Cálculo EC - aula 10

Equações diferenciais separáveis:

São equações que se podem escrever na forma:

$$f(y(x))\, y'(x) = g(x)$$

Método de resolução:

1) Primitivamos ambos os membros da equação e obtemos

$$F(y(x)) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

onde $F(y)$ é uma primitiva de $f(y)$ e $G(x)$ é uma primitiva de $g(x)$

2) Resolvemos (se possível) a equação anterior em ordem a $y(x)$:

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

e obtemos a solução geral da equação.

49. Resolva as seguintes equações diferenciais.

(a) $y'(x) = x\cos^2 y(x), \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(b) $y'(x) = \frac{y(x)^2+1}{2xy(x)}, \quad x > 0,\ y < 0$

(c) $y'(x) = -xe^{-y(x)}$

a

$$y'(x) = x\cos^2(y(x)), \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(y(x))} y'(x) = x. \qquad \text{Primitivando:}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos^2(y(x))} y'(x)\,dx = \int x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \tan(y(x)) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Leftrightarrow y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$C \in \mathbb{R}$

CA: $\int \frac{1}{\cos^2(y(x))} y'(x)\,dx$ $\qquad z = y(x)$, $dz = y'(x)\,dx$

$$\| $$

$$\int \frac{1}{\cos^2(z)}\,dz = \tan(z) + C = \tan(y(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Método alternativo de resolução:

$$y' = x\cos^2(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\cos^2(y) \iff \frac{1}{\cos^2(y)}\,dy = x\,dx$$

Primitivando:

$$\int \frac{1}{\cos^2(y)}\,dy = \int x\,dx \iff \tan(y) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}\,,\quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

$$\iff y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}\right)$$

Solução geral:

$$y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}\right),\quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

b

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 + 1}{2x\,y(x)}\,,\quad x>0\,,\quad y<0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{2xy} \iff \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\iff \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \iff \ln(y^2+1) = \ln(|x|) + \mathcal{C}\,,\quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

$$\iff \ln(y^2+1) = \ln(x) + \mathcal{C}\,,\quad \text{pois } x>0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+1 = e^{\ln(x)+C} \quad \Leftrightarrow \quad y^2+1 = e^{C}x \qquad k = e^{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2+1 = kx, \quad k \in \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = kx-1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{kx-1} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\sqrt{kx-1}, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Solução geral: $y(x) = -\sqrt{kx-1}, \quad k \in \mathbb{R}^+$

c) $\quad y'(x) = -x\, e^{-y(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = -x\, e^{-y} \quad \Leftrightarrow \quad e^{y}\, dy = -x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{y}\, dy = \int -x\, dx \quad \Leftrightarrow \quad e^{y} = -\frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(-\frac{x^2}{2} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solução geral: $y(x) = \ln\left(-\frac{x^2}{2} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}$

50. Determine a solução dos seguintes problemas com condição inicial:

(a) $\begin{cases} r'(\theta) = -\dfrac{(r(\theta)^2+1)\cos(\theta)}{2r(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}, & \theta \in]0,\pi[,\ r>0 \\ r(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy'(x) + y(x) = 0, & x>0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 1, & x>0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\cos x \operatorname{sen} x}{y(x)}, & y<0 \\ y(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$

a

$$R' = \frac{-(R^2+1)\cos\theta}{2R\operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow \frac{dR}{d\theta} = -\frac{(R^2+1)\cos\theta}{2R\operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R}{R^2+1}\,dR = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{2R}{R^2+1}\,dR = \int -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln(R^2+1) = -\ln|\operatorname{sen}\theta| + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln(R^2+1) = -\ln(\operatorname{sen}\theta) + \varphi, \quad \text{pois } \theta \in]0,\pi[$$

$$\Leftrightarrow R^2+1 = \left(e^{\ln(\operatorname{sen}\theta)}\right)^{-1} \cdot e^{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow R^2+1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 = \frac{k}{\operatorname{sen}\theta} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{k}{\operatorname{sen}\theta} - 1}\ , \quad \text{pois } R>0,\ k \in \mathbb{R}^+$$

$$R(\pi/2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{k-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k-1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

Solução do PCI: $R(\theta) = \sqrt{\dfrac{2}{\operatorname{sen}\theta} - 1}$

b) $\begin{cases} x\, y'(x) + y(x) = 0\ , & x>0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$x\, y'(x) + y(x) = 0$ linear e separável

- $x y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = -\frac{1}{x}\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = -\ln(x) + \mathcal{C}\ , \quad \text{pois } x>0$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{-\ln(x)} \cdot e^{\mathcal{C}} \quad \Leftrightarrow \quad |y| = \frac{k}{x}\ , \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$y(1) = 2 > 0 \Rightarrow y = \dfrac{k}{x}, \; k \in \mathbb{R}^+$

$y(1) = 2 \Leftrightarrow 2 = k$

Solução do PCI: $y(x) = \dfrac{2}{x}$

- $x y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{x} y = 0$

$p(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad P(x) = \ln(x)$ $\quad \mu(x) = e^{\ln(x)} = x$

