Problemas de electroestática

Ricardo Mendes Ribeiro

9 de Fevereiro de 2021

Electroestática

Campo electroestático

1. Um campo vectorial é definido pelas equações:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{k}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_y & \text{para } y > a \\ \frac{3k}{\varepsilon_0}\left(1 + \dfrac{y}{a}\right)\boldsymbol{e}_y & \text{para } 0 < y < a \\ -\frac{k}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_y & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

   Verificar se pode tratar-se de um campo electroestático e determinar a distribuição de cargas que cria este campo.

   R: [1]

2. Um campo eléctrico é dado, em coordenadas cilíndricas, por:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} E_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\boldsymbol{e}_r & \text{para } 0 < r < a \\ 0 & \text{no resto do espaço} \end{cases}$$

   Determinar a distribuição de cargas que cria este campo e o potencial eléctrico em todo o espaço.

   R: [2]

3. (a) Duas cargas q estão localizadas a uma distância d de cada lado de uma terceira carga Q. Qual deveria ser o valor da carga Q para que o sistema esteja em equilíbrio (instável)?

   (b) Considere agora três cargas q a uma distância d da carga Q, e equidistantes entre si, de modo que as três cargas q estão nos vértices de um triângulo equilátero. Qual deveria ser o valor da carga Q para que o sistema esteja em equilíbrio (instável)?

   R: [3]

4. Uma carga $2q$ está na origem dos eixos coordenados e uma carga $-q$ está colocada na posição $x = a$, no eixo dos x.

   (a) Determine o ponto onde o campo eléctrico é zero.

   (b) Considere uma linha perpendicular ao eixo dos x e que passa pela carga $-q$. Determine aproximadamente em que ponto dessa linha o campo é paralelo ao eixo dos x.

   R: [4]

5. Doze cargas iguais q estão colocadas nos cantos de um polígono regular de 12 lados.

   (a) Qual é a força total que sente uma carga de prova Q colocada no centro do polígono?

   (b) Suponha que retira uma das cargas. Qual é a força na carga de prova Q?

   (c) Suponha agora que temos treze cargas colocadas num polígono regular de treze lados. Qual é a força total que sente uma carga de prova Q colocada no centro do polígono?

   (d) Se retirar uma das treze cargas, qual é a força em Q?

   R: [5]

6. (a) Determine o campo eléctrico (módulo e direcção) a uma distância z acima do ponto médio (na **bissetriz**) entre duas cargas iguais q, distanciadas de d. Verifique que a sua resposta é consistente com o que espera quando $z >> d$.

   (b) Repita a parte (a), mas com uma das cargas q com o sinal diferente da outra.

   R: [6]

7. Determine o campo eléctrico a uma distância z do ponto médio de um segmento de **linha de carga** de comprimento $2L$, que contém uma densidade de carga linear uniforme λ. (Ter em conta: $\int \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha^2(\alpha^2 + x^2)^{1/2}}$)

   R: [7]

8. Determine o campo eléctrico a uma distância z acima de um dos extremos de um **segmento de recta** de comprimento L, que contém uma densidade de carga uniforme λ. Verique que a sua resposta é consistente com o que espera quando $z >> L$.

   R: [8]

9. Determine o campo eléctrico a uma distância z acima do centro de uma **linha em quadrado** de lado a, que contém uma densidade de carga uniforme λ.

   R: [9]

10. Determine o campo eléctrico a uma distância z acima do centro de uma **linha circular** de raio R, que contém uma densidade de carga uniforme λ.

    R: [10]

11. Determine o campo eléctrico a uma distância z acima do centro de um **disco circular** de raio R, que contém uma densidade de carga uniforme σ. O que acontece quando $R \to \infty$? E quando $z >> R$?

    R: [11]

12. Determine o campo eléctrico a uma distância z do centro de uma **superfície esférica** de raio R, que contém uma densidade de carga uniforme σ. Trate os casos em que $z < R$ e $z > R$ separadamente. Exprima o resultado em termos da carga total da superfície q. (Sugestão: use a lei dos cossenos para escrever a distância r em termos de R e de θ; atenção que a raiz tem de ser positiva)

    R: [12]

13. Use o resultado do problema anterior para determinar o campo eléctrico dentro e fora de uma **esfera** de raio R, com uma densidade volumétrica de carga ρ. Exprima o resultado em termos da carga total da esfera Q.

    R: [13]

14. (a) Considere um **cilindro ôco** semi-infinito com raio R e uma densidade de carga superficial uniforme σ. Qual é o campo eléctrico no centro da face do extremo do cilindro?

    (b) Use o resultado anterior para calcular o campo eléctrico no mesmo ponto mas de um **cilindro sólido**, com uma densidade de carga volúmica uniforme ρ, que pode ser considerada como construída a partir de muitas camadas cilíndricas ôcas.

    R: [14]

15. Uma **concha hemisférica** tem um raio R e uma densidade de carga superficial σ. Determine o campo eléctrico em qualquer ponto do eixo de simetria da concha.

    R: [15]

16. (a) Cortou-se um **buraco circular** de raio R numa folha plana muito grande com uma densidade de carga uniforme σ. Qual é o campo eléctrico em cada ponto de uma linha perpendicular ao plano, passando pelo centro do buraco? (Sugestão: considere o plano como consistindo de muitos aneis concêntricos.)

