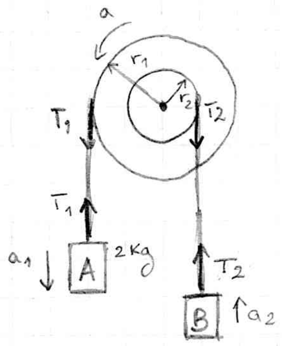
Teste Mecânica Newtoniana

Nome : Carlos Miguel Passos Ferreira
Ano : 1
Curso : MIEFIS
Nº : A92846

Pergunta 7/8



- $I = 1{,}7 \ Kg.m^2$
- $r_1 = 0{,}5 \ (m)$
- $r_2 = 0{,}2 \ (m)$
- $m_A = 2 \ (Kg)$
- $m_B = 1{,}8 \ (Kg)$

$\boxed{T_1 = ?}$

$\boxed{T_2 = ?}$

$\boxed{\alpha = ?}$

Força gravítica

$$\begin{cases} Fr_A = P_1 - T_1 \\ Fr_B = P_2 - T_2 \\ I.\alpha = \tau = T_1.r_1 - T_2.r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_A.a_A + T_1 = m_A.g \\ -m_B.a_B + T_2 = m_B.g \\ I.\alpha - T_1.r_1 + T_2.r_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_A.\alpha.r_1 + T_1 = m_A.g \\ -m_B.\alpha.r_2 + T_2 = m_B.g \\ I.\alpha - T_1.r_1 + T_2.r_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + T_1 = 2.g \\ -0{,}36.\alpha + T_2 = 1{,}8.g \\ 1{,}7\times\alpha - T_1\times 0{,}5 + T_2 \times 0{,}2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = 2.g - \alpha \\ T_2 = 1{,}8.g + 0{,}36.\alpha \\ 1{,}7.\alpha - (2.g-\alpha).0{,}5 + (1{,}8.g + 0{,}36.\alpha).0{,}2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 \simeq 16{,}9 \ N \\ T_2 \simeq 18{,}6 \ N \\ \alpha \simeq 2{,}74 \ rad/s \end{cases}$$ Resposta

Pergunta 1/2

→ obter equação do movimento do $\theta(t)$

- $l = 0{,}4 \ (m)$
- $m = 0{,}5 \ Kg$
- $t = 0 \Rightarrow \theta(0) = 0{,}1 \ (rad)$
  - $\dot{\theta}(0) = -0{,}02 \ (rad/s)$

- $\theta(t) = \theta_0 . \text{sen}(\omega_0.t + \varphi)$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}4}} \simeq 4{,}95 \ (rad/s)$

equação diferencial : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\theta = 0$ (para pequenos ângulos $\text{sen}\theta \approx \theta$)

Assim, chegamos a $\theta(t) = a.\cos(\omega_0.t) + b.\text{sen}(\omega_0.t) =$

$= a.\cos(4{,}95.t) + b.\text{sen}(4{,}95.t)$

Através das condições iniciais:

- $\theta(0) = 0{,}1 \Leftrightarrow a \cdot \cos(4{,}95 \cdot 0) + b \cdot \text{sen}(4{,}95 \cdot 0) = 0{,}1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 0{,}1}}$

- $\dot{\theta}(t) = -4{,}95 \cdot a \cdot \text{sen}(4{,}95 \cdot t) + 4{,}95 \cdot b \cdot \cos(4{,}95 \cdot t)$

  $\hookrightarrow \theta(0) = -4{,}95 \cdot a \cdot \text{sen}(4{,}95 \times 0) + 4{,}95 \times b \times \cos(4{,}95 \times 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}02 = 4{,}95 \cdot b \Leftrightarrow b = -0{,}04$

Assim sendo, temos que a equação do movimento do pêndulo $\theta(t)$ será:

$$\theta(t) = 0{,}1 \cdot \cos(4{,}95 \cdot t) - 0{,}04 \cdot \text{sen}(4{,}95 \cdot t) \quad (\text{rad})$$

$\Uparrow$

<u>Resposta</u>

<u>Pergunta 3/4</u>

- $d_{esfera} = 3 \times 10^{-3}$ (m)
- $m_{esfera} = 5 \times 10^{-4}$ (Kg)
- $K_{mola} = 5 \times 10^{-2}$ (N/m)
- $\eta_{água} = 1 \times 10^{-3}$ (N . s . m^{-2})
- $n_{oscilações} = \,?\ \leftarrow A = \frac{1}{2} \cdot A_0$
- $F_a = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$

  $\hookrightarrow$ velocidade esfera

  raio esfera

  $\hookrightarrow r = \frac{3 \times 10^{-3}}{2} = 1{,}5 \times 10^{-3}$ (m)

- $F_a = 6 \times \pi \times 1 \times 10^{-3} \times 1{,}5 \times 10^{-3} \times v =$

  $= \underbrace{2{,}83 \times 10^{-5}}_{b} \cdot v$ (N)

<u>equação diferencial da oscilação:</u>

$m \cdot \ddot{x} = -b \cdot \dot{x} - K \cdot x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{b}{m} \cdot \dot{x} - \frac{K}{m} \cdot x$

$\Downarrow$

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-4}}} \cong 10$ (rad/s)

- $\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2 \cdot m \cdot \omega_0}\right)^2} \simeq 10$ rad s^{-1}

$$x(t) = A \cdot e^{-0{,}0283 \cdot t} \cdot \cos(10 \cdot t + \varphi)$$

- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}$ (s)

Seja $\underline{n}$ o número de oscilações:

