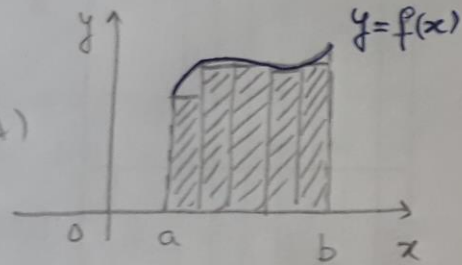
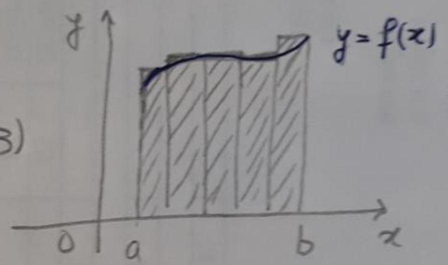
Integrais duplos

Recordemos que, se temos uma função $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ contínua e positiva, definimos o <u>integral de f entre a e b</u> por aproximação, do seguinte modo:

(A)


Soma inferior

(B)


Soma superior

dividindo o intervalo $[a,b]$ em vários sub-intervalos contíguos, calculando a soma das áreas dos rectângulos. Na figura (A) obtemos uma aproximação da área abaixo do gráfico de f e na (B) uma aproximação por excesso.

É fácil perceber que se os sub-intervalos em que dividimos $[a,b]$ tiverem amplitudes que tendem para zero, obtemos um valor comum para o limite das "somas inferiores" e das "somas superiores". É a esse valor comum que chamamos o <u>integral definido de f entre a e b</u>, que se denota por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área abaixo de } G_f, \quad \text{se } f \geq 0.$$

Sabemos, para além disso, que se $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva de f (isto é, $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b]$) então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{notação}}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)}$$

Queremos generalizar a noção de integral a funções de duas variáveis definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Mas enfrentamos uma dificuldade: em $\mathbb{R}$ integramos em intervalos, em $\mathbb{R}^2$ há uma imensidão de domínios!

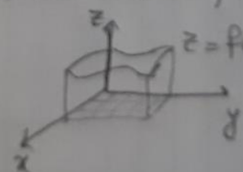
Por este motivo, comecemos por domínios rectangulares, isto é conjuntos do tipo

$$R=[a,b]\times[c,d] \quad \text{e} \quad \begin{aligned} f:\ [a,b]\times[c,d] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)\end{aligned}$$

Como definir $\iint_R f(x,y)\,d(x,y)$?

E qual o significado geométrico deste integral, pelo menos quando $f\geq 0$?

Basicamente, vamos proceder do mesmo modo, isto é, vamos decompor o domínio R em pequenos rectângulos



e calculamos a soma dos

volumes dos paralelipípedos com base igual a cada um desses rectângulos e com altura igual à maior altura abaixo do gráfico de f nesse rectângulo (no caso das somas inferiores) e à menor altura acima do gráfico de f nesse rectângulo (no caso das somas superiores).

Fazendo as dimensões dos rectângulos tenderem para zero, obtemos que

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \text{Volume abaixo do gráfico de } f \text{, se } f \geq 0$$

Usamos dois integrais porque temos duas variáveis. Vejamos como podemos calcular este integral

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \circledast$$

> NOTA IMPORTANTE: Tal como nas notações das derivadas parciais de ordem superior, há uma ordem a respeitar quando colocamos os limites de integração!

Podemos calcular $\int_c^d f(x,y)\,dy$, pensando que $f(x,y)$ é uma função de y, em que consideramos x constante, tal como fazemos para calcular derivadas parciais. Então se $F(x,y)$ é uma primitiva de $f(x,y)$ em ordem a y, isto é, se pensarmos em x como uma variável que fixámos, chamemos-lhe x_0, então $\frac{d}{dy}F(x_0,y) = f(x_0,y)$.

Aqui escrevemos $\frac{d}{dy}F(x_0,y)$ em vez de $F'(x_0,y)$ por uma questão de clareza. Então

$$\circledast = \int_a^b \Big[F(x,y) \Big]_{y=c}^{y=d} dx = \int_a^b \big(F(x,d) - F(x,c) \big)\, dx$$

que é um integral simples (isto é, de uma única variável), que sabemos calcular.

Por outro lado,

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d \Big[G(x,y)\Big]_{x=a}^{x=b} dx$$

$$= \int_c^d \big(G(b,y) - G(a,y)\big)\,dy$$

se G for uma primitiva de f considerando y fixado, ou seja $\frac{d}{dx}G(x,y) = f(x,y_0)$

nós sabemos calcular este último integral, uma vez que ele só depende da variável y.

Mas isto levanta uma questão: será que

$$\int_c^d \big(G(b,y) - G(a,y)\big)\,dy = \int_a^b \big(F(x,d) - F(x,c)\big)\,dx\ ?$$

Mas a resposta é SIM!

Se assim não fosse, a definição dada não seria correcta.

Não vamos ver a prova deste facto, mas vejamos um exemplo.

<u>Exemplo</u>: $f : [1,2]\times[0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto xy^2$$

$$\iint_{[1,2]\times[0,3]} xy^2\,d(x,y) = \int_1^2\left(\int_0^3 xy^2\,dy\right)dx = \int_1^2\left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3} dx = \int_1^2 (9x - 0x)\,dx = \left[\frac{9x^2}{2}\right]_1^2 = 18 - \frac{9}{2} = \ldots$$

$$= \int_0^3\left(\int_1^2 xy^2\,dx\right)dy = \int_0^3\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^3\left(2y^2 - \frac{y^2}{2}\right)dy = \int_0^3 \frac{3}{2}y^2\,dy = \left[\frac{\cancel{3}}{2}\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_0^3$$

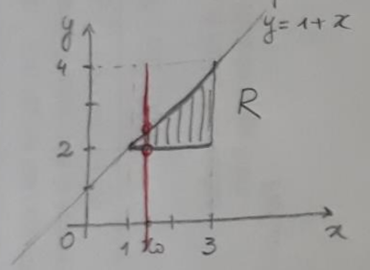
$$= \frac{27}{2} - \frac{0}{2} = \frac{27}{2}$$

O que acontece em domínios não rectangulares?

Vamos tentar perceber primeiro um exemplo particular.

<u>Exemplo</u>: Seja $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 3 \ \wedge\ 2\leq y\leq x+1\}$ e $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto xy-y^2$

Comecemos por representar o conjunto R



Reparem que x varia entre 1 e 3 e, se fixar $x_0\in[1,3]$, verificamos que y varia entre 2 e $1+x_0$ (olhem para a reta $x=x_0$, representada a vermelho na figura ao lado). Devemos olhar para o valor de y em que entramos no conjunto a tracejado ($y=2$) e para o valor de y em que saímos do conjunto a tracejado ($y=1+x_0$), quando caminhamos na recta a vermelho, de baixo para cima

Então

$$\iint_R (xy-y^2)\,d(x,y) = \int_1^3\left(\int_2^{1+x}(xy-y^2)\,dy\right)dx$$

$$=\int_1^3\left[x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{y=2}^{y=1+x}dx$$

$$=\int_1^3\left[\left(\frac{x(1+x)^2}{2}-\frac{(1+x)^3}{3}\right)-\left(2x-\frac{8}{3}\right)\right]dx$$

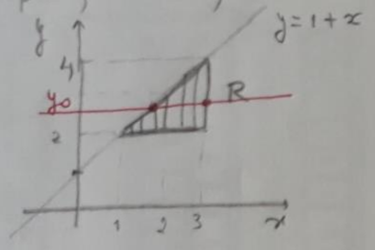
$$=\int_1^3\left[\left(\frac{1}{2}x(1+2x+x^2)-\frac{1}{3}(1+3x+3x^2+x^3)\right)-\left(2x-\frac{8}{3}\right)\right]dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x+\cancel{x^2}+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}-x-\cancel{x^2}-\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{8}{3}\right)$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x+\frac{7}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{6}\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{7}{3}x\right]_1^3=\left[\frac{x^4-30x^2+56x}{24}\right]_1^3=\frac{-48}{24}=-2$$

Notem que a utilização do x_0 (acima) foi meramente auxiliar, para nos lembrar que o x está, temporariamente, fixado.

Vejamos agora como proceder para inverter a ordem de integração neste exemplo, isto é, calcular primeiro o integral na variável x e de seguida na variável y.



Notem que:

- o valor mínimo que y toma é 2 e o máximo é 4
- $y = 1 + x \iff x = y - 1$
- se eu fixar $y_0 \in [2,4]$ e percorrer a recta $y = y_0$, desenhada a vermelho na figura ao lado, entro em R quando $x_0 = y_0 - 1$ e saio de R quando $x_0 = 3$.

Então

$$\iint_R (xy - y^2)\, d(x,y) = \int_2^4 \left(\int_{y-1}^{3} (xy - y^2)\, dx \right) dy$$

$$= \int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} y - x y^2 \right]_{x=y-1}^{x=3} dy$$

$$= \int_2^4 \left(\left(\frac{9}{2} y - 3y^2 \right) - \left((y-1)^2 \frac{y}{2} - (y-1) y^2 \right) \right) dy$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{9}{2} y - 3y^2 - \frac{y^3}{2} + \cancel{y^2} - \frac{y}{2} + y^3 - \cancel{y^2} \right) dy$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{y^3}{2} - 3y^2 + 4y \right) dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{8} - y^3 + 2y^2 \right]_2^4 = (16 - 48 + 32) - (2 - 8 - 8)$$

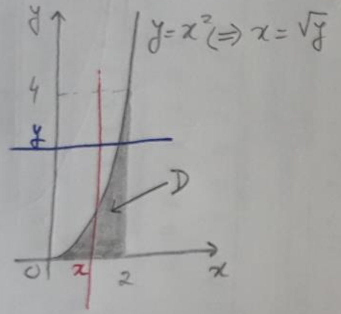
$$= 0 - 2$$

$$= -2$$

notem que a utilização de x_0 em vez de x nas explicações acima foi apenas para vos recordar que estamos a considerar x fixo

Vejamos, para finalizar, um exercício da Folha 5.

Exercício 3-a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\}$, $f(x,y) = xy$



- Variação total de x: $\boxed{0 \leq x \leq 2}$

  Variação de y, fixado x (recta a vermelho): $\boxed{0 \leq y \leq x^2}$

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^2 \int_0^{x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^5}{2} - 0\right) dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^2$$

$$= \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

ou

- Variação total de y: $0 \leq y \leq 4$

  Variação de x, fixado y (recta a azul): $\sqrt{y} \leq x \leq 2$

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 xy\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{\sqrt{y}}^2 dy$$

$$= \int_0^4 \left(2y - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{6}\right]_0^4$$

$$= 16 - \frac{64}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$