

Determinação da massa volúmica de um sólido homogéneo

André Cruz, Beatriz Demétrio, Carlos Ferreira

Departamento de Física, Escola de Ciências, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga
Portugal

30 de setembro de 2019

Sumário

Procede-se a uma montagem experimental baseada na *Lei de Arquimedes* e na *Lei de Hooke*, na qual se prende um sólido a uma mola elástica, recolhendo valores da distância entre o objeto e uma superfície de referência, com este emerso e imerso num fluido. Esta experiência permitiu a obtenção dos valores das massas volúmicas dos sólidos alumínio, cobre e molibdénio, sendo estes $\rho_{\text{alumínio}} = 2.79 \pm 0.25 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{cobre}} = (9.37 \pm 2.78) \text{ g/cm}^3$ e $\rho_{\text{molibdénio}} = 10.80 \pm 3.73 \text{ g/cm}^3$, respetivamente.

1. Introdução

A massa volúmica (ρ) corresponde à relação entre a massa (m) e o volume (V) de uma amostra de um material (equação (1)). Embora a massa e o volume sejam propriedades amplas, a massa volúmica é constante para um determinado material e para um certo valor de temperatura, sendo assim uma propriedade indicadora de um elemento desconhecido, caso tenhamos os valores de referência das massas volúmicas.

$$\rho = m/V \quad (1)$$

Pelo *Princípio Fundamental da Dinâmica* (equação (2)) temos que o peso (F) de um determinado corpo pode ser obtido através do produto da massa (m) deste com a aceleração da gravidade (g).

$$F = mg \quad (2)$$

Como, pela equação (1), $m = \rho V$, então:

$$F = mg = \rho g V \quad (3)$$

Quando um corpo é mergulhado num fluido de massa volúmica ρ_{fluido} , pela *Lei de Arquimedes* sabemos que esse sofre, por parte deste, uma impulsão, que é uma força vertical, dirigida de baixo para cima e de intensidade igual à do peso do volume de fluido deslocado pelo corpo. Por este motivo, quando um corpo é imerso num líquido, o seu peso será aparentemente menor

do que quando se encontra emerso pois nele atua mais a força Impulsão (F_i). Esta força pode ser dada por:

$$F_i = \rho_{\text{fluido}} g V \quad (4)$$

Combinando as equações (3) e (4), obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{F}{F_i} = \frac{\rho}{\rho_{\text{fluido}}} \quad (5)$$

Com esta última equação, podemos obter o valor da massa volúmica de um objeto através da massa volúmica do fluido onde este se encontra imergido, assim como os valores de F e F_i .

Com tudo isto, consideremos a seguinte montagem experimental, ilustrada na Figura 1:

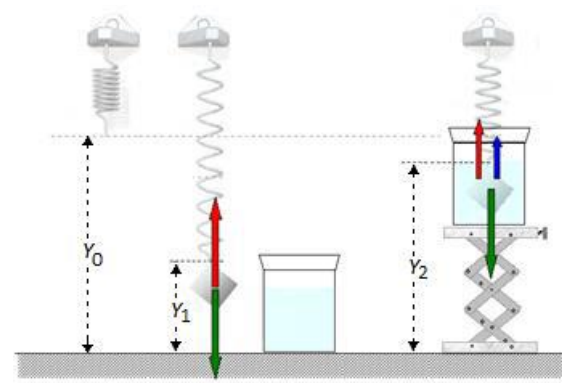


Figura 1: Esquema da montagem experimental

Esta montagem corresponde à montagem utilizada na atividade laboratorial.

É perceptível a presença de um corpo que é preso à extremidade de uma mola elástica de constante elástica k , encontram-se num instante emerso e noutro instante imerso num fluido. No primeiro caso, no corpo são atuadas as forças peso (representada por uma seta verde) e elástica (representada por uma seta vermelha), forças estas que se anulam no momento em que o corpo para de oscilar em conjunto com a mola.

Já no segundo caso, o corpo foi imergido num fluido, sendo que a partir desse momento passa a atuar nele uma nova força, a força impulsão (representada por uma seta azul). Como esta força é contrária à força peso, é necessário que se aumente a distância do corpo em relação à superfície de referência de forma a que este fique totalmente imergido. Tal deve-se à aparente diminuição de peso.

