Folha 4 - Resolução a parte do exercício 13 ①

13 - a) $\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3) = (0,0) \Longleftrightarrow x=0 \wedge y=0$

$\{$pontos críticos de $f\} = \{A\}$, sendo $A=(0,0)$

$Hess_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$Hess_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det Hess_{(0,0)} f = 0$, pelo que não podemos classificar o ponto crítico A desta maneira.

No entanto, é fácil verificar que

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$

Então A é ponto minimizante absoluto de f

b) $\nabla f(x,y) = (-1, -2y) \neq 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Então f não tem pontos críticos

c) $\nabla f(x,y) = (y, x) = (0,0) \Longleftrightarrow y=0 \wedge x=0$

Então $\{$pontos críticos de $f\} = \{A\}$, sendo $A = \{0,0\}$

$Hess_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Hess_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det Hess_{(0,0)} f = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, sendo λ_1 e λ_2 os valores próprios de $Hess_{(0,0)} f$. Como o produto do λ_1 por λ_2 é negativo, então λ_1 e λ_2 têm sinais contrários. Portanto A é ponto de sela (não maximizante nem minimizante)

d) $\nabla f(x,y) = (2xy^2, 2x^2y) = (0,0) \Longleftrightarrow x=0 \vee y=0$

$\{$pontos críticos de $f\} = \{(x_0, 0) : x_0 \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y_0) : y_0 \in \mathbb{R}\}$

$Hess_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$

$Hess_{(x_0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_0^2 \end{pmatrix}$. Como $\det Hess_{(x_0,0)} f = 0$, nada se conclui sobre o ponto crítico $A_{x_0} = (x_0, 0)$

Mas

$f(x,y) = x^2y^2 \geq 0 = f(x_0,0)$, logo $(x_0,0)$ é minimizante absoluto

Analogamente

$Hess_{(0,y_0)} f = \begin{pmatrix} 2y_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, como $\det Hess_{(0,y_0)} f = 0$, nada se conclui sobre o ponto crítico $A_{y_0} = (0,y_0)$

Mas

$f(x,y) = x^2y^2 \geq 0 = f(0,y_0)$, logo $(0,y_0)$ é minimizante absoluto.

4 a) $\nabla f(x,y) = (2x+y, -2y+x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$Hess_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$M = Hess_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det M = -5$ logo M tem 2 valores próprios com sinais contrários

$(0,0)$ é ponto de sela

b) $\nabla f(x,y) = (2x-y, 2y-x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$Hess_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{v. p. = valor próprio}}$

$M = Hess_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \det M = 3 \\ \operatorname{tr} M = 4 \end{cases}$, M tem 2 v.p. positivos

Então $(0,0)$ é minimizante local.

c) $\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2y+2x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-x$

$\{\text{pontos críticos de } f\} = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$

$M = Hess_{(x,-x)} f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det M = 0$, nada se conclui relativamente à classificação dos pontos críticos

$f(x,y) = x^2+y^2+2xy$

Seja $(x_0,-x_0)$ um ponto crítico. Notem que

$f(x_0,-x_0) = x_0^2 + x_0^2 - 2x_0^2 = 0$

Como $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ então todos os pontos críticos de f são minimizantes absolutos

③

d) $f(x,y) = x^2+y^2+3xy$

$\nabla f(x,y) = (2x+3y,\ 2y+3x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$M = \mathrm{Hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det M = 4-9 = -5 < 0$

Então os v.p. de M têm sinais contrários e (0,0) é ponto de sela

e) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

$\nabla f(x,y) = (2xe^{1+x^2-y^2},\ -2ye^{1+x^2-y^2}) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{1+x^2-y^2} = 0 \\ -2ye^{1+x^2-y^2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{1+x^2-y^2} + 4x^2e^{1+x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xye^{1+x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{1+x^2-y^2} + 4ye^{1+x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2$

$M = \mathrm{Hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det M = -4 < 0$, logo os v.p. de M têm sinais contrários e (0,0) é ponto de sela.

f) $\nabla f(x,y) = (2x-3y+5,\ -3x-2+12y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ -3x+12y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{18}{5} \\ y=-\frac{11}{15} \end{cases}$

$M = \mathrm{Hess}_{(-\frac{18}{5},-\frac{11}{15})} f = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $\det M = 33 > 0$, $\mathrm{Tr}\, M = 14 > 0$

Então temos os v.p. λ_1, λ_2, que satisfazem $\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$

Pela 1ª equação, sabemos que λ_1 e λ_2 são ambos positivos ou ambos negativos. Como a soma dos 2 v p é positiva, então são ambos positivos. Então o ponto $(-\frac{18}{5}, -\frac{11}{15})$ é minimizante local de f

g) $\nabla f(x,y) = (6x+2y+2,\ 2x+2y+1) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2y=-2 \\ 2x+2y=-1 \end{cases} \begin{cases} x=-1/4 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$M = \mathrm{Hess}_{(-1/4,-1/4)} f = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det M = 8 > 0$, $\mathrm{Tr}\, M = 8 > 0$

