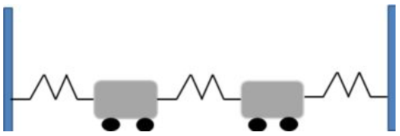
Oscilações Acopladas

Bom, você já estudou associação entre molas, mas como será que um sistema desses se comporta?

Por exemplo, se o problema te mostrar um sistema assim:



Ou seja, dois carrinhos unidos por três molas. E, a partir dessa configuração malucona, o enunciado te perguntar: "Quais são as frequências de vibração desse sistema?"

É isso que você vai aprender aqui (:

O que são oscilações acopladas?

Bom, o movimento de um carrinho influencia no outro, certo? Porque se um carrinho se mover para frente ou para trás, ele comprime ou distende as molas. Essas molas influenciam no movimento do outro carrinho, não é mesmo?

Dizemos que esse sistema é um sistema de oscilações acopladas. O "Acoplamento" é justamente esse efeito: Os carrinhos não têm movimentos independentes, mas sim dependentes um do outro.

Como resolver esse problema?

Vamos desenvolver uma forma de abordar esse problema em cinco passos:

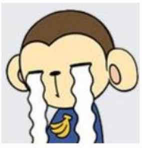
1. Definir o sentido dos deslocamentos e definir as forças do sistema.

2. Definir o sistema de EDO's pela segunda Lei de Newton.

3. Usar uma solução padrão e montar a matriz do sistema.

4. Calcular o determinante.

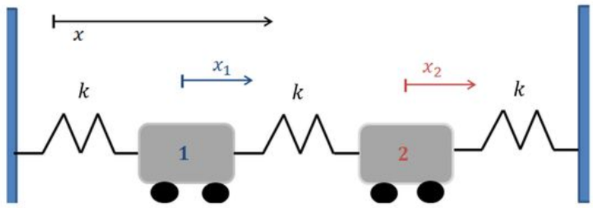
5. Resolver a equação do segundo grau ou Biquadrada final, obtendo as frequências.



Calma, não é tão complicado assim! Vamos ver cada um desses passos com calma.

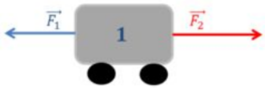
Passo 1

Vamos definir o sentido dos deslocamentos no sistema. Pra isso, vamos adotar um sentido positivo para a direita, como sempre fazíamos. A diferença aqui é que vamos considerar dois deslocamentos diferentes: x_1 e x_2 :



Esses dois deslocamentos são considerados positivos, de início, como você pode ver no sentido deles na figura, ok? Isso facilitará as contas.

Bora analisar primeiro as forças que agem no carrinho 1 :



Como estamos considerando deslocamentos positivos, a força 1 vai ser dada pela distensão da mola 1, ou seja:

$$F_1 = -kx_1$$

Certo? Como sempre, a força elástica vai contra o deslocamento. Mas e a força 2? Bom, vamos deixar essa pro final, pois ela depende do outro carrinho.

Agora, pro carrinho 2:

Onde F_3 é dada por:

$$F_3 = -kx_2$$

Qual o motivo desse sentido? Bom, novamente, como estamos considerando os deslocamentos positivos, a mola 3 está sendo comprimida. Assim, a força terá o sentido acima, contrário ao sentido positivo do eixo x.

E agora, a misteriosa força F_2...

Bom, essa força afeta os dois movimentos, por isso a deixei por último. Vamos fazer mais uma consideração: Que x_2 é maior que x_1. Assim, o " x " da mola 2 será dado por:

$$x = x_2 - x_1$$

Ou seja, se os dois carrinhos andarem o mesmo tanto pra direita, por exemplo, a mola entre eles vai continuar na mesma! Essa mola só vai comprimir ou esticar se o deslocamento dos dois carrinhos for diferente.

Agora se houver um deslocamento entre os carrinhos ($x_1 \neq x_2$), então vai ter uma força entre eles, que é essa nossa F_2. Se sobre o nosso carrinho 1 vai ter uma força $\overrightarrow{F}_2$ sobre o nosso carrinho 2 vai ter uma força $-\overrightarrow{F}_2$, ou seja, isso é um par ação-reação.

