2.04 \pm 0.01$
$67 \pm 6$	$2.12 \pm 0.02$

a) Trace o gráfico de  $T$  em função de  $\theta_{\max}$  para verificar se o período do pêndulo depende da amplitude (inclua para cada ponto as barras associadas às incertezas). Para demonstrar a importância da escolha das escalas do gráfico, trace dois gráficos, um que inclua a origem dos eixos ( $T = \theta_{\max} = 0$ ) e outro onde o eixo das abcissas ( $T$ ) varie entre 1.9 e 2.2 s; verifique que apenas com o segundo gráfico é possível pôr em evidência que o período depende da amplitude angular do pêndulo.

b) Discuta se as conclusões retiradas da análise anterior seriam afetadas se as medidas de  $T$  tivessem uma incerteza associada de  $\pm 0.3 \text{ s}$ . (Sol.: neste caso não haveria evidência para a variação de  $T$  com a amplitude.)

8. Dispõe-se de uma fita métrica com erro de leitura de 0.5 mm e de um paquímetro com erro de leitura de 0.05 mm. Pretende-se medir um comprimento,  $l$ , da ordem de 2 cm com uma precisão de pelo menos 1%. É indiferente usar qualquer um dos instrumentos? (Sol.: para a fita métrica  $\delta l/l = 2.5\%$ ; para o paquímetro  $\delta l/l = 0.25\%$ ; apenas o paquímetro tem precisão suficiente.)

9. Para determinar a aceleração média de um corpo um estudante mediu as velocidades inicial ( $v_i$ ) e final ( $v_f$ ) desse corpo e calculou a diferença  $v_f - v_i$ . Os resultados de dois ensaios são apresentados na tabela seguinte. Todas as medidas foram realizadas com um erro relativo de 1%.

ensaio	$v_i$ (cm/s)	$v_f$ (cm/s)
1	14.0	18.0
2	19.0	19.6

a) Calcule o valor absoluto das incertezas das quatro medidas. Determine  $v_f - v_i$  e a respectiva incerteza para cada ensaio. (Sol.:  $14.0 \pm 0.1$  cm/s,  $18.0 \pm 0.2$  cm/s,  $19.0 \pm 0.2$  cm/s,  $19.6 \pm 0.2$  cm/s;  $v_f - v_i = 4.0 \pm 0.2$  cm/s (ensaio 1);  $v_f - v_i = 0.6 \pm 0.3$  cm/s (ensaio 2).)

b) Calcule a incerteza relativa de  $v_f - v_i$  para cada ensaio. Note que as respostas, especialmente para o caso do segundo ensaio, ilustram os resultados desastrosos que se obtêm quando se tenta determinar um valor pequeno como a diferença de dois valores elevados próximos. (Sol.: 5% e 50% para os ensaios 1 e 2, respetivamente.)

10. a) Como resultado de um cálculo obtém-se na calculadora  $x = 6.1234$ , mas sabe-se que  $x$  tem uma incerteza relativa de 2%. Reescreva  $x$  na forma  $x \pm \delta x$  com o número de algarismos significativos adequado (escrevendo a incerteza com apenas um algarismo significativo). Qual é o número de algarismos significativos da resposta? (Sol.:  $6.1 \pm 0.1$ , tem 2 algarismos significativos.)

b) Repita para  $y = 1.1234$  e  $z = 9.1234$ , ambos com erro relativo de 2%. (Sol.:  $y = 1.12 \pm 0.02$ , três algarismos significativos;  $z = 9.1 \pm 0.2$  dois algarismos significativos.)

11. Um estudante mede duas grandezas  $a$  e  $b$ , obtendo os resultados  $a = 10 \pm 1$  N e  $b = 272 \pm 1$  s. Determine o produto  $q = ab$  apresentando o resultado afetado da incerteza absoluta. Diga também qual é o erro relativo de  $q$ . (Sol.:  $(2.70 \pm 0.27) \times 10^3$  Ns ou  $(2.7 \pm 0.3) \times 10^3$  Ns; incerteza relativa de 10%)

12. Considerando que as incertezas são independentes e aleatórias (os erros somam-se em quadratura), calcule o resultado das seguintes adições e as correspondentes incertezas. Admitindo que apenas é necessário escrever as incertezas com um só algarismo significativo, identifique os casos em que se pode ignorar uma das incertezas originais.

a)  $(5.6 \pm 0.7) + (3.70 \pm 0.03)$

b)  $(5.6 \pm 0.7) + (2.3 \pm 0.1)$

c)  $(5.6 \pm 0.7) + (4.1 \pm 0.2)$

d)  $(5.6 \pm 0.7) + (1.9 \pm 0.3)$

(Sol.: a)  $9.3 \pm 0.7$ ; b)  $7.9 \pm 0.7$ ; c)  $9.7 \pm 0.7$ ; d)  $7.5 \pm 0.8$ . Nos casos a), b) e c) a incerteza associada à segunda parcela pode ser ignorada.)