Então os v.p. de M são ambos positivos e $(-1/4, -1/4)$ é um minimizante absoluto

h) $\nabla f(x,y) = (\operatorname{sen} y,\ 1 + x\cos y) = (0,0) \iff \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \\ 1 + x\cos y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 1 + x(-1)^k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} — \\ x = \frac{-1}{(-1)^k} = (-1)^{1-k} = (-1)^{k+1} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

porque $k+1$ e $1-k$ têm a mesma paridade (isto é, $k+1-(1-k) = 2k$ é par).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \operatorname{sen} y$$

Consideremos o ponto crítico $X_k = \left((-1)^{k+1}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_k) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_k) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_k) = -(-1)^{k+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^{k+1}(-1)^k = (-1)^{2k+2} = 1$$

$M = \operatorname{Hess}_{X_k} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\det M = 0$. Portanto, nada podemos concluir relativamente à natureza do ponto X_k.

Olhemos, então, para a função f

$$f(X_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi + (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi + (-1)^{k+1}(-1)^k$$

$$= \frac{\pi}{2} + k\pi + (-1)^{2k+1} = \frac{\pi}{2} + k\pi - 1$$

Calculemos

$$f\left(X_k + \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)\right) = f\left((-1)^{k+1} + \frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + k\pi + \left((-1)^{k+1} + \frac{\delta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 + \frac{\delta}{2}(-1)^k$$

$$= f(X_k) + \frac{\delta}{2}(-1)^k$$

notem que $X_k + \left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \in B(X_k, \delta)$ e, se

- $\boxed{k \text{ par}}$

  $\delta > 0 \implies f\left(X_k + \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)\right) = f(X_k) + \frac{\delta}{2} > f(X_k)$

  $\delta < 0 \implies f\left(X_k + \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)\right) = f(X_k) + \frac{\delta}{2} < f(X_k)$

Então X_k não é maximizante nem minimizante local de f

• k ímpar

$\delta > 0 \Rightarrow f(x_k + (\frac{\delta}{2}, 0)) = f(x_k) - \frac{\delta}{2} < f(x_k)$

$\delta < 0 \Rightarrow f(x_k + (\frac{\delta}{2}, 0)) = f(x_k) - \frac{\delta}{2} > f(x_k)$

Então x_k não é maximizante nem minimizante local de f

i) $f(x,y) = e^x \cos y$

$\nabla f(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$

$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{sen}(k\pi) = (-1)^k \neq 0$

Então o sistema é impossível e f não tem pontos críticos

j) $f(x,y) = (x-y)(xy-1) = x^2y - x - xy^2 + y$

$\nabla f(x,y) = (2xy - 1 - y^2, x^2 - 2xy + 1) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 1 + y^2 \\ 2xy = 1 + x^2 \end{cases} \Rightarrow 1 + y^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$

$\boxed{y = x}$

$2x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Temos 2 pontos críticos, $A = (1,1)$, $B = (-1,-1)$

$\boxed{y = -x}$

$-2x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = -1$ Impossível

$\text{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & 2x \end{pmatrix}$

$\text{Hess}_{(1,1)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem v.p. $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$, ambos positivos

Então $(1,1)$ é um minimizante local de f

$\text{Hess}_{(-1,-1)} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ tem v.p. $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -2$, ambos negativos

~~n m~~ Então $(-1,-1)$ é maximizante local de f

k) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$\nabla f(x,y) = (y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1/x^2 = 0 \\ x - 1/y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(\frac{1}{x^2})^2} = x^4 \end{cases} \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x(1 - x^3) = 0 \end{cases} \begin{cases} - \\ x = 0 \lor x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/x^2 \end{cases}$ Impossível $\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/x^2 = 1 \end{cases}$ f tem um ponto crítico $A = (1,1)$

$$\text{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{pmatrix}$$

$M = \text{Hess}_A f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det M = 3 > 0$, $\text{Tr}\, M = 4 > 0$ Então M tem 2 v p positivos e A é minimizante local de f.

l) $f(x,y) = \ln(2 + \text{sen}(xy))$

Notem que $Df = \mathbb{R}^2$, uma vez que $-1 \leq \text{sen}(xy) \leq 1$ e, então, $1 \leq 2 + \text{sen}(xy) \leq 3$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\cos(xy) \cdot y}{\text{sen}(xy)}, \frac{\cos(xy) \cdot x}{\text{sen}(xy)} \right)$$

$\boxed{\text{Se quiserem, ignorem este exercício, pois é mais difícil}}$

No entanto
$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{sen}(xy) \neq 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \mathbb{R}^2 \setminus \left(\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ \left(x, \frac{k\pi}{x}\right) : k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 0 \right\} \right)$$

Resolvamos o sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{cases} \frac{\cos(xy)}{\text{sen}(xy)} \cdot y = 0 \iff \cos(xy) = 0 \vee y = 0 \\ \frac{\cos(xy)}{\text{sen}(xy)} \cdot x = 0 \end{cases}$$

