7. Oscilador harmónico

7.1 - Uma massa ligada a uma mola:

$$\vec{F} = -k x \, \hat{x}$$

$$m \ddot{x} = -kx \iff \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

i) $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ → Solução tentativa.

Vejamos: $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x(0) = A \sin\varphi \\ \dot{x}(0) = A\omega \cos\varphi \end{cases}$$

φ é determinado pelas condições iniciais.

A = amplitude ; φ - fase inicial. do movimento periódico

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ≡ frequência linear [Hz ou s^{-1}]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ≡ período do movimento.

ii) Balanço de energia:

$$\vec{F} = -kx\,\hat{x} \Rightarrow U = \frac{1}{2} k x^2$$

Logo: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \text{const.}$

Seja $x = A$ no instante em que $\dot{x} = 0$

Então:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Consequentemente:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(A^2 - x^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{\left(A^2 - x^2\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt$$

Integrando:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, t = \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) + \text{const.}$$

$$A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \text{const.}\right) = x$$

(Solução tentativa admitida em i)

<u>Observação</u>: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \text{const} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

(eq. diferencial que se obtém directamente da 2ª Lei de Newton)

(*)

iii) Integrando formalmente a equação de movimento:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

é uma eq. diferencial homogénea de 2ª ordem.

ep. discriminante: $\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \alpha = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x(t) = a\, e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + b\, e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$

$$= a\left[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right] + b\left[\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\right]$$

$$= (a+b)\cos(\omega t) + i\,(a-b)\sin(\omega t)$$

$t=0 \rightarrow x(0) = (a+b)$ (posição inicial)

$\dot{x}(0) = i\,(a-b)\,\omega$ (velocidade inicial)

$$\begin{cases} x(0) = (a+b) \\ -i\,\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega} = (a-b) \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\left(x(0) - i\,\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(x(0) + i\,\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\left[x^2(0) + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}\right] e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}} = \frac{1}{2} A\, e^{-i\varphi'}$$

$$b = \frac{1}{2}\left[x^2(0) + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}\right] e^{+i \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}} = \frac{1}{2} A\, e^{+i\varphi'}$$

Então:

$$x(t) = \frac{1}{2} A \left[e^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi'\right)} + e^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi'\right)}\right]$$

$$= A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi'\right) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'\right)$$

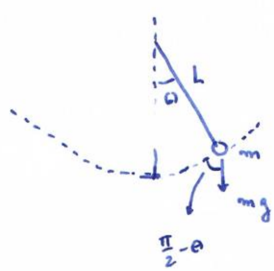
2. O oscilador não linear. linearizado!

$F = -kx$ para pequenos x, em geral. Para $x \gg 1$

$F = -kx + k' x^2 + k'' x^3 + \cdots$; A equação diferencial torna-se não linear e é difícil (ou impossível) de integrar analiticamente.

A beleza do caso linear consiste no facto de o período do movimento ser ~~in~~dependente da amplitude ($\Rightarrow$ os osciladores lineares dão bons relógios). Para um oscilador não linear isto não é verdade, e mesmo a natureza periódica do movimento carece de demonstração..

Estes aspectos são bem ilustrados pelo pêndulo gravítico:



$v = L\dot{\theta}$

$F_t = -mg \sin\theta$

$\rightarrow \quad mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\downarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

equação não linear.

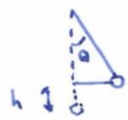
$\sin\theta \sim \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$; Se $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \sim \theta$.

