COMBINAÇÃO LINEAR

Uma expressão da forma $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = w$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são escalares e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e w, vetores do $\Re^n$ chama-se combinação linear.

Em outras palavras, sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n$, números $\Re$ (ou complexos).

Então o vetor $\boxed{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n}$ é um elemento de V, e dizemos que "v" é uma combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

$W = [v_1, \ldots, v_n]$ é chamado subespaço quando por $v_1, \ldots, v_n$.

Por exemplo, os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial R^3, pois qualquer vetor $(a, b, c) \in R^3$ pode ser escrito como combinação linear dos e_i, especificamente:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Sendo u = (x, y, z) se o sistema de equações lineares resultante da combinação linear não for consistente, isto é, não tiver solução, então o vetor não pode ser escrito como combinação linear, logo não gera um espaço.

Exemplos.:

1) Sejam $\vec{v}_1 = (3, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4)$ e os escalares $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$. Podemos encontrar um vetor $\vec{v} = (x, y)$ que seja combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \quad \therefore (x, y) = 2.(3, 1) + (-1).(2, 4) = (4, -2) = \vec{v}$

2) Sejam os vetores $\vec{v}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4, -1)$.
O vetor $\vec{v} = (-4, -18, 7)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
$(-4, -18, 7) = a_1.(1, -3, 2) + a_2.(2, 4, -1)$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & -4 \\ -3 & 4 & : & -18 \\ 2 & -1 & : & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore \left\langle \begin{matrix} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \end{matrix} \right.$$

COMBINAÇÕES LINEARES E SUBESPAÇOS GERADOS

Seja um vetor espaço vetorial. Considere um subconjunto $A = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$, com $A \neq \phi$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V. O subespaço diz-se gerado por $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Ou seja:

$$S = G(A) \text{ ou } S = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$$

Os vetores $v_1, \ldots v_n$ são chamados geradores de S e A é o conjunto gerador.

Exercícios:

1) Os vetores i = (1, 0) e j = (0, 1) geram o espaço vetorial $\Re^2$, pois qualquer (x, y) $\in \Re$ é combinação linear de i e j.

(x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1) = (x, y)
[i, j] = $\Re^2$

2) Os vetores $\vec{i}$ =(1, 0, 0), $\vec{j}$ =(0, 1, 0) e $\vec{k}$ =(0, 0, 1) geram o espaço vetorial $\Re^3$.
(x, y, z) = x.(1, 0, 0) + y.(0, 1, 0) + z.(0, 0, 1)

Obs.: i, j e k são chamados de vetores unitários, e também podem ser representados por e_1, e_2, e_3.

3) Seja V = $\Re^3$. Determinar o subespaço gerado por v_1 = (2, 1, 3).
[v_1] = { (x, y, z) $\in \Re^2$ / (x, y, z) = a.(2, 1, 3), a $\in \Re$ }

$$v = a.(2,1,3) \qquad \begin{cases} x = 2.a \Rightarrow x = 2.y \\ y = a \\ z = 3.a \Rightarrow z = 3.y \end{cases} \qquad \begin{cases} S = \{ (x, y, z) \in \Re^3 \ / \ x = 2y \text{ e } z = 3y \} \text{ ou} \\ S = \{ (2y, y, 3y) / \ y \in \Re \} \end{cases}$$

Obs.: O subespaço gerado por um vetor v, $\in \Re^3$, $v_1 \neq 0$, é uma reta que passa pela origem.

4) Determinar o subespaço gerado pelo conjunto A = { (1, 0, 0) , (0, 0, 1) }.

$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$ $\therefore$ (x, y, z) = a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 0, 1).

(x, y, z) = (a_1, 0, 0) + (0, 0, a_2) = (a_1, 0, a_2) $\therefore$ x = a_1
y = 0
z = a_2

S = { (x, y, z) $\in \Re^3$ / y = 0 }
S = { (x, o, z) $\in \Re^3$ / x, z $\in \Re$ }
Obs.: S é o plano xz

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição. Seja **V** um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in$ **V.** Dizemos que o conjunto A={ $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ } é linearmente independente (LI) ou os vetores $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ são L.I. se a equação: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n v_n = 0$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n \in \Re$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0$.

