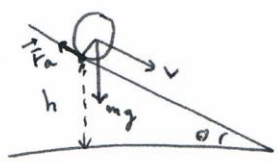
- Podemos analisar estes exemplos de outra forma, usando o balanço de energia. Vejamos o caso do cilindro:



$$E = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgh$$

energia cinética de transl. — E_c Rotação — E. Potencial.

Esta energia é conservada. Logo

$$\frac{dE}{dt} = 0 = M v_{cm} \frac{dv_{cm}}{dt} + I \omega \frac{d\omega}{dt} + Mg \frac{dh}{dt}$$

$\omega = \frac{v}{R}$

$$= M v_{cm} \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{I}{R^2} v_{cm} \frac{dv_{cm}}{dt} + Mg\left(-v_{cm} \sin\theta\right)$$

$\frac{dh}{dt} = -v_{cm} \sin\theta$

$$\Rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2}\right) \cancel{v_{cm}}\, a_{cm} = Mg\, \cancel{v_{cm}} \sin\theta.$$

$$a = \frac{Mg \sin\theta}{M + \frac{I}{R^2}}.$$ (como antes).

- Ou ainda, de outra maneira

$$M a_{cm} = \sum_i F_i$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_i M_i$$

$$M a_{cm} = M \frac{dv_{cm}}{dt} = Mg \sin\theta - F_a$$

Momento a respeito do c.m : $F_a \cdot R = M \Rightarrow F_a \cdot R = I \frac{d\omega}{dt}$

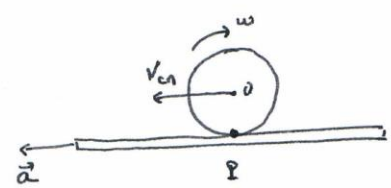
Como $\omega R = V_{cm} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV_{cm}}{dt}$

Temos: $F_a R = \frac{I}{R}\frac{dV_{cm}}{dt} \rightarrow F_a = \frac{I}{R^2}\frac{dV_{cm}}{dt}$

e logo:
$$M\frac{dV_{cm}}{dt} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\frac{dV_{cm}}{dt}$$

$$\frac{dV_{cm}}{dt} = a_{cm} = \frac{Mg\sin\theta}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}$$ (como antes)

Exemplo: Um cilindro num plano rugoso acelerado



Qual a aceleração do C.M e qual a força de atrito?

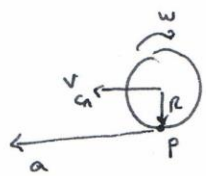
A única força que actua no cilindro é a força de atrito. Esta força actua em P (o ponto de contacto entre o cilindro e o plano). Imaginemos que usamos esse ponto para calcular os momentos. Neste caso, o momento de $\vec{f_a}$ é nulo; contudo este ponto move-se com aceleração não nula. Logo $M_P = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$?.

Consideremos o ponto O (o CM do cilindro):

$$M\frac{dV_{cm}}{dt} = f_a$$

$$f_a \cdot R = I_c\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}$$

A aceleração do ponto P é a ; logo



$$\frac{dV_{cm}}{dt} + R\frac{d\omega}{dt} = a \qquad (*)$$

(acel. cm + aceleração result. do rot. em torno do cm)

Mas, $$M\frac{dV_{cm}}{dt} = f_a = \frac{I_{cm}}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}M\frac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}\frac{d\omega}{dt}$$

Logo

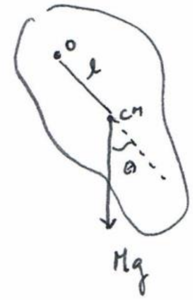
$$\frac{dV_{cm}}{dt} + R\frac{d\omega}{dt} = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}R + R\right)\frac{d\omega}{dt} = a = \frac{3}{2}R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{2a}{3R}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = a - \frac{2}{3}a = \frac{a}{3}$$

$$f_a = M\frac{dV_{cm}}{dt} = M\frac{a}{3}$$

Exemplo: O pêndulo físico:



$$I_O = I_{cm} + M\ell^2 \qquad \text{(T. Steiner)}$$

$$L = I_O\,\omega = \left(I_{cm} + M\ell^2\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$M_O = -Mg\sin\theta \cdot \ell$$

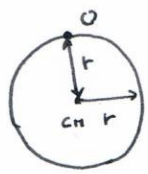
$$(I_{CM} + Ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg\sin\theta \cdot l$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I_{CM} + Ml^2}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l\left(1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}\right)}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \sim \theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}\right)}}$$

Exemplo:



Um anel circular (de raio r) suspenso num ponto, oscila sob acção da gravidade. Qual a frequência para pequenas oscilações?

$$I_O = I_{CM} + Mr^2$$

$$\downarrow$$

$$Mr^2$$

$$I_O = 2Mr^2$$

$$I_O \frac{d\omega}{dt} = -Mgr\sin\theta$$

$$\sin\theta \sim \theta$$

$$2\cancel{M}r^{\cancel{2}}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \cancel{M}g\cancel{r}\,\theta = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2r}}}$$

(igual a frequência de um pêndulo simples com comprimento 2r)