

Universidade do Minho
Departamento de Física

Relatório da Experiência T3

Elasticidade de sólidos. Módulo de Young.

Laboratório de Mecânica Newtoniana

Relatório realizado por Luís Silva (a96534), Mariana Fernandes (a97171) e José Silva(a92205) a 21 de dezembro de 2021, com a realização da experiência no dia 07 de dezembro de 2021, no Laboratório da sala 2.63 do Edifício 6, departamento de Física, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, Portugal.

Licenciatura em Engenharia Física

Docente: Armando Ferreira

Sumário

Estuda-se a elasticidade de sólidos diferentes, a partir da determinação do módulo de Young. Desta forma, para determinar o módulo de Young, para cada barra de diferente material, é necessário medir a deformação desta, provocada pela força de tração aplicada, outros fatores essenciais são as dimensões da barra. Utiliza-se o critério de Chauvenet de modo a rejeitar alguns pontos experimentais (fase de diminuição de tensão). O resultado final é obtido a partir da média pesada resultante da fase crescente e decrescente de tensão:

$$E_{Cobre} = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$E_{Aço} = (2,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$E_{Latão} = (6,9 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E_{Alumínio} = (6,4 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E_{Vidro} = (4,8 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Introdução/Teoria

Um sólido quando sujeito a uma força pode sofrer uma deformação, dependendo da força aplicada e do material em questão, como consequência a sua forma e as suas dimensões podem variar. Há dois tipos de deformação, que se sucedem quando um material é submetido a uma força de tração: a elástica e a plástica.

A deformação elástica não é permanente, uma vez que quando a força deixa de ser aplicada, o material volta à sua forma original, já a deformação plástica é permanente, pois quando a força deixa de ser aplicada o material não volta à sua forma inicial.

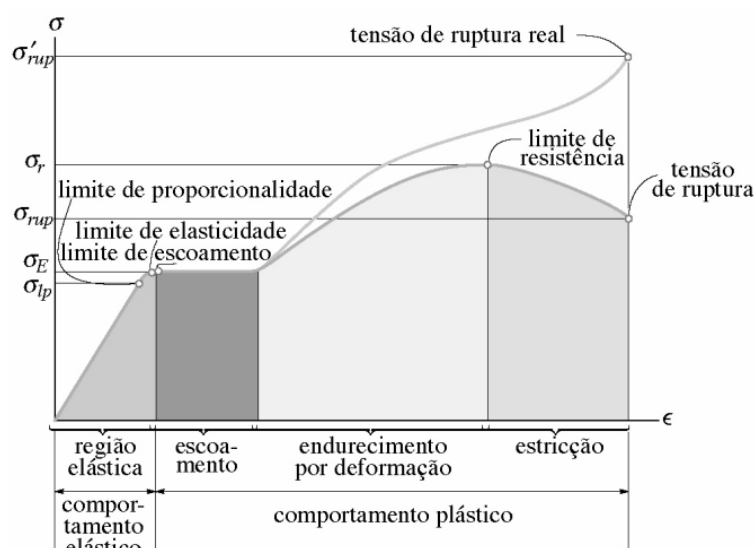


Figura 1 (Gráfico da tensão aplicada em função da deformação)

Na figura 1, até ao limite de proporcionalidade, na região elástica a tensão aplicada, σ , é proporcional à deformação, ϵ , onde o fator de proporcionalidade é designado por módulo de Young, E , desta forma $\sigma = E\epsilon$. Terminada a região elástica,

tem início a fase plástica, que é constituída pelo escoamento (deformação permanente no material sem que haja variação da tensão), o endurecimento por deformação (o material endurece e exige uma tensão cada vez maior para se deformar) e estrição (criação de fissuras no material, de modo a não ser necessária uma força de tração tão grande para haver deformação). Por fim, continuando a aplicar gradualmente uma força de tração crescente, chega-se à rutura do material.

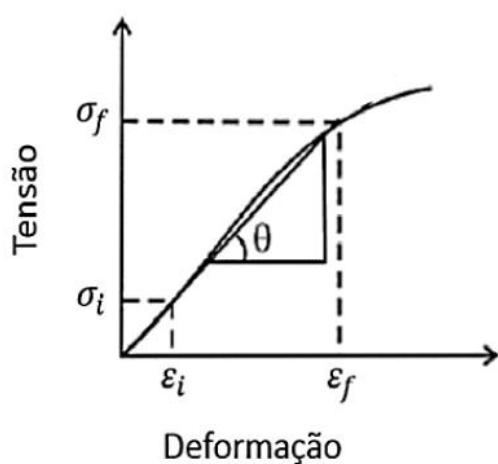


Figura 2 (Gráfico da tensão aplicada em função da deformação, onde o declive é o módulo de Young ($E = \tan(\theta) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$))

O fator de proporcionalidade, E , é dado pela inclinação da curva *tensão vs deformação* na região elástica, quando se submete o material a tensões inferiores ao limite de proporcionalidade. O conceito básico por trás do módulo de Young foi descrito pelo cientista e engenheiro suíço Leonhard Euler, em 1727. Em 1782, o cientista italiano Giordano Riccati realizou experiências que levaram a cálculos modernos do módulo, no entanto, o módulo tem o

nome do cientista britânico Thomas Young, que descreveu o seu cálculo em *Curso de Palestras sobre Filosofia Natural e Artes Mecânicas*, em 1807.

O módulo de Young é uma propriedade que mede a rigidez de um material sólido, verificando-se que quanto maior for, menor será a deformação elástica resultante da aplicação de uma tensão.

Na primeira região, o material funciona como uma mola, seguindo a lei de Hooke, que demonstra que a tensão e a deformação são diretamente proporcionais $\sigma = E\epsilon$, em que σ corresponde à tensão, E , ao módulo de Young e ϵ , à deformação sofrida. A lei de Hooke, $F = -Kx$, relaciona a variação do comprimento da mola com a força que é necessário aplicar para provocar essa variação.

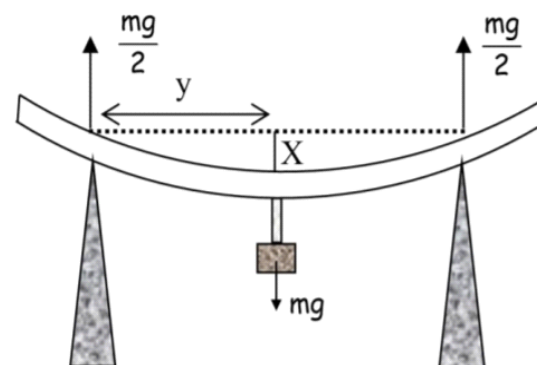


Figura 3 (Ilustração da deformação (X) sofrida pela barra sujeita a uma força (mg).)

Para determinar o módulo de Young, nesta experiência, usa-se a flexão de uma barra (figura 3).

A teoria da elasticidade de matérias mostra que uma barra de secção retangular sujeita a uma força de tração F como se indica na figura 3, sofre uma flexão X , a uma distância y do apoio dada por:

$$X = \frac{F(3L^2y - 4y^3)}{4Eh^3b}$$

Em que F é a força a que a barra está submetida, X a flexão sofrida pela barra, L é a distância entre os pontos de apoio inferiores, b a sua largura e h a sua espessura. Isto aplica-se numa situação idêntica à da figura 3.