No caso em que exista algum $\alpha_i \neq 0$ diremos que {v_1, v_2,……,v_n} é linearmente dependente (LD) ou que os vetores v_1, v_2, ... , v_n são L.D.

Em outras palavras, seja um conjunto de vetores de mesma dimensão:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N \in R^n$$

Se a única combinação linear que resulte no vetor nulo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_N \mathbf{v}_N = \mathbf{0}$$

for a trivial, isto é, aquela em que os coeficientes são nulos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 0$$

então dizemos que os vetores $\mathbf{v_N}$ são <u>linearmente independentes</u>. Por outro lado, se houver alguma combinação que produza o vetor nulo, em que os coeficientes não se anulam, então dizemos que os vetores $\mathbf{v_N}$ são <u>linearmente dependentes</u>.

Exemplos em R^3:

- $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são dependentes se estão na mesma linha.
- $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ no mesmo plano são dependentes.
- $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ **e** $\mathbf{v_4}$ são <u>sempre</u> dependentes em R^3.

<u>Exercícios:</u>

Verifique se os conjuntos são L.I. ou L.D.

1) A = { (3, 1), (1, 2) }, V = $\Re^2$

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$a_1(3,\ 1) + a_2(1,\ 2) = (0,\ 0) \quad \therefore \quad \begin{cases} 3a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \langle a_1 = a_2 = 0 \rightarrow A \text{ é L.I.}$$

2) A = { (1, 2, 0), (0, 1, 1), (2, 4, 0) }

$a_1(1, 2, 0) + a_2(0, 1, 1) + a_3(2, 4, 0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + 4a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \langle a_2 = 0 \text{ e } a_3 = \text{qualquer} \quad \text{Logo A é L.D.}$$

3) A = { (2, 4), (6, 12) }

$a_1(2, 4) + a_2(6, 12) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2a_1 + 6a_2 = 0 \ \therefore (-2) \\ 4a_1 + 12a_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} -4a_1 - 12a_2 = 0 \\ 4a_1 + 12a_2 = 0 \quad \text{Sistema Indeterminado} \end{cases} \Rightarrow \text{A é L.D.}$$

$$0 = 0$$

Obs. 1: Sempre que o conjunto A tiver elementos múltiplos, teremos um conjunto L.D.
No caso anterior, $\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1$.

4) A = { (1, 0, 2), (2, 0, 4) } é L.D.

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$$

5) A = { (0, 0, 0), (2, 3, 4), (5, 6, 7) } $\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1$ e $\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1$ é L.D.

6) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{v}_2 = 4\vec{v}_1$

Obs. 2: Para gerar o $V = \Re^2$ é preciso de 2 vetores
Para gerar o $V = \Re^3$ é preciso de 3 vetores
Para gerar o $V = M_{2X2}$ é preciso de 4 vetores

<u>Exemplo</u>: 1) Determine se os vetores (1, -2, 1) , (2, 1, -1) , (7, -4,1) $\in R^3$ é linearmente dependentes ou não.
Resolução: Fazer uma combinação linear dos vetores igual ao vetor nulo, usando incógnitas escalares a_1, a_2, a_3.

$$a_1(1,-2,1) + a_2(2,1,-1) + a_3(7,-4,1) = (0,0,0)$$

$$(a_1,-2a_1,a_1) + (2a_2,a_2,-a_2) + (7a_3,-4a_3,a_3) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + 2a_2 + 7a_3, -2a_1 + a_2 - 4a_3, a_1 - a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 7a_3 = 0 \\ -2a_1 + a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e escalonada}]{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} PC = PA = 2 \\ GL = 3 - 2 = 1 \end{matrix}\right\} \text{Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.)}$$

Logo, os vetores (1, -2, 1) , (2, 1, -1) , (7, -4,1) $\in R^3$ são LINEARMENTE DEPENDENTES.

