4/4/2022 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	FIS ENGFIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine uma base do espaço linear das soluções da equação diferencial homogénea
$$\dddot{x} = 0\,.$$
$$1 \qquad t \qquad t^2$$

2. *(1 valor)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial
$$\ddot{x} = e^{-2t}\ .$$
$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}$$

3. *(1 valor)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0\,.$$
$$x(t) = e^{-2t}\left(a\cos(3t) + b\sin 3t)\right) \qquad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

4. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -5$.
$$x(t) = e^{-2t}\left(\cos(3t) - \sin(3t)\right)$$

5. *(1 valor)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} + 9x = \sin(3t)\,.$$
$$x(t) = -\frac{1}{6}\ t\cos(3t)$$

6. *(1 valor)* Considere o espaço euclidiano real $\mathbf{E}$ das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ munido do produto escalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$. Determine uma base ortonormada do plano $S \subset \mathbf{E}$ gerado pelas funções $f(t) = 1$ e $g(t) = t$.
Uma base ortonormada de S é formada por
$$f(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad e(t) = \sqrt{3}\,(2t-1)$$

7. *(1 valor)* Determine o ponto do plano $S \subset \mathbf{E}$, definido no exercício 6, mais próximo do vetor $h(t) = t^2$.
$$t - 1/6$$

8. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(x, y) = (ix - y, 2x + iy) .$$

Determine o operador adjunto T^* e a composição TT^*.

$T^*(x, y) = (-ix + 2y, -x - iy)$ $\quad$ $TT^*(x, y) = (2x + 3iy, -3ix + 5y)$

9. *(1 valor)* Dê um exemplo, se existir, de um operador normal $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ que não seja nem hermítico, nem hemi-hermítico, nem unitário.

Por exemplo, $N(x, y) = ((1 + i)x, (1 + i)y)$.

10. *(1 valor)* Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ munido do produto escalar usual. Determine a matriz 2×2 que define, na base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, 0) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Considere o espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto escalar usual. Mostre que os valores próprios de um operador hermítico $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ são reais.

...

12. *(1 valor)* As funções $\cosh(2t)$ e $\sinh(2t)$ são soluções da equação diferencial

○ $\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$ ○ $\ddot{x} - 4x = 0$ ○ $\ddot{x} + 4x = 0$ ○ $\ddot{x} - 4\dot{x} = 0$

13. *(1 valor)* Num espaço euclidiano real, o produto escalar entre dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ se e só se os vetores $\mathbf{x} \pm \mathbf{y}$ têm a mesma norma, ou seja, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

○ Verdadeiro ○ Falso

14. *(1 valor)* A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3i & i \\ i & -2i \end{pmatrix}$$

representa, na base canónica do plano euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$, um operador

○ hermítico ○ hemi-hermítico ○ unitário

15. *(1 valor)* Se B é uma matriz complexa $n \times n$ arbitrária, então B^*B é

○ hemi-hermítica ○ unitária ○ hermítica

16. *(1 valor)* Se A e B são duas matrizes hermíticas $n \times n$, então também AB é hermítica.

○ Verdadeiro ○ Falso

17. *(1 valor)* Sejam U e V duas matrizes complexas $n \times n$. Se U e UV são unitárias, então também V é unitária.

○ Verdadeiro ○ Falso

18. *(1 valor)* Uma matriz real $n \times n$ é ortogonal se

○ $A^\top = -A$ ○ $A^\top A = I$ ○ $A^\top A = AA^\top$

19. *(1 valor)* Existe uma matriz ortogonal O tal que

$$O^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

○ Verdadeiro ○ Falso

20. *(1 valor)* Se todos os valores próprios de uma matriz complexa $n \times n$ são reais então a matriz é hermítica.

○ Verdadeiro ○ Falso

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Identifique a matriz simétrica A que define a forma quadrática
$$Q(x, y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2$$
e determine os seus valores próprios.

