Funções inversas

1

Funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas

Seja $f : D \to E$ uma função.

1. f diz-se *injectiva* se

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

2. f diz-se *sobrejectiva* se $\mathrm{Im} f = E$.
3. f diz-se *bijectiva* se f for ao mesmo tempo injectiva e sobrejectiva.

2

Exemplos

(i) A função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é injectiva mas não sobrejectiva.

(ii) A função $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é bijectiva.

(iii) A função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é nem injectiva nem sobrejectiva.

(iv) Uma função real estritamente monótona $f\colon D \to E$ é injectiva.

(v) Para qualquer função $f\colon D \to E$, a função $\hat{f}\colon D \to \mathrm{Im} f$ definida por $\hat{f}(x) = f(x)$ é sobrejectiva.

(vi) Para qualquer função injectiva $f\colon D \to E$, a função $\hat{f} : D \to \mathrm{Im} f$ definida por $\hat{f}(x) = f(x)$ é bijectiva.

3

Função inversa

Seja $f : D \to E$ uma função bijectiva. Então para cada $y \in E$ existe um único $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

A função $E \to D$ que faz corresponder a $y \in E$ o único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ é chamada *função inversa* de f e é indicada por f^{-1}.

Nota

A notação f^{-1} é reservada pela função inversa de f. Em geral,

$$f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

4

Função inversa

Notas

(i) Se $f : D \to E$ for bijectiva, então a função inversa $f^{-1} : E \to D$ também é bijectiva e a função inversa de f^{-1} é f, assim $(f^{-1})^{-1} = f$.

(ii) Seja $f : D \to E$ bijectiva. Então temos $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo o $y \in E$ e $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo o $x \in D$.

(iii) Seja $f : D \to E$ uma função. Se existir uma função $g : E \to D$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo o $y \in E$ e $g(f(x)) = x$ para todo o $x \in D$, então f é bijectiva e $g = f^{-1}$.

Exemplos

(i) A função $f : D \to D$ definida por $f(x) = x$ é bijectiva e a função inversa é dada por $f^{-1}(y) = y$.

(ii) A função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ é bijectiva e a função inversa é dada por $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.

(iii) Para todo o $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a função $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ definida por $f(x) = x^\rho$ é bijectiva e a função inversa é dada por $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\rho}}$.

(iv) Para qualquer $a > 1$, a função $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ definida por $f(x) = a^x$ é bijectiva e a função inversa é dada por $f^{-1}(y) = \log_a y$. Em particular, a função $f(x) = e^x$ é bijectiva e $f^{-1}(y) = \ln y$.

Gráfico da função inversa

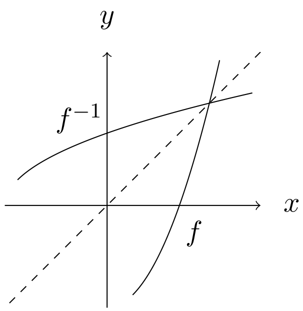
Seja $f : D \to E$ uma função bijectiva. Então os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à recta $y = x$.

Com efeito,

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in D,\ y \in E,\ f(x) = y\}$$

e

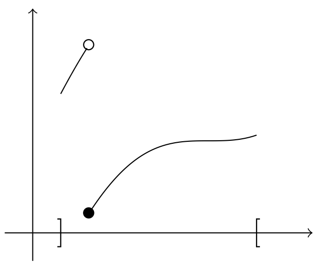
$$\begin{aligned} G_{f^{-1}} &= \{(y, x) \mid y \in E,\ x \in D,\ f^{-1}(y) = x\} \\ &= \{(y, x) \mid x \in D,\ y \in E,\ f(x) = y\}. \end{aligned}$$



Continuidade

Teorema

Seja f uma função contínua definida num intervalo. Então f é injectiva se e só se f é estritamente monótona.



função injectiva não monótona

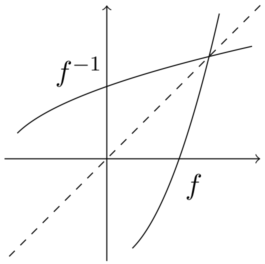
Corolário

Seja f uma função contínua e sobrejectiva, definida num intervalo. Então f é bijectiva se e só se f é estritamente monótona.