→ os pontos da forma $(x,0)$ não pertencem a $D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ nem a $D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\cos(xy) = 0 \iff xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\begin{cases} - \\ 0 = 0 \end{cases}$

Os pontos críticos de f são os pontos da forma

$$A_k\left(x, \frac{\pi/2 + k\pi}{x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \ x \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-\text{sen}(xy) \cdot y^2 \cdot \text{sen}(xy) - \cos^2(xy) \cdot y^2}{(\text{sen}(xy))^2} = -\frac{(\text{sen}^2(xy) + \cos^2(xy))y^2}{\text{sen}^2(xy)}$$

$$= -\frac{y^2}{\text{sen}^2(xy)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-\text{sen}(xy)\, x^2\, \text{sen}(xy) - \cos(xy) \cdot x \cdot \cos(xy) \cdot x}{\text{sen}^2(xy)} = -\frac{x^2}{\text{sen}^2(xy)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-\operatorname{sen}(xy) \cdot xy \operatorname{sen}(xy) - \cos(xy)\operatorname{sen}(xy) - \cos(xy) \cdot y \cdot \cos(xy) \cdot x}{\operatorname{sen}^2(xy)}$$

$$= \frac{-(\operatorname{sen}^2(xy) + \cos^2(xy))\, xy - \cos(xy)\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen}^2(xy)}$$

$$= -\frac{xy + \operatorname{sen}(xy)\cos(xy)}{\operatorname{sen}^2(xy)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_k) = -\frac{\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{x}\right)^2}{1} = -\frac{(\pi/2 + k\pi)^2}{x^2}, \quad \boxed{k \in \mathbb{Z},\ x \neq 0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_k) = -x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A_k) = -\frac{(\pi/2 + k\pi) + 0}{1} = -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$M_k = \operatorname{Hess}_{A_k} f = \begin{pmatrix} -\frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}{x^2} & -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) & -x^2 \end{pmatrix}$$

$$\det M_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 = 0$$

Então, nada se pode concluir sobre a natureza dos pontos críticos A_k, usando a matriz hessiana.

$$f(A_k) = \ln\left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = \ln\left(2 + (-1)^k\right)$$

Considere-se:

① A_k, com k par

Então $f(A_k) = \ln 3$

Se (x,y) é um ponto perto de A_k, i.e., $(x,y) = A_k + (\alpha, \beta)$, sendo (α,β) um ponto próximo de $(0,0)$, então

$$xy = (x+\alpha)\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{x} + \beta\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi + \underbrace{\frac{\alpha(\pi/2 + k\pi)}{x} + \beta x + \alpha\beta}_{\gamma}$$

$= \frac{\pi}{2} + k\pi + \gamma$ e notem que, se α e β são pequenos, também γ é pequeno

$sen(xy) = sen\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + r\right)$

$= sen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cos r + \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) sen\, r$

$= (-1)^k \cos r$

Então, se

- $\boxed{k \text{ par}}$

$f(A_k + (\alpha,\beta)) = \ln(2 + \cos r) < f(A_k) = \ln(3)$

logo A_k é maximizante local

- $\boxed{k \text{ ímpar}}$

$f(A_k + (\alpha,\beta)) = \ln(2 - \cos r) > f(A_k) = \ln(1) = 0$

logo A_k é minimizante local

m) $f(x,y) = (x+y)(xy+1) = x^2y + x + xy^2 + y$

$\nabla f(x,y) = (2xy + 1 + y^2, x^2 + 2xy + 1) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+1+y^2 = 0 \\ 2xy+1+x^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$

$\boxed{y=x} \rightarrow 2x^2 + 1 + x^2 = 0$ Impossível

$\boxed{y=-x} \Rightarrow -2x^2 + 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Temos, então, os seguintes pontos críticos. $A = (1,-1)$, $B = (-1,1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$

$Hess_A f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem 2 v.p. com sinais contrários. Então

A é ponto de sela

$Hess_B f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tem 2 v.p. com sinais contrários. Então

B é ponto de sela

n) $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$

$\nabla f(x,y) = (2xe^{1-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}(-2x), 6ye^{1-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}(-2y$

$= ((2x - 2x^3 - 6xy^2)e^{1-x^2-y^2}, (6y - 2x^2y - 6y^3)e^{1-x^2-y^2}) = (0,$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 2x^3 - 6xy^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ (6y - 2x^2y - 6y^3)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - x^2 - \\ 2y(3 - x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$

$\boxed{x=0}$

$\begin{cases} - \\ 2y(3 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{cases}$

Obtemos os pontos críticos 9

$A=(0,0)$, $B=(0,1)$, $C=(0,-1)$

$\boxed{1-x-3y^2=0} \Leftrightarrow 3y^2=1-x$

$\begin{cases} - \\ 2y(3-x^2-(1-x))=0 \Leftrightarrow y=0 \vee 2-x^2+x=0 \end{cases}$

