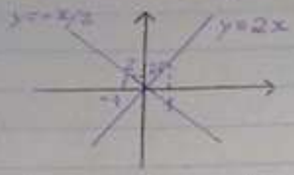
# Aulas VideoConferência - CCGA

## Valores e Vetores Próprios

$$Lv = \lambda v$$

• Seja $T: R^2 \to R^2$ a reflexão na reta $y=2x$. Determine os valores e os vetores próprios de $T$ e a matriz que representa $T$ na forma canónica.




Os únicos vetores que ficam iguais a si próprios quando refletidos nesta reta são os vetores contidos na reta $y=2x$ e na reta perpendicular $y=-x/2$.

Assim, 2 exemplos de vetores próprios serão:

$v(1,2) \qquad w(-1, 1/2)$

Os valores próprios serão 1 e -1 (porque é uma reflexão)

Escrevendo a matriz na qual cada vetor próprio é uma coluna, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2$$

Normalizando:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula:

$$A(bn) = U^{-1} A(c) U$$

$$\Leftrightarrow A(c) = U A U^{-1}$$

A ≡ matriz valores próprios

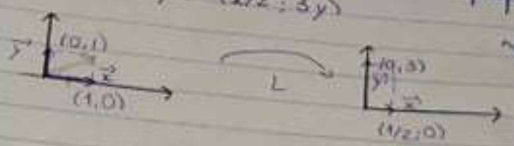
Assim,

$$A(c) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A(c) = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

• Determine os valores e os vetores próprios das transformações:

→ $L(x,y) = (x/2 ; 3y)$




Valores próprios → $(1/2 ; 3)$

Vetores próprios → $(0,1) / (1,0)$

Determinar valores próprios:

1. escrever a matriz com as componentes de $x$ e $y$:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3{,}5\lambda + 1{,}5 = 0$$

↳ Polinómio Característico

$\lambda = 3 \vee \lambda = 0{,}5$

Determinar vetores próprios:

1. Substituir valores próprios na matriz.

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad y = 1 \quad (0,1)$$

$\lambda = 0{,}5$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \quad 2{,}5y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad x = 1 \quad (1,0)$$

Diagonalizar uma matriz

• achar valores próprios.

• aplicar $Ax = \lambda x$:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2 \vee \lambda = 1$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x = 2x$

$x + y = 2y \Leftrightarrow x = y \quad X\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aplicar o mesmo para o outro vetor próprio.

• matriz dos vetores próprios $M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ → normalizados

$$D = M^{-1}AM$$

$$Lv = \lambda v \Leftrightarrow L(Lv) = L(\lambda v) = \lambda(Lv) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

# Complementos do Cálculo e Geometria Analítica (6/2)

## Aula 1

[illegible] da Aula

Equação Diferencial → $x'' + 2\alpha x' + \beta x = f(t)$

→ $f' = f \Rightarrow f = e^t$

→ $x = e^{\lambda t} \Rightarrow x' = \lambda x$

→ $f'' = -\omega^2 f$ → oscilador harmónico

$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

Fórmula de Euler $\boxed{\cos x + i\sin x = e^{ix}}$

Números complexos

$\boxed{z = a + ib}$

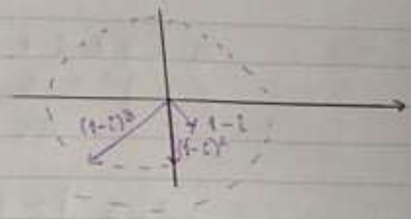
$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ → $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad i^2 = -1$ $\quad \theta$ = argumento (ângulo de $x$ c/a horizontal)

$|x| = \rho$


$\bar{z} = a - ib$ (conjugado)

. Espiral e Circunferência

$(1-i), (1-i)^2, (1-i)^3, \ldots (1-i)^n$ →




Nota: a circunferência só ocorre se a norma for igual a 1.