Multiplicando pelo fator integrante:

$x y' + y = 0 \Leftrightarrow (x y)' = 0$

(observe que recuperamos a eq. original)

$\Leftrightarrow x y = C, \; C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \dfrac{C}{x}, \; C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2$

Solução do PCI: $y(x) = \dfrac{2}{x}$

c) $$\begin{cases} y' - \frac{2}{x} y = 1, & x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y' - \frac{2}{x} y = 1$$

$$p(x) = -\frac{2}{x} \qquad P(x) = -2\ln(x) \qquad \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando pelo fator integrante:

$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} y\right)' = \frac{1}{x^2}$$

Primitivando:

$$\frac{1}{x^2} y = \int x^{-2}\, dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = \frac{x^{-1}}{-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow y = -x + C x^2$$

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = -1 + C \Leftrightarrow C = 1$$

Solução do PCI: $y(x) = -x + x^2$

d

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\cos x \,\operatorname{sen} x}{y(x)}, & y<0 \\ y(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y'(x) = -\frac{\cos x \,\operatorname{sen} x}{y(x)} \Leftrightarrow y\,dy = -\operatorname{sen} x \cos x \,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int y\,dy = \int \underbrace{-\operatorname{sen} x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{u} \,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{\cos^2 x}{2} + C, \; C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 = \cos^2 x + k, \; k \in \mathbb{R}$$

$$(k = 2C)$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt{\cos^2 x + k}, \; k \in \mathbb{R}, \text{ pois } y<0$$

$$y(0) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{1+k} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \Leftrightarrow 1+k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

Solução do PCI: $y(x) = -\sqrt{\cos^2 x + 1}$

51. Escreva uma equação diferencial correspondente à situação descrita e indique se a equação obtida é linear ou separável.

(a) Ao longo do tempo, a temperatura $T(t)$ de um objecto varia a uma taxa proporcional à diferença entre essa temperatura e a temperatura T_a do meio ambiante (suposta constante).

(b) A taxa de variação no instante t do tamanho de uma população é proporcional ao quadrado desse tamanho no instante t.

a) $T'(t) = k\,(T(t) - T_a)$, T_a constante, k constante

- $\dfrac{T'(t)}{T(t) - T_a} = k \longrightarrow$ separável

- $T'(t) - kT(t) = -kT_a \longrightarrow$ linear

b) $p'(t) = k\,p^2(t) \longrightarrow$ separável k constante

Polinómio de Taylor

Polinómio de Taylor de f de ordem n em torno de $x = x_0$:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Notas:

- $n = 1$. $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\longrightarrow$ Reta tangente ao gráfico de f em $x = x_0$
- $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Fórmula de Taylor - Young

- $f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \, \varepsilon(x)$, com $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Fórmula de Taylor - Lagrange

- $f(x) = P(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, para algum c entre x_0 e x.

$\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)$

$\to$ $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ Teorema de Lagrange.

38. Para cada função $f(x)$, determine o polinómio de Taylor e escreve as fórmulas de Taylor-Young e de Taylor-Lagrange à ordem dada e em volta do ponto x_0 dado.

$a)$ $f(x) = \cos x$, ordem 2, $x_0 = 0$
$b)$ $f(x) = \sqrt{x}$, ordem 1, $x_0 = 4$
$c)$ $f(x) = \operatorname{tg} x$, ordem 3, $x_0 = 0$

a) $f(x) = \cos(x)$, ordem 2, $x_0 = 0$

$f(x) = \cos(x)$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\quad f''(0) = -1$

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Taylor-Young: $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ com $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$

Taylor-Lagrange: $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\operatorname{sen}(c)}{3!}x^3$, para algum c entre o e x

b) $f(x) = \sqrt{x}$, ordem 1, $x_0 = 4$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f(4) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad f'(4) = \frac{1}{4}$

$P(x) = f(4) + f'(4)(x-4) = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$

Taylor-Young: $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + (x-4)\,\varepsilon(x)$ com $\lim_{x \to 4} \varepsilon(x) = 0$

Taylor-Lagrange: $f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{f''(c)}{2!}(x-4)^2$$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{8\sqrt{c^3}}(x-4)^2,$$ para algum c entre x e 4.

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, ordem 3 , $x_0 = 0$

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos^{-2}(x) \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -2\cos^{-3}(x)(-\operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x \cos^{-3}(x) \qquad f''(0) = 0$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\cos(x)\cos^{-3}(x) + 2\operatorname{sen} x\,(-3)\cos^{-4}(x)\,(-\operatorname{sen} x) \\ &= 2\cos^{-2}(x) + 6\operatorname{sen}^2 x \cos^{-4}(x) \qquad f'''(0) = 2 \end{aligned}$$

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 =$$

$$= x + \frac{2}{6}x^3 = x + \frac{x^3}{3}$$

Taylor-Young: $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$, com $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Taylor-Lagrange: $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4$, para algum c entre 0 e x.