Introdução à Física Experimental   LicFís & EngFís 2021 / 2022

- Incerteza padrão
  - Caraterização da dispersão dos dados
- Teorema do limite central e distribuição normal
  - Exemplificação do TLC
  - Relação da distribuição normal com o desvio padrão
  - Importância, vantagens e perigos do uso da distribuição normal
  - Limitações práticas do TLC
  - Limites de validade da aproximação a uma distribuição normal
- Propagação da incerteza padrão
  - Funções lineares e funções não lineares; exemplo
  - Aproximação a uma função linear: condições de validade
  - Correlação: exemplo e importância na propagação de incertezas
  - Fórmulas simplificadas para casos típicos de propagação de incertezas

Incerteza padrão

2.30

incerteza-padrão

standard measurement uncertainty *; standard uncertainty of measurement ; standard uncertainty*

incertitude-type

incertidumbre típica de medida *; incertidumbre estándar de medida ; incertidumbre típica ; incertidumbre estándar*

Incerteza de medição expressa na forma dum desvio-padrão.

A incerteza da medição pode ser estimada a partir da incerteza padrão.

Suponhamos que calculávamos a média de um conjunto de N valores. O desvio padrão para uma amostra será dado por (https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation):

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Noutros casos poderão usar-se outras expressões.

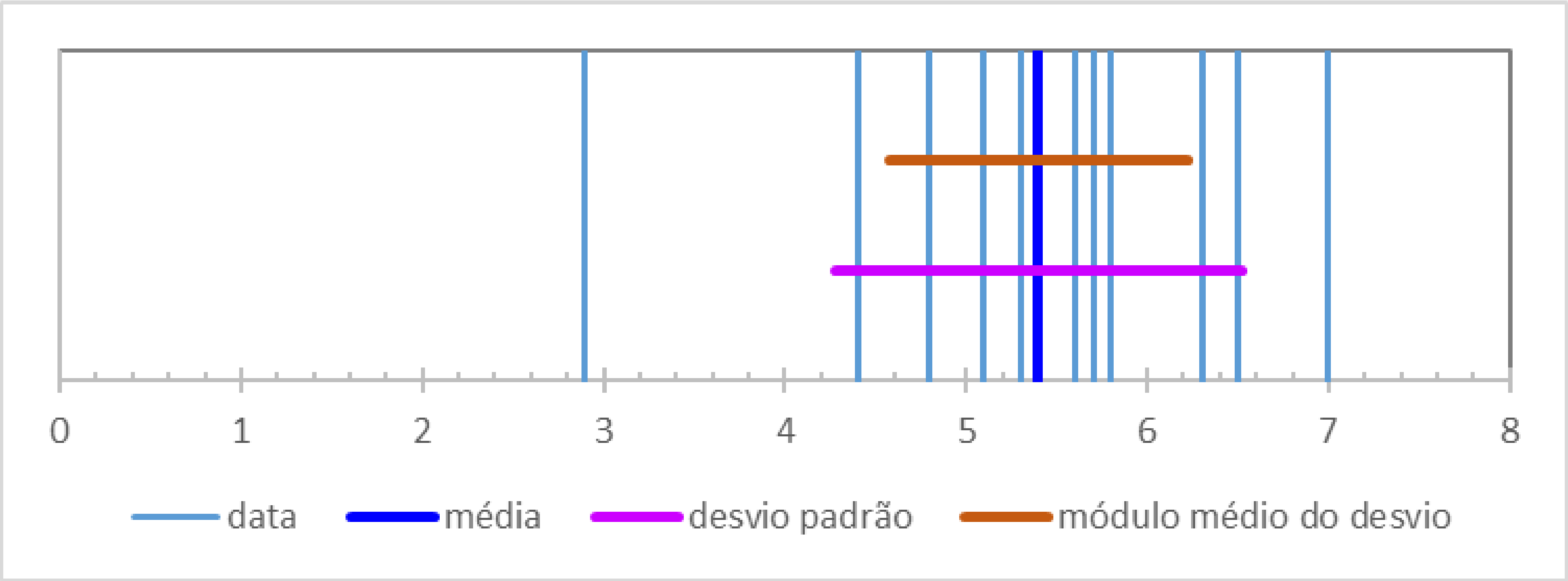
Porque se usa a incerteza padrão?

Caraterização da dispersão dos dados

Há várias razões para usar o desvio padrão para caraterizar a dispersão dos dados. O desvio médio não servia pois é nulo. A média dos módulos dos desvios não é prática (funciona bem com computadores, mas em termos algébricos complica muito a matemática)

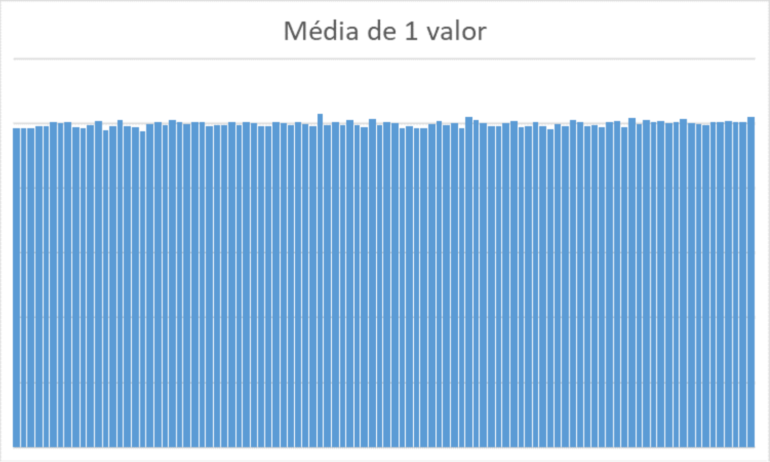
- Desvio médio: $d_{médio} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 0$
- Média do módulo do desvio: $|d|_{médio} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}| \geq 0$