Exponencial

Para descobrir a igualdade $f' = f$, seja: $\quad f(0) = 1$

$f = a + bt + ct^2 + dt^3 + \ldots \quad f' = b + 2ct + 3dt^2 + \ldots$

Assim, $a + bt + ct^2 + dt^3 + \ldots = b + 2ct + 3dt^2 + \ldots$

Se $t = 0$, $f = f' = 1$, logo $a = 1 \wedge b = 1$

Assim, $2c = b \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ $\quad 3d = c \Leftrightarrow 3d = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = \frac{1}{6}$

Temos, $c_n = \frac{1}{n!}$ → $f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \ldots = e^t$

# Aula 2

(13/2)

## Equação Diferencial de Segunda Ordem Linear Homogénea

$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \Rightarrow x(t) = e^{rt}$

$a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = 0$

$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$

$ar^2 + br + c = 0$

$z^2 + 2\alpha z + \beta \rightarrow$ p.c.

$\beta - \alpha^2 > 0 \rightarrow x(t) = e^{-\alpha t}(a\cos(wt) + b\sin(wt))$

$\alpha^2 - \beta > 0 \rightarrow x(t) = e^{-\alpha t}(a\cosh(wt) + b\sinh(wt))$

$\alpha^2 = \beta \rightarrow e^{-\alpha t}(a + bt)$

Caso 1. 2 raízes $\rightarrow x(t) = \varphi e^{r_1 x} + \gamma e^{r_2 x}$

Caso 2. 1 raízes dupla $\rightarrow x(t) = (\varphi + \gamma t)e^{rt}$

Caso 3. Solução negativa

$r^2 = -w^2 \Leftrightarrow r = \pm iw$

Fórmula de Euler

$x(t) = \varphi e^{iwt} + \gamma e^{-iwt} = \alpha\cos(wt) + \beta\sin(wt)$

## Equação Linear de 2ª Ordem com coeficientes constantes

$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$

a = L
b = R
c = C

**Osciladores** $a\ddot{x} + b\dot{x} + x/c = 0$

- Crítico $\rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{4}{ac}$ $\qquad b^2 = \frac{4a}{c}$
- Subcrítico $\rightarrow \left(\frac{4a}{b^2c}\right) > 1$ $\qquad b^2 < \frac{4a}{c}$
- Supercrítico $\rightarrow \frac{4a}{b^2c} < 1$ $\qquad b^2 > \frac{4a}{c}$

# Notas Salvatore Consentino - Complementos Cálculo e G. Analítica

## 1. Equações Diferenciais Ordinárias

### Partícula Livre

→ aceleração é nula

→ Trajetória $t \to x(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0 \Rightarrow m\,a = 0 \Rightarrow a = 0$$

→ $v(t) = \dot{x}(t)$ $\quad a(t) = \ddot{x}(t)$ $\quad x(t) = x_0 + v_0 t + \cancel{\frac{at^2}{2}}$

$v(t) = v_0 + at$

$x(t) = x_0 + v_0 t$

### Queda Livre

→ $m\ddot{q} = -mg \Rightarrow \ddot{q} = -g$ $\quad q(t)$ denota a altura

A lei horária da queda livre não depende da massa da partícula!

$$\ddot{q} = -g \Rightarrow q(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

### Exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$ raio convergência $= \infty$

$(e^t)' = e^t \Rightarrow \dot{x} = x$ $\quad \dot{x} = \lambda x \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

# Questões Comuns Testes de Salvatore Cosentino

## Equações diferenciais

1º caso → função $x$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ igualada a 0

Exemplo:

$$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0$$

1. conjetura → $x(t)=e^{rt}$
2. calcular $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ → $\dot{x}(t)=re^{rt}$ e $\ddot{x}(t)=r^2e^{rt}$
3. Substituir estas expressões na equação dada:
$$r^2e^{rt}+2(re^{rt})+2e^{rt}=0$$
4. Cortar $e^{rt}$ → $r^2+2r+2=0$
5. Fórmula resolvente
$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow r=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times2}}{2} \Leftrightarrow r=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

Nota!

