

Cálculo Vetorial

2^o teste

26.05.2021

Justifique todas as respostas.

Exercício 1. [3,5 valores] Sejam $u(x, y) = x \cos(y)$, $x(s, t) = s^2 t^2$ e $y(s, t) = s^2 + t^2$.

- Seja $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$. Calcule $J_{(s,t)} f$.
- Sem calcular a função composta, calcule $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Exercício 2. [6,0 valores] Considere o integral

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} 2x \, dx \, dy.$$

- Esboce o subconjunto de \mathbb{R}^2 definido pelos limites de integração de I .
- Inverta a ordem de integração.
- Calcule o integral I em coordenadas cartesianas, usando a ordem de integração que entender.
- Escreva o integral I usando coordenadas polares (não calcule o integral).

Exercício 3. [5,0 valores] Considere $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ e o integral

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2) d(x, y, z).$$

- Explicita I em coordenadas cartesianas.
- Explicita I em coordenadas cilíndricas.
- Calcule o integral, usando as coordenadas que entender.

Exercício 4. [3,5 valores] Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + 1, xz + 1, xy + 1 + 2z)$.

- Calcule diretamente $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, sendo c o segmento de reta que une o ponto $(1, 1, 0)$ ao ponto $(0, 1, 1)$.
- Mostre que \mathbf{F} é um campo de vetores conservativo.

Exercício 5. [2,0 valores] Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^4 + y^4 \leq 1\}$.

Calcule

$$\iiint_V x^3 y \, d(x, y, z).$$

Sugestão: Pode usar a mudança de variável $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z = z$.

FIM
BOA SORTE