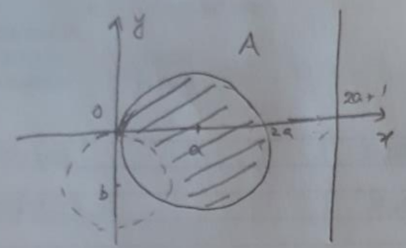
Correcção do 1º teste

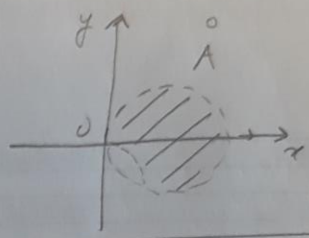
cálculo vetorial

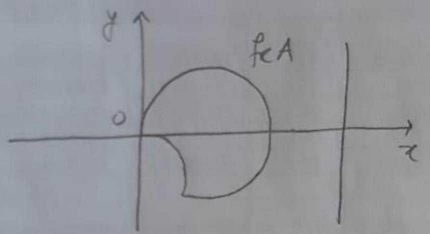
29/04/2020

1 Vou resolver o exercício sem fixar $\underline{a}$ e $\underline{b}$, mas supondo $a>0$, $b<0$ e $|b|<a$. Os outros casos são análogos

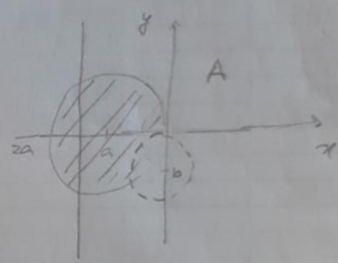
a)



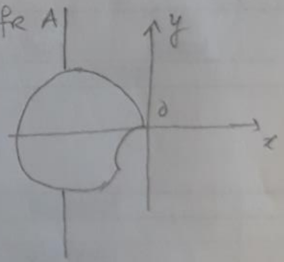




Nota: No caso $a<0$



fr A



b) A não aberto porque $\mathring{A} \neq A$

c) A não é limitado porque

$(2a+1,n) \in A$ e

$\lim_n (2a+1,n) = (2a+1,+\infty)$

ou

$\forall_{r>0} \quad A \not\subset D(0,r)$

porque

$(2a+1, 2r) \in A$ e

$\|(2a+1, 2r)\| = \sqrt{(2a+1)^2 + 4r^2} \geq 2r > r$

2) $f(x,y) = \left(\frac{1}{y-a}, \ln(axy-b) \right)$

$g(u,v) = (u^a v^b, \operatorname{sen}(abuv))$

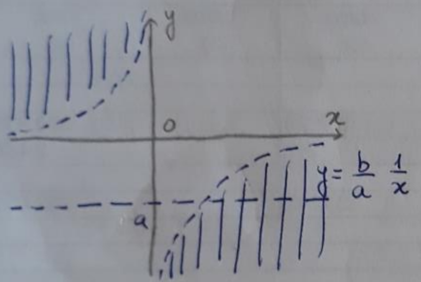
Vou supor $a < 0$ e $b > 0$, sem os explicitar

a) $Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - a \neq 0 \wedge axy - b > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < \frac{b}{a} \wedge y \neq a\}$

$axy - b > 0 \iff axy > b \iff xy < \frac{b}{a}$

porque $a < 0$

$xy < \frac{b}{a} \iff \begin{cases} y < \frac{b}{a}\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ y > \frac{b}{a}\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Notem que $\frac{b}{a} < 0$ e $a < 0$

A resposta variava se variarmos o sinal de a ou o sinal de b

b)

$$J_{(u,v)}g = \begin{pmatrix} a u^{a-1} v^b & b u^a v^{b-1} \\ abv\cos(abuv) & abu\cos(abuv) \end{pmatrix}$$

$$J_{(1,\pi)}g = \begin{pmatrix} a\pi^b & b\pi^{b-1} \\ ab\cos(ab\pi) & ab\pi\cos(ab\pi) \end{pmatrix}$$

c) $g_1(u,v) = u^a v^b \qquad u(x,y) = \frac{1}{y-a}, \quad v(x,y) = \ln(axy-b)$

$g_1(f(x,y)) = g_1(u(x,y), v(x,y))$

$$\frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}$$

chamei $u = f_1$ e $v = f_2$

$$= a u^{a-1} v^b \Big|_{\left(\frac{1}{y-a}, \ln(axy-b)\right)} \cdot 0 + b u^a v^{b-1}\Big|_{\left(\frac{1}{y-a}, \ln(axy-b)\right)} \cdot \frac{ay}{axy-b} =$$

$$= b \frac{1}{(y-a)^a} \left(\ln(axy-b)\right)^{b-1} \frac{ay}{axy-b}$$

③ a e b não fixados, $a \neq 0$ e $b \neq 0$

a) $$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{abx^2}{a^2x^2+b^2x^2} = \frac{ab}{a^2+b^2} \neq 0 = f(0,0)$$

Então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, se existir, não é zero, o que implica que f é descontínua em (0,0)

b) $$g(x,y) = ay f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{a^2x^2y}{a^2x^2+b^2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$0 \leq |g(x,y)| = \underbrace{\frac{a^2x^2}{a^2x^2+b^2y^2}}_{\leq 1} |y| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Como