Como a raiz é de um número negativo, a solução não será real. Introduzimos nºs imaginários:

$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4i^2}}{2} \Leftrightarrow r=-1+i \vee r=-1-i$$

6. como há 2 valores para $x$, $x(t)$ será:
$$x(t)=a e^{(-1+i)t}+b e^{(-1-i)t}$$

7. Fórmula de Euler → $e^{i\omega}=\cos\omega+i\,\text{sen}\,\omega$
$$x(t)=ae^{-t}e^{ti}+be^{-t}e^{-it}$$
$$\Leftrightarrow x(t)=e^{-t}(ae^{it}+be^{-it})$$
$$\Leftrightarrow x(t)=e^{-t}(a(\cos t+i\,\text{sen}\,t)+b(\cos(-t)+i\,\text{sen}(-t)))$$
$$\Leftrightarrow x(t)=e^{-t}(a\cos t+ai\,\text{sen}\,t+b\cos t-bi\,\text{sen}\,t)$$
$$\Leftrightarrow x(t)=e^{-t}(\cos t\,(a+b)+\text{sen}\,t\,(ai-bi))$$
$$\Leftrightarrow x(t)=e^{-t}\,c\cos t+d\,\text{sen}\,t$$

Se derem condições iniciais, como $x(0)=-1$ e $\dot{x}(0)=1$, calculamos a 1ª derivada e achamos os valores de c e d:

$$\dot{x}(0)=e^{-t}(-c\cos t-d\,\text{sen}\,t-c\,\text{sen}\,t+d\cos t)$$
$$\Rightarrow c=-1 \wedge d=0$$
$$x(t)=-e^{-t}\cos t$$

2º caso → Função não homogénia com $x, \dot{x}$ e $\ddot{x}$

Exemplo:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 25t + 2e^{-t}$$

1. Conjetura → $x(t) = at + be^{-t} + C$

$$\dot{x}(t) = a - be^{-t}$$
$$\ddot{x}(t) = be^{-t}$$

$$be^{-t} + 4a - 4be^{-t} + 5at + 5be^{-t} + 5C = 25t + 2e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow 2e^{-t}.b + 4a + 5C = 2e^{-t} - 5at + 25t$$
$$\Leftrightarrow 2be^{-t} + 5at + 4a + 5C = 2e^{-t} + 25t$$

Temos:

$$2b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \quad 5a = 25 \Leftrightarrow a = 5$$
$$4a + 5C = 0 \Leftrightarrow 20 = -5C \Leftrightarrow C = -4$$

$$x(t) = 5t + e^{-t} - 4$$

Exemplo:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$$

Conjetura → $x(t) = ate^{-t}$

$$\dot{x}(t) = ae^{-t} - ate^{-t}$$
$$\ddot{x}(t) = -ae^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t} = -2ae^{-t} + ate^{-t}$$

$$\cancel{-2ae^{-t}} + ate^{-t} + \cancel{2ae^{-t}} - \cancel{2ate^{-t}} + \cancel{2ate^{-t}} = e^{-t}$$
$$\Leftrightarrow at = 1$$

$$x(t) = e^{-t}$$

Nota: Encontrar eq. diferencial para as soluções a e b.

Ex. $a(t) = e^{t}$ $\qquad b(t) = e^{-3t}$

$\dot{a}(t) = e^{t}$ $\qquad \dot{b}(t) = -3e^{-3t}$

$\ddot{a}(t) = e^{t}$ $\qquad \ddot{b}(t) = 9e^{-3t}$

$$\varphi\ddot{a} + \beta\dot{a} + \theta a = 0 \Leftrightarrow \varphi e^{t} + \beta e^{t} + \theta e^{t} = 0 \Leftrightarrow \varphi + \beta + \theta = 0$$
$$\varphi\ddot{b} + \beta\dot{b} + \theta b = 0 \Leftrightarrow \varphi 9e^{-3t} + \beta(-3)e^{-3t} + \theta e^{-3t} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-3t}(9\varphi - 3\beta + \theta) = 0 \Leftrightarrow 9\varphi - 3\beta + \theta = 0$$

