matrizes

Definição 2.1. Sejam m e n dois números inteiros positivos. Chama-se matriz real de ordem $m \times n$ (lê-se ordem m por n) ou matriz de ordem $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ a uma tabela em que mn números reais são dispostos em m linhas (de n elementos cada) e n colunas (de m elementos cada).

Representa-se por

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

notação

Notação 2.2. Quando conveniente, escrevemos a matriz A da definição anterior como

$$[a_{ij}] \ \ ou \ \ (a_{ij})$$

e referimos a_{ij} como o elemento na posição (i, j) de A, ou seja, o elemento na linha i e na coluna j de A. Iremos também usar a notação $(A)_{ij}$ para indicar tal elemento.

O conjunto das matrizes reais de ordem m por n representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ou por $\mathbb{R}^{m\times n}$.

$\mathcal{M}\left(\mathbb{R}\right)$ representa o conjunto de todas as matrizes (finitas) sobre $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^m$ denota $\mathbb{R}^{m\times 1}$.

exemplos

Exemplo 2.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×2.

Exemplo 2.4. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 1×3.

Exemplo 2.5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 4×3.

Observação 2.6. Do mesmo modo que definimos matrizes reais, podemos definir matrizes complexas. Para tal, basta considerar números complexos para os seus elementos. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes complexas de ordem $m \times n$ representa-se por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ ou por $\mathbb{C}^{m \times n}$.

matrizes iguais

Definição 2.7. Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Diz-se que as matrizes $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ e $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{p,q}$ são iguais, e escreve-se $A = B$, se $m = p$, $n = q$ e

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ quaisquer que sejam } i \in \{1, 2, ..., m\} \text{ e } j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Exemplo 2.8. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{3,3}$, com $b_{ij} = i^j$, são duas matrizes iguais.

Exemplo 2.9. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{4,2}$, com $b_{ij} = i^j$, **não** são duas matrizes iguais.

tipos de matrizes

Definição 2.10. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz de ordem $m \times n$ diz-se quadrada se $n = m$. Neste caso, diz-se que a matriz tem ordem n e escreve-se apenas n em vez de $n \times n$).

Exemplo 2.11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Exemplo 2.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Definição 2.13. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz de ordem $m \times n$ diz-se retangular se $n \neq m$.

tipos de matrizes

Definição 2.14. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz de ordem $n \times 1$ diz-se uma matriz coluna. Uma matriz de ordem $1 \times n$ diz-se uma matriz linha.

Exemplo 2.15. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna (de ordem 3×1) e a matriz $B = \begin{bmatrix} \pi & e & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz linha (de ordem 1×4).

Observação 2.16. É habitual recorrermos a letras minúsculas para representar matrizes coluna e matrizes linha, assim como é habitual omitirmos o índice 1 comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respetivamente.

elementos diagonais

Definição 2.17. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chamamos elementos diagonais ou elementos da diagonal da matriz $[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ aos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$, onde $k = min\{m, n\}$.

Exemplo 2.18. Os elementos diagonais de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ são 1 e -2, e os da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ são 1 e 5.

tipos especiais de matrizes

Definição 2.19. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ diz-se diagonal se $a_{ij} = 0$ para quaisquer $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

Exemplo 2.20. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal.

tipos especiais de matrizes

Definição 2.21. Seja $n \in \mathbb{N}$. A matriz identidade de ordem n representa-se por I_n e é a matriz diagonal de ordem n com elementos diagonais iguais a 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.22. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

tipos especiais de matrizes

Definição 2.23. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ diz-se triangular superior se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.24. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior.

tipos especiais de matrizes

Definição 2.25. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ diz-se triangular inferior se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.26. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ é triangular inferior.

Observação 2.27. As únicas matrizes quadradas que são simultaneamente triangulares superiores e triangulares inferiores são as matrizes diagonais.

matriz nula

Definição 2.28. A matriz nula de ordem $m \times n$, $0_{m\times n}$, é a matriz com m linhas e n colunas cujos elementos são todos iguais a 0. Não havendo ambiguidade, representamos $0_{m\times n}$ por 0.

Exemplo 2.29. $0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

soma e produto escalar

$A = [a_{ij}]\,, B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}\,(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Definição 2.30. A soma das matrizes A e B é a matriz $m \times n$ $A + B$ cujo elemento na posição (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$.