$\boxed{y=0} \Rightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Obtemos o ponto crítico $D=(1,0)$

$\boxed{x^2-x-2=0} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$x=2$, $3y^2=1-x=-1$ Impossível

$x=-1$, $3y^2=1-x=2 \Leftrightarrow y^2=\frac{2}{3} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Obtemos os pontos críticos

$E=\left(-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $F=\left(-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Bom, se não me enganei nas contas, este exercício dá muito trabalho

o) $f(x,y)=sen(x^2+y^2)$ | O exercício só pede para classificar o ponto crítico (0,0)

$\nabla f(x,y)=(2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2))=(0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cos(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+y^2=\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ 2y\cos(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee x^2+y^2=\pi/2+k\pi \end{cases}$

De facto, (0,0) é ponto crítico de f

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2 sen(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2 sen(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xy\, sen(x^2+y^2)$

$Hess_{(0,0)} f=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem 2 v.p. positivos, logo

(0,0) é minimizante local

p) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

$\nabla f(x,y)=(-2x\, sen(x^2+y^2), -2y\, sen(x^2+y^2))=(0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x\, sen(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+y^2=k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ -2y\, sen(x^2+y^2)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee x^2+y^2=k\pi \end{cases}$

$(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e $(0,\sqrt{\pi})$ são pontos críticos de f

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,\text{sen}(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,\text{sen}(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\cos(x^2+y^2)$

$M = \text{Hess}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nada se conclui usando a matriz hessiana

Mas

$f(0,0) = \cos 0 = 1 \geq \cos(x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Então $(0,0)$ é maximizante absoluto de f

$N = \text{Hess}_{(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})} f = \begin{pmatrix} 2\pi & 2\pi \\ 2\pi & 2\pi \end{pmatrix}$, $\det N = 0$, nada se conclui usando a matriz hessiana

$f(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}) = \cos(\pi) = -1 \leq \cos(x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Então $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ é minimizante absoluto de f

$O = \text{Hess}_{(0,\sqrt{\pi})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\pi \end{pmatrix}$, $\det O = 0$, nada se conclui usando a matriz hessiana.

$f(0,\sqrt{\pi}) = \cos(\pi) = -1 \leq \cos(x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Então $(0,\sqrt{\pi})$ é minimizante absoluto de f

15 Plano π de equação $2x - y + 2z = 20$

Queremos encontrar o ponto deste plano à distância mínima de $(0,0,0)$. Vamos estudar a função distância ao quadrado, que atingirá o mínimo no mesmo ponto que a função distância (com a vantagem de não envolver a raiz quadrada.

Queremos, então, minimizar

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Restrita a $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = 20\} = g^{-1}(\{20\})$, sendo $g(x,y,z) = 2x-y+2z$

isto é, procuramos $\min_{\pi} f$

Sabemos que os pontos de máximo ou de mínimo de $f|_\pi$ (f restrita a π) estão entre as soluções dos sistemas

(I) (x,y,z) ponto singular de π | (II) $\begin{cases} (x,y,z) \in \pi \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \end{cases}$

(I)

$$\begin{cases} (x,y,z) \in \pi \\ \nabla g(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = 20 \\ (2,-1,2) = (0,0,0) \end{cases} \quad \text{Impossível}$$

(II)

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 20 \\ (2x, 2y, 2z) = \lambda(2,-1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x = 2\lambda \\ 2y = -\lambda \\ 2z = 2\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = \lambda \\ y = -\frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda + \frac{\lambda}{2} + 2\lambda = 20 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9\lambda = 40 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 40/9 \\ x = 40/9 \\ y = -20/9 \\ z = 40/9 \end{cases} \qquad f\left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right) = \frac{40^2 + 20^2 + 40^2}{9^2} = \frac{3600}{9^2}$$

Então

$$d((0,0,0), \pi) = \sqrt{\frac{3600}{9^2}} = \frac{60}{9} = \frac{3 \times 4 \times 5}{3^2} = \frac{20}{3}$$

Calculemos esta distância usando um pouco de Geometria Analítica.

- O vector $(2,-1,2)$ é normal ao plano π
- $(x,y,z) = (0,0,0) + \mu(2,-1,2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ é a equação vectorial da recta que passa em $(0,0,0)$ e tem a direcção do vector $(2,-1,2)$.
- Calculemos a intersecção desta recta com o plano π

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 20 \\ x = 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \quad \begin{cases} 4\mu + \mu + 4\mu = 20 \\ - \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = 20/9 \\ x = 40/9 \\ y = -20/9 \\ z = 40/9 \end{cases}$$

De uma forma muito mais simples, determinámos o ponto $A = (40/9, -20/9, 40/9)$, o ponto do plano à distância mínima de $(0,0,0)$

$$d(A, (0,0,0)) = \sqrt{(40/9)^2 + (-20/9)^2 + (40/9)^2} = \frac{20}{3}$$

(16) Volume do paralelipípedo: $V(x,y,z) = xyz$ (sendo x, y e z as medidas dos lados do paralelipípedo)