Tendo em conta Y_0 , Y_1 e Y_2 , representados na figura 1, considere $X = Y_0 - Y_1$ e $X' = Y_2 - Y_1$.

Pela *Lei de Hooke*, podemos considerar as forças peso e de impulsão como sendo:

$$F = kX \quad (6)$$

$$F_i = kX' \quad (7)$$

Daqui temos que:

$$\frac{F}{F_i} = \frac{kX}{kX'} \quad (8)$$

Tendo em conta as equações (5) e (8) podemos obter, finalmente, uma equação mais prática que permite obter ρ a partir de X , X' e ρ_{fluido} .

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{fluido}}} = \frac{kX}{kX'}$$

$$\rho = \rho_{\text{fluido}} \frac{kX}{kX'} \quad (9)$$

2. Material utilizado e procedimento

Numa fase inicial, recorrendo ao uso de uma proveta e de uma balança, recolhemos os valores da massa e do volume da água, necessários para o posterior cálculo da massa volúmica desta. Para isso, colocamos a proveta, ainda vazia, em cima da balança, tarando-a de seguida. Dessa forma foi possível recolher os valores da massa e do volume ao mesmo tempo.

De seguida, procedemos à montagem da experiência esquematizada na figura 1. A primeira medição será a da altura a que o gancho da mola (onde se iriam segurar os sólidos) se encontra em relação a uma superfície de referência, no nosso caso a superfície escolhida foi o chão da sala. Este valor será representado na atividade por Y_0 .

Feita a recolha desses valores (é importante recolher vários valores da “altura da mola”, de forma a diminuir as incertezas de medição), prendemos um dos sólidos em estudo na extremidade da mola e recolhemos a distância (Y_1) a que o centro de massa deste se encontra em relação ao chão, após a mola parar de oscilar. Nesta atividade os sólidos utilizados foram o alumínio, o molibdénio e o cobre.

Posteriormente, imergimos o sólido num gobelé com água, tendo sido necessário elevar o gobelé até que o sólido ficasse totalmente imergido. Como há uma aparente diminuição do peso de um corpo quando este está total ou parcialmente mergulhado num fluido, a mola contrair-se-á e, dessa forma, a distância que o sólido se encontra em relação ao chão aumentará. Representamos esta distância por Y_2 .

As medições das distâncias foram efetuadas com uma fita métrica vulgar (graduada em mm), de incerteza 0,05 cm.

Feita a recolha de todas as medidas necessárias, recorreremos às equações indicadas na Introdução para obtermos os valores da massa volúmica da água e dos materiais sólidos utilizados, não esquecendo a estimativa das incertezas. Finalizamos a atividade experimental comparando os resultados com os valores de referência.

3. Apresentação dos resultados e cálculos

Os resultados das medições estão apresentados nas tabelas 1 e 2:

Tabela 1: Medições das massas e volumes da água e cálculo da respetiva massa volúmica. A incerteza de m devida ao instrumento de medida é de 0.01 g. A incerteza de V é de 1 ml e foi estimada com base no erro de leitura da proveta e nas condições de medida.

$m_{\text{água}}$ (g)	$V_{\text{água}}$ (cm ³)	$\rho_{\text{água}} = \frac{m_{\text{água}}}{V_{\text{água}}}$ (g/cm ³)
48,00	49,00	0,980
100,25	101,00	0,993
146,06	147,00	0,994
210,40	211,00	0,997
201,82	203,00	0,994

Cálculo da massa volúmica da água através da média dos valores obtidos com a incerteza associada recorrendo ao desvio padrão (ver apêndice):

$$\bar{\rho}_{\text{água}} = (0.99 \pm 0.01) \text{ g/cm}^3$$

Tabela 2: Dimensões de Y_0 , Y_1 e Y_2 que estão identificados na figura 1, com uma incerteza de 0,05cm estimada com base no erro de leitura da fita métrica e nas condições de medida.

