Álgebra Linear e Geometria Analítica

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática
ECUM

$1^{\underline{\circ}}$ semestre de 2020/2021

1. MATRIZES
   - Conceitos básicos
   - Operações - adição
   - Operações - multiplicação por um escalar
   - Operações - multiplicação
   - Operações - transposição
   - Matrizes invertíveis
   - Matrizes simétricas e matrizes ortogonais
   - Aplicações

Exemplo 1

A avaliação dos alunos numa unidade curricular baseia-se em 4 elementos: 2 testes, um trabalho de pesquisa de aplicações da matéria estudada e na exposição do trabalho realizado.

As classificações (numa escala de 0 a 20) de 5 alunos são as seguintes:

	Teste 1	Teste 2	Trabalho	Exposição
Ana	17	14	15	17
Carlos	13	16	15	12
João	14	14	17	16
Rita	18	12	14	18
Tomás	17	13	15	15

Sabendo o significado de cada linha e de cada coluna, a informação relevante pode ser representada pela seguinte tabela:

$$\begin{bmatrix} 17 & 14 & 15 & 17 \\ 13 & 16 & 15 & 12 \\ 14 & 14 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 14 & 18 \\ 17 & 13 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

Considerando que a classificação de cada aluno é calculada com base nos seguintes pesos:

peso do trabalho	0.25
peso da exposição	0.15
peso do primeiro teste	0.25
peso do segundo teste	0.35

como calcular a classificação de cada aluno a partir da tabela?

A resposta será dada mais à frente.

Exemplo 2

Considere-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & -2z & = & 1 \\ 2x & & +2z & = & 1 \\ -x & +2y & & = & 0 \\ & 2y & +z & = & 2 \end{array}\right. .$$

A informação relevante pode ser armazenada nas seguintes tabelas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

E o que fazer com as incógnitas? $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Definição de matriz

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, designa-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) a uma tabela com m linhas e n colunas, na qual cada posição é preenchida por um número, dito elemento da matriz ou entrada da matriz.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes $m \times n$ de entradas reais representa-se por $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Alguns autores usam a notação $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Uma grandeza que pode ser caraterizada por um único número real é designada por grandeza escalar, pelo que por vezes se fala de um *escalar* para referir um número, que se distingue de um vetor ou de uma matriz que representam grandezas vetoriais.

Neste curso trabalharemos apenas com matrizes de entradas reais e escalares reais.

Uma matriz pode representar-se de várias formas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} = [a_{i\,j}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [a_{i\,j}]_{m\times n}.$$

- $[A]_{i\,j} = a_{i\,j} \longrightarrow$ elemento da matriz A da linha i e coluna j.
- A linha i da matriz A é $L_i = \begin{bmatrix} a_{i\,1} & a_{i\,2} & \dots & a_{i\,n} \end{bmatrix}$.
- A coluna j é $C_j = \begin{bmatrix} a_{1\,j} \\ a_{2\,j} \\ \vdots \\ a_{m\,j} \end{bmatrix}$.
- $(a_{1\,1}, \dots, a_{l\,l})$ é a diagonal da matriz A, onde $l = \min\{m,\ n\}$.

Definição

Duas matrizes A e B são iguais se têm o mesmo número m de linhas e o mesmo número n de colunas, ou seja, são ambas $m \times n$, e se os elementos são iguais posição a posição, isto é, se $a_{i\,j} = b_{i\,j}$, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definições

Seja A uma matriz $m \times n$. Então,

- se $m = n$, a matriz A diz-se uma matriz quadrada (de ordem n);
- sendo A uma matriz quadrada,

se $a_{i\,j} = 0$, para qualquer $i > j$,
então A diz-se triangular superior,

se $a_{i\,j} = 0$, para qualquer $i < j$,
então A diz-se triangular inferior;

- se A é uma matriz quadrada em que $a_{i\,j} = 0$ caso $i \neq j$, então A diz-se uma matriz diagonal e representa-se por $diag(a_{1\,1}, \ldots, a_{n\,n})$, isto é,

$$diag(a_{1\,1}, \ldots, a_{n\,n}) = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n\,n} \end{bmatrix};$$

- se A é uma matriz diagonal em que $a_{i\,i} = 1$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, então A diz-se a matriz identidade e representa- se por I_n;
- se as entradas de A são todas iguais a 0, então A diz-se a matriz nula e representa-se por $\mathbf{0}_{m\times n}$;

- se $n = 1$, então a matriz diz-se uma matriz coluna ou um vetor coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix};$$

- se $m = 1$, então a matriz diz-se uma matriz linha ou um vetor linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \end{bmatrix}.$$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ duas matrizes. Define-se a soma de A com B como sendo a matriz

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Desta forma define-se uma operação binária, entre matrizes $m\times n$, designada adição de matrizes $m \times n$.

