23. Somar Duas Tensões Alternadas Sinusoidais com a Mesma Frequência

23.1 Recorrendo à Álgebra

$$u_1 = U_{M1} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_1) = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_1)$$
$$u_2 = U_{M2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_2) = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_2)$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= U_{M1} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_1) + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_2) \\ &= U_{M1} \cdot \operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\theta_1 + U_{M1} \cdot \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\theta_2 + U_{M2} \cdot \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \\ &= \operatorname{sen}\omega t \cdot \left(U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2\right) + \cos\omega t \cdot \left(U_{M1} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}\theta_2\right) \end{aligned}$$

Façamos:

$$U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2 = U_M \cdot \cos\theta$$
$$U_{M1} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}\theta_2 = U_M \cdot \operatorname{sen}\theta$$

portanto

$$U_M = \sqrt{\left(U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2\right)^2 + \left(U_{M1} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}\theta_2\right)^2}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{U_{M1} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + U_{M2} \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{U_{M1} \cdot \cos\theta_1 + U_{M2} \cdot \cos\theta_2}$$

$$u = U_M \cdot \left(\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\theta + \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}\theta\right)$$

finalmente

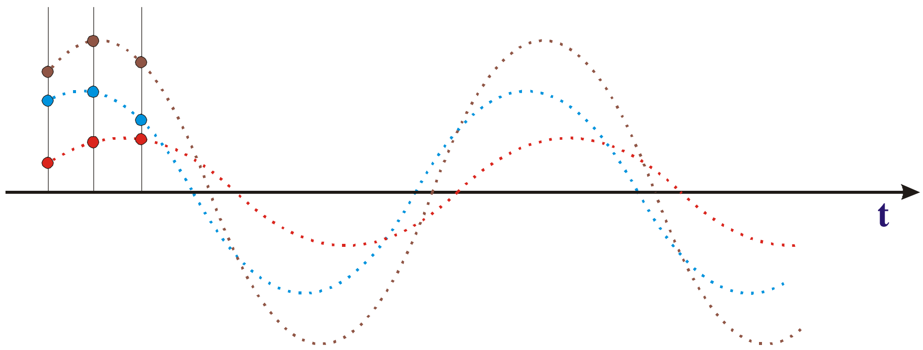
$$u = U_M \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

Duas grandezas alternadas sinusoidais com a mesma frequência podem...

- ... estar **em fase:** $\theta_1 = \theta_2$ (caso particular);
- ... estar **em oposição de fase:** $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ (caso particular);
- ... **não estar** em fase e **não estar** em oposição de fase **(caso geral)**.

Se u_1 e u_2 não estiverem em fase, então $U_{M1} + U_{M2} \neq U_M$ e também $U_1 + U_2 \neq U$

23.2 Recorrendo a gráficos



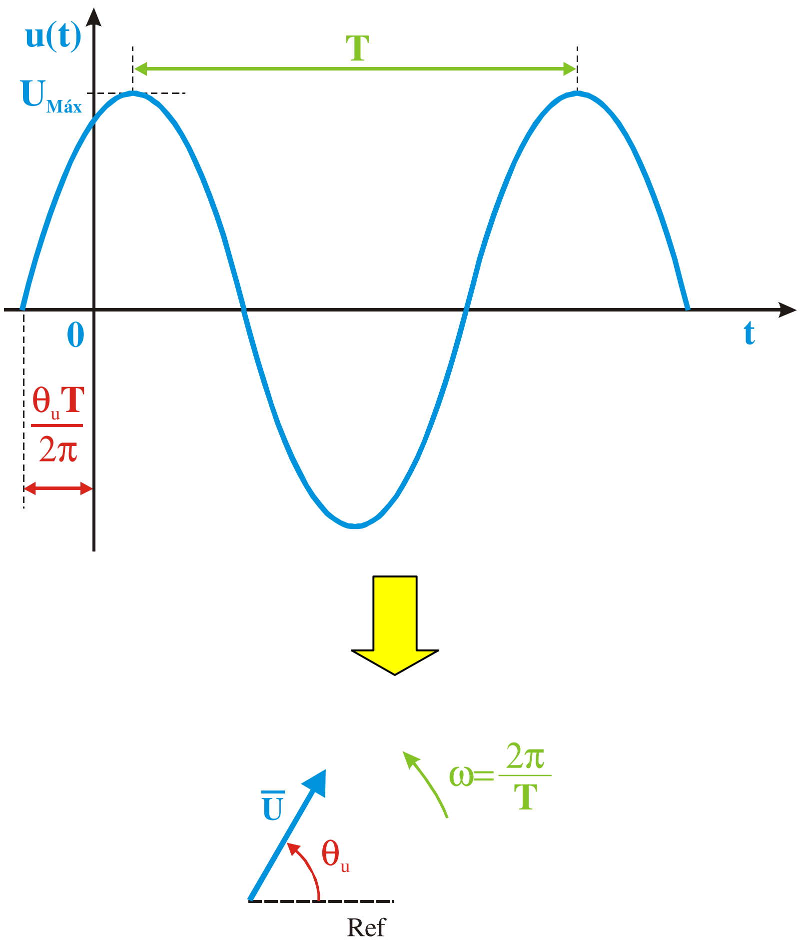
23.3 Recorrendo à Transformada de Steinmetz, que utiliza Fasores

23.3.1 Obter um fasor a partir de uma sinusóide...

$$u(t) = U_{Máx} \cdot sen(\omega t + \theta_u)$$

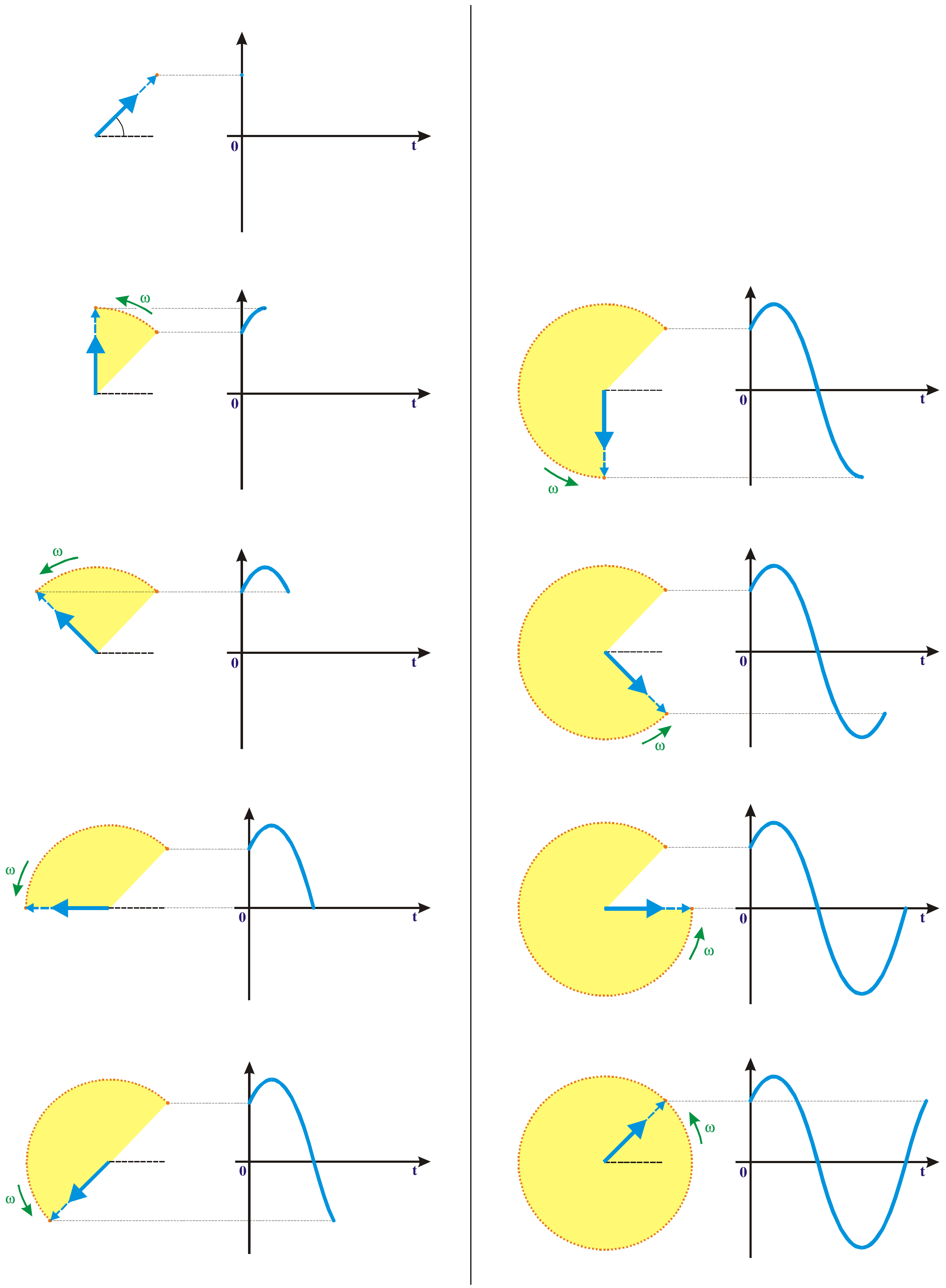
$$= \sqrt{2} \cdot U \cdot sen(\omega t + \theta_u)$$

