Primeiro teste (sobre a matéria até hoje + conjunto 5)

Data provisório 4ª feira dia 18 de novembro na aula TP (10h-11h)

Tetra-Vetor do Momento

Tetra-vector da velocidade

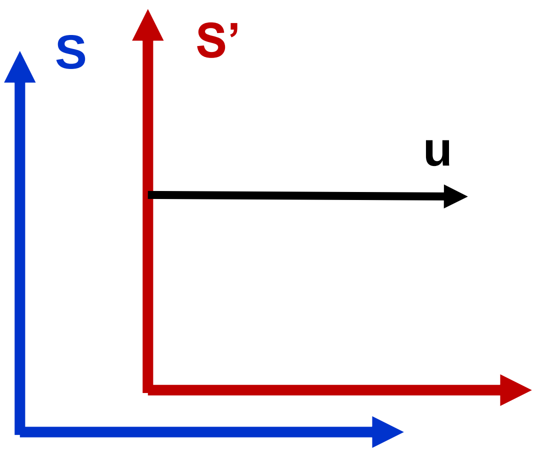
$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\left(c, \mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z\right)$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2$$

Tetra-vector do momento

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}} = \frac{m\left(c, \mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z\right)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

Transforma de acordo com as transformações de Lorentz (m é um 4-escalar)



$$\mathbf{P}'_x = \gamma\left(\mathbf{P}_x - \beta\mathbf{P}_t\right)$$

$$\mathbf{P}'_t = \gamma\left(\mathbf{P}_t - \beta\mathbf{P}_x\right)$$

$$\mathbf{P}'_y = \mathbf{P}_y$$

$$\mathbf{P}'_z = \mathbf{P}_z$$

Em alguns textos mais antigos é possível ver

$$\cancel{m(\mathrm{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}}$$

Tetra vetor do Momento

Para simplificar as contas exploramos o tetra-vetor do momento no limite de movimento unidimensional ao longo do eixo dos xxs (1d)

$\vec{\mathrm{V}}$

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}} = \frac{m\left(c, \mathrm{v}, 0, 0\right)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

Ajude dum amigo matemático

Karen Uhlenbeck

$$\left(1+\varepsilon\right)^n \approx 1 + n\varepsilon + \tfrac{1}{2}n\left(n-1\right)\varepsilon^2 + \ldots$$

Expansão de Taylor

$$\varepsilon = -(\mathrm{v}/c)^2; n = -\tfrac{1}{2}$$

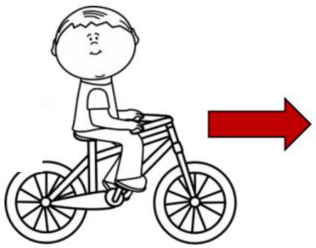
$$\lim_{\mathrm{v}/c<<1} \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \rightarrow 1 + \tfrac{1}{2}(\mathrm{v}/c)^2 + \ldots$$

Componente espacial

$$\mathbf{P}_x = \frac{m\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \qquad \lim_{\mathrm{v}/c<<1} \mathbf{P}_x \rightarrow m\mathrm{v} + \tfrac{1}{2}m\mathrm{v}^3/c^2$$

Versão clássica + pequena correção

Tetra vetor do Momento



$$\vec{V}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}} = \frac{m(c, \mathrm{v}, 0, 0)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

$$\lim_{\mathrm{v}/c<<1} \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \quad \rightarrow 1 + \tfrac{1}{2}(\mathrm{v}/c)^2 + \ldots$$

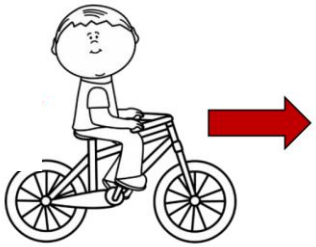
Componente temporal

$$\mathbf{P}_t = \frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \qquad \lim_{\mathrm{v}/c<<1} \mathbf{P}_t \rightarrow mc + \tfrac{1}{2} m\mathrm{v}^2 / c$$

$$c\mathbf{P}_t \rightarrow mc^2 + \tfrac{1}{2} m\mathrm{v}^2$$

Energia de repouso $\quad \mathrm{E}_0 = mc^2$

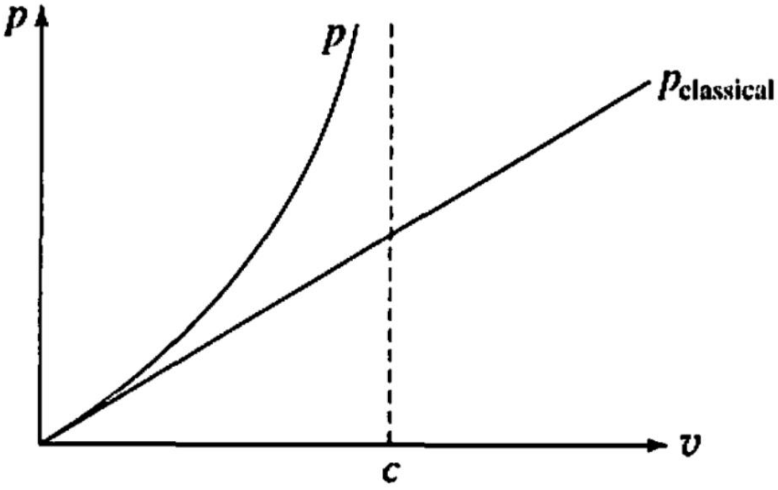
Energia cinética relativisitica $\quad KE = c\mathbf{P}_t - mc^2$



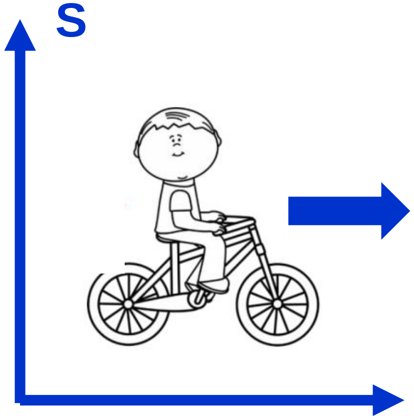
$\vec{\mathrm{V}}$

$$\mathbf{P}_t = \frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \qquad \mathbf{P}_x = \frac{m\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