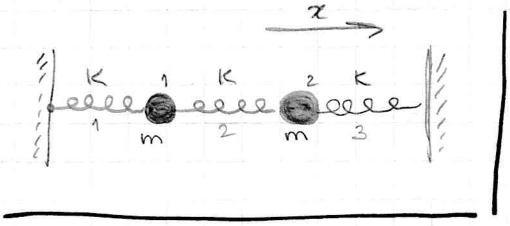
- $x(n.T) = \frac{x(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{x(n.T)}{x(0)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\cancel{A} \cdot e^{-0{,}0283 \cdot n \cdot T}}{\cancel{A}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}0283 \cdot n \cdot T = \ln(2) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(2)}{0{,}0283 \times \frac{\pi}{5}} \cong \underline{\underline{39 \text{ oscilações}}}$

$\Uparrow$

$\boxed{\text{Resposta}}$

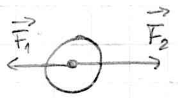
Pergunta 5 /6



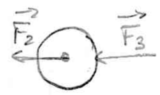
a) equações diferenciais que determinam o movimento ~~da~~ das duas massas

- $m_1 = m_2 = m$
- $K_1 = K_2 = K_3 = K$

Considerando o sentido positivo dos deslocamentos para a direita, podemos representar as forças da seguinte forma:



$F_1 = -K \cdot x_1$



$F_3 = -K \cdot x_2$

Como a força F_2 afeta os dois movimentos e considerando que $x_2 \neq x_1$, ou seja, há deslocamento:

$$F_2 = K \cdot |x_2 - x_1|$$

Assim sendo, pela segunda lei de Newton:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_1 = -K \cdot x_1 + K \cdot (x_2 - x_1) \\ m \cdot \ddot{x}_2 = -K \cdot x_2 - K \cdot (x_2 - x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{x}_1 + K \cdot x_1 - K \cdot (x_2 - x_1) = 0 \\ m \cdot \ddot{x}_2 + K \cdot x_2 + K \cdot (x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{x}_1 + 2 \cdot x_1 \cdot K - K \cdot x_2 = 0 \\ m \cdot \ddot{x}_2 + 2 \cdot x_2 \cdot K - K \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Bigg\} \ \underline{\text{Resposta}}$$

b) Através da alínea anterior temos que, a solução das equações diferenciais acima será:

- $x_1 = A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\alpha^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}$
- $x_2 = B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\alpha^2 \cdot B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}$

Substituindo temos que:

$$\begin{cases} -\alpha^2 \cdot A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} - \frac{K}{m} \cdot (B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} - A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}) + \frac{K}{m} \cdot A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} = 0 \\ -\alpha^2 \cdot B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} + \frac{K}{m} \cdot (B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} - A \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t}) + \frac{K}{m} \cdot B \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\alpha^2 + \frac{2 \cdot K}{m}\right) \cdot A - \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \left(-\alpha^2 + \frac{2 \cdot K}{m}\right) \cdot B - \frac{K}{m} \cdot A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\alpha^2 - \frac{2 \cdot K}{m}\right) \cdot A + \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \frac{K}{m} \cdot A + \left(\alpha^2 - \frac{2 \cdot K}{m}\right) \cdot B = 0 \end{cases}$$

Como não pretendemos que esta equação tenha uma solução não trivial, a matriz deve ser singular, pelo que o seu determinante deve ser zero:

$$\det \begin{vmatrix} \left(\alpha^2 - \frac{2K}{m}\right) & \frac{K}{m} \\ \frac{K}{m} & \left(\alpha^2 - \frac{2.K}{m}\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\alpha^2 - \frac{2.K}{m}\right) \cdot \left(\alpha^2 - \frac{2.K}{m}\right) - \left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha^2 - \frac{2.K}{m}\right)^2 = \left(\frac{K}{m}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{2.K}{m} = \pm \frac{K}{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^2 = \frac{3.K}{m} \vee \alpha_2^2 = \frac{K}{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \sqrt{\frac{3K}{m}} \vee \alpha_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

↳ Se $\alpha_1 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$:

$$\bullet \begin{cases} \left(\frac{3.K}{m} - \frac{2.K}{m}\right) \cdot A + \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{m} \cdot A + \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

Se $\boxed{A = -B}$, então movem-se em oposição

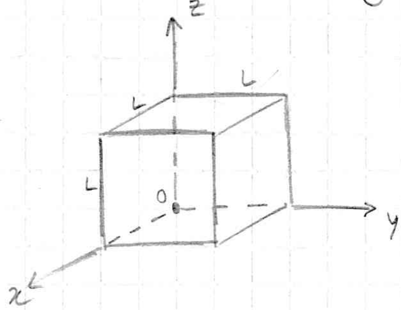
↳ Se $\alpha_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$:

$$\bullet \begin{cases} \left[\left(\frac{K}{m}\right) - \frac{2K}{m}\right] \cdot A + \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{K}{m} \cdot A + \frac{K}{m} \cdot B = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = B}$$

Se $\boxed{A = B}$, então movem-se em conjunto de um lado para o outro.

Pergunta 9/10 :

Pretendemos calcular a matriz de inércia do cubo homogéneo de aresta L e massa m



massa volumétrica

$$\bullet \; I_{xx} = \rho \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L (y^2 + z^2)\, dz =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot b^5 = \frac{2}{3} \cdot M \cdot b^2$$

$$\bullet \; I_{xy} = -\rho \int_0^L x\, dx \int_0^L y\, dy \int_0^L dz =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot b^5 = -\frac{1}{4} \cdot M \cdot b^2$$

Sabemos também, pela Teorema dos eixos perpendiculares:

- $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$
- $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$

Assim, a matriz de inércia do cubo homogêneo é:

$$\underbrace{I = M \cdot b^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} (Kg \cdot m^2)}_{\text{Resposta}}$$