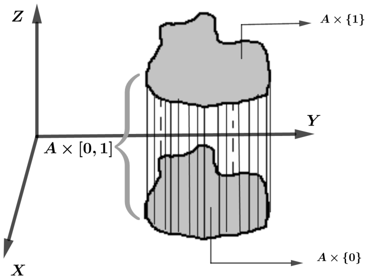
Definição

Dizemos que um subconjunto limitado A de $\mathbb{R}^n$ tem **volume** *se a função constante igual a 1 for integrável em A. Neste caso escrevemos*

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1.$$

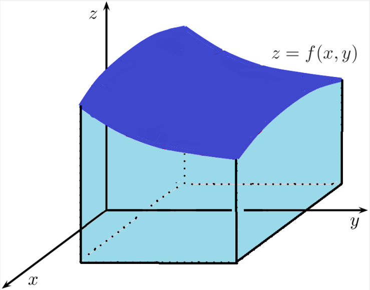
Consideremos o sólido $A \times [0,1]$ em $\mathbb{R}^3$. Então $\mathrm{vol}(A)$ em $\mathbb{R}^2$ (ou área de A) é igual a $\mathrm{vol}(A \times [0,1])$ em $\mathbb{R}^3$. No fundo estamos a dizer que $\mathrm{vol}(A \times [0,1])$ é igual à área de A vezes a altura do sólido.



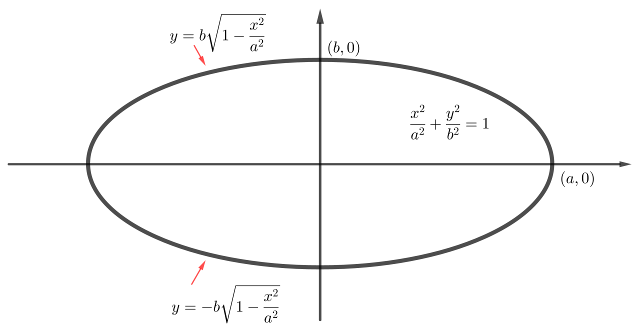
De modo análogo, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, positiva e integrável num conjunto limitado A,

$$\int_A f = \mathrm{vol}\Big(\big\{(X, z) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq f(X)\big\}\Big),$$

onde $X = (x, y)$.

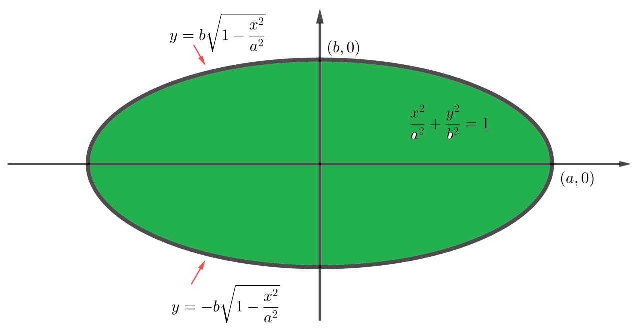


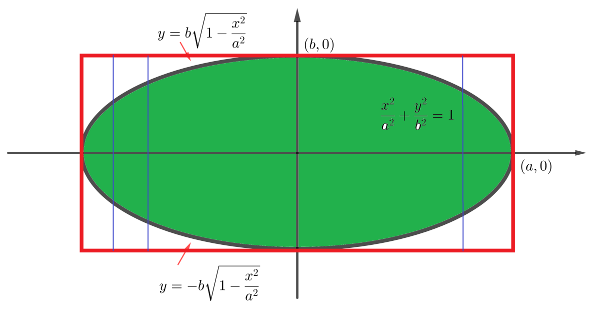
Área da região E limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\text{Área}(E) \quad = \quad 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \pi ab.$$

$\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ - E região limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