Nota que embora v<c por uma partícula com massa, o momento linear pode aumentar sem limites



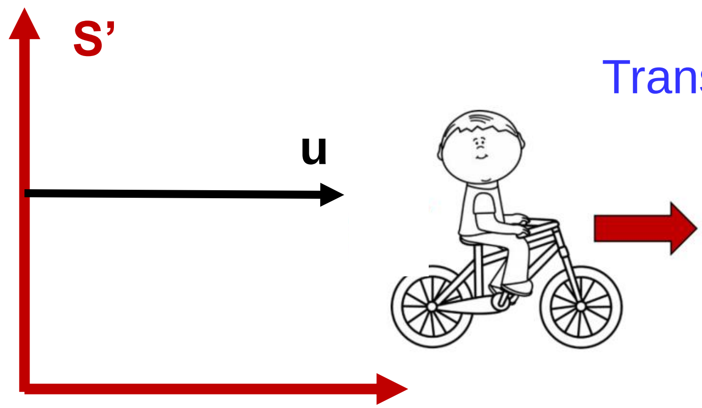
Teste de consistência



Em S

$\vec{V}$

$$\mathbf{P}_t = \frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \qquad \mathbf{P}_x = \frac{m\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

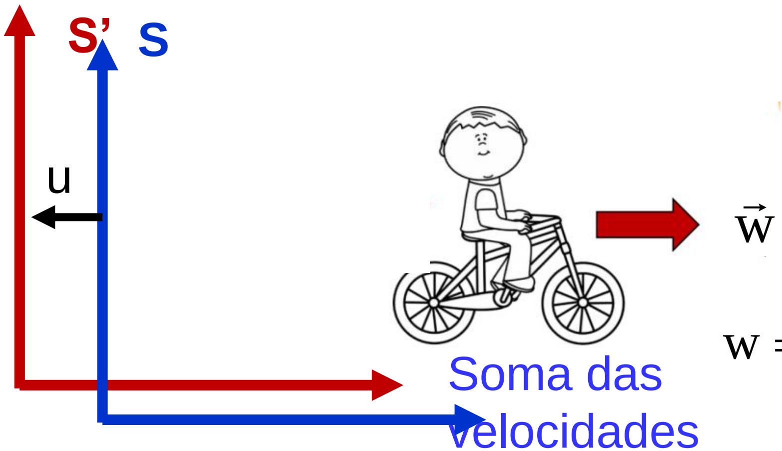


Transformação de Lorentz

$$\mathbf{P}'_t = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{u}/c)^2}}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} - \frac{\mathrm{u}}{c}\frac{m\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right)$$

$$\mathbf{P}'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{u}/c)^2}}\left(\frac{m\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} - \frac{\mathrm{u}}{c}\frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right)$$

Teste de consistência



$$w = \frac{v-u}{1 - vu/c^2}$$

$$\mathbf{P}'_t = \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)\left[\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \left(\frac{u}{c}\right)\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

$$\mathbf{P}'_x = \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)\left[\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \left(\frac{u}{c}\right)\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

$$\mathbf{P}'_t = \frac{mc}{\sqrt{1-(w/c)^2}} = mc\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v-u}{c-vu/c}\right)^2}}$$

$$= mc\frac{c-vu/c}{\sqrt{c^2-2uv+u^2v^2/c^2-v^2+2vu-u^2}}$$

$$= mc\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{1-\left(uv/c^2\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}m\left[\frac{c-\left(u/c\right)v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

$$\mathbf{P}'_x = \frac{mw}{\sqrt{1-(w/c)^2}}$$

$$= m\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{1-\left(uv/c^2\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]\frac{v-u}{1-vu/c^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}m\left[\frac{v-u}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

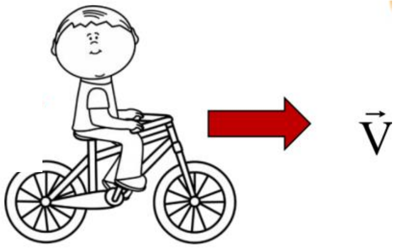
Algumas expressões uteis

Por uma partícula de massa m

$$\mathbf{P} = m\gamma_v\left(c, v_x, v_y, v_z\right) = \left(E/c, \vec{p}\right)$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= m\gamma_v c^2 \\ \vec{p} &= m\gamma_v \vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2}}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{P}\bullet\mathbf{P} &= \left(E/c, \vec{p}\right)\bullet\left(E/c, \vec{p}\right) \\ &= \left(E/c\right)^2 - p^2 \\ &= \left(mc\right)^2 \end{aligned}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Produto interno é invariante

No referencial próprio v=0 E=mc^2, $\vec{p} = 0$

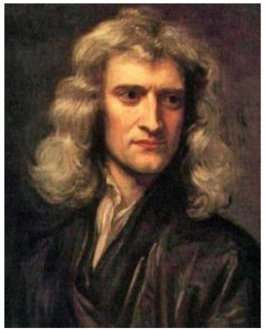
$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

Por uma partícula sem massa (um fotão)

$$E = pc \qquad \mathbf{P}_{fotão} = \left(\frac{E_{fotão}}{c}, \frac{E_{fotão}}{c}\hat{k}\right)$$

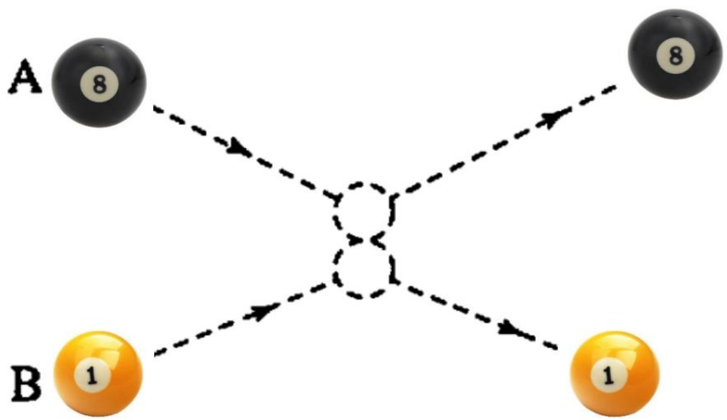
$\hat{k}$ Vetor unitária que indica a direção da propagação do fotão

Colisões



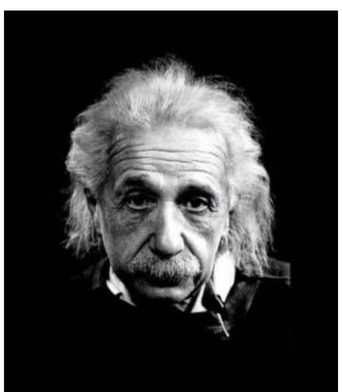
$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Na ausência de forças externas
o momento do sistema é conservado



$$\sum_j \vec{p}_{j,i} = \sum_j \vec{p}_{j,f}$$

Massa também é conservada.
Se a colisão for inelástica a energia não é conservada.



$$\sum_j \mathbf{P}_{j,i} = \sum_k \mathbf{P}_{k,f}$$

$$\sum_j \left(E_j / c, p_j\right)_i = \sum_k \left(E_k / c, p_k\right)_f$$

A soma dos tetra-vetores de Energia-Momento são conservados.
È possível “trocar” massa por energia ou ao contrário

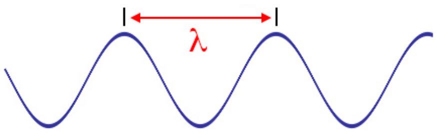
Um exemplo

Um colisão entre um fotão e um eletrão em repouso.
Qual é o comprimento de onda do fotão depois a colisão?

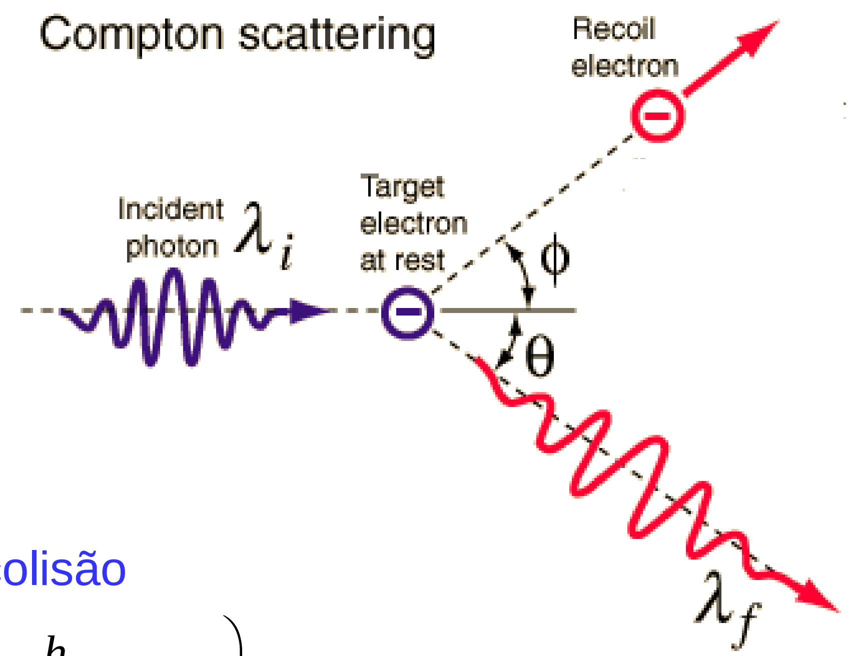
Energia dum fotão

$$E_{fotão} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Constante de Planck
h ≈ 6.63x10^{-34} J.s



$$f = \frac{1}{T} \qquad c = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$$



Antes da colisão

$$\mathbf{P}_f = \left(\frac{h}{\lambda_i}, \frac{h}{\lambda_i}, 0, 0\right)$$

$$\mathbf{P}_e = (mc, 0, 0, 0)$$

Depois da colisão

$$\mathbf{P}'_f = \left(\frac{h}{\lambda_f}, \frac{h}{\lambda_f}\cos\theta, \frac{h}{\lambda_f}\sin\theta, 0\right)$$

$$\mathbf{P}'_e = \left(E'/c, p'_x, p'_y, 0\right)$$

Antes da colisão

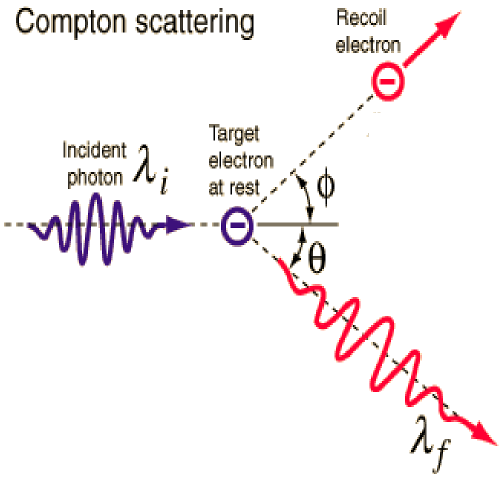
$$\mathbf{P}_f = \left(\frac{h}{\lambda_i}, \frac{h}{\lambda_i}, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{P}_e = \left(mc, 0, 0, 0 \right)$$

Depois da colisão

$$\mathbf{P}'_f = \left(\frac{h}{\lambda_f}, \frac{h}{\lambda_f}\cos\theta, \frac{-h}{\lambda_f}\sin\theta, 0 \right)$$

$$\mathbf{P}'_e = \left(E'/c, p'_x, p'_y, 0 \right)$$



Conservação do tetra-vetor de Energia-momento

$$\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_e = \mathbf{P}'_f + \mathbf{P}'_e$$

$$\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_e - \mathbf{P}'_f = \mathbf{P}'_e$$