$D_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Área das faces do paralelipípedo: $A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$,

$D_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Seja

$\Sigma_{27} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : xyz = 27\} = V^{-1}(\{27\})$

Queremos calcular

$$\min_{\Sigma_{27}} A$$

Estamos, então, à procura das soluções dos sistemas

(I) pontos singulares de Σ_{27} (II) $\begin{cases} (x,y,z) \in \Sigma_{27} \\ \nabla A(x,y,z) = \lambda \nabla V(x,y,z) \end{cases}$

$\boxed{(I)}$

$\begin{cases} (x,y,z) \in \Sigma_{27} \\ \nabla V(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ $\begin{cases} xyz = 27 \\ yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$ Impossível ($D_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$)

$\boxed{(II)}$

$\begin{cases} xyz = 27 \\ 2y + 2z = \lambda yz \\ 2x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ 2xy + 2xz = \lambda xyz \\ 2xy + 2yz = \lambda xyz \\ 2xz + 2yz = \lambda xyz \end{cases}$ $=$ $=$

Então, olhando para a 2ª e a 3ª equações, obtemos

$\cancel{2xy} + 2xz = \cancel{2xy} + 2yz \Leftrightarrow xz = yz \Leftrightarrow (x-y)z = 0 \Leftrightarrow x = y \vee \cancel{z = 0}$

(recordem que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

Olhando para a 2ª e a 4ª equações, obtemos

$2xy + \cancel{2xz} = \cancel{2xz} + 2yz \Leftrightarrow xy = yz \Leftrightarrow (x-z)y = 0 \Leftrightarrow x = z \vee \cancel{y = 0}$

Assim, $x = y = z$. Como $xyz = 27$ então $x = y = z = 3$. Como as medidas dos lados do paralelipípedo são iguais, então o sólido é um cubo. Para além disso

$$A(3,3,3) = 18 + 18 + 18 = 54$$

é a área mínima.

17 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ $\qquad$ $\mathring{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ $\qquad$ 13

$\text{fr}\,K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}=g^{-1}(\{1\})$,
sendo $g(x,y)=x^2+y^2$

Devemos procurar
- pontos críticos de f em $\mathring{K}$
- pontos singulares de $\text{fr}\,K$ (sistema (I))

Soluções do sistema $\begin{cases}(x,y)\in \text{fr}\,K\\ \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\end{cases}$

a) $f(x,y)=(x^2+y^2)^4$
- pontos críticos de f:

$\nabla f(x,y)=\left(4(x^2+y^2)^3 2x,\ 4(x^2+y^2)^3 2y\right)=(0,0)\iff x=y=0$

Obtemos o ponto $A=(0,0)$

- Em $\text{fr}\,K$ temos que $x^2+y^2=1$ e, então $f(x,y)=1^4=1$ sendo todos os pontos de $\text{fr}\,K$ candidatos a máximo ou a mínimo absoluto de $f|_K$

- $f(0,0)=0$ $\quad$ e $(x,y)\in \text{fr}\,K \Rightarrow f(x,y)=1$

Então $\min\limits_K f=0$ e $\max\limits_K f=0$

b) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$
- pontos críticos de f:

$\nabla f(x,y)=(2x+y,\ x+2y)=(0,0)\iff\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=0\end{cases}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

obtemos o ponto crítico $A=(0,0)$

-

(I) $\begin{cases}(x,y)\in \text{fr}\,K\\ \nabla g(x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x=0\\2y=0\end{cases}$ Impossível

Então a linha de nível $\text{fr}\,K$ não tem pontos singulares

(II) $\begin{cases}(x,y)\in \text{fr}\,K\\ \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+y=2\lambda x\\x+2y=2\lambda y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2xy+y^2=2\lambda xy\\x^2+2xy=2\lambda xy\end{cases}$

Multiplicando a 2ª equação por y e a 3ª por x

Então $\cancel{2x}y+y^2=x^2+\cancel{2x}y\iff y=\pm x$. Voltando ao sistema inicial

$\boxed{y=x}$

$\begin{cases}2x^2=1\\3x=2\lambda x\\3x=2\lambda x\end{cases}\iff x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ e obtemos os pontos $B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $C=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{y=-x}$

$\begin{cases}2x^2=1\\x=2\lambda x\\-x=-2\lambda x\end{cases}$ e obtemos os pontos $D=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $E=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

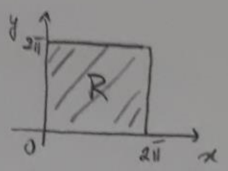
$f(A)=0 \qquad f(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=f(C)$ (14)

