Sobre os exercícios relativos a linhas e superfícies de nível (Folha 4, exercícios 7 a 12) ①

O que é importante saber nestes exercícios

(i) Temos uma linha $\Sigma_c = \{(x,y) \in Df : f(x,y) = c\}$ no plano ou uma superfície $\Sigma_c = \{(x,y,z) \in Df : f(x,y,z) = c\}$ no espaço, sendo $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Em todos os pontos $(x,y) \in \Sigma_c$ (ou $(x,y,z) \in \Sigma_c$) onde $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ (ou $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$) temos que $\nabla f(x,y)$ (ou $\nabla f(x,y,z)$) aponta a direcção normal à linha Σ_c (ou à superfície Σ_c)

Sobre a resolução dos exercícios

- Vou começar com os exercícios no plano
- Não os vou resolver novamente, mas vou tentar explicar o procedimento

Exercício 8

$$f(x,y) = x(x^2+y^2) + 9x^2 + y^2 \qquad \Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

a) Procuramos

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \Sigma_0 \\ \text{Recta tangente a } \Sigma_0 \text{ em } (x_0, y_0) \text{ horizontal} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Recta normal a Σ_0 em (x_0, y_0) vertical

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \in \Sigma_0 \\ \nabla f(x_0, y_0) \text{ vertical} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \in \Sigma_0 \\ \nabla f(x_0, y_0) = (0, *) \end{cases}$$

significando $*$ um certo valor, que não nos interessa qual é

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0,y_0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

(A) Feitas as contas, devemos verificar no final se o ∇f nos pontos obtidos é o vector nulo, uma vez que um ponto nessas condições deve ser excluído, uma vez que o vector nulo não aponta nenhuma direcção

b) Procuramos

$$\begin{cases} (x_0,y_0)\in\Sigma_0 \\ \underbrace{\text{Recta tangente a } \Sigma_0 \text{ em } (x_0,y_0) \text{ vertical}} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\text{Recta normal a } \Sigma_0 \text{ em } (x_0,y_0) \text{ horizontal}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0,y_0)\in\Sigma_0 \\ \nabla f(x_0,y_0) \text{ horizontal} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0,y_0)\in\Sigma_0 \\ \nabla f(x_0,y_0)=(*,0) \end{cases}$$

significando $*$ um certo valor que não nos interessa qual é

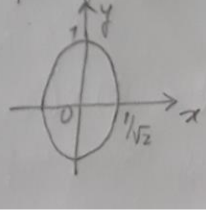
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0,y_0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

Verificamos (A), referido acima, às soluções do sistema.

Exercício 9

$f(x,y)=2x^2+y^2$ $\qquad \Sigma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=1\}$

Σ_1 é a elipse desenhada na figura ao lado



Queremos resolver

$$\begin{cases} (x_0,y_0) \in \Sigma_1 \\ \text{Recta tangente a } \Sigma_1 \text{ em } (x_0,y_0) \text{ passa no ponto } (1,1) \end{cases}$$

- Minha resolução

Se quero que a recta tangente passe em $(1,1)$, quero que o vector $(1,1)-(x_0,y_0)$ seja tangente a Σ_1 em (x_0,y_0). Como $\nabla f(x_0,y_0)$ é perpendicular a Σ_1 em (x_0,y_0), então estou à procura dos pontos $(x_0,y_0)\in\Sigma_1$ tais que $(1,1)-(x_0,y_0)$ e $\nabla f(x_0,y_0)$ são ortogonais, isto é

$$\begin{cases} (x_0,y_0) \in \Sigma_1 \\ ((1,1)-(x_0,y_0)) \cdot \nabla f(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

- Resolução alternativa

Equação da recta tangente a Σ_1 em (x_0,y_0):

$$((x,y)-(x_0,y_0)) \cdot \nabla f(x_0,y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0,\ y-y_0)\cdot(4x_0,\ 2y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0x + y_0y = \underbrace{2x_0^2 + y_0^2}_{=1} \iff 2x_0x + y_0y = 1$$

Queremos, então

$$\begin{cases} (x_0,y_0) \in \Sigma_1 \\ (1,1) \text{ pertence à recta } 2x_0x + y_0y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ 2x_0 + y_0 = 1 \end{cases}$$

Exercício 10

(4)

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + xy$ $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

Queremos resolver

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \Sigma_0 \\ \text{Recta normal a } \Sigma_0 \text{ em } (x_0,y_0) \text{ paralela à recta } y = x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x_0,y_0) \in \Sigma_0 \\ \nabla f(x_0,y_0) \text{ paralelo a um vector da recta (por exemplo, o vector } (1,1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_0,y_0) \in \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Exercício 11

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\Sigma_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 5\}$

Queremos que

$$\begin{cases} (x_0,y_0,z_0) \in \Sigma_5 \\ \text{Plano tangente a } \Sigma_5 \text{ em } (x_0,y_0,z_0) \text{ contém a recta } \boxed{\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}} \end{cases}$$

recta r

Minha resolução

- Plano tangente a Σ_5 em (x_0,y_0,z_0) contém a recta r

$\Updownarrow$

Plano tangente a Σ_5 contém 2 pontos da recta r

- Determinação de dois pontos da recta r

$z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$ Ponto $A = (5,-5,0)$

$x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ Ponto $B = (0,5,5)$

Procuramos

$$\begin{cases} (x_0,y_0,z_0) \in \Sigma_5 \\ A \in \text{plano tangente a } \Sigma_5 \text{ em } (x_0,y_0,z_0) \\ B \in \text{'' '' '' '' '' ''} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x_0,y_0,z_0) \in \Sigma_5 \\ A-(x_0,y_0,z_0) \text{ é ortogonal a } \nabla f(x_0,y_0,z_0) \\ B-(x_0,y_0,z_0) \text{ '' '' '' } \nabla f(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=5 \\ (5-x_0, +5-y_0, -z_0)\cdot(2x_0, 2y_0, 2z_0)=0 \\ (-x_0, 5-y_0, 5-z_0)\cdot(2x_0, 2y_0, 2z_0)=0 \end{cases}$$

Resolução alternativa

Plano Π tangente a Σ_5 em (x_0,y_0,z_0):

$$((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))\cdot\nabla f(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(2x_0, 2y_0, 2z_0)=0$$

$$x_0x+y_0y+z_0z = \underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2}_{=5}$$

Procuramos

$$\begin{cases} (x_0,y_0,z_0)\in\Sigma_5 \\ A\in\Pi \\ B\in\Pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=5 \\ 5x_0-5y_0=5 \\ 5y_0+5z_0=5 \end{cases}$$

Exercício 12-c)

$f(x,y)=x-y^2$

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=f(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y)-z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ g(x,y,z)=0\}, \end{aligned}$$

sendo $g(x,y,z)=f(x,y)-z = x-y^2-z$

Plano tangente ao G_f em $\underbrace{(A, f(A))}_{=(-1,0,f(-1,0))=(-1,0,-1)}$

$$((x,y,z)-(-1,0,-1))\cdot\nabla g(-1,0,-1)=0$$