    (b) Se uma carga $-q$ for colocada nessa linha muito próximo do centro do buraco, mostre que a carga fica com um movimento oscilatório, e determine a frequência

ω dessas oscilações. Qual o valor de ω para uma massa $m = 0.001$ kg, $-q = -10^{-8}$ C, $\sigma = 10^{-6}$ C/m^2 e $R = 0.1$ m.

(c) Se uma carga $-q$ for largada a partir do repouso na mesma linha perpendicular a uma distância z do plano, com que velocidade passa pelo buraco? Como fica a resposta para grandes z, comparado com R?

R: [16]

17. Uma nuvem de trovoada cria um campo eléctrico na atmosfera que tem um valor de 3000 V/m junto ao solo.

    (a) Quanta carga tem a núvem, em coulombs por metro quadrado de área horizontal? Assuma que a núvem é grande comparada com a altura ao solo.

    (b) Suponha que existe água suficiente na núvem com a forma de gotas de 1 mm de diâmetro para chover 0.25 cm, e que são as gotas que transportam a carga. Qual é o valor do campo eléctrico na superfície das gotas?

R: [17]

18. Considere duas folhas paralelas, cada uma tendo uma grande área A e separadas por uma pequena distância l, com cargas superficiais σ e $-\sigma$. Qual o trabalho necessário para afastar as duas folhas de uma distância pequena x?

    R: [18]

Energia electroestática

19. Qual é a energia electroestática de uma esfera de raio R carregada uniformemente com uma carga total Q?

    R: [19]

20. Calcular a energia electroestática de uma esfera condutora isolada, de raio R, carregada com uma carga total Q.

    Qual seria o raio do electrão se a sua energia de repouso $E_0 = mc^2$ for puramente electroestática, assumindo-o como uma superfície esférica carregada ou como uma esfera uniformemente carregada?

    R: [20]

Momentos dipolares

21. Calcule o momento dipolar de uma distribuição superficial esférica de carga de raio R cuja densidade é

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

sendo θ o ângulo polar.

R: [21]

22. Prove que um cubo com uma densidade de carga uniforme tem um momento dipolar eléctrico nulo. Tome como origem o centro do cubo.

R: [22]

23. Considere uma distribuição de cargas pontual localizadas nos vértices de um cubo de lado a do seguinte modo:

$(0,0,0)$	$-3q$
$(a,0,0)$	$-2q$
$(a,a,0)$	$-q$
$(0,a,0)$	q
$(0,a,a)$	$2q$
(a,a,a)	$3q$
$(a,0,a)$	$4q$
$(0,0,a)$	$5q$

   (a) Calcule os momento monopolar, dipolar e quadripolar desta distribuição de cargas em relação à origem $(0,0,0)$.

   (b) Determinar a posição para a qual o momento dipolar é nulo.

R: [23]

24. Um dipolo de momento dipolar $\boldsymbol{p}$ está localizado na origem. Mostre que o campo eléctrico é dado por:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}]$$

Soluções

Notes

[1] $\rho = \frac{3k}{a}$; $\sigma_e = 4k$; $\sigma_d = -5k$

[2] $\rho = 4\epsilon_0 E_0 \frac{r^2}{a^3}$; $\sigma = -\epsilon_0 E_0$

[3] $Q = -\frac{q}{4}$; $Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$

[4] $d = (2+\sqrt{2})a$; $y = a(2^{2/3}-1)^{-1/2}$

[5] $F = 0$; $F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{d^2}$; $F = 0$; $F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{d^2}$

[6] $E = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} z \left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{-3/2}$; $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$

[7] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2+L^2}}$

[8] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{z^2+L^2}} - \frac{\lambda}{2z}\right)$

[9] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4za\lambda}{\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)\left(\frac{a^2}{2}+z^2\right)^{1/2}}$

[10] $E = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$

[11] $E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$

[12] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}$ para $z > R$; $E = 0$ para $z < R$

[13] $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ para $z > R$; $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$ para $z < R$

[14] $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; $E = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$

[15] $E = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}-1}\right)$ para $z < R$; $E = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}+1}\right)$ para $z > R$

[16] $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$; $\omega = \sqrt{\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 mR}} = 2.4$ rad/s; $v = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-R\right)}$

[17] $\sigma = \epsilon_0 E = 2.7\times10^{-8}$; 200 V/m

[18] $W = \frac{\sigma^2 Ax}{2\epsilon_0}$

[19] $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$

[20] $\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$; 1.4×10^{-15} m; 1.68×10^{-15} m

[21] $\boldsymbol{p} = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0 \boldsymbol{e}_z$

[22] $\boldsymbol{p} = 0$

[23] $Q = 9q$; $\boldsymbol{p} = qa(4\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 14\boldsymbol{e}_z)$; $Q_{xx} = -11qa^2$; $Q_{yy} = -8qa^2$; $Q_{zz} = 19qa^2$; $Q_{xy} = Q_{yx} = 6qa^2$; $Q_{xz} = Q_{zx} = 21qa^2$; $Q_{yz} = Q_{zy} = 15qa^2$; $\boldsymbol{R}_c = \frac{a}{9}(4\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 14\boldsymbol{e}_z)$