$f(D)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f(E)$

Então $\min_K f = 0$ e $\max_K f = \frac{3}{2}$

(18) $f(x,y)= \operatorname{sen} x + \cos y$

O quadrado R é constituído por



$\mathring{R} =]0,2\pi[\times]0,2\pi[$

$\operatorname{fr} R = [0,2\pi]\times\{0\} \cup [0,2\pi]\times\{2\pi\} \cup \{0\}\times[0,2\pi] \cup \{2\pi\}\times[0,2\pi]$

A $\operatorname{fr} R$ é a união de 4 linhas de nível, cada um dos lados do quadrado. Não podemos pensar em uma única linha de nível porque não conseguimos definir essa linha como uma única função. Assim, vamos procurar os pontos candidatos a maximizante e minimizante absolutos de f em:

i) $\mathring{R}$ ii) $\Sigma_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2\pi] \wedge y=0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$

$\Sigma_{2\pi} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2\pi] \wedge y=2\pi\} = \varphi^{-1}(\{2\pi\})$

sendo $\varphi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto y$

iii) $\Pi_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \wedge y\in[0,2\pi]\} = \psi^{-1}(\{0\})$

$\Pi_{2\pi} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2\pi \wedge y\in[0,2\pi]\} = \psi^{-1}(\{2\pi\})$

sendo $\psi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x$

(i) Pontos críticos de f em $\mathring{R}$

$\nabla f(x,y) = (\cos x, -\operatorname{sen} y) = (0,0) \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ -\operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \pi/2 + k\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ y = l\pi, & l\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Os pontos críticos de f que pertencem a $\mathring{R}$ são os pontos:

$A=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), B=\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$

(ii) Sendo estas linhas de nível muito simples, calcular os candidatos a maximizantes ou minimizantes de f em Σ_0 (faremos o mesmo para $\Sigma_{2\pi}$) é equivalente a calcular os candidatos a maximizante o minimizante de $g(x)=f(x,0)$, $x\in[0,2\pi]$

$g: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \operatorname{sen} x + 1$

$g'(x) = \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2$ (mas temos de considerar também os extremos do intervalo, $x = 0$ ou $x = 2\pi$).

Obtemos, assim, 4 pontos:

$C = (0,0)$, $D = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $E = (3\pi/2, 0)$, $F = (2\pi, 0)$

Em $\Sigma_{2\pi}$ consideramos a função $f(x, 2\pi) = \operatorname{sen} x + 1 = g(x)$ e obtemos os pontos

$G = (0, 2\pi)$, $H = (\pi/2, 2\pi)$, $I = (3\pi/2, 2\pi)$, $J = (2\pi, 2\pi)$

(iii) Em Π_0 consideramos a função $h(y) = f(0, y) = \cos y$,

$h: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \cos y$

$h'(y) = -\operatorname{sen} y = 0 \Longleftrightarrow y = \pi$ (mas temos também de considerar também os extremos do intervalo, $y = 0$ ou $y = 2\pi$).

Obtemos, assim, os pontos

$\underbrace{C = (0,0)}_{\text{repetido}}$, $L = (0, \pi)$, $M = (0, 2\pi)$

Em $\Pi_{2\pi}$ consideramos a função $f(2\pi, y) = \cos y = h(y)$ e obtemos os pontos

$\underbrace{F = (2\pi, 0)}_{\text{repetido}}$, $N = (2\pi, \pi)$, $O = (2\pi, 2\pi)$

Calculemos f em cada um destes pontos:

$f(A) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 1 - 1 = 0$

$f(B) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos \pi = -1 - 1 = -2$

$f(C) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1$

$f(D) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

$f(E) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos 0 = -1 + 1 = 0$

$f(F) = \operatorname{sen}(2\pi) + \cos 0 = 1$

$f(G) = \operatorname{sen} 0 + \cos(2\pi) = 1$

$f(H) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos(2\pi) = 1 + 1 = 2$

$f(I) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos(2\pi) = -1 + 1 = 0$

$f(J) = \operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\pi) = 1$

$f(L) = \operatorname{sen} 0 + \cos \pi = -1$

$f(M) = \operatorname{sen} 0 + \cos(2\pi) = 1$

$f(N) = \operatorname{sen}(2\pi) + \cos \pi = 1$

$f(O) = \operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\pi) = 1$

Então $\max_{R} f = 2$

e $\min_{R} f = -2$

19 a) $f(x,y) = \ln(xy)$, $\Sigma_5 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y=5\} = g^{-1}(\{5\})$

sendo $g(x,y) = 2x+3y$

Procuramos as soluções dos sistemas

(I) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma_5 \\ \nabla g(x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ (2,3)=(0,0) \end{cases}$ Impossível (logo Σ_5 não possui pontos singulares)

(II) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma_5 \\ \nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ \left(\frac{y}{xy}, \frac{x}{xy}\right) = \lambda(2,3) \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ \frac{1}{x} = 2\lambda \\ \frac{1}{y} = 3\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 2x = 1/\lambda \\ 3y = 1/\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} = 5 \\ - \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = 2/5 \\ x = 1/2\lambda = 5/4 \\ y = 1/3\lambda = 5/6 \end{cases}$

A função f tem um único extremo, o ponto $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$

$$f\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right) = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$$

Notem que $(1,1)\in\Sigma_5$ e $f(1,1) = \ln 1 = 0 < f\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$. É intuitivo verificar que a função $f|\Sigma_5$ tem um extremo único, pelo que esse extremo tem de ser máximo.