<u>Exemplo</u> 2) Seja V o espaço vetorial das matrizes 2x2 sobre R. Determine se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \text{ são dependentes.}$$

Resolução: Fazer uma combinação linear das matrizes A, B e C igual a matriz nula, usando incógnitas

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

escalares a_1, a_2, a_3. $\begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_3 \\ a_1 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 0a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$$

Como o sistema é Possível e Determinado (S.P. D.),
As matrizes A, B e C são LINEARMENTE INDEPENDENTES.

Observações:

a) O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é chamada *dependente* ou *independente* se os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são dependentes ou independentes. Também definimos que o conjunto vazio ϕ é *independente.*

b) Se dois dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são iguais, digamos $v_1 = v_2$, então os vetores são *dependentes.* Pois $v_1 - v_2 + 0v_3 + ... + 0v_n = 0$ e o coeficiente de v_1 *não é zero.*

c) Dois vetores v_1 e v_2 são *dependentes* se, e somente se, um deles é *múltiplo* de outro.

d) Um conjunto que contém um subconjunto dependente é também dependente. Portanto, qualquer subconjunto independente é independente.

e) No espaço real R^3 a dependência de vetores pode ser descrita geometricamente como segue: dois vetores quaisquer u e v são dependentes se, e somente se, estão na mesma reta passando pela origem; três vetores quaisquer u , v e w são dependentes se, e somente se, estão no mesmo plano passando pela origem.

BASES E DIMENSÕES

Definição. Se V é um espaço vetorial qualquer e $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se valerem as seguintes condições:

(a) S é linearmente independente.

(b) S gera V.

Teorema

Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso da forma $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ de uma única maneira

Obs.

1. Os vetores $v_1, . . ., v_n$ são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros.
2. Se dois vetores $v_1, . . . , v_m,$ são iguais, digamos $v_1 = v_2$, então os vetores são dependentes. Pois $v_1 - v_2 = 0$
3. Dois vetores v_1 e v_2 são dependentes se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.
4. No espaço real R^3 a dependência de vetores pode ser escrita geometricamente como segue: dois vetores quaisquer u e v são dependentes se, e somente se, estão na mesma reta passando pela origem; três vetores quaisquer u, v e w são dependentes se, e somente se, estão no mesmo plano passando pela origem

<u>Exercícios</u>

1) Verifique se o conjunto B { (1, -1), (0, 1) } é uma base do $V = \Re^2$:

a) B é L.I.?

$$a_1.(1, -1) + a_2.(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{array}\right\} \quad a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow \text{B é L.I.}$$

b) B gera o $V = \Re^2$? Devemos escrever todo e qualquer $\vec{v} \in \Re^2$ como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$.

$(x, y) = a_1.(1, -1) + a_2.(0, 1)$

$$\begin{cases} x = a_1 & \Rightarrow a_1 = x \\ y = -a_1 + a_2 & \Rightarrow a_2 = x + y \end{cases}$$

$(x, y) = x.(1, -1) + (x + y)(0, 1)$

Logo, B gera o $\Re^2$

2) Verifique se B = { (2, 3), (4, 6) } é uma base do V = $\Re^2$.

(B é L.D., logo não é base)

3) B = { (1, 0, 1), (0, 0, 1) } é uma base de $\Re^3$?

(Não, pois precisamos de 3 vetores para gerar o $\Re^3$.)

4) B = { (1, 0), (0, 1) } é uma base de $\Re^2$?

(Sim, e é chamada de Base Canônica)

5) B = { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } é uma base de $\Re^3$?

(É a base canônica do $\Re^3$)

Obs. 1: Sejam $e_1 = (1, 0, 0,..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0,...,1)$.

O conjunto B = { $e_1, e_2,...,e_n$) é uma base de $\Re^n$, chamada de Base canônica do $\Re^n$.

<u>Exemplo:</u> Determine se os vetores u = (1,1,1) , v = (1,2,3) e w = (2,-1,1) formam base do espaço R^3.