Continuidade

Teorema

Seja f uma função contínua e bijectiva, definida num intervalo. Então a função inversa f^{-1} é contínua. Se f for estritamente crescente, então f^{-1} é estritamente crescente. Se f for estritamente decrescente, então f^{-1} é estritamente decrescente.



Derivabilidade

Teorema

Seja f uma função bijectiva definida num intervalo I. Se f for derivável em $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} é derivável em $y = f(x)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Nota

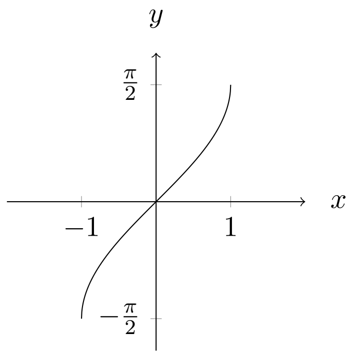
A fórmula para a derivada da função inversa pode ser encontrada derivando a relação $f(f^{-1}(y)) = y$:

$$\begin{aligned} (f(f^{-1}(y)))' &= y' \\ f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) &= 1 \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{aligned}$$

Funções trigonométricas inversas

A função $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ é bijectiva. A função inversa é chamada *arco seno* e é indicada por arcsen. A função $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é contínua e estritamente crescente. A função arco seno é derivável em $]-1, 1[$ e

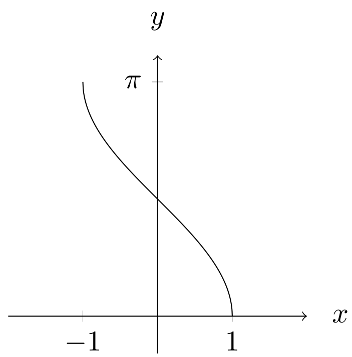
$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$



Funções trigonométricas inversas

A função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é bijectiva. A função inversa é chamada *arco cosseno* e é indicada por $\arccos$. A função $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ é contínua e estritamente decrescente. A função arco cosseno é derivável em $]-1, 1[$ e

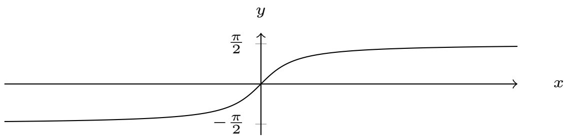
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$



Funções trigonométricas inversas

A função $\operatorname{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ é bijectiva. A função inversa é chamada *arco tangente* e é indicada por arctg. A função $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é derivável e estritamente crescente. A derivada da função arco tangente é dada por

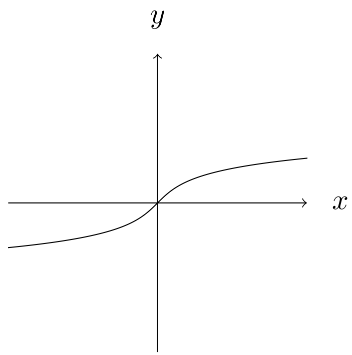
$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Funções hiperbólicas inversas

A função $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijectiva. A função inversa é chamada *argumento do seno hiperbólico* e é indicada por argsh. A função $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e estritamente crescente. A derivada da função argumento do seno hiperbólico é dada por

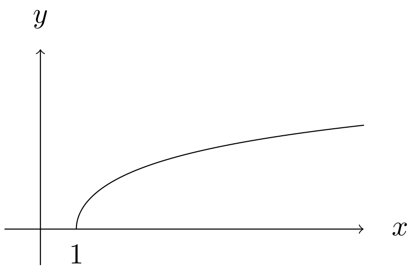
$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Funções hiperbólicas inversas

A função $\operatorname{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ é bijectiva. A função inversa é chamada *argumento do cosseno hiperbólico* e é indicada por argch. A função $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ é contínua e estritamente crescente. A função argumento do cosseno hiperbólico é derivável em $]1, +\infty[$ e

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1).$$



Funções hiperbólicas inversas

A função $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ é bijectiva. A função inversa é chamada *argumento da tangente hiperbólica* e é indicada por argth. A função $\operatorname{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ é derivável e estritamente crescente. A derivada da função argumento da tangente hiperbólica é dada por

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1).$$