Introdução a Física Moderna Conjunto 5

1. O "Large Hadron Collider (LHC)" no CERN consegue acelerar protões (energia de repousa de 938 MeV) até uma energia de 6.5 TeV (1 Tev = 10^{12} eV e 1 eV = $1,6x10^{-19}$ J é a energia que um eletrão ganha em passar por uma diferença potencial de 1 volt. Para partículas atómica e sub-atómicas é uma unidade de energia conveniente). Se dois protões colidem frontalmente cada um com 6.5 TeV um total de 13 TeV é disponível para criar novas partículas. Imagine que uma nova partícula X com uma massa de 12 TeV/c^2 é criada. Investigadores no "Budget Linear Accelerator (BLA)" querem confirmar as propriedades da nova partícula X. No BLA apenas um feixe de protões é acelerado, que incide num alvo fixo, Assumindo que a colisão ocorre entre um protão acerado e um protão fixo, que energia mínima terá os investigadores dar aos seus protões acelerados?

Resposta: Na BLA $P_{protão\ acelerado} = \left(E/c, \sqrt{(E/c)^2 - m_p^2c^2}, 0, 0\right)$

$P_{protão\ parado} = \left(m_p c, 0, 0, 0\right)$

Se depois a colisão apenas a partícula X existe (que é a maneira mais eficiente produzir a partícula X) então depois a colisão o tetra vetor da Energia Momento será

$P_X = \left(E_x/c, \sqrt{(E_x/c)^2 - M_x^2c^2}, 0, 0\right)$.

Conservação da Energia momento implica que

$$P_{protão\ acelerado} + P_{protão\ parado} = P_X$$

Ao tomar o produto interna desta equação consigo temos

$$\left(P_{protão\ acelerado} + P_{protão\ parado}\right) \bullet \left(P_{protão\ acelerado} + P_{protão\ parado}\right) = P_X \bullet P_X$$

Como não queremos saber a energia com que a partícula X esta é a forma mais eficaz de realizar os cálculos.

Aproveitando os produtos invariantes do tetra vetor energia momento:

$$P_X \bullet P_X = M_X^2 c^2$$

$$P_{protão\ acelerado} \bullet P_{protão\ acelerado} = P_{protão\ parado} \bullet P_{protão\ praado} = m_p^2 c^2$$

$$2P_{protão\ acelerado} \bullet P_{protão\ parado} = 2Em_p$$

Assim

$$2m_p^2c^2 + 2Em_p = M_X^2 c^2$$

$$E = \frac{M_X^2 c^2 - 2m_p^2 c^2}{2m_p} = \frac{M_X^2 c^4 - 2m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = \frac{\left(12TeV\right)^2 - 2\left(938x10^{-6}TeV\right)^2}{2\left(938x10^{-6}TeV\right)} \approx 77PeV$$

2. Uma partícula estacionária de massa M decai numa outra partícula e um fotão. Se a nova partícula tem uma velocidade u, qual é a sua massa? Qual é a energia do fotão?

Resposta:

Antes do decaimento $P_M = \left(Mc, 0, 0, 0\right)$

Para conserva o componente espacial do tetra-vetor da energia momento a partícula de massa m e o fotão terão sair em direções opostas (que podemos escolher ser o eixo dos xxs.).

Depois do decaimento $P_m = \left(\gamma_u mc, \gamma_u mu, 0, 0\right)$ e $P_{fotão} = \left(E_{fotão}/c, -E_{fotão}/c, 0, 0\right)$

Conservação do tetra-vetor da energia momento implique que

$P_M = P_m + P_{fotão}$

Se queremos saber a massa m convêm calcular os produtos internos na seguinte maneira para eliminar a energia do fotão

$\left(P_M - P_m\right)\bullet\left(P_M - P_m\right) = P_{fotão} \bullet P_{fotão}$

.

$$\begin{aligned}\left(P_M - P_m\right)\bullet\left(P_M - P_m\right) &= P_M \bullet P_M - 2P_M \bullet P_m + P_m \bullet P_m \\ &= M^2c^2 - 2M\gamma_u mc^2 + m^2c^2\end{aligned}$$

$P_{fotão} \bullet P_{fotão} = 0$

Logo

$$0 = M^2 - 2M\gamma_u m + m^2$$

$$m = M\gamma_u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4M^2\gamma_u^2 - 4M^2}$$

$$= M\gamma_u \pm M\sqrt{\frac{1}{1-\left(u/c\right)^2} - 1}$$

$$= M\frac{\left(1 \pm u/c\right)}{\sqrt{1-\left(u/c\right)^2}}$$

$$m = M\sqrt{\frac{1-(u/c)}{1+(u/c)}}$$

O sinal mais na penúltima expressão assim da o resultado incoerente que m>M e podemos a descartar.

Para achar a energia do fotão convêm fazer o produto interno duma maneira diferente:

Se queremos saber a massa m convêm calcular os produtos internos como

$\left(P_M - P_{fotão}\right)\bullet\left(P_M - P_{fotão}\right) = P_m \bullet P_m$

$$\begin{aligned}\left(P_M - P_{fotão}\right)\bullet\left(P_M - P_{fotão}\right) &= P_M \bullet P_M - 2P_M \bullet P_{fotão} + P_{fotão} \bullet P_{fotão} \\ &= M^2c^2 - 2ME_{fotão} + 0\end{aligned}$$

$$P_m \bullet P_m = m^2c^2 = M^2c^2\left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)$$

Logo

$$M^2c^2 - 2ME_{fotão} = M^2c^2\left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)$$

$$E_{fotão} = \frac{Muc}{1+u/c}$$

Notar que no limite em que u→0 não existe decaimento e m→M, $E_{fotão}$→0.

3. Considere uma partícula com massa M. Até qual velocidade, v, terá ser acelerado para assegurar que a sua energia cinética é igual á sua energia de repouso?

Resposta: a energia cinética duma partícula cm energia E e massa M é $KE = E - Mc^2$.

Assim teremos acelerar a partícula até que

$$KE = E - Mc^2 = Mc^2 \Rightarrow E = 2Mc^2$$

Como $E = \gamma_{\mathrm{v}} Mc^2$ o fator gama terá ser igual é 2

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \Rightarrow 1-(\mathrm{v}/c)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\tfrac{3}{4}}c$$