Resolução:

1^0) verificar se os vetores são geradores

$$a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(2,-1,1) = (x, y, z)$$

$$(a_1, a_1, a_1) + (a_2, 2a_2, 3a_2) + (2a_3, -a_3, a_3) = (x, y, z)$$

$$(a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 - a_3, a_1 + 3a_2 + a_3) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = x \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = y \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = z \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ 1 & 3 & 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e escalonada}]{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y - x \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x - 2y + z}{5} \end{pmatrix}$$

Re solvendo por substituiç ão, temos :

$$a_1 = x + y - z \qquad a_2 = \frac{-2x - y + 3z}{5} \qquad a_3 = \frac{x - 2y + z}{5}$$

Logo, como foi possível determinar os escalares a_1, a_2 e a_3 , os vetores *u, v* e *w geram* R^3.

2^0) verificar se os vetores são L.I.

$$a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(2,-1,1) = (0,0,0)$$

$$(a_1, a_1, a_1) + (a_2, 2a_2, 3a_2) + (2a_3, -a_3, a_3) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + a_2 + 2a_3, a_1 + 2a_2 - a_3, a_1 + 3a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e escalonada}]{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Discussão do sistema :

$$\left.\begin{matrix} \text{P.C.} = \text{P.A.} = 3 \\ \text{G.L.} = 3 - 3 = 0 \end{matrix}\right\} \text{Sistema Possível e Determinad o} \rightarrow \text{Linearment e Independen tes}$$

Portanto, os vetores u = (1,1,1) , v = (1,2,3) e w = (2,-1,1) formam base do espaço R^3.

Definição. Diz-se que um espaço vetorial V é de **dimensão finita n** ou é n-dimensional, e escreve-se dim V = n se existem vetores linearmente independentes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ que geram V. A seqüência $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é então chamada de uma base de V

Teorema. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, todas as bases de V tem o mesmo número de elementos.

Seja V de dimensão finita n. Então:

(i) Qualquer conjunto de n + 1 ou mais vetores é linearmente dependente

(ii) Qualquer conjunto linearmente independente é parte de uma base, isto é, pode ser estendido a uma base

(iii) Um conjunto linearmente independente com n elementos é uma base.

Exemplo

Os quatro vetores em R^4 (1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,01) são linearmente independentes, pois formam uma matriz escalonada. Além disso, como dim $R^4 = 4$, eles formam uma base de R^4.

Dimensão é o número de elementos necessários para gerar um espaço vetorial. Estes elementos, formam uma base que gera o espaço V.

Ex.: $V = \Re^2$ então dim. V = 2

$V = \Re^3$ então dim. V = 3

$V = M_{2x2}$ então dim. V = 4 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V = M_{2x3}$ então dim. V = 6

$V = M_{2x1}$ então dim. V = 2

$V = M_{mxn}$ então dim. V = m . n

<u>TEOREMA:</u> Se dim V = n, qualquer conjunto de "n" vetores L.I. formará uma <u>base de V</u>.

BASE ORTOGONAL E BASE ORTONORMAL

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é **ortogonal** se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Exemplos:

{(1,2,-3), (3,0,1), (1,-5,-3)} é uma base ortogonal do R^3.

Mostre que, o conjunto B = { (1, 0), (2, -1) } é uma base ortogonal em relação a esse produto interno.

(1, 0).(2, -1) = 2 –2 +0 +0 = 0 $\Rightarrow$ B é ortogonal.

Uma base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é **ortonormal** se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é: $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad i \neq j \\ 1 & \text{para} \quad i = j \end{cases}$.

Exemplo.: B = { (1, 2), (-2, 1) } Produto interno usual

(1, 2).(-2, 1) = 0 $\therefore$ -2 +2 = 0 (1, 2).(1, 2) = 5 $\neq$ 1 $\rightarrow$ B não é base ortogonal

Se um conjunto B é uma base ortogonal então para que tenhamos uma base ortonormal, basta normalizar cada elemento de B, isto é:

$$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|}$$

Exemplo1:
Seja B = { (1, 2), (-2, 1) } uma base ortogonal em relação ao produto interno usual. Construir uma base B' ortonormal.

$$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \ \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \therefore \ B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Prova: $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \qquad \vec{v}_2.\vec{v}_2 = 1$
$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 1$

Exemplo. 2:

O conjunto B = { (1, 3), (3, a) } é uma base ortogonal do V = $\Re^2$ em relação ao produto interno usual.

a) Determine o valor de "a".
b) A partir de B, construa uma base B', ortonormal.

