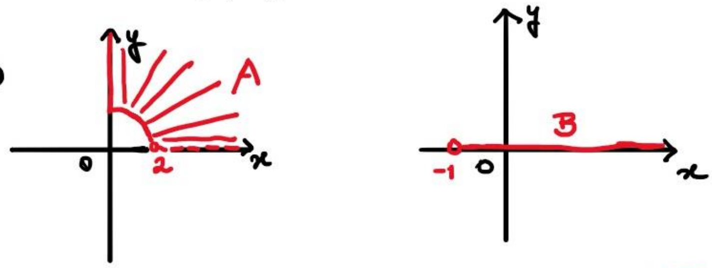
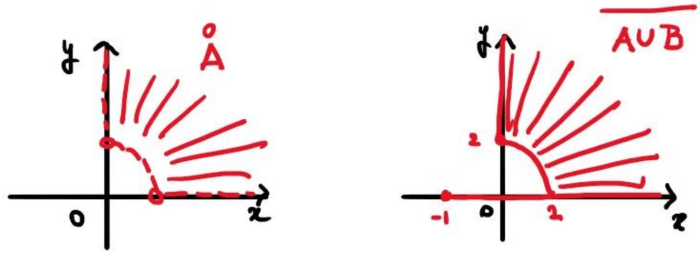
Correção do 1º teste de Cálculo Vetorial

10/04/2021

1) a)



b)



c) O conjunto A não é limitado. Queremos verificar que, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, então $A \not\subseteq B((x_0, y_0), r)$.

Os pontos da forma $(0, n)$ pertencem a A desde que $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

$d((0,n),(x_0,y_0)) = \sqrt{x_0^2 + (n - y_0)^2} \xrightarrow[n]{} +\infty$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $d((0,n_0),(x_0,y_0)) > r$, ou seja, $(0, n_0) \in A \setminus B((x_0,y_0), r)$.

2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ x > 0\}$

Seja $f(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ 1 - (x^2+y^2) > 0\} = A$$

3) a) $\boxed{\alpha < 1}$

$$0 < |f_\alpha(x,y)| = \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^\alpha} < \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

$$= (x^2+y^2)^{1-\alpha} \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

uma vez que $\alpha<1 \Rightarrow 1-\alpha>0$.

Então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f_\alpha(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0 = f(0,0)$

mostrando que f é contínua em $(0,0)$.

b) $\boxed{\alpha\geq 1}$ $\quad f_\alpha(x,x) = \dfrac{x^2}{(x^2+x^2)^\alpha} = \dfrac{x^2}{2^\alpha x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{2^\alpha x^{2(\alpha-1)}}$

- $\alpha>1$ $\quad \lim_{x\to 0} f_\alpha(x,x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2^\alpha x^{2(\alpha-1)}} = \infty$

  porque $2(\alpha-1)>0$. Então f_α é descontínua em $(0,0)$

- $\alpha=1$ $\quad f_1(x,x) = \dfrac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

  Então $\lim_{x\to 0} f_1(x,x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$, logo

  f é descontínua em $(0,0)$.

c) $g(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/3}}$ se $(x,y)\neq(0,0)$, $g(0,0)=0$

$\boxed{(a,b)\neq(0,0)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2ab}{(h^2(a^2+b^2))^{1/3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2ab}{|h|^{2/3}\cdot h\,(a^2+b^2)^{1/3}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{hab}{|h|^{2/3}(a^2+b^2)^{1/3}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|^{2/3}} \frac{ab}{(a^2+b^2)^{1/3}} = 0$$

uma vez que $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{h}{|h|^{2/3}} = \lim_{h\to 0^+} h^{1/3} = 0$ e

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{|h|^{2/3}} = \lim_{h\to 0^-} -h^{1/3} = 0$.

d) $\psi(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$, $\psi(0,0)=0$

$\boxed{(x,y)\neq(0,0)}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)^2 - xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(x^3+xy^2-4xy^2)}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(0,h)-\psi(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} = 0$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

a) f é de classe C^1 por ser o quociente de duas funções polinomiais. Quando calculamos as derivadas parciais de quociente de funções polinomiais obtemos ainda um quociente de funções polinomiais, que é uma função contínua.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(x^2+y^2)-x^2.2x}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{0-x^2.2y}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{4-2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Como f é de classe C^1,

$$f'((1,1);(1,2)) = \nabla f(1,1)\cdot(1,2) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)\cdot(1,2)$$
$$= \tfrac{1}{2} - 1 = -1/2$$

Alternativamente, usando a definição:

$$f'((1,1);(1,2)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((1,1)+h(1,2)) - f(1,1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1+2h)-\frac{1}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2}{(1+h)^2+(1+2h)^2} - \frac{1}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2-(1+h)^2-(1+2h)^2}{2h((1+h)^2+(1+2h)^2)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-(1+4h+4h^2)}{2h((1+h)^2+(1+2h)^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2-3h)}{2\cancel{h}((1+h)^2+(1+2h)^2)} = -\frac{2}{4} = -1/2$$

5 Fazendo $t=0$ temos

$$f(0) = f(0x) = 0^\alpha f(x) = 0$$

$$f'(x;x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hx)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((1+h)x)-f(x)}{h}$$

Notem que $1+h>0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha f(x)-f(x)}{h}$$

$$\frac{0}{0} \quad = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha-1}{h} f(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(1+h)^{\alpha-1}}{1} f(x) = \alpha f(x),$$

aplicando a Regra de l'Hôpital