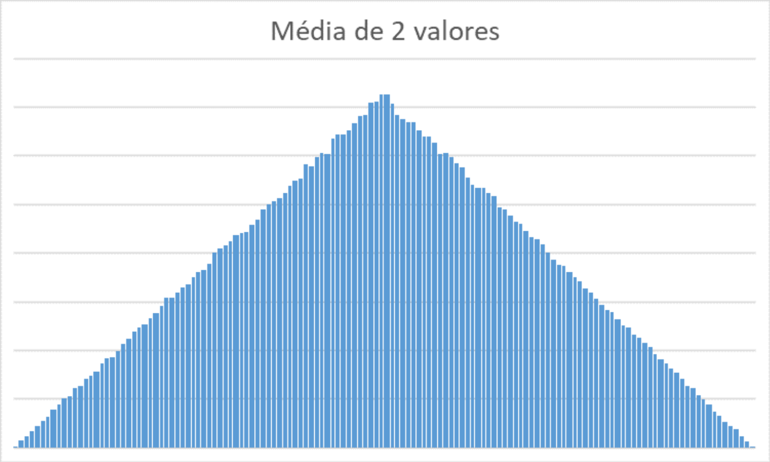
O desvio padrão tem ainda propriedades matemáticas úteis.

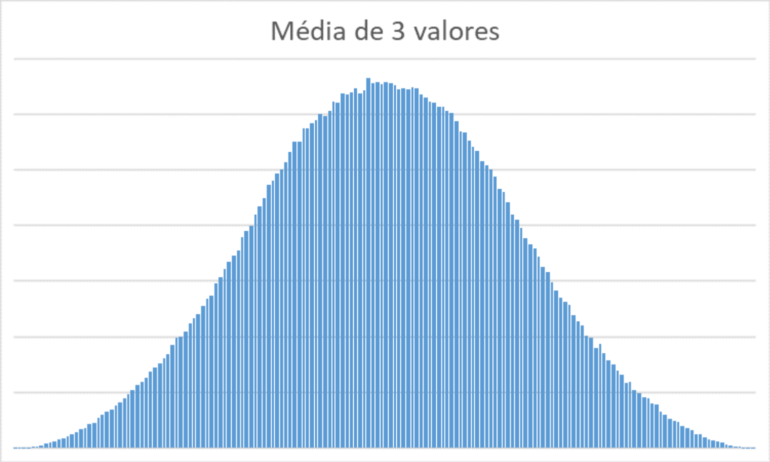


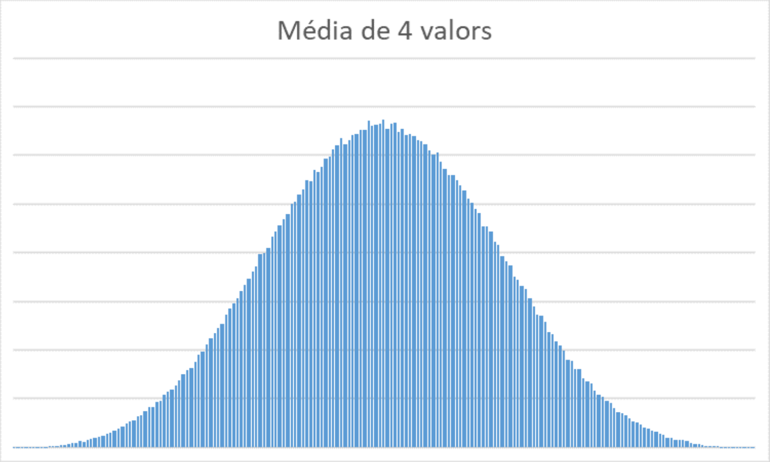
Distribuição normal – teorema do limite central

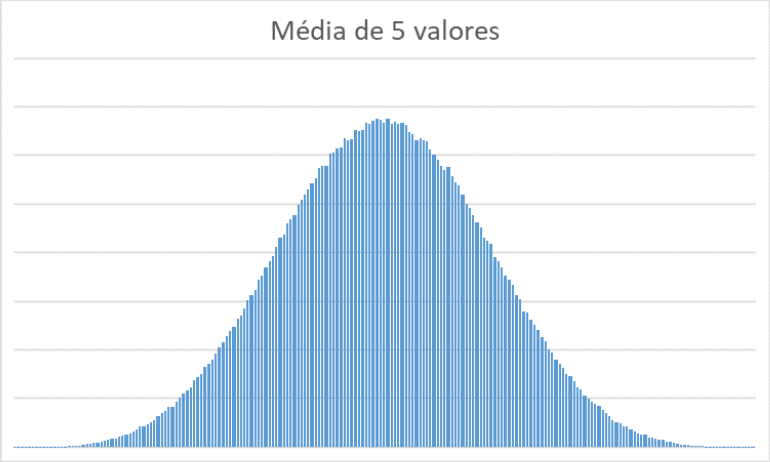
O teorema do limite central (https://en.wikipedia.org/wiki/Central_limit_theorem) afirma que, em determinadas condições, a combinação de (infinitas) incertezas tenderá para uma distribuição normal. Exemplo partindo de distribuições retangulares (gráficos não à escala):

