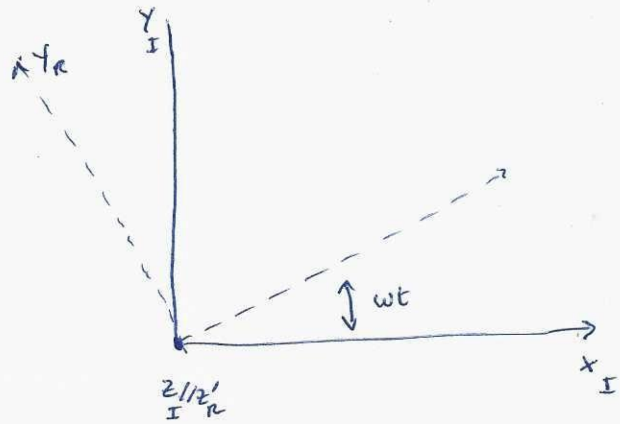
Referenciais em Rotação (movimento relativo)

Velocidade e aceleração num referencial em rotação (em torno de zz') com velocidade angular constante:



Da figura temos:

$$x_I = x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t$$

$$y_I = x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t$$

$$z_I = z_R$$

Resulta para as velocidades que:

$$\dot{x}_I = \dot{x}_R \cos \omega t - x_R \omega \sin \omega t - \dot{y}_R \sin \omega t - y_R \omega \cos \omega t$$

$$\dot{y}_I = \dot{x}_R \sin \omega t + x_R \omega \cos \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t - y_R \omega \sin \omega t$$

$$\dot{z}_I = \dot{z}_R$$

Observação: Para uma partícula em repouso no referencial em rotação $(\dot{x}_R = \dot{y}_R = 0)$ temos, como caso particular:

$$\dot{x}_I = -\omega x_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t$$

$$\dot{y}_I = \omega x_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t$$

Para uma partícula em repouso no referencial imóvel:

$$\dot{x}_R - \omega y_R = 0 \;;\; \dot{y}_R + \omega x_R = 0 \;;\; \dot{z}_R = 0$$

TPC: Verifique isto

Para a aceleração:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos\omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin\omega t - \omega^2 x_R \cos\omega t - \ddot{y}_R \sin\omega t -$$
$$- 2\omega \dot{y}_R \cos\omega t + \omega^2 y_R \sin\omega t$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{x}_R \sin\omega t + 2\omega \dot{x}_R \cos\omega t - \omega^2 x_R \sin\omega t + \ddot{y}_R \cos\omega t$$
$$- 2\omega \dot{y}_R \sin\omega t - \omega^2 y_R \cos\omega t$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R$$

<u>Observação</u>: Para uma partícula em repouso no referencial em rotação

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_I = -\omega^2 x_R \cos\omega t + \omega^2 y_R \sin\omega t = -\omega^2 x_I \\ \ddot{y}_I = -\omega^2 x_R \sin\omega t - \omega^2 y_R \cos\omega t = -\omega^2 y_I \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_I = -\omega^2 \vec{r}_I \quad \text{(aceleração centrípeta)}$$

Vejamos as equações do tipo de forma: Por exemplo:

$$\ddot{x}_I = \left(\ddot{x}_R \cos\omega t - \ddot{y}_R \sin\omega t\right) - 2\omega\left[\dot{x}_R \sin\omega t + \dot{y}_R \cos\omega t\right] +$$
$$+ \omega^2\left(-x_R \cos\omega t + y_R \sin\omega t\right)$$

• O primeiro termo representa a projeção de $\vec{a}_R$ nos eixos inerciais. (no caso $\hat{x}_I$)

• O segundo termo depende da velocidade da partícula relativamente ao referencial em rotação. É nulo se $\vec{V}_R = 0$. Designa-se por aceleração de Coriolis. Repare-se que

$$\dot{x}_R \sin \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t \equiv \vec{V}_R \cdot \hat{y}_I \equiv \text{projecção de } \vec{V}_R \text{ em } \hat{y}_I$$

$\omega \equiv$ componente segundo zz' da velocidade angular

$$-2\omega \left[\dot{x}_R \sin(\omega t) + \dot{y}_R \cos \omega t \right] = -2\omega \vec{V}_R \left(\hat{z}_I \times \hat{y}_I \right)$$

$$= 2\left(\vec{\omega} \times \vec{V}_R\right) \quad \text{(com generalidade)}$$