Se medirmos a flexão da barra, podemos obter o valor do módulo de Young, através de:

$$E = \frac{F(3L^2y - 4y^3)}{4Xh^3b}$$

Como, $y = \frac{L}{2}$, podemos reescrever o módulo de Young através de:

$$E = \frac{FL^3}{4Xh^3b}$$

Procedimento Experimental

No início da experiência começamos por medir com cuidado a espessura, h , e a largura, b , das barras de diferentes materiais a serem usados, posteriormente, medimos a distância no suporte de um ponto de apoio a outro, onde a barra ficaria colocada, de comprimento L . De seguida, encontramos um ponto de referência (neste caso 0 mm) no aparelho de medida (micrómetro) e colocamos a primeira barra no suporte sujeita a diferentes valores de tensão, sendo a tensão aplicada igual a mg , onde m é a massa g é a força gravítica (considerando a aceleração gravítica $g = 9,8 \text{ m/s}$). A tensão é crescente à medida que adicionávamos massas. Enquanto isso, os valores de flexão eram registados. Ao chegar a um determinado valor de flexão, as massas começaram a ser retiradas na mesma proporção que foram adicionadas e os seus respetivos valores de flexão anotados. Estes passos foram repetidos para todas as barras e o principal cuidado tido, nesta experiência, foi ter em atenção a força feita nas barras para as mesmas não sofrerem deformação plástica, ou seja, deformarem-se definitivamente ou até mesmo sofrerem rutura.

1º Tratamento de dados

Cobre

	Valor	±	Incerteza
L (m)	0,104	±	0,0005
b (m)	0,027	±	0,0005
h (m)	0,0008	±	0,00005

Tabela 1 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

São registados os seguintes valores:

X (m)	F (N)
0,000215	0,9783
0,0004	1,9564
0,00061	2,9315
0,00079	3,9112
0,00098	4,8894
0,00083	3,9112
0,00064	2,9315
0,00046	1,9564
0,00024	0,9783

Tabela 2 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre)

Para a análise dos dados será dividida a 2ª tabela em duas partes (Crescente da tensão e decrescente da tensão):

X (m)	F (N)
0,000215	0,9783
0,0004	1,9564
0,00061	2,9315
0,00079	3,9112
0,00098	4,8894

Tabela 3 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00098	4,8894
0,00083	3,9112
0,00064	2,9315
0,00046	1,9564
0,00024	0,9783

Tabela 4 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre (decrescente))

Como o módulo de Young é definido por,

$$E = \frac{L^3 F}{4Xbh^3}$$

então:

$$F = \frac{4bh^3 E}{L^3} X$$

Fazendo um ajuste linear da força de tração em função da deformação, podemos obter o valor do módulo de Young:

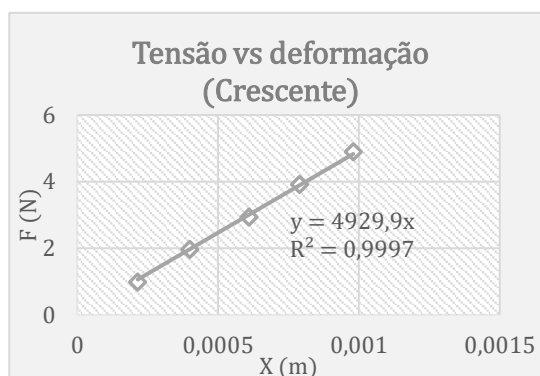


Gráfico 1 (Tensão vs deformação, na barra de cobre (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$4,93 \cdot 10^3$	$0,04 \cdot 10^3$	0

Tabela 5 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de cobre (Crescente de massas))

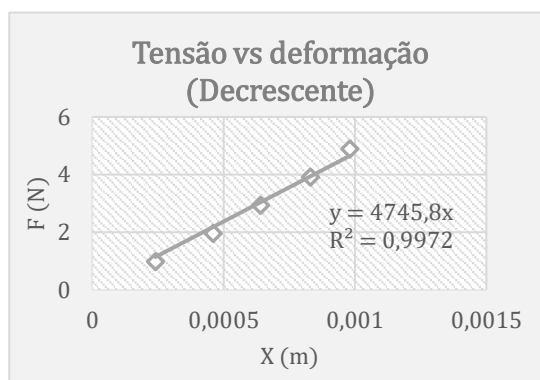


Gráfico 2 (Tensão vs deformação, na barra de cobre (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$4,7 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	0

Tabela 6 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de cobre (Decrescente de massas))

Assim a partir da equação (e da propagação da incerteza presente no apêndice),

$$m = \frac{4bh^3E}{L^3}$$

podemos tirar o módulo de Young ($E_{Teórico} = 1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,2\sigma$)

Decrescente,

$$E = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,4\sigma$)

Latão

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,025	\pm	0,0005
h (m)	0,0011	\pm	0,00005

Tabela 7 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00013	0,9783
0,000225	1,9564
0,00037	2,9315
0,00049	3,9112
0,00061	4,8894

Tabela 8 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00061	4,8894
0,0005	3,9112
0,00038	2,9315
0,00026	1,9564
0,000145	0,9783

Tabela 9 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão (Decrescente))

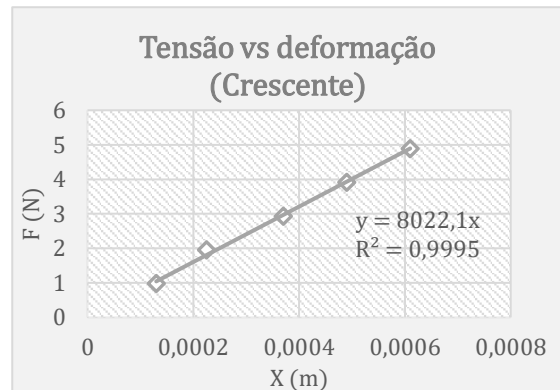


Gráfico 3 (Tensão vs deformação, na barra de latão (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$8,02 \cdot 10^3$	$0,09 \cdot 10^3$	0

Tabela 10 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de latão (Crescente de massas))

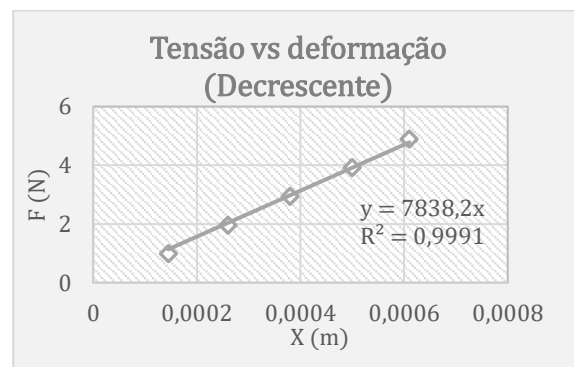


Gráfico 4 (Tensão vs deformação, na barra de latão (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$7,8 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	0

Tabela 11 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de latão (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{Teórico} = 9,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (6,8 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $3,2\sigma$)

Decrescente,

$$E = (6,6 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $3,4\sigma$)

Aço

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,026	\pm	0,0005
h (m)	0,00095	\pm	0,00005

Tabela 12 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,000065	0,9783
0,000135	1,9564
0,0002	2,9315
0,00026	3,9096
0,00033	4,8893
0,00039	5,8676

