1. [4,5 valores] Considere a equação diferencial

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

Denote por $(\mathcal{E}_0)$ a equação homogénea associada a $(\mathcal{E})$.

(a) Verifique que as funções $f_1, f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ são soluções da equação homogénea $(\mathcal{E}_0)$ e, escreva, justificando, a solução geral desta equação.

(b) Determine a solução geral da equação $(\mathcal{E})$.

2. [4,5 valores] Considere a equação diferencial $(\mathcal{E}_0) \quad y'' + 2y' + 5y = 0$.

(a) Determine a solução geral da equação $(\mathcal{E}_0)$.

(b) Resolva o problema com condições iniciais $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$

(c) Considere agora a equação diferencial

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + 2y' + 5y = s(x)$$

onde $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados,

i. determine uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$ quando $s(x) = 5x^2 - 6x + 3$.

ii. diga, justificando, de que forma procuraria uma solução particular se a função s fosse dada por $s(x) = e^{-x}\cos 2x$.

3. [1 valor] Escreva uma equação diferencial linear homogénea de 3ª ordem cuja solução general seja dada por

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + Cxe^{2x}, \ A, B, C \in \mathbb{R}.$$

4. [1,5 valores] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x - y, -2x + 2y).$$

Determine a matriz de T relativamente à base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ onde $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$.

5. [6 valores] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que -1 e 2 são valores próprios de A e justifique, teoricamente, que A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Determine uma matriz (real) invertível P e uma matriz (real) diagonal D tal que

$$D = P^{-1}AP.$$

   (c) Usando a alínea anterior, calcule e^A.

   (d) Verdadeiro ou falso? A seguinte matriz é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Justifique a sua resposta.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. [2,5 valores] Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um endomorfismo que admite 1 e -1 como valores próprios e seja A a matriz de T na base canónica de $\mathbb{R}^2$. Diga, justificando a sua resposta, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   (a) T é bijectiva.

   (b) $A^2 = I_2$.

   (c) Tem-se $T \circ T = T$.

   (d) $\det(e^A) < 0$.