Hipersuperfícies de nível

Raciocinando com funções vectoriais, em vez de funções escalares, podemos estender o conceito de linha de nível ou de superfície de nível.

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ uma função com derivadas parciais contínuas. Seja $\vec{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ e

nota: $f = (f_1, \dots, f_m)$

$$\Sigma_{(c_1, \dots, c_m)} = f^{-1}(\{(c_1, \dots, c_m)\})$$
$$= \{x \in \mathcal{U} : f(x) = (c_1, \dots, c_m)\}$$
$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U} : f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \wedge \dots \wedge f_m(x_1, \dots, x_n) = c_m\}$$

diz-se a hipersuperfície de nível $\vec{c}$ de f.

Dizemos que um ponto $x_0 \in \Sigma_{\vec{c}}$ é um ponto singular se a característica da matriz $J_{x_0} f$ não for máxima.

Observação: $J_{x_0} f \in \mathcal{M}_{m,n}$ e a sua característica (o número de vectores linha da matriz que são linearmente independentes, e que é igual ao número de vectores coluna que são linearmente independentes) é, no máximo, igual ao mínimo $\{m, n\}$.

Dada uma matriz A, com m linhas e n colunas, a sua característica é igual à dimensão da maior submatriz quadrada de A que tenha determinante diferente de zero.

Exemplos

Car(A) significa característica de A

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

A característica de A é no máximo 2, uma vez que A é uma matriz 2×3 e $Car(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$

Notem que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0$$

Como há uma submatriz quadrada de dimensão 2×2, que tem determinante não nulo, então $\text{car}(A)=2$.

Notem que a matriz $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}_{\text{2 1as colunas de A}}$ tem determinante zero mas há uma outra, a anterior, que tem determinante $\neq 0$.

2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

Notem que

$$\det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{\text{1ª coluna de A}} & \underbrace{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}}_{\text{2ª coluna de A}}\end{pmatrix}=0 \qquad \det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{\text{1ª coluna de A}} & \underbrace{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}}_{\text{3ª coluna de A}}\end{pmatrix}=0 \qquad \det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}}_{\text{2ª coluna de A}} & \underbrace{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}}_{\text{3ª coluna de A}}\end{pmatrix}=0,$$

isto é, as três submatrizes quadradas de dimensão 2 de A têm determinante zero. Então $\text{car}\, A<2$.

Será que $\text{car}\, A=1$? Para que esta afirmação seja verdadeira basta que uma submatriz quadrada de dimensão 1 de A tenha determinante diferente de zero.

Quais são as submatrizes quadradas de dimensão 1 de A?

Resposta:

$(1)\quad (2)\quad (3)$

$(1)\quad (2)\quad (3)$

Todas têm determinante diferente de zero, mas bastaria que uma delas tivesse determinante diferente de zero para que a característica fosse 1.

Quais as matrizes com característica zero? As únicas matrizes com característica zero são as matrizes nulas. Notem que há muitas matrizes nulas, por exemplo:

$$(0),\quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \ldots$$

<u>Exemplo</u>

Seja $f(x,y,z)=(xy,\ y-z)$

a) Determine os pontos (x,y,z) para os quais $\text{car}\, J_{(x,y,z)}f$ é máxima

$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

car $J_{(x,y,z)} f = 2 \iff \exists$ submatriz 2×2 com determinante $\neq 0$.

É mais fácil calcular

car $J_{(x,y,z)} f < 2 \iff \det\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{car } J_{(x,y,z)} f < 2\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

Então

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{car } J_{(x,y,z)} f = 2\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

b) Determine os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais car $J_{(x,y,z)} f = 1$

Queremos que $(x,y,z) \notin U$ e existe uma submatriz 1×1 de $J_{(x,y,z)} f$ com determinante não nulo

Submatrizes 1×1 de $J_{(x,y,z)} f$:

$(y) \quad (x) \quad (0)$

$(0) \quad (1) \quad (-1)$

Notem que $\det(1) = 1 \neq 0$. Então

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{car } J_{(x,y,z)} f = 1\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