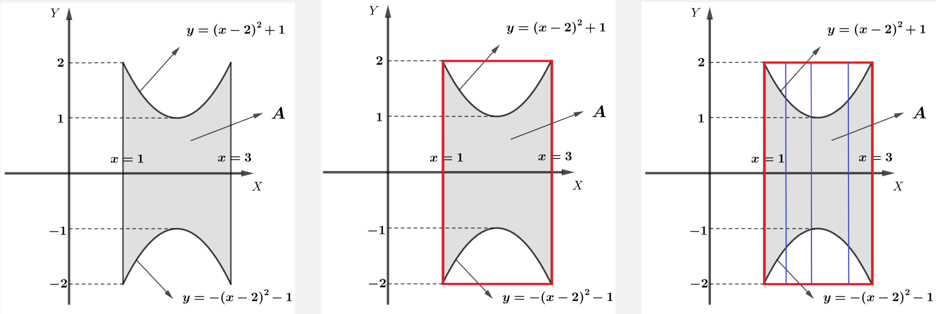


$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,y)dy\right)dx$$

Se $f(x,y)=1$ temos

$$\text{Área}(E) = \int_A f(x,y)dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1\,dy\right)dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Outro exemplo

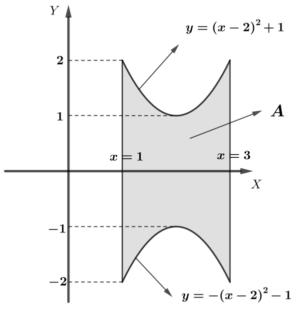


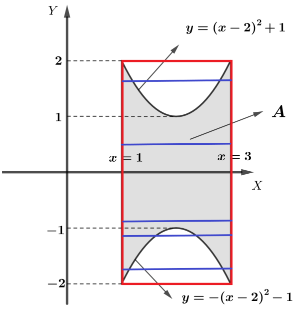
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_1^3 \left(\int_{-(x-2)^2-1}^{(x-2)^2+1} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Em particular a área de A é igual a

$$\iint_A dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{-(x-2)^2-1}^{(x-2)^2+1} dy \right) dx = \int_1^3 \left(2(x-2)^2 + 2 \right) dx = \frac{16}{3}.$$

Mesmo exemplo – invertendo a ordem de integração



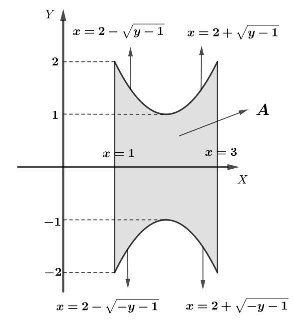


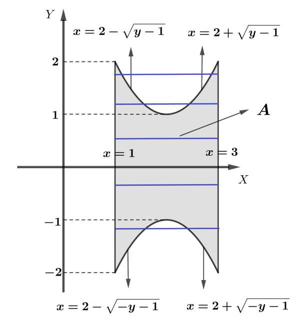
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[-2,2]} \left(\int_{[1,3]} \chi_A f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_1^3 \chi_A f(x,y)\,dx \right) dy.$$

A situação agora é um pouco mais complicada pois, fixado $y \in [-2,2]$, x varia entre

$$\begin{cases} [1, 2-\sqrt{-1-y}] \cup [2+\sqrt{-1-y}, 3] & \text{se } y \in [-2,-1] \\ [1,3] & \text{se } y \in [-1,1] \\ [1, 2-\sqrt{y-1}] \cup [2+\sqrt{y-1}, 3] & \text{se } y \in [1,2]. \end{cases}$$

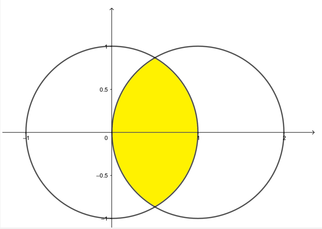
Mesmo exemplo - continuação

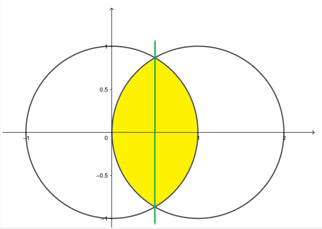




$$
\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad & \int_{-2}^{-1} \left(\int_1^{2-\sqrt{-1-y}} f(x,y)\,dx + \int_{2+\sqrt{-1-y}}^{3} f(x,y)\,dx \right) dy \\
& + \int_{-1}^{1} \left(\int_1^3 f(x,y)\,dx \right) dy \\
& + \int_1^2 \left(\int_1^{2-\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx + \int_{2+\sqrt{y-1}}^{3} f(x,y)\,dx \right) dy.
\end{aligned}
$$

Cálculo da área de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.