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \therefore (1,3).(3,a) = 0 \therefore 3 + 3a = 0 \therefore a = -1$

$B = \{(1,3),\ (3,-1)\}$ é ortogonal.

$$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1,\ 3)}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right); \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(3,\ -1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$$

Exemplo. 3:
A partir de $\vec{v}_1 = (1,\ 2)$ construa uma base B ortogonal do V = $\Re^2$ em relação ao produto interno usual. A partir de B, construa uma base B' ortonormal.

a) B = { $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ } = { (1, 2), (x, y) } $\therefore$ (1, 2), (x, y) = 0
x +2y = 0 $\therefore$ x = -2y $\Rightarrow$ $\vec{v}_2$ = (-2y, y)

Podemos tomar $\forall$ y $\neq$ 0. Por exemplo, y = -1 e x = 2 $\vec{v}_2$ =(2, 1)

Logo, B = { (1, 2), (2, 1) }

b) $\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \quad \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right); \quad B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

De um espaço vetorial euclidiano V e uma base qualquer B = {v_1, v_2, ..., v_n} desse espaço, é possível a partir dessa base, determinar uma base ortogonal, considere-se: $w_1 = v_1$ e determina-se o valor de α de modo que o vetor $w_2 = v_2 - \alpha w_1$ seja ortogonal a w_1, ou seja;

$$(v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 = 0$$

$$v_2 \cdot w_1 - \alpha(w_1 \cdot w_1) = 0$$

$$\alpha = \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\, w_1$$ assim w_1 e w_2 são ortogonais.

Analogamente determina-se w_3, onde $w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \cdot w_2 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1$, onde w_1, w_2 e w_3 são ortogonais. O processo que permite a determinação de uma base ortogonal a partir de uma base qualquer chama-se processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Para se obter uma base ortonormal, basta normalizar cada w_i, fazendo $u_i = \frac{w_i}{|w_i|}$.

Dessa forma, dado um espaço euclidiano V e um a base qualquer B = { $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ } desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1; \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_1.\vec{u}_1).\vec{u}_1 \qquad \text{onde} \quad \vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3.\vec{u}_2).\vec{u}_2 - (\vec{v}_3.\vec{u}_1).\vec{u}_1 \qquad \text{onde} \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

$$\vec{w}_4 = \vec{v}_4 - (\vec{v}_4.\vec{v}_3).\vec{u}_3 - (\vec{v}_4.\vec{u}_2).\vec{u}_2 - (\vec{v}_4.\vec{u}_1).\vec{u}_1 \quad \text{onde} \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$$

$B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, ..., \vec{w}_n\} \rightarrow$ base ortogonal e B $= \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\} \rightarrow$ base ortonormal.

Bibliografia Recomendada

1. SIMON, Carl & Blume, L. *Matemática para Economistas*. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2004.
2. BRAGA, Márcio Bobik; KANNEBLEY JÚNIOR, Sérgio; ORELLANO, Verônica I.F. Matemática para economistas. São Paulo: Atlas, 2003.
3. BOLDRINI, José Luiz. *Álgebra linear: 591 problemas resolvidos. 442 problemas suplementares*. Ed. Harbra, 2004.
5. LIPSCHUTS, *Algebra linear*. Ed. PEARSON EDUCATION DO BRASIL LTDA, 2004
6. DAVID, C. Lay. Álgebra Linear e suas Aplicações. Editora: LTC, Rio de Janeiro, 1999.
7. KOLMAN, Bernard. Introdução a Álgebra Linear com Aplicações. Ed. Prentice-Hall do Brasil, 2000.
8.ANTON, Howard. Elementary Linear Algebra. 3a ed. John Wiley & Sons, 1981.

Recomendo que vocês exercitem seus conhecimentos na lista de exercícios referente ao “Ponto 49”.

Um forte abraço e até o nosso próximo encontro.