Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

LFIS e MIENGFIS

Cálculo Vetorial

Folha 6 — maio de 2020

Exercício 1. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = [0,2]^3$;

b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x+y}\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = [0,1]^3$;

c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} xy\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\big\}$;

d) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3,\ x^2+y^2 \leq z\big\}$.

Exercício 2. Usando coordenadas cilíndricas calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$.

Exercício 3. Use coordenadas cilíndricas para determinar $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x^2+y^2}\ d(x,y,z)$, onde $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq$

Exercício 4. Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2+y^2$ e à esfera de equação $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Exercício 5. Considere a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas equações $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\dfrac{\pi}{6} \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{3}$.

a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d(x,y,z)$.

Exercício 6. Seja $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4-y^2,\ x,y,z \geq 0,\ x \leq 6\big\}$. Calcule o volume de $\mathcal{D}$ usando coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

Exercício 7. Calcule o volume das regiões limitadas

a) pelas superfícies esféricas $x^2+y^2+z^2 = 9$ e $x^2+y^2+z^2 = 3$;

b) pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2z$ e $y + 2z = 3$;

c) pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $z = 12 - x^2 - y^2$;

d) pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = x^2+y^2$ e pelas superfícies cilíndricas $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 4$.

Exercício 8. Considerando $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y \geq 0,\ \sqrt{x+y}+1 \leq z \leq 2\big\}$, calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z)$, usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2, v^2, w) \end{array}$$