O trabalho da determinação experimental de pi obteve o conjunto de resultados à direita.
Como podem verificar, o erro (neste caso conhecemos o valor que devíamos obter) é próximo de 1% na maioria dos casos, havendo dois valores claramente menores e um valor claramente maior. No geral nota-se uma certa tendência para se obterem resultados superiores ao valor de pi.

π_exp	erro abs.	erro relat.
3.180	0.038	1.22%
3.174	0.033	1.04%
3.298	0.156	4.97%
3.133	-0.008	-0.26%
3.113	-0.028	-0.90%
3.134	-0.007	-0.24%
3.195	0.054	1.71%
3.169	0.028	0.88%

A questão é: conseguimos fazer melhor?

Que passos dar nesse sentido? Como fazer para melhorar a medição experimental de pi?

Os passos a seguir para melhorar uma experiência serão:

- Rever a definição da *mensuranda* (definição da grandeza a medir) para eliminar ambiguidades
- Rever o *procedimento de medição* (os passos a dar para a obtenção do resultado da medição, neste caso pretende-se uma incerteza inferior a 1%)
- Identificar as principais fontes de incerteza e procurar reduzi-las, começando pelas que têm mais influência no resultado final.

Introdução à Física Experimental LicFís & EngFís 2021 / 2022

A mensuranda é a determinação experimental de pi.

O método de medição indicado parte da relação entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência: pi = perímetro / diâmetro

A implementação prática implica criar uma circunferência física (a forma é importante, não pode ser uma oval, por exemplo), medir o seu perímetro e medir o seu diâmetro e calcular o quociente.

Embora diferentes grupos tenham seguido diferentes procedimentos, muitos seguiram o procedimento sugerido de construir uma circunferência com um fio.

A forma geométrica era garantida enrolando o fio em torno de um objeto cilíndrico. A qualidade da forma da circunferência depende da precisão com que o objeto cilíndrico tenha sido maquinado (o objeto deforma-se? é rugoso? corresponde de facto a uma circunferência?)

Quantificar a qualidade da forma do cilindro é algo complexo. No entanto, a maquinação de uma peça cilíndrica pode ser facilmente garantida com precisão superior a um centésimo de milímetro o que, como se verá é suficiente para o que pretendemos.

A incerteza relativa do pi_experimental é a soma em quadratura das incertezas relativas do perímetro e do diâmetro. Supondo que nos satisfazemos com uma incerteza relativa na ordem dos 0.1% (cerca de dez vezes melhor do que o conjunto de resultados apresentados acima), precisamos de garantir nenhuma das duas incertezas será superior a esse valor.

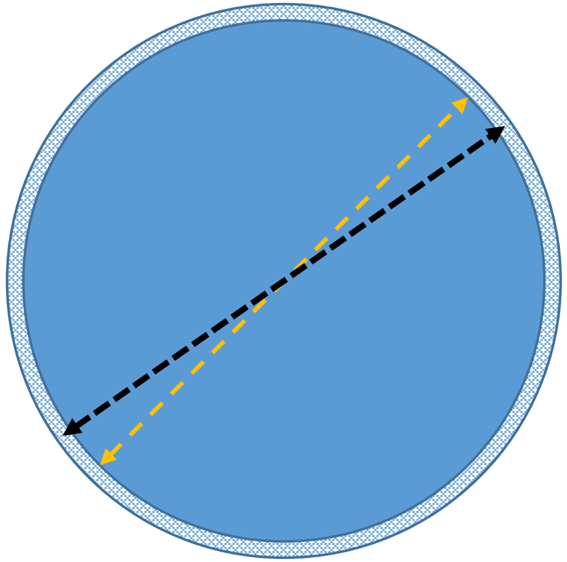
Os instrumentos de medida foram uma craveira (com uma incerteza absoluta da ordem do décimo de milímetro) e uma fita métrica (com uma incerteza absoluta da ordem do milímetro). Para obter a incerteza relativa pretendida, igual ou inferior a 0.1%, precisamos de medir distâncias iguais ou superiores a 10 cm com a craveira e 1 m com a fita métrica.

As incertezas na determinação do diâmetro e do perímetro são, infelizmente, significativamente maiores do que a precisão dos instrumentos de medição utilizados faz supor.
Com efeito, o diâmetro da circunferência do fio é maior do que o diâmetro do cilindro em torno do qual se enrolou o fio porque o raio da circunferência do fio é a soma do raio do cilindro com o raio do fio (ver figura: diâmetro do cilindro a amarelo, diâmetro da circunferência descrita pelo fio a preto).