Dica: isolar a quantidade que não interessa e realizar o produto interno da equação consigo próprio

$$\left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_e - \mathbf{P}'_f \right) \bullet \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_e - \mathbf{P}'_f \right) = \mathbf{P}'_e \bullet \mathbf{P}'_e$$

$$\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_f + 2\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_e - 2\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}'_f + \mathbf{P}_e \bullet \mathbf{P}_e - 2\mathbf{P}_e \bullet \mathbf{P}'_f + \mathbf{P}'_f \bullet \mathbf{P}'_f = \mathbf{P}'_e \bullet \mathbf{P}'_e$$

Contas

$$\mathbf{P}_f = \left(\frac{h}{\lambda_i}, \frac{h}{\lambda_i}, 0, 0\right) \qquad \mathbf{P}'_f = \left(\frac{h}{\lambda_f}, \frac{h}{\lambda_f}\cos\theta, \frac{-h}{\lambda_f}\sin\theta, 0\right)$$

$$\mathbf{P}_e = \left(mc, 0, 0, 0\right) \qquad \mathbf{P}'_e = \left(E'/c, p'_x, p'_y, 0\right)$$

$$\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_f + 2\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_e - 2\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}'_f + \mathbf{P}_e \bullet \mathbf{P}_e - 2\mathbf{P}_e \bullet \mathbf{P}'_f + \mathbf{P}'_f \bullet \mathbf{P}'_f = \mathbf{P}'_e \bullet \mathbf{P}'_e$$

$$\mathbf{P}_A \bullet \mathbf{P}_A = m^2c^2$$

Produto escalar é invariante

Avaliar na referencial de repouso

$$\mathbf{P}_e \bullet \mathbf{P}_e = \mathbf{P}'_e \bullet \mathbf{P}'_e = m^2c^2$$

$$\mathbf{P}_{fotão} \bullet \mathbf{P}_{fotão} = 0$$

Fotões não tem massa

$$\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_f = \mathbf{P}'_f \bullet \mathbf{P}'_f = 0$$

$$\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}_e = \frac{h}{\lambda_i} mc$$

$$\mathbf{P}'_f \bullet \mathbf{P}_e = \frac{h}{\lambda_f} mc$$

$$\mathbf{P}_f \bullet \mathbf{P}'_f = \frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f} - \frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f}\cos\theta$$

$$2\frac{h}{\lambda_i} mc - 2\frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f} + 2\frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f}\cos\theta + \cancel{m^2c^2} - 2\frac{h}{\lambda_f} mc = \cancel{m^2c^2}$$

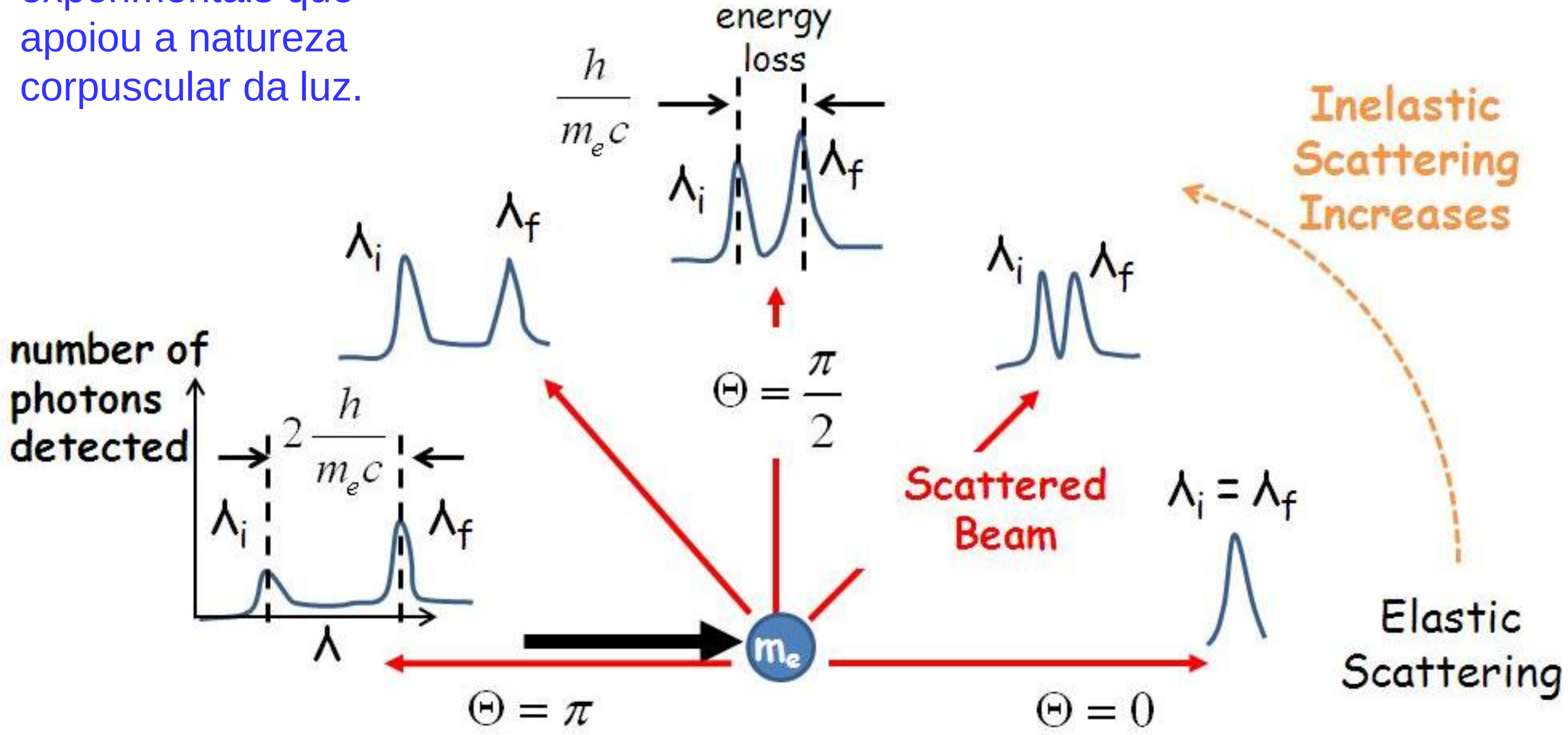
$$\frac{1}{\lambda_i} - \frac{h}{mc}\frac{1}{\lambda_i \lambda_f}\left(1 - \cos\theta\right) - \frac{1}{\lambda_f} = 0$$