Se $\varphi = 1$, temos: $-3\beta + \theta = -9$ $\quad$ Resolvendo: $\beta = 2$ e $\theta = -3$

$\beta + \theta = -1$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

3º caso → equação com $x$, $\ddot{x}$ igualada a 0

Exemplo: $\ddot{x} + 9x = 0$

$\Rightarrow x(t) = a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)$ $\qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$

$\Leftrightarrow x(t) = A\cos(\omega t - \beta)$ $\qquad \beta = \arctan(b/a)$, $A = \sqrt{a^2+b^2}$

$\ddot{x} = -9x \Leftrightarrow \ddot{x} = -3^2 x$

$\Rightarrow x(t) = a\cos(3t) + b\,\mathrm{sen}(3t)$

4º caso → equação com $x$ e $\ddot{x}$ igualda a uma função

1. $\ddot{x} - x = e^{-t}$

Conjetura → $x(t) = at\,e^{-t}$

$\dot{x}(t) = ae^{-t} - ate^{-t}$

$\ddot{x}(t) = -ae^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t} \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -2ae^{-t} + ate^{-t}$

$-2ae^{-t} + \cancel{ate^{-t}} - \cancel{ate^{-t}} = e^{-t}$

$\Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = -1/2$ $\qquad x(t) = -\dfrac{te^{-t}}{2}$

2. $\ddot{x} + x = \cos(2t)$

Conjetura → $x(t) = at\,\mathrm{sen}(2t)$ ou $x(t) = at\cos(2t)$ ou $x(t) = a\cos(2t)$

. Se $x(t) = a\cos(2t)$,

$\dot{x}(t) = -2a\,\mathrm{sen}(2t)$ $\qquad \ddot{x}(t) = -4a\cos(2t)$

$-4a\cos(2t) + a\cos(2t) = \cos(2t)$

$\Leftrightarrow -4a + a = 1 \Leftrightarrow a = -1/3$ $\qquad x(t) = -\cos(2t)/3$

3. $\ddot{x} + x = \sin t$

Conjetura → $x(t) = at\,\mathrm{sen}t$ ou $x(t) = at\cos t$ ou $x(t) = a\,\mathrm{sen}t$

. Se $x(t) = at\cos t$,

$\dot{x}(t) = a\cos t - at\,\mathrm{sen}t$

$\ddot{x}(t) = -a\,\mathrm{sen}t - a\,\mathrm{sen}t - at\cos t \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -2a\,\mathrm{sen}t - at\cos t$

$-2a\,\mathrm{sen}t - \cancel{at\cos t} + \cancel{at\cos t} = \sin t$

$\Leftrightarrow -2a\,\mathrm{sen}t = \sin t \Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = -1/2$

$x(t) = -\dfrac{t\cos t}{2}$

4. $\ddot{x}+4x = \sin(2t)$

Conjetura → $x(t)= at\cos(2t)$ ou $x(t)= at\,\text{sen}(2t)$ ou $x(t)=\sin(2t)\times a$

Se $x(t)= at\cos(2t)$,

$\dot{x}(t)= a\cos(2t) - 2at\,\text{sen}(2t)$

$\ddot{x}(t)= -2a\,\text{sen}(2t) - 2a\,\text{sen}(2t) - 4at\cos(2t)$

$\ddot{x}+4x = \sin(2t) \Leftrightarrow -4a\,\text{sen}(2t) - \cancel{4at\cos(2t)} + \cancel{4at\cos(2t)} = \sin(2t)$

