T-3 e T-4 incertezas

Propagação de incertezas

Muitas vezes temos de efetuar cálculos para obtermos os resultados que pretendemos. Por exemplo, se medirmos o diâmetro e a altura de um cilindro e pretendermos obter o volume do cilindro. Se conhecermos a incerteza de cada uma das grandezas de partida será possível calcular a incerteza na grandeza final.

Trabalhando com incertezas padrão, supondo que as incertezas nas variáveis são suficientemente pequenas para podermos linearizar a função, a propagação das incertezas para uma função de N variáveis é:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} s_{ij}$$

Esquecendo de momento a parte a cinza que se aplica quando há correlação entre as variáveis de partida, a partir desta equação podemos deduzir os casos particulares típicos:

- Somas e subtrações:
  exemplos $y = x_1 + x_2$; $y = x_1 - x_2$
  $$s_y^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2$$
- Produtos e quocientes:
  exemplos $y = x_1 \times x_2$; $y = x_1 / x_2$
  $$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{s_i}{x_i}\right)^2$$
- Potências e produtos por um escalar:
  exemplo $y = a \cdot x^n$
  $$\frac{s_y}{y} = n\frac{s_x}{x}$$

Incerteza no coeficiente de viscosidade da água

Aplicando estas fórmulas à expressão da viscosidade da água obtemos:

$$\eta = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8lQ} \cdot R^4$$

$$s_{P_1-P_2}^2 = s_{P_1}^2 + s_{P_2}^2$$

$$\frac{s_{R^4}}{R^4} = 4 \cdot \frac{s_R}{R}$$

$$\left(\frac{s_\eta}{\eta}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \left[\frac{s_{P_1-P_2}^2}{(P_1 - P_2)^2} + \frac{s_l^2}{l^2} + \frac{s_Q^2}{Q^2} + \left(\frac{s_{R^4}}{R^4}\right)^2\right] = \frac{\pi}{8} \cdot \left[\frac{s_{P_1}^2 + s_{P_2}^2}{(P_1 - P_2)^2} + \frac{s_l^2}{l^2} + \frac{s_Q^2}{Q^2} + \left(4 \cdot \frac{s_R}{R}\right)^2\right]$$

Pode verificar-se nesta equação que a incerteza na determinação do raio interno do tubo é crítica uma vez que terá um peso de $4^2 = 16$!

Há grupos que usaram a velocidade máxima da água dentro do tubo, que depende do caudal e do raio interno do tubo, mas se fizerem corretamente a propagação da incerteza para obterem a incerteza na velocidade máxima e, a partir desta, no coeficiente de viscosidade, o resultado que obterão será o mesmo.

Outros grupos terão obtido o quociente $(P_1 - P_2)/l$ a partir de um gráfico. Nesse caso os cálculos poderão ser ligeiramente mais complexos para a incerteza deste coeficiente, mas a propagação desta incerteza para a determinação da incerteza final no coeficiente de viscosidade da água segue fórmulas idênticas às apresentadas acima.

Nota: O valor que irão obter para a viscosidade da água é claramente superior à que obtêm tablada. Isso indica que há erros sistemáticos não contabilizados e com maior impacto no valor final do que todas estas incertezas aqui contabilizadas, o que torna este trabalho um pouco inglório. Contudo é um bom treino.

Incerteza no módulo de Young

Aplicando a propagação das incertezas obtemos:

$$E = \frac{L^3}{4\,b\,h^3} \cdot \frac{F}{X}$$

$$\left(\frac{s_E}{E}\right)^2 = \left(3 \cdot \frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{s_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{s_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{s_X}{X}\right)^2$$

Mais uma vez, muitos grupos determinaram o quociente F/X a partir de um gráfico. Nada de errado nesse procedimento. A estimativa da incerteza no declive da reta que "melhor" ajusta os pontos é um pouco mais complexa e será detalhada numa das próximas aulas teóricas. Contudo, uma vez conhecida a incerteza no declive, a propagação da incerteza para o valor final do módulo de Young segue o mesmo procedimento aqui apresentado.