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right)$$

Dispersão Compton

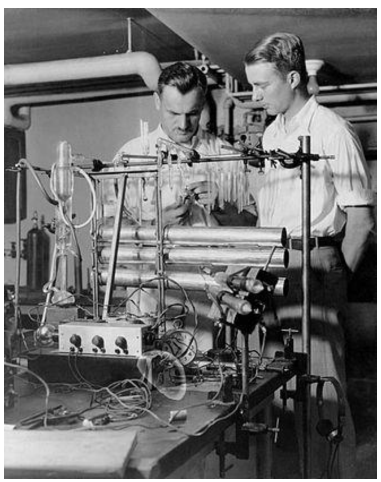
Um dos primeiros resultados experimentais que apoiou a natureza corpuscular da luz.

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\Theta\right)$$



Experiência Original do Compton

Artur Compton
1892-1962
Nobel 1927



THE

PHYSICAL REVIEW

A QUANTUM THEORY OF THE SCATTERING OF X-RAYS BY LIGHT ELEMENTS

By Arthur H. Compton

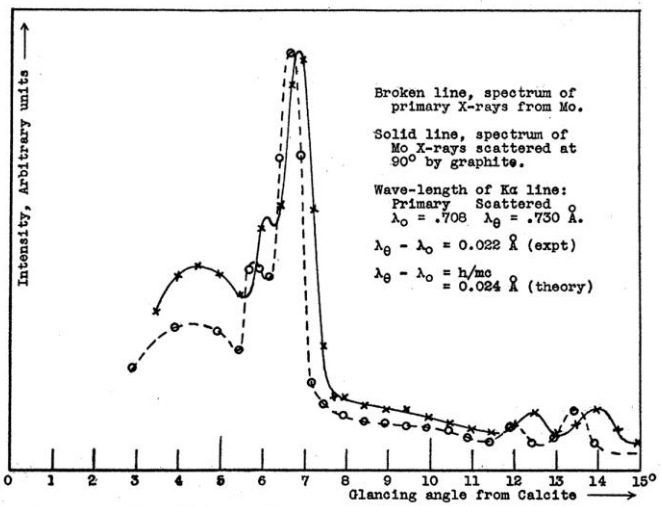
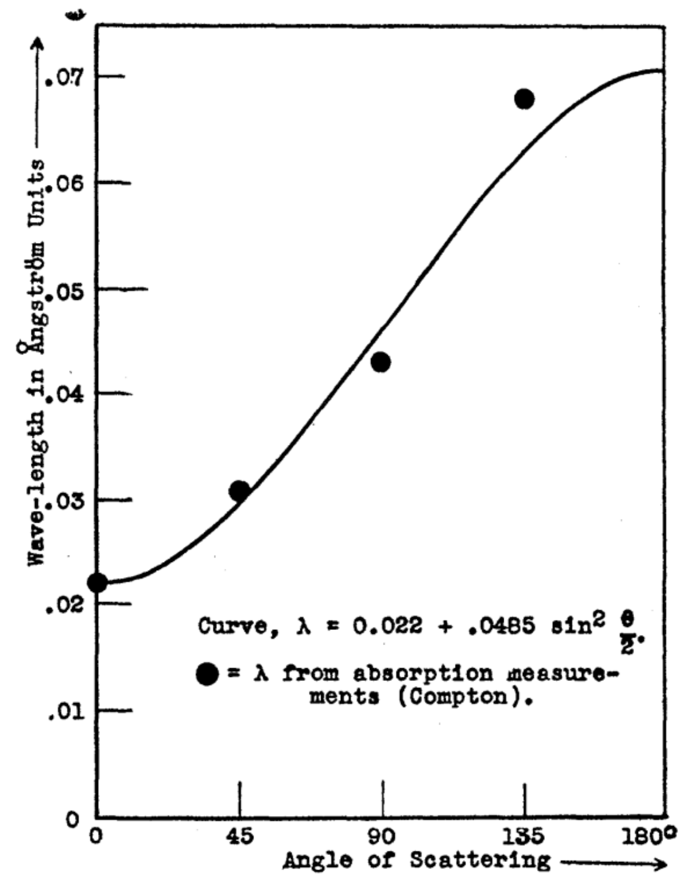