$\Leftrightarrow -4a\,\text{sen}(2t) = \sin(2t)$

$\Leftrightarrow -4a = 1 \Leftrightarrow a = -1/4$

$x(t) = -\dfrac{t\cos(2t)}{4}$

5. $\ddot{x}+9x = \cos(3t)$

Conjetura → $x(t)= at\cos(3t)$ ou $x(t)= at\,\text{sen}(3t)$ ou $x(t)=a\cos(3t)$

Se $x(t) = at\,\text{sen}(3t)$,

$\dot{x}(t) = a\,\text{sen}(3t) + 3at\cos(3t)$

$\ddot{x}(t) = 3a\cos(3t) + 3a\cos(3t) - 9at\,\text{sen}(3t)$

$6a\cos(3t) - \cancel{9at\,\text{sen}(3t)} + \cancel{9at\,\text{sen}(3t)} = \cos(3t)$

$\Leftrightarrow 6a\cos(3t) = \cos(3t)$

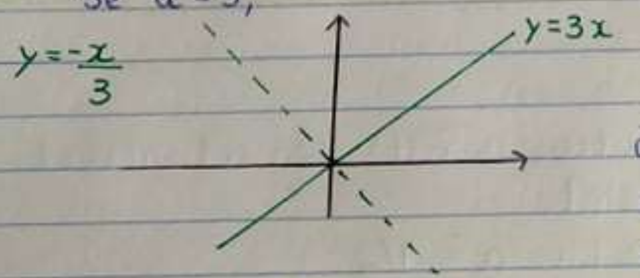
$\Leftrightarrow 6a = 1 \Leftrightarrow a = 1/6$ $\qquad x(t) = \dfrac{t\,\text{sen}(3t)}{6}$

## Reflexão R e seus valores e vetores próprios:

Exemplo: $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a reflexão na reta $y = ax$. Determine os valores e vetores próprios de R.

Sendo uma reflexão, qualquer que seja o valor de a, os valores próprios serão sempre -1 e 1. $\lambda = \pm 1$

Se $a = 3$,




Apenas os vetores pertencentes à reta $y = 3x$ e à sua perpendicular preservam a direção quando refletidos sob $y = 3x$, ou seja, quando refletidos sob esta reta, tornam-se múltiplos de si mesmos. Logo, os vetores próprios são os vetores que coincidem com $y = 3x$ e a sua perpendicular, $y = -x/3$.

Assim, se $x = 1$, temos $(1, 3)$. Se $x = 3$, $(3, -1)$

## Operadores

1. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (-x, y, z)$
Existe uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprio de T?

Seja A a matriz que representa T em $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(x) = -x + 0y + 0z$
$T(y) = 0x + y + 0z$
$T(z) = 0x + 0y + z$

Sabemos que a base existe se T for simétrico, ou seja, se a matriz A for simétrica, isto é, se $A^T = A$

Como $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$, A e T são simétricos, logo essa base existe.

Determinemos os valores próprios:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 0] = 0$$
$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -1 + 2\lambda - \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

Os valores próprios são 1 e -1.
Os vetores próprios unitários são i (com valor próprio -1) e j, k (ambos com valor próprio 1).

2. Seja V o espaço linear dos polinómios de grau $\leq 2$ $f(x) = a + bx + cx^2$ na variável real $x \in \mathbb{R}$. Seja $D: V \to V$ o operador derivação definido por $(Df)(x) = f'(x)$. Determine a matriz que representa D numa base de V e os valores próprios de D.

Matriz Original

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a = a + 0bx + 0cx^2$
$b = 0a + bx + 0cx^2$
$c = 0a + 0bx + cx^2$

Matriz de D

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$D(a) = 0a + 0bt + 0ct^2$
$D(b) = b + 0t + 0t^2$
$D(c) = 0 + 2ct + 0t^2$

O único valor próprio deste operador é 0 (vetor próprio a).

3. Seja E o espaço linear real das funções $f: [0,\pi] \to [0,\pi]$ infinitamente diferenciáveis e tais que $f(0) = f(\pi) = 0$, e seja $D: E \to E$ o operador linear $(Df)(t) = f'(t)$.
Determine valores e vetores próprios de $D^2$.