Tabela 13 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00039	5,8676
0,00033	4,8893
0,00027	3,9096
0,00021	2,9315
0,00015	1,9564
0,00008	0,9783

Tabela 14 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço (Decrescente))

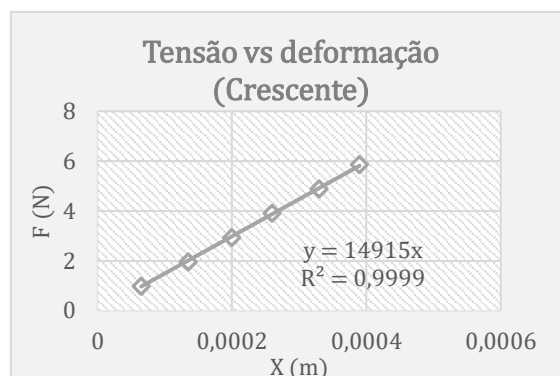


Gráfico 5 (Tensão vs deformação, na barra de aço (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,91 \cdot 10^3$	$0,07 \cdot 10^3$	0

Tabela 15 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de aço (Crescente de massas))

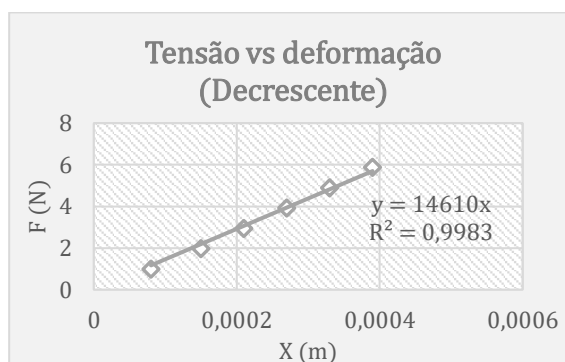


Gráfico 6 (Tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,6 \cdot 10^3$	$0,3 \cdot 10^3$	0

Tabela 16 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{Teórico} = (1,9 - 2,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (1,9 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $0,06\sigma$)

Decrescente,

$$E = (1,8 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $0,19\sigma$)

Alumínio

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,025	\pm	0,0005
h (m)	0,001	\pm	0,00005

Tabela 17 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00018	0,9783
0,00036	1,9564
0,000545	2,9315
0,00073	3,9096
0,00092	4,8893
0,00109	5,8676

Tabela 18 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00109	5,8676
0,00097	4,8893
0,00081	3,9096
0,00062	2,9315
0,00046	1,9564
0,00027	0,9783

Tabela 19 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio (Decrescente))

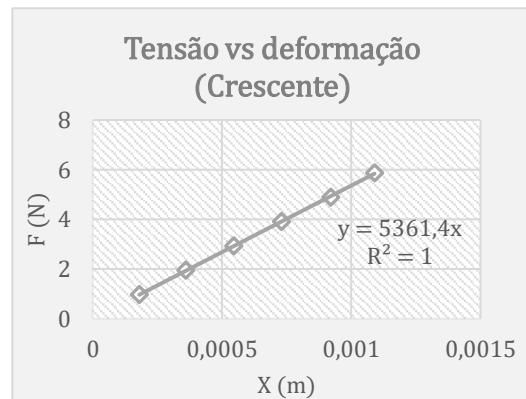


Gráfico 7 (Tensão vs deformação, na barra de alumínio (Crescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$5,36 \cdot 10^3$	$0,02 \cdot 10^3$	0

Tabela 20 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de alumínio (Crescente de massas))

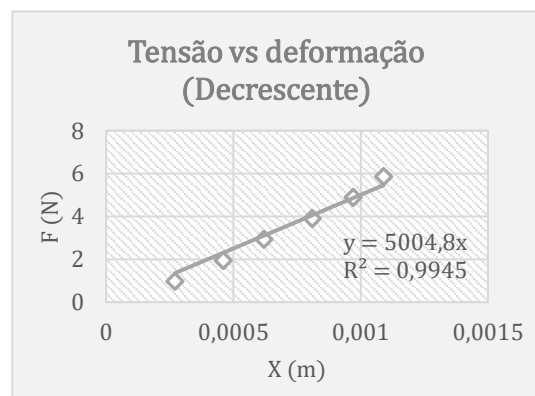


Gráfico 8 (Tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$5,0 \cdot 10^3$	$0,2 \cdot 10^3$	0

Tabela 21 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{Teórico} = (4,1 - 7,3) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (6,0 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Decrescente,

$$E = (5,6 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Vidro

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,048	\pm	0,0005
h (m)	0,0012	\pm	0,00005

Tabela 22 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00005	0,9783
0,000085	1,9564
0,00017	2,9315
0,00025	3,9096
0,00034	4,8893
0,00041	5,8676

Tabela 23 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00041	5,8676
0,00035	4,8893
0,00026	3,9096
0,00019	2,9315
0,0001	1,9564
0,00004	0,9783

Tabela 24 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro (Decrescente))

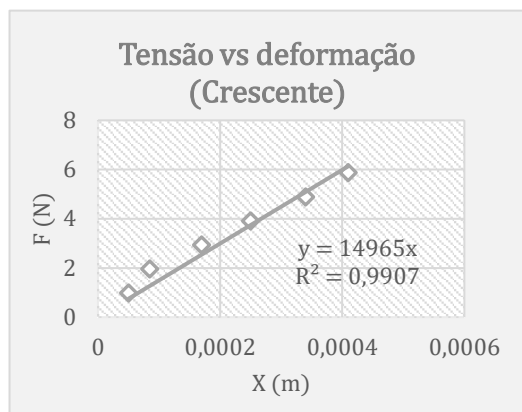


Gráfico 9 (Tensão vs deformação, na barra de vidro (Crescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$15,0 \cdot 10^3$	$0,6 \cdot 10^3$	0

Tabela 25 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de vidro (Crescente de massas))

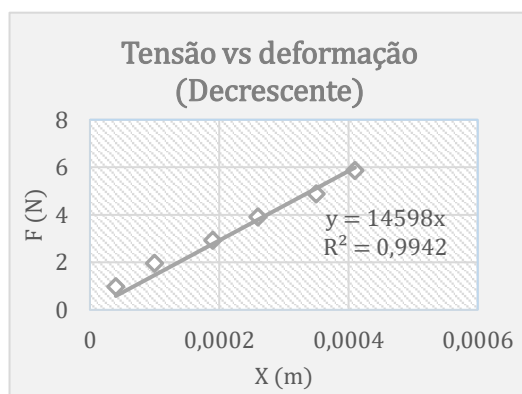


Gráfico 10 (Tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,6 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^3$	0

Tabela 26 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente de massas)

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (4 - 9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (5,1 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Decrescente,

$$E = (5,0 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Análise do 1º tratamento

Obtivemos desvios consideráveis tanto na barra de cobre como na barra latão, em relação ao respetivo valor teórico, no caso da barra de aço o valor está bastante próximo do limite inferior do valor tabelado. Os valores do módulo de Young obtidos para as barras de vidro e alumínio encontram-se dentro do intervalo teórico.

Acresço referir, que a incerteza associada ao valor do módulo de Young é elevado devido à incerteza associada ao declive dos gráficos *tensão vs deformação*. As incertezas destes pontos devem-se a possíveis ligeiras rotações da barra (na remoção de massas) ou a barra estar sob efeito de uma deformação plástica (que afetaria o valor da área deformada).

Crítério de Chauvenet

Estudando os valores da força de tração e da deformação individualmente, podemos obter um conjunto de módulos de Young e, assim utilizar o critério de Chauvenet para ver se alguns desses valores são suspeitos (em caso afirmativo usar o critério e ver se podemos rejeitar o valor). Como neste trabalho é possível existir mais de um valor suspeito, usaremos a secção 6.3 “Discussion” do livro “An Intruduction to Error Analysis” John R. Taylor. 2nd ed.

Cobre

Ponto experimental	E (J)
1	$9,26 \cdot 10^{10}$
2	$9,95 \cdot 10^{10}$
3	$9,78 \cdot 10^{10}$
4	$1,01 \cdot 10^{11}$
5	$1,01 \cdot 10^{11}$
6	$9,59 \cdot 10^{10}$
7	$9,32 \cdot 10^{10}$
8	$8,65 \cdot 10^{10}$
9	$8,29 \cdot 10^{10}$

Tabela 27 (Módulos de Young cobre)

Cujo valor médio e o desvio padrão (da amostra) dos valores da tabela 27 é:

$$E = (9,5 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Observandos os valores da tabela (5º ao 9º ponto), verificamos que o módulo de Young do 8º e 9º ponto experimental estão afastados do valor médio, por esse motivo consideremos estes suspeitos e, usando o critério de Chauvenet iremos verificar se podemos ou não os rejeitar.

Temos,

$$|\bar{E} - E_{8^o}| = 7,98 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,25\sigma$)

por isso, usando os valores da tabela que se encontra na última página (tabela 71) a probabilidade de não pertencer será 10,6% , como temos 9 pontos experimentais.

$$\eta = n \cdot P(\text{outside } 1,25\sigma)$$

Se $\eta < 1$ pelo critério de Chauvenet pode-se eliminar os valores suspeitos. Neste caso $\eta = 0,95$ por isso podemos rejeitar os valores do 8º e 9º ponto experimental.

Latão

Ponto experimental	E (J)
1	$6,36 \cdot 10^{10}$
2	$7,35 \cdot 10^{10}$
3	$6,70 \cdot 10^{10}$
4	$6,75 \cdot 10^{10}$
5	$6,77 \cdot 10^{10}$
6	$6,61 \cdot 10^{10}$
7	$6,52 \cdot 10^{10}$
8	$6,36 \cdot 10^{10}$
9	$5,70 \cdot 10^{10}$

Tabela 28 (Módulos de Young latão)

$$E = (6,6 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

O módulo de Young do 9º ponto experimental é suspeito e, usando o critério de Chauvenet iremos verificar se podemos ou não rejeitar o valor. Temos,

$$|\bar{E} - E_{9^o}| = 8,66 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,97\sigma$)

onde a probabilidade de não pertencer será 2,4%. Então:

$$\eta = 9 \cdot P(\text{outside } 1,97\sigma)$$

Se $\eta < 0,5$ pelo critério de Chauvenet pode-se eliminar o valor suspeito. Neste caso $\eta = 0,22$ por isso podemos rejeitar o valor do 9º ponto experimental.

Aço

Ponto experimental	E (J)
1	$1,90 \cdot 10^{11}$
2	$1,83 \cdot 10^{11}$
3	$1,85 \cdot 10^{11}$
4	$1,90 \cdot 10^{11}$
5	$1,87 \cdot 10^{11}$
6	$1,90 \cdot 10^{11}$
7	$1,87 \cdot 10^{11}$
8	$1,83 \cdot 10^{11}$
9	$1,76 \cdot 10^{11}$
10	$1,65 \cdot 10^{11}$
11	$1,54 \cdot 10^{11}$

Tabela 29 (Módulos de Young aço)

$$E = (1,8 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

O módulo de Young do 10º e 11º pontos experimentais são suspeitos e usando o critério de Chauvenet iremos verificar se podemos ou não rejeitar os valores.

$$|\bar{E} - E_{10^o}| = 1,62 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,41\sigma$)

onde a probabilidade de não pertencer será 7,9%. Então:

$$\eta = 11 \cdot P(\text{outside } 1,41\sigma)$$

Se $\eta < 1$ pelo critério de Chauvenet pode-se eliminar os valores suspeitos. Neste caso $\eta = 0,87$ por isso podemos rejeitar os valores do 10º e 11º ponto experimental.

Alumínio

Ponto experimental	E (J)
1	$6,11 \cdot 10^{10}$
2	$6,11 \cdot 10^{10}$
3	$6,05 \cdot 10^{10}$
4	$6,02 \cdot 10^{10}$
5	$5,98 \cdot 10^{10}$
6	$6,06 \cdot 10^{10}$
7	$5,67 \cdot 10^{10}$
8	$5,43 \cdot 10^{10}$
9	$5,32 \cdot 10^{10}$
10	$4,78 \cdot 10^{10}$
11	$4,08 \cdot 10^{10}$

Tabela 30 (Módulos de Young alumínio)

$$E = (5,6 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

O módulo de Young do 10º e 11º ponto experimental são suspeitos e usando o critério de Chauvenet iremos verificar se podemos ou não rejeitar os valores. Temos,

$$|\bar{E} - E_{10^\circ}| = 8,17 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,24\sigma$)

onde a probabilidade de não pertencer será 10,8%. Então:

$$\eta = 11 \cdot P(\text{outside } 1,24\sigma)$$

Se $\eta < 1$ pelo critério de Chauvenet pode-se eliminar os valores suspeitos. Neste caso $\eta = 1,18$, por isso podemos não rejeitar o valor do 10º ponto experimental, embora o 11º ainda possa ser eliminado, temos,

$$|\bar{E} - E_{11^\circ}| = 1,53 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $2,31\sigma$)

onde a probabilidade de não pertencer será 1,0%.

Então:

$$\eta = 11 \cdot P(\text{outside } 2,31\sigma)$$

Se $\eta < 0,5$ pelo critério de Chauvenet pode se eliminar o valor suspeito. Neste caso $\eta = 0,11$ por isso podemos rejeitar o valor do 11º ponto experimental.

Vidro

Ponto experimental	E (J)
1	$6,63 \cdot 10^{10}$
2	$7,80 \cdot 10^{10}$
3	$5,85 \cdot 10^{10}$
4	$5,30 \cdot 10^{10}$
5	$4,88 \cdot 10^{10}$
6	$4,85 \cdot 10^{10}$
7	$4,74 \cdot 10^{10}$
8	$5,10 \cdot 10^{10}$
9	$5,23 \cdot 10^{10}$
10	$6,63 \cdot 10^{10}$
11	$8,29 \cdot 10^{10}$

Tabela 31 (Módulos de Young vidro)

$$E = (5 \pm 1) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

O módulo de Young do 11º é suspeito e usando o critério de Chauvenet iremos verificar se podemos ou não rejeitar o valor.

Temos,

$$|\bar{E} - E_{11^\circ}| = 2,36 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,9\sigma$)

onde a probabilidade de não pertencer será 2,9%. Então:

$$\eta = 11 \cdot P(\text{outside } 1,9\sigma)$$

Se $\eta < 0,5$ pelo critério de Chauvenet pode se eliminar os valores suspeitos. Neste caso $\eta = 0,32$ por isso podemos rejeitar o valor do 11º ponto experimental.

