Definição 4.1. Uma matriz diz-se uma matriz em forma de escada se satisfaz as seguintes condições:

1. se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;
2. se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

Definição 4.2. Ao primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em forma de escada chamamos pivô.

Exemplo 4.3. Eis alguns exemplos do aspeto de uma matriz em forma de escada:

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que os símbolos $\bullet$ representam os pivôs.

Exemplo 4.4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A tem pivôs 2 e 3, B tem pivôs 2 e 4, e C tem pivôs 2, 2 e 3.

Observação 4.5. A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz em escada pois o primeiro elemento não nulo da terceira linha de D está na coluna 4 e a quarta linha de D não começa com 4 elementos nulos.

Definição 4.6. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chamamos transformações elementares sobre as linhas da matriz A a uma transformação de um dos seguintes tipos:

I. trocar duas linhas;
II. multiplicar uma linha por um escalar não nulo;
III. substituir uma linha pela sua soma com uma outra linha.

Usando as transformações II. e III., temos a seguinte operação:

> substituir uma linha pela sua soma com uma outra linha eventualmente multiplicada por um escalar não nulo.

Notação 4.7. Adotaremos as seguintes notações para as transformações elementares sobre as linhas:

$L_i \leftrightarrow L_j$	trocar a linha i com a linha j;
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	multiplicar a linha L_i por $\alpha \neq 0$;
$L_i \leftarrow L_i + L_j$	substituir uma linha pela sua soma com uma outra linha.

Definição 4.8. Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é equivalente por linhas a $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se B pode ser obtida de A por uma sequência finita de transformações elementares sobre as linhas da matriz A.

Teorema 4.9. Toda a matriz A é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Se $a_{11} \neq 0$, consideremos as seguintes transformações elementares sobre as linhas de A e as ações correspondentes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \text{ anula o elemento na posição } (2,1)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \text{ anula o elemento na posição } (3,1)$$

$$\vdots$$

$$L_m \leftarrow L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_1 \text{ anula o elemento na posição } (m,1)$$

Se o novo elemento na posição $(2,2)$, a'_{22}, é não nulo repetimos este processo:

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2 \text{ anula o elemento na posição } (3,2)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} L_2 \text{ anula o elemento na posição } (4,2)$$

$$\vdots$$

$$L_m \leftarrow L_m - \frac{a'_{m2}}{a'_{22}} L_2 \text{ anula o elemento na posição } (m,2)$$

e assim por diante.

Chamamos pivôs da eliminação aos elementos $a_{11}, a'_{22}, a''_{33}, \ldots$.

Observação 4.10. Sempre que surja um zero na posição em que deveria estar um pivô troca-se esta linha com a seguinte, ou sucessivamente se o problema persistir. Se nenhuma troca resolver o problema, o pivô passa a ser procurado entre os coeficientes da coluna seguinte.

RESULTADO: uma matriz em escada!

A este processo chama-se condensação da matriz A.

Exemplo 4.11. Determinemos uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

sendo esta última uma matriz em forma de escada.

Observação 4.12. Para qualquer matriz não nula existem várias matrizes em forma de escada que lhe são equivalentes por linhas. Apesar de distintas, todas essas matrizes em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição 4.13. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos característica de A e denotámo-lo por $r(A)$ ou $\mathrm{c}(A)$.

Proposição 4.14. Matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

Exemplo 4.15. Determinemos a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Para tal, procedamos à condensação da matriz A:

$$A \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \alpha+3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}.$$

Para $\alpha = -1$, a última linha da matriz em forma de escada é nula e $r(A) = 2$.

Para $\alpha \neq -1$, a última linha da matriz em forma de escada é não nula e $r(A) = 3$.

Exemplo 4.16. Determinemos, agora, a característica da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

O seguinte processo termina com a obtenção de uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz B:

$$B \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{3}{2} L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz em forma de escada obtida tem 3 linhas não nulas, $r(B) = 3$.