13. Para determinar a velocidade ( $v$ ) de um carro que se desloca numa calha de ar horizontal mediu-se a distância ( $d$ ) percorrida no intervalo de tempo  $t$ :

$$d = 5.10 \pm 0.01 \text{ m}, \quad t = 6.02 \pm 0.02 \text{ s}$$

a) Determine  $v = d/t$  e a correspondente incerteza. (Sol.:  $0.847 \pm 0.003$  m/s)

b) Sabendo que a medida da massa do carro vale  $m = 0.711 \pm 0.002$  kg, determine o momento linear (ou quantidade de movimento)  $p = mv = md/t$ . (Sol.:  $0.602 \pm 0.003$  kg m/s)

**14.** Numa experiência para determinar a razão  $r = e/m$  do elétron, onde  $e$  é a carga e  $m$  a massa do elétron, os elétrons são acelerados aplicando uma diferença de potencial  $V$  e são depois submetidos à ação de um campo magnético (produzido por duas bobinas de diâmetro  $D$ , com  $N$  voltas, percorridas por corrente elétrica de intensidade  $I$ ), descrevendo uma trajetória circular de diâmetro  $d$ . Pode-se mostrar que

$$r = \frac{125}{32\mu_0^2 N^2} \frac{D^2 V}{d^2 I^2}$$

onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  (valor exato) é a permeabilidade magnética do vácuo. Obtiveram-se os seguintes resultados:

$$N = 72 \text{ (valor exato)}$$

$$D = 661 \pm 2 \text{ mm}$$

$$V = 45.0 \pm 0.2 \text{ V}$$

$$d = 91.4 \pm 0.5 \text{ mm}$$

$$I = 2.48 \pm 0.04 \text{ A}$$

- a) Determine  $r$  e a respetiva incerteza (admita que as incertezas são independentes e aleatórias).  
Notas:  $N$  é um valor exato e, por isso, pode ser tratado como uma constante; todas as grandezas devem ser expressas em unidades SI, para que  $r$  seja expresso em C/kg. (Sol.:  $1.83 \pm 0.06 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ )
- b) Verifique se o resultado obtido é consistente com o valor tabelado  $r = 1.759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ .

**15.** Numa experiência é necessário medir o comprimento de onda da luz emitida por uma lâmpada de hidrogénio para determinar a constante de Planck ( $h$ ) usando a expressão  $h = K\lambda^{1/3}$ , onde  $K$  é uma constante conhecida com exatidão. Suponha que se mediu  $\lambda$  com um erro relativo de 0.3%.

- a) Qual é o erro relativo na determinação de  $h$ ? (Sol.:  $\delta h/h = 0.1\%$ )
- b) Suponha que o resultado da medida é  $h = 6.644 \times 10^{-34} \text{ Js}$ . Este resultado está em conformidade com o valor tabelado  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ? (Sol.: a discrepância é de  $0.018 \times 10^{-34} \text{ Js}$ , que é mais do que o dobro da incerteza; assim, o resultado não tem um acordo satisfatório com o valor tabelado.)

**16.** A medida de um ângulo deu o valor  $\theta = 125^\circ \pm 2^\circ$ . Calcule  $\sin(\theta)$  e a correspondente incerteza. Nota: não se esqueça de converter grau em radiano. (Sol.:  $\sin(\theta) = 0.82 \pm 0.02$ )

**17.** Mede-se a quantidade  $a$  com uma incerteza  $\delta a$ . Depois calcula-se  $f(a) = e^a$ .

- a) Qual é a expressão da incerteza de  $f$ ? (Sol.:  $\delta f = f \times \delta a$ )
- b) Sabendo que  $a = 3.0 \pm 0.1$ , determine  $f(a)$  e a sua incerteza. (Sol.:  $f = 20 \pm 2$ )

**18.** Repita o exercício anterior para a função  $f(a) = \ln a$ . (Sol.:  $\delta f = \delta a/a$ ;  $f = 1.10 \pm 0.03$ )

**19.** Mediu-se o tempo de queda de um corpo largado de uma janela do 2º piso, em três ensaios, tendo-se obtido os resultados (em décimas de segundo): 11, 13 e 12.

