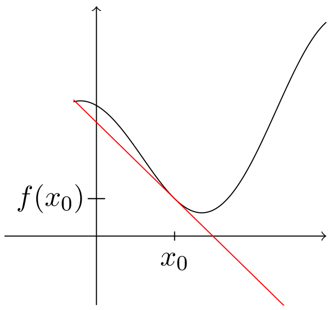
Polinómio de Taylor

Tangente

Sejam $f : D \to E$ uma função e $x_0 \in D$ tal que f é derivável em x_0. A equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Nota

A reta $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ satisfaz $P(x_0) = f(x_0)$ e $P'(x_0) = f'(x_0)$.

Tangente

Proposição

O polinómio P definido por

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é o único polinómio de grau ≤ 1 para o qual

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0.$$

Corolário

Se $Q(x) = ax + b$ verificar que, para x perto de x_0,

$$|f(x) - Q(x)| \leq |f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))|,$$

então $Q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Factorial

Seja $n \geq 1$ um número natural. O *factorial* de n é o número natural $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. Define-se também $0! = 1$.

Exemplos

Temos $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$ e $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Observe-se também que, para $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Polinómio de Taylor

Sejam $f : D \to E$ uma função e $x_0 \in D$ tal que a n-ésima derivada de f existe em x_0. O polinómio

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

é chamado *polinómio de Taylor de f de ordem n à volta de x_0*.

Nota

Tem-se

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Exemplos

(i) Seja $f : D \to E$ derivável em $x_0 \in D$. A equação de recta correspondente ao polinómio de Taylor de f de ordem 1 à volta de x_0 é a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

(ii) Seja f um polinómio de grau m,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_m(x - x_0)^m.$$

Para $n < m$ o polinómio de Taylor de f de ordem n à volta de x_0 é o polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

Para $n \geq m$, f é o seu próprio polinómio de Taylor de ordem n à volta de x_0.

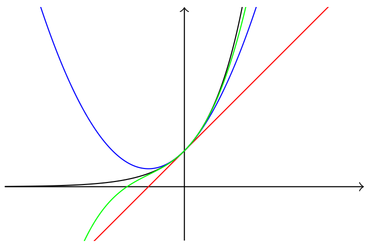
Exemplos

(iii) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. O polinómio de Taylor de ordem n à volta de 0 é o polinómio P dado por

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Com efeito, para todo o $k \in \mathbb{N}$, temos $f^{(k)}(x) = e^x$ e portanto

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{e^0}{k!} = \frac{1}{k!}.$$



Exemplos

(iv) Consideremos a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ e o ponto $x_0 = 1$. Temos

- $f(x) = x^{-1}$
- $f'(x) = -x^{-2}$
- $f''(x) = 2x^{-3}$
- $f'''(x) = -6x^{-4}$
- $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$

Mostra-se por indução que $f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-(k+1)}$. Logo

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^k.$$

Assim, o polinómio de Taylor de ordem n à volta de 1 de f é o polinómio P dado por

$$P(x) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 \cdots + (-1)^n (x - 1)^n.$$

Fórmula de Taylor-Young

Teorema

Sejam $f : D \to E$ derivável até a ordem n e $x_0 \in D$. O polinómio de Taylor de f de ordem n à volta de x_0 é o único polinómio P de grau $\leq n$ para o qual existe uma função $\varepsilon : D \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

A última linha é a *fórmula de Taylor-Young de ordem n para f à volta de x_0*.

Exemplo

A fórmula de Taylor-Young de ordem 3 para a função $x \mapsto e^x$ à volta de 0 é

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Fórmula de Taylor-Young

Corolário

Sejam $f : D \to E$ n vezes derivável e P o polinómio de Taylor de ordem n de f à volta de x_0. Seja Q um polinómio de grau $\leq n$ tal que, para x perto de x_0,

$$|f(x) - Q(x)| \leq |f(x) - P(x)|.$$

Então $Q = P$.

Aplicação ao cálculo de limites

Pretende-se calcular o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$. Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Temos

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

e então

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

A fórmula de Taylor-Young de ordem 3 para f à volta de 0 é então

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Aplicação ao cálculo de limites

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\right) \\
&= -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor-Lagrange

Teorema
Sejam f uma função de classe C^n definida num intervalo I e $x_0, x \in I$. Seja P o polinómio de Taylor de f de ordem n à volta de x_0. Se $x \neq x_0$ e $f^{(n+1)}(z)$ existir pelo menos para todo o z compreendido estritamente entre x_0 e x, então existe um número c compreendido estritamente entre x_0 e x tal que é válida a seguinte fórmula de Taylor-Lagrange:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Nota
Para $n = 0$ obtemos o Teorema de Lagrange.

Exemplo

A formula de Taylor-Lagrange de ordem 4 para a função $f(x) = \cos x$ à volta de 0 é

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\operatorname{sen} c}{5!}x^5, \quad 0 < c < x \text{ ou } x < c < 0.$$

Com efeito, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$ e

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1.$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Pretende-se mostrar que $0,095$ é um valor arredondado de $\ln 1,1$, isto é que

$$0,0945 \leq \ln 1,1 < 0,0955.$$

Consideremos a função f definida por $f(x) = \ln(1 + x)$. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

e

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1.$$

A fórmula de Taylor-Lagrange de ordem 2 para f à volta de 0 é então

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!(1+c)^3}, \quad 0 < c < x \text{ ou } x < c < 0.$$

Tomando $x = 0,1$ vem

$$\begin{aligned} \ln 1,1 &= 0,1 - 0,005 + \frac{2 \times 0,001}{3!(1+c)^3} \\ &= 0,095 + \frac{0,001}{3(1+c)^3}, \quad 0 < c < 0,1. \end{aligned}$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Basta mostrar que $-0,0005 < \ln 1,1 - 0.095 < 0,0005$, ou seja

$$|\ln 1,1 - 0,095| < 0,0005.$$

Temos

$$\begin{aligned} |\ln 1,1 - 0,095| &= \left|\frac{0,001}{3(1+c)^3}\right| \\ &= \frac{0,001}{3(1+c)^3} \qquad \text{(pois } c > 0\text{)} \\ &< \frac{0,001}{3(1+0)^3} \qquad \text{(pois } c > 0\text{)} \\ &= \frac{0,001}{3} \\ &< \frac{0,001}{2} \\ &= 0,0005. \end{aligned}$$