Nestas condições:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

A equação corresponde à de um oscilador harmónico linear com $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$

É interessante repetir a análise do balanço de energia:



$$mgh = mgL(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1-\cos\theta) \equiv \text{constante.}$$

$\theta \ll 1 \Rightarrow ?$ $\quad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + \cdots$

$$E \simeq \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL\,\theta^2 + \cdots$$

$$\sqrt{\frac{2E - mgL\theta^2}{mL^2}} = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}}\left[\frac{2E}{mgL} - \theta^2\right]^{1/2}$$

Nas extremidades da oscilação $\dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mgL\,\theta_0^2$

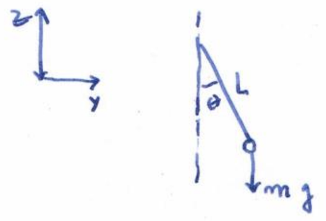
$$\Rightarrow \frac{2E}{mgL} = \theta_0^2 \quad ; \text{ então: } \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left[\theta_0^2 - \theta^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt$$ (tal como antes: pág. 2)

θ_1 : amplitude a $t=0$ $\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin\left[\underbrace{\sqrt{\frac{g}{l}}}_{\omega_0} t + \underbrace{\arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0}}_{\phi}\right]$

Como antes!

Finalmente, podemos ainda atacar o problema usando a noção de momento angular:



$$M_x = mgL\sin\theta$$

$$L_x = (\vec{r} \times \vec{p})_x = -m L L \dot{\theta}$$

Logo:

$$M_x = \dot{L}_x \Rightarrow mgL\sin\theta = -mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \text{(como antes)}$$

[1] Que os alunos devem ignorar, numa primeira leitura

2.2. - Uma observação sobre o pêndulo não-linear(*)
(que os alunos podem ignorar)[1]

Um dos aspectos essenciais do oscilador harmónico linear é o facto de o período ser independente da amplitude, e logo, da energia. Se a amplitude for suficientemente grande, o oscilador (o pêndulo, por exemplo) deixa de ser linear. Será o movimento periódico e, se sim, dependerá o período da amplitude? Vejamos este ponto no caso do pêndulo:

Como vimos:

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m g L (1 - \cos\theta) = \text{const.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - m g L \cos\theta = \text{const.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos\theta = C$$

Logo:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos\theta\right] = 0 \qquad (*)$$

Consideremos, por simplicidade as seguintes condições iniciais:

$\boxed{t=0 \rightarrow \theta(0) = \theta_0 \quad e \quad \dot{\theta}(0) = 0}$. Integremos (*) sob estas condições:

$$\dot{\theta}^2 = 2C + 2\omega_0^2 \cos\theta \Rightarrow$$

$$t=0 \rightarrow 0 = 2C + 2\omega_0^2 \cos\theta_0 \Rightarrow C = -\omega_0^2 \cos\theta_0$$

Logo: $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \left[\cos\theta - \cos\theta_0 \right]$

$$= 4\,\omega_0^2 \left[\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \right]$$

(visto que $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$)

Façamos a mudança de variável: $y = \sin(\theta/2)$

e definamos $k = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$. Então: as condições iniciais escrevem-se: $y(0) = \sqrt{k}$

Vejamos: $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\dot{\theta}$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \dot{y}^2 = \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}\left[1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - y^2\right)\dot{\theta}^2 \implies \dot{\theta}^2 = \frac{4\dot{y}^2}{1-y^2}$$

Então:

$$\frac{4\dot{y}^2}{1-y^2} = 4\omega_0^2\left[k - y^2\right]$$

$$\dot{y}^2 = \omega_0^2\left[k - y^2\right](1-y^2) = \omega_0^2 k\left[1 - \frac{y^2}{k}\right](1-y^2)$$

Seja agora $\tau = \omega_0 t$ e $z = \frac{y}{\sqrt{k}}$

(Note que $k = \sin^2\frac{\theta_0}{2} \in [0,1]$)

Então $\quad \dot{Y}^2 = \omega_0^2 \kappa \left(1 - \frac{Y^2}{\kappa}\right)(1 - Y^2)$

$$\cancel{\kappa}\, \dot{z}^2 = \omega_0^2 \cancel{\kappa} \left(1 - z^2\right)\left(1 - \kappa z^2\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \omega_0^2$$

Logo:

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1 - z^2)(1 - \kappa z^2) \qquad (0 \leq \kappa \leq 1)$$

$$\begin{cases} Y(0) = \sqrt{\kappa} \quad \Rightarrow \quad z(0) = \dfrac{Y(0)}{\sqrt{\kappa}} = 1 \\[2ex] \left(\dfrac{dz}{d\tau}\right)_{\tau = 0} = 0 \end{cases}$$

$$d\tau = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \kappa z^2)}}$$

$t = 0$ $\quad$ τ θ . $\quad$ $t \to$ cresce

$\theta = \theta_0 \quad \dot{\theta} = 0$ $\quad$ $\theta \to$ diminui

$\hookrightarrow z(0) = 1$ (visto que $Y(0) = \sqrt{\kappa}$ e $z(0) = \frac{Y(0)}{\sqrt{\kappa}}$)

Logo

$$\tau = -\int_1^z \frac{dz'}{\sqrt{(1 - z'^2)(1 - \kappa z'^2)}} =$$

$$= \int_z^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1 - z'^2)(1 - \kappa z'^2)}} = \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1 - z'^2)(1 - \kappa z'^2)}} - \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1 - z'^2)(1 - \kappa z'^2)}}$$

Podemos assim obter τ em função de z e k.

(fazendo estes integrais). Acontece que estes integrais correspondem a funções bem estudadas da físico-matemática.

São os integrais elípticos completo e incompleto de 1ª espécie:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

$$F(\varphi; m) = \int_0^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

É evidente que o movimento do pêndulo não-linear é periódico (ver eq. (*), página 6). O período é $4\times$ o tempo que demora a ir de θ_0 a $\theta = 0$ 

$\theta = 0 \Rightarrow y = z = 0$

$$T = 4 \cdot t(0) = \frac{4\,\tau(0)}{\omega_0} = \frac{4}{\omega_0} K(k)$$

Seja $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ o período do pêndulo linear; então.

$$T = \frac{4\,T_0}{2\pi} K(k)$$

Note que $k = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$; para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (!)

$k = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Como $K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n} + \dots\right]$

(ver Handbook ou Mathematics)

$$K\left(\tfrac{1}{2}\right) \simeq \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \dots\right] = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{16} + \dots\right]$$

Logo $T\left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right) \simeq T_0\left[1 + \frac{1}{16} + \dots\right] \simeq T_0$!!!

(admiravelmente estável!)

3. Importância do oscilador harmónico linear: sistemas com pontos de equilíbrio estáveis:

Consideremos um sistema $d=1$ (por simplicidade).
Caracterizado por uma energia potencial $U(x)$, que tem um mínimo em $x=0$.
Se fizermos uma expansão de Taylor de $U(x)$ obtemos:

$$U(x) = U(0) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right) x^3 + \cdots$$

$\left(x \ll 1\right)$

0 (x_0 é um ponto de equilíbrio)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \quad (x \neq 0 \text{ aumenta a energia})$$

(equilíbrio estável)

$$U(x) \simeq U_0 + \frac{1}{2} k x^2 + \cdots \equiv$$ potencial harmónico como uma boa aproximação

4. Uma "justa" equipartição da energia:

Qual o valor da energia cinética em média? e
Qual o valor da energia potencial? :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_c(t)\, dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2} m \dot{x}^2\, dt$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \underbrace{\frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt}{2\pi/\omega_0}}_{(*)}$$

(*) $\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt$ é indep. de φ

Podemos ∴ pôr $\varphi = 0$, sem perda de generalidade

$$(*) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t)\, dt$$

$\tau = \omega_0 t \qquad d\tau = \omega_0\, dt$

$$(*) = \frac{\cancel{\omega_0}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\tau) \frac{1}{\cancel{\omega_0}}\, d\tau = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2$$

Vejamos agora o energ. potencial média:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{T} \frac{1}{2} K \int_0^T A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} K A^2 = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 = \langle E_c \rangle$$

Esta equipartição de energia é uma característica do oscilador linear harmónico.