Cálculo EC: aula 3

Teorema de Bolzano - Cauchy:

Seja $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, f contínua. Dados a, b tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$ então $\exists\, c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

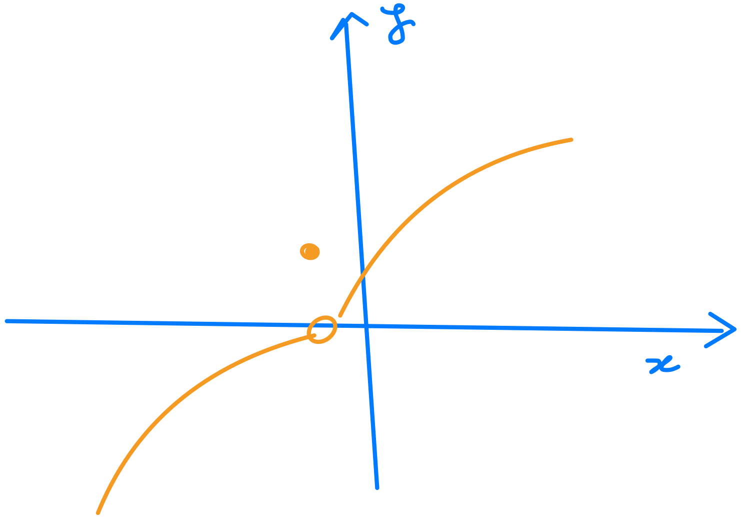
Teorema do valor intermédio

Seja $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, f contínua. Dados a, b tais que $g(a) < g(b)$ (ou $g(b) < g(a)$) e dado d tal que $g(a) < d < g(b)$ (resp. $g(b) < d < g(a)$) então existe $c \in]a,b[$: $g(c) = d$.

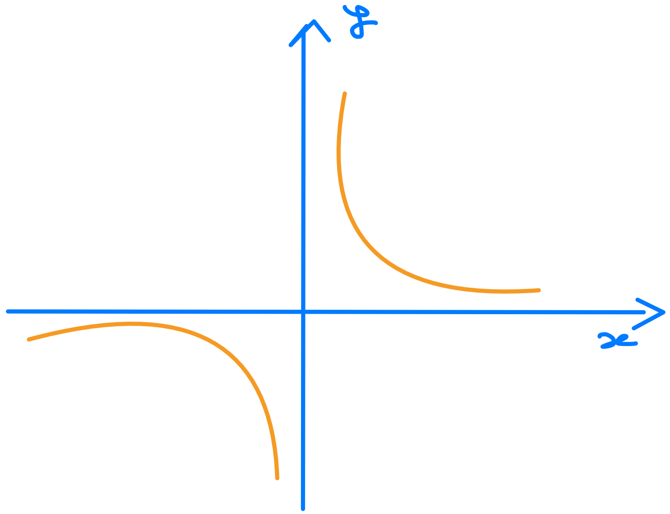
Demonstração: Basta considerar $f(x) = g(x) - d$ e aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função f.

Portanto estes dois teoremas são equivalentes!

E se f não for contínua?



E se I não for um intervalo?



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$ é contínua

$\mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

não é um intervalo

Operações elementares entre funções: somas, subtrações, produtos, divisões, composições.

13. Mostre que o polinómio $P(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ tem uma raiz no intervalo $[-1; 0]$.

$D_f = \mathbb{R}$, P é contínua porque é polinomial

$P(-1) = -1 - 4 + 1 - 3 + 1 = -6$ $\quad P(0) \cdot P(-1) < 0$

$P(0) = 1$

Logo pelo Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists\, c \in]-1, 0[$ tal que $P(c) = 0$.

14. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique a sua resposta.

(a) A equação $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\cos x = 0$ admite pelo menos uma solução em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Existe pelo menos um ponto $x \in]0, \pi/2[$ tal que $x(\operatorname{sen} x)^{17} = (\cos x)^{13}$.

a $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\cos x \qquad D_f = \mathbb{R}$

f é contínua porque é o resultado de operações elementares entre funções trigonométricas e polinómios.

$f(\pi/3) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - 2\frac{\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} < 0$

$f(\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/4) - 2\frac{\pi}{4}\cos(\pi/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

Pelo teorema de Bolzano - Cauchy, $\exists\, c \in]\pi/3, \pi/2[: f(c) = 0$

b $g(x) = x(\operatorname{sen} x)^{17} - (\cos x)^{13} \qquad D_g = \mathbb{R}$

g é contínua porque é o resultado de operações elementares entre funções trigonométricas e polinómios.