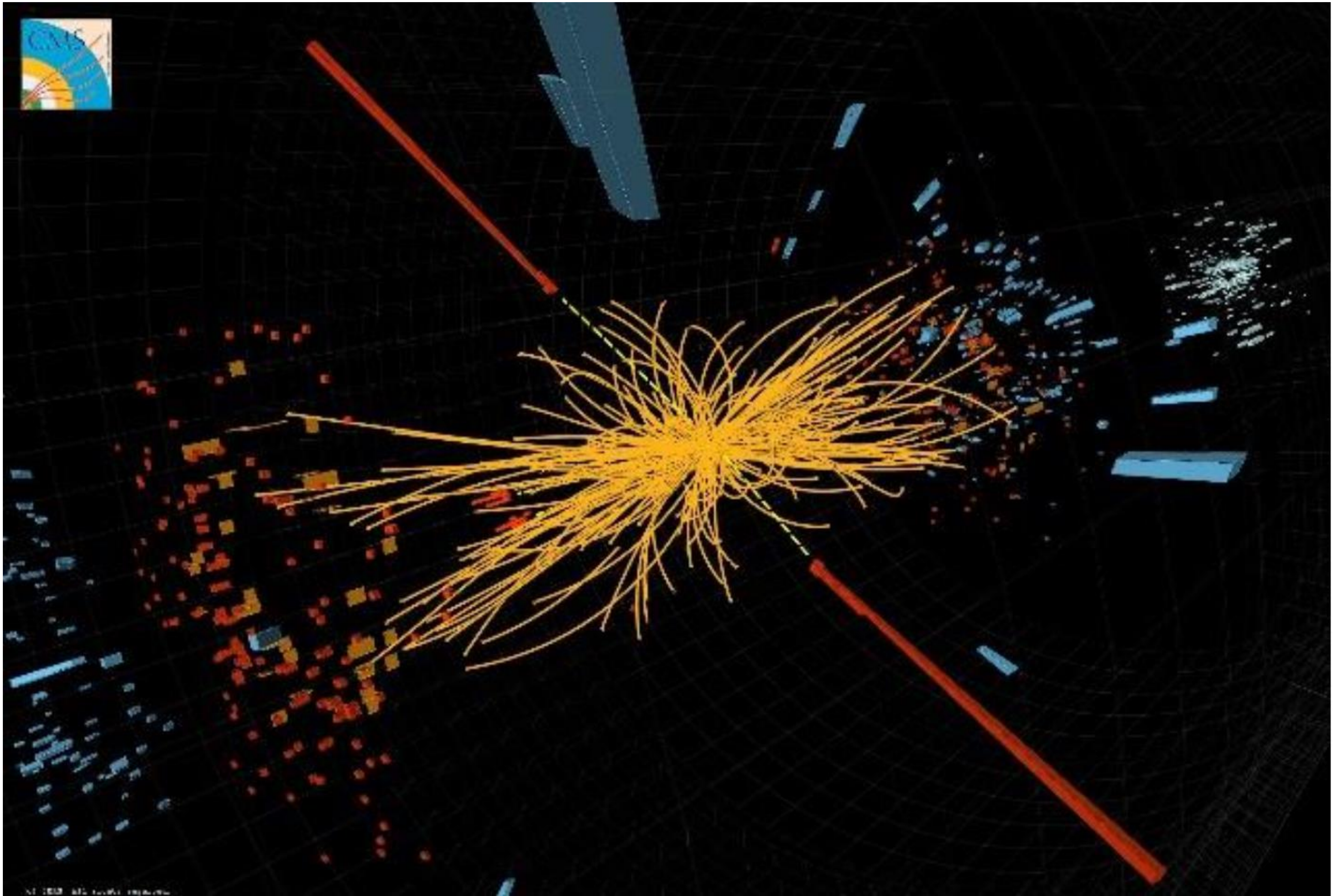
Fig. 4. Spectrum of molybdenum X-rays scattered by graphite, compared with the spectrum of the primary X-rays, showing an increase in wave-length on scattering.

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\Theta)$$

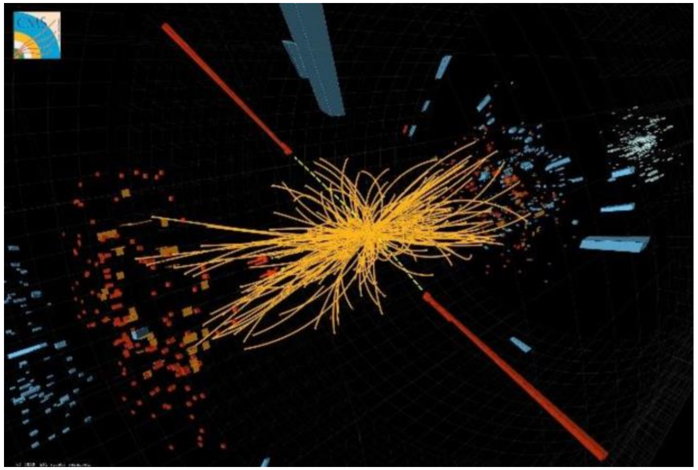


A.H. Compton, *Phys. Rev.* **22** 409 (1923)

Cern uma colisão frontal entre protões



Criação de novas partículas

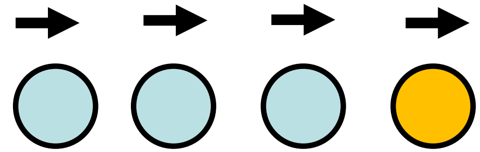


Nestas colisões violentas a soma da massa das partículas criadas é tipicamente várias ordens de grandeza maior do que a massa dos dois protões incidentes

Exemplo: Criação de partículas

p $\quad$ p

$\left(E_{lab}/c, p_{lab}\right)$ $\quad$ $\left(m_p c, 0\right)$



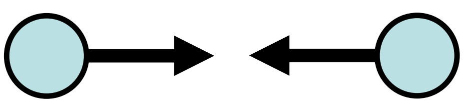
p $\quad p$ $\quad p$ $\quad \bar{p}$ $\quad$ Anti-protão

Qual é a energia mínima necessária para criar um par protão-anti-protão numa colisão

conservação de carga

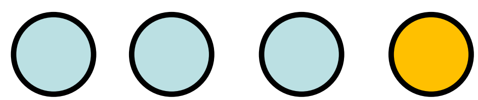
Energia mínima? As 4 partículas não podem ser criados sem alguma momento, pois o momento total tem ser conservado

Truque ir ao referencial de centro de massa
(energia mínima quando os 4 partículas são em repouso)



p $\quad$ p

$\left(E_{cm}/c, \vec{p}_{cm}\right)$ $\quad$ $\left(E_{cm}/c, -\vec{p}_{cm}\right)$



p $\quad p$ $\quad p$ $\quad \bar{p}$

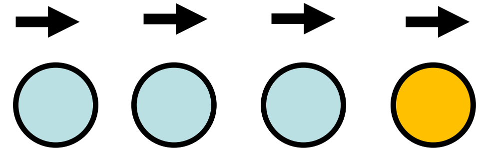
$$\mathbf{P}_{Tot,f} = \left(4m_p c, 0\right)$$

p $\qquad$ p

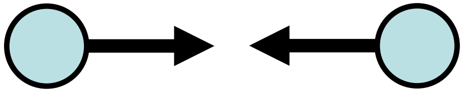
$\left(E_{Lab}/c, p_{Lab}\right)$ $\qquad$ $\left(m_p c, 0\right)$

$$\mathbf{P}_{Tot,i}^{Lab} = \left(E_{Lab}/c + m_p c, p_{Lab}\right)$$

Lab



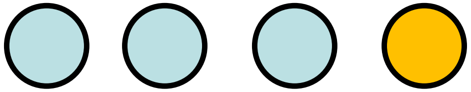
p $\quad$ p $\quad$ p $\quad$ $\bar{p}$ $\quad$ Anti-protão



p $\qquad$ p

$\left(E_{cm}/c, \vec{p}_{cm}\right)$ $\qquad$ $\left(E_{cm}/c, -\vec{p}_{cm}\right)$

