Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Electrónica Industrial

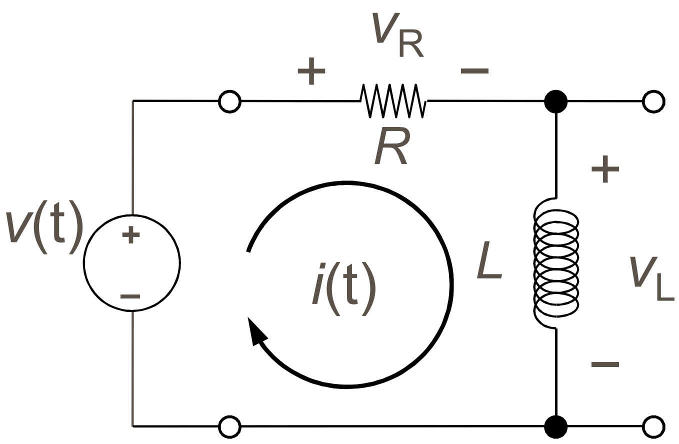
Análise de Circuitos

Circuitos *RC*, *RL* e *RLC*

Circuitos *RC* e *RL*

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ **Análise de circuitos lineares para sinais de qualquer forma de onda**



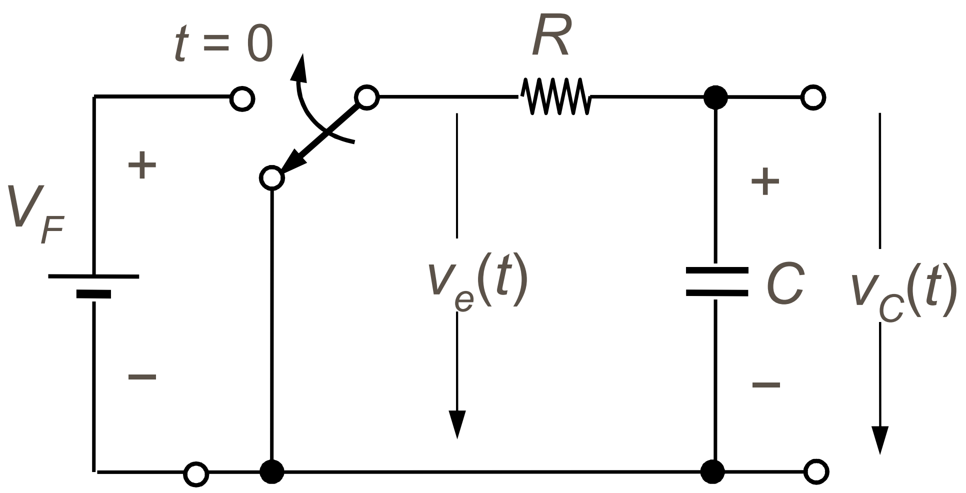
$$v = v_R + v_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

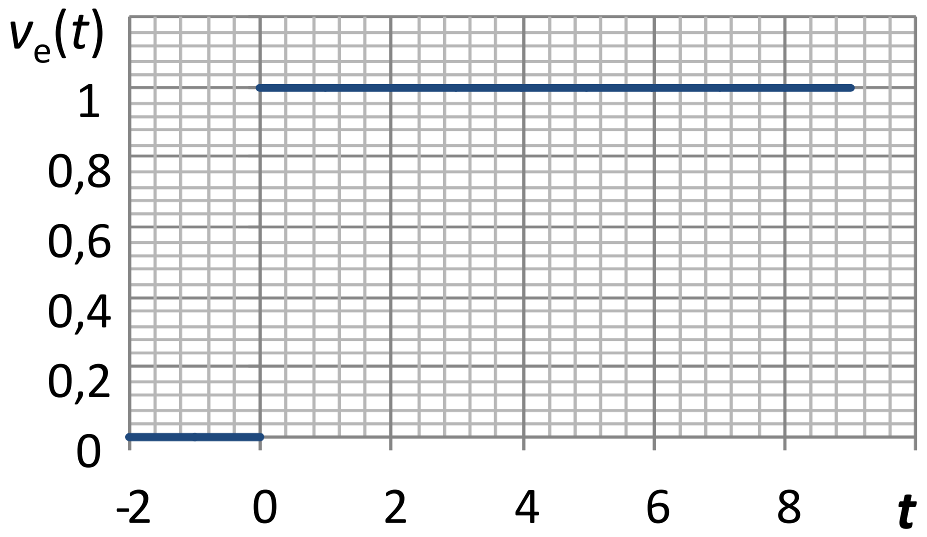
Sistema de 1ª ordem

A análise de um circuito implica a resolução de um sistema de equações diferenciais (no caso geral de um circuito mais complicado…)

Circuitos *RC*

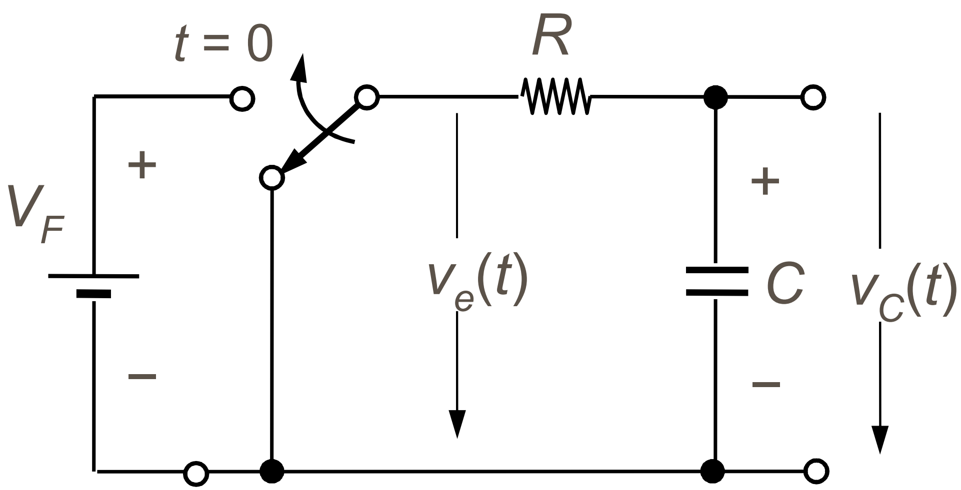
■ Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

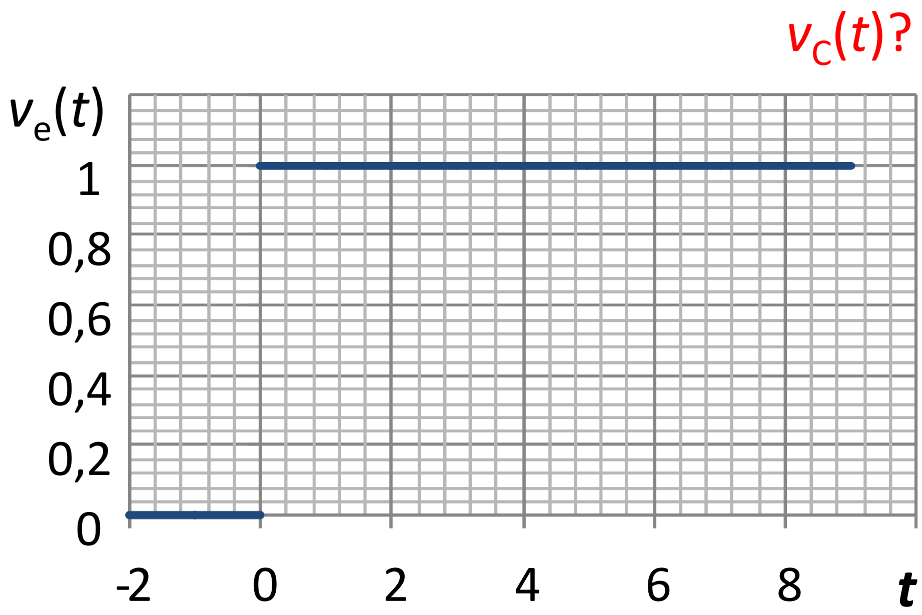




Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

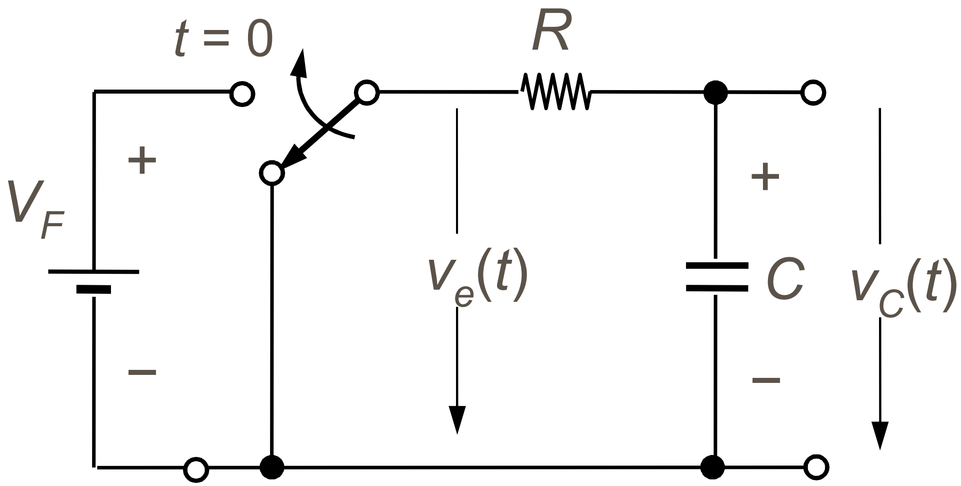
Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