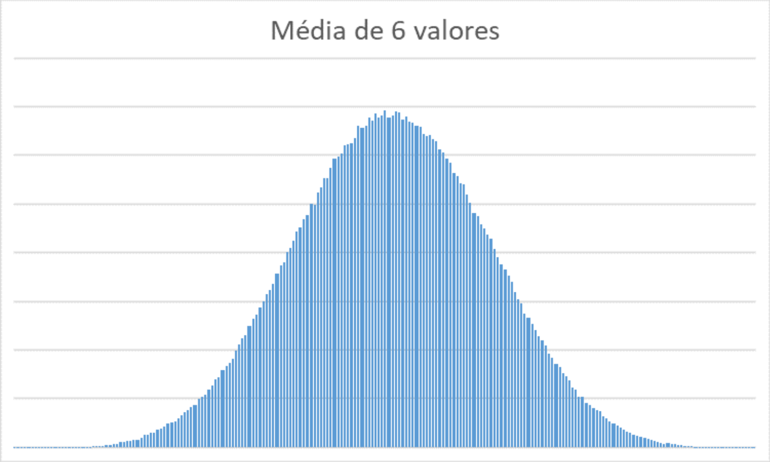






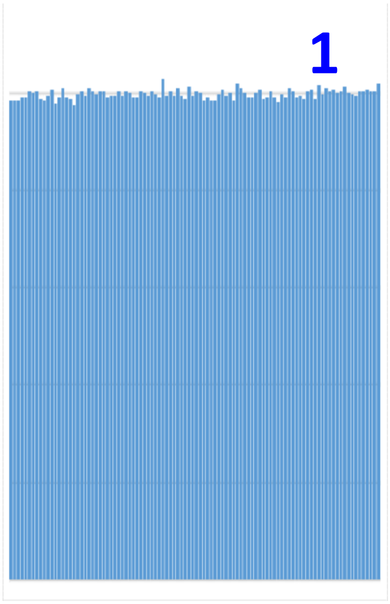


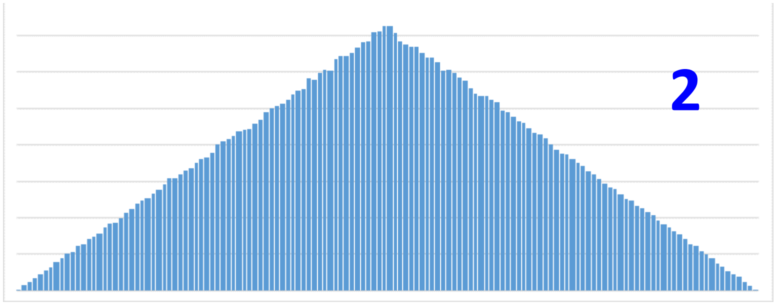


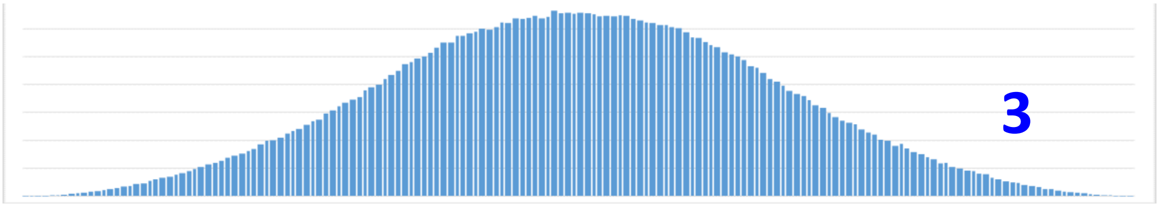


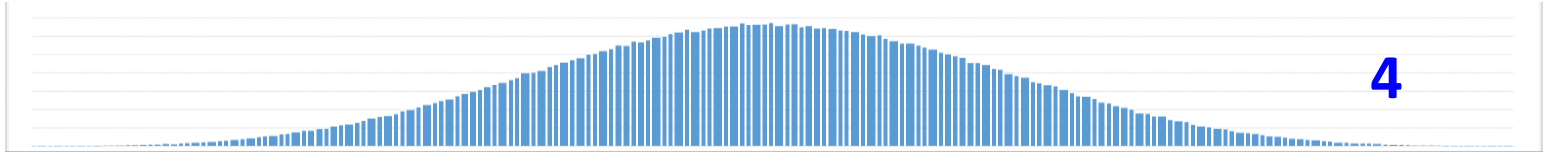
Distribuição normal – teorema do limite central

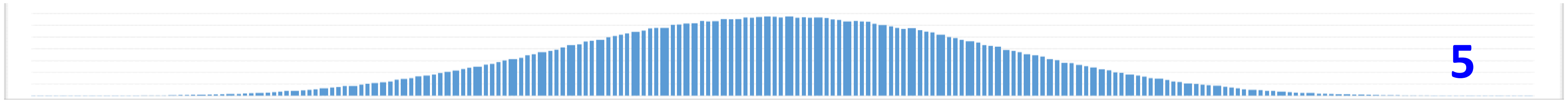
Representação à escala (aproximada, não rigorosa) das funções densidade de probabilidade por combinação de 1, 2, …, 6 funções densidade de probabilidade retangulares. Notem que as áreas devem ser todas iguais.