$$U = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

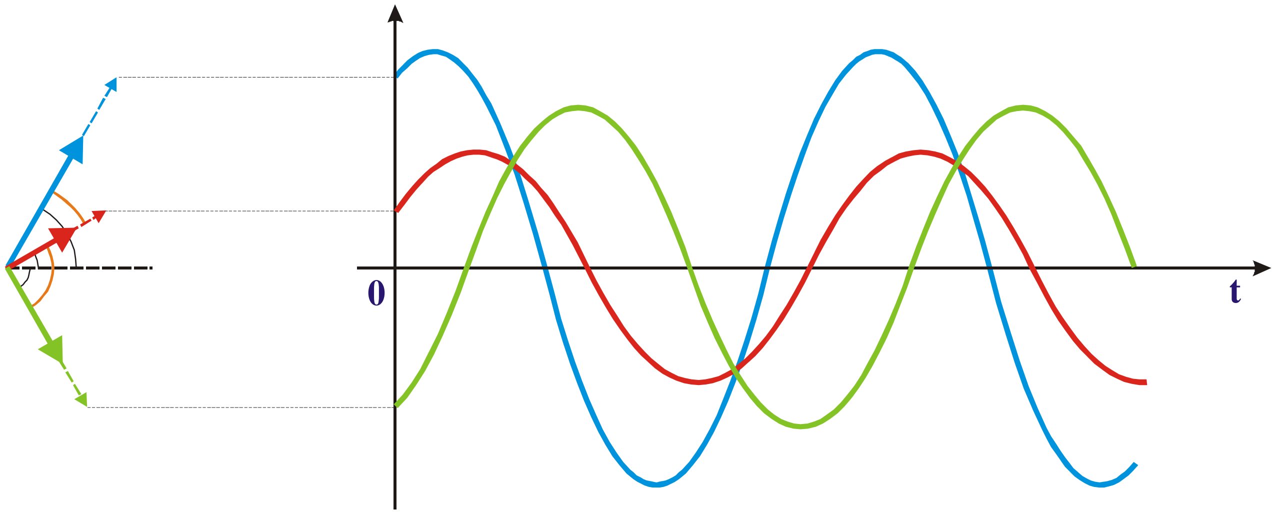


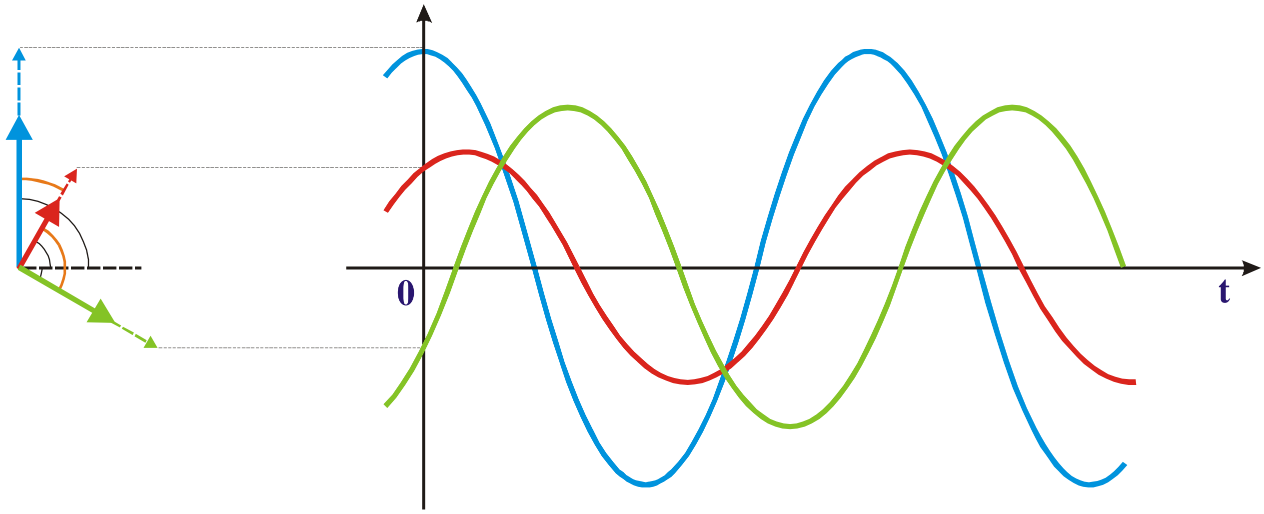
$$\overline{U}\,(U, \theta_u) \qquad U = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

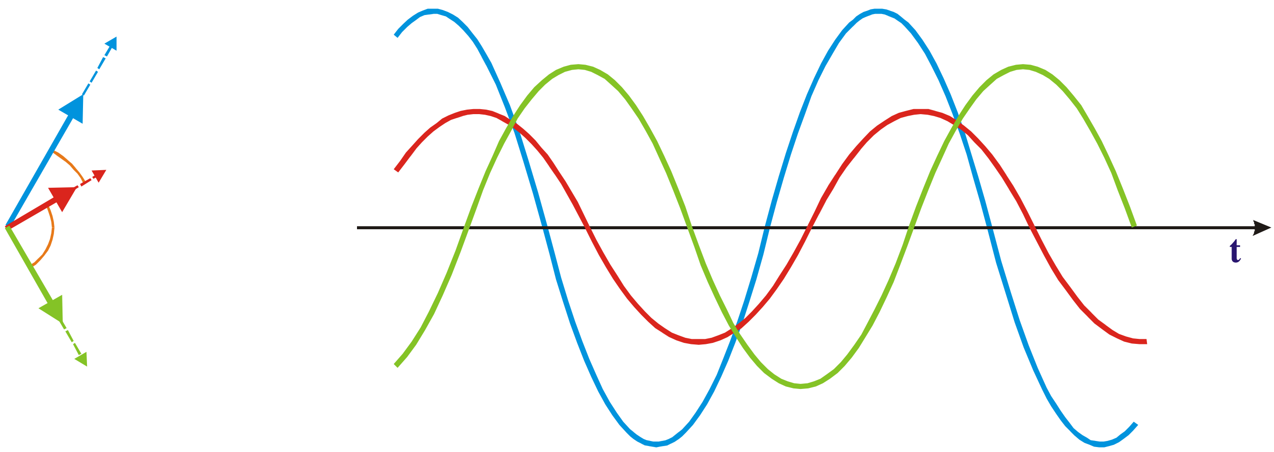
23.3.2 Obter uma sinusóide a partir de um fasor



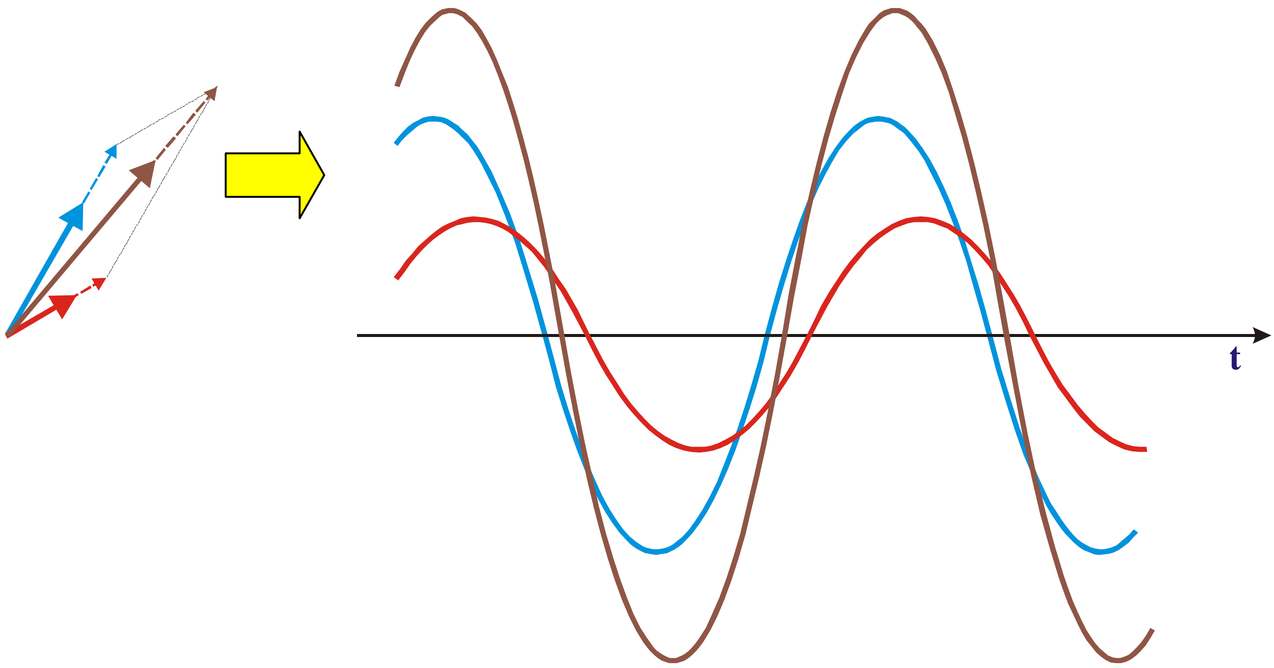
23.3.3 Os ângulos entre fasores não mudam quando se muda a referência



