Cálculo EC - aula 9

Equações diferenciais

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função e as suas derivadas.

Já resolvemos equações diferenciais da forma: $y'(x) = f(x)$
cuja solução geral é dada por:

$$y(x) = \int f(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vamos estudar apenas equações diferencias de 1ª ordem, isto é, equações que envolvem a incógnita $y(x)$, a sua derivada $y'(x)$ e outras funções na variável x.

Dentro das equações de 1ª ordem, vamos estudar em concreto:

- equações lineares: $a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$
- equações separáveis: $g(y(x))\,y'(x) = f(x)$

Equações lineares

Equações da forma: $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)$, $x \in I$

$a(x) \neq 0, \ \forall x \in I$

Método de Resolução:

1) Transformar a equação em $y'(x) + p(x)\, y(x) = q(x)$

2) Multiplicar a equação pelo <u>fator integrante</u> $\mu(x)$ (a determinar)

$$y'(x)\,\mu(x) + y(x)\, \underbrace{p(x)\,\mu(x)}_{\mu'(x)} = q(x)\,\mu(x)$$

3) Ideia chave: transformar $y'(x)\,\mu(x) + y(x)\, p(x)\, \mu(x)$ na derivada de $y(x)\,\mu(x)$

Para tal $\mu(x)$ é tal que $\mu'(x) = p(x)\,\mu(x)$

<u>Facto</u>: podemos escolher $\boxed{\mu(x) = e^{P(x)} \text{ onde } P(x) = \int p(x)\,dx}$

$$\left[\ \mu'(x) = \left(e^{P(x)}\right)' = P'(x)\, e^{P(x)} = p(x)\,\mu(x) \ \checkmark\ \right]$$

4) Escrevemos a equação na forma $\left(y(x)\,\mu(x)\right)' = q(x)\,\mu(x)$
ou seja,

$$\left(y(x)\,e^{P(x)}\right)' = q(x)\,e^{P(x)}$$

5) Primitivamos ambos os membros da equação e obtemos

$$y(x)\,e^{P(x)} = Q(x) + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R},$$

onde $Q(x)$ é uma primitiva de $q(x)\,e^{P(x)}$

6) Escrevemos a solução geral: $y(x) = e^{-P(x)}Q(x) + \mathcal{C}\,e^{-P(x)}, \; \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

44. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares (isto é, determine a sua solução geral).

(a) $2y'(x) - 6y(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$ (b) $y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = 2e^{-x^2}, \quad x \in]-\infty, 0[$

(c) $y'(x) + 2y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$ (d) $y'(x) + \dfrac{1}{2x}y(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,(x^2), \quad x > 0$

a

$$2y'(x) - 6y(x) = e^{2x} \iff y'(x) - 3y(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

Multiplicamos pelo fator integrante $\mu(x)$ e obtemos

$$y'(x)\mu(x) - 3\mu(x)y(x) = \frac{e^{2x}}{2}\mu(x)$$

Queremos $\mu(x)$ tal que $\mu'(x) = -3\mu(x)$

Podemos tomar $\mu(x) = e^{P(x)}$ onde $P(x) = \int -3\,dx$

Tomamos $\mu(x) = e^{-3x}$

A equação escreve-se então como:

$$y'(x)e^{-3x} - 3e^{-3x}y(x) = \frac{e^{2x}}{2}e^{-3x}$$

$$\iff \left(y(x)e^{-3x}\right)' = \frac{e^{-x}}{2}$$

Primitivando ambos os membros da equação:

$$y(x)\, e^{-3x} = \int \frac{e^{-x}}{2}\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)\, e^{-3x} = -\frac{e^{-x}}{2} + \mathcal{C} \,, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \mathcal{C} \right) e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + \mathcal{C}\, e^{3x} \,, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R} \qquad \text{solução geral}$$

Verificação: $2y'(x) - 6\,y(x) \overset{?}{=} e^{2x}$

$$y(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + \mathcal{C}\, e^{3x} \qquad\qquad y'(x) = -e^{2x} + 3\,\mathcal{C}\, e^{3x}$$

$$2y'(x) - 6y(x) = 2\left(-e^{2x} + 3\mathcal{C}e^{3x}\right) - 6\left(-\frac{e^{2x}}{2} + \mathcal{C}e^{3x}\right) =$$

$$= -2e^{2x} + \cancel{6\mathcal{C}e^{3x}} + 3e^{2x} - \cancel{6\mathcal{C}e^{3x}} =$$

$$= e^{2x} \quad \checkmark$$

b) $y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 2\, e^{-x^2} \quad , \quad x \in \left]-\infty, 0\right[$