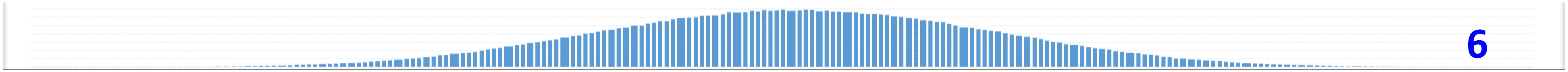










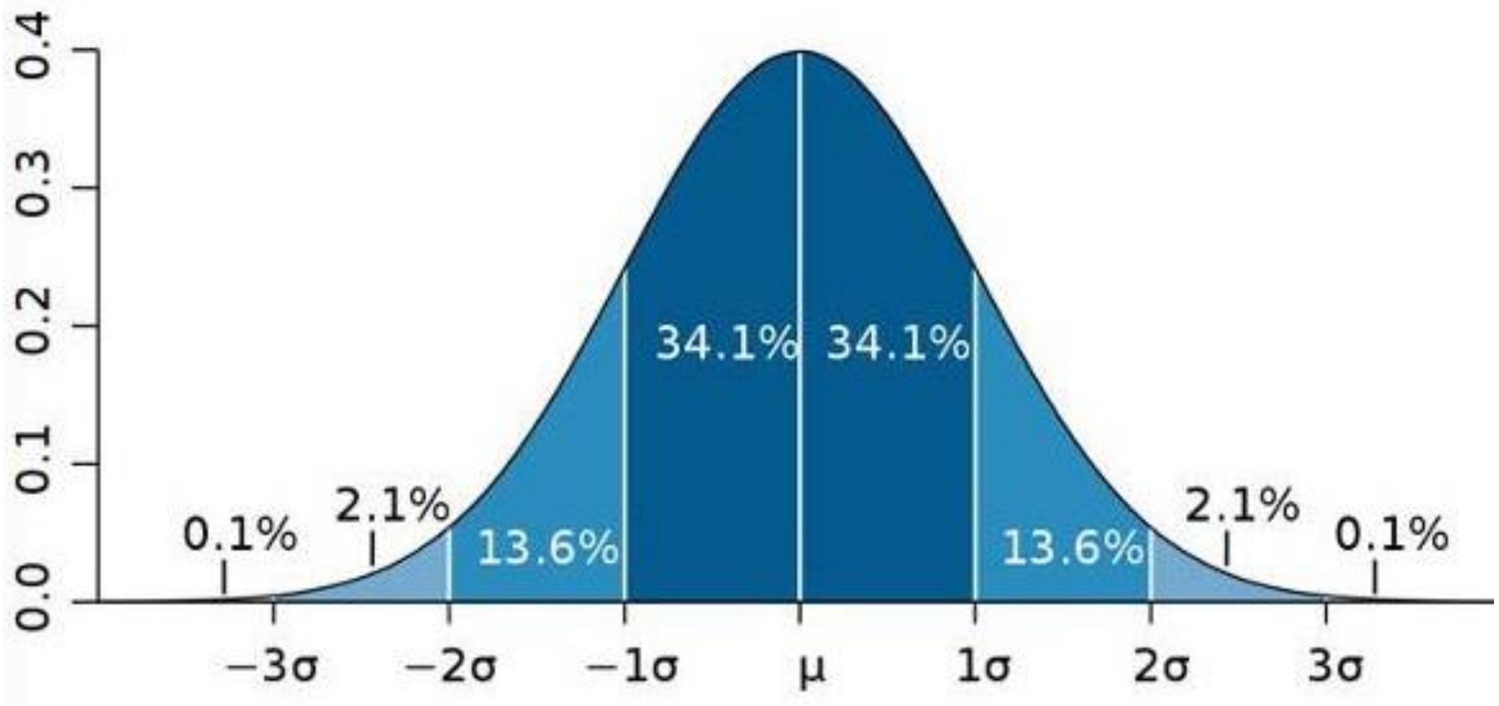


Distribuição normal – desvio padrão

A fórmula do desvio padrão (amostra) foi apresentada acima para uma distribuição discreta (conjunto de valores experimentais, por exemplo) sob a forma de um somatório. Para uma função densidade de probabilidade contínua toma a forma de um integral:

$$desvio\ padrão = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot p(x) \cdot dx}$$

Se substituírem $p(x)$ pela fórmula da gaussiana, irão obter σ.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribuição normal – vantagens e perigos

O uso da distribuição normal tem várias vantagens:

- Tem propriedades matemáticas interessantes o que significa que é fácil de usar em cálculos teóricos, que há muita informação e teoremas que nos podem ajudar.
- O teorema do limite central deixa-nos confiantes de que a sua ocorrência é razoavelmente comum e que será uma bom modelo para a distribuição dos nossos pontos experimentais. Nem sempre é verdade!
- O seu uso é tão prevalente que temos tendência a usar os seus intervalos de probabilidade. Por exemplo, a probabilidade de x estar compreendido no intervalo:

Valor médio	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$
Distribuição normal	68%	95%
Distribuição retangular	58%	100%

  Como se vê, nem sempre é verdade!
- É frequente em medições haver um número reduzido (1, 2, …) de fatores que contribuem com o grosso das fontes de incerteza. Se as distribuições de probabilidade dessas fontes forem claramente *não* gaussianas, então a distribuição final também não será gaussiana.

