Definição 3.1. A transposta de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cuja entrada (i, j) é a_{ji}, para $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$.

Exemplo 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = B, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad E^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Definição 3.4. Uma matriz A diz-se simétrica se $A = A^T$.

Observações 3.5.

1. A coluna i de A^T é a linha i de A.

2. Uma matriz é simétrica se e só se for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

A transposição tem as seguintes propriedades.

Proposição 3.6. Sejam $m, n, q, k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Então,

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(AC)^T = C^T A^T$;
5. $\left(D^k\right)^T = \left(D^T\right)^k$.

Definição 3.7. Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se invertível se existir uma matriz B, quadrada de ordem n, para a qual

$$AB = BA = I_n.$$

Teorema 3.8. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$ então ela é única.

demonstração: Admitamos que $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ são tais que $AB = BA = I_n$ e $AC = CA = I_n$. Temos que

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Definição 3.9. A matriz B, caso exista, diz-se a inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo 3.10. A matriz $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é invertível

mas a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Teorema 3.11. Se U e V são matrizes invertíveis de ordem n, então UV é invertível e

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}.$$

demonstração Admitamos que U e V são invertíveis. Então,

$$(UV)(V^{-1}U^{-1}) = U(VV^{-1})U^{-1} = UI_nU^{-1} = UU^{-1} = I_n.$$

Teorema 3.12. Se A é invertível então a sua transposta A^T é também invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Teorema 3.13. Se A é invertível então

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Teorema 3.14. Uma matriz quadrada triangular inferior (respetivamente, superior) é invertível se e só se tem elementos diagonais não nulos. Neste caso, a sua inversa é de novo triangular inferior (respetivamente, superior).

Exemplo 3.15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 3.16. Uma matriz ortogonal é uma matriz (quadrada) invertível, cuja inversa iguala a sua transposta ($AA^T = A^T A = I$).

Exemplo 3.17.

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = V^T$$

Teorema 3.18.

1. A inversa de uma matriz ortogonal é também ela ortogonal.
2. O produto de matrizes ortogonais é de novo uma matriz ortogonal.