$p(x) = \frac{1}{x} \qquad P(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) = \ln(-x)$

pois $x<0$

$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\ln(-x)} = -x$

Multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(x)$

$-x\, y'(x) - y(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow \left(-x\, y(x)\right)' = -2x\, e^{-x^2}$

Primitivando, obtemos

$$-x\, y(x) = \int \underbrace{-2x}_{u'}\, \underbrace{e^{-x^2}}_{e^{u}}\, dx$$

$\Leftrightarrow -x\, y(x) = e^{-x^2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{e^{-x^2}}{-x} - \frac{C}{x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$ solução geral

c) $y'(x) + 2y(x) = x$

$p(x) = 2 \qquad P(x) = \int 2\,dx = 2x \qquad \mu(x) = e^{2x}$

Multiplicando a equação por $\mu(x)$:

$$y'(x)\,e^{2x} + y(x)\,2e^{2x} = x\,e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(y(x)\,e^{2x}\right)' = x\,e^{2x}$$

Primitivando:

$$y(x)\,e^{2x} = \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{e^{2x}}_{u'}\,dx$$

CA: $v = x \qquad v' = 1$

$u' = e^{2x} \qquad u = \dfrac{e^{2x}}{2}$

$$y(x)\,e^{2x} = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx$$

$$y(x)\,e^{2x} = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Solução geral: $y(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + C\,e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$

d) $y'(x) + \frac{1}{2x} y(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}(x^2)$, $x > 0$

$p(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$, pois $x>0$

Podemos tomar $\mu(x) = e^{P(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^{1/2} = \sqrt{x}$

Multiplicando a equação pelo fator integrante $\mu(x)$ obtemos

$y'(x)\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2x} y(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2) \Leftrightarrow \left(y(x)\sqrt{x}\right)' = x\,\mathrm{sen}(x^2)$.

Primitivamos ambos os membros da equação :

$$y(x)\sqrt{x} = \int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx \Leftrightarrow y(x)\sqrt{x} = \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{2} + \mathcal{C}$$

Solução geral: $y(x) = \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{x}}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$

45. Determine a solução dos seguintes problemas com condição inicial:

(a) $\begin{cases} t^2 x'(t) + x(t) = 1, & t \in]0, +\infty[\\ x(1) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} r'(\theta) + r(\theta)\operatorname{tg}\theta = \cos\theta, & \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ r(0) = 2 \end{cases}$

a

$$t^2 x'(t) + x(t) = 1 \iff x'(t) + \frac{1}{t^2} x(t) = \frac{1}{t^2}$$

$$p(t) = \frac{1}{t^2} \qquad P(t) = \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$$

$$\mu(t) = e^{P(t)} = e^{-1/t}$$

Multiplicando por $\mu(t)$ vem:

$$e^{-1/t} x'(t) + \frac{1}{t^2} e^{-1/t} x(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2} \iff$$

$$\left(e^{-1/t} x(t)\right)' = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}$$

Primitivando:

$$e^{-1/t} x(t) = \int \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'} \underbrace{e^{-1/t}}_{e^u} dt \iff e^{-1/t} x(t) = e^{-1/t} + C$$

Solução geral: $x(t) = 1 + C e^{1/t}, \quad C \in \mathbb{R}$

$$x(1) = 0 \iff 1 + C e = 0 \iff C = -\frac{1}{e} \iff C = -e^{-1}$$

Solução do problema com condição inicial:

$$x(t) = 1 + e^{-1} e^{1/t} \iff x(t) = 1 - e^{1/t - 1}$$

b) $R'(\theta) + R(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta = \cos\theta \quad , \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$p(\theta) = \mathrm{tg}\,\theta \implies P(\theta) = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta = -\int \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

$$= -\ln|\cos\theta| \quad , \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$= -\ln(\cos\theta)$$

$$\mu(\theta) = e^{P(\theta)} = e^{-\ln(\cos\theta)} = \left(e^{\ln(\cos\theta)}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta}$$

Multiplicando a equação por $\mu(\theta)$, obtemos

$$\frac{1}{\cos\theta} R'(\theta) + R(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\frac{1}{\cos\theta} = \cos\theta \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\iff \left(\frac{R(\theta)}{\cos\theta}\right)' = 1 \iff \frac{R(\theta)}{\cos\theta} = \theta + C$$

Solução geral: $R(\theta) = (\theta + C)\cos\theta \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

$R(0) = 2 \iff C = 2$

Solução do problema de condição inicial: $R(\theta) = (\theta+2)\cos\theta$

Verificação

$$R'(\theta) + R(\theta)\,tg\,\theta = \left((\theta+2)\cos\theta\right)' + (\theta+2)\cos\theta\, tg(\theta) =$$
$$= \cos\theta - (\theta+2)\,sen\,\theta + (\theta+2)\,sen\,\theta = \cos\theta \checkmark$$

$R(0) = 2\cos(0) = 2 \checkmark$

46. Pretende-se determinar uma função f que passa pelo ponto $(0, 1)$ e tal que, em cada ponto do seu gráfico, o declive da recta tangente é igual ao produto das coordenadas do ponto multiplicado por -1.