• O último termo representa a aceleração centrífuga

$$\omega^2 \left[-x_R \cos \omega t + y_R \sin \omega t \right] =$$

$$= \omega \hat{z}_I \times \left(\omega \hat{z}_I \times - \left(\vec{r}_R \cdot \hat{x}_I \right) \hat{x}_I \right)$$

$$= \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

Logo, com generalidade:

$$\boxed{\vec{a}_I = \vec{a}_R + 2\,\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)}$$

Observações:

Repare que:

$$\dot{x}_i = \left(\dot{x}_R \cos\omega t - \dot{y}_R \sin\omega t\right) - \omega\left(x_R \sin\omega t + y_R \cos\omega t\right)$$

$$\dot{y}_i = \left(\dot{x}_R \sin\omega t + \dot{y}_R \cos\omega t\right) + \omega\left(x_R \cos\omega t - y_R \sin\omega t\right)$$

Pode escrever-se como:

$$\dot{x}_i = \left(\vec{V}_R \cdot \hat{x}_i\right) - \omega\left(\vec{r} \cdot \hat{y}_i\right)$$

$$\dot{y}_i = \left(\vec{V}_R \cdot \hat{y}_i\right) + \omega\left(\vec{r} \cdot \hat{x}_i\right)$$

$$\left(\text{com} \quad \vec{\omega} \equiv \omega \hat{z}_i = \omega \hat{z}_R\right)$$

Ou, em condensado:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)_i \vec{r} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\times\right]\vec{r}$$

Logo, para a segunda derivada:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt}\right)_i = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + (\vec{\omega}\times\vec{r})\right]$$

$$= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_R + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]_R + \left[\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right]_R +$$

$$+ \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_R + \left(\frac{d\omega}{dt} \times \vec{r}\right)_R + 2\left(\omega \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

(como antes)

2º lei de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}_I$

$$m\vec{a}_R = \vec{F} \underbrace{- m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right)_R - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_R - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{forças "fictícias"}}$$

Euler   Coriolis   Centrífuga

II

i) Movimento com velocidade constante num referencial em Rotação (velocidade angular constante) $\vec{\omega} \parallel \hat{z}$ Que movimento no Ref I?

$\vec{V}_R = V_R \hat{x}_R$ $\vec{a}_R = 0$ $x_R = V_R t$.

$$\vec{a}_I = 2(\omega \hat{z}_R \times V_R \hat{x}_R) + \omega^2 x_R (\hat{z}_R \times (\hat{z}_R \times \hat{x}_R))$$

$$= -2\omega V_R \hat{Y}_R + \omega^2 x_R \hat{X}_R$$

Mas:

Mas:
$$\hat{x}_I = \cos\omega t\ \hat{x}_R - \sin\omega t\ \hat{y}_R$$
$$\Rightarrow$$
$$\hat{y}_I = \sin\omega t\ \hat{x}_R + \cos\omega t\ \hat{y}_R$$

$$\Rightarrow \quad \cos\omega t\ \hat{x}_I + \sin\omega t\ \hat{y}_I = \hat{x}_R$$

$$-\sin\omega t\ \hat{x}_I + \cos\omega t\ \hat{y}_I = \hat{y}_R$$

Logo

$$\vec{a}_I = -2\omega v_R \left[-\sin\omega t\ \hat{x}_I + \cos\omega t\ \hat{y}_I\right] +$$

$$+\omega^2 x_R \left[\cos\omega t\ \hat{x}_I + \sin\omega t\ \hat{y}_I\right]$$

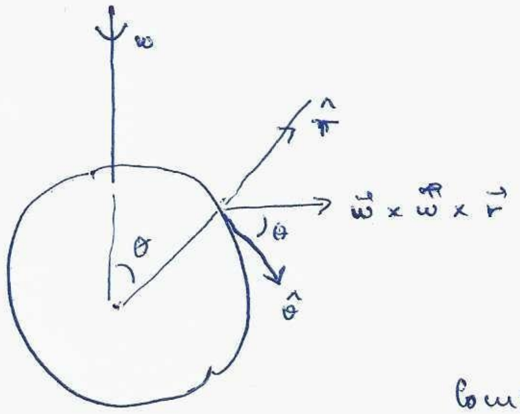
$$= \left[+2\omega v_R \sin(\omega t) + \omega^2 x_R \cos\omega t\right] \hat{x}_I +$$

$$+\left[-2\omega v_R \cos\omega t + \omega^2 x_R \sin\omega t\right] \hat{y}_I$$

ii) A aceleração da gravidade vista do referencial Terra em rotação (outra vez!):

$v_R = 0$, $\omega = \text{const} \parallel zz'$ $\rightarrow$ força centrífuga apenas

$$m g_R = -G M_T m \frac{\vec{r}}{r^3} - m\, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})_R$$



$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \sin\theta$$

Componente radial:

$$\vec{F}_c = \omega^2 r \sin^2\theta \, \hat{r} + \omega^2 r \sin\theta \cos\theta$$

Logo

$$g_R = \left[-\frac{GM_T}{R_T^2} + \omega^2 r \sin^2\theta \right] \hat{r} + \omega^2 r \sin\theta \cos\theta \, \hat{\theta}$$

TPC: Faça uma estimativa da componente angular da aceleração medida no referencial Terra.