2º Tratamento de dados

Sem valores experimentais rejeitados

Cobre

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,027	\pm	0,0005
h (m)	0,0008	\pm	0,00005

Tabela 32 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,000215	0,9783
0,0004	1,9564
0,00061	2,9315
0,00079	3,9112
0,00098	4,8894

Tabela 33 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00098	4,8894
0,00083	3,9112
0,00064	2,9315

Tabela 34 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre (Decrescente))

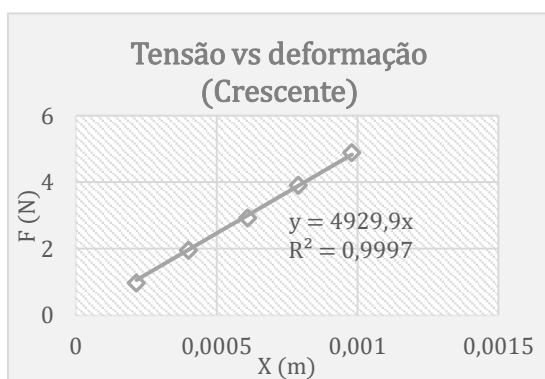


Gráfico 11 (Tensão vs deformação, na barra de cobre (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$4,93 \cdot 10^3$	$0,04 \cdot 10^3$	0

Tabela 35 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de cobre (Crescente de massas))

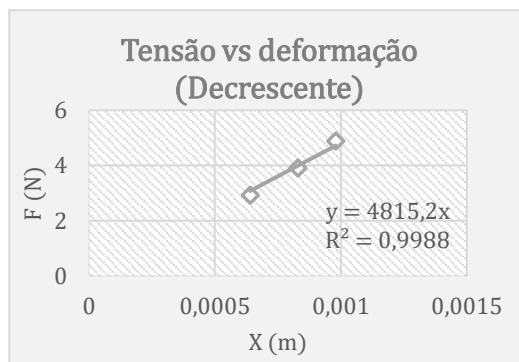


Gráfico 12 (Tensão vs deformação, na barra de cobre (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$4,8 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	0

Tabela 36 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de cobre (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = 1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,2\sigma$)

Decrescente,

$$E = (9,8 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $1,3\sigma$)

Latão

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,025	\pm	0,0005
h (m)	0,0011	\pm	0,00005

Tabela 37 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00013	0,9783
0,000225	1,9564
0,00037	2,9315
0,00049	3,9112
0,00061	4,8894

Tabela 38 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00061	4,8894
0,0005	3,9112
0,00038	2,9315
0,00026	1,9564

Tabela 39 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão (decrecente))

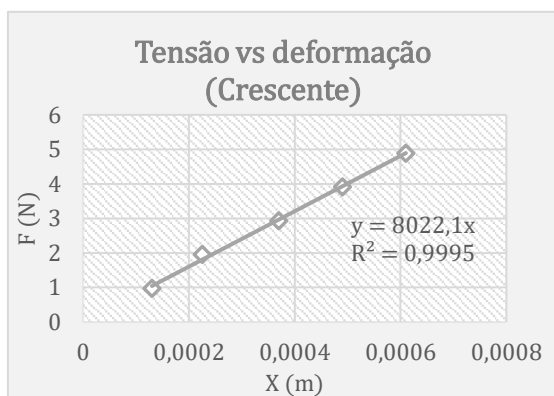


Gráfico 13 (Tensão vs deformação, na barra de latão (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$8,02 \cdot 10^3$	$0,09 \cdot 10^3$	0

Tabela 40 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de latão (Crescente de massas))

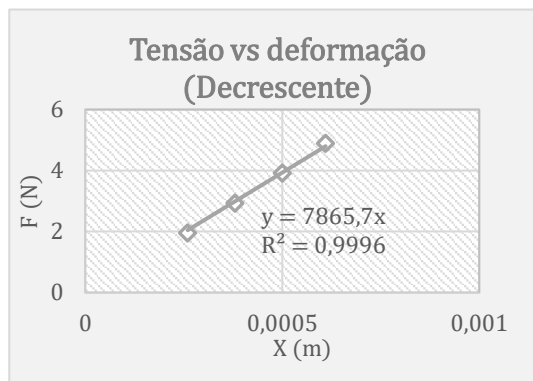


Gráfico 14 (Tensão vs deformação, na barra de latão (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$7,8 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	0

Tabela 41 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de latão (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = 9,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (6,8 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $3,2\sigma$)

Decrescente,

$$E = (6,7 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $3,4\sigma$)

Aço

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,026	\pm	0,0005
h (m)	0,00095	\pm	0,00005

Tabela 42 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,000065	0,9783
0,000135	1,9564
0,0002	2,9315
0,00026	3,9096
0,00033	4,8893
0,00039	5,8676

Tabela 43 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00039	5,8676
0,00033	4,8893
0,00027	3,9096
0,00021	2,9315

Tabela 44 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço (Decrescente))

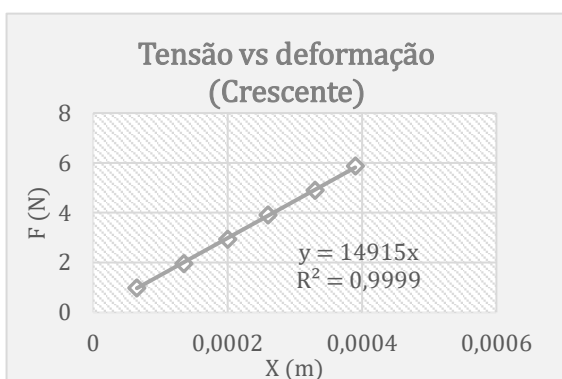


Gráfico 15 (Tensão vs deformação, na barra de aço (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,92 \cdot 10^3$	$0,07 \cdot 10^3$	0

Tabela 45 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de aço (Crescente de massas))

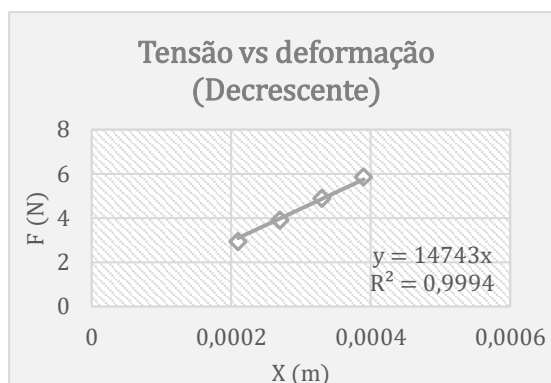


Gráfico 16 (Tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,7 \cdot 10^3$	$0,2 \cdot 10^3$	0

Tabela 46 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (1,9 - 2,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (1,9 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $0,06\sigma$)

Decrescente,

$$E = (1,9 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $0,013\sigma$)

Alumínio

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,025	\pm	0,0005
h (m)	0,001	\pm	0,00005

Tabela 47 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00018	0,9783
0,00036	1,9564
0,000545	2,9315
0,00073	3,9096
0,00092	4,8893
0,00109	5,8676