(a) Indique a equação diferencial correspondente.

(b) Determine a função procurada.

a Ponto genérico do gráfico de f: $(x, f(x))$, $x \in D_f$.

$f'(x) = -x f(x) \longrightarrow$ equação diferencial pretendida

b Pretendemos resolver o PCI: $\begin{cases} f'(x) = -x f(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$

$f'(x) = -x f(x) \Leftrightarrow f'(x) + x f(x) = 0$

$p(x) = x \Rightarrow P(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \mu(x) = e^{x^2/2}$

Multiplicando a equação pelo fator integrante $\mu(x)$, obtemos:

$$e^{x^2/2} f'(x) + x e^{x^2/2} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{x^2/2} f(x)\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2/2} f(x) = C \Leftrightarrow f(x) = C e^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \longrightarrow f(x) = e^{-x^2/2}$ é a função pretendida.

47. Uma materia radioactiva desintegra-se a uma taxa $Q'(t)$ proporcional à quantidade $Q(t)$ de materia existente no instante t, isto é a função Q satisfaz a relação

$$Q'(t) = -\lambda Q(t)$$

onde λ é uma constante positiva dependente da materia considerada e da unidade de tempo (constante de desintegração).

(a) Exprime $Q(t)$ em função de t, de λ e da quantidade Q_0 de materia no instante inicial $t = 0$.

(b) Seja $p \in]0, 1[$. Determine o instante em que a proporção de materia existente relativamente à quantidade inicial é igual a p. Este instante depende da quantitade de materia inicial?

(c) Sendo o ano a unidade de tempo, a constante de desintegração do Carbono 14 é igual a $1,238 \times 10^{-4}$. Sabendo que a quantidade actual presente num osso de um fóssil é 40% da quantidade inicial Q_0, indique a idade do fóssil.

Foi resolvido na aula teórica.
A resolução está disponível na Blackboard.

48. Suponha que no instante $t = 0$ um bolo é tirado do forno e é colocado numa sala cuja temperatura é mantida a 25°C. A temperatura $T(t)$ no instante t do bolo segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$T'(t) = -k\,(T(t) - 25)$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Mostre que, se a temperatura do bolo à saída do forno é T_0, a temperatura no instante t é dada por:
$$T(t) = 25 + (T_0 - 25)e^{-kt}.$$

(b) Sabendo que $T_0 = 225$°C e que depois de 10 minutos a temperatura do bolo é 125°C, determine o instante em que o bolo atingirá a temperatura de 50°C.

a

$$\begin{cases} T'(t) = -k\,(T(t)-25) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$T'(t) = -k\,(T(t) - 25) \iff T'(t) + kT(t) = 25k$$

Tomando $\mu(t) = e^{kt}$ a equação é equivalente a:

$$T'(t)e^{kt} + k e^{kt} T(t) = 25 k e^{kt}$$

$$\iff \left(T(t)\,e^{kt}\right)' = 25k\,e^{kt} \iff T(t)\,e^{kt} = \int 25k\,e^{kt}\,dt$$

$$\Leftrightarrow T(t)e^{kt} = 25e^{kt} + \mathscr{C} \Leftrightarrow T(t) = 25 + \mathscr{C}e^{-kt}, \mathscr{C} \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = T_0 \Leftrightarrow 25 + \mathscr{C} = T_0 \Leftrightarrow \mathscr{C} = T_0 - 25$$

$$T(t) = 25 + (T_0 - 25)e^{-kt} \qquad \text{c.q.d.}$$

b) $T_0 = 225 \Rightarrow T(t) = 25 + 200e^{-kt}$

$$T(10) = 125 \Leftrightarrow 25 + 200e^{-10k} = 125 \Leftrightarrow 200e^{-10k} = 100$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -10k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{10}$$

$$T(t) = 25 + 200e^{-\frac{\ln(2)}{10}t} \Leftrightarrow T(t) = 25 + 200 \cdot 2^{-t/10}.$$

$$T(t) = 50 \Leftrightarrow 25 + 200 \cdot 2^{-t/10} = 50 \Leftrightarrow 2^{-t/10} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-t/10} = 2^{-3} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Leftrightarrow t = 30.$$

Resposta: o bolo atingirá a temperatura de 50°C ao fim de 30 minutos.