Proposição

Se A, B e C matrizes $m \times n$, então:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + \mathbf{0}_{m\times n} = A$;
4. se $A' = [-a_{ij}]_{m\times n}$, então $A + A' = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Definição

Se A é uma matriz $m \times n$, então a matriz $A' = [-a_{ij}]_{m\times n}$ designa-se a matriz simétrica de A.

Recordemos o Exemplo 1.
Considere-se a matriz das classificações dos 5 alunos:

$$\begin{bmatrix} 17 & 14 & 15 & 17 \\ 13 & 16 & 15 & 12 \\ 14 & 14 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 14 & 18 \\ 17 & 13 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que se pretende as classificações numa escala de 0 a 100.

Qual seria a matriz? O que se deveria fazer para obter esse resultado?

$$\begin{bmatrix} 5\times 17 & 5\times 14 & 5\times 15 & 5\times 17 \\ 5\times 13 & 5\times 16 & 5\times 15 & 5\times 12 \\ 5\times 14 & 5\times 14 & 5\times 17 & 5\times 16 \\ 5\times 18 & 5\times 12 & 5\times 14 & 5\times 18 \\ 5\times 17 & 5\times 13 & 5\times 15 & 5\times 15 \end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix} 17 & 14 & 15 & 17 \\ 13 & 16 & 15 & 12 \\ 14 & 14 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 14 & 18 \\ 17 & 13 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz e α um número real. Então define-se o produto da matriz A pelo escalar α como sendo a matriz

$$\alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$$

Desta forma define-se uma operação designada por multiplicação por um escalar.

Proposição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, A e B matrizes $m \times n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

1. $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;
2. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
4. $1 \cdot A = A$;
5. a matriz $(-1) \cdot A$ é a matriz simétrica de A;
6. $\alpha \cdot \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$;
7. $0 \cdot A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Voltemos ao Exemplo 1 e ao problema que ficou em aberto.
Como se calcula a classificação de cada aluno?

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ana} \\ \text{Carlos} \\ \text{João} \\ \text{Rita} \\ \text{Tomás} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{T1} & \text{T2} & \text{Tr.} & \text{Exp.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17 & 14 & 15 & 17 \\ 13 & 16 & 15 & 12 \\ 14 & 14 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 14 & 18 \\ 17 & 13 & 15 & 15 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.35 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{T1} \\ \text{T2} \\ \text{Tr.} \\ \text{Exp.} \end{array}$$

Ana $\longrightarrow$ $17 \times 0.25 + 14 \times 0.35 + 15 \times 0.25 + 17 \times 0.15$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i\,1} & a_{i\,2} & \cdots & a_{i\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & b_{1\,j} & \cdots \\ \cdots & b_{2\,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{n\,j} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow a_{i\,1}b_{1\,j} + a_{i\,2}b_{2\,j} + \cdots + a_{i\,n}b_{n\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}b_{k\,j} = [A \cdot B]_{i\,j}$$

Definição

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ matrizes. Então define-se o produto de A por B como sendo a matriz $m \times p$,

$$A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$$

Desta forma define-se uma operação designada por multiplicação de matrizes.

Exemplo 3

O que seria o produto $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$?

Se fosse efetuado por linhas:

1ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 5 \end{bmatrix}$$

O resultado final era: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

De futuro efetuaremos os cálculos da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ 11 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 11 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Proposição

Sejam A, B e C matrizes e α um número.

1. Se o produto $A \cdot (B \cdot C)$ está definido, então
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$
2. Se a expressão $A \cdot (B + C)$ está definida, então
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C;$$
3. Se a expressão $(A + B) \cdot C$ está definida, então
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$
4. Se o produto $A \cdot B$ está definido, então
$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B);$$
5. Se A é uma matriz $m \times n$, então $I_m \cdot A = A \quad$ e $\quad A \cdot I_n = A$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, e A uma matriz quadrada $m \times m$. Então define-se a potência de ordem n de uma matriz quadrada A como sendo o produto de n fatores todos iguais a A.

$$A^n = \underbrace{A \cdot \quad \cdots \cdot A}_{n}$$

A potência de ordem 0 é

$$A^0 = I_m$$

Desta forma define-se a operação unária, em matrizes quadradas, designada potenciação de matrizes de ordem n, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{i\,j}]_{m\times n}$ uma matriz. Então, define-se a transposta da matriz A como sendo a matriz $n \times m$, que se denota por A^T, tal que para cada posição

$$[A^T]_{i\,j} = a_{j\,i}$$

Desta forma define-se uma operação unária, em matrizes, designada transposição de matrizes.