Tabela 48 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00109	5,8676
0,00097	4,8893
0,00081	3,9096
0,00062	2,9315
0,00046	1,9564

Tabela 49 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio (Decrescente))

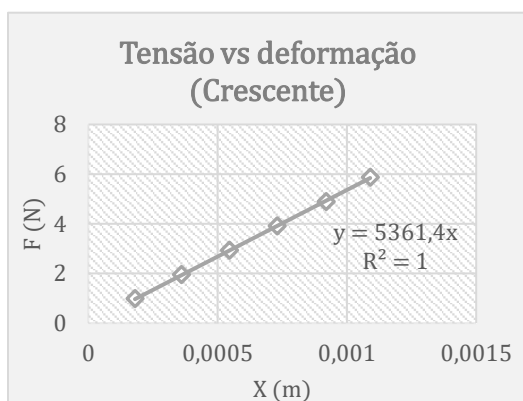


Gráfico 17 (Tensão vs deformação, na barra de alumínio (Crescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$5,36 \cdot 10^3$	$0,02 \cdot 10^3$	0

Tabela 50 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de alumínio (Crescente de massas))

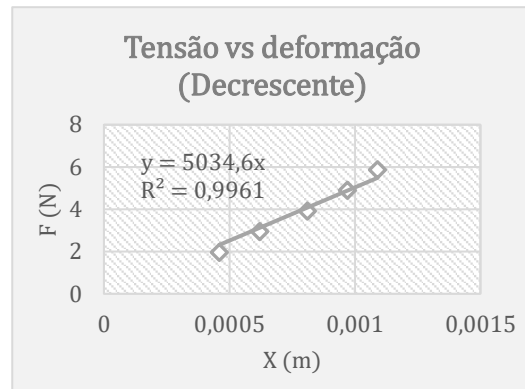


Gráfico 18 (Tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$5,0 \cdot 10^3$	$0,2 \cdot 10^3$	0

Tabela 51 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (4,1 - 7,3) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (6,0 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Decrescente,

$$E = (5,7 \pm 0,9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Vidro

	Valor	\pm	Incerteza
L (m)	0,104	\pm	0,0005
b (m)	0,048	\pm	0,0005
h (m)	0,0012	\pm	0,00005

Tabela 52 (Medidas e respetiva incerteza da largura, comprimento e espessura)

X (m)	F (N)
0,00005	0,9783
0,000085	1,9564
0,00017	2,9315
0,00025	3,9096
0,00034	4,8893
0,00041	5,8676

Tabela 53 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro (Crescente))

X (m)	F (N)
0,00041	5,8676
0,00035	4,8893
0,00026	3,9096
0,00019	2,9315
0,0001	1,9564

Tabela 54 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro (Decrescente))

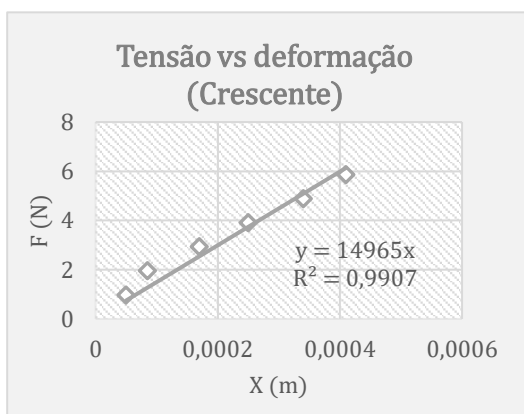


Gráfico 19 (Tensão vs deformação, na barra de vidro (Crescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$15,0 \cdot 10^3$	$0,6 \cdot 10^3$	0

Tabela 55 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de vidro (Crescente de massas))

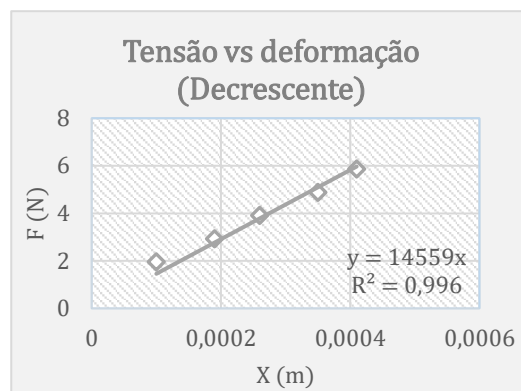


Gráfico 20 (Tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$14,6 \cdot 10^3$	$0,05 \cdot 10^3$	0

Tabela 56 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (4 - 9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

Crescente,

$$E = (5,0 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Decrescente,

$$E = (4,9 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Análise do 2º tratamento

Como era esperado, verifica-se uma ligeira diminuição nos desvios da decrescente de tensão (tendo em conta que os valores mais suspeitos se encontravam nessa fase).

Contudo, os valores do módulo de Young da barra de cobre e latão, principalmente, continuam afastados.

Durante a experiência os dados recolhidos foram colocados numa folha de Excel (pré-feita) e obtivemos diretamente o valor do módulo de Young, assim foi possível verificar um afastamento relativamente ao valor tabelado. Por esse motivo, para a barra de cobre e o latão foram mais uma vez realizadas as medidas de *tensão vs deformação*, e os resultados mantiveram-se.

Por isso, deduzimos que os valores de decrescente de massas talvez não deveriam ter sido obrigados a passar pela origem, tendo em conta o seguinte:

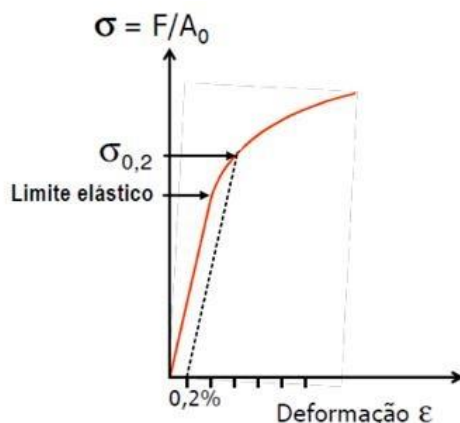


Figura 4 (Gráfico de tensão-deformação, com o pormenor (a tracejado) de uma tensão aplicada a um material após ter sofrido uma deformação plástica de 0,2%)

Após a deformação inicial (quando são acrescentadas massas), nós não

sabemos se estamos perante uma deformação plástica, por esse motivo os restantes valores (quando são removidas as massas) serão analisados num 3º tratamento (já com os valores removidos do critério de Chauvenet).