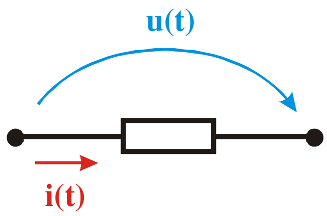


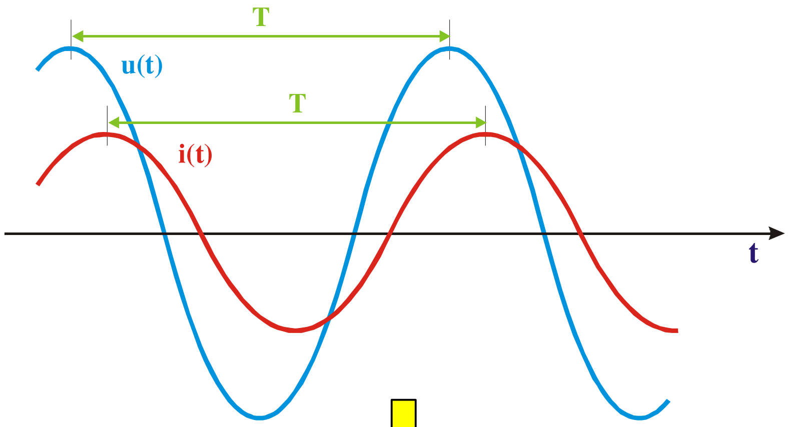


23.3.4 Somar duas grandezas alternadas sinusoidais com a mesma frequência a partir da soma de dois fasores, recorrendo à regra do paralelogramo



24. Diagrama Fasorial e Impedância de um Receptor Eléctrico Monofásico





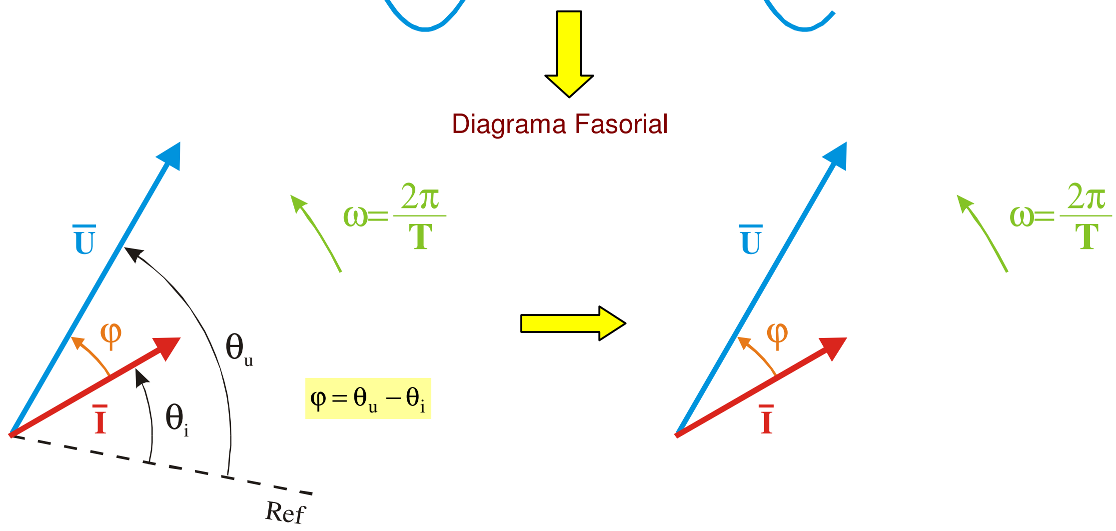
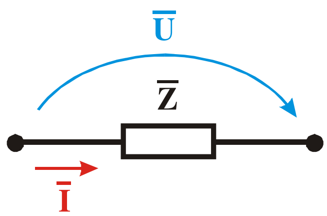


Diagrama fasorial com referência

Diagrama fasorial sem referência

- Cada diagrama fasorial é constituído por **dois**: um para tensões e outro para correntes (**duas escalas diferentes**).
- No exemplo da figura, a tensão está avançada em relação à corrente, independentemente da referência utilizada.
- O ângulo φ não depende da referência, que pode ser omitida.



$$\begin{cases} \bar{U}\ (U, \theta_u) \\ \bar{I}\ (I, \theta_i) \end{cases} \rightarrow \boxed{\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}} \ \textbf{Impedância}$$

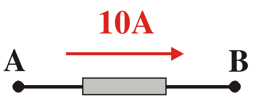
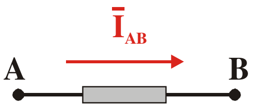
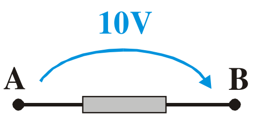
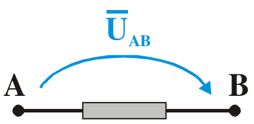
$$U = \frac{U_{Máx}}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{I_{Máx}}{\sqrt{2}}$$

$\bar{Z}$ **não é um fasor!**

$\bar{Z}$ é um **número complexo** que expressa a relação entre os fasores $\bar{U}$ e $\bar{I}$.

24.1 Tensões e Correntes Alternadas Sinusoidais: Notações

Para tensões e correntes **alternadas sinusoidais**...

	- A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor monofásico. - A corrente que atravessa o receptor tem um valor eficaz de 10A. Também pode significar que o valor nominal corrente do receptor é de 10A (valor eficaz). - Quando, dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo da corrente coincide com o sentido verdadeiro da corrente: o valor instantâneo da corrente é positivo.
	- A seta indica o **sentido positivo da corrente** que atravessa o receptor monofásico. - A corrente que atravessa o receptor tem um valor eficaz I_{AB}. - Quando, dentro do receptor, a corrente vai do terminal A para o terminal B, então o sentido positivo da corrente coincide com o sentido verdadeiro da corrente: o valor instantâneo da corrente é positivo.
	- A seta indica o **sentido positivo da tensão** existente entre os terminais do receptor monofásico. - A tensão que existe entre os terminais do receptor tem um valor eficaz 10V. Também pode significar que o valor nominal da tensão do receptor é de 10V (valor eficaz). - Quando o potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B, então o sentido positivo da tensão coincide com o sentido verdadeiro da tensão: o valor instantâneo da tensão é positivo.
	- A seta indica o **sentido positivo da tensão** existente entre os terminais do receptor monofásico. - A tensão que existe entre os terminais do receptor tem um valor eficaz U_{AB}. - Quando o potencial no terminal A é superior ao potencial no terminal B, então o sentido positivo da tensão coincide com o sentido verdadeiro da tensão: o valor instantâneo da tensão é positivo.

$$\cancel{\bar{I}_{AB} = 10\text{A}} \qquad \cancel{\bar{U}_{AB} = 230\text{V}}$$

$$I_{AB} = 10\text{A} \qquad U_{AB} = 230\text{V}$$

24.2 Impedância, Resistência e Reactância de um Receptor Monofásico

A **impedância** $\overline{Z} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{I}}$ é um **número complexo**, que pode assumir duas formas: **polar** ou **rectangular**.

Em qualquer das suas formas, a impedância é definida por **dois números**.

- **Forma polar**: a impedância é definida por um **escalar Z [Ω]** (**módulo ou valor da impedância**) e um **ângulo φ** (**argumento da impedância**) tais que

$$\overline{Z}(Z,\varphi) \rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{U}{I} \\ \varphi = \theta_u - \theta_i \end{cases} \qquad \overline{Z} = Z \angle\varphi$$

U – módulo da tensão (valor eficaz da tensão) $\quad U = \dfrac{U_{Máx}}{\sqrt{2}}$

θ_u – argumento da tensão

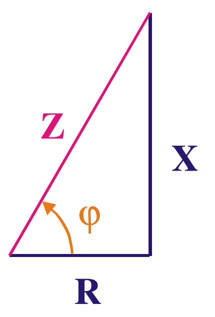
I – módulo da corrente (valor eficaz da corrente) $\quad I = \dfrac{I_{Máx}}{\sqrt{2}}$

θ_i – argumento da corrente

- **Forma rectangular**: a impedância é definida por um **escalar R [Ω]** (**resistência** – componente real da impedância) e um **escalar X [Ω]** (**reactância –** componente imaginária da impedância) tais que

$$\overline{Z}(R,X) \rightarrow \begin{cases} R = Z \cdot \cos\varphi \\ X = Z \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \qquad \overline{Z} = R + jX$$

Entre **Z**, **R** e **X** verificam-se as seguintes relações:



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

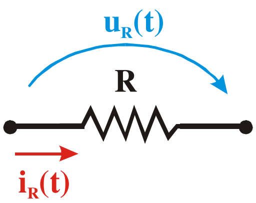
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

24.3 Resistência Ideal, Bobina Ideal e Condensador Ideal

Resistência Ideal

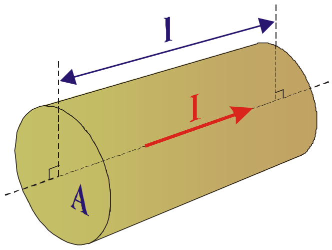
R - Resistência eléctrica

Unidade: **ohm (Ω)**



Lei de Ohm: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

Para um condutor eléctrico:



