Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2008/2009

Análise Matemática II
Teste 2

15 Junho/2009
Duração: 2h

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos efectuados apresentados.

1. [2,5 valores] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = 2x^2y$$
e seja D o trapézio no plano xy com vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.
   (a) Escreva o integral
   $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
   considerando a integração
      i. primeiro em ordem a y e depois em ordem a x;
      ii. com ordem contrária à anterior.
   (b) Calcule o valor do integral apresentado na alínea anterior.

2. [2,5 valores] Seja D a região do plano delimitada pelas rectas $3x - 2y = 1$, $y = 0$ e $x = 0$. Calcule o integral
$$\iint_D \cos\left(\frac{3x-2y}{3x+2y}\right)\,dxdy$$
efectuando a mudança de variáveis $u = 3x - 2y$ e $v = 3x + 2y$. Comece por representar a região D no plano xy e no plano uv.

3. [2,5 valores] Calcule a área da superfície de equação $z = 2x + 3y + 1$, parametrizada por
$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, 2u + 3v + 1) \end{array}$$
onde D é o rectângulo $[0,1] \times [0,2]$.

4. [2 valores] Calcule
$$\iiint_W x\,\mathrm{e}^z + 2y\,dx\,dy\,dz$$
onde W é o paralelipípedo $[0,1] \times [0,2] \times [-1,1]$.

5. [2,5 valores] Calcule o integral de linha
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$
onde $\overrightarrow{F}$ é o campo de vectores no espaço definido por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, -x, 1)$ e C é a curva parametrizada por
$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & [0, \sqrt[3]{2\pi}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left(\cos t^3, \operatorname{sen} t^3, \dfrac{t^3}{2\pi}\right) \end{array}.$$

6. [2,5 valores] Use o teorema de Green para calcular o integral

$$\int_C \left(3x^4 + 5y\right)\, dx + \left(3xy^5 + 3y^2 - 1\right)\, dy$$

onde C é a fronteira do rectângulo $[1,3] \times [1,2]$.

7. [2,5 valores] Para o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$ definido por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$, calcule o integral

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dA}$$

onde a superfície S, gráfico da função $z = x + y + 1$ sobre o rectângulo $[0,1] \times [0,1]$, é parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, u+v+1) \end{array} .$$

8. [3 valores] Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar e $\overrightarrow{F}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial. Mostre que

$$\mathrm{Rot}(f\overrightarrow{F}) = f\,\mathrm{Rot}(\overrightarrow{F}) + (\mathrm{grad}\, f) \times \overrightarrow{F}.$$

Os alunos que pretendem fazer a parte de valorização devem responder às seguintes perguntas

1. [3 valores] Considere o elipsóide de equação

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\phi) & \longmapsto & (\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\phi) \end{array}$$

onde $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

(a) Escreva um integral triplo em coordenadas esféricas que represente o volume do elipsóide apresentado.

(b) Escreva um integral duplo sobre o domínio D que represente a área do elipsóide.

2. [2 valores]Mostre que o caminho definido por $c(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, \pi]$ é uma linha de fluxo para o campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Existem outras linhas de fluxo para este campo vectorial?

3. [2,5 valores] Verifique o teorema de Green no exercício 6.

4. [2,5 valores] Resolva o exercício 8.