3º Tratamento de dados

Cobre

A partir da tabela 32 e 34:

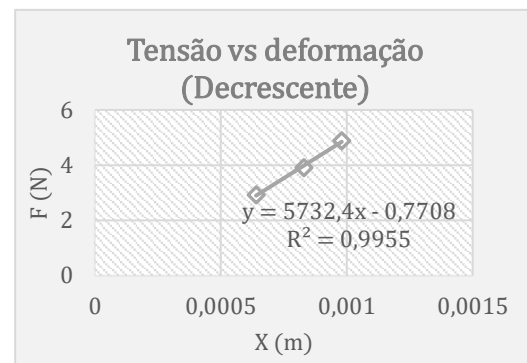


Gráfico 21 (Tensão vs deformação, na barra de cobre (Crescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$5,7 \cdot 10^3$	$0,4 \cdot 10^3$	0

Tabela 57 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de cobre (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = 1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

$$E = (1,2 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $0,27\sigma$)

Latão

A partir da tabela 37 e 39:

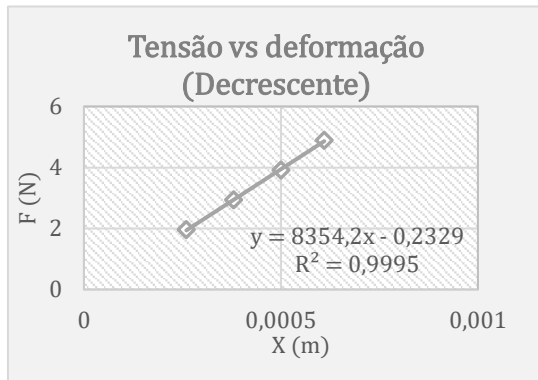


Gráfico 22 (Tensão vs deformação, na barra de latão ((Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$8,4 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	0

Tabela 58 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de latão (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = 9,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

$$E = (7 \pm 1) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(Desvio corresponde a $2,78\sigma$)

Aço

A partir da tabela 42 e 44:

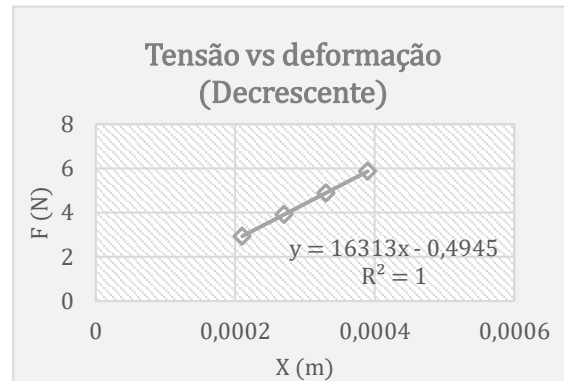


Gráfico 23 (Tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$16 \cdot 10^3$	$0,0 \cdot 10^3$	0

Tabela 59 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de aço (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (1,9 - 2,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$):

$$E = (2,1 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Alumínio

A partir da tabela 47 e 49:

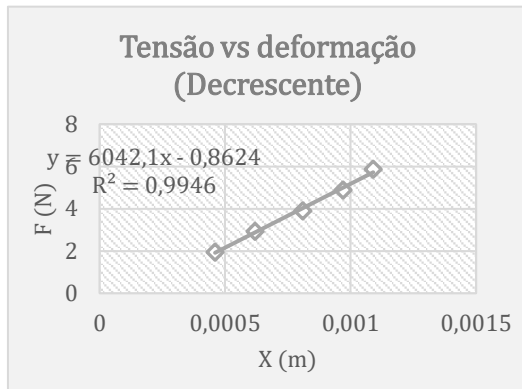


Gráfico 24 (Tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$6,0 \cdot 10^3$	$0,3 \cdot 10^3$	0

Tabela 60 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de alumínio (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (4,1 - 7,3) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

$$E = (7 \pm 1) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Vidro

A partir da tabela 52 e 54:

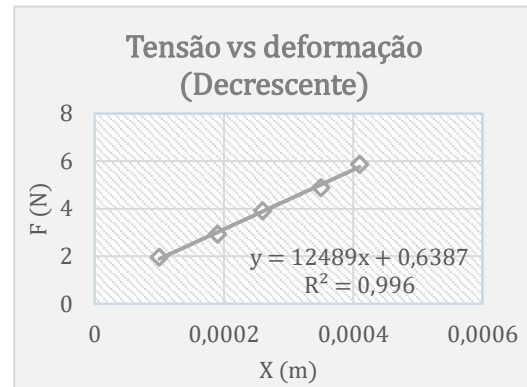


Gráfico 25 (Tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente))

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
$12,5 \cdot 10^3$	$0,6 \cdot 10^3$	0

Tabela 61 (Regressão linear tensão vs deformação, na barra de vidro (Decrescente de massas))

O módulo de Young será ($E_{\text{Teórico}} = (4 - 9) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$):

$$E = (4,2 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Análise do 3º tratamento

Neste 3º tratamento há uma notável melhora nos resultados obtidos, apenas na barra de latão o valor obtido se manteve afastado consideravelmente do valor teórico.

Se repararmos na parte de rejeição de dados, todos os valores excluídos encontram-se na fase de remoção de massas, o principal motivo é um contra-argumento a este 3º tratamento. Quando removemos as massas, caso a barra se tenha deformado plasticamente, o valor da área deformada não será a mesma (o ideal nesta experiência seria a deformação não entrar na zona plástica).

Como os valores melhoram significativamente, acreditamos que o erro que cometemos ao tratar assim os dados seja menor que o erro associado quando obrigamos a reta a passar pela origem.

Resultados

Desta forma temos os valores do módulo de Young da fase crescente e decrescente de massas, usando o método das médias pesadas (secção 7.2 “The Weighted Average” do livro “An Intruduction to Error Analysis” John R. Taylor. 2nd ed.) calcularemos os valores de E para cada barra de um dado material.

Médias pesadas

Para a barra de cobre será feito o procedimento detalhadamente, para os seguintes materiais apenas será apresentado o resultado.

Os valores utilizados para a média pesada será na fase crescente do 2º

tratamento e na fase decrescente do 3º tratamento.

Assim temos que para a barra de cobre:

Crescente,

$$E = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Decrescente,

$$E = (1,2 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Logo,

$$E = \frac{(1,2 \times \frac{1}{0,2^2}) + (1,0 \times \frac{1}{0,2^2})}{(\frac{1}{0,2^2} + \frac{1}{0,2^2})} \pm \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{0,2^2} + \frac{1}{0,2^2})}}$$

$$E_{\text{Cobre}} = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Para os outros materiais:

$$E_{\text{Aço}} = (2,0 \pm 0,2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$E_{\text{Latão}} = (6,9 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E_{\text{Aluminio}} = (6,4 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$E_{\text{Vidro}} = (4,8 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Conclusão

Observando os resultados obtidos em particular para cada barra de material, através do valor do módulo de Young podemos comparar entre os materiais o nível de rigidez (a força necessária para deformar a barra). Desta forma, vemos que o aço e o cobre são os materiais de maior rigidez, o vidro e o alumínio são os de menor rigidez e, por último, o latão é um intermediário. Como,

$$E_{\text{aço}} > E_{\text{cobre}} > E_{\text{latão}} > E_{\text{alumínio}} > E_{\text{vidro}}$$

então:

$$R_{\text{aço}} > R_{\text{cobre}} > R_{\text{latão}} > R_{\text{alumínio}} > R_{\text{vidro}}$$

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos é feita uma

pesquisa sobre a natureza frágil ou dúctil dos materiais (que é a capacidade de um material se deformar plasticamente sem rutura).

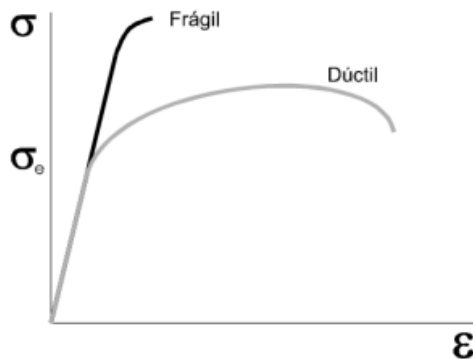


Figura 4 (Representação de gráfico *tensão vs deformação* para um material frágil e dúctil)

Dos materiais utilizados na experiência o cobre, o latão, o alumínio e o aço são dúcteis (embora no aço dependa do teor de carbono). O vidro é um material frágil, desta forma podemos concluir algo mais sobre os nossos resultados obtidos.