	Alumínio	Cobre	Molibdénio
Y_0	80.75	80.75	80.75
(cm)	80.80	80.80	80.80
	80.70	80.70	80.70
\bar{Y}_0	80.75	80.75	80.75
Y_1	11.45	10.50	11.90
(cm)	11.50	10.50	12.00
	11.40	10.50	11.95
\bar{Y}_1	11.45	10.50	11.95
Y_2	36.10	17.95	18.20
(cm)	36.05	17.90	18.30
	36.00	17.95	18.30
\bar{Y}_2	36.05	17.93	18.27

Sendo $X = Y_0 - Y_1$ e $X' = Y_2 - Y_1$:

$$X_{\text{alumínio}} = (69.30 \pm 0.07) \text{ cm}$$

$$X'_{\text{alumínio}} = (24.60 \pm 0.07) \text{ cm}$$

$$X_{\text{cobre}} = (70.25 \pm 0.07) \text{ cm}$$

$$X'_{\text{cobre}} = (7.43 \pm 0.07) \text{ cm}$$

$$X_{\text{molibdénio}} = (68.80 \pm 0.07) \text{ cm}$$

$$X'_{\text{molibdénio}} = (6.32 \pm 0.07) \text{ cm}$$

Utilizando a expressão para o cálculo da massa volúmica de um sólido homogêneo (ver apêndice) obtem-se para os 3 materiais as seguintes massas volúmicas, com as respetivas incertezas (ver apêndice):

$$\rho_{\text{alumínio}} = (2.79 \pm 0.25) \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{cobre}} = (9.37 \pm 2.78) \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{molibdénio}} = (10.80 \pm 3.73) \text{ g/cm}^3$$

4. Discussão dos resultados e Conclusão

Recorrendo a uma tabela periódica para verificar os valores tabelados das massas volúmicas do alumínio, do cobre e do molibdênio, tem-se que:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{alumínio}} &= 2.70 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_{\text{cobre}} &= 8.93 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_{\text{molibdênio}} &= 10.28 \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

Os resultados obtidos com a experiência realizada foram os seguintes:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{alumínio}} &= 2.79 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_{\text{cobre}} &= 9.37 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_{\text{molibdênio}} &= 10.80 \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

Calculando as suas respectivas incertezas (ver apêndice), temos que:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{alumínio}} &= (2.79 \pm 0.25) \text{ g/cm}^3 \\ 2.54 \text{ cm}^3 &< \rho_{\text{alumínio}} < 3.04 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{cobre}} &= (9.37 \pm 2.78) \text{ g/cm}^3 \\ 6.59 \text{ cm}^3 &< \rho_{\text{cobre}} < 12.15 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{molibdênio}} &= (10.80 \pm 3.73) \text{ g/cm}^3 \\ 7.07 \text{ cm}^3 &< \rho_{\text{molibdênio}} < 14.53 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Como o valor tabelado se encontra dentro do intervalo do valor obtido, podemos dizer que por este método é possível determinar a massa volúmica de um sólido homogêneo, mas quanto maior o valor dessa grandeza maior é incerteza associada, para a diminuir poderíamos ter realizado um maior número de medições e/ou utilizar aparelhos mais precisos e com menos uso.

Outro procedimento que poderia ter sido escolhido seria através da imersão dos sólidos numa proveta com água e posterior medição do volume de água deslocada que corresponderia ao volume do sólido.

Depois, utilizando uma balança para medir a massa do sólido poderíamos calcular a sua massa volúmica pela divisão da massa pelo volume. Mas, dada a forma e volume dos materiais, teríamos de utilizar uma proveta relativamente grande com menor precisão levando a uma maior incerteza.

Conclui-se que a determinação da massa volúmica de um sólido necessita basicamente de três fatores como: medição da massa do objeto, que requer a sua pesagem numa balança, de um líquido cuja massa volúmica se sabe e de uma mola para determinar a diferença da altura do sólido pendurado e imerso dentro do líquido, baseada na Lei de Hooke.

4. Apêndice

- Determinação da incerteza da massa volúmica da água

Através da definição de massa volúmica de um corpo podemos afirmar que a massa volúmica da água se calcula através do quociente entre a massa e o volume de água medidos:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

onde m é a massa do corpo e V o volume do corpo.

