

Cálculo para Ciências

Folha 1

outubro de 2021

Exercício 1. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações são verdadeira ou falsa:

- a) $x^2 < y^2$;
- b) $x^3 < y^3$;
- c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ($x, y \neq 0$);
- d) $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Exercício 2. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| = 3\}$;
- b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x + 1)^2} = 3\}$;
- c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x + 2|\}$;
- d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$;
- e) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x + 1} = 2x\}$;
- f) $\{x \in \mathbb{R} : |x| |x + 3| = 4\}$.

Exercício 3. Em cada uma das alíneas seguintes encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x - a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado:

- a) $] - 2, 2[$;
- b) $] - 4, 0[$;
- c) $]0, 4[$;
- d) $] - 3, 7[$.

Exercício 4. Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$;
- b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$;
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$;
- d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$;
- e) $\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$;
- f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$;
- g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \leq 1\}$;
- h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$;
- i) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$;
- j) $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| \leq 1\}$;
- k) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$;
- l) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x - 2|\}$;
- m) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$;
- n) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| + |x - 2| < 10\}$;
- o) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$;
- p) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$;
- q) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$;
- r) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$;
- s) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2|x|\}$;
- t) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| > |x - 3|\}$.

Exercício 5. Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

- a) $1,25$;
- b) $2,374$;
- c) $5,(3)$;
- d) $54,134(728)$.

Exercício 6. Escreva sob a forma de dízima as seguintes frações:

- a) $\frac{3}{7}$;
- b) $\frac{29}{4}$;
- c) $\frac{7}{101}$;
- d) $\frac{274301}{3300}$.

Exercício 7. Encontre um número racional e um número irracional no intervalo:

a) $\left] \frac{1}{1000}, \frac{2}{1000} \right[;$

b) $\left] \frac{1}{101}, \frac{1}{100} \right[.$

Exercício 8. Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $[-\sqrt{5}, 3] \cap \mathbb{Q};$

e) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25/16\};$

b) $[0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

f) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0 \wedge |x^2 - 1| < x + 5\};$

c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 11\};$

g) $\{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 < 1\};$

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < 3\};$

h) $\{2 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}.$

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + |x|$. Considere os conjuntos

$$A = f([-4, 1[) \quad \text{e} \quad B = f(]-\infty, -2]) .$$

- a) Especifique os conjuntos A e B e determine os correspondentes conjuntos de majorantes e de minorantes.
- b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos considerados.

Exercício 10. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 7 \implies |x| > 7;$

b) $\forall x \in \mathbb{R} : |1 + 4x| < 1 \implies x \geq -\frac{1}{2};$

c) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \implies x \geq 1;$

d) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leq 2 \implies 3 < x < 7.$

Exercício 11. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y};$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y};$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n;$$

$$(xy)^n = x^n y^n.$$