Então $\max\limits_{\Sigma_5} f = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$, $\min\limits_{\Sigma_5} f$ não existe

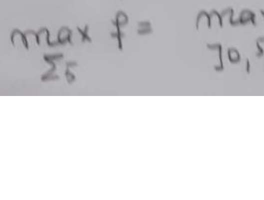
<u>Resolução alternativa</u>

$2x+3y=5 \iff y = \frac{5-2x}{3}$

$Df = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$

Consideremos a função $g(x) = f\left(x, \frac{5-2x}{3}\right) = \ln\left(\frac{x(5-2x)}{3}\right)$ com domínio

$$Dg = \{x\in\mathbb{R} : x(5-2x)>0\} =]0,\tfrac{5}{2}[$$



$g'(x) = \frac{5-2x}{3} + \frac{-2x}{3} = \frac{5-4x}{3} = 0$

$\iff x = \frac{5}{4}$

$g''(x) = -\frac{4}{3} < 0$ e, então $g''\left(\frac{5}{4}\right) < 0$

Então $\frac{5}{4}$ é maximizante absoluto de g, pelo que

$$\max_{\Sigma_5} f = \max_{]0,5/2[} g = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{4}}{3} = \frac{25}{24}$$

b) $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \Sigma_1 = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\}$

não vale a pena usar multiplicadores de Lagrange

$y = 3 - \frac{3}{2}x$

$g(x) = f(x, 3-\frac{3}{2}x) = x^2 + (3-\frac{3}{2}x)^2 = (1+\frac{9}{4})x^2 - 9x + 9$

$= \frac{13}{4}x^2 - 9x + 9 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = \frac{13}{2}x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{3}$

$g''(x) = \frac{13}{2}$; logo $g''(\frac{18}{3}) = \frac{13}{2} > 0$ e $\frac{18}{3}$ é minimizante absoluto de g

(notem que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$)

$\min\limits_{\Sigma_1} f = f(\frac{18}{3}, -6) = 72 = g(\frac{18}{3})$

c) $f(x,y) = xy$, $\Sigma_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\} = g^{-1}(\{4\})$, sendo $g(x,y) = x^2+y^2$

(I) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma_4 \\ \nabla g(x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ Impossível (Σ_4 não tem pontos singulares)

(II) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma_4 \\ \nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y) \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y^2 = 2\lambda xy \\ x^2 = 2\lambda xy \end{matrix} \Big| \Rightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$

Voltando ao sistema inicial, temos

$\boxed{y=x}$

$\begin{cases} 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ = \end{cases}$ obtemos os pontos $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $B = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\boxed{y=-x}$

$\begin{cases} 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ = \end{cases}$ e obtemos os pontos $C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f(A) = 2 = f(B)$, $f(C) = -2 = f(D)$

Contudo $\max\limits_{\Sigma_4} f = 2$ e $\min\limits_{\Sigma_4} f = -2$

d) $f(x,y) = xy$ e $x+y=1 \iff y = 1-x$ $\Sigma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$

não vale a pena usar multiplicadores de Lagrange, é mais simples estudar a função

$$g(x) = f(x, 1-x) = x(1-x), \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 1-x-x = 1-2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$g''(x) = -2$, logo $g''(\frac{1}{2}) = -2 < 0$ e, portanto, $1/2$ é maximizante local.

Note que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, pelo que o mínimo de g não existe

$$\max_{\Sigma_1} f = \max_{x\in\mathbb{R}} \{g(x)\} = g(1/2) = 1/4$$

$\min_{\Sigma_1} f$ não existe

[Saltei, sem querer, a alínea e), está à frente]

f) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ $\Sigma_{12} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y+4z=12\}$

$= g^{-1}(\{12\})$ sendo $g(x,y,z) = 2x+3y+4z$

(I) $\begin{cases} (x,y,z)\in\Sigma_{12} \\ \nabla g(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ (2,3,4) = (0,0,0) \end{cases}$ Impossível

Então Σ_{12} não tem pontos singulares

(II) $\begin{cases} (x,y,z)\in\Sigma_{12} \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 8x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 10z = 4\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ x = \lambda/4 \\ y = 3\lambda/2 \\ z = 4\lambda/10 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2\lambda}{4} + \frac{9\lambda}{2} + \frac{16\lambda}{10} = 12 \\ - \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{10\lambda}{20} + \frac{90\lambda}{20} + \frac{32\lambda}{20} = 12 \\ \equiv \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = 60/33 \\ x = 60/132 \\ y = 180/33\times2 = 90/33 \\ z = 240/33\times10 = 24/33 \end{cases}$