CM



p $\quad$ p $\quad$ p $\quad$ $\bar{p}$

$$\mathbf{P}_{Tot,f}^{CM} = \left(4m_p c, 0\right)$$

Conservação de Energia Momento $\quad$ $\mathbf{P}_{Tot,i}^{Lab} = \mathbf{P}_{Tot,f}^{Lab}$ $\qquad$ $\mathbf{P}_{Tot,i}^{CM} = \mathbf{P}_{Tot,f}^{CM}$

Invariância do produto interno $\quad$ $\mathbf{P}_{Tot,i}^{Lab} \bullet \mathbf{P}_{Tot,i}^{Lab} = \mathbf{P}_{Tot,f}^{CM} \bullet \mathbf{P}_{Tot,f}^{CM}$

$$\mathbf{P}^{Lab}_{Tot,i} \bullet \mathbf{P}^{Lab}_{Tot,i} = \mathbf{P}^{CM}_{Tot,f} \bullet \mathbf{P}^{CM}_{Tot,f}$$

$$\mathbf{P}^{Lab}_{Tot,i} = \left(E_{Lab}/c + m_p c,\, p_{Lab}\right)$$

$$\mathbf{P}^{CM}_{Tot,f} = \left(4 m_p c, 0\right)$$

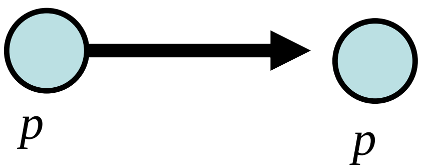
$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{Lab}_{Tot,i} \bullet \mathbf{P}^{Lab}_{Tot,i} &= \left(E_{Lab}/c + m_p c,\, p_{Lab}\right) \bullet \left(E_{Lab}/c + m_p c,\, p_{Lab}\right) \\ &= \left(E_{Lab}/c + m_p c\right)^2 - \left(p_{Lab}\right)^2 \\ &= \left(E_{Lab}/c\right)^2 - \left(p_{Lab}\right)^2 + 2E_{Lab} m_p + \left(m_p c\right)^2 \\ &= 2E_{Lab} m_p + 2\left(m_p c\right)^2\end{aligned}$$

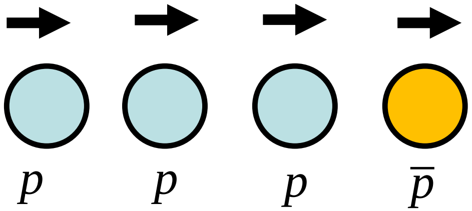
$$2E_{Lab} m_p + 2\left(m_p c\right)^2 = 16\left(m_p c\right)^2$$

$$E_{Lab} = 7 m_p c^2$$

$$\mathbf{P}^{CM}_{Tot,f} \bullet \mathbf{P}^{CM}_{Tot,f} = 16\left(m_p c\right)^2$$

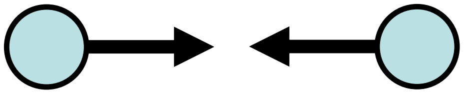
Nos 1950s o “Bevatron” em LLNL (Califórnia) foi construído para acelerar protões até uma energia ligeiramente acima e $7m_p c^2$.
O. Chamberlain e E. Segrè observam o anti-protão pela 1ª vez em 1955.





No CM necessita menos energia

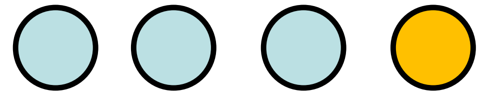
Se ambos os protões iniciais foram acelerados e sofram uma choque frontal,
O referencial do Laboratório é igual ao referencial CM



$p \qquad\qquad p$

$$\left(E/c, \vec{p}\right) \qquad \left(E/c, -\vec{p}\right)$$

$$\mathbf{P}_{Tot,i} = \left(2E/c, 0\right)$$



$p \quad p \quad p \quad \overline{p}$

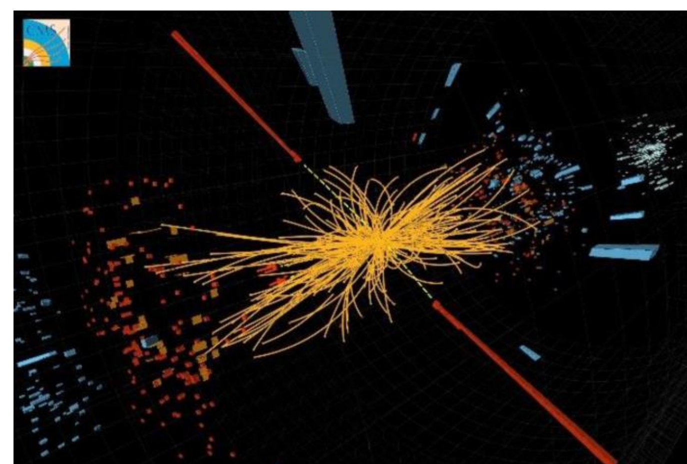
$$\mathbf{P}_{Tot,f} = \left(4m_p c, 0\right)$$

$$\mathbf{P}_{Tot,i} \bullet \mathbf{P}_{Tot,i} = \mathbf{P}_{Tot,f} \bullet \mathbf{P}_{Tot,f}$$

$$4\left(E/c\right)^2 = 16\left(m_p c\right)^2$$

$$E = 2m_p c^2$$

CERN tem dois aceleradores de
protões em sentidos ao contrários

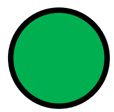


Absorção dum fotão

Finalmente consideramos o que acontece quando um átomo absorve um fotão e passa do estado fundamental á um estado excitado.