- a) Calcule a média, o desvio padrão da amostra  $\left( \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$  e o desvio padrão da população  $\left( \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$ . (Nota: se ainda não sabe usar as funções pré-definidas da sua

máquina de calcular para fazer estes cálculos, vale a pena gastar alguns minutos para aprender a fazê-lo; verifique se a sua máquina permite calcular ambos os desvios padrão e, no caso de fornecer apenas um deles, qual permite calcular; lembre-se que a definição de desvio padrão mais apropriada, especialmente no caso de uma amostra pequena, é o desvio padrão da amostra.) (Sol.: 12 (valor médio); 1 (desvio padrão da amostra); 0.8 (desvio padrão da população).)

b) Repita os cálculos anteriores criando uma folha de cálculo Excel® para o efeito. Na tabela abaixo apresentam-se os dados e instruções a introduzir nas células (versão inglesa do Excel®). Note que a primeira linha serve apenas para identificar as colunas.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$i$	$x_i$	$\langle x \rangle$	$x_i - \langle x \rangle$	$(x_i - \langle x \rangle)^2$	$\sigma$ (amostra)	$\sigma$ (pop.)
2	1	11	=SUM(B2:B4)/A4	=B2-\$C\$2	=D2^2	=SQRT((SUM(E2:E4)/(A4-1)))	=SQRT((SUM(E2:E4)/(A4)))
3	2	13		=B3-\$C\$2	=D3^2		
4	3	12		=B4-\$C\$2	=D4^2		

Pode ainda recorrer às funções =STDEV(VALUES) e =STDEVP(VALUES) para calcular de forma mais rápida o desvio padrão da amostra e o desvio padrão da população, respetivamente. No exemplo apresentado na tabela anterior deve-se utilizar =STDEV(B2:B4) e =STDEVP(B2:B4).

**20.** Um estudante mediu o período ( $T$ ) de um pêndulo três vezes, tendo obtido os resultados, expressos em segundo (s): 1.6, 1.8 e 1.7.

a) Calcule o valor médio e o desvio padrão (da amostra). (Sol.:  $\bar{T} = 1.7$  s;  $\sigma_T = 0.1$  s)

b) Se o estudante decidir fazer uma quarta medida, qual é a probabilidade de que essa medida esteja fora do intervalo 1.6 - 1.8 s? (Sol.: 32%)

**21. a)** Calcule a média e o desvio padrão das seguintes 30 medidas do tempo ( $t$ , em segundo):

8.16	8.14	8.12	8.16	8.18	8.10	8.18	8.18	8.18	8.24
8.16	8.14	8.17	8.18	8.21	8.12	8.12	8.17	8.06	8.10
8.12	8.10	8.14	8.09	8.16	8.16	8.21	8.14	8.16	8.13

Sugere-se a utilização das funções pré-definidas da máquina de calcular ou uma folha de cálculo.

(Sol.:  $\bar{t} = 8.149$  s;  $\sigma_t = 0.039$  s)

b) Espera-se que 68% dos valores estejam no intervalo  $\bar{t} \pm \sigma_t$ . Das 30 medidas quantas espera que se situem fora do intervalo  $\bar{t} \pm \sigma_t$ ? Em quantas medidas isso acontece? (Sol.: 32% de 30 são 9.6 e observa-se que 8 medidas se situam fora do referido intervalo.)

**22.** Um estudante mediu a densidade de um líquido cinco vezes, tendo obtido os seguintes resultados (em g/cm<sup>3</sup>): 1.80, 1.95, 1.95, 2.00 e 1.75.

a) Qual é o resultado final da medida? (Sol.:  $1.89 \pm 0.05$  g/cm<sup>3</sup>, sendo a incerteza expressa como o desvio padrão da média.)

b) Sabendo que o valor tabelado para a densidade do líquido é de 1.85 g/cm<sup>3</sup>, diga qual é a discrepância entre a medida do estudante e o valor de referência. É significativa? (Sol.: 0.04 g/cm<sup>3</sup>; não)

**23.** Na tabela seguinte apresentam-se medidas dos comprimentos dos lados  $p$  e  $q$  de um retângulo.

$p$ (mm)	24.25	24.26	24.22	24.28	24.24	24.25	24.22	24.26	24.23	24.24
$q$ (mm)	50.36	50.35	50.41	50.37	50.36	50.32	50.39	50.38	50.36	50.38

a) Determine a área do retângulo  $A = pq$ , começando por calcular os valores médios  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  e, depois,  $\bar{A} = \bar{p}\bar{q}$ . Determine a incerteza associada à área utilizando a propagação de erros. (Sol.:  $A = 1221.2 \pm 0.4 \text{ mm}^2$ )

b) Faça agora a análise admitindo que as medidas foram realizadas aos pares, isto é, em cada ensaio realizou-se uma medida de  $p$  e uma medida de  $q$ . Determine o valor da área multiplicando cada par (o primeiro  $p$  vezes o primeiro  $q$ , e assim por diante), sendo o resultado final obtido através do valor médio dos 10 valores de área. Estime a incerteza calculando o desvio padrão da média das 10 áreas. Compare com o resultado da alínea anterior. (Sol.:  $A = 1221.2 \pm 0.3 \text{ mm}^2$ ; a área dá o mesmo resultado pelos dois métodos, como seria de esperar; a incerteza é semelhante, mas ligeiramente diferente; note-se que se o número de medidas for muito grande os dois métodos darão exatamente o mesmo resultado para a incerteza.)