Obtivemos um único ponto que corresponde a um minimizante, porque é "intuitivo" que não existe maximizante. O ponto $A = (60/132, 90/33, 24/33)$ (se não me enganei nas contas) é o ponto onde é atingido o $\min f|_{\Sigma_{12}} = f(A) = 4\left(\frac{60}{132}\right)^2 + \left(\frac{90}{33}\right)^2 + 5\left(\frac{24}{33}\right)^2$ e não é necessário calcular este valor explicitamente.

e) $f(x,y) = x^3+y^3 \qquad \Sigma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} = g^{-1}(\{1\})$

sendo $g(x,y) = x^2+y^2$

(I) $\begin{cases} g(x,y)=1 \\ \nabla g(x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (2x,2y)=(0,0) \end{cases}$ sistema impossível

(II) $\begin{cases} g(x,y)=1 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (3x^2,3y^2) = \lambda(2x,2y) \end{cases} \quad \begin{cases} — \\ 3x^2 = 2\lambda x \\ 3y^2 = 2\lambda y \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x(3x-2\lambda)=0 \iff x=0 \ \vee\ x=\frac{2}{3}\lambda \\ y(3y-2\lambda)=0 \iff y=0 \ \vee\ y=\frac{2}{3}\lambda \end{cases}$

$\boxed{x=0 \wedge y=0}$ Impossível porque $x^2+y^2=1$

$\boxed{x=0 \wedge y=\frac{2}{3}\lambda}$ $\begin{cases} y^2=1 \iff y=1 \vee y=-1 \\ x=0 \\ y=\frac{2}{3}\lambda \end{cases}$ obtemos os pontos $A=(0,1)$ e $B=(0,-1)$

$\boxed{x=\frac{2}{3}\lambda \wedge y=0}$ $\begin{cases} x^2=1 \iff x=1 \vee x=-1 \\ x=\frac{2}{3}\lambda \\ y=0 \end{cases}$ obtemos os pontos $C=(1,0)$ e $D=(-1,0)$

$\boxed{x=\frac{2}{3}\lambda \ , y=\frac{2}{3}\lambda}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\frac{2}{3}\lambda \\ y=x \end{cases} \begin{cases} 2x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ — \\ — \end{cases}$

obtemos os pontos $E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $F=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(A)=1 \qquad f(B)=-1$

$f(C)=1 \qquad f(D)=-1$

$f(E)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(F)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Então $\max f|_{\Sigma_1} = f(A)=f(C)=1$

$\min f|_{\Sigma_1} = f(B)=f(D)=-1$

g) $f(x,y,z)=z$ e $x^2+y^2=5-z$, $x+y+z=1$

Temos, aqui, uma linha de nível definida pre 2 condições:

$\Sigma_{(5,1)} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z=5 \wedge x+y+z=1\} = g^{-1}(\{(5,1)\})$

(Recordem que uma hipersuperfície de nível é sempre a imagem recíproca, por uma função, de um <u>ponto</u>, não pode ser de uma expressão envolvendo variáveis)

A função $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (x^2+y^2+z\ ,\ x+y+z)$

(I) Pontos singulares de $\Sigma_{(5,1)}$

$\begin{cases} (x,y,z) \in \Sigma_{(5,1)} \\ J_{(x,y,z)}\,g \text{ tem característica } < 2 \end{cases}$

$$J_{(x,y,z)}\,g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Car $(J_{(x,y,z)}\,g < 2) \Longleftrightarrow$ Os determinantes de todas as sub-matrizes 2×2 de $J_{(x,y,z)}\,g$ são zero

$\Updownarrow$

$\det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} 2y & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 2x-1=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \begin{cases} 1-1=0 \\ x=1/2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Queremos, para além disso, que o ponto $(1/2, 1/2, z) \in \Sigma_{(5,1)}$, isto é,

$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+z=5 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+z=1 \end{cases} \begin{cases} z=5-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$ Impossível

Então $\Sigma_{(5,1)}$ não tem pontos singulares

(II) Chamemos g_1 e g_2 às funções componentes de g, i.e, $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z$, $g_2(x,y,z) = x+y+z$. Então queremos encontrar os pontos solução do sistema

$\begin{cases} (x,y,z) \in \Sigma_{(5,1)} \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z) \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2+z=5 \\ x+y+z=1 \\ (0,0,1) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(1,1,1) \end{cases}$

$\begin{cases} = \\ = \\ 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \begin{cases} = \\ = \\ x = -1/2\,\lambda_1 \\ y = -1/2\,\lambda_1 \end{cases}$ (notem que $\lambda_1 \neq 0$)

Então $x=y$

$\begin{cases} 2x^2+z=5 \\ 2x+z=1 \end{cases} \begin{cases} 2x^2+1-2x=5 \\ z=1-2x \end{cases} \begin{cases} 2x^2-2x-4=0 \\ - \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right. \\ - \end{cases}$