$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{A}}$$

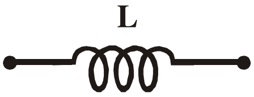
R[Ω] – Resistência eléctrica do condutor

ρ [Ω·m] – Resistividade do material condutor

l [m] – Comprimento do condutor

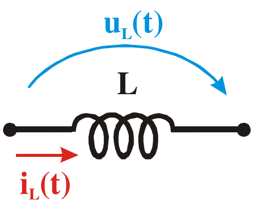
A [m^2] – Área da secção recta transversal do condutor

Bobina Ideal



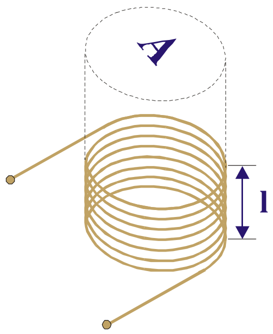
L - Coeficiente de auto-indução

Unidade: **henry (H)**



$$u_L(t) = L \cdot \frac{d[i_L(t)]}{dt}$$

Para um solenóide:



$$\boxed{L = \mu \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}}$$

L [H] – Coeficiente de auto-indução do solenóide

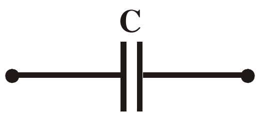
μ [H·m^{-1}] – Permeabilidade (absoluta, não relativa) do material do núcleo (ar, no exemplo da figura)

N – Número de espiras do solenóide

A [m^2] – Área da secção recta transversal do solenóide

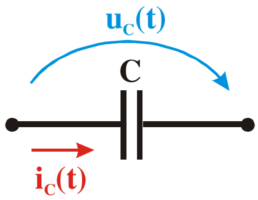
l [m] – Comprimento do solenóide

Condensador Ideal



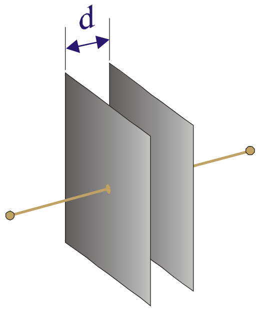
C - Capacidade

Unidade: **farad (F)**



$$i_C(t) = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}$$

Para um condensador de placas paralelas:



$$\boxed{C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}}$$

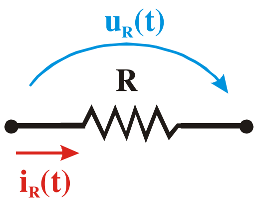
C [F] – Capacidade do condensador

ε [F·m^{-1}] – Permitividade (absoluta, não relativa) do dieléctrico existente entre as placas (ar, no exemplo da figura)

A [m^2] – Área da sobreposição das placas do condensador (área de cada placa, no caso de as placas serem iguais e estarem alinhadas uma com a outra)

d [m] – Distância existente entre as placas do condensador

Resistência Ideal



Lei de Ohm: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

R - Resistência eléctrica

Unidade: **ohm (Ω)**

Se $i_R(t)$ for tal que

$$i_R(t) = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i)$$

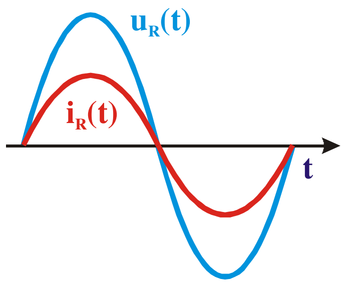
então, aplicando a lei de Ohm

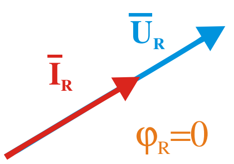
$$u_R(t) = R \cdot \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i)$$

pelo que

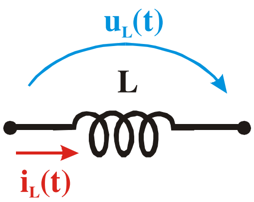
$$\begin{cases} U_R = R \cdot I_R \Rightarrow Z_R = \dfrac{U_R}{I_R} = R \\ \theta_u = \theta_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_R = R$$





Bobina Ideal



$$u_L(t) = L \cdot \frac{d[i_L(t)]}{dt}$$

L - Coeficiente de auto-indução

Unidade: **henry (H)**

Se $i_L(t)$ for tal que

$$i_L(t) = \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i)$$

então,

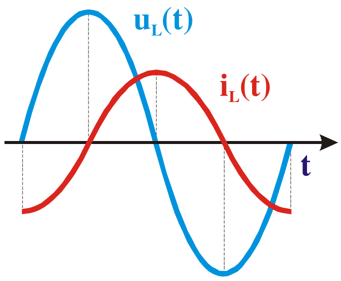
$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \frac{d[\operatorname{sen}(\omega t + \theta_i)]}{dt} \\ &= L \cdot \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \sqrt{2} \cdot \omega L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

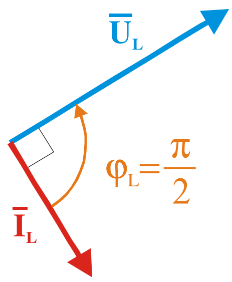
pelo que

$$\begin{cases} U_L = \omega L \cdot I_L \Rightarrow Z_L = \dfrac{U_L}{I_L} = \omega L \\ \theta_u = \theta_i + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_L = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

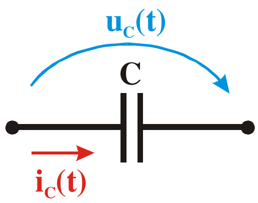
$$\begin{matrix} Z_L = \omega L \\ \varphi_L = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_L = j\omega L$$

$X_L = \omega L$ **Reactância indutiva (Ω)**





Condensador Ideal



$$i_C(t) = C \cdot \frac{d[u_C(t)]}{dt}$$

C - Capacidade

Unidade: **farad (F)**

Se $u_C(t)$ for tal que

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta_u)$$

então,

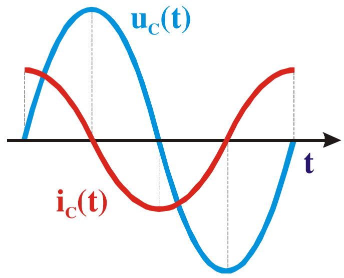
$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \cdot \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \frac{d[\operatorname{sen}(\omega t + \theta_u)]}{dt} \\ &= C \cdot \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \theta_u) \\ &= \sqrt{2} \cdot \omega C \cdot U_C \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

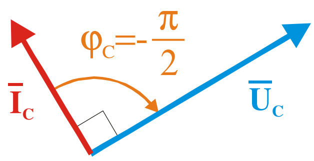
pelo que

$$\begin{cases} I_C = \omega C \cdot U_C \Rightarrow Z_C = \dfrac{U_C}{I_C} = \dfrac{1}{\omega C} \\ \theta_i = \theta_u + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

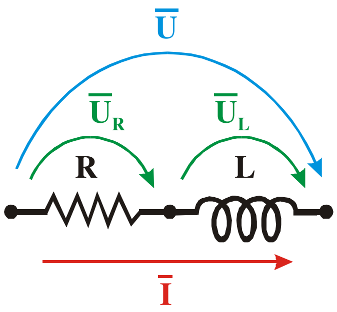
$$\begin{matrix} Z_C = \dfrac{1}{\omega C} \\ \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

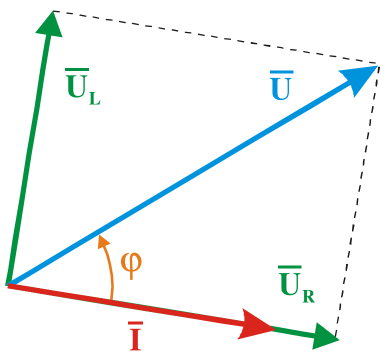
$X_C = -\dfrac{1}{\omega C}$ **Reactância capacitiva (Ω)**





25. Diagrama Fasorial e Impedância de Alguns Circuitos com Resistências, Bobinas e Condensadores

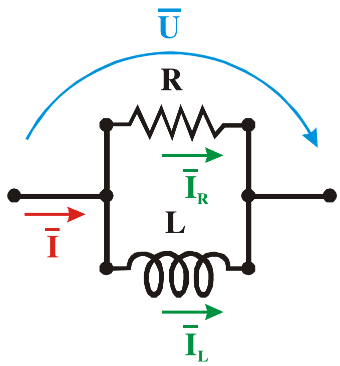


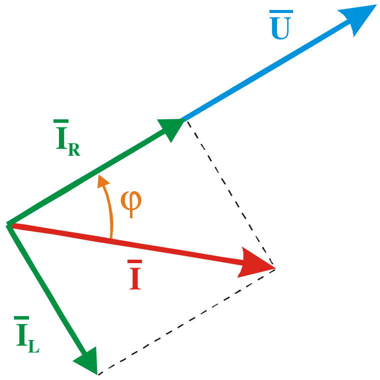


$$U_R = R \cdot I$$
$$U_L = \omega L \cdot I$$

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \\ &= \sqrt{(R \cdot I)^2 + (\omega L \cdot I)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I \end{aligned}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$



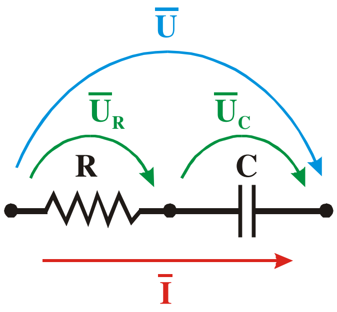


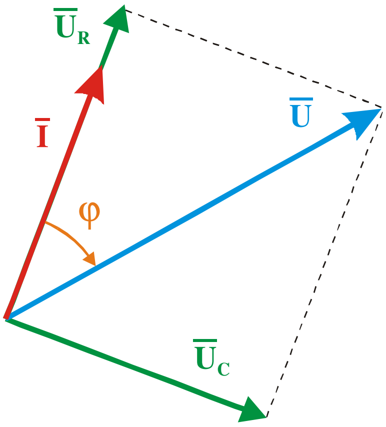
$$I_R = \frac{U}{R}$$
$$I_L = \frac{U}{\omega L}$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega L}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot U \end{aligned}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Em ambos os casos, a corrente está atrasada relativamente à tensão.