Para $D^2$ temos:

$$(D^2 f)(t) = \lambda f \Rightarrow f''(t) = \lambda f$$
$$\lambda = -w^2$$
$$f(t) = a\cos(wt) + b\sin(wt)$$
$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a\cos 0 + b\sin 0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$
$$f(t) = b\sin(wt)$$
$$f(\pi) = 0 \Leftrightarrow b\sin(\pi w) = 0 \Rightarrow w = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Assim, $\lambda = -w^2$ $\quad f(t) = b\sin(wt)$, $w = 1, 2, 3, \ldots$

4. Sejam A e B duas matrizes reais $n \times n$. Prove ou refute:
Se A e AB são ortogonais, B é ortogonal.

Ser ortogonal implica $\rightarrow A^T = A^{-1}$ $\quad (AB)^T = (AB)^{-1}$

$$(AB)^{-1} = (AB)^T \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = B^T A^T \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = B^T A^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} = B^T \underbrace{A^{-1}A}_{I}$$
$$\Rightarrow B^{-1} = B^T \qquad \text{Sim, B é ortogonal}$$

5. Seja $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação unitária do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canónico.
A composição $A^2$ é unitária?
A inversa de A é unitária? Justifique.

$A^2$ e $A^{-1}$ também são unitárias ($A^* = \overline{A}^T = A^{-1}$) pois o conjunto das transformações unitárias forma um grupo.

6. Considere-se a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (y,x)$. Determine a matriz $T$ relativamente à base formada pelos vetores $u=(2,1)$ e $v=(1,1)$.

$T(bn) = P^{-1}\, T(\text{canónica})\, P$

$T$ = matriz de transformação

$P$ = matriz com vetores da nova base

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} T(x) = 0x + y \\ T(y) = x + 0y \end{matrix} \qquad T(bn) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(bn) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Seja $C^\infty(\mathbb{R})$ o espaço linear real das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, e seja $D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $(Df)(x) = f'(x)$.
Determine valores e vetores próprios de $D$ e de $D^2$.

Para $D$, $f'(t) = \lambda f(t) \Rightarrow f(t) = e^{\lambda t}$

Para $D^2$, $f''(t) = \lambda f(t) \Rightarrow \lambda = -\omega^2$

Se $f(t) = e^{xt}$, $f'(t) = x e^{xt}$, $f''(t) = x^2 e^{xt}$

$x^2 = \lambda \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\lambda} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\omega}\, t$

$f(t) = a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}(\omega t) = A\, e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$

Os valores próprios são todo o $\lambda \in C^\infty$.

8. Seja $U: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear unitário do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canónico.
Prove que os valores próprios de $U$ satisfazem $|\lambda| = 1$

$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle \Leftrightarrow \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle v, v \rangle$

$\Leftrightarrow \langle \lambda \bar{\lambda} v, v \rangle = \langle v, v \rangle$

$\Leftrightarrow \lambda\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle$

$\Leftrightarrow \lambda\bar{\lambda} = 1 \Leftrightarrow |\lambda^2| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ c.q.d.

$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

9. Seja V o espaço linear das funções diferenciáveis $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, e seja $T: V \to V$ o operador linear definido por $g = Tf$ com $g(x) = x f'(x)$ se $x \in (0,1)$. Todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de T.
Determine um vetor próprio correspondente ao valor próprio $\lambda$.

