# $2^{\underline{o}}$ TESTE de ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA EC

9 de janeiro de 2021 duração 1h 45m

Nome ______________________________ Nº __________ Curso __________

Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:
i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação da resposta, nos espaços indicados;
ii) a resolução dos sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou de Cramer;
iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace ou através da condensação de Gauss.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Sem calcular o polinómio caraterístico, verifique que $-5$ é um valor próprio de $A$.

   (b) Determine os restantes valores próprios de $A$.

   (c) Cacule o conjunto dos vetores próprios de $A$ associados a $-5$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det A$.

(b) Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações e justifique a resposta com base no resultado da alínea (a):

i. $AX = 0$ é possível e determinado.

ii. $AX = B$ é possível e indeterminado para qualquer matriz coluna $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

iii. $A$ é uma matriz invertível.

iv. $0$ é um valor próprio de $A$.

v. No espaço $\mathbb{R}^3$, os vetores $(2,-1,-1)$, $(1,1,4)$ e $(3,0,3)$ são complanares.

vi. $\big((2,-1,-1),\ (1,1,4),\ (3,0,3)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

*Nota: Se a resposta for justificada de outra forma, a classificação máxima é* 50% *da cotação indicada.*

3. Sejam $\mathcal{W} = \langle (2,1,1,1),(1,0,2,1),(0,2,0,1) \rangle$ e $\mathcal{U} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - w = 0,\ x + y = 0\}$.

   (a) Calcule uma forma geral de um vetor de $\mathcal{U}$.

   (b) Calcule $\dim \mathcal{U}$.

   (c) Verifique se $(1,\ -1,\ 3,\ 1) \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

4. Sendo $\mathcal{B}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$, considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule $f(2, 1, -1)$.

COTAÇÃO: **1***a*) 1 *b*) 1.5 *c*) 1.5 **2***a*) 2 *b*) 6 **3***a*) 2 *b*) 2 *c*) 2 **5** 2