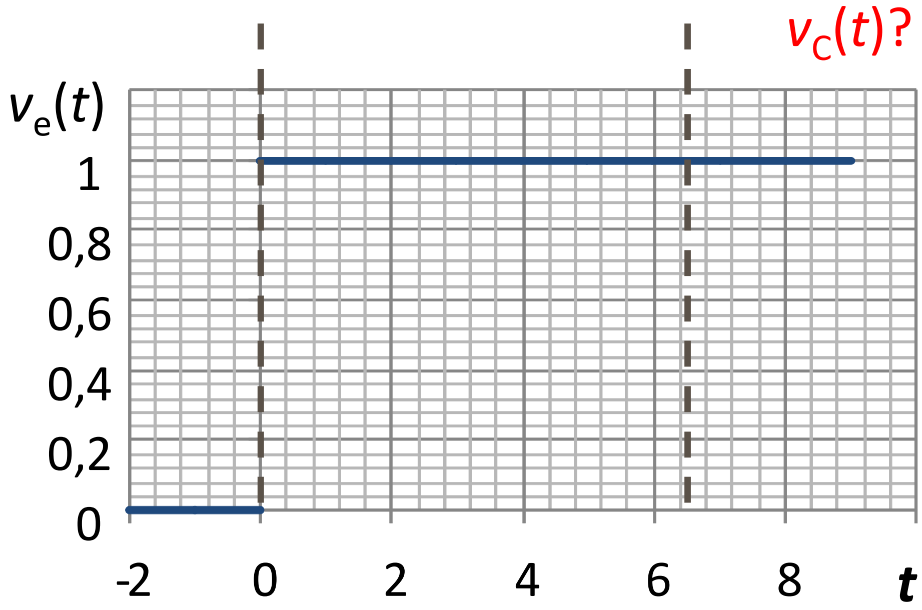




Circuitos *RC*

- **Circuito *RC* - Resposta ao Degrau**

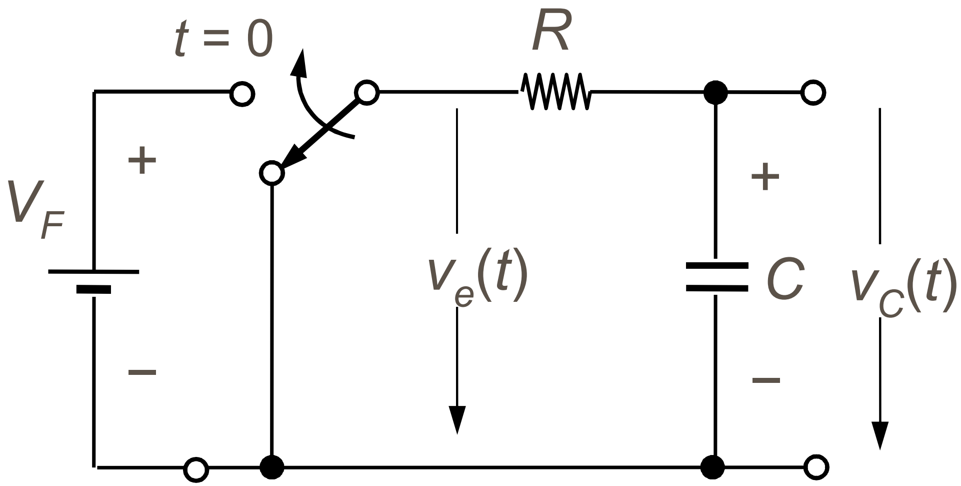


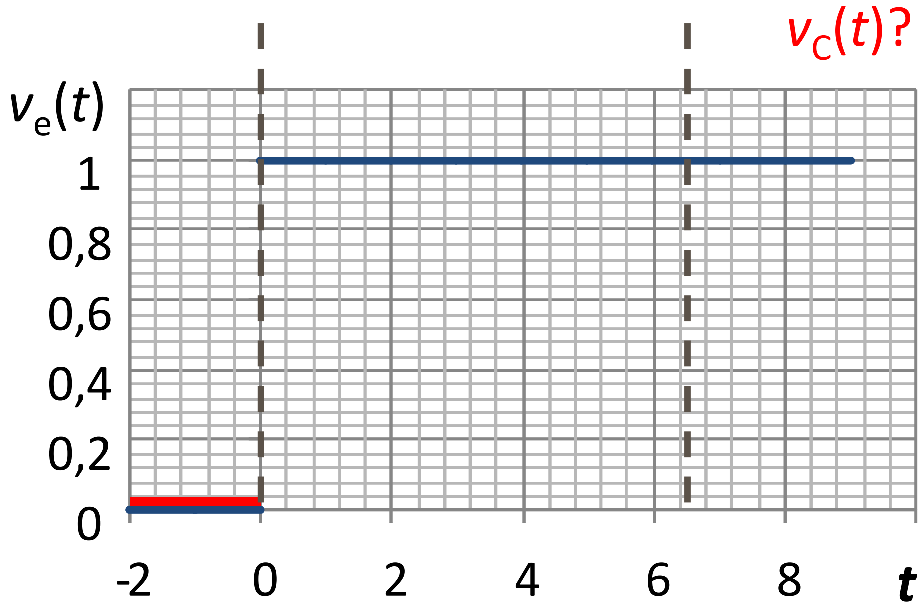


Circuitos *RC*

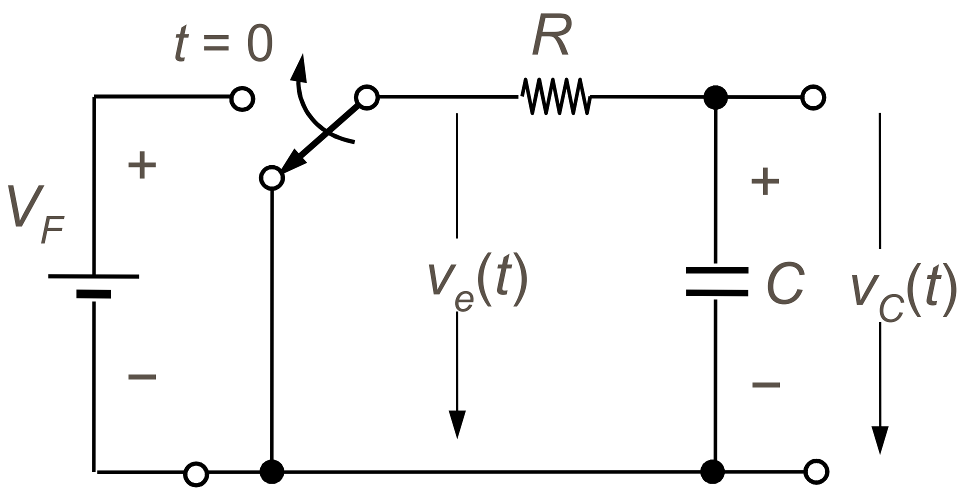
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

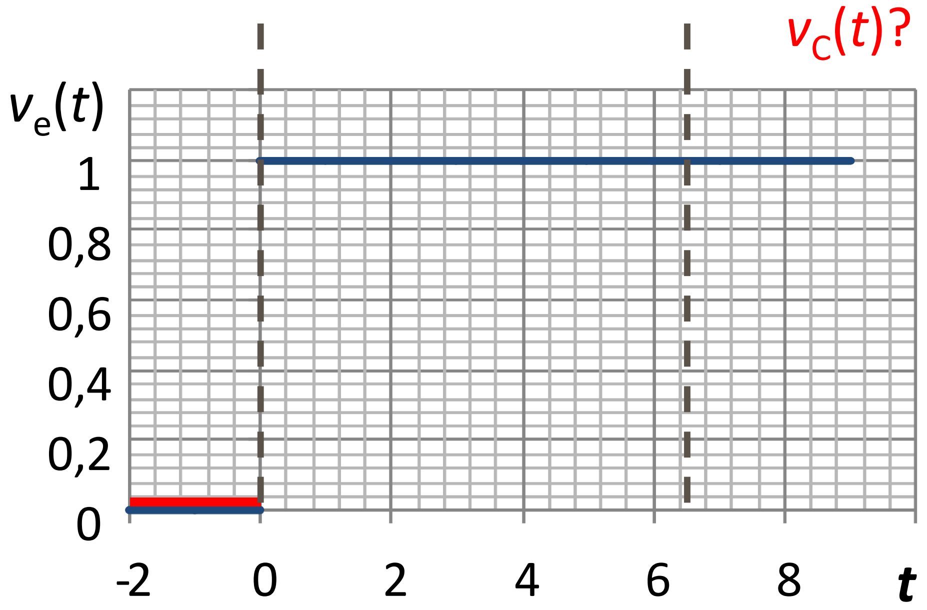
Circuito *RC* - Resposta ao Degrau





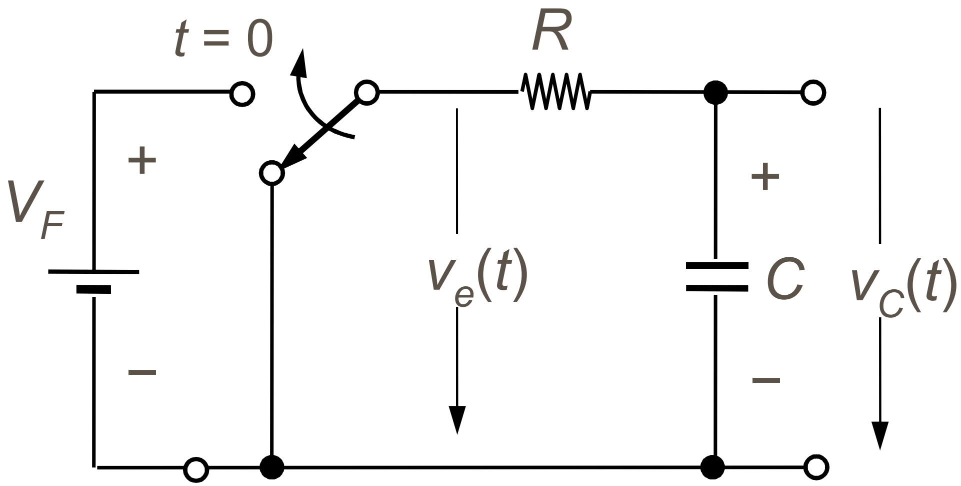
Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

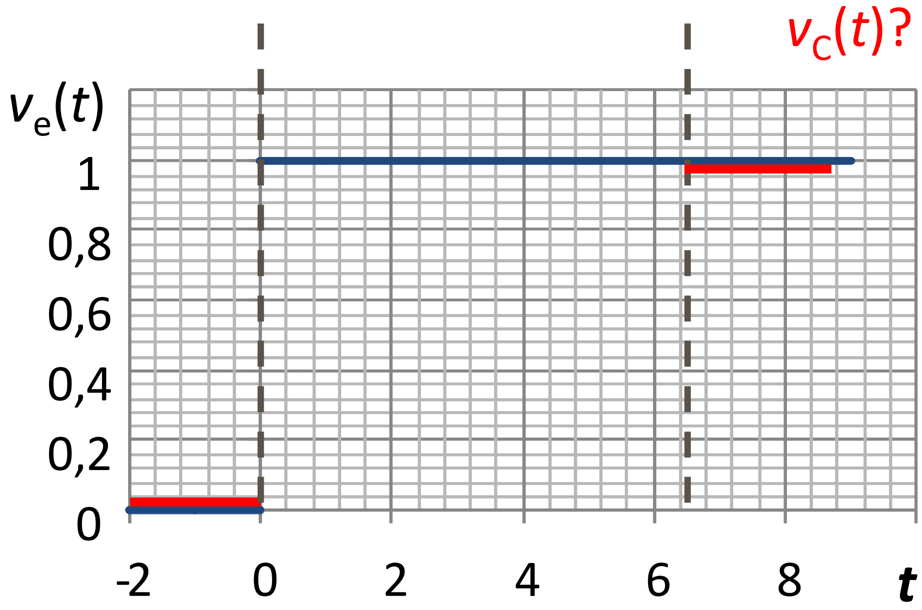




Circuitos *RC*

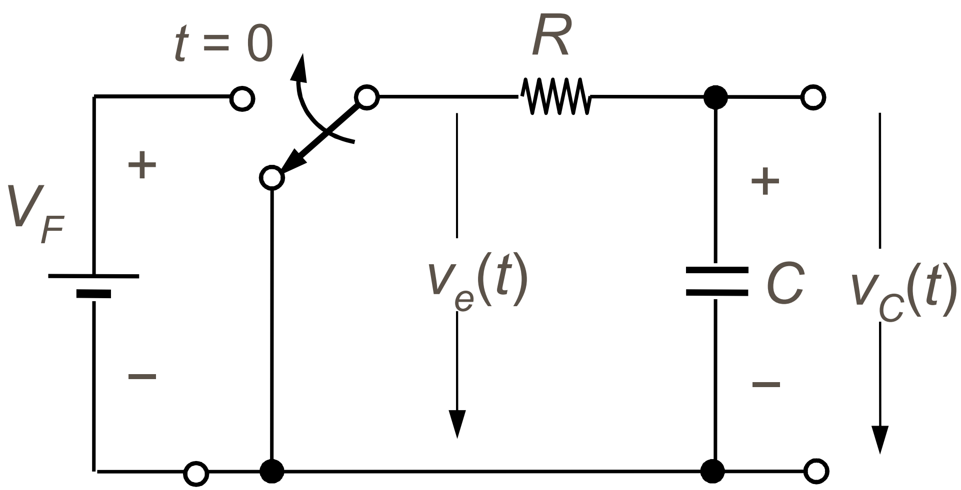
Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