O vidro é um material frágil, apresenta uma pequena fase plástica e, possivelmente não terão sido registados valores na fase plástica, uma vez, que se se chegasse a tal limite elástico provavelmente entraria em rutura. Já os metais são dúcteis por isso há a possibilidade de haver uma deformação plástica e afetar mais os resultados obtidos.

Talvez para obter melhores resultados, durante a realização da experiência, deveríamos ter medido com mais precisão a largura da barra e o comprimento do suporte e, também não ter acrescentado muitas massas de modo a não haver de forma alguma deformação plástica e também evitar uma possível rotação da barra no suporte.

Bibliografia

1. "Protocolos 2021-2022", Armando Ferreira, 2021
2. (2006-2007). *Módulo de Young*. Obtido em 12 de dezembro de 2021 em http://fis.uc.pt/data/2006/2007/apontamentos/apnt_10_6_13.pdf
3. Instituto federal de Santa Catarina. *Ensaio de materiais*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em <https://slideplayer.com.br/amp/5618351/>
4. Gregersen, E. *Módulo de Young*. Obtido em 12 de dezembro de 2021 em <https://www.britannica.com/science/Youngs-modulus>
5. (13 de novembro de 2019). *Como o Módulo de Young define a relação entre estresse e tensão*. Obtido em 12 de dezembro de 2021 em <https://www.greelane.com/pt/ci%3%aaancia-tecnologia-matem%3%a1tica/ci%3%aaancia/youngs-modulus-4176297/>
6. *Comportamento dos materiais sob tensão*. Obtido em 12 de dezembro de 2021 em <http://www.fem.unicamp.br/~caram/capitulo10.pdf>
7. *Módulo de Young*. Obtido em 12 de dezembro de 2021 em <https://stringfixer.com/pt/Young%27s modulus>
8. *Tabela da distribuição normal padrão*. (2015). Yumpu. <https://www.yumpu.com/pt/document/view/48805669/ta-bela-da-distribuicao-normal-padrao>
9. *uncertainties in physical measurements* (2a ed.). University Science Books. (Obra original publicada em 1982)
10. Taylor, J. R. (1997). *An introduction to error analysis: the study of*
11. Buffoni, S. *Propriedades Mecânicas dos Materiais*. Obtido em 21 de dezembro de 2021 em <http://www.cartografica.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2015/09/Propriedades-Mecanicas-dos-Materiais.pdf>
12. *Tabela da distribuição Normal Padrão*. Obtido em 21 de dezembro de 2021 em http://wiki.icmc.usp.br/images/f/f9/Tabela_Normal.pdf
13. *Notas de aula sobre: Tensão e Deformação*. Obtido em 21 de dezembro de 2021 em https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/182782/mod_resource/content/1/Notas%20de%20aula%20de%20tensao%20e%20deformacao.pdf
14. Lindner, C. *Materiais de Construção Mecânica – Seleção, Uso e Solução*. Obtido em 21 de dezembro de 2021 em https://carroceria.blogspot.com/2013/05/materiais-de-construcao-mecanica_22.html

Apêndice

Variáveis

$D \equiv \text{Dureza}$

$w \equiv \text{Limite de elasticidade}$

$F \equiv \text{Força de tração/Tensão}$

$X \equiv \text{Deformação/Flexão}$

$L \equiv \text{Comprimento}$

$b \equiv \text{Largura}$

$h \equiv \text{Espessura}$

$E \equiv \text{Módulo de Young}$

Propagação dos erros

$$\sigma_E^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2$$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{L^3 \sigma_m}{4bh^3}\right)^2 + \left(\frac{3mL^2 \sigma_L}{4bh^3}\right)^2 + \left(\frac{mL^3 \sigma_b}{4b^2h^3}\right)^2 + \left(\frac{3mL^3 \sigma_h}{4bh^4}\right)^2}$$

Dados auxiliares

Nota: Os valores de F são obtidos a partir da pesagem da massa acrescentada ou retirada, multiplicado por a constante gravítica ($g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$)

X (m)	F (N)
0,00013	0,9783
0,000225	1,9564
0,00037	2,9315
0,00049	3,9112
0,00061	4,8894
0,0005	3,9112
0,00038	2,9315
0,00026	1,9564
0,000145	0,9783

Tabela 62 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão)

X (m)	F (N)
0,000065	0,9783
0,000135	1,9564
0,0002	2,9315
0,00026	3,9096
0,00033	4,8893
0,00039	5,8676
0,00033	4,8893
0,00027	3,9096
0,00021	2,9315
0,00015	1,9564
0,00008	0,9783

Tabela 63 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço)

X (m)	F (N)
0,00018	0,9783
0,00036	1,9564
0,000545	2,9315
0,00073	3,9096
0,00092	4,8893
0,00109	5,8676
0,00097	4,8893
0,00081	3,9096
0,00062	2,9315
0,00046	1,9564
0,00027	0,9783

Tabela 64 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio)

X (m)	F (N)
0,00005	0,9783
0,000085	1,9564
0,00017	2,9315
0,00025	3,9096
0,00034	4,8893
0,00041	5,8676
0,00035	4,8893
0,00026	3,9096
0,00019	2,9315
0,0001	1,9564
0,00004	0,9783

Tabela 65 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro)

X (m)	F (N)
0,000215	0,9783
0,0004	1,9564
0,00061	2,9315
0,00079	3,9112
0,00098	4,8894
0,00083	3,9112
0,00064	2,9315

Tabela 66 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de cobre (sem pontos rejeitados))

X (m)	F (N)
0,00013	0,9783
0,000225	1,9564
0,00037	2,9315
0,00049	3,9112
0,00061	4,8894
0,0005	3,9112
0,00038	2,9315
0,00026	1,9564

Tabela 67 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de latão (sem pontos rejeitados))

X (m)	F (N)
0,000065	0,9783
0,000135	1,9564
0,0002	2,9315
0,00026	3,9096
0,00033	4,8893
0,00039	5,8676
0,00033	4,8893
0,00027	3,9096
0,00021	2,9315

Tabela 68 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de aço (sem pontos rejeitados))

X (m)	F (N)
0,00018	0,9783
0,00036	1,9564
0,000545	2,9315
0,00073	3,9096
0,00092	4,8893
0,00109	5,8676
0,00097	4,8893
0,00081	3,9096
0,00062	2,9315
0,00046	1,9564

Tabela 69 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de alumínio (sem pontos rejeitados))

X (m)	F (N)
0,00005	0,9783
0,000085	1,9564
0,00017	2,9315
0,00025	3,9096
0,00034	4,8893
0,00041	5,8676
0,00035	4,8893
0,00026	3,9096
0,00019	2,9315
0,0001	1,9564

Tabela 70 (Medidas da deformação para uma respetiva força de tração para uma barra de vidro (sem pontos rejeitados))

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 71 (Distribuição normal)