

Universidade do Minho
Álgebra Linear e Geometria Analítica EC
Exercícios 7 - Valores e vectores próprios

1. Calcule os valores próprios e os subespaços próprios das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

- a) Calcule os valores próprios da matriz A .
b) Seja B a matriz obtida de A pela operação elementar: $l_3 \rightarrow l_3 - 2l_2$. Calcule os valores próprios de B e compare-os com os valores próprios de A .

3. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Determine α de modo que A_α admita o valor próprio 2.
b) Mostre que o vector $(1, 0, 0)$ é vector próprio de A_α independentemente do valor de α .

4. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e x um vector próprio de A associado ao valor próprio λ . Mostre que:

- a) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, x é um vector próprio de αA associado ao valor próprio $\alpha\lambda$.
b) O vector x é um vector próprio de A^2 associado ao valor próprio λ^2 .

5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, considere a matriz real:

$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

- a) Mostre que, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, 1 é valor próprio de $A_{a,b}$.
b) Determine os valores próprios de $A_{1,b}$.
c) Determine os valores próprios da matriz $A_{a,0}$.
d) Determine os vectores próprios da matriz $A_{1,0}$.