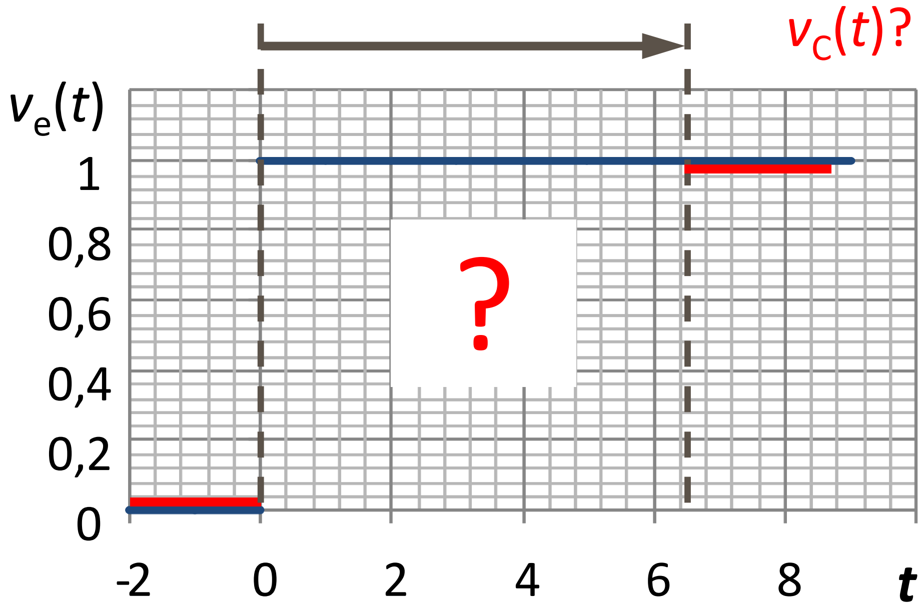




Circuitos *RC*

Circuito *RC* - Resposta ao Degrau





Circuitos *RC*

■ Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

$$V_F = v_R + v_C = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + v_C(0^+)$$

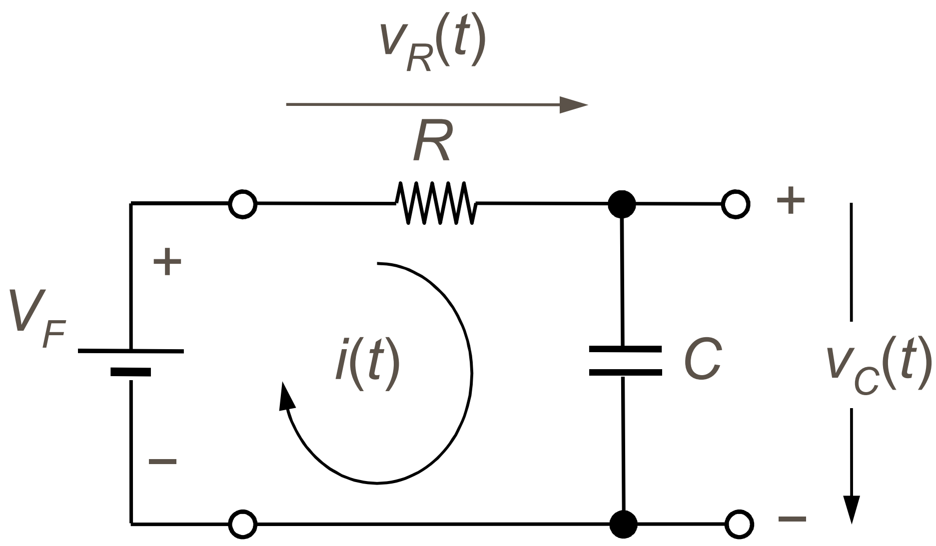
Solucionando a equação diferencial

(para $v_C(0^+) = 0\text{V}$) e fazendo $\tau = RC$,

$$\rightarrow i(t) = \frac{V_F}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow v_R = R \cdot i = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow v_C = V_F - v_R = V_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

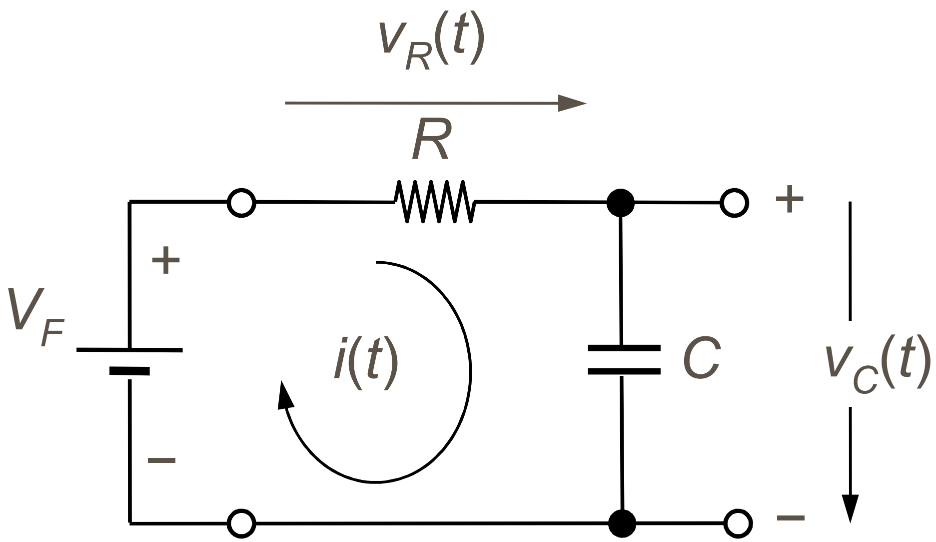


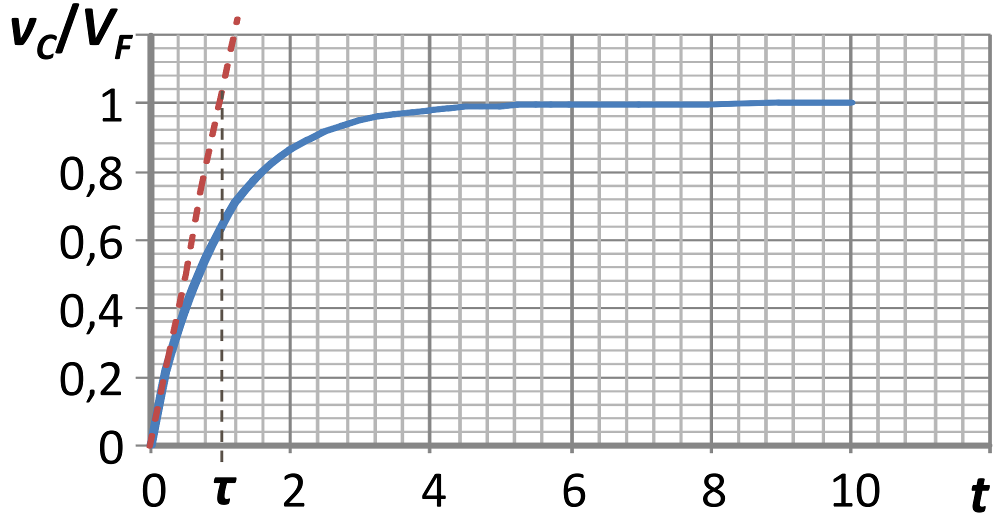
τ → "constante de tempo" do circuito (seg.)

Circuitos RC

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

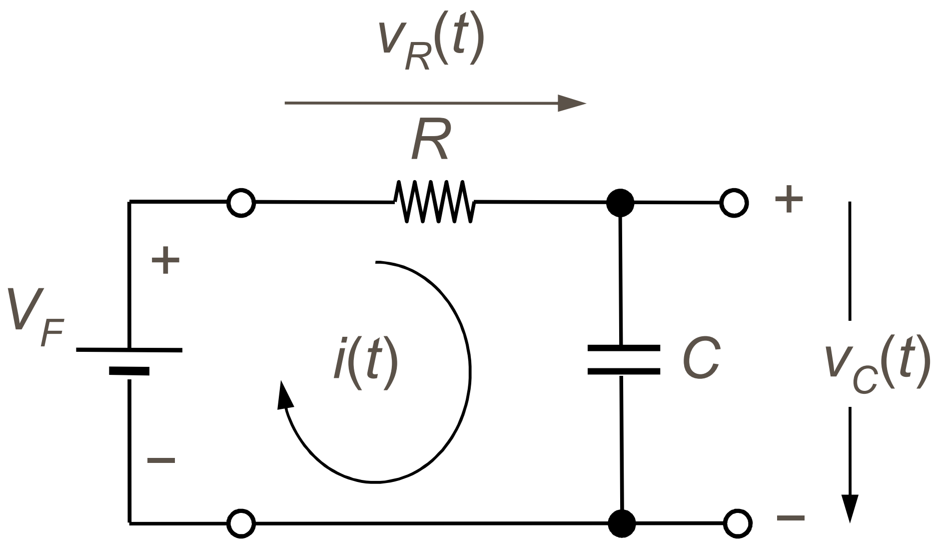


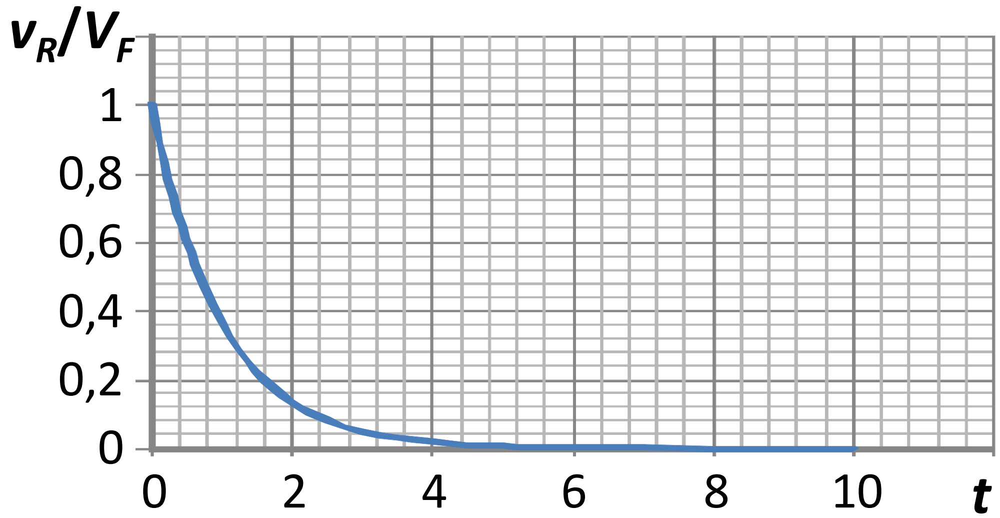


$$v_C = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Circuito *RC* - Resposta ao Degrau

