Cálculo EC: aula 2

9. Calcule, caso existam, os limites seguintes:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{-3x^4+2x^3-x}{x^3-x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$

a

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ou $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

b

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \frac{7}{8}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} = 1$$

usando a FFT

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{-3x^4+2x^3-x}{x^3-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(-3x^3+2x^2-1)}{\cancel{x}(x^2-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^3+2x^2-1}{x^2-1} = 1$$

f) $$\lim_{x\to 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$$

Como a função $\cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$ é limitada, uma vez que $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right) \leq 1$

e $\lim_{x\to 0} \pi x = 0$

então $\lim_{x\to 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right) = 0$

Teorema do enquadramento ou do confronto (ou das funções enquadradas)

Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação de D,

se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

então $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Corolário:

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação de D,
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e g é uma função limitada, então

$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

NOTA : • $g : D \to \mathbb{R}$ diz-se limitada se
$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \quad m \leq g(x) \leq M, \quad \forall x \in D$

ou em alternativa

• $g : D \to \mathbb{R}$ diz-se limitada se
$\exists\, M > 0$ tal que $|g(x)| < M, \quad \forall x \in D$

10. Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|\frac{f(x)}{x}| \leq 2000$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Temos $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 2000 \Leftrightarrow \frac{|f(x)|}{|x|} \leq 2000 \Leftrightarrow |f(x)| \leq 2000|x|$

Então: $-2000|x| \leq f(x) \leq 2000|x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Como $\lim_{x\to 0} -2000|x| = \lim_{x\to 0} 2000|x| = 0$ então

pelo teorema do enquadramento $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

NOTA: Seja $M \in \mathbb{R}^+$. $|z| \leq M \Leftrightarrow -M \leq z \leq M$.

11. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função $f(x) = ax + b$ satisfaça $\lim_{x\to -1} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}(\frac{1}{x-1})$.

- $\lim_{x\to 1} (x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

pois a função $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ é limitada e $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$

- $\lim_{x\to -1} f(x) = -a+b$

$\lim_{x\to 1} f(x) = a+b$

Resolvemos o sistema $\begin{cases} -a+b = 5 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 5 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5/2 \\ a = -5/2 \end{cases}$

Portanto: $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$.

12. Diga se é possível prolongar f por continuidade em a. Justifique.

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2-16}{|x-4|},\quad a=4;\quad (b)\ f(x) = \frac{x^3+27}{x+3},\quad a=-3.$$

Definição: seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função e seja $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $D \subseteq E$ a função $g: E \to \mathbb{R}$ diz-se um prolongamento de f se $g(x) = f(x)$, para todo o $x \in D$.

Definição: Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $D \subseteq E$, a função $g: E \to \mathbb{R}$ diz-se prolongamento por continuidade de f se g é um prolongamento de f e se g é uma função contínua.

a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ f é contínua pois é o quociente entre um polinómio e a composta da função módulo com um polinómio.

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = 8$$

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{x^2-16}{-(x-4)} = \lim_{x\to4^-} \frac{(x-4)(x+4)}{-(x-4)} = -8$$

$$\nexists \lim_{x\to4} f(x)$$

Logo não é possível prolongar f por continuidade a $x_0 = 4$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ f é contínua por se tratar de uma função racional.

$\exists \lim\limits_{x \to -3} f(x)$? $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+27}{x+3}$ indeterminação $\frac{0}{0}$

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	$\boxed{0}$

Regra de Ruffini

$x^3+27 = (x^2-3x+9)(x+3)$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x \to -3} x^2-3x+9 = 27$$

Então $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+27}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \\ 27, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

é prolongamento contínuo de f a $x_0 = -3$.

28. Calcule:

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-1/2))$; (b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\pi/6))$;

(c) $\cos(\arccos(\sqrt{3}/2))$; (d) $\arccos(\cos(-\pi/3))$;

(e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\pi/4))$; (f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$.

- sen: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é injetiva nem sobrejetiva mas:
- sen : $[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ é bijetiva logo tem inversa:
- arcsen: $[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

  $\operatorname{arcsen}(y) = x$ sse $y = \operatorname{sen} x$ e $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

- cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é injetiva nem sobrejetiva mas:
- cos: $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ é bijetiva logo tem inversa
- arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

  $\arccos(y) = x$ sse $y = \cos x$ e $x \in [0, \pi]$

- tg: $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é injetiva (é sobrejetiva) mas:
- tg : $]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva logo tem inversa:
- arctg : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

  $\operatorname{arctg}(y) = x$ sse $y = \operatorname{tg} x$ e $x \in]-\pi/2, \pi/2[$

a $\text{sen}(\text{arcsen}(-1/2)) = -1/2$

De facto $\text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y$, para todo o $y \in [-1,1]$.

Note-se que $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, pois $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b Note-se que $\text{arcsen}(\text{sen}(7\pi/6)) \neq 7\pi/6$, pois $7\pi/6 \notin [-\pi/2, \pi/2]$

$\text{arcsen}(\text{sen}(7\pi/6)) = \text{arcsen}(\text{sen}(\pi + \pi/6)) = \text{arcsen}(-1/2) = -\pi/6$

Em geral: se $\alpha \in 1^{\circ}Q$ $\text{arcsen}(\text{sen}(\pi + \alpha)) = -\alpha$.

c $\cos(\text{arccos}(\sqrt{3}/2)) = \sqrt{3}/2$

De facto $\cos(\text{arccos}(y)) = y$, para todo o $y \in [-1,1]$

Note-se que $\text{arccos}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in [0,\pi]$

d $\text{arccos}(\cos(-\pi/3)) \neq -\pi/3$ pois $-\pi/3 \notin [0,\pi]$

$\text{arccos}(\cos(-\pi/3)) = \text{arccos}(\cos(\pi/3)) = \pi/3$

Em geral: se $\alpha \in 1^{\circ}Q$: $\text{arccos}(\cos(-\alpha)) = \alpha$

e $\text{arctg}(\text{tg}(-\pi/4)) = -\pi/4$ pois $-\pi/4 \in]-\pi/2, \pi/2[$.

f $\text{tg}(\text{arctg}(-1)) = \text{tg}(-\pi/4) = -1$

De facto $\text{tg}(\text{arctg}(y)) = y$, para todo o $y \in [-1,1]$.