O módulo da força F_2 é dado por:

$$|F_2|= k|x_2 - x_1|$$

Passo 2

Precisamos agora definir as EDO's. Vamos começar com o carrinho 1: Olhando os sentidos das forças que nele agem, podemos escrever:

$$m_1\ddot{x_1} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_1\ddot{x_1} + kx_1 - k(x_2 - x_1)= 0$$

Isolando x_1 e x_2 :

$$m_1\ddot{x_1} + 2x_1 k - kx_2 = 0$$

Fazendo a mesma coisa pro carrinho 2:

$$m_2\ddot{x_2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

$$m_2\ddot{x_2} + kx_2 + k(x_2 - x_1)= 0$$

$$\therefore$$

$$m_2\ddot{x_2} + 2x_2 k - kx_1 = 0$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1} + 2x_1 k - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x_2} + 2x_2 k - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Passo 3

Agora vamos usar uma solução padrão pra manipular nosso sistema. Esse é o nosso pulo do gato.

Como você deve lembrar, a solução de um MHS tem a forma:

$$x(t)= Acos(\omega t + \varphi)$$

Então vamos usar as soluções:

$$x_1(t)= A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_2(t)= A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Ambos com a mesma frequência ω? Sim, pois estamos procurando frequências de oscilação comum para todo o sistema. Agora, substituindo essas equações no sistema de EDO's e lembrando que:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A cos(\omega t + \varphi)$$

Pô, mas esse $A cos(\omega t + \varphi)$ é x, né? Então a gente pode rescrever

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x$$

Vamos chegar ao resultado abaixo:

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1 x_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ -\omega^2 m_2 x_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Beleza? Agora vamos escrever isso na forma matricial (dá um pulinho lá em álgebra linear, caso não lembre 😉):

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + 2k \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4

Pela equação matricial dali de cima, podemos ver que existe a solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Porém, não a queremos, não é mesmo? Porque isso geraria:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Pra que isso não aconteça, o determinante da matriz maior precisa ser nulo. Assim:

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + 2k \end{bmatrix} = 0$$

O que nos leva à equação:

$$\left(-m_1\omega^2 + 2k\right)\left(-m_2\omega^2 + 2k\right) - k^2 = 0$$

$$(m_1 m_2)\omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 + 4k^2 - k^2 = 0$$

$$(m_1 m_2)\omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 + 3k^2 = 0$$

A equação acima é chamada de equação de frequência ou equação característica do sistema.

Passo 5

Precisamos resolver a equação biquadrada. Como faz isso mesmo? É assim:

$$a^4 + 4a^2 + 2 = 0$$

Na equação acima, você chama:

$$x = a^2$$

E assim ela se transforma em:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Dai você resolve essa equação do segundo grau e, com os valores de x, você acha a :

$$a = \pm\sqrt{x}$$

Vamos fazer isso na nossa equação de frequência (só que aqui vamos usar as variáveis x e ω) :

$$(m_1 m_2)\omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 + 3k^2 = 0$$

$$x = \omega^2$$

$$(m_1 m_2)x^2 - 2k(m_1 + m_2)x + 3k^2 = 0$$

$$\therefore$$

$$x = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Onde:

$$b = -2k(m_1 + m_2)$$

$$a = m_1 m_2$$

$$c = 3k^2$$

Assim:

$$x = \frac{2k(m_1 + m_2) \pm \sqrt{2k(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 (3k^2)}}{2m_1 m_2}$$

Com os valores de x, você calcula as frequências:

$$\omega = \pm\sqrt{x}$$

Preste atenção nessa última equação: só tomaremos os valores positivos de ω. Devemos fazer isso porque as **frequências são**, por definição, **positivas**!

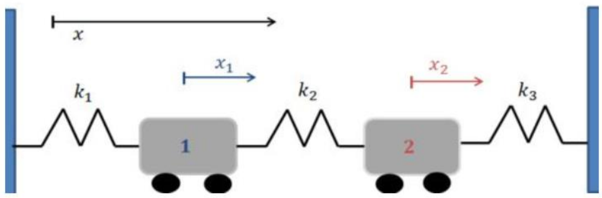
Ufa! Terminamos. Você só deve prestar atenção em duas coisas:

1. Os valores de x precisam ser positivos (afinal de contas, depois você vai tirar a raiz deles depois)

2. Os valores de ω também precisam ser positivos.

Nesse nosso exemplo fizemos com que as massas fossem diferentes e constantes de molas fossem iguais, mas o seu professor pode inventar um montão de coisas!!! :o

Vamos ver como seria o caso com constantes de mola diferentes:



O nosso sistema de EDO's ficaria assim

$$m_1 \ddot{x_1} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x_2} = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

Já que sobre o bloco 1 vão atuar as molas de constantes elásticas k_1 e k_2 e sobre o bloco 2 vão atuar as molas de constantes elásticas k_2 e k_3!