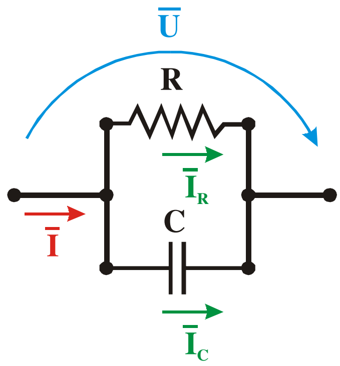


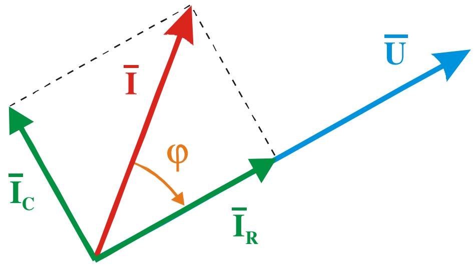
$$U_R = R \cdot I$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I$$

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + U_C^2} \\ &= \sqrt{(R \cdot I)^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \cdot I\right)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I \end{aligned}$$

$$\boxed{Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$





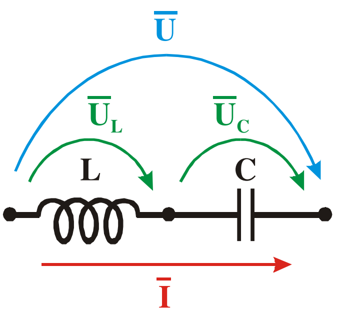
$$I_R = \frac{U}{R}$$

$$I_C = \omega C \cdot U$$

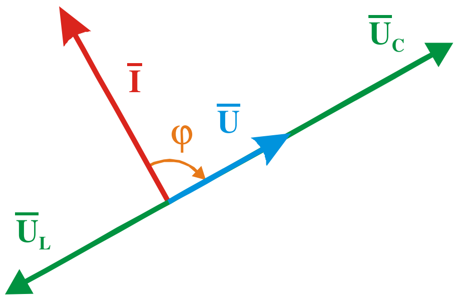
$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + (\omega C \cdot U)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} \cdot U \end{aligned}$$

$$\boxed{Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}}}$$

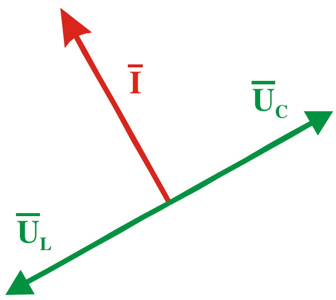
Em ambos os casos, a corrente está adiantada relativamente à tensão.



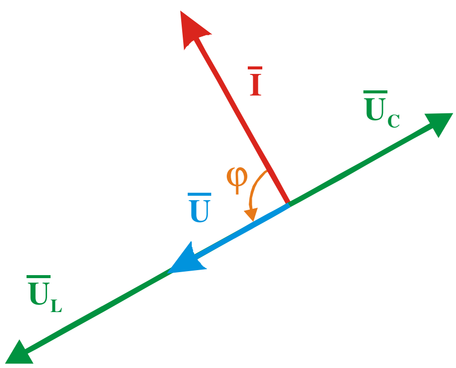
$\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$



$\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$



$\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$



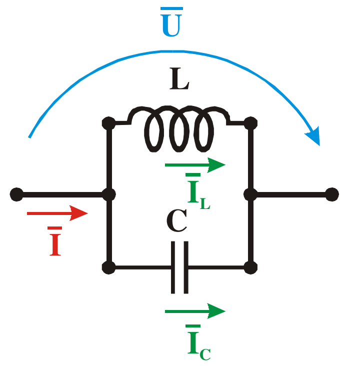
$$U_L = \omega L \cdot I$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I$$

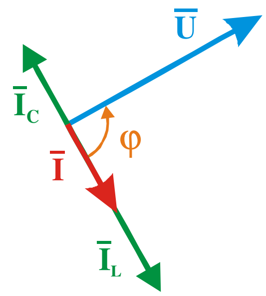
$$U = \left|U_L - U_C\right| = \left|\omega L \cdot I - \frac{1}{\omega C} \cdot I\right| = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| \cdot I$$

$$Z = \frac{U}{I} = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$$

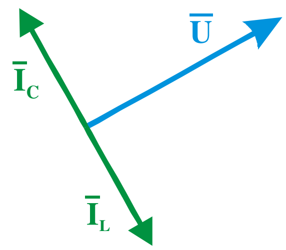
Ressonância: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad Z = 0$



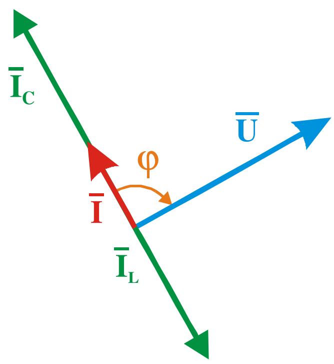
$\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$



$\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$



$\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$



$$I_L = \frac{U}{\omega L}$$

$$I_C = \omega C \cdot U$$

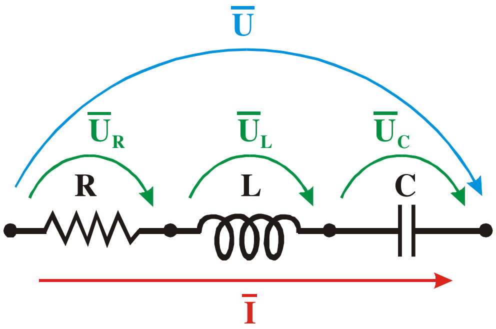
$$I = \left|I_L - I_C\right| = \left|\frac{U}{\omega L} - \omega C \cdot U\right| = \left|\frac{1}{\omega L} - \omega C\right| \cdot U$$

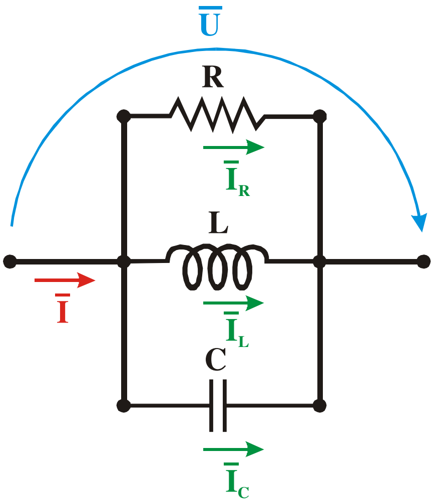
$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\left|\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right|}$$

Ressonância: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad Z = \infty$

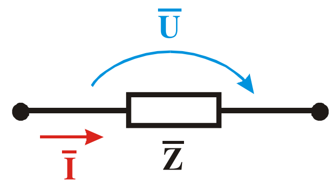
Frequência de ressonância: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

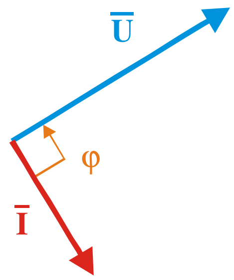
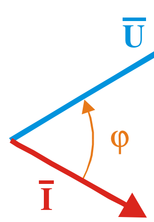
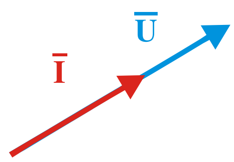
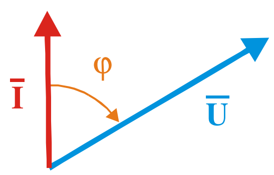
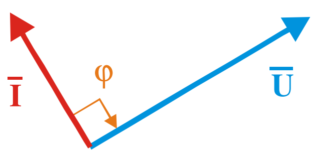
Para analisar…





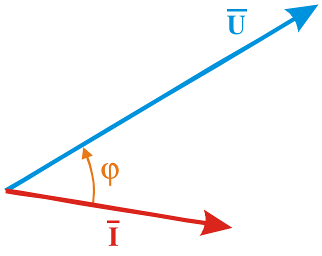
26. Tipos de Receptores Monofásicos



<table>
<tr><td></td><td>Receptor puramente indutivo
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\cos\varphi = 0$ (i)</td></tr>
<tr><td></td><td>Receptor indutivo
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
$0 < \cos\varphi < 1$ (i)</td></tr>
<tr><td></td><td>Receptor puramente resistivo
$\varphi = 0$
$\cos\varphi = 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>Receptor capacitivo
$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$
$0 < \cos\varphi < 1$ (c)</td></tr>
<tr><td></td><td>Receptor puramente capacitivo
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
$\cos\varphi = 0$ (c)</td></tr>
</table>