Observação

$$\omega^2 R_T \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} R_T \omega^2 \sin(2\theta)$$

$\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ (Pólo e equador) é nula. Para que latitude é máxima?

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{2} R_T \omega^2 \sin 2\theta \right] = \frac{1}{2} R_T \omega^2 \cos(2\theta) \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{\theta = \pm \frac{\pi}{4}}$$

iii) Como cai um objecto para a Terra? (*)

$$m\vec{a}_R = m\vec{g}_R(\theta) - 2m(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}})_R$$

Comecemos por um problema mais simples: $\theta = \frac{\pi}{2}$:
(queda vertical de um objecto de uma altura h_0, no equador) com velocidade inicial nula)

Então:

$$g_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Big[\underbrace{-\frac{GM_T}{R_T^2}}_{g_0} + \omega^2 R_T\Big]\hat{r}$$

Aqui, temos de incluir o termo de Coriolis: como fazer se não sabemos ainda $\vec{v}$?

Podemos fazer uma sequência de passos (teoria de perturbações):

a) $\omega = 0$ (ignoramos a rotação da Terra)

$$m g_0\hat{r} = m a_R^{(0)}\hat{r} \Rightarrow \vec{v}^{(0)}(t) = -g_0 t\,\hat{r}$$

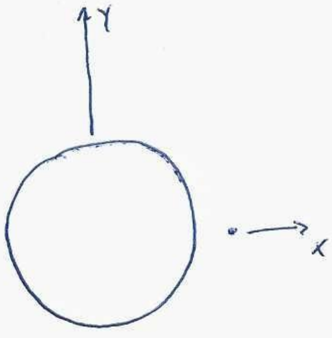
b) Correcção de 1ª ordem: em ω (linear)

Se considerarmos apenas correcções lineares em ω ~~pode~~ devemos tomar $g_R = g_0$. O termo de Coriolis vem:

(*) Problema difícil, com generalidade

Escrevam $\vec{a}_R = \vec{a}_R^{(0)} + \vec{a}_R^{(1)}$

↳ correcção linear em ω



$$m\left(\vec{a}_R^{\,0} + \vec{a}_R^{\,(1)}\right) = m g_0 \hat{r} - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}^{(0)}(t)$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v}^{(0)}(t) = \omega\hat{y}\times(-g_0 t)\hat{x} = +g_0\omega t\,\hat{z}$$

($\hat{z}$ aponta para leste: veja a figura)

Então

$$\vec{a}_R = -g_0\hat{x} - 2\omega g_0 \omega t\,\hat{z}$$

Qual o desvio para leste que sofre um objecto que cai de uma altura de 100 m no equador?
(nesta aproximação de 1º ordem)

Integrando duas vezes a aceleração:

$$\vec{r}(t) = \left(h - \tfrac{1}{2}g_0 t^2\right)\hat{x} - \tfrac{1}{3}\omega g_0 t^3\,\hat{z}$$

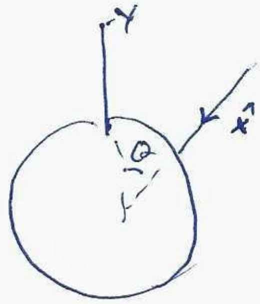
t^*: $h = \frac{1}{2}g_0 t^{*2} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g_0}}$ → desvio para leste: na chegada ao solo

$$\Delta z = \frac{1}{3}\omega g_0\left(\frac{2h}{g_0}\right)^{3/2}$$

TPC: façam as contas.

TPC.: O mesmo problema para uma latitude θ:

(em 1º ordem em ω):



$$\Delta z = -\frac{1}{3}\,\omega\, g_0\, t^3 \sin\theta\ \hat{z}$$

$$|\Delta z| = \frac{1}{3}\,\omega\, g_0 \left(\frac{2h}{g_0}\right)^{3/2} \sin\theta$$

(o desvio é nulo no Pólo).