Podemos corrigir (até que ponto?) este erro sistemático medindo o diâmetro do cilindro sem o fio enrolado e o diâmetro do cilindro com o fio enrolado e fazendo a média.
Esta correção será sempre incerta. Ela será tanto menor quanto:

- O fio seja mais fino
- O cilindro tenha maior diâmetro

Nota: um fio metálico poderia permitir uma correção melhor…



A circunferência descrita pelo fio tem também as suas fontes de incerteza.
Desde logo os fios são elásticos, o comprimento deles depende de estarem mais ou menos esticados. Podemos reduzir este problema:

- Usando um fio menos elástico (módulo de Young maior)
- Garantindo que a tensão a que o fio está sujeito ao enrolar e ao medir o comprimento é igual, e garantindo que em nenhum momento o fio sofre uma deformação permanente.

Um outro problema surge ao determinar o comprimento do fio correspondente ao perímetro: qualquer marca que façamos tem uma incerteza associada. Podemos diminuir a importância relativa dessa incerteza na determinação do perímetro aumentando o "perímetro". Há um truque que podemos usar aqui: em vez de uma espira, enrolamos várias espiras, digamos uma dezena de espiras. Construímos assim, não uma circunferência, mas uma helicoide. O comprimento da helicoide, supondo que tem N espiras e passo p, será N*raíz(d^2+p^2), sendo d a circunferência da helicoide se o passo fosse zero.

Introdução à Física Experimental   LicFís & EngFís 2021 / 2022

Mãos à obra!

Conseguiram melhores resultados?

A correção com o passo da helicoide é significativa no resultado final?

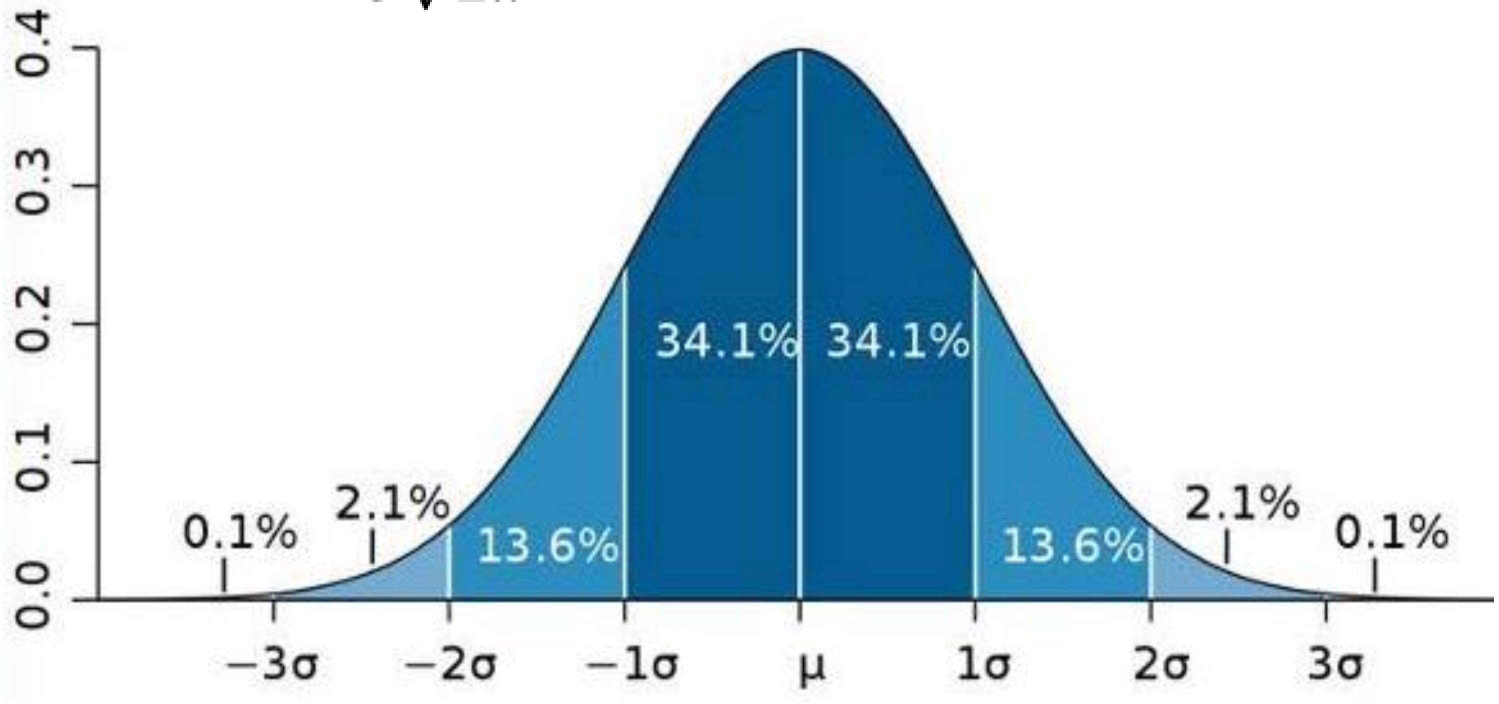
Distribuição gaussiana ou normal

$[\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma]$ Inclui ~68.3% dos valores

$[\langle x \rangle - 1.96\,\sigma, \langle x \rangle + 1.96\,\sigma]$ Inclui ~95% dos valores

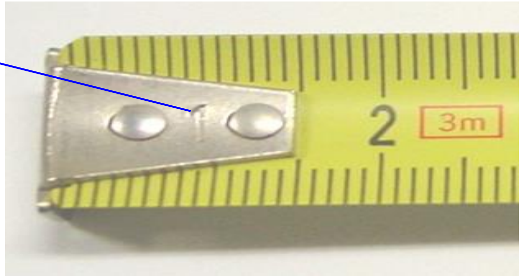
$[\langle x \rangle - 3\,\sigma, \langle x \rangle + 3\,\sigma]$ Inclui ~99.7% dos valores

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

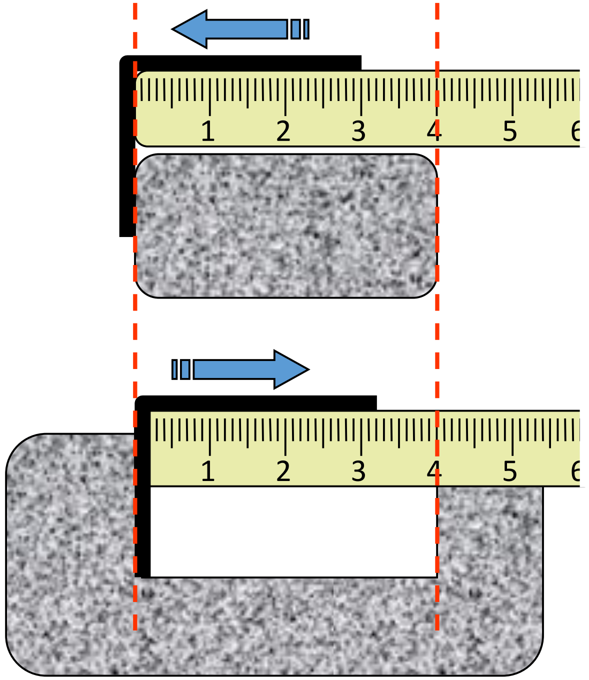


O tratamento estatístico dos dados, frequentemente supõe uma distribuição de valores em torno do valor mais provável de acordo com a distribuição normal ou gaussiana

Fita métrica: incerteza de calibração



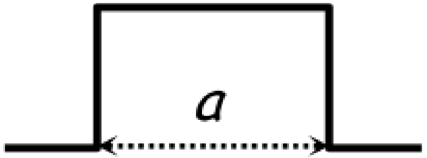
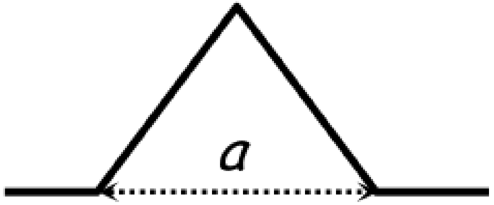
O gancho move-se para trás e para a frente uma distância igual à sua espessura.
O uso do gancho introduz uma incerteza adicional.