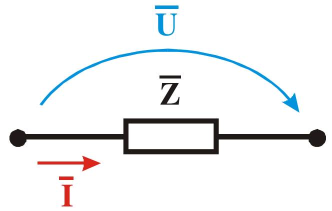
27. Circuitos Equivalentes de um Receptor Monofásico Indutivo ou Capacitivo

27.1 Receptor monofásico indutivo

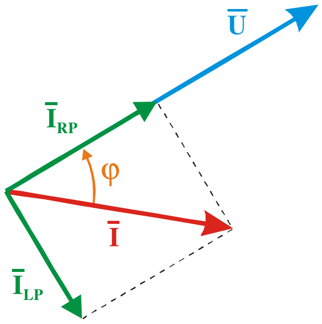


$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\varphi > 0$

Receptor monofásico indutivo

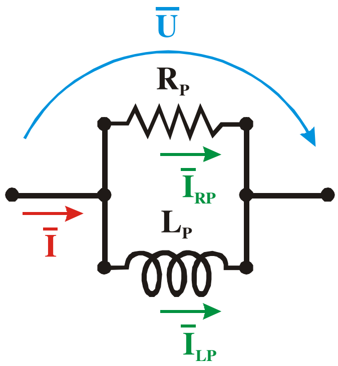


$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$



$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\varphi > 0$

Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em paralelo

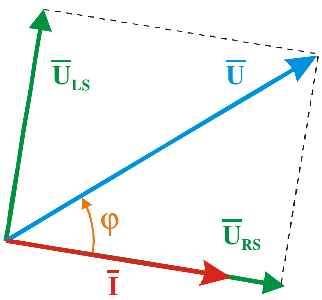


$$\begin{cases} R_P = \dfrac{U}{I_{RP}} = \dfrac{U}{I \cdot \cos\varphi} = \dfrac{Z}{\cos\varphi} \\ \omega L_P = \dfrac{U}{I_{LP}} = \dfrac{U}{I \cdot \text{sen}\varphi} = \dfrac{Z}{\text{sen}\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_P = \dfrac{Z}{\cos\varphi} \\ \omega L_P = \dfrac{Z}{\text{sen}\varphi} \end{cases}$$

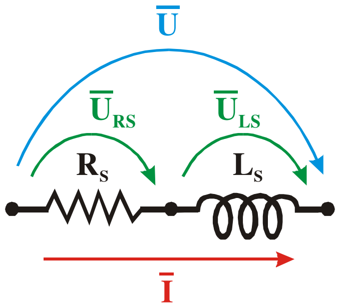
$$\begin{cases} \dfrac{R_S}{R_P} = \cos^2\varphi \\ \dfrac{L_S}{L_P} = \text{sen}^2\varphi \end{cases}$$

$$\frac{R_S}{R_P} + \frac{L_S}{L_P} = 1$$



$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\varphi > 0$

Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em série



$$\begin{cases} R_S = \dfrac{U_{RS}}{I} = \dfrac{U \cdot \cos\varphi}{I} = Z \cdot \cos\varphi \\ \omega L_S = \dfrac{U_{LS}}{I} = \dfrac{U \cdot \text{sen}\varphi}{I} = Z \cdot \text{sen}\varphi \end{cases}$$

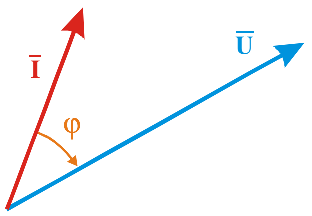
$$\begin{cases} R_S = Z \cdot \cos\varphi \\ \omega L_S = Z \cdot \text{sen}\varphi \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} U = 230\text{V} \\ I = 10\text{A} \\ \varphi = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = 23\Omega \\ \text{sen}\varphi = 0{,}5 \\ \cos\varphi = 0{,}866 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_P = \dfrac{Z}{\cos\varphi} = \dfrac{23}{0{,}866} = 26{,}56\Omega \\ \omega L_P = \dfrac{Z}{\text{sen}\varphi} = \dfrac{23}{0{,}5} = 46\Omega \end{cases} \wedge \begin{cases} R_S = Z \cdot \cos\varphi = 23 \cdot 0{,}866 = 19{,}92\Omega \\ \omega L_S = Z \cdot \text{sen}\varphi = 23 \cdot 0{,}5 = 11{,}5\Omega \end{cases}$$

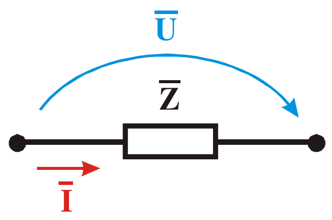
$$\frac{R_S}{R_P} + \frac{L_S}{L_P} = \frac{R_S}{R_P} + \frac{\omega L_S}{\omega L_P} = \frac{19{,}92}{26{,}56} + \frac{11{,}5}{46} = 1$$

27.2 Receptor monofásico capacitivo

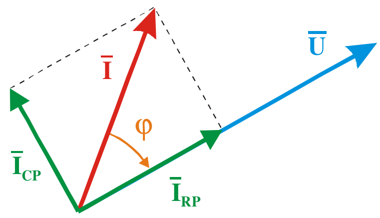


$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varphi < 0$$

Receptor monofásico capacitivo

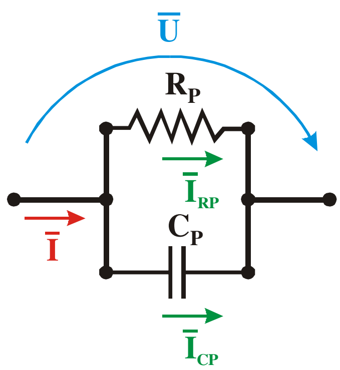


$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$



$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varphi < 0$$

Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em paralelo

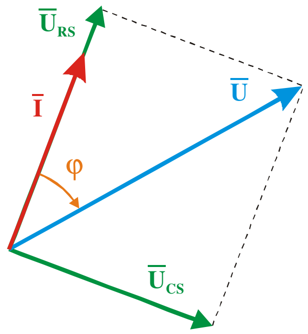


$$\begin{cases} R_P = \dfrac{U}{I_{RP}} = \dfrac{U}{I\cdot\cos\varphi} = \dfrac{Z}{\cos\varphi} \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_P} = -\dfrac{U}{I_{CP}} = \dfrac{U}{I\cdot\operatorname{sen}\varphi} = \dfrac{Z}{\operatorname{sen}\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_P = \dfrac{Z}{\cos\varphi} \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_P} = \dfrac{Z}{\operatorname{sen}\varphi} \end{cases}$$

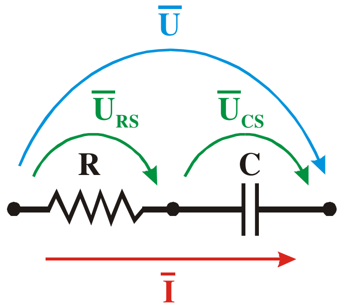
$$\begin{cases} \dfrac{R_S}{R_P} = \cos^2\varphi \\[2ex] \dfrac{C_P}{C_S} = \operatorname{sen}^2\varphi \end{cases}$$

$$\frac{R_S}{R_P} + \frac{C_P}{C_S} = 1$$



$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varphi < 0$$

Circuito equivalente com o número mínimo de componentes em série



$$\begin{cases} R_S = \dfrac{U_{RS}}{I} = \dfrac{U\cdot\cos\varphi}{I} = Z\cdot\cos\varphi \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_S} = -\dfrac{U_{CS}}{I} = \dfrac{U\cdot\operatorname{sen}\varphi}{I} = Z\cdot\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_S = Z\cdot\cos\varphi \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_S} = Z\cdot\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} U = 230\text{V} \\ I = 10\text{A} \\ \varphi = -30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = 23\Omega \\ \operatorname{sen}\varphi = -0{,}5 \\ \cos\varphi = 0{,}866 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_P = \dfrac{Z}{\cos\varphi} = \dfrac{23}{0{,}866} = 26{,}56\Omega \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_P} = \dfrac{Z}{\operatorname{sen}\varphi} = \dfrac{23}{-0{,}5} = -46\Omega \end{cases} \wedge \begin{cases} R_S = Z\cdot\cos\varphi = 23\cdot 0{,}866 = 19{,}92\Omega \\[2ex] -\dfrac{1}{\omega C_S} = Z\cdot\operatorname{sen}\varphi = 23\cdot(-0{,}5) = -11{,}5\Omega \end{cases}$$

$$\frac{R_S}{R_P} + \frac{C_P}{C_S} = \frac{R_S}{R_P} + \frac{-\dfrac{1}{\omega C_S}}{-\dfrac{1}{\omega C_P}} = \frac{19{,}92}{26{,}56} + \left(\frac{-11{,}5}{-46}\right) = 1$$

27.3 Relação da resistência e da reactância de um receptor monofásico com os parâmetros do seu circuito equivalente com o número mínimo de componentes em série

A **resistência R** e a **reactância X** que caraterizam a impedância de um receptor monofásico são os parâmetros do seu circuito equivalente com o número mínimo de componentes **em série**.

