Departamento de Matemática e Aplicações

2015/2016

Calculo Vectorial

18 de Junho de 2016

2 teste

Duração: 120 minutos

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Considere a superfície dada pela equação

$$z = x^2 + y^2 + 3$$

   (a) Escolha um ponto da superfície e determine a equação do plano tangente nesse ponto.

   (b) Qual a direcção de maior crescimento da função no ponto que escolheu.

2. Use a regra da derivação da função composta para determinar $D(f \circ g)(-1, 2)$ para $f(u, v, w) = (v^2 + w^2, u^3 - vw, u^2v + w)$ e $g(x, y) = (3x + 2y, x^3y, y^2 - x^2)$

3. Uma caixa de forma rectângular **sem tampa** deve ter uma área superficial de $16m^2$. Determine as medidas da caixa que maximizam o volume.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Considere o subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$ e $\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant x$

   (a) Escreva, sem resolver, os limites de integração do integral $\displaystyle\iint_D f(x, y)dA$.

   (b) Escreva, sem resolver, o integral da alínea anterior trocando a ordem de integração.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Considere o subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$ e $\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant x$

   (a) Escreva, sem resolver, os limites de integração do integral $\iint_D f(x, y) dA$.

   (b) Escreva, sem resolver, o integral da alínea anterior trocando a ordem de integração.

5. Calcule o volume da região delimitada pelos planos $x = y$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $x + y + z = 0$. $z = -x - y$

6. Determine se o campo vectorial definido por $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (6x^2z^2, 5x^2y^2, \cancel{4Y}2z^2y)$ é conservativo, usando dois métodos diferentes.

7. Considere a trajectória fechada definida pelo arco de circunferência de raio 3 que une o ponto $(3, 0)$ ao ponto $(-3, 0)$ e que segue o segmento de recta ao longo do eixo dos xx' que une $(-3, 0)$ a $(3, 0)$. Calcule o integral do campo vectorial $\overrightarrow{F}$ no plano definido por $\overrightarrow{F} = (xy^2, -yx^2)$

   (a) Calcule efectivamente o integral de linha.

   (b) Calcule o integral usando o Teorema de Green.

   (c) O campo é conservativo?

8. Calcule o integral $\iint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint_{\partial S} (x^2 + y + z) dS$ em que S é a superfície da esfera de centro zero e raio 1, usando o teorema da divergência de Gauss. Considere a superfície da esfera orientada de modo que $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$.