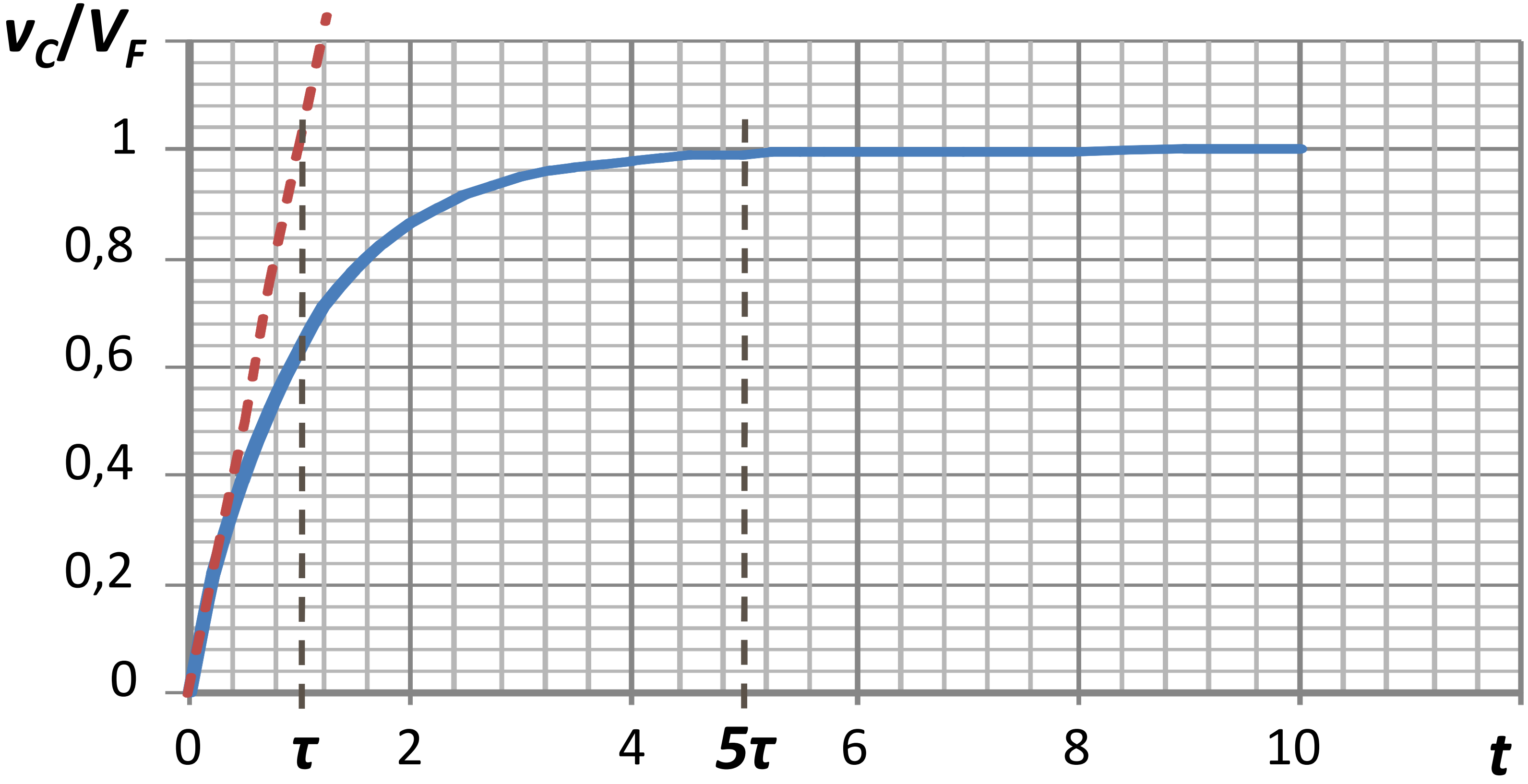




$$v_R = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Circuitos RC

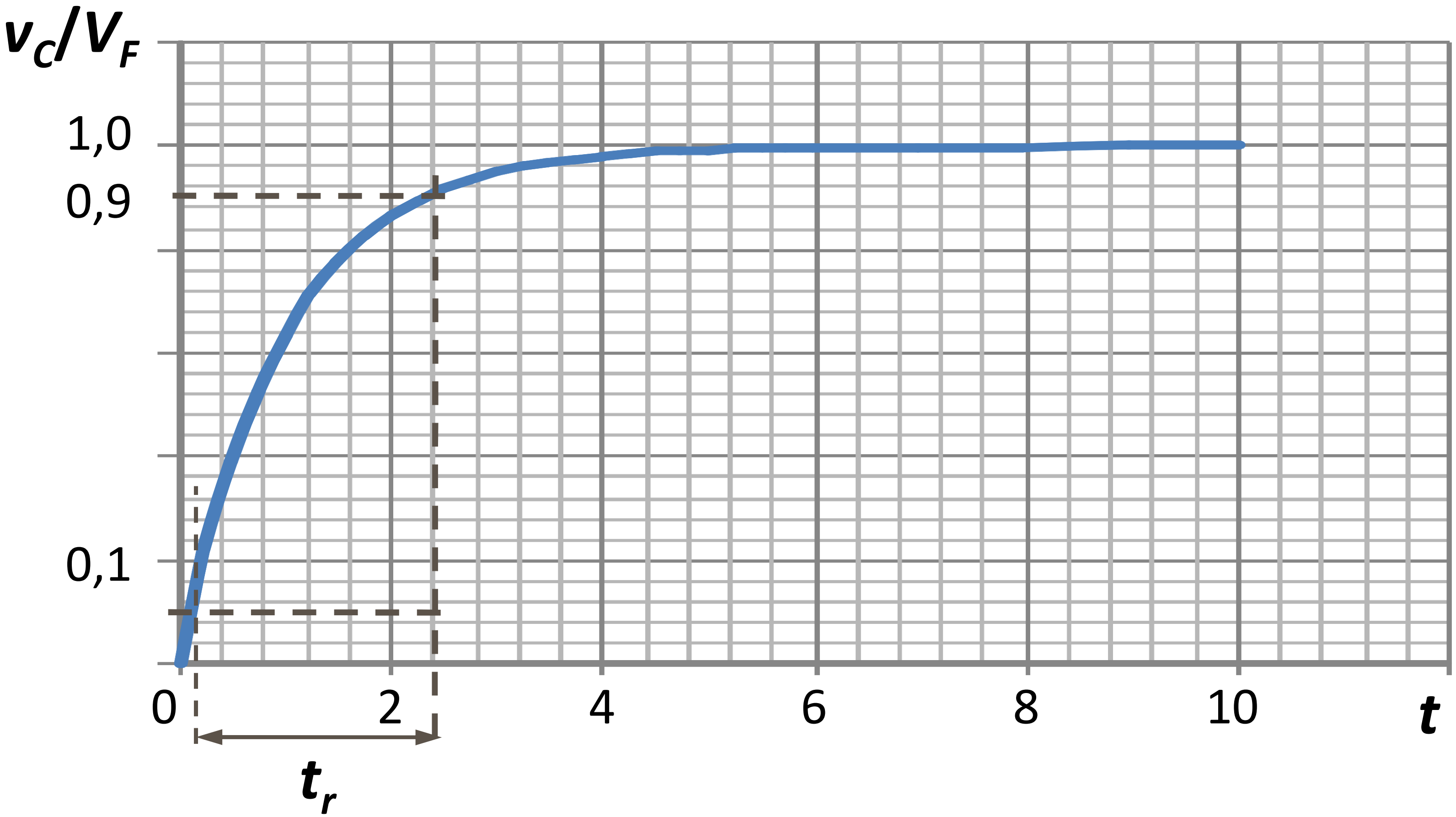
- **Circuito *RC* - Resposta ao Degrau**



$$v_C = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

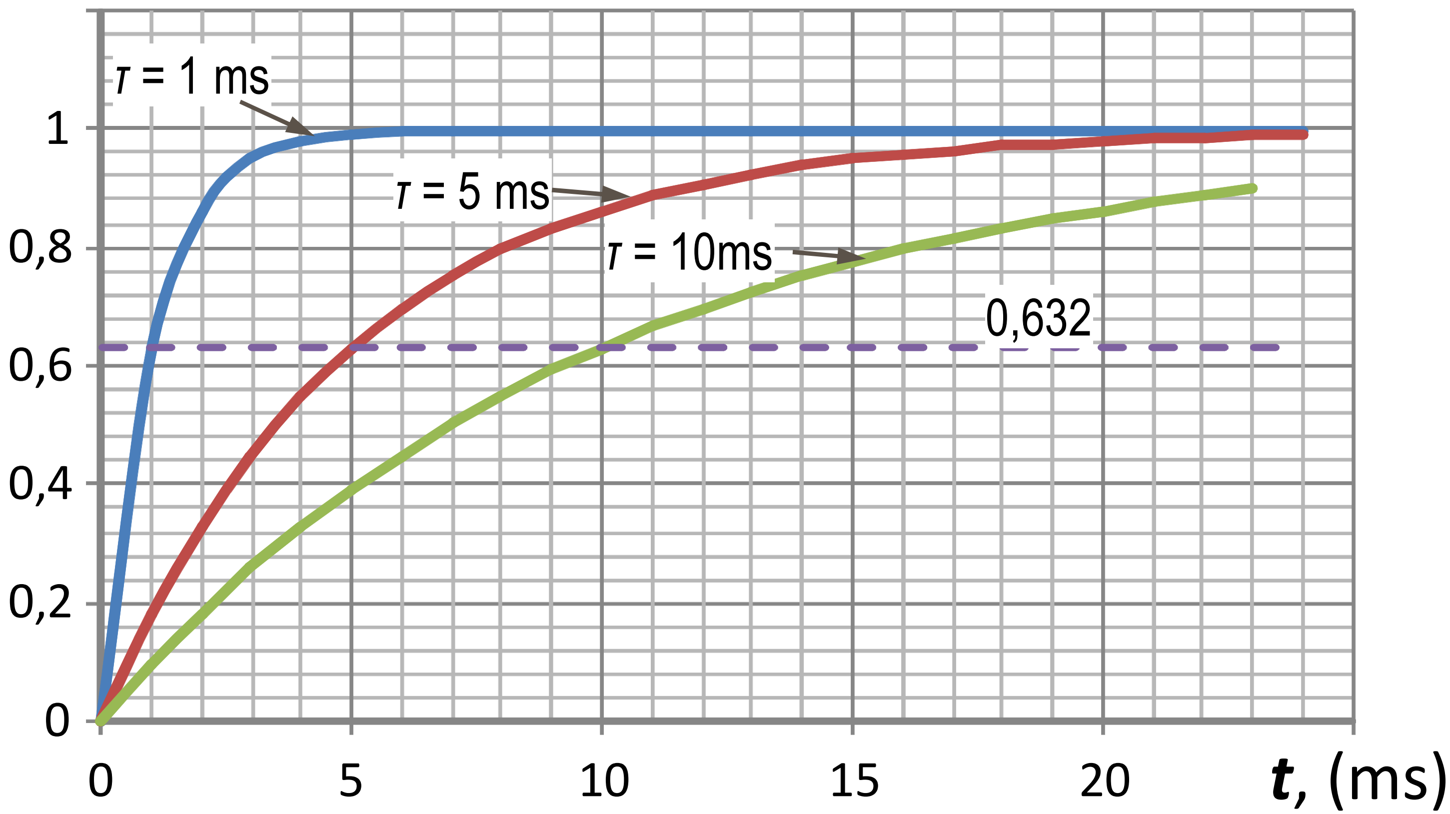
Circuito *RC* - Resposta ao Degrau



$$t_r \approx 2{,}197\tau$$

Circuitos RC

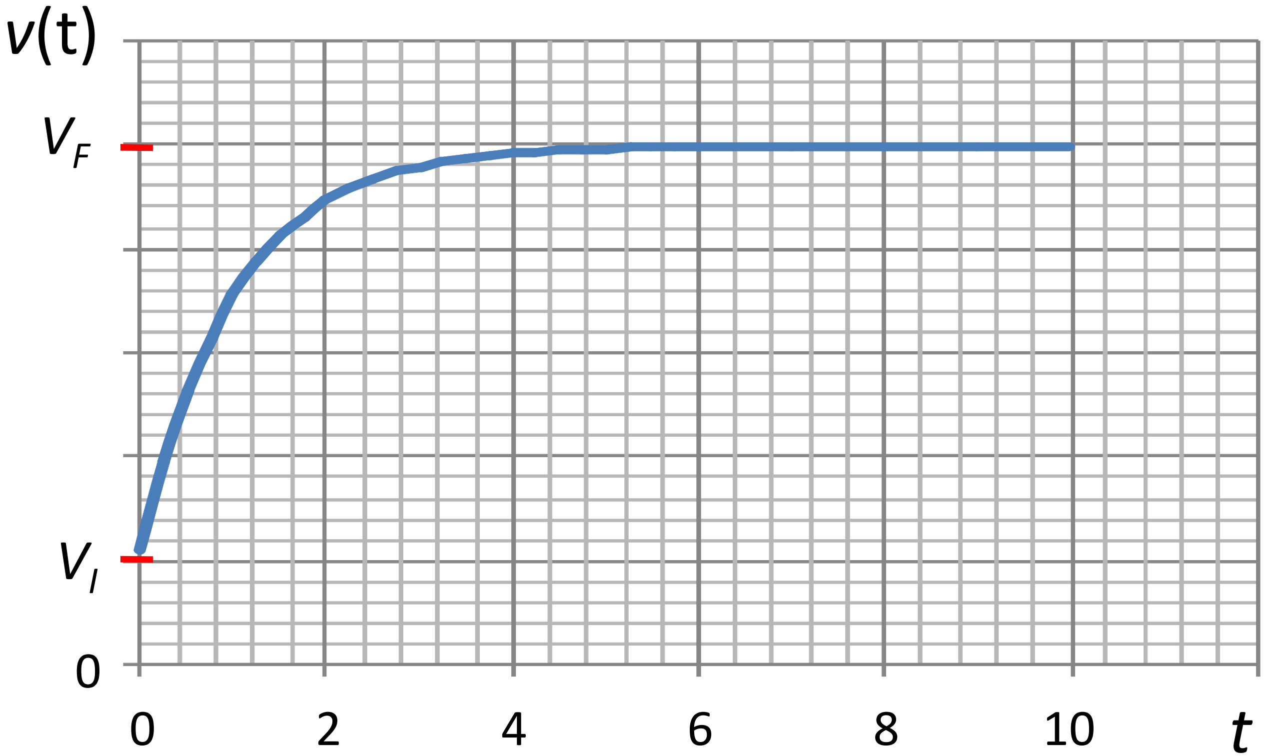
■ Circuito *RC* - Resposta ao Degrau



$$\text{Para } t = \tau \;\rightarrow v_C \approx 0{,}632V_F$$

(Evolução Exponencial – Caso Geral)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

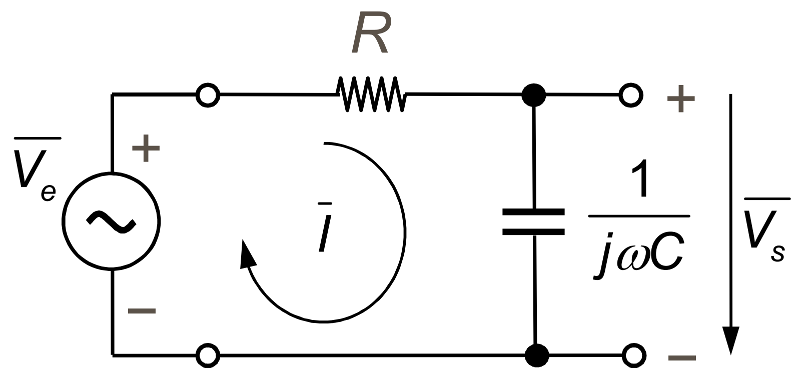


$$v(t) = V_F + (V_I - V_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RC* – Análise e Corrente Alternada

- Filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem



$$\overline{V_s} = ?$$

$$\rightarrow \overline{V_s} = \overline{V_e}\frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Para $f_{sc} = \dfrac{1}{2\pi RC}$, $\rightarrow \overline{V_s} = \overline{V_e}\dfrac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_{sc}}}$

Circuitos RC

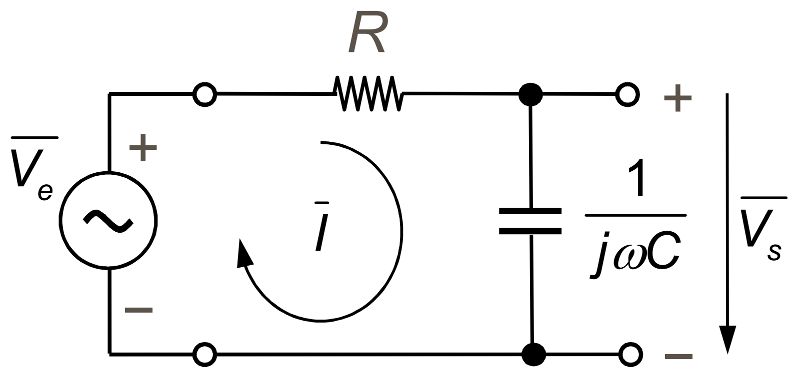
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RC* – Análise e Corrente Alternada

- Filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem

$$\overline{V_s} = \overline{V_e}\frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_{sc}}}$$

$$\overline{V_s} = \overline{V_e}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{sc}}\right)^2}}}_{\text{módulo}}\underbrace{\left|\!\underline{-\arctan\left(\frac{f}{f_{sc}}\right)}\right.}_{\text{fase}}$$



Para $f \ll f_{sc}$, (***f_{sc}*** é a frequência superior de corte do circuito)

$\rightarrow \overline{V_s} \approx \overline{V_e}$

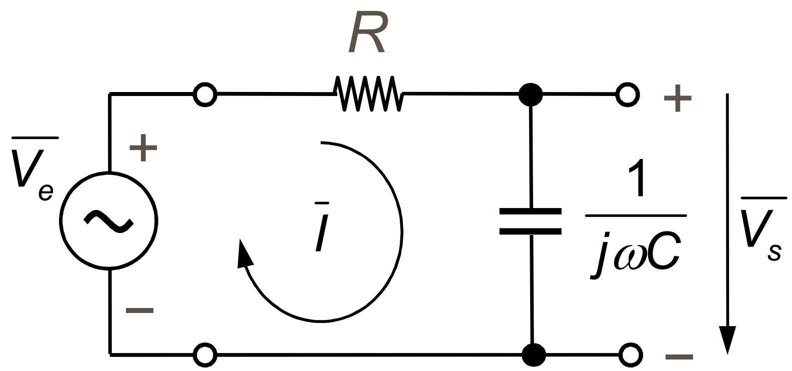
(a tensão de saída não sobre atenuação e está em fase com a tensão de entrada)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RC* – Análise e Corrente Alternada

- Filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem

$$\overline{V_s} = \overline{V_e}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{sc}}\right)^2}}\underline{\left|-\arctan\left(\frac{f}{f_{sc}}\right)\right.}$$



Para $f \gg f_{sc}$,

$$\rightarrow \overline{V_s} \approx \overline{V_e}\cdot\frac{1}{f}\underline{|-90^{\circ}}$$

(a tensão de saída tende para zero com um atraso de 90º relativamente à de entrada)

Para $f = f_{sc}$,

$$\rightarrow \overline{V_s} = \overline{V_e}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{|-45^{\circ}} = \overline{V_e}\cdot 0{,}707\underline{|-45^{\circ}}$$

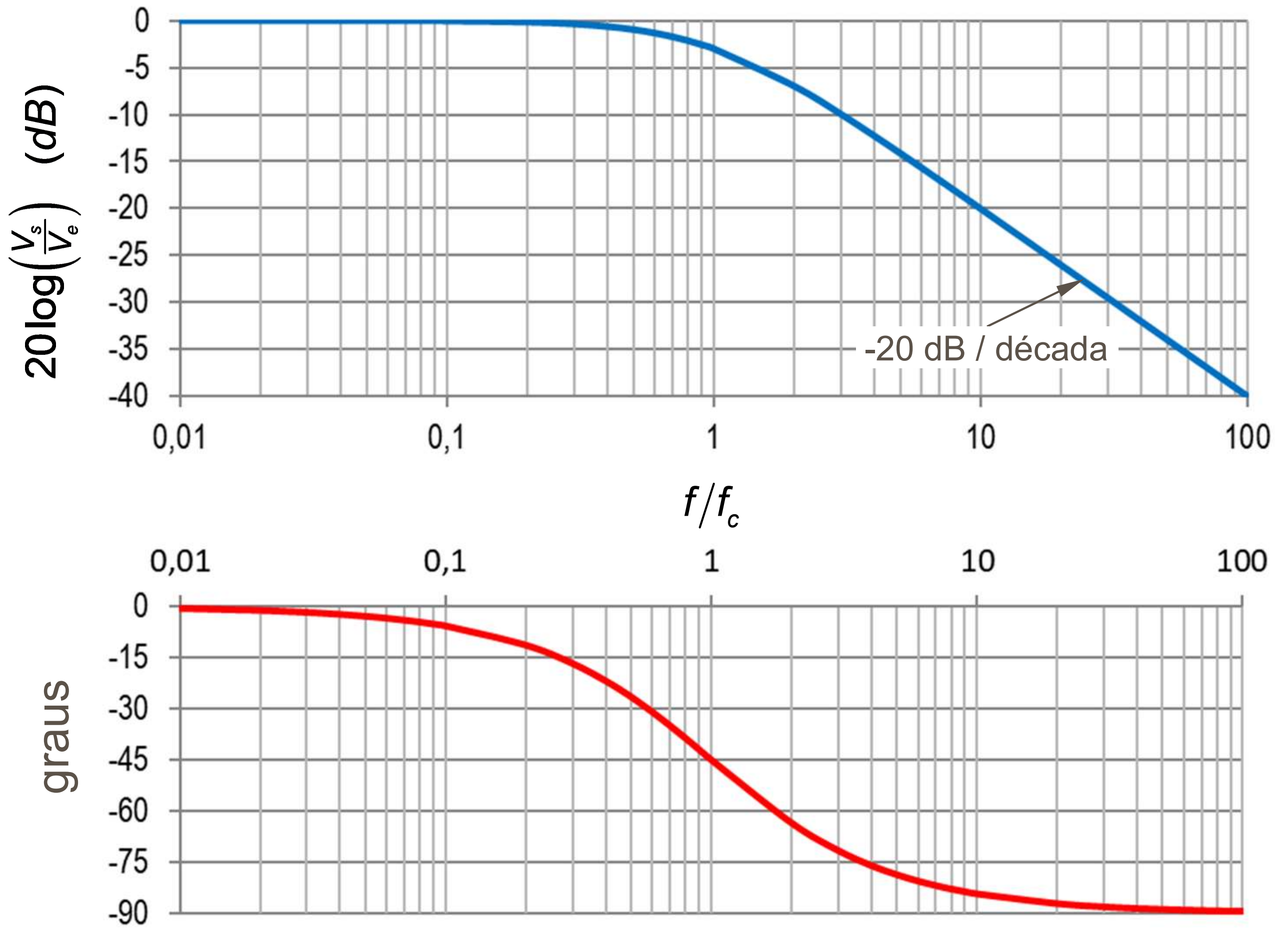
(a tensão de saída sofre uma atenuação de 70.7% e apresenta um atraso de 45º relativamente à de entrada)

Circuitos RC

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RC* – Análise e Corrente Alternada

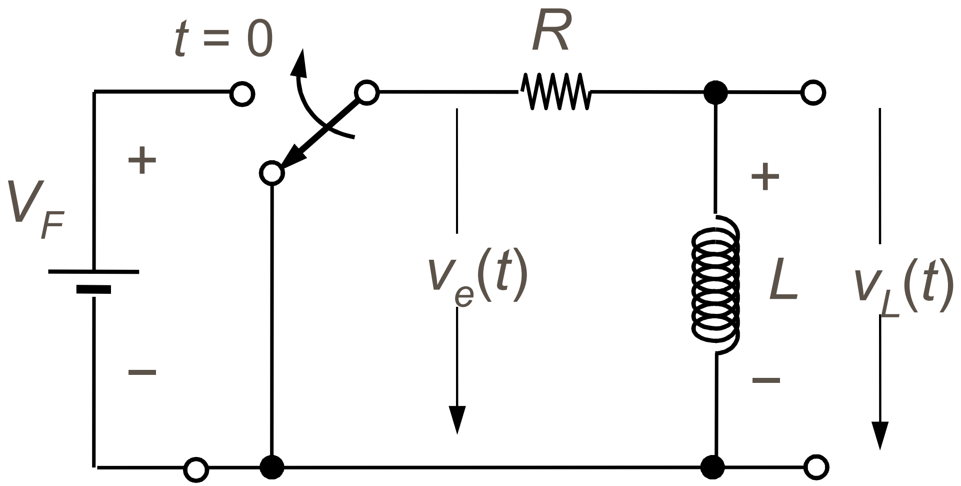
- Diagramas de Bode

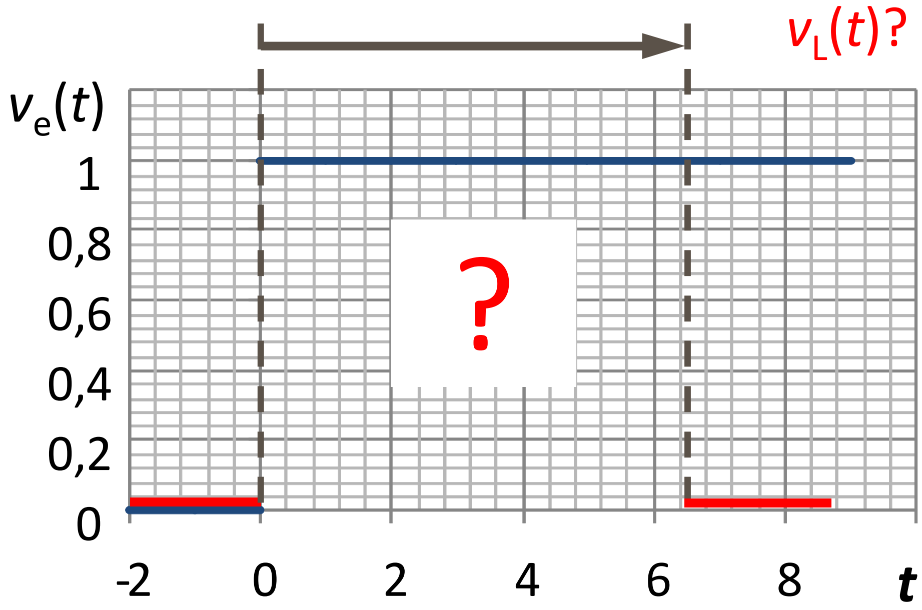


Circuitos RL

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Circuito *RL* - Resposta ao Degrau





Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Circuito *RL* - Resposta ao Degrau

$$V_F = v_R + v_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

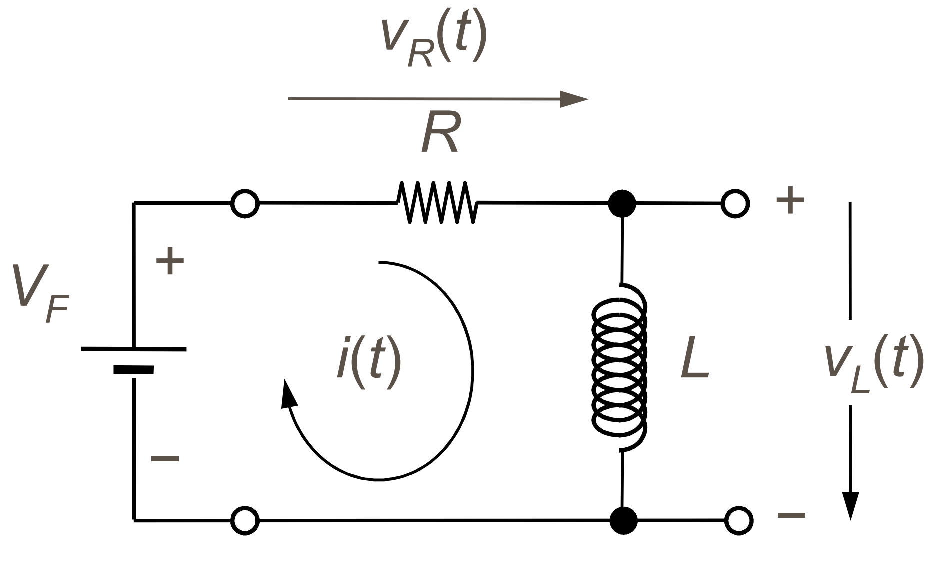
Solucionando a equação diferencial

(para $i_L(0^+) = 0A$) e fazendo $\tau = \frac{L}{R}$,

$$\rightarrow i(t) = \frac{V_F}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\rightarrow v_R = R \cdot i = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\rightarrow v_L = V_F - v_R = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

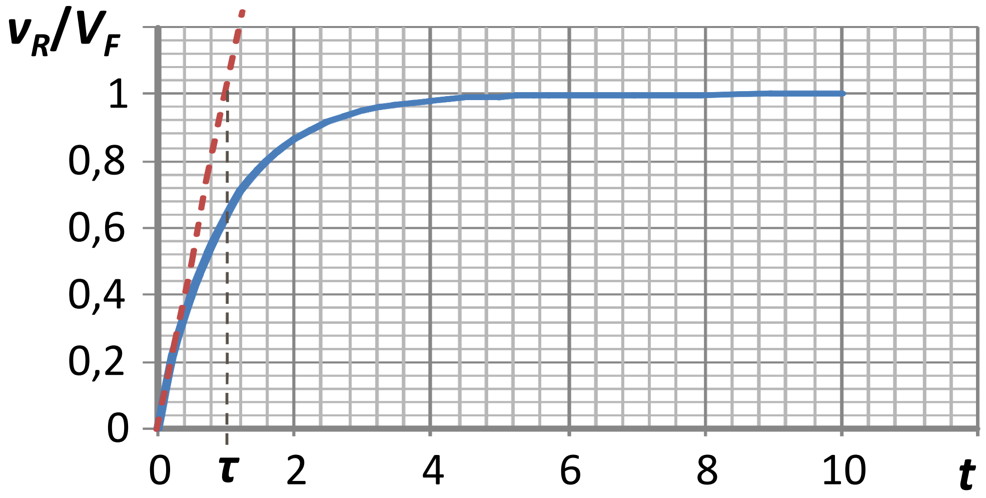


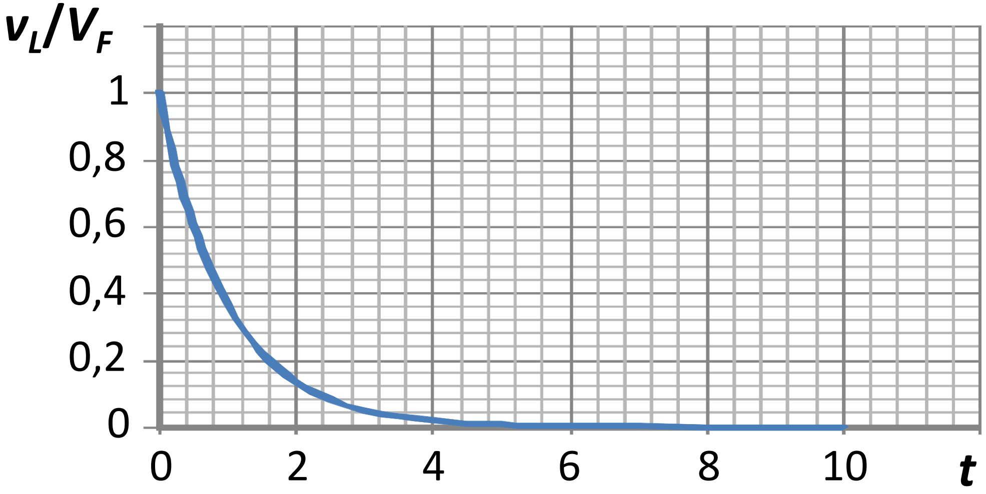
$\tau \rightarrow$ "constante de tempo" do circuito

Circuitos RL

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RL* - Resposta ao Degrau





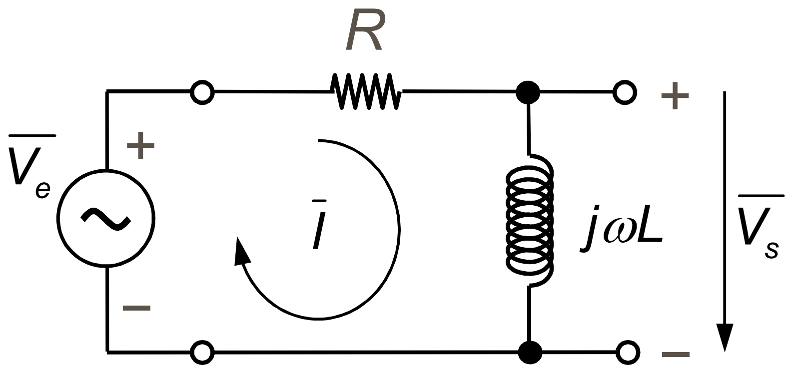
$$v_R = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$v_L = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Circuitos RL

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Circuito *RL* – Análise e Corrente Alternada**
  - Filtro passivo passa-alto de 1ª ordem



$$\overline{V_s} = \overline{V_e}\,\frac{\overline{Z_L}}{R+\overline{Z_L}} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}$$

$$\text{Para } f_{ic} = \frac{1}{2\pi \, {}^{L}\!/_{R}}, \qquad \rightarrow \overline{V_s} = \overline{V_e}\,\frac{j\dfrac{f}{f_{ic}}}{1+j\dfrac{f}{f_{ic}}}$$

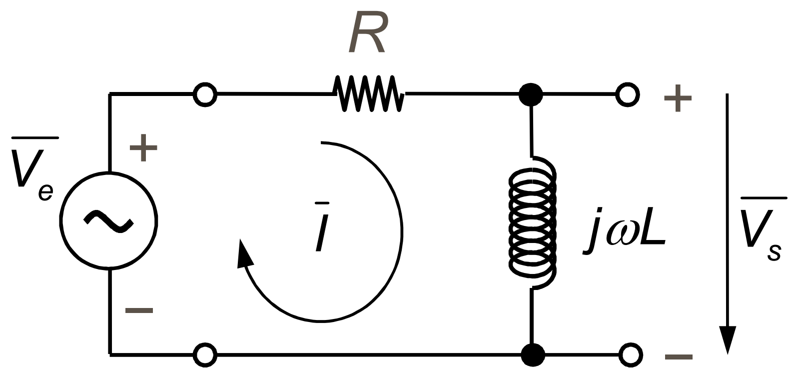
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RL* – Análise e Corrente Alternada

- Filtro passivo passa-alto de 1ª ordem

$$\overline{V_s} = \overline{V_e} \frac{j\frac{f}{f_{ic}}}{1 + j\frac{f}{f_{ic}}}$$

$$\overline{V_s} = \overline{V_e} \underbrace{\frac{\frac{f}{f_{ic}}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{ic}}\right)^2}}}_{\text{módulo}} \underbrace{\angle 90^\circ - \arctan\left(\frac{f}{f_{ic}}\right)}_{\text{fase}}$$



Para $f \ll f_{ic}$, (***f*** f_{ic} é a frequência inferior de corte do circuito)

$$\rightarrow \overline{V_s} \approx \overline{V_e} \cdot \frac{f}{f_{ic}} \angle +90^\circ$$

→ **a tensão de saída tende para zero com um avanço de 90º relativamente à de entrada**

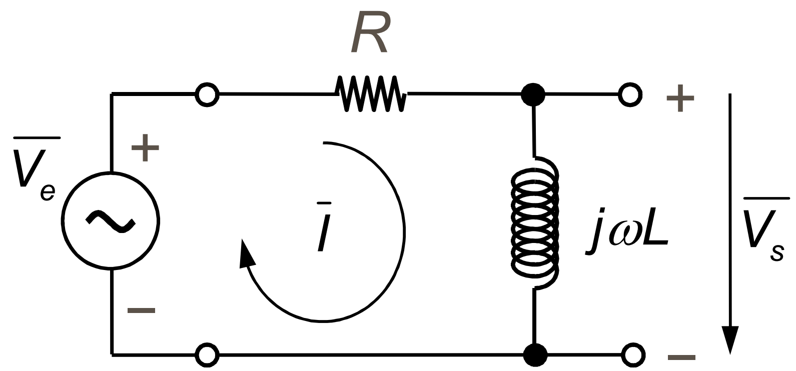
Circuitos RL

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Circuito *RL* – Análise e Corrente Alternada

- Filtro passivo passa-alto de 1ª ordem

$$\overline{V_s} = \overline{V_e}\,\frac{\frac{f}{f_{ic}}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{ic}}\right)^2}}\underline{\left|90^\circ - \arctan\left(\frac{f}{f_{ic}}\right)\right.}$$



Para $f \gg f_{ic}$,

$\rightarrow \overline{V_s} \approx \overline{V_e}$

$\rightarrow$ **a tensão de saída não sobre atenuação e está em fase com a tensão de entrada**

Para $f = f_{ic}$,

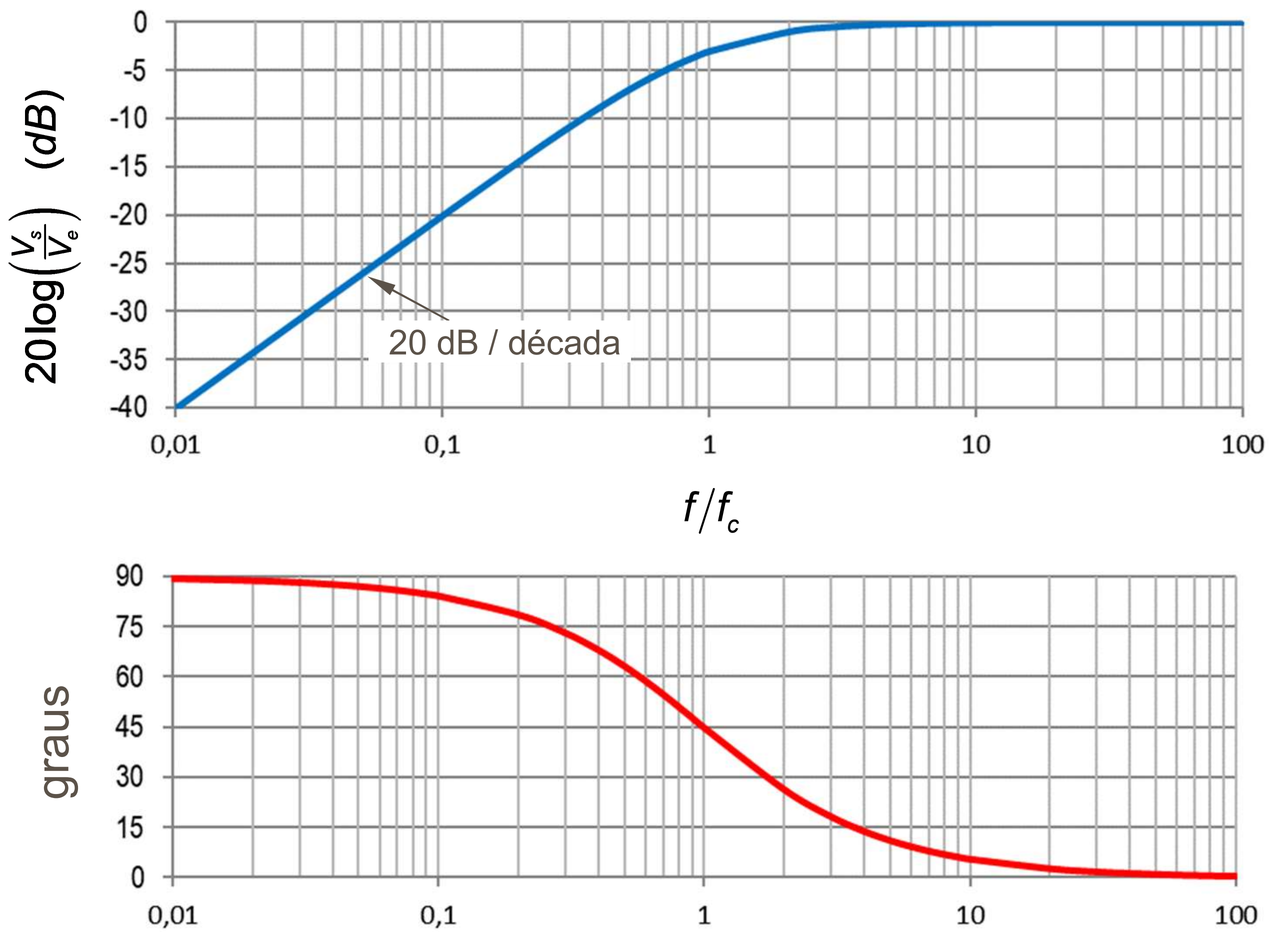
$$\rightarrow \overline{V_s} = \overline{V_e}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\left|90^\circ - 45^\circ\right.} = \overline{V_e}\cdot 0{,}707\underline{\left|+45^\circ\right.}$$

$\rightarrow$ **a tensão de saída sofre uma atenuação de $\approx$ 30% (-3dB) e apresenta um avanço de 45º relativamente à de entrada**

Circuitos RL

Circuito *RL* – Análise e Corrente Alternada

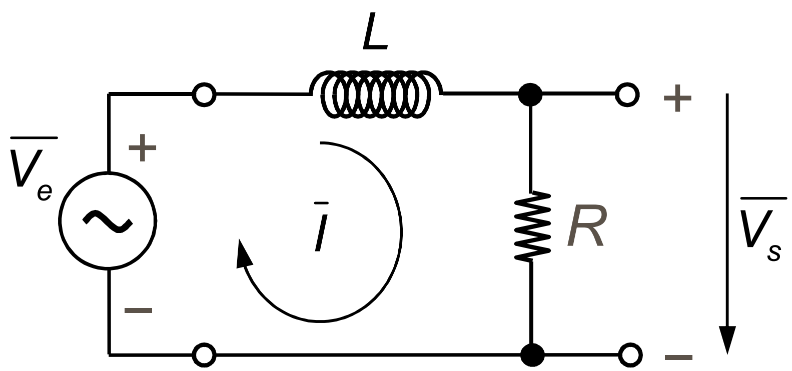
- Diagramas de Bode



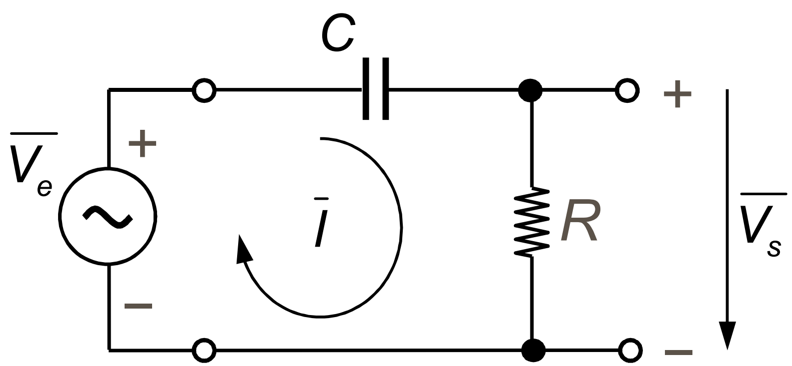
Circuitos *RC* e *RL*

Filtros *RC* / *RL*

- Passa-baixo

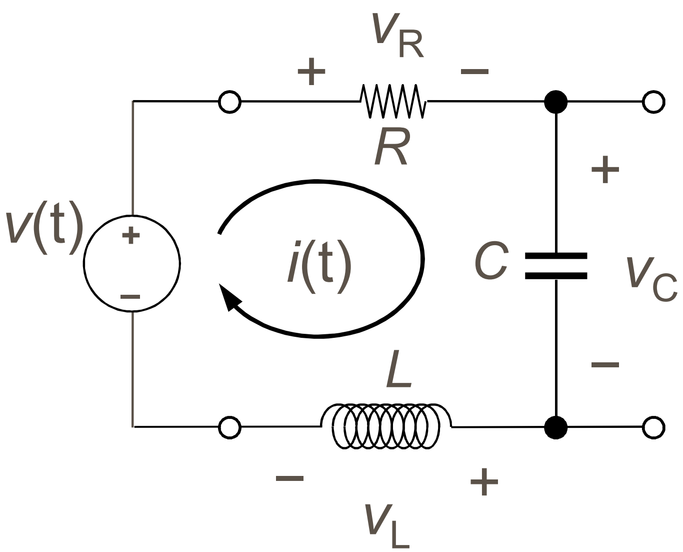


- Passa-alto



Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Circuito *RLC (série)*



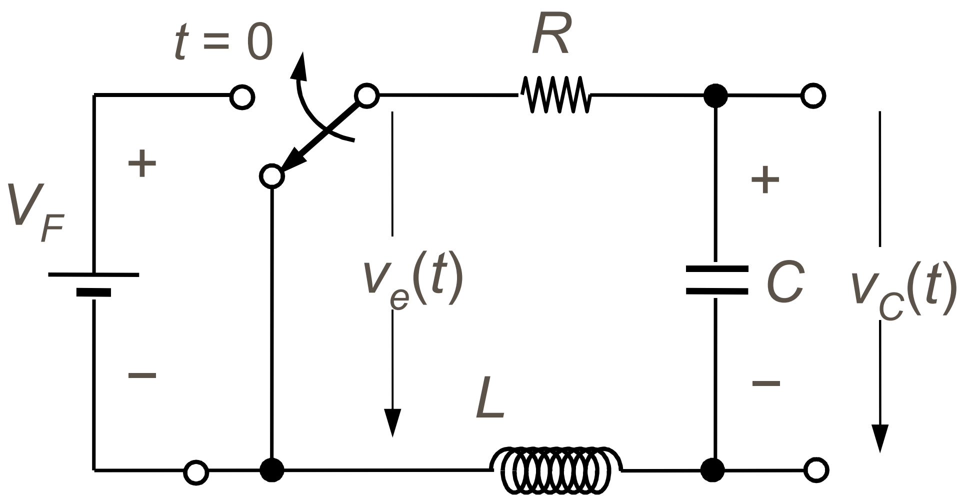
$$v = v_R + v_C + v_L$$

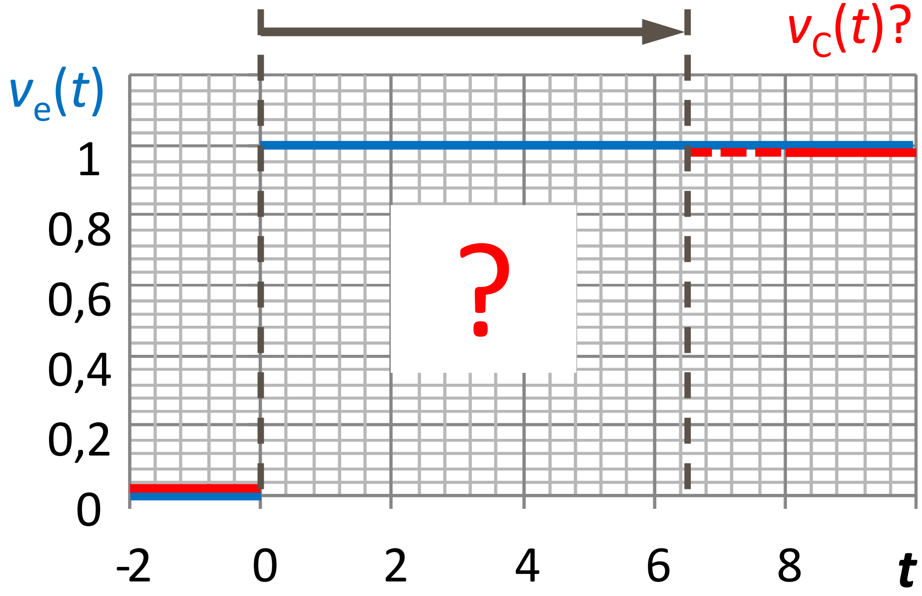
$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)d\tau$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t)$$

Sistema de 2ª ordem

Circuito *RLC* - Resposta ao Degrau

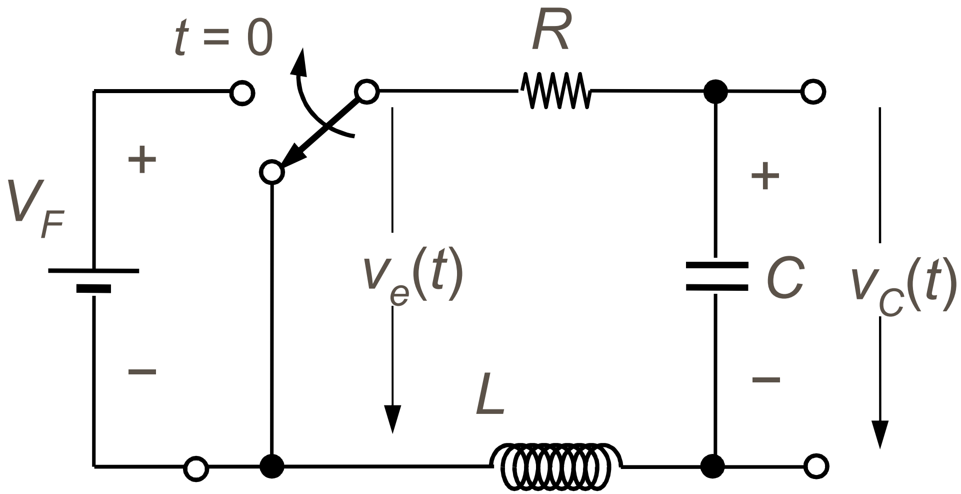




$\rightarrow$ Implica resolver $\quad v(t) = LC\dfrac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$

