

1 Sistemas de equações lineares

- Geometria e sistemas de equações lineares
- Definições e exemplos
- Classificação de sistemas
- Resolução de sistemas
- Cálculo da inversa

$$\begin{cases} -y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2z = -1 \end{cases}.$$

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

100

- 1 os três planos de \mathbb{R}^3 de equações cartesianas $-y + 2z = 3$, $2x + 3y - z = 2$ e $x + 2z = -1$ interseccionam-se num único ponto de coordenadas $(-27, 23, 13)$;
- 2 o vetor $(3, 2, -1)$ é combinação linear dos vetores $(0, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$ e $(2, -1, 2)$ e as coordenadas são -27 , 23 e 13 .

1. *Journal of Management Studies*, 1990, 27, 1, 1-14.

1. *Journal of Management Studies*, 1990, 27, 1.

10

Um sistema é caracterizado por duas matrizes:

- matriz simples
(matriz dos coeficientes)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix},$$

- matriz dos termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}.$$

Representando as variáveis por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, o sistema é equivalente

à equação matricial $AX = B$.

A matriz $[A \ B]$ diz-se a **matriz ampliada do sistema**.

Definição

Dado um sistema $AX = B$ de p equações lineares em n incógnitas, chama-se **solução** do sistema a uma sequência

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

tal que a igualdade seguinte é válida

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B.$$

Definição

Dois sistemas dizem-se **equivalentes** se admitem o mesmo conjunto de soluções.

Definição

Um sistema de equações lineares diz-se:

- **impossível** se não existem soluções do sistema;
- **possível** se existe pelo menos uma solução do sistema;
- **possível e determinado** se existe uma única solução do sistema;
- **possível e indeterminado** se existem várias soluções do sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema inicial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Conjunto das soluções = $\{ (-3, 2, -1) \}$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & x_2 & & +x_4 = 0 \\ & & & -x_4 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = 2 \\ x_4 = -2 \end{array} \right.$$

Matriz ampliada do sistema inicial:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Conjunto das soluções = $\{(1 - 2\lambda, 2, \lambda, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Definição

Diz-se que uma matriz está em **forma de escada** quando:

- ① se a linha k da matriz não é toda constituída por zeros, então a linha $k + 1$ (se existir) tem mais zeros no início da linha do que a linha k ;
- ② se existirem linhas todas constituídas por zeros, elas ficam abaixo de todas as outras linhas.

O primeiro elemento não nulo de cada linha é designado **elemento pivô** dessa linha (é usual tal elemento ser igual a 1).

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Proposição

As transformações seguintes não alteraram o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares:

- trocar a ordem das equações;
- multiplicar os dois membros de uma equação $e_1 = e_2$ por um escalar não nulo, i.e.,
se $\beta \neq 0$, $\beta e_1 = \beta e_2 \Leftrightarrow e_1 = e_2$
- substituir uma equação pela sua soma, membro a membro, com outra equação multiplicada por um escalar qualquer, i.e.,

$$\begin{cases} e_1 = e_2 \\ e'_1 = e'_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = e_2 \\ \beta e_1 + e'_1 = \beta e_2 + e'_2 \end{cases}$$

Estas transformações designam-se **transformações elementares**.

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

($eq_1 \leftrightarrow eq_2$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

($L_1 \leftrightarrow L_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

($eq_3 \leftarrow -3eq_1 + eq_3$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

($L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$(eq_2 \leftarrow \frac{1}{2}eq_2)$
 $(L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ -3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$(eq_3 \leftarrow -4eq_2 + eq_3)$
 $(L_3 \leftarrow -4L_2 + L_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_3 - x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$(eq_3 \leftarrow -\frac{1}{3}eq_3)$
 $(L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3)$

O conjunto das soluções do sistema pode já ser determinado com alguma facilidade, por substituição :

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = & \frac{1}{2} \\ & & x_3 & -x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_4 + \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \\ x_3 = x_4 - \frac{1}{3} \end{array} \right. ,$$

pelo que o conjunto das soluções do sistema é

$$\left\{ \left(\frac{2}{3} - \lambda, \frac{2}{3}, \lambda - \frac{1}{3}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposição

Dado um sistema de equações lineares $AX = B$, obtém-se um sistema de equações lineares equivalente ao dado quando se aplicam transformações elementares nas linhas da matriz ampliada, ou seja, quando:

- se trocam duas linhas;
- se multiplica uma linha por um escalar não nulo;
- se substitui uma linha pela sua soma com outra linha multiplicada por um escalar qualquer.

Definição

A utilização sucessiva de transformações elementares nas linhas de um sistema de equações lineares, de modo a transformar a matriz ampliada do sistema numa matriz em escada, designa-se por **método de eliminação de Gauss**.

Definição

Diz-se que uma matriz está em **forma de escada reduzida** quando se verifica simultaneamente:

- 1 a matriz está em forma de escada;
- 2 o elemento pivô é igual a 1 e é o único elemento não nulo da sua coluna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Definição

A utilização sucessiva de transformações elementares nas linhas de um sistema de equações lineares, de modo a transformar a matriz ampliada do sistema numa matriz em escada reduzida designa-se por **método de eliminação (ou de condensação) de Gauss-Jordan**.

Proposição

Dado um sistema de equações lineares, por aplicação do método de eliminação de Gauss é sempre possível obter um sistema equivalente cuja matriz ampliada esteja na forma de escada.

