Notação 5.1. Representamos por $A(i|j)$ a submatriz de A obtida por remoção da sua linha i e da sua coluna j.

Exemplo 5.2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, temos que $A(2|3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $A(1|2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Definição 5.3. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos determinante de A, e representamos por $\det A$ ou $|A|$, ao escalar definido por

[i] Se $n = 1$, então $\det A = a_{11}$;

[ii] Se $n > 1$,então $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, (-1)^{1+j} \det A(1|j)$.

Exemplo 5.4. Se $A = [2]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ então $\det A = 2$ e

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{j=1}^{2} b_{1j} \, (-1)^{1+j} \det B(1|j) \\
&= b_{11} \, (-1)^{1+1} \det B(1|1) + b_{12} \, (-1)^{1+2} \det B(1|2) \\
&= 1 \times (-1)^2 \times \det [5] + 3 \times (-1)^3 \times \det [4] \\
&= 5 - 12 \\
&= -7.
\end{aligned}$$

determinantes

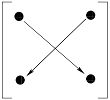
determinante de A (matriz de ordem $n > 1$): $\det A$ – é o escalar definido por

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, (-1)^{1+j} \det A(1|j).$$

[caso n=2]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} (-1)^{1+1} = 1 & A(1|1) = [a_{22}] \\ (-1)^{1+2} = -1 & A(1|2) = [a_{21}] \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2} \det A(1|2) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$



determinantes

[caso n=3]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (-1)^{1+1} = 1 \qquad \det A(1|1) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

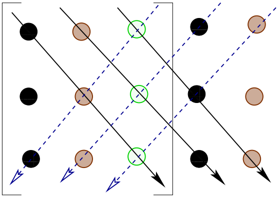
$$A(1|2) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (-1)^{1+2} = -1 \qquad \det A(1|2) = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$A(1|3) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad (-1)^{1+3} = 1 \qquad \det A(1|3) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3)$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

[regra de Sarrus]



Exemplo 5.5. Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Temos que $\det A = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$, $\det B = -1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$,
$\det C = 0 \times 4 - 0 \times 5 = 0$, $\det D = -1 \times 4 - 2 \times 5 = -14$,
$\det E = 1 \times 4 \times 6 + 2 \times 5 \times 0 + 3 \times 0 \times 0 - 3 \times 4 \times 0 - 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 0 \times 6 = 24$,
$\det F = 1 \times (-1) \times 6 + 0 \times 5 \times 3 + 1 \times 2 \times 0 - 1 \times (-1) \times 3 - 1 \times 5 \times 0 - 0 \times 2 \times 6 = -3$.

Observemos que

1. $\det A = \det B$, mas $A \neq B$.
2. $D = B + C$, mas $\det D \neq \det B + \det C$.
3. $\det E$ é igual ao produto dos elementos diagonais, mas o mesmo não acontece com F.