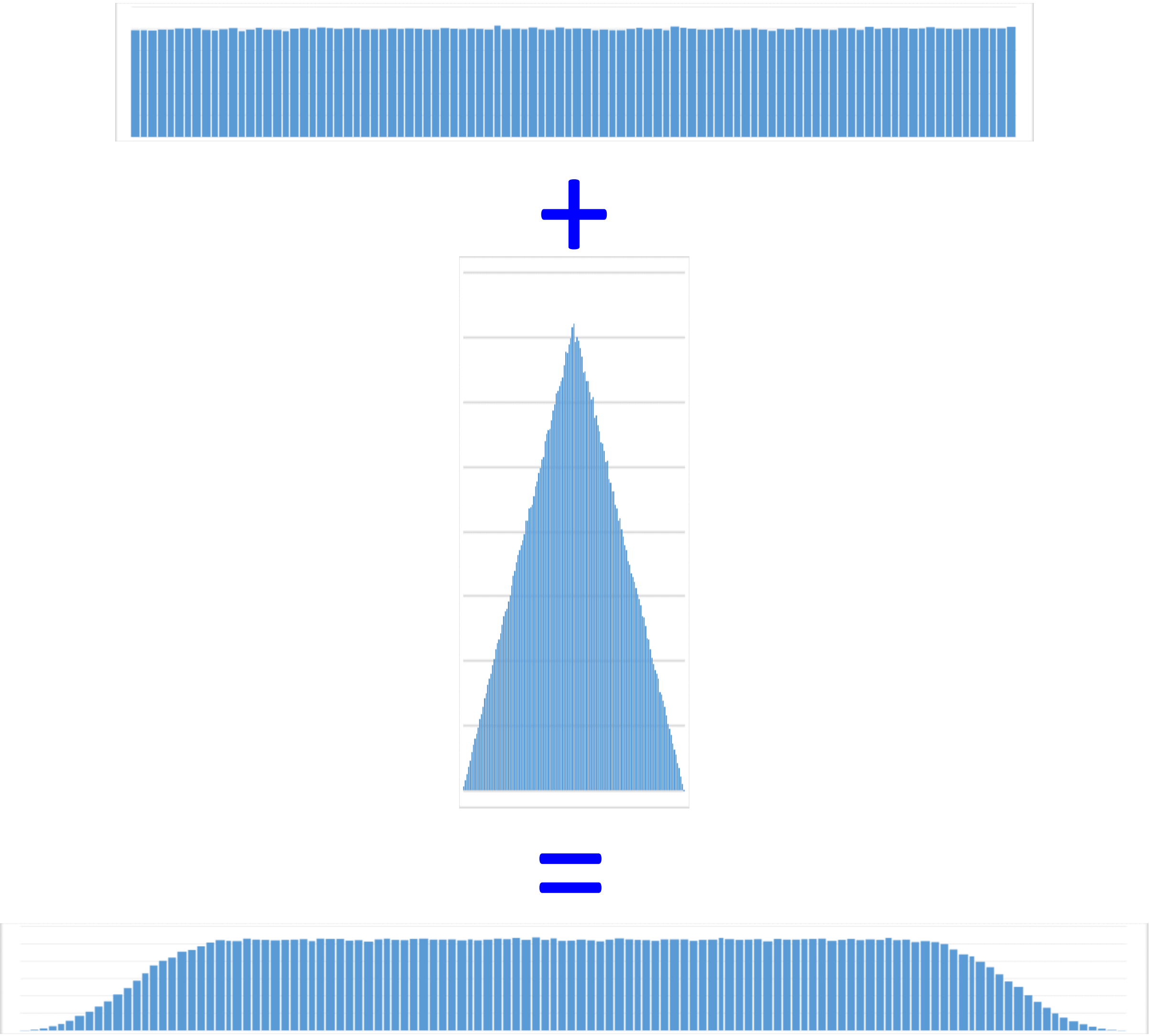
Validade do teorema do limite central

No exemplo à direita está simulada uma medição com duas causas principais de erro:

- Uma tem uma distribuição retangular com largura 2 unidades
- Outra tem uma distribuição triangular com largura 0,5 unidades.

Como podemos verificar, a distribuição final é muito próxima da distribuição retangular (apenas as bordas foram ligeiramente deformadas pela contribuição da distribuição triangular).

Esta situação não põe em causa a validade do teorema do limite central (as condições não são cumpridas), mas põe em evidência que a suposição de uma distribuição normal pode não se cumprir.

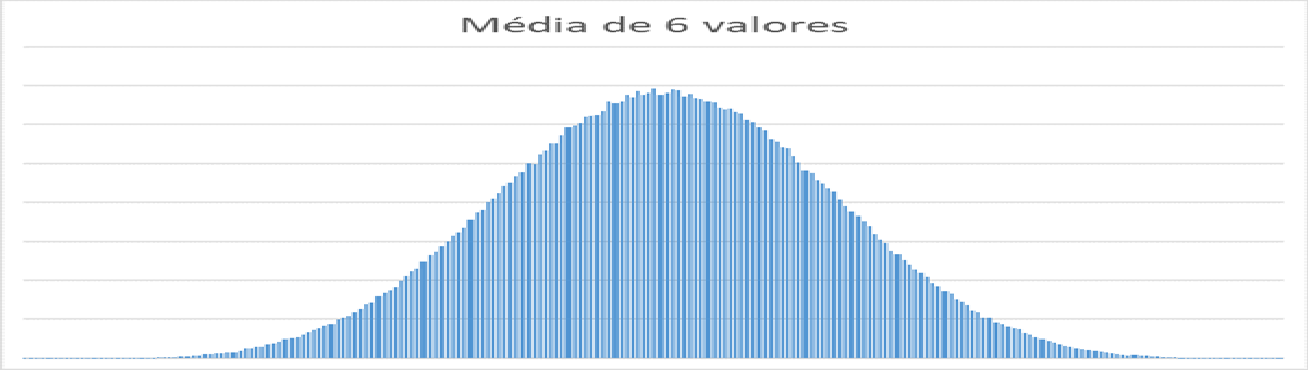


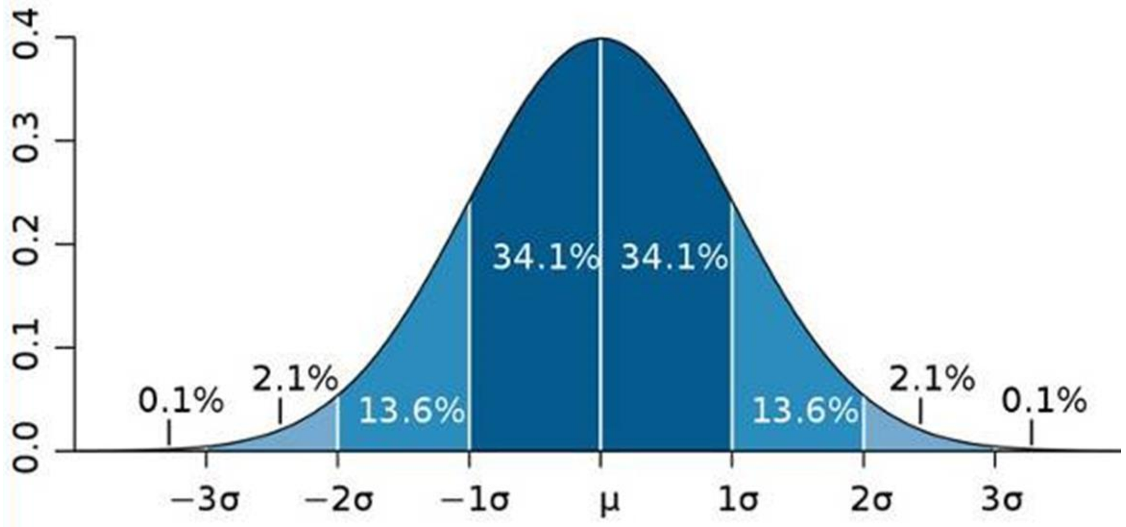
Validade da aproximação a uma gaussiana

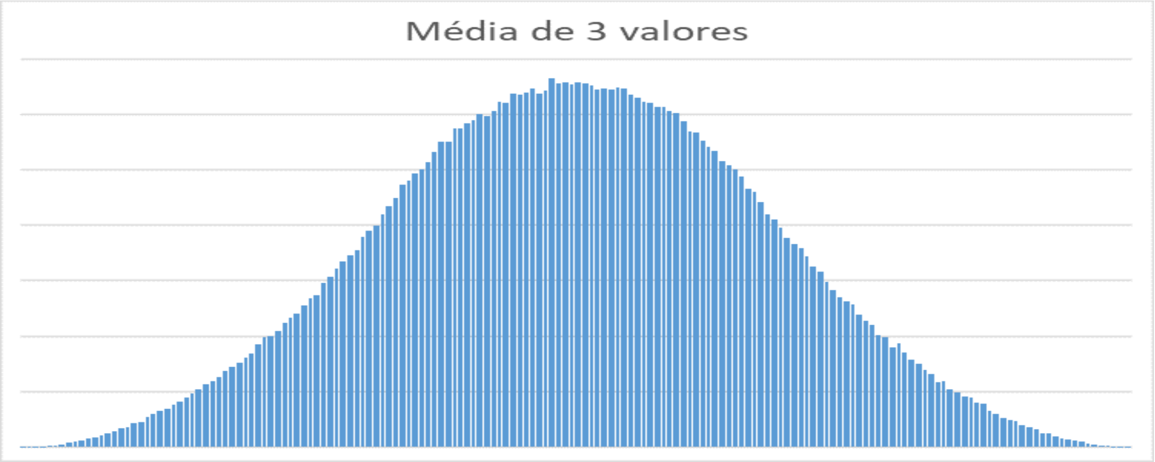
No exemplo da combinação de três distribuições retangulares, podemos supor que o aspeto da distribuição resultante se aproxima ao de uma distribuição gaussiana. Mas o formato não é perfeito (melhora para a combinação de 6 distribuições retangulares).

Outro aspeto que pode ser muito importante é que a gaussiana vai de menos infinito a mais infinito e as outras são zero a partir de uma certa distância da média.

A aproximação só é válida na zona central!







Propagação da incerteza padrão

As fórmulas que permitem o cálculo do desvio padrão para os casos acima indicados (conjunto discreto de dados ou uma densidade de probabilidade contínua) não dependem da forma da densidade de probabilidade. Aplicam-se a qualquer situação, seja a distribuição de probabilidade gaussiana ou não.

Consideremos agora a função de uma variável:

$$y = f(x)$$

Conhecendo a incerteza padrão de *x*, como calcular a incerteza padrão de *y*?

Se a função for linear,

$$y = ax + b$$

Então

$$s_y = a s_x$$

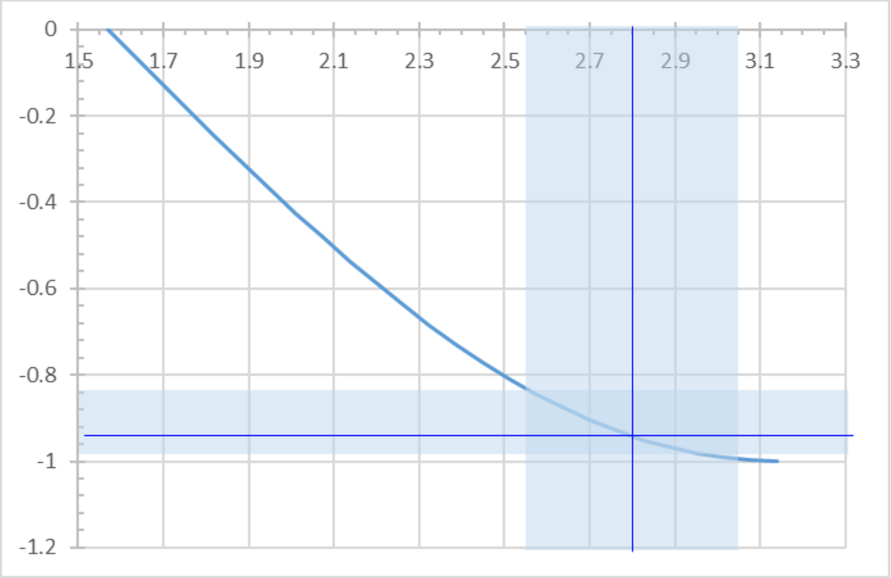
Uma transformação linear não altera a forma da densidade de probabilidade, apenas a "estica" ou "encolhe", por um fator igual ao declive da reta.