Proposição

Dado um sistema de equações lineares, por aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan é sempre possível obter um sistema equivalente cuja matriz ampliada esteja na forma de escada reduzida. Em cada caso, a matriz final é única.

Um sistema de equações lineares pode ser resolvido por:

- método de eliminação gaussiana seguido de substituições sucessivas;
- método de eliminação de Gauss-Jordan.

Definição

Sejam A uma matriz e A' a matriz em forma de escada resultante da aplicação do método de condensação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) à matriz A . Define-se a **caraterística** da matriz A como sendo o número de elementos pivô de A' que se representa por $r(A)$.

Proposição

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares. O sistema é:

- possível se $r([A|B]) = r(A)$;
- possível e determinado se é possível e o número de incógnitas for igual a $r(A)$;
- possível e indeterminado se é possível e o número de incógnitas for superior a $r(A)$.

Definição

Uma matriz E quadrada, de ordem n , que resulta da matriz I_n por se efetuar uma transformação elementar diz-se uma **matriz elementar**.

$$I_4 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} E_1, \text{ então } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_4 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} E_2, \text{ então } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Será E_1 invertível? $E_1^2 = I_4$.

E E_2 ?

Proposição

Sejam A uma matriz de tipo $n \times m$ e E uma matriz elementar de ordem n . Então, a matriz A' que resulta da matriz A por se ter efetuado a transformação elementar nas linhas que permitiu obter E verifica:

$$A' = E \cdot A$$

Recordando o exemplo inicial de condensação de uma matriz,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$(L_1 \leftrightarrow L_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$(L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3)$

...

Desta proposição resulta que a condensação de uma matriz pelo método de Gauss ou de Gauss-Jordan não é mais do que a multiplicação dessa matriz à esquerda por uma sucessão de matrizes elementares:

$$E_q \cdots E_1 A.$$

Suponhamos que A é uma matriz quadrada de ordem n e a condensação de Gauss-Jordan conduz à matriz identidade, I_n . Como a condensação resulta da multiplicação de A à esquerda por uma sequência de matrizes elementares, E_1, \dots, E_q , então

$$E_q \cdots E_1 A = I_n.$$

Em tal caso, A é invertível e a inversa é a matriz produto $(E_q \cdots E_1)$.

Como calcular $(E_q \cdots E_1)$?

$$E_q \cdots E_1 \cdot I_n = E_q \cdots E_1$$

Logo,

$$\left[A \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right. \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [E_q \cdots E_1 A \mid E_q \cdots E_1 I_n]$$

e se $E_q \cdots E_1 A$ é uma matriz em forma de escada reduzida, então A é invertível e a inversa é a matriz $n \times n$ que aparece mais à esquerda:

$$A^{-1} = E_q \cdots E_1 \cdot I_n.$$

Reciprocamente, se A é invertível, poderemos sempre fazer obter a matriz identidade se aplicarmos transformações lineares?

Proposição

O sistema $AX = B$ de n equações lineares em n incógnitas é possível e determinado se e só se A é invertível.

Se A é invertível, então $X = A^{-1}B$.

Reciprocamente, suponhamos que o sistema é possível e determinado. Efetuando a condensação da matriz ampliada numa matriz em forma de escada reduzida poderia atingir-se um de dois resultados:

$$\textcircled{1} [A \mid B] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[I_n \mid \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right] \text{ pelo que } A \text{ é invertível;}$$

$$\textcircled{2} [A \mid B] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{array} \right]$$

e o sistema ou é impossível ou é possível e indeterminado, o que é falso por hipótese. Logo este segundo caso não pode ocorrer.

De modo equivalente ao processo anterior, podemos pensar que, se A é uma matriz quadrada de ordem n , então verificar se A é invertível e, em caso afirmativo, calcular a inversa resume-se a classificar e resolver a equação $AX = I_n$, onde a incógnita X é uma matriz $n \times n$.

$$A \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = I_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ A \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ A \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Os n sistemas anteriores têm todos a mesma matriz simples, pelo que se podem resolver simultaneamente considerando as diversas colunas de termos independentes:

$$\left[A \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right. \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [E_q \cdots E_1 A \mid E_q \cdots E_1 I_n]$$

sendo $E_q \cdots E_1 A$ uma matriz em forma de escada reduzida.

Assim, se A é invertível, então $E_q \cdots E_1 A = I_n$ e $E_q \cdots E_1 I_n = A^{-1}$.

Exemplos elementares de cálculo:

- $A = I_n$

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & I_n \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{c|c} I_n & I_n \end{array} \right],$$

e

$$I_n^{-1} = I_n.$$

Exemplos elementares de cálculo:

$$\bullet \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & I_3 \\ 0 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|c} I_3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \end{array} \right],$$

$$\text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

- No caso geral, sendo A invertível e $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \neq 0$, para todo o índice i ,

$$A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Alguns exemplos de resposta rápida:

$$\bullet A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & I_3 \\ 2 & -3 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right]$$

e A não é invertível.

- Genericamente, uma matriz que tem uma linha ou uma coluna toda nula não é invertível.

Alguns exemplos de resposta rápida:

$$\bullet A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, pelo que concluímos anteriormente, A não é invertível.

- Genericamente, uma matriz que tem duas linhas iguais não é invertível.

Qual seria a resposta se a matriz A tivesse duas colunas iguais?
Porquê?