$\left.\begin{array}{l} g(0) = -1 \\ g(\pi/2) = \pi/2 \end{array}\right\} \quad g(0) \cdot g(\pi/2) < 0$

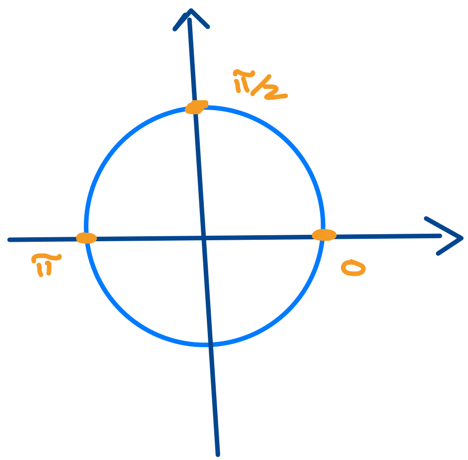
Pelo teorema de Bolzano - Cauchy, $\exists\, c \in]0, \pi/2[: g(c) = 0$.

15. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{2x-7} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \cos x \qquad \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x + \cos x$$

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{2x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \frac{5+3/x}{2-7/x} = 5/2$



- $\displaystyle \lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\displaystyle \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\displaystyle \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\Big\rangle \; \nexists \displaystyle \lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$$

uma vez que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ pois $\operatorname{sen} x$ é limitada e

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- $$\lim_{x \to -\infty} e^{x} \cos x = 0$$ uma vez que $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ e $\cos x$ é uma função limitada

- $$\lim_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

- $$\lim_{x \to +\infty} e^{x} + \cos x = \lim_{x \to +\infty} e^{x}\left(1 + e^{-x} \cos x\right) = \lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$$

pois $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \cos x = 0$ uma vez que $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ e $\cos x$ é uma função limitada

16. Determine o valor do parâmetro a para que a seguinte função seja contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2a\ln\left(\frac{xe}{2}\right) & 0 < x \leq 2 \\ \ln(x^2-4) - \ln(x-2) & x > 2 \end{cases}$$

• $\lim\limits_{x \to 2^-} 2a \ln\left(\frac{xe}{2}\right) = 2a \ln(e) = 2a$

• $\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) - \ln(x-2) = -\infty + \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \ln\left(\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x+2) = \ln 4 = 2\ln 2$

ou $\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) - \ln(x-2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \ln((x-2)(x+2)) - \ln(x-2) =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \ln\cancel{(x-2)} + \ln(x+2) - \ln\cancel{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x+2) = 2\ln 2.$

NOTA: $\ln(x^a) = a\ln(x)$ $\quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$

Para f ser contínua $2a = 2\ln 2 \Leftrightarrow a = \ln 2.$

17. Determine os valores dos parâmetros a e b para que a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

seja contínua.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 5 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -a+b \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = a+b$$

Temos que Resolver o sistema $\begin{cases} -a+b = 5 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 5 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5/2 \\ a = -5/2 \end{cases}$

Para f ser contínua: $a = -5/2$ e $b = 5/2$.

Funções hiperbólicas diretas

- Seno hiperbólico

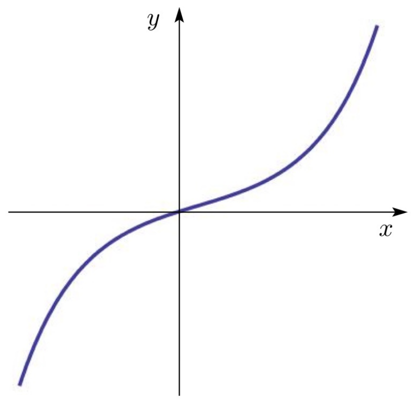
$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \Rightarrow \operatorname{senh}(x)$ é ímpar

$\operatorname{senh} x$ é estritamente crescente

$\operatorname{Im}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$ $\qquad \operatorname{senh}(0) = 0$

$\operatorname{senh}' x = \cosh x$



- Cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

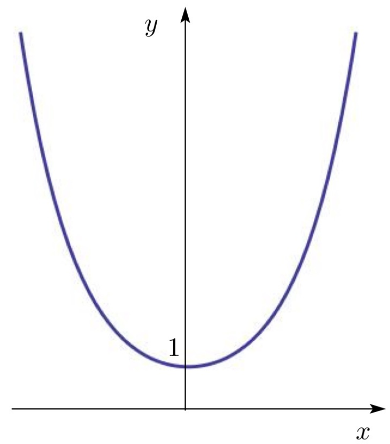
$\cosh(-x) = \cosh(x) \Rightarrow \cosh$ é par