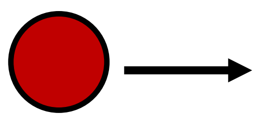
antes

$$\left(\frac{hf}{c},\frac{hf}{c}\right)$$



$$\left(mc,0\right)$$

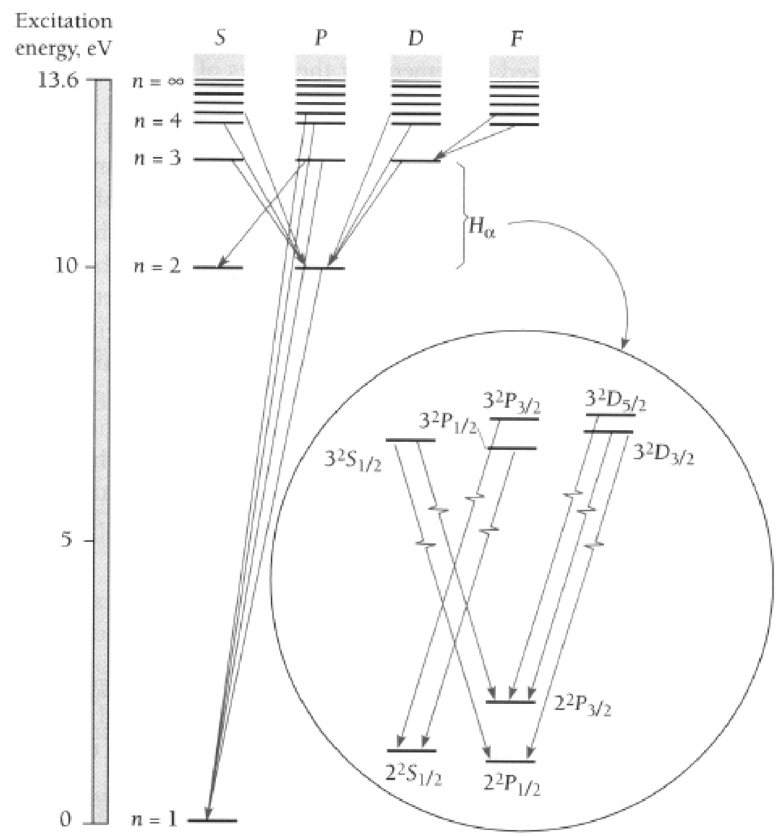
depois



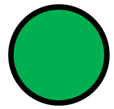
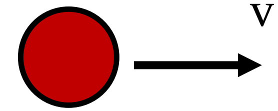
$$\left(E'/c,p'\right)$$

$$\mathbf{P}_{Tot,i}=\mathbf{P}_{Tot,f}$$

$$\left(\frac{hf}{c}+mc,\frac{hf}{c}\right)=\left(E'/c,p'\right)$$



Absorção dum fotão

antes   depois 

$$\left(\frac{hf}{c},\frac{hf}{c}\right) \qquad (mc,0) \qquad (E'/c,p')$$

Qual é a massa do átomo depois a absorção?

$$\mathbf{P}_{Tot,i}=\mathbf{P}_{Tot,f}$$

$$\left(\frac{hf}{c}+mc,\frac{hf}{c}\right)=(E'/c,p')$$

Conservação de componente da energia $\quad \dfrac{hf}{c}+mc=\dfrac{E'}{c}=\dfrac{m'c}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}}$

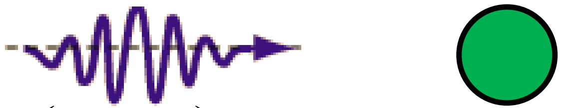
Conservação de componente do momento $\quad \dfrac{hf}{c}=p'=\dfrac{m'\mathrm{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v/c})^2}}$

Se queremos saber m´ o caminho mais eficiente é calcular $\quad \mathbf{P}_{Tot,f}\bullet\mathbf{P}_{Tot,f}=(m'c)^2$

$$\mathbf{P}_{Tot,i}\bullet\mathbf{P}_{Tot,i}=\left(\frac{hf}{c}+mc,\frac{hf}{c}\right)\bullet\left(\frac{hf}{c}+mc,\frac{hf}{c}\right)=\left(\frac{hf}{c}\right)^2+2mc\frac{hf}{c}+(mc)^2-\left(\frac{hf}{c}\right)^2=2mc\frac{hf}{c}+(mc)^2$$

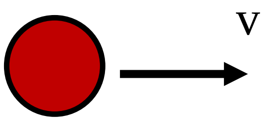
Absorção dum fotão

antes



$\left(\frac{hf}{c},\frac{hf}{c}\right)$ $\qquad (mc,0)$

depois



$\left(E'/c,p'\right)$

Qual é a massa do átomo depois a absorção?

$$\mathbf{P}_{Tot,i}\bullet\mathbf{P}_{Tot,i}=\mathbf{P}_{Tot,f}\bullet\mathbf{P}_{Tot,f}$$

$$(m'c)^2=2mc\frac{hf}{c}+(mc)^2$$

$$m'c=\sqrt{2mhf+(mc)^2}=mc\sqrt{1+\frac{2hf}{mc^2}}$$

$$m'=m\sqrt{1+\frac{2hf}{mc^2}}\approx m+\frac{hf}{c^2}$$

Um átomo excitado é ligeiramente mais massiva.
A energia de repouso aumentou

$$E_o'=m'c^2\approx mc^2+hf$$

Convêm lembrar

Nas equações com tetra-vetores de energia momento, calcular o quadrado (produto interno) do vetor sobre qual tem menos informação, pois o resultado é sempre $(mc)^2$.

As vezes o vetor do qual devia calcular o quadrado não esta sozinho num lado de equação. Se isso acontecer, isola-lo, i.e. transferir os outros termos para o outro lado e depois realizar o quadrado (produto interno).