Proposição

Sejam A e B matrizes e α um escalar. Então:

1. $(A^T)^T = A$;
2. se A e B são matrizes $m \times n$, então $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;
4. se o produto $A \cdot B$ está definido, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada $n \times n$. Então diz-se que A é uma matriz invertível (ou não singular) se existir uma matriz quadrada $n \times n$, denotemo-la por X, tal que

$$A \cdot X = X \cdot A = I_n.$$

Uma matriz que não é invertível diz-se não invertível (ou singular).

Exemplo 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = X \cdot A = I_3$$

Exemplo 5 A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é não invertível.

$$B \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1\,1} & x_{1\,2} & x_{1\,3} \\ x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} \\ x_{3\,1} & x_{3\,2} & x_{3\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{1\,1} + x_{2\,1} & x_{1\,2} + x_{2\,2} & x_{1\,3} + x_{2\,3} \\ x_{2\,1} + x_{3\,1} & x_{2\,2} + x_{3\,2} & x_{2\,3} + x_{3\,3} \\ -x_{1\,1} + x_{3\,1} & -x_{1\,2} + x_{3\,2} & -x_{1\,3} + x_{3\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_{1\,1} + x_{2\,1} & = 1 \\ x_{1\,2} + x_{2\,2} & = 0 \\ x_{1\,3} + x_{2\,3} & = 0 \\ x_{2\,1} + x_{3\,1} & = 0 \\ x_{2\,2} + x_{3\,2} & = 1 \\ x_{2\,3} + x_{3\,3} & = 0 \\ -x_{1\,1} + x_{3\,1} & = 0 \\ -x_{1\,2} + x_{3\,2} & = 0 \\ -x_{1\,3} + x_{3\,3} & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{que é impossível.}$$

Para simplificar a notação deixaremos de escrever o símbolo $\cdot$ para indicar a multiplicação de matrizes ou a multiplicação por um escalar.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz $n \times n$ invertível. Então, existe uma e uma só matriz A' que satisfaz as equações matriciais de incógnita X
$$A\,X = X\,A = I_n.$$

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz $n \times n$ invertível. Então, a solução das equações matriciais $A\,X = X\,A = I_n$ diz-se a matriz inversa de A e representa-se por A^{-1}.

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada $n \times n$. Se existir uma matriz A' tal que $A\,A' = I_n$, então também $A'\,A = I_n$.

Proposição

Sejam α um escalar, $n \in \mathbb{N}$, A e B matrizes $n \times n$ invertíveis. Então:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
4. se $\alpha \neq 0$, αA é invertível.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada $n \times n$. Então, diz-se que

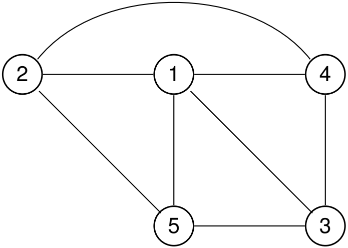
- A é uma matriz simétrica se $A = A^T$;
- A é uma matriz ortogonal se $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$.

Proposição

Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n. Então:

1. A^T é uma matriz ortogonal;
2. A é uma matriz invertível e a inversa é A^T;
3. os vetores coluna (vetores linha) de A são vetores ortonormais;
4. o produto AB é uma matriz ortogonal.

Problema 1: Considere-se uma rede de comunicação, em que várias cidades estão ligadas entre si através de uma rede de estradas, (ver fig. abaixo). As cidades representam-se por círculos e as vias de comunicação por segmentos de reta.



Pode-se representar esta informação por uma matriz A?

matriz adjacência $\rightarrow \begin{cases} a_{i\,j} = 1 & \text{se existe um caminho de } i \text{ para } j \\ a_{i\,j} = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Quantos caminhos há de 4 para 1 em duas etapas?
Calcule $[A^2]_{4\,1}$. O que conclui?

Quantos caminhos há de 4 para 5 em três etapas?

Problema 2: Considere-se no espaço $\mathbb{R}^2$ um vetor v cujas coordenadas são x e y. Como se representa matricialmente o vetor?

Se o vetor sofrer uma rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$, no sentido direto, quais são as coordenadas do vetor resultante?
Sendo $\theta \in \mathbb{R}$, considere-se a matriz

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Qual o resultado do produto $A_{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$?

Se o vetor sofrer uma rotação de um ângulo π quais são as coordenadas do vetor resultante?
Qual o resultado do produto $A_\pi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$?

O que representa a matriz A_θ? Prove a sua conjetura.