Classe de precisão	0.5 m	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m
I	± 0.2	± 0.2	± 0.3	± 0.4	± 0.5	± 0.6
II	± 0.5	± 0.5	± 0.7	± 0.9	± 1.1	± 1.3
III	± 1.0	± 1.0	± 1.4	± 1.8	± 2.2	± 2.6

Nota: as tolerâncias de calibração das diversas classes, em particular da classe II, são os desvios máximos admissíveis e correspondem a uma densidade de probabilidade retangular. Nesse sentido, se repetirmos uma medição com a mesma fita métrica devemos considerar essa incerteza como sistemática.
Se estivermos a combinar diferentes medições com a mesma fita métrica, por exemplo, somar comprimentos parciais para obtenção de um comprimento maior, essas incertezas poderão ter uma componente aleatória caso estejamos a combinar comprimentos diferentes.
Finalmente, se usarmos fitas métricas diferentes, de fabricantes diferentes, então poderemos considerar essas incertezas como aleatórias ao combinar as medições.

Algumas das funções distribuição de probabilidade mais usadas em metrologia são a retangular, a triangular e a gaussiana.

Tipos de FDP		A incerteza-padrão u é dada por:
FDP retangular ou uniforme		$u = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$
FDP triangular		$u = \dfrac{a}{2\sqrt{6}}$
FDP normal ou gaussiana		$u = \sigma$ (desvio padrão da média)

Algumas aplicações típicas das funções distribuição de densidade.
Notem que, quando se fala da "leitura de um valor digital/analógico" estamos a falar apenas na incerteza de leitura, não inclui a incerteza de calibração, de ajuste do zero, da definição da mensuranda, etc.

FDP retangular ou uniforme		Geralmente usada para a leitura de um único valor digital
FDP triangular		Geralmente usada para a leitura de um único valor analógico
FDP normal ou gaussiana		Geralmente usada quando se combinam vários dados ou várias informações

Média simples e desvio padrão

Repetiu-se a mesma experiência *n* vezes. Qual o melhor valor?

Que ganhamos com essa repetição?

Qual a melhor estimativa da incerteza da medição?

Estamos a supor que <u>nada</u> sabemos da incerteza das medidas individuais:

Essa informação virá da dispersão dos resultados.

Média (melhor estimativa do valor verdadeiro da medida): $$< x > = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Desvio padrão experimental: $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n-1}}$$

Desvio padrão da média: $$S_{média} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Apresentação do resultado: $$(< x > \pm S_{média})\, unidades$$

Média pesada e desvio padrão

Temos *n* medidas com desvios padrão diferentes. Qual o melhor valor?

Qual a melhor estimativa da incerteza da medição?

Estamos a supor que <u>sabemos</u> a incerteza das medidas individuais:

Temos mais confiança numas do que noutras.

Melhor estimativa do valor verdadeiro da média:

$$< x > = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i / s_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(1 / s_i^2 \right)}$$

Desvio padrão da média:

$$S_{média} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(1 / s_i^2 \right)}}$$

Apresentação do resultado:

$$\left(< x > \pm S_{média} \right) unidades$$

Função de várias variáveis e desvio padrão

- Quando uma função depende de várias variáveis cada qual com uma incerteza associada:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

- **Combined Standard Uncertainty:** Incerteza padrão obtida entrando em conta com todas as fontes de incerteza

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} s_{ij}$$

(Nota: o primeiro somatório corresponde à soma pesada das variâncias e é sempre positivo, enquanto o segundo somatório, que é duplo, entra em conta com as covariâncias, podendo ser positivo ou negativo. Está a cinzento porque não vai ser usado nesta UC.)

- **Assume-se que todos os erros sistemáticos foram exaustivamente procurados e corrigidos.**

Função de várias variáveis: casos típicos

$$y = x_1 + x_2$$
$$y = x_1 - x_2$$
$$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

$$y = x_1 \times x_2$$
$$y = \frac{x_1}{x_2}$$
$$\frac{s}{y} = \sqrt{\left(\frac{s_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{x_2}\right)^2}$$

$$y = a \cdot x^n \qquad \frac{s_y}{y} = n\frac{s_x}{x}$$

s é a incerteza absoluta:
tem as mesmas unidades
da grandeza

s/x é a incerteza relativa:
é adimensional

Somas e subtrações: as
incertezas absolutas somam-se
em quadratura

Multiplicações e divisões: as
incertezas relativas somam-se
em quadratura