Notem que car $J_{(x,y,z)} f > 0$ porque esta matriz nunca é a matriz nula, qualquer que seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo

Consideremos a função do exemplo anterior,

$f(x,y,z) = (xy, y-z)$ e a linha de nível

$\Sigma_{(1,2)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 1 \wedge y - z = 2\} = f^{-1}(\{(1,2)\})$

Vejamos se $\Sigma_{(1,2)}$ tem pontos singulares, i.e.,

$$\begin{cases} (x,y,z) \in \Sigma_{(1,2)} \\ \text{car } J_{(x,y,z)} f < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1 \\ y - z = 2 \\ x = y = 0 \text{ (visto no exemplo anterior)} \end{cases}$$

sistema impossível

Então $\Sigma_{(1,2)}$ não tem pontos singulares

Analogamente ao que já fizemos com as funções escalares, podemos definir, nos pontos não singulares de $\Sigma_C = f^{-1}(\{C\})$, sendo $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ e $C = (C_1, \dots, C_m)$, o hipeeplano normal a Σ_C em $x_0 \in \Sigma_C$

$$X = x_0 + \lambda_1 \nabla f_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(x), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$$

e o hipeeplano tangente a Σ_C pelas equações

$$\begin{cases} (X - x_0) \cdot \nabla f_1(x_0) = 0 \\ \vdots \\ (X - x_0) \cdot \nabla f_m(x_0) = 0 \end{cases}$$

Exemplo

$f(x,y,z,w) = (xzw, y^2+z^2)$

$\Sigma_{(1,2)} = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : xzw = 1 \wedge y^2+z^2 = 1 \}$

Comecemos por calcular os pontos singulares do $\Sigma_{(1,2)}$

$$J_{(x,y,z,w)} f = \begin{pmatrix} zw & 0 & xw & xz \\ 0 & 2y & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{car } J_{(x,y,z,w)} f < 2 \iff \det\begin{pmatrix} zw & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} zw & xw \\ 0 & 2z \end{pmatrix} = 0$$

$$\wedge \det\begin{pmatrix} zw & xz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} 0 & xw \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 0$$

$$\wedge \det\begin{pmatrix} 0 & xz \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} xw & xz \\ 2z & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2yzw = 0 \\ 2z^2w = 0 \iff z = 0 \vee w = 0 \\ 0 = 0 \\ -2xyw = 0 \\ -2xyz = 0 \\ -2xz^2 = 0 \end{cases}$$

notem que, se $z = 0$ ou $w = 0$ então $f(x,y,z,w) = (0, y^2) \neq (1,2)$

Então $\Sigma_{(1,2)}$ não tem pontos singulares

O ponto $(1,1,1,1) \in \Sigma_{(1,2)}$, uma vez que $f(1,1,1,1)=(1,2)$

Hipeeplano normal a $\Sigma_{(1,2)}$ em $(1,1,1,1)$:

$\nabla f_1(x,y,z,\omega) = (z\omega, 0, x\omega, xz)$ $\quad \nabla f_1(1,1,1,1)=(1,0,1,1)$

$\nabla f_2(x,y,z,\omega) = (0, 2y, 2z, 0)$ $\quad \nabla f_2(1,1,1,1) = (0,2,2,0)$

$(x,y,z,\omega) = (1,1,1,1) + \lambda_1(1,0,1,1) + \lambda_2(0,2,2,0)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Hipeeplano tangente a $\Sigma_{(1,2)}$ em $(1,1,1,1)$:

$$\begin{cases} ((x,y,z,\omega)-(1,1,1,1)) \cdot \nabla f_1(1,1,1,1)=0 \\ ((x,y,z,\omega)-(1,1,1,1)) \cdot \nabla f_2(1,1,1,1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1, y-1, z-1, w-1) \cdot (1,0,1,1)=0 \\ (x-1, y-1, z-1, w-1) \cdot (0,2,2,0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)+(z-1)+(\omega-1)=0 \\ 2(y-1)+2(z-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z+W=3 \\ 2y+2z=4 \end{cases}$$