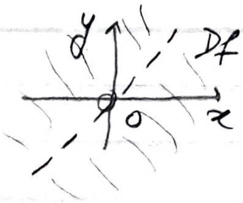
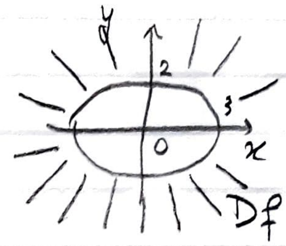
① a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \neq 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$




b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$

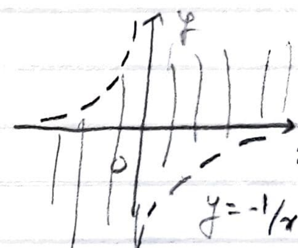
$4x^2 + 9y^2 = 36 \iff \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

Equação duma elipse

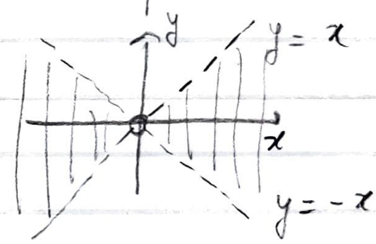



c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + xy > 0\}$

$1 + xy > 0 \iff xy > -1 \iff \begin{cases} y > -\frac{1}{x} \wedge x > 0 \\ \vee \\ y < -\frac{1}{x} \wedge x < 0 \end{cases}$




d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$




② a) $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} (3x - 2y) = 3 - 2 = 1$

b) $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} (3x^2 - y) = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1$

③ a) $\lim\limits_{(x,y) \to (1,1)} \dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{2 \cdot 0 \cdot 1^2}{1^2 + 1^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-2y^2}{y^2} = -2$

Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y \to 0} f(0,y)$, o limite $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ não existe

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{y^2-2y}{x^4+y^2} = \dfrac{0}{16} = 0$

$\lim\limits_{y\to 0} g(0,y) = \lim\limits_{y\to 0}\left(1-\dfrac{2}{y}\right) = \infty$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x-1) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x-1+1} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

notem que, quando $x\to 0$ temos que $(x,x-1)\to(0,-1)$

$\lim\limits_{y\to 0} f(y,y^2-1) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2}{y^2-1+1} = 1$

Notem que, quando $y\to 0$ temos que $(y,y^2-1)\to(0,-1)$

Então, aproximando-nos de $(0,-1)$ de maneiras diferentes, obtemos limites diferentes. Assim

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{x^2}{y+1}$ não existe.

4) a) $0 \leq \left|(x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = (x^2+y^2)\underbrace{\left|\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\leq 1}$

$\leq x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

A função que estamos a estudar será designada por f em todas as alíneas

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3, x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

e) $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} |y| = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

f) $0 \leq \left| \frac{x y^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

g) $0 \leq \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,|z|}{x^2+y^2+z^2} = |z| \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0$

Então $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Então $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

5) a) f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser o quociente de dois polinómios

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2,x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$.

Então f é descontínua em $\{(0,0)\}$.

{pontos de descontinuidade de f} = $\{(0,0)\}$

b) $f$ é contínua em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$ porque é o quociente de dois polinómios. Vamos verificar o que se passa nos pontos da forma $(x_0, 0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Seja $x_0\neq 0$. Então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{x}{y} = \frac{x_0}{0} = \infty,$$
pelo que $f$ é descontínua nesse ponto

Seja $x_0 = 0$. Então
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$
e
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$
pelo que $f$ é descontínua em $(0,0)$ e os pontos de descontinuidade de $f$ são os pontos do conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$

c) $f$ é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser o quociente de dois polinómios.
$$0\leq \left|\frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{4|x||y||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{4\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}|x^2-y^2|}{x^2+y^2}$$
$$= 4|x^2-y^2| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$
Então $f$ é contínua em $(0,0)$ e o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f$ é o conjunto vazio

d) $f$ é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, por ser o quociente de 2 polinómios.
$$0\leq \frac{2|x|^3|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{(x^2+y^2)^2} = 2(x^2+y^2) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$
Então $f$ é contínua em $(0,0)$ e $\{$pontos de descontinuidade de $f\} = \emptyset$

e) $f$ é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, por ser o quociente de 2 polinómios.

Para ver que $f$ é contínua em $(0,0)$, tenho de vos provar uma desigualdade nova, que torna a questão simples:

$0 \leq (|a|-|b|)^2 = a^2+b^2-2|a||b|$ e então temos que $0 \leq a^2+b^2-2|a||b|$ e, consequentemente,

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad 2|a||b| \leq a^2+b^2$$

Apliquemos esta desigualdade ao denominador de f. Então, se $a=x^2$ e $b=|y|$, obtemos

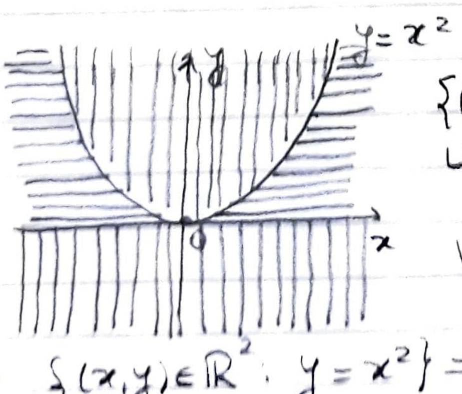
$$2x^2|y| \leq (x^2)^2+|y|^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2|y| \leq x^4+y^2$$

Então $$\frac{1}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2x^2|y|}.$$

Assim,
$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|^3|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^3|y|}{2x^2|y|} = \frac{1}{2}|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Então $f$ é contínua em $(0,0)$ e
{pontos de descontinuidade de $f$} $= \emptyset$

f) A função $f$ envia os pontos da região ▥ em 1 e os de região ▤ em 0.




Então $f$ é contínua em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x^2\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y \wedge y>0\}$

Vejamos o que se passa:

Em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\} = A$
notem que, se $(x_0,y_0)\in A$ então $f(x_0,y_0)=1$ e
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 0<y<x_0^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 0<y<x_0^2}} 0 = 0 \neq f(x_0,y_0)$$
Esta afirmação é verdadeira, mesmo quando $(x_0,y_0)=(0,0)$,

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sendo $a = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, é contínua

(6) $f(x,y) = \dfrac{1 - \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Notem que, se chamarmos $z = x^2+y^2$, então

$$(x,y) \to (0,0) \iff x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \iff \begin{cases} z \longrightarrow 0 \\ \text{quando } (x,y)\to(0,0) \end{cases}$$

Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(z)}{z} = \frac{0}{0}$$

(aplicando a Regra de l'Hôpital - função de 1 variável) $= \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{1} = 0$

Assim,

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é um prolongamento contínuo de $f$.

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Sabemos, pelo exercício 4-b) desta folha, que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe.

Então $g$ não pode ser prolongada continuamente a $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sendo $a = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, é contínua

(6) $f(x,y) = \dfrac{1 - \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Notem que, se chamarmos $z = x^2+y^2$, então

$$(x,y) \to (0,0) \iff x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \iff \begin{cases} z \longrightarrow 0 \\ \text{quando } (x,y)\to(0,0) \end{cases}$$

Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(z)}{z} = \frac{0}{0}$$

(aplicando a Regra de l'Hôpital - função de 1 variável)

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{1} = 0$$

Assim, $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é um prolongamento contínuo de $f$

$g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Sabemos, pelo exercício 4-b) desta folha, que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe

Então $g$ não pode ser prolongada continuamente a $\mathbb{R}^2$.