Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
Mestrado Integrado em Engenharia Física

Cálculo Vetorial

1^0 teste — 23.04.2020

- O teste deve ser enviado num ficheiro único em formato pdf. Não é necessário mandar um pdf com o teste completo.No entanto, em caso de dificuldade, aceito o envio de fotografias de cada uma página do teste.
- Escreva o seu nome e número de aluno em todas as folhas que constituem a sua resolução do teste.
- Escreva, no início da sua resolução, a seguinte frase:

  > "Declaro, por minha honra, que o conteúdo relativo à resolução deste teste, que vou enviar à Prof. Lisa Santos, é da minha integral autoria. Limitei-me a utilizar a pesquisa bibliográfica permitida e a calculafora gráfica ou científica. Em nenhuma resposta tive ajuda de pessoa alguma ou de *software* adicional."

- Em cada pergunta do teste aparecem dois parâmetros a e b, que variam de questão para questão e que serão fixados por si, obedecendo à regra enunciada na questão.
- Escreva, no início de cada uma das suas respostas o conjunto/função/curva/superfície com os parâmetros substituídos, seguindo a tabela dessa questão.
- Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos.
- O teste tem 3 páginas e 5 perguntas.
- O teste tem a duração de 2h30. Os alunos têm de enviar a resolução do teste nos 15 minutos após o término do teste.

Exercício 1. Seja

$$A = \big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+y^2\leq a^2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-b)^2>b^2\}\big)\cup\{2a+1\}\times\mathbb{R}.$$

Se o algarismo das dezenas do seu número de aluno termina em:

0 então $a=3$ e $b=-2$
1 então $a=-1$ e $b=2$
2 então $a=-2$ e $b=1$
3 então $a=3$ e $b=-1$
4 então $a=-3$ e $b=1$
5 então $a=2$ e $b=-3$
6 então $a=1$ e $b=-2$
7 então $a=2$ e $b=-1$
8 então $a=-1$ e $b=3$
9 então $a=1$ e $b=-3$

Comece por escrever o conjunto A colocando no lugar de a e de b os valores que lhe foram atribuídos.

a) Esboce os conjuntos A, $\overset{\circ}{A}$ e $\mathrm{fr}(A)$.

b) Diga, justificando, se A é aberto.

c) A é limitado? Justifique.

Exercício 2. Sejam $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{y-a}, \ln(axy-b)\right)$ e $g(u,v) = (u^a v^b, \operatorname{sen}(abuv))$.

Se o seu número de aluno termina em:

0 então $a=-1$ e $b=2$
1 então $a=-2$ e $b=1$
2 então $a=3$ e $b-1$
3 então $a=-3$ e $b=1$
4 então $a=2$ e $b=-3$
5 então $a=1$ e $b=-2$
6 então $a=2$ e $b=-1$
7 então $a=-1$ e $b=3$
8 então $a=1$ e $b=-3$
9 então $a=3$ e $b=-2$

Comece por escrever as funções f e g substituindo os valores a e b que lhe foram atribuídos.

a) Determine e esboce o domínio de f.

b) Calcule $J_{(1,\pi)}g$.

c) Designando por g_1 a função primeira componente de g, calcule $\dfrac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x}$, sem calcular a função composta $g \circ f$.

Exercício 3. Seja

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{abxy}{a^2x^2+b^2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Se o algarismo das centenas do seu número de aluno termina em:

0 então $a=1$ e $b=-3$
1 então $a=3$ e $b=-2$
2 então $a=-1$ e $b=2$
3 então $a=-2$ e $b=1$
4 então $a=3$ e $b=-1$
5 então $a=-3$ e $b=1$
6 então $a=2$ e $b=-3$
7 então $a=1$ e $b=-2$
8 então $a=2$ e $b=-1$
9 então $a=-1$ e $b=3$

Comece por escrever a função f com os valores de a e de b que lhe foram atribuídos.

a) Mostre que a função f é descontínua em $(0,0)$.

b) seja $g(x,y) = ayf(x,y)$. Mostre que a função g é contínua.

c) Calcule a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

d) Calcule $f'((1,2);(3,0))$.

Exercício 4. Considere a linha de nível

$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1 - a\}, \quad \text{sendo} \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy.$$

Some todos os dígitos do seu número de aluno. Se o algarismo das unidades do número que obteve for.

0 então $a = 2$ e $b = -1$
1 então $a = -4$ e $b = 3$
2 então $a = 4$ e $b = -3$
3 então $a = 3$ e $b = -2$
4 então $a = -4$ e $b = 2$
5 então $a = -2$ e $b = 1$
6 então $a = 3$ e $b = -1$
7 então $a = -3$ e $b = 1$
8 então $a = 2$ e $b = -3$
9 então $a = 4$ e $b = -2$

a) Determine os pontos de Σ para os quais a recta tangente a Σ_1 seja perpendicular à recta de equação $y = -x$.

b) Considere a superfície de nível $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(bx,y) + z^2 = a^2\}$. Verifique se existe algum ponto de Π para o qual o plano tangente à superfície nesse ponto é horizontal.

Exercício 5. Se o algarismo dos milhares do seu número de aluno termina em:

0 então $a = -1$ e $b = 3$
1 então $a = 1$ e $b = -3$
2 então $a = 3$ e $b = -2$
3 então $a = -1$ e $b = 2$
4 então $a = -2$ e $b = 1$
5 então $a = 3$ e $b = -1$
6 então $a = -3$ e $b = -1$
7 então $a = 2$ e $b = -3$
8 então $a = -1$ e $b = -2$
9 então $a = 2$ e $b = -1$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 satisfazendo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ah,0) - f(0,ah)}{h} = a, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(bh,0) - f(0,ah)}{h} = b.$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
