Primitivas

Primitivas

Seja f uma função definida num intervalo I. Uma função derivável $F : I \to \mathbb{R}$ diz-se *primitiva* de f se, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemplos

- A função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Com efeito, $F'(x) = \frac{1}{2}2x = x$.
- A função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = -\cos x$ é uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$. Com efeito, $F'(x) = --\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$.
- A função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \operatorname{arctg} x$ é uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Com efeito, $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
- A função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{1}{2}x^2+3$ é uma primitiva da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Com efeito, $F'(x) = \frac{1}{2}2x+0 = x$.

Primitivas

Proposição

Sejam f uma função definida num intervalo I e $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então uma função $G : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f se e só se existir uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$, $G(x) = F(x) + C$.

Demonstração: "$\Rightarrow$" Seja $G\colon I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, $G' = f$. Então

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Como I é um intervalo, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G - F = C$, ou seja $G = F + C$.

"$\Leftarrow$" Se $G = F + C$, então $G' = F' = f$.

Exemplo

As primitivas da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ são as funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

O símbolo $\int f(x)dx$

Sejam f uma função definida num intervalo I e $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Vamos exprimir o facto de que as primitivas de f são as funções $G : I \to \mathbb{R}$ da forma $G(x) = F(x) + C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante, escrevendo

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, a fórmula

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

significa que as primitivas da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ são as funções $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Primitivas fundamentais

São válidas as seguintes fórmulas de primitivação em qualquer intervalo contido no domínio das funções:

1. $\int k\,dx = kx + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{R})$
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\alpha \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$
   Com efeito, se $I \subset]0,+\infty[$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
   Se $I \subset]-\infty,0[$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.
4. $\int e^x\,dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
5. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Primitivas fundamentais

6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
8. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
10. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
11. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
12. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Regras de primitivação: Linearidade

1. Sejam f e g duas funções definidas num intervalo I, F uma primitiva de f e G uma primitiva de g. Então a função $F + G : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f + g : I \to \mathbb{R}$.

   Exprimimos este facto também escrevendo

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. Sejam f uma função definida num intervalo I, F uma primitiva de f e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então a função $k \cdot F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $k \cdot f : I \to \mathbb{R}$.

   Exprimimos este facto também escrevendo

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

Regras de primitivação: Linearidade

Exemplo

Temos

$$\begin{aligned}
\int 6x^2 - 2x^4 dx &= \int 6x^2 dx + \int -2x^4 dx \\
&= 6\int x^2 dx - 2\int x^4 dx \\
&= 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{5}x^5 + C \\
&= 2x^3 - \frac{2}{5}x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Primitivas imediatas

Sejam I e J dois intervalos e $f : I \to J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis. Então

$$\int g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Exemplos

(i) $\displaystyle\int \cos(x^2)2x\,dx = ?$

$\cos(x^2)2x = g'(f(x))f'(x)$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g(y) = \operatorname{sen} y & g'(y) = \cos y \end{array}$$

Logo

$$\int \cos(x^2)2x\,dx = g(f(x)) + C = \operatorname{sen} x^2 + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

(ii) $\displaystyle\int 2\operatorname{sen} x \cos x\,dx = ?$

$2\operatorname{sen} x \cos x = g'(f(x))f'(x)$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & f'(x) = \cos x \\ g(y) = y^2 & g'(y) = 2y \end{array}$$

Logo

$$\int 2\operatorname{sen} x \cos x\,dx = g(f(x)) + C = \operatorname{sen}^2 x + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

(iii)

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplos

(iv)

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = ? \quad (u : I \to \mathbb{R} \text{ derivável})$$

(a) $u > 0$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \ln'(u(x)) \cdot u'(x) dx = \ln u(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) $u < 0$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{(-u)'(x)}{-u(x)} dx = \ln(-u(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Em ambos os casos,

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

(v)

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por partes

Sejam f e g deriváveis num intervalo I e H uma primitiva da função $f \cdot g' : I \to \mathbb{R}$. Então a função $f \cdot g - H$ é uma primitiva da função $f' \cdot g : I \to \mathbb{R}$.

Exprimimos este facto também escrevendo

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Nota

A primitivação por partes corresponde à derivação de um produto:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg' \\ \int f'g &= f \cdot g - \int fg'\end{aligned}$$

Exemplos

Primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$

(i) $\int x\text{sen}\, x\, dx = ?$

$\rightsquigarrow x\text{sen}\, x = f'(x)g(x)$

1. $f'(x) = x \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$
   $g(x) = \text{sen}\, x \quad g'(x) = \cos x$

$$\int x\text{sen}\, x\, dx = \frac{1}{2}x^2\text{sen}\, x - \int \frac{1}{2}x^2 \cos x\, dx$$

2. $f'(x) = \text{sen}\, x \quad f(x) = -\cos x$
   $g(x) = x \quad g'(x) = 1$

$$\begin{aligned}\int x\text{sen}\, x dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\, dx \\ &= -x\cos x + \text{sen}\, x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemplos

Primitivação por partes: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$

(ii) $\int (3x^2 + 7x)\text{ch}\, x\, dx = ?$

$f'(x) = \text{ch}\, x \quad f(x) = \text{sh}\, x$
$g(x) = 3x^2 + 7x \quad g'(x) = 6x + 7$

$$\begin{aligned}&\int (3x^2 + 7x)\text{ch}\, x\, dx \\ &= (3x^2 + 7x)\text{sh}\, x - \int (6x + 7)\text{sh}\, x\, dx \\ &= (3x^2 + 7x)\text{sh}\, x - \left((6x + 7)\text{ch}\, x - \int 6\text{ch}\, x\, dx\right) \\ &= (3x^2 + 7x)\text{sh}\, x - (6x + 7)\text{ch}\, x + 6\int \text{ch}\, x\, dx \\ &= (3x^2 + 7x)\text{sh}\, x - (6x + 7)\text{ch}\, x + 6\text{sh}\, x + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Exemplos

(iii)

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= \int 1 \cdot \ln x\, dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= x \ln x - \int 1\, dx \\ &= x \ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$