Para um receptor indutivo: $\begin{cases} R = Z \cdot \cos\varphi = R_S \\ X = Z \cdot \mathrm{sen}\varphi = \omega L_S \end{cases}$

Para um receptor capacitivo: $\begin{cases} R = Z \cdot \cos\varphi = R_S \\ X = Z \cdot \mathrm{sen}\varphi = -\dfrac{1}{\omega C_S} \end{cases}$

28. Impedância equivalente de receptores monofásicos em série e de receptores monofásicos em paralelo

Para um conjunto de **n impedâncias em série** relativamente aos terminais A e B, a impedância $\overline{Z}_{AB}$ medida entre os terminais A e B é dada por:

$$\overline{Z}_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i$$

Mas, em geral:

$$Z_{AB} \neq \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

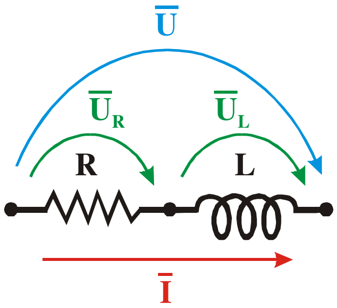
Para um conjunto de **n impedâncias em paralelo** relativamente aos terminais A e B, a impedância $\overline{Z}_{AB}$ medida entre os terminais A e B é dada por:

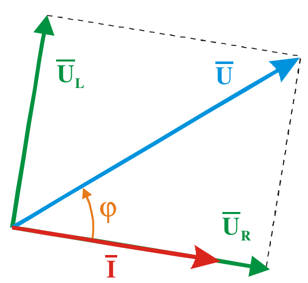
$$\frac{1}{\overline{Z}_{AB}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i}$$

Mas, em geral:

$$\frac{1}{Z_{AB}} \neq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i}$$

Exemplo:



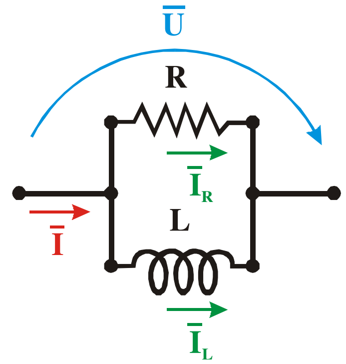


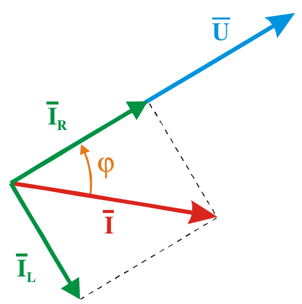
$Z_R = R$

$Z_L = \omega L$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \neq R + \omega L$$

Exemplo:





$Z_R = R$

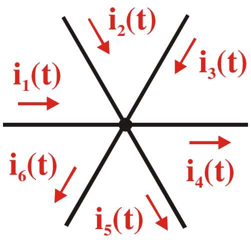
$Z_L = \omega L$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} \neq \frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L}$$

29. Leis de Kirchhoff em Circuitos com Correntes e Tensões Variáveis no Tempo

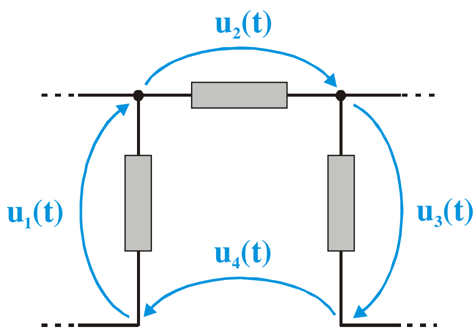
29.1 Para qualquer tipo de evolução temporal das correntes e das tensões

Lei das Correntes: A **<u>soma algébrica dos valores instantâneos, num dado instante t_0</u>**, das correntes que convergem para um ponto é igual à **<u>soma algébrica dos valores instantâneos, nesse instante</u>**, das correntes que divergem desse ponto.



$$\sum_{i=1}^{3} i_i(t_0)=\sum_{i=4}^{6} i_i(t_0) \qquad \forall t_0$$

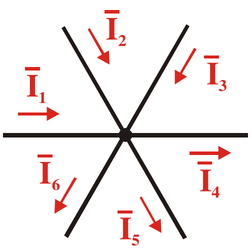
Lei das Tensões: a **<u>soma algébrica dos valores instantâneos, num dado instante t_0</u>**, de todas as **tensões** consideradas num mesmo sentido ao longo de um percurso fechado é nula.



$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t_0)=0 \qquad \forall t_0$$

29.2 Para correntes e tensões puramente alternadas sinusoidais, todas com a mesma frequência

Lei das Correntes: A **<u>soma fasorial</u>** das correntes que convergem para um ponto é igual à **<u>soma fasorial</u>** das correntes que divergem desse ponto.

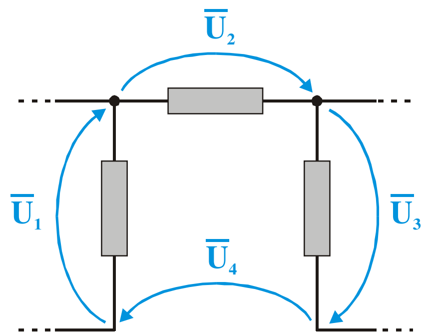


$$\sum_{i=1}^{3}\bar{I}_i=\sum_{i=4}^{6}\bar{I}_i$$

Mas, em geral, a **<u>soma dos valores eficazes</u>** das correntes que convergem para um ponto é diferente da **<u>soma dos valores eficazes</u>** das correntes que divergem desse ponto.

$$\sum_{i=1}^{3} I_i \neq \sum_{i=4}^{6} I_i$$

Lei das Tensões: a **<u>soma fasorial</u>** de todas as **tensões** consideradas num mesmo sentido ao longo de um percurso fechado é nula.



$$\sum_{i=1}^{n}\bar{U}_i=0$$

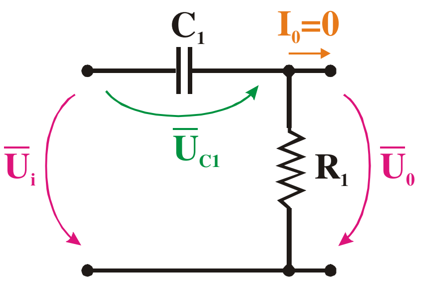
Mas, em geral, a **<u>soma dos valores eficazes</u>** de todas as **tensões** consideradas num mesmo sentido ao longo de um percurso fechado **<u>não é nula</u>**.

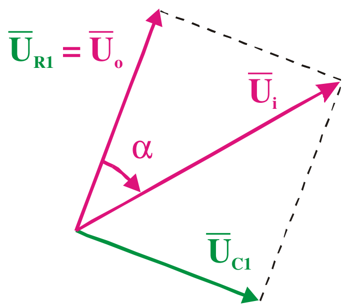
$$\sum_{i=1}^{n} U_i \neq 0$$

29.3 Resposta em Frequência de Circuitos de Primeira Ordem Alimentados por uma Tensão Alternada Sinusoidal

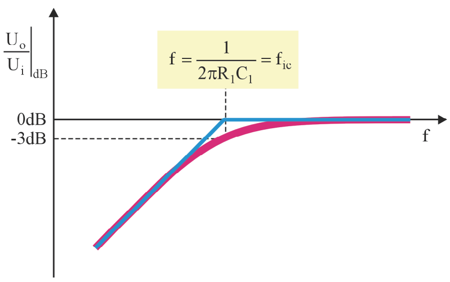
Aos circuitos apresentados é aplicada uma tensão alternada sinusoidal de valor eficaz U_i e frequência f (logo, $\omega = 2\pi f$). Daí resulta uma tensão de saída também alternada sinusoidal com a mesma frequência e valor eficaz U_0.