Sendo que a massa de água corresponde a m e o volume de água a V , então a sua incerteza calcula-se através da seguinte expressão:

$$(\delta\rho)^2 = \left(\frac{d\rho}{dm}\right)^2 (\delta m)^2 + \left(\frac{d\rho}{dV}\right)^2 (\delta V)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta\rho)^2 = \frac{(\delta m)^2}{V^2} + \left(-\frac{m}{V^2}\right)^2 (\delta V)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\delta\rho)^2}{\rho^2} = \frac{(\delta m)^2}{V^2 \rho^2} + \frac{m^2}{V^4 \rho^2} (\delta V)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\delta\rho)^2}{\rho^2} = \frac{(\delta m)^2}{m^2} + \frac{(\delta V)^2}{V^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\delta m}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta \rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\delta m}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2}$$

- Determinação da incerteza de X e X'

Sabemos que X é a diferença entre o Y₀ e o Y₁ e X' é a diferença entre o Y₂ e o Y₁. Por isso, a incerteza de X e X':

$$(\delta X)^2 = \left(\frac{dX}{dY_0}\right)^2 (\delta Y_0)^2 + \left(\frac{dX}{dY_1}\right)^2 (\delta Y_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta X)^2 = (\delta Y_0)^2 + (\delta Y_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta X)^2 = \sqrt{(\delta Y_0)^2 + (\delta Y_1)^2}$$

$$(\delta X')^2 = \left(\frac{dX'}{dY_2}\right)^2 (\delta Y_2)^2 + \left(\frac{dX'}{dY_1}\right)^2 (\delta Y_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta X')^2 = (\delta Y_2)^2 + (\delta Y_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta X')^2 = \sqrt{(\delta Y_2)^2 + (\delta Y_1)^2}$$

- Determinação da incerteza da massa volúmica dos sólidos

Podemos calcular a massa volúmica de um sólido através da expressão:

$$\rho = \rho_a \frac{X}{X'}$$

Onde ρ_a é a massa volúmica da água, X é a diferença entre o Y₀ e o Y₁ e por fim, X' é a diferença entre o Y₂ e o Y₁. Portanto, a incerteza da massa volúmica dos sólidos calcula-se através da seguinte expressão:

$$(\delta \rho)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\rho_a}\right)^2 (\delta \rho_a)^2 + \left(\frac{d\rho}{dX}\right)^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{d\rho}{dX'}\right)^2 (\delta X')^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta \rho)^2 = \left(\frac{X}{X'}\right)^2 (\delta \rho_a)^2 + \left(\frac{\rho_a}{X'}\right)^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{-\rho_a X}{(X')^2}\right)^2 (\delta X')^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta \rho)^2 = \frac{X^2}{(X')^2} (\delta \rho_a)^2 + \frac{(\rho_a)^2}{(X')^2} (\delta X)^2 + \frac{(\rho_a)^2 X^2}{(X')^4} (\delta X')^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\delta \rho)^2}{\rho^2} = \frac{X^2}{(X')^2 \rho^2} (\delta \rho_a)^2 + \frac{(\rho_a)^2}{(X')^2 \rho^2} (\delta X)^2 + \frac{(\rho_a)^2 X^2}{(X')^2 \rho^2} (\delta X')^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\delta \rho) = \rho \sqrt{\frac{(\delta \rho_a)^2}{X' \rho_a} + \frac{(\delta X)^2}{X' X} + \frac{\rho_a X (\delta X')^2}{(X')^2}}$$

Bibliografia

[1] Noémia Maciel, M. Céu Marques, Jaime E. Villate, Carlos Azevedo, Alice Cação, Andreia Magalhães, Eu e a Física 12, 1ª edição, Porto Editora, Porto (2018)

[2] *O que é a lei de Hooke?*, Khan Academy.

<https://pt.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/hookes-law/a/what-is-hookes-law> [20 de outubro de 2019]

[3] *O que é a massa Volúmica?*, Explicatorium

<https://www.explicatorium.com/cfq-7/massa-volumica.html> [20 de outubro de 2019]

[2] Trabalho 3: Determinação da massa volúmica de um sólido homogêneo, Guia Prático fornecido pelo docente Luís Vieira