Universidade do Minho

Álgebra Linear e Geometria Analítica EC

Exercícios 3 - Determinantes

1. Calcule o determinante da matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

   a) Usando a expansão de Laplace ao longo da linha 1.

   b) Usando a expansão de Laplace ao longo da coluna 2.

   c) Usando a expansão de Laplace ao longo da linha 3.

2. Calcule o seguinte determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Usando as propriedades dos determinantes, indique o valor do determinante das seguintes matrizes:

   a) A b) B c) C d) D e) $-A$

   f) $2A$ g) $A^T A$ h) A^2 i) $ABCD$ j) $A^{-1}DA$

4. Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e sabendo que $detA = 2$, calcule:

   a) $det(3A)$ b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2g & 2h & 2i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-d & b-e & c-f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

5. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c.$$

6. Mostre que $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$.

7. Determine os valores de x para os quais a matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ é invertível.

8. Use o método da matriz adjunta para calcular a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$