29.3.1 Filtro RC Passa-Alto





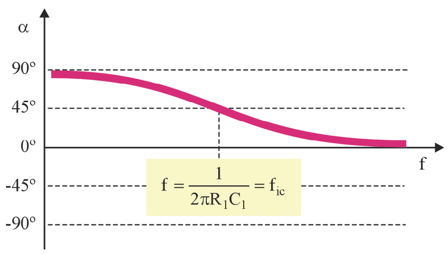
$$\frac{\overline{U}_o}{\overline{U}_i} = \frac{U_o}{U_i}\angle\alpha = \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{U_o}{U_i} = \dfrac{\omega R_1 C_1}{\sqrt{(\omega R_1 C_1)^2 + 1}} \\ \alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}(\omega R_1 C_1) \end{cases}$$



Curva exacta: $\left.\dfrac{U_o}{U_i}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left(\dfrac{\omega R_1 C_1}{\sqrt{(\omega R_1 C_1)^2 + 1}}\right)$

Assímptota oblíqua: $(\omega R_1 C_1)^2 << 1 \Rightarrow \left.\dfrac{U_o}{U_i}\right|_{dB} = 20\log_{10}(\omega R_1 C_1)$

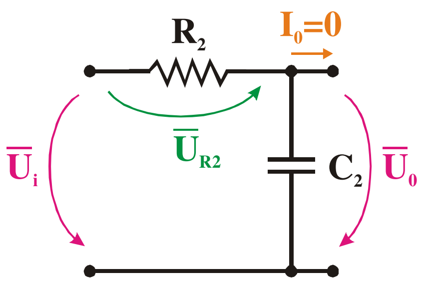
$$f = f_{ic} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R_1 C_1} \Rightarrow \begin{cases} 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\mathrm{dB} \quad \text{(curva exacta)} \\ 20\log_{10}(1) = 0\mathrm{dB} \quad \text{(assímptota oblíqua)} \end{cases}$$

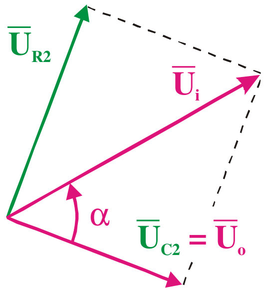


Curva exacta: $\alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}(\omega R_1 C_1)$

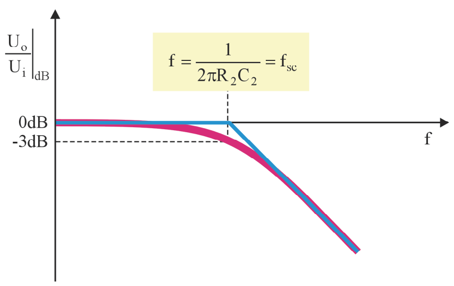
$$f = f_{ic} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R_1 C_1} \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}(1) = 45^\circ$$

29.3.2 Filtro RC Passa-Baixo





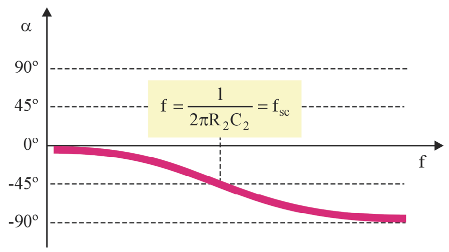
$$\frac{\overline{U}_o}{\overline{U}_i} = \frac{U_o}{U_i}\angle\alpha = \frac{\dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{U_o}{U_i} = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega R_2 C_2)^2 + 1}} \\ \alpha = -\mathrm{arctg}(\omega R_2 C_2) \end{cases}$$



Curva exacta: $\left.\dfrac{U_o}{U_i}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(\omega R_2 C_2)^2 + 1}}\right)$

Assímptota oblíqua: $(\omega R_2 C_2)^2 >> 1 \Rightarrow \left.\dfrac{U_o}{U_i}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\omega R_2 C_2}\right)$

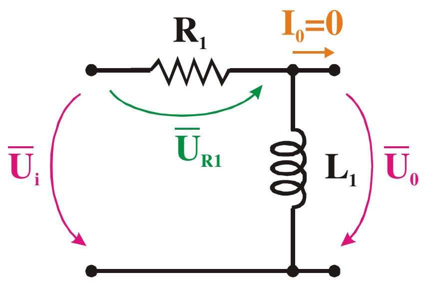
$$f = f_{sc} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R_2 C_2} \Rightarrow \begin{cases} 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\mathrm{dB} \quad \text{(curva exacta)} \\ 20\log_{10}(1) = 0\mathrm{dB} \quad \text{(assímptota oblíqua)} \end{cases}$$

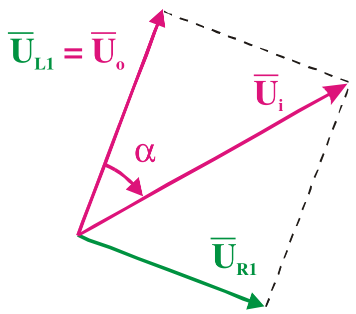


Curva exacta: $\alpha = -\mathrm{arctg}(\omega R_2 C_2)$

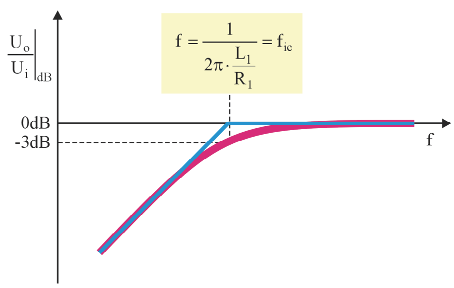
$$f = f_{sc} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R_2 C_2} \Rightarrow \alpha = -\mathrm{arctg}(1) = -45^\circ$$

29.3.3 Filtro RL Passa-Alto





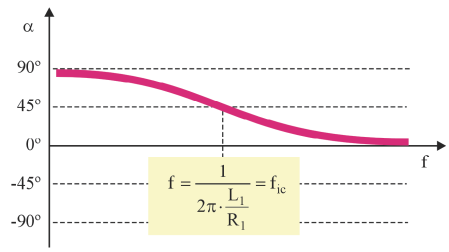
$$\frac{\overline{U}_o}{\overline{U}_i} = \frac{U_o}{U_i}\angle\alpha = \frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}}{1 + j\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{U_o}{U_i} = \dfrac{\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}}{\sqrt{\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right)^2 + 1}} \\ \alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right) \end{cases}$$



Curva exacta: $\left.\frac{U_o}{U_i}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}}{\sqrt{\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right)^2 + 1}}\right)$

Assímptota oblíqua: $\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right)^2 << 1 \Rightarrow \left.\frac{U_o}{U_i}\right|_{dB} \approx 20\log_{10}\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right)$

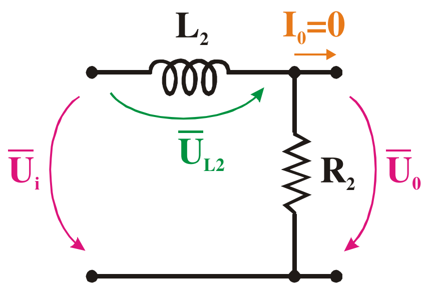
$$f = f_{ic} = \frac{1}{2\pi\cdot\frac{L_1}{R_1}} \Rightarrow \omega = \frac{R_1}{L_1} \Rightarrow \begin{cases} 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{dB} \quad \text{(curva exacta)} \\ 20\log_{10}(1) = 0\text{dB} \quad \text{(assímptota oblíqua)} \end{cases}$$

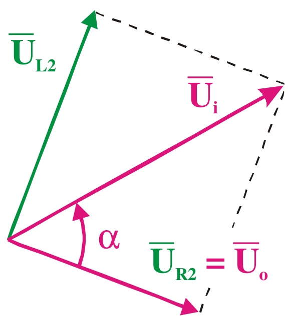


Curva exacta: $\alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}\left(\omega\cdot\frac{L_1}{R_1}\right)$

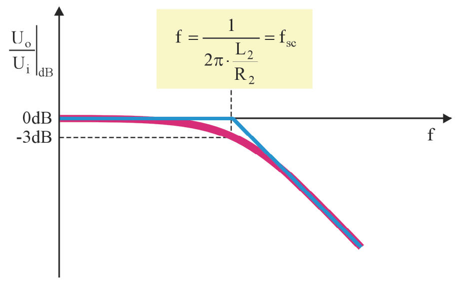
$$f = f_{ic} = \frac{1}{2\pi\cdot\frac{L_1}{R_1}} \Rightarrow \omega = \frac{R_1}{L_1} \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \mathrm{arctg}(1) = 45^\circ$$

29.3.4 Filtro RL Passa-Baixo





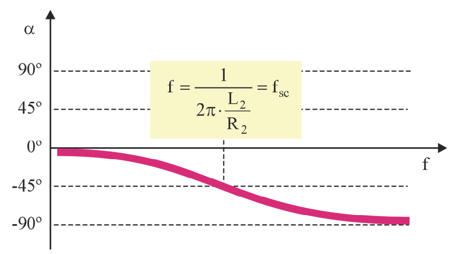
$$\frac{\overline{U}_o}{\overline{U}_i}=\frac{U_o}{U_i}\angle\alpha=\frac{R_2}{j\omega L_2+R_2}=\frac{1}{j\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}+1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{U_o}{U_i}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}\right)^2+1}}\\[2ex]\alpha=-\mathrm{arctg}\left(\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}\right)\end{cases}$$



Curva exacta: $\left.\frac{U_o}{U_i}\right|_{dB}=20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}\right)^2+1}}\right)$

Assímptota oblíqua: $\left(\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}\right)^2>>1\Rightarrow\left.\frac{U_o}{U_i}\right|_{dB}=20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}}\right)$

$$f=f_{sc}=\frac{1}{2\pi\cdot\frac{L_2}{R_2}}\Rightarrow\omega=\frac{R_2}{L_2}\Rightarrow\begin{cases}20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3\text{dB}\quad\text{(curva exacta)}\\[2ex]20\log_{10}(1)=0\text{dB}\quad\text{(assímptota oblíqua)}\end{cases}$$



Curva exacta: $\alpha=-\mathrm{arctg}\left(\omega\cdot\frac{L_2}{R_2}\right)$

$$f=f_{sc}=\frac{1}{2\pi\cdot\frac{L_2}{R_2}}\Rightarrow\omega=\frac{R_2}{L_2}\Rightarrow\alpha=-\mathrm{arctg}(1)=-45^\circ$$