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} b^2y^2 = 0 = g(0,0)$$

Concluímos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$, pelo que g é contínua em (0,0). Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, a função g é contínua, por ser o quociente de duas funções polinomiais

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{a^2h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{aby(a^2x^2+b^2y^2) - abxy \cdot 2a^2x}{(a^2x^2+b^2y^2)^2} = \frac{a^3bx^2y + ab^3y^3 - 2a^3bx^2y}{(a^2x^2+b^2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ab^3y^3 - a^3bx^2y}{(a^2x^2+b^2y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4

d) $f'((1,2);(3,0)) = \nabla f(1,2) \cdot (3,0)$, uma vez que f é de classe C^1 numa vizinhança de $(1,2)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot 0$$

$$= \frac{8ab^3 - 2a^3 b}{(a^2+4b^2)^2}$$

4 a e b não fixados, $a \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq 0$

a) $\begin{cases} (x,y) \in \Sigma_1 \\ \text{recta tangente a } \Sigma_1 \text{ em } (x,y) \text{ perpendicular a } y=-x \end{cases}$

$\begin{cases} (x,y) \in \Sigma_1 \\ \nabla f(x,y) \text{ paralelo a vector director de } y=-x \end{cases}$

$\begin{cases} (x,y) \in \Sigma_1 \\ \nabla f(x,y) \parallel (1,-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+2axy = 1+ab \\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ \cancel{2}x + \cancel{2}ay = -\cancel{2}y - \cancel{2}ax \end{cases}$

↑ paralelo

$\begin{cases} — \\ (1+a)x = -(1+a)y \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ x = -y \end{cases}$ (porque $a \neq -1$)

$\begin{cases} x^2+x^2-2ax^2 = 1-a \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} 2(1-a)x^2 = 1-a \\ — \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 1/2 \\ y = -x \end{cases}$ Obtemos, assim, dois pontos $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

que são os pontos procurados se $\nabla f(A) \neq (0,0)$ e $\nabla f(B) \neq (0,0)$

$\nabla f(A) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2a}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2a}{\sqrt{2}}\right) = (0,0) \iff a=-1$, o que não se verifica

$\nabla f(B) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2a}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2a}{\sqrt{2}}\right)$ que só se anula se $a=-1$, o que está excluído.

Então os pontos pretendidos são A e B

b) $\Pi_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = a^2\}$, $g(x,y,z) = b^2x^2 + y^2 + 2abxy + z^2$

$\begin{cases} (x,y,z) \in \Pi_a \\ \nabla g(x,y,z) = (0,0,*) \end{cases}$ (isto é, $\nabla g(x,y,z)$ aponta a direcção perpendicular ao plano Oxy, ou seja, as 2 primeiras coordenadas valem 0 e a terceira um valor não nulo

$\nabla g(x,y,z) = (2bx + 2aby,\ 2y + 2abx,\ 2z)$ ⑤

$$\begin{cases} b^2x^2 + y^2 + 2abxy + z^2 = a^2 \\ 2bx + 2aby = 0 \\ 2y + 2abx = 0 \end{cases}$$

Olhemos para as duas últimas equações do sistema acima

$$\begin{cases} 2bx + 2aby = 0 \\ 2abx + 2y = 0 \end{cases}$$ Temos um sistema linear, com duas equações e duas incógnitas.

$\det\begin{pmatrix} 2b & 2ab \\ 2ab & 2 \end{pmatrix} = 4b - 4a^2b^2 = 4b(1-a^2b) = 0 \Leftrightarrow a^2b = 1$, o que não acontece. Então como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é diferente de zero, temos

$x = y = 0$.

[Em cada caso, era evidente que a única solução do sistema era $x=y=0$. A dificuldade vem do facto de eu estar a considerar a e b genéricos]

Então

$$\begin{cases} 0+0+0+z^2 = a^2 \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} z = \pm |a| \\ \end{cases}$$

Obtivemos os pontos $A = (0,0,|a|)$ e $B = (0,0,-|a|)$.

$\nabla g(A) = (0,0,|a|) \neq (0,0,0) \neq (0,0,-|a|) = \nabla g(B)$.

Então o plano tangente a Π_a é horizontal em A e em B

⑤ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(ah,0) - f(0,ah)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(ah,0)-f(0,0)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,ah)-f(0,0)}{h}$

$= a \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(ah,0)-f(0,0)}{ah} - a \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,ah)-f(0,0)}{ah}$

$= a \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(k,0)-f(0,0)}{k} - a \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = a\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - a\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a$

Analogamente,

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(bh,0) - f(0,ah)}{h} = b \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(bh,0)-f(0,0)}{bh} - a \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,ah)-f(0,0)}{h}$

$= b\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - a\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = b$

Então

$$\begin{cases} a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - a\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a \\ b\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - a\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = b \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ b + (b-a)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$ (note que $b \neq a$) nesta alínea $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

(~~Estou~~ a trabalhar com a e b genéricos mas nunca ocorre que $a=b$).