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

Definição 2.31. O produto da matriz A pelo escalar α é a matriz $m \times n$ αA cujo elemento na posição (i, j) é $\alpha\, a_{ij}$.

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$$

Exemplos 2.32.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0+4 & 1+5 & -2+6 \\ 1+6 & -3+7 & 4+8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

soma e produto escalar

Exemplos 2.33.

$$5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 1 & 5\times 2 \\ 5\times 3 & 5\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$13\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\times 1 & 13\times 0 \\ 13\times 2 & 13\times(-1) \\ 13\times 0 & 13\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 26 & -13 \\ 0 & 26 \end{bmatrix}$$

soma e produto escalar

Observação 2.34. Não está definida a soma de duas matrizes que não sejam da mesma ordem.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

soma e produto escalar

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

propriedades da soma

Teorema 2.35. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* A, B *e* C *matrizes reais de ordem* $m \times n$. *Então,*

i) $A + B = B + A$ (a soma de matrizes é comutativa);

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (a soma de matrizes é associativa);

iii) $0_{m\times n} + A = A$ (a matriz nula é o elemento neutro da adição);

iv) *existe uma matriz* A' *tal que* $A + A' = 0_{m\times n}$ (cada matriz admite simétrico).

Notação 2.36. A matriz A' do teorema anterior representa-se por $-A$. Dadas duas matrizes A e B com a mesma ordem, representa-se por $A - B$ a soma de matrizes $A + (-B)$.

propriedades do produto escalar

Teorema 2.37. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$, A *e* B *duas matrizes de ordem* $m \times n$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) $(\alpha\beta)\, A = \alpha\,(\beta A)\,;$

ii) $(\alpha + \beta)\, A = \alpha A + \beta A;$

iii) $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B;$

iv) $1 \cdot A = A.$

produto matricial

Definição 2.38. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ duas matrizes reais.

Chama-se produto de A por B à matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{i\,p-1}b_{p-1\,j} + a_{ip}b_{pj}. \end{aligned}$$

Neste caso, escreve-se $C = AB$.

produto matricial

Exemplo 2.39. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1\times 7+2\times 11 & 1\times 8+2\times 12 & 1\times 9+2\times 13 & 1\times 10+2\times 14 \\ 3\times 7+4\times 11 & 3\times 8+4\times 12 & 3\times 9+4\times 13 & 3\times 10+4\times 14 \\ 5\times 7+6\times 11 & 5\times 8+6\times 12 & 5\times 9+6\times 13 & 5\times 10+6\times 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 29 & 32 & 35 & 38 \\ 65 & 72 & 79 & 86 \\ 101 & 112 & 123 & 134 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe-se que a matriz resultante é uma matriz 3×4 (tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B).

produto matricial

Exemplo 2.40. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$. Então, BA não está definido, pois o número de colunas de B não coincide com o número de linhas de A.

Exemplo 2.41. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1-2+3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 1 + 2\times 1 & 1\times 0 + 2\times(-1) \\ -1\times 1 + 1\times 0 & -1\times 1 + 1\times 1 & -1\times 0 + 1\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

DC não está definido!

produto matricial

Teorema 2.42. *Sejam A, B e C matrizes e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, sempre que as seguintes operações estejam definidas, tem-se que:*

i) $(AB)\,C = A\,(BC)\,;$

ii) $A\,(B + C) = AB + AC;$

iii) $(A + B)\,C = AC + BC;$

iv) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)\,.$

produto matricial

Observação 2.43. O produto matricial não é, em geral, comutativo. De facto, se $m, n, p \in \mathbb{N}$, A é uma matriz de ordem $m \times p$ e B é uma matriz de ordem $p \times n$, o produto AB não é, no geral, igual a BA. Na verdade, podemos ter 3 situações:

1) Se $m \neq n$, o produto AB está definido e é uma matriz de ordem $m \times n$, mas o produto BA não está definido.

2) Se $m = n$ mas $m \neq p$, estão o produto AB está definido e é de ordem m, mas o produto BA, embora também definido, é de ordem p, pelo que os produtos não podem ser iguais.

3) Se $m = n = p$, os produtos AB e BA estão definidos e são ambos de ordem m, mas não significa que sejam necessariamente iguais.

Exemplo 2.44. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

propriedades do produto matricial

Observação 2.45. A lei do anulamento do produto também não é válida, em geral, no produto matricial.

Exemplo 2.46.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

sem que um dos factores seja nulo.

$$AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$