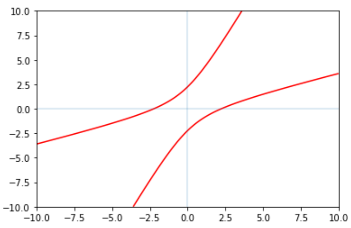
A matriz simétrica que define a forma quadrática é
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
Os seus valores próprios são -1 e 5.

2. *(1 valor)* Determine uma matriz ortogonal U que diagonaliza a matriz simétrica A do exercício 2, ou seja, tal que $U^\top AU$ seja diagonal.

Uma matriz ortogonal diagonalizadora, tal que
$$A = U \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} U^\top$$
é
$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. *(1 valor)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana
$$2x^2 - 6xy + 2y^2 - 10 = 0$$

É uma hipérbole, pois nas variáveis $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$ a equação é
$$-\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{Y^2}{1} = 1$$



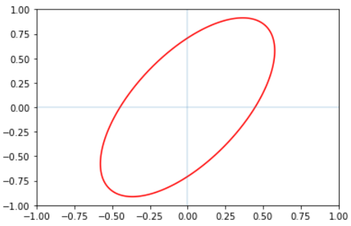
4. *(1 valor)* Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica
$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são 0 e 2. Vetores próprios são $\mathbf{v}_0 = (i, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, i)$, respetivamente

5. *(1 valor)* Calcule os comprimentos dos semi-eixos e esboce o elipsoide definido pela equação

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 \leq 1$$

Os semi-eixos são 1 e $1/\sqrt{6}$, e o elipsoide é



6. *(1 valor)* Dê uma definição do grupo $\mathbf{SU}(2)$ e determine a forma de uma sua matriz genérica.

$\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2 tais que $A^* A = I$ e $\det A = 1$. Uma matriz genérica de $\mathbf{SU}(2)$ é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde α e β são números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

7. *(1 valor)* Dê um exemplo, se existir, de duas matrizes quadradas A e B tais que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. *(1 valor)* Calcule o grupo a um parâmetro e^{tA} gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & -q \\ \dot{p} = & q - p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (3, 2)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ (3t+2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

10. *(1 valores)* Considere o sistema não homogéneo

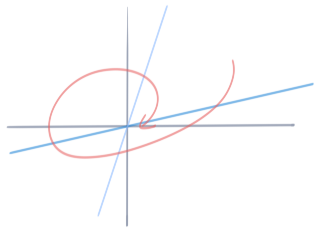
$$\begin{cases} \dot{q} = & -q \\ \dot{p} = & q - p + \sin(t) \end{cases}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t) + e^{-t}\right) \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Esboce o retrato de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & p \\ \dot{p} = & -9q - p \end{cases}$$



12. *(1 valor)* Se existe uma base de $\mathbb{C}^n$ formada por vetores próprios do operador $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ então o operador L é normal.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

13. *(1 valor)* Toda matriz quadrada (simétrica) não negativa é da forma $P = A^\top A$ para alguma matriz quadrada A.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

14. *(1 valor)* Existe uma matriz quadrada real A tal que $A^2 = -I$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

15. *(1 valor)* Se H é uma matriz quadrada hermítica então e^{iH} é unitária.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

16. *(1 valor)* Se A é uma matriz auto-adjunta então $A + iI$ é invertível.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

17. *(1 valor)* Toda matriz $A \in \mathbf{SO}(3)$ admite um vetor próprio com valor próprio $\lambda = 1$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

18. *(1 valor)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$ é

◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 simétricas.
◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 com traço nulo.
◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 anti-simétricas.

19. *(1 valor)* O sistema linear

$$\begin{cases} \dot{q} = & p \\ \dot{p} = & q \end{cases}$$

é equivalente à equação de Newton

◯ $\ddot{q} = -q$ ◯ $\ddot{q} = q + p$ ◯ $\ddot{q} = q$

20. *(1 valor)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = & 6x + 5y \\ \dot{y} = & x - 2y \end{cases}$$

A origem é

◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável.