Definição 11.1. Sejam V e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente. Uma aplicação linear, ou transformação linear, de V em W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz, para $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$,

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$;
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Exemplo 11.2. Consideremos as funções

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y, 0, y) \end{array}, \quad G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2, 1, |x|, y). \end{array}$$

Vejamos que F é linear mas G não o é.

Dados $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} F(u_1 + u_2) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, 0, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0, y_1) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2, 0, y_2) \\ &= F(u_1) + F(u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\alpha u_1) &= F(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (\alpha x_1 - \alpha y_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1, 0, \alpha y_1) \\ &= \alpha(x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0, y_1) \\ &= \alpha F(u_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(-(1,1)) &= G(-1,-1) = ((-1)^2 + (-1)^2, 1, |-1|, -1) = (2,1,1,-1) \\ &\neq -(2,1,1,1) = -(1^2 + 1^2, 1, |1|, 1) = -G(1,1) \end{aligned}$$

Proposição 11.3. Sejam V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, W um subespaço de $\mathbb{R}^m$ e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então

1. $T(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$
2. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$;
3. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n), \forall v_i \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$;

Observação 11.4. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^m$. Então, $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2, \ldots, T(v_n) = w_n$ define uma única aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$: $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n$.

Observação 11.5. Qualquer matriz A do tipo $m \times n$ define uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $T(x) = Ax$.

Exemplo 11.6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz A define a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ -x - y \end{bmatrix}.$$

Usando a notação mais habitual no contexto das funções,

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, -x - y).$$

Todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ podem ser representadas por matrizes do tipo $m \times n$.

Exemplo 11.7. Consideremos a base canónica $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base canónica $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Consideremos a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (4,-1) \\ T(0,1,0) &= (-2,5) \\ T(0,0,1) &= (3,-2) \end{aligned}$$

A aplicação T está bem definida desta forma.De facto, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sabemos que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

e, consequentemente, $T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1)$, ou seja,

$$T(x,y,z) = (4x - 2y + 3z, -x + 5y - 2z).$$

Em alternativa, podemos representar T através de uma matriz. Atendendo a que

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) & = & (4,-1) = 4(1,0) - 1(0,1) \\ T(0,1,0) & = & (-2,5) = -2(1,0) + 5(0,1) \\ T(0,0,1) & = & (3,-2) = 3(1,0) - 2(0,1) \end{array}$$

a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

e, para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Escrevemos

$$M_{B_1,B_2}(T) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 11.8. Consideremos, agora, a base canónica B_1 de $\mathbb{R}^3$ e a base canónica B_2 de $\mathbb{R}^4$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,1,0,0) \\ T(0,1,0) &= (1,1,1,1) \\ T(0,0,1) &= (0,0,1,3) \end{aligned}$$

Representemos T através de uma matriz. Atendendo a que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 2(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1) \\ T(0,1,0) &= 1(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1) \\ T(0,0,1) &= 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1) \end{aligned}$$

a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ é

$$M_{B_1,B_2}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = M_{B_1,B_2}(T) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ora,

$$M_{B_1,B_2}(T) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \\ y + z \\ y + 3z \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + y, y + z, y + 3z).$$

Observação 11.9. Quando as bases consideradas não são as bases canónicas, determinar a matriz que representa uma dada aplicação linear em relação a tais bases pode ser bem mais complicado.

Exemplo 11.10. Consideremos a base $B_1 = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base $B_2 = \{(2,1),(-1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Vamos determinar a matriz $M_{B_1,B_2}(T)$ que representa $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, com $T(x,y,z) = (x-y, x+y+z)$, nas bases apresentadas.
Começamos por calcular as imagens dos elementos da base de $\mathbb{R}^3$ escolhida:

$$\begin{aligned} T(0,1,1) &= (-1,2) = v_1 \\ T(1,1,0) &= (0,2) = v_2 \\ T(1,0,1) &= (1,2) = v_3 \end{aligned}$$

De seguida encontramos as coordenadas de v_1, v_2, v_3 relativamente à base de $\mathbb{R}^2$ que fixámos.

Ou seja, encontramos as soluções dos sistemas possíveis determinados

$$Ax = v_1,\ Ax = v_2,\ Ax = v_3, \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

As soluções dos três sistemas referidos são (pela ordem apresentada)

$$\begin{bmatrix} -1/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz que representa T em relação às bases apresentadas é

$$M_{B_1,B_2}(T) = \begin{bmatrix} -1/7 & 2/7 & 5/7 \\ 5/7 & 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}.$$

Usando esta matriz podemos calcular a imagem, por T, de qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$. Consideremos, por exemplo, o elemento $(1,1,2)$. Como

$$(1,1,2) = 1.(0,1,1) + 0.(1,1,0) + 1.(1,0,1),$$

temos

$$T(1,1,2) = \begin{bmatrix} -1/7 & 2/7 & 5/7 \\ 5/7 & 4/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 8/7 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$T(1,1,2) = 4/7(2,1) + 8/7(-1,3) = (0,4).$$

Teorema 11.11. Se fixamos uma base B_1 de U e uma base B_2 de V, a aplicação linear $T : U \longrightarrow V$ fica perfeitamente definida por $m \times n$ escalares. Ou seja, a aplicação linear $T : U \longrightarrow V$ fica perfeitamente definida por uma matriz do tipo $m \times n$

$$M_{B_1,B_2}(T)$$

cujas colunas são as coordenadas das imagens, por T, dos vectores da base B_1 de U, em relação à base B_2 de V.

Teorema 11.12. Se $G : U \longrightarrow V$ e $H : V \longrightarrow W$ são aplicações lineares, então $H \circ G$ é uma aplicação linear.

Se fixarmos uma base B_1 de U, uma base B_2 de V e uma base B_3 de W, então

$$M_{B_1,B_3}(H \circ G) = M_{B_2,B_3}(H)M_{B_1,B_2}(G).$$

Definição 11.13. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ funções. Definimos a **soma de** f **e** g como sendo a função $f + g : X \longrightarrow Y$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X.$$

Teorema 11.14. Se $F : U \longrightarrow V$ e $G : U \longrightarrow V$ são aplicações lineares, então $F + G$ é uma aplicação linear.

Se fixarmos uma base B_1 de U e uma base B_2 de V, então

$$M_{B_1,B_2}(F + G) = M_{B_1,B_2}(F) + M_{B_1,B_2}(G).$$