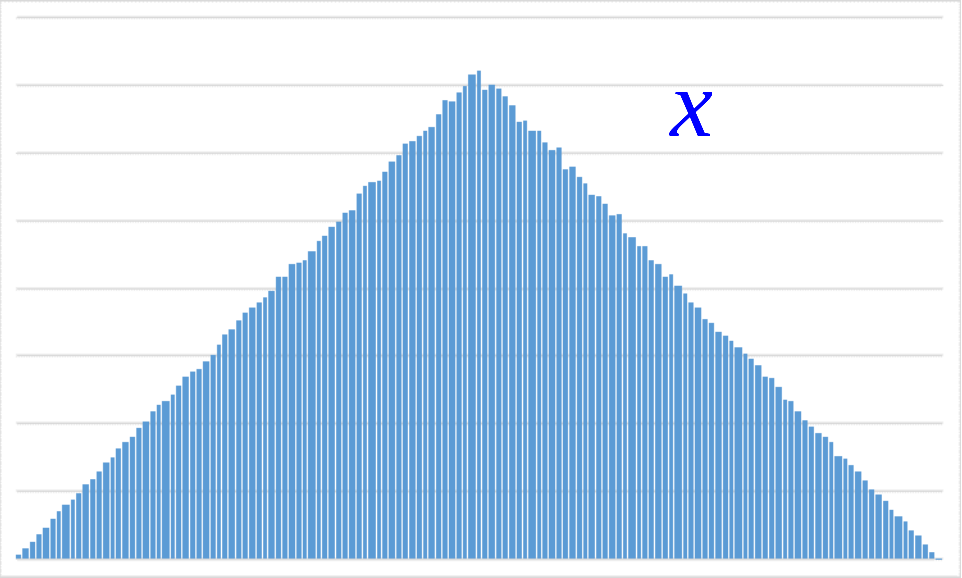
Mas o que fazer se a função não é linear?

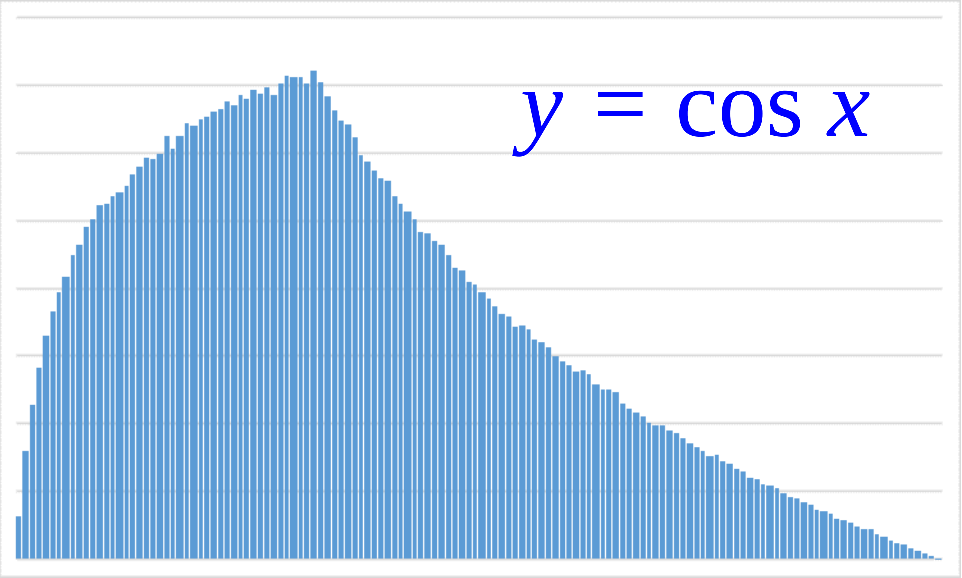
- No caso geral é muito complexo (o GUM sugere o uso do método de Monte Carlo)
- Se a função é aproximadamente linear na zona onde se concentram os pontos experimentais, podemos usar a tangente à função…

Propagação da incerteza padrão

Consideremos como exemplo a função
$y = \cos x$
A densidade de probabilidade de *x* é triangular, centrada em 2,8 e com amplitude 0,5 (ou seja, $x \in \,]2{,}55; 3{,}05[$)
A densidade de probabilidade de *y* apresenta-se muito deformada e assimétrica.
O gráfico à direita mostra a função cos, os valores médios e a dispersão dos valores de *x* e de *y*.







Propagação da incerteza padrão – função de duas variáveis

Consideremos como exemplo a função

$y = f(x_1, x_2)$

Se as dispersões dos valores de x_1 e x_2 forem suficientemente pequenas para podermos aproximar a função *f* como sendo linear, então teremos

$y \cong a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$

Se tivermos N_1 pontos x_1 e N_2 pontos x_2, e representarmos um valor médio com um traço por cima, então, considerando que se trata da população e não de uma amostra:

$s_{x_1}^2 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\left(x_{1,i} - \overline{x_1}\right)^2 = \overline{x_1^2} - \overline{x_1}^2$ e $s_{x_2}^2 = \frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2}\left(x_{2,j} - \overline{x_2}\right)^2 = \overline{x_2^2} - \overline{x_2}^2$

$s_y^2 = \frac{1}{N_1} \cdot \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\left[a_1 x_{1,i} + a_2 x_{2,j} + b - (a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2} + b)\right]^2$

$s_y^2 = a_1^2 \cdot \left(\overline{x_1^2} - \overline{x_1}^2\right) + a_2^2 \cdot \left(\overline{x_2^2} - \overline{x_2}^2\right) = a_1^2 \cdot s_{x_1}^2 + a_2^2 \cdot s_{x_2}^2$

Se tivermos em conta que os parâmetros a_1 e a_2 correspondem às derivadas parciais:

$a_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ e $a_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2})$

Tornamos plausível a equação $s_y^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}s_{ij}$

Variáveis independentes e correlação

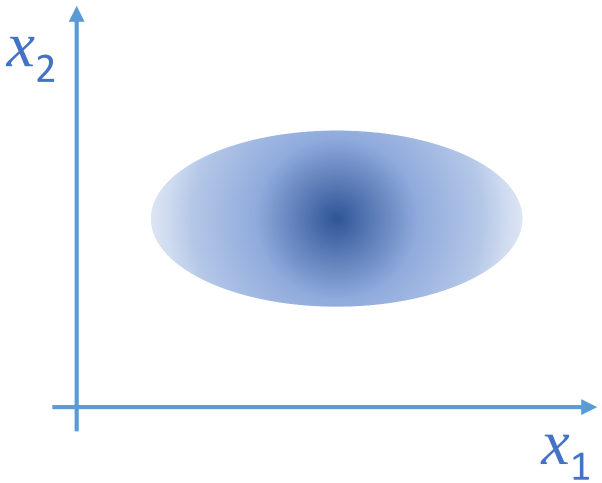
As fórmulas pressupõe que as variáveis x_1 e x_2 são não correlacionadas. A exceção é a parte cinzenta da última equação.