$g = Tf \Rightarrow (Tf)(x) = x f'(x)$

Calculando o vetor próprio, $x f'(t) = \lambda f(t) \Rightarrow f(t) = x^\lambda$ ou $e^{\lambda x}$

$$x f'(x) = x \lambda e^{\lambda x}$$
$$x f'(x) = x \lambda x^{\lambda-1} = \lambda x^\lambda = \lambda f(x)$$

Assim, o vetor próprio é $f(x) = x^\lambda$

10. Determine todos os valores reais $\lambda$ tais que $f''(x) = \lambda f(x)$ admita soluções não triviais e $f(0) = f(\pi) = 0$

$\lambda = -\omega^2$, $\omega = 1, 2, 3, \dots$

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$f(0) = a\cos 0 + b\,\mathrm{sen}\,0 \Rightarrow a = 0$$
$$f(t) = b\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

11. Seja $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação linear hermítica, ou seja, tal que $\langle Tz, z' \rangle = \langle z, Tz' \rangle$ por todos os $z$ e $z' \in \mathbb{C}^n$.
Mostre que $\langle Tz, z \rangle$ é real para todo o $z \in \mathbb{C}^n$.

Pela simetria hermítica do produto interno, $\overline{\langle Tz, z \rangle} = \langle z, Tz \rangle$.
Sendo T hermítica, $\langle z, Tz \rangle = \langle Tz, z \rangle$
Assim, $\overline{\langle Tz, z \rangle} = \langle Tz, z \rangle$. Ou seja, $\langle Tz, z \rangle$ é real.

12. Seja $L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear hermitiano (auto-adjunto). Prove que os valores próprios de L são reais.

Se $L^* = \overline{L}^T = L$ e $Lv = \lambda v$, $v \neq 0$,

$$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Lv, v \rangle = \langle v, Lv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

$$\langle \lambda v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle$$
$$\Rightarrow \lambda \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $\lambda = \bar{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

13. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x+2y, 2x+5y)$.
Existe uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$ formada por vetores próprios de T? Justifique.

Esta base apenas existe se T for simétrico, ou seja, se a matriz A que o representa obedecer a $A^T = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} T(x) = 2x+2y \\ T(y) = 2x+5y \end{matrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Como $A = A^T$, esta base existe.
Calculemos os vetores e valores próprios de T:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \lor \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x+2y = 6x \Leftrightarrow 2y = 4x \Leftrightarrow y = 2x \\ 2x+5y = 6y \Leftrightarrow 2x = y \end{matrix} \quad \text{se } x=1, (1,2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x+2y = x \Leftrightarrow 2y = -x \Leftrightarrow y = -x/2 \\ 2x+5y = y \Leftrightarrow 2x = -4y \Leftrightarrow x = -2y \end{matrix} \quad \text{Se } x=2, (2,-1)$$

Valores/Vetores próprios $\to$ $6 \equiv \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$ $\quad 1 \equiv \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$

14. Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tv = 2v$ e $Tw = -3w$, onde $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $w = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Diga se T é simétrico ou hemi-simétrico.

Sabemos que os valores próprios de T são 2 e -3.
Sabemos que v e w são vetores próprios de T.
Teorema Espetral
$\to$ Todo o operador normal admite uma base de vetores próprios ortogonais. Nesta base, o operador é diagonal e os elementos da diagonal correspondem aos valores próprios.
Assim, a matriz que representa T é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A$

Como $A = A^T$, o operador T é simétrico.

15. Seja $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = \sqrt{3}$. Determine a matriz que representa $R$ na base canónica.

~Vamos determinar os vetores próprios de $R$:

$(1, \sqrt{3})$ $(\sqrt{3}, -1)$ $n = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$


Matriz dos vetores próprios: $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = U$

$A(bn) = U^{-1} A(c) U \Leftrightarrow A(c) = UAU^{-1}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to$ matriz valores próprios da reflexão

$U^{-1} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$A(c) = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A(c) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Exemplos:

Transformação Linear $\to$ hermítica: $A(z) = z$

$A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ $\to$ hemi-hermítica: $B(z) = iz$

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\to$ ortogonal: $A(x, y) = (x, y)$ ou $(x; y)$

$A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ $\to$ unitária: $B(z, w) = (z, w)$ ou $(iz, iw)$

Operador linear $N: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ não hermítico, não hemi-hermítico e não unitário $\to N = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$