$\cosh x$ é decrescente de $]-\infty, 0[$

$\cosh x$ é crescente de $]0, +\infty[$

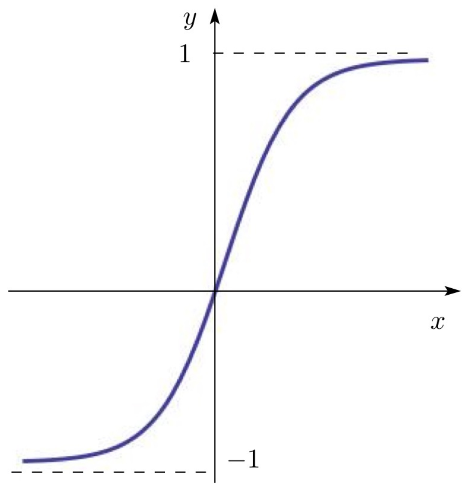
$\operatorname{Im}(\cosh) = [1, +\infty[$ $\qquad \cosh(0) = 1$

$\cosh' x = \operatorname{senh} x$



- tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$



tanh é ímpar

tanh é estritamente crescente

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh = 1$$

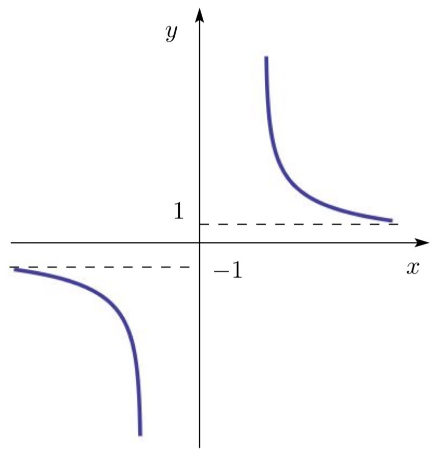
$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$$

$\operatorname{Im}(\tanh) =]-1,1[$

$\tanh(0) = 0$

- cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cotan} h(x) = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$



$D_{\operatorname{cotanh}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

cotanh é descrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{cotanh} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{cotanh} = -1$$

$\operatorname{Im}(\operatorname{cotan}) = \mathbb{R} \setminus [-1,1[$

Algumas propriedades:

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

  TPC: demonstrar esta propriedade

- $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

- $\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
- $\operatorname{senh}(x \mp y) = \operatorname{senh} x \cosh y \mp \operatorname{senh} y \cosh x$

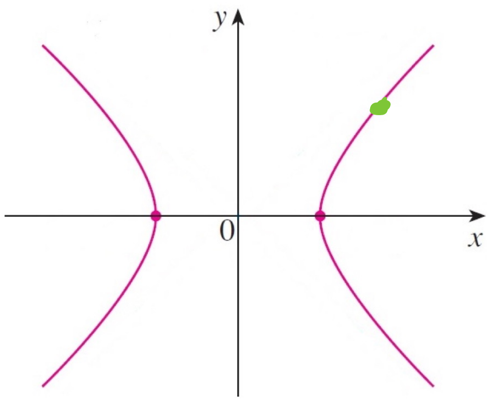
- $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

- $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 h(x)}$

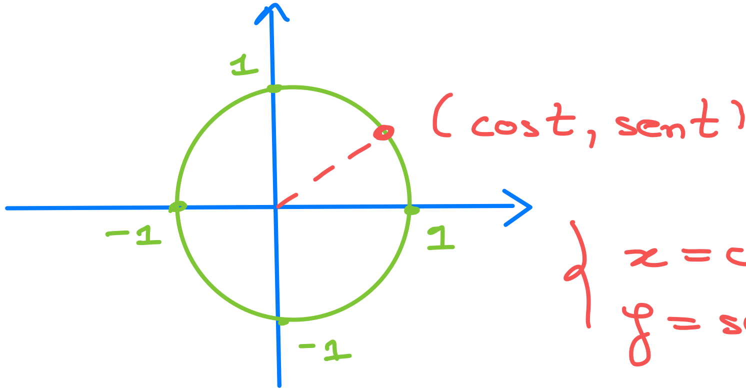
- $\operatorname{cotanh}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}$

Porquê o nome funções hiperbólicas?

Hipérbole: $x^2 - y^2 = 1$



$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Circunferência: $x^2 + y^2 = 1$