Circuitos *RLC*

Circuito *RLC* - Resposta ao Degrau



Para:

$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$ (coeficiente de amortecimento),

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ (freq. natural ou de ressonância),

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$ (freq. natural amortecida)

$$\rightarrow v_C(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right]$$ (para $0 \le \xi < 1$)

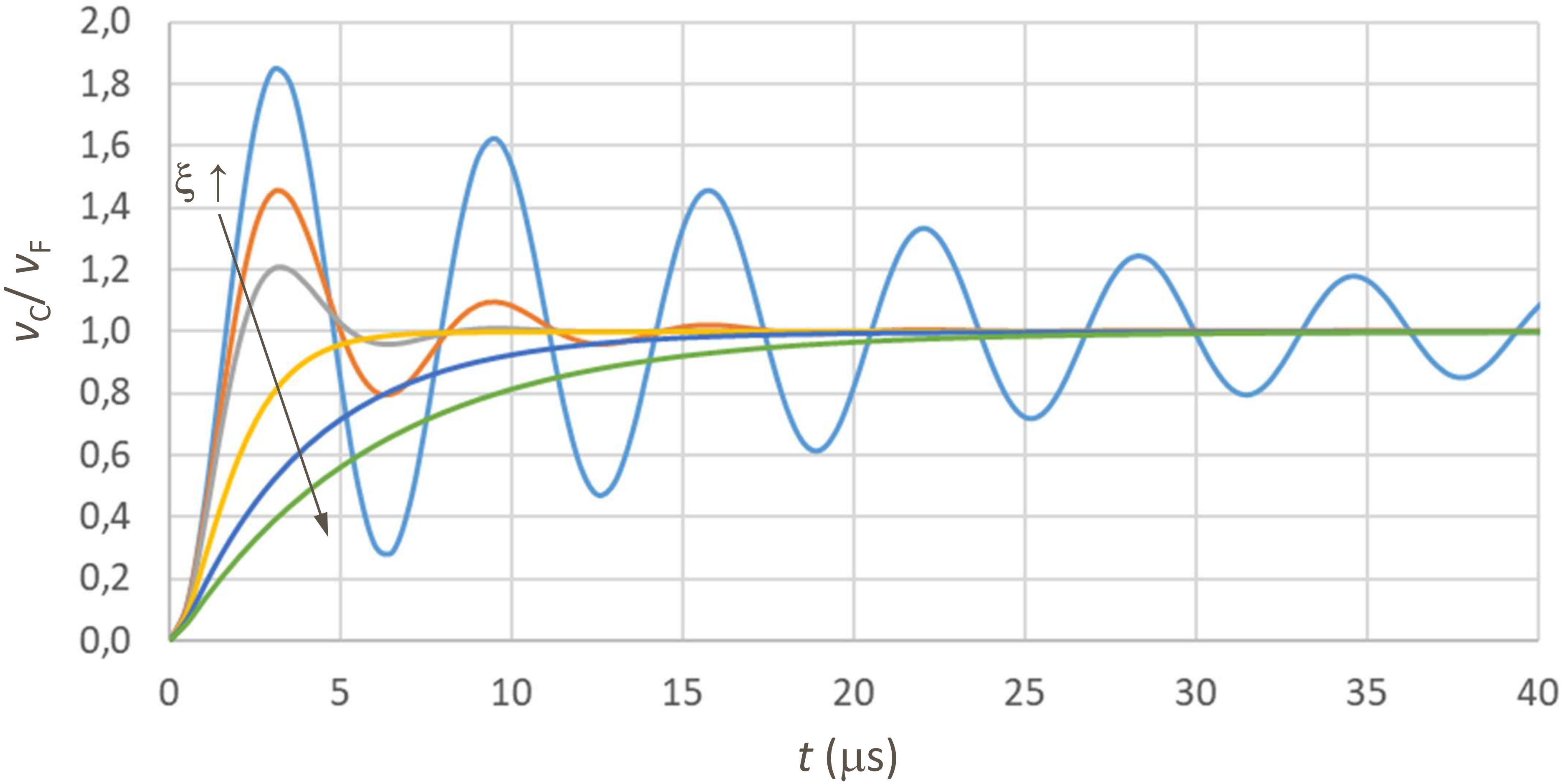
$$\rightarrow v_C(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} - \omega_n t \cdot e^{-\xi\omega_n t}$$ (para $\xi = 1$)

$$\rightarrow v_C(t) = 1 + \frac{\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)e^{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t} - \left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)e^{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{2\sqrt{\xi^2-1}}$$ (para $\xi > 1$)

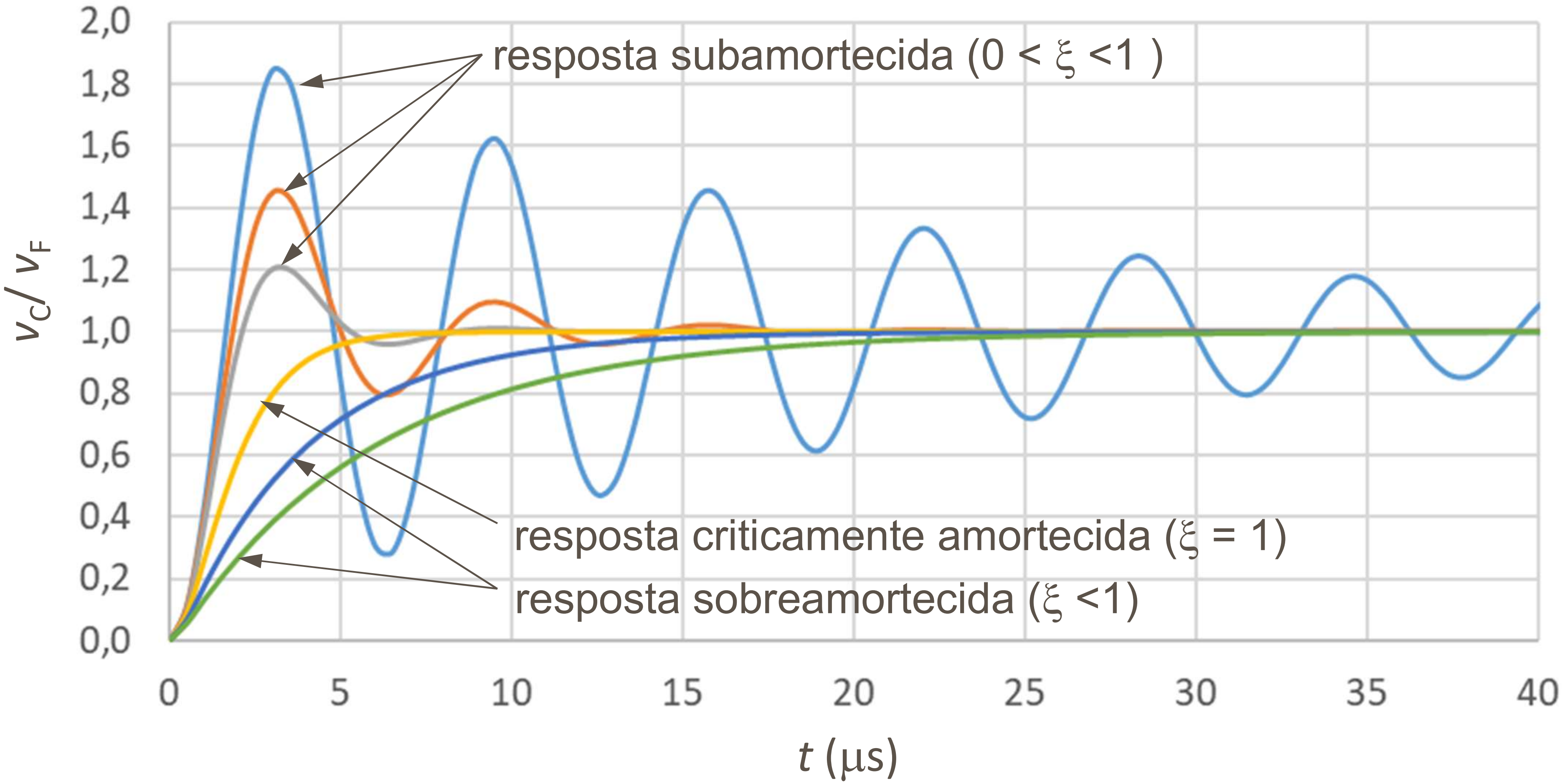
Circuitos *RLC*

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

■ Circuito *RLC* - Resposta ao Degrau

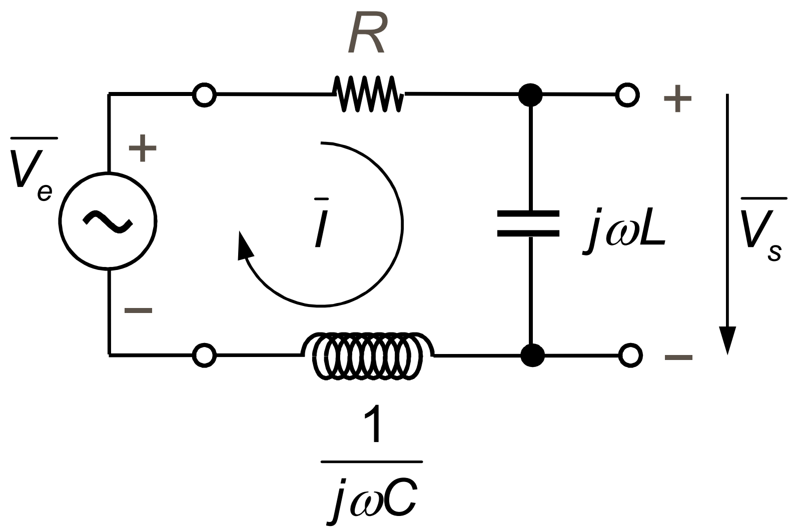


Circuito *RLC* - Resposta ao Degrau



Circuitos *RLC*

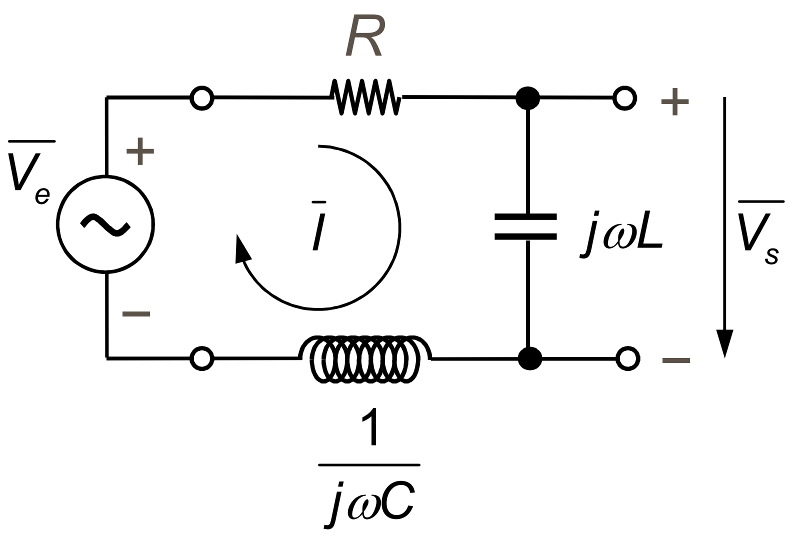
■ Circuito *RLC* (série)



$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{\overline{V}_s}{\overline{V}_e} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + +2\xi\varpi_n j\omega + \omega_n^2}$$

Circuitos *RLC*

- **Circuito *RLC* (série)**



$$G(j\omega)=\frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}}=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2++2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2}$$