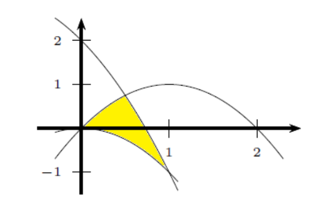
x varia entre 0 e 1. Linha verde $x = \frac{1}{2}$.

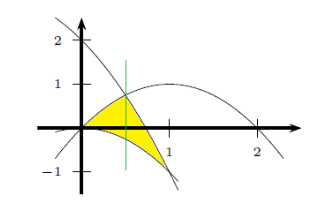
- se $x \in [0, \frac{1}{2}]$ então $y \in [-\sqrt{1-(x-1)^2}, \sqrt{1-(x-1)^2}]$;
- se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ então $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$.

$$\text{Área}(A) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área}(A) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_A x\,dxdy$, sendo
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2,\ y \leq 2x - x^2,\ y \leq 2 - 2x - x^2\}$.



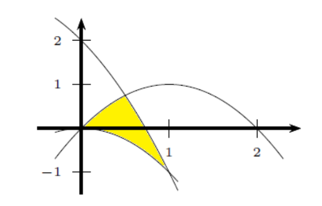


x varia entre 0 e 1. Linha verde $x = \frac{1}{2}$.

- se $x \in [0, \frac{1}{2}]$ então $y \in [-x^2, 2x - x^2]$;
- se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ então $y \in [-x^2, 2 - 2x - x^2]$.

$$\begin{aligned}
\iint_A x\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-x^2}^{2x-x^2} x\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-x^2}^{2-2x-x^2} x\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x - 2x^2)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_A x\,dxdy$, sendo
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2,\ y \leq 2x - x^2,\ y \leq 2 - 2x - x^2\}$.

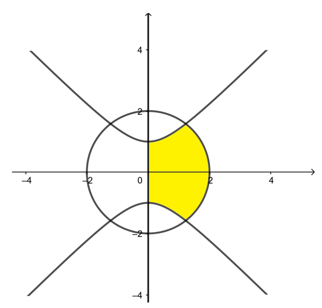


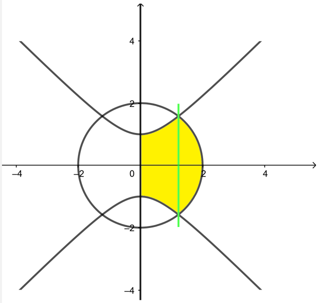
y varia entre -1 e $\frac{3}{4}$.

- se $y \in [-1, 0]$ então $x \in [\sqrt{-y}, -1 + \sqrt{3-y}]$;
- se $y \in [0, \frac{3}{4}]$ então $x \in [1 - \sqrt{1-y}, -1 + \sqrt{3-y}]$.

$$\begin{aligned}
\iint_A x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{-1+\sqrt{3-y}} x\,dx\,dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{1-\sqrt{1-y}}^{-1+\sqrt{3-y}} x\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{0} (2 - \sqrt{3-y})\,dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1 - \sqrt{1-y} - \sqrt{3-y})\,dy = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_D x\,dx\,dy$, sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ y^2-x^2 \leq 1\}$.

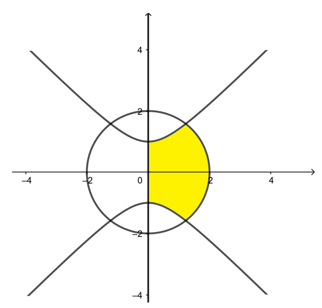