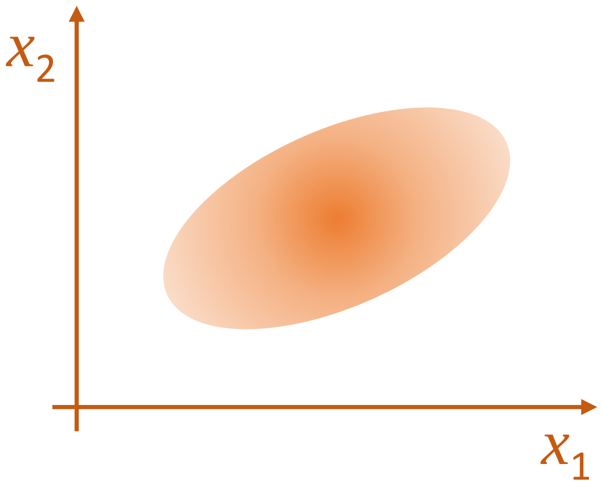
O gráfico a azul representa a distribuição das duas variáveis caso não estejam correlacionadas.

Já no gráfico laranja há uma correlação positiva entre as duas variáveis. O que significa isso? Significa que, se o desvio na variável x_1 for positivo, então é mais provável que o desvio na variável x_2 também seja positivo.

Quando as variáveis estão correlacionadas a propagação das incertezas é mais complexa e é necessário usar a parte cinzenta da última equação do slide anterior.

Para percebermos como isso funciona vejamos um caso extremo: $x1$ e $x2$ representam a mesma variável x. Neste caso dizemos que a correlação é perfeita. Com base nisso vamos calcular a incerteza padrão em $y = x^2$.





Variáveis independentes e correlação

As equações de partida são (*a* é uma constante):

$x_1 = x_2 = x$ e $y = a \cdot x^2 = a \cdot x_1 \cdot x_2$

Claramente, $s_x = s_{x_1} = s_{x_2}$ porque a variável é a mesma, apenas estamos a usar nomes diferentes. Calculemos a incerteza em *y* usando as duas expressões:

$$y = a \cdot x^2 \Rightarrow s_y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot s_x^2 = (2ax)^2 \cdot s_x^2 = 4a^2x^2s_x^2$$

$$y = a \cdot x_1 \cdot x_2 \Rightarrow s_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot s_{x_2}^2 = (ax_2)^2 \cdot s_{x_1}^2 + (ax_1)^2 \cdot s_{x_2}^2 = 2a^2x^2s_x^2$$

Estranhamente obtemos dois resultados incompatíveis. O primeiro cálculo está correto. O segundo não, porque usámos uma fórmula que só se aplica a variáveis não correlacionadas para duas variáveis que são, de facto, correlacionadas. Se usássemos a equação completa (com a parte cinzenta) obteríamos:

$$s_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + 2\,\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot s_{x_1,x_2} = (ax_2)^2 s_{x_1}^2 + (ax_2)^2 s_{x_2}^2 + 2a^2 x_2 x_1 s_{x_1,x_2}$$

Neste caso $s_{x_1,x_2} = s_x^2$ e as duas equações já coincidem.

Nota: correlação é um tópico que não será abordado nesta UC exceto para chamar a atenção para a importância e impacto na propagação das incertezas.

Propagação da Incerteza padrão: casos típicos

Somas e subtrações:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$$

$$s_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot s_{x_2}^2 = a_1^2 \cdot s_{x_1}^2 + a_2^2 \cdot s_{x_2}^2$$

Produtos e divisões:

$$y = a \cdot x_1^{\pm 1} \cdot x_2^{\pm 1}$$

$$s_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot s_{x_2}^2 = \left(\pm a \cdot x_1^{-1 \pm 1} \cdot x_2^{\pm 1}\right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\pm a \cdot x_1^{\pm 1} \cdot x_2^{-1 \pm 1}\right)^2 \cdot s_{x_2}^2$$

Dividindo ambos os membros por y^2 obtemos:

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{s_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_2}}{x_2}\right)^2$$

Potências:

$$y = a \cdot x^n$$

$$s_y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot s_x^2 = (an \cdot x^{n-1})^2 \cdot s_x^2 = n^2 \cdot \left(\frac{ax^n}{x}\right)^2 \cdot s_x^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = n^2 \cdot \left(\frac{s_x}{x}\right)^2$$

Propagação da Incerteza padrão: exemplo de aplicação

Consideremos a equação do módulo de Young (trabalho T4):

$$E = \frac{L^3}{4bh^3} \cdot \frac{F}{X}$$

Considerem L^3 e h^3 como variáveis e a equação passa a ter apenas multiplicações e divisões. Logo,

$$\left(\frac{s_E}{E}\right)^2 = \left(\frac{s_{L^3}}{L^3}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_{h^3}}{h^3}\right)^2 + \left(\frac{s_{F/X}}{F/X}\right)^2$$

Para as potências aplicamos a expressão correspondente e chegamos à equação final:

$$\left(\frac{s_E}{E}\right)^2 = \left(3 \cdot \frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{s_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{s_{F/X}}{F/X}\right)^2$$

Não detalhei a expressão da incerteza do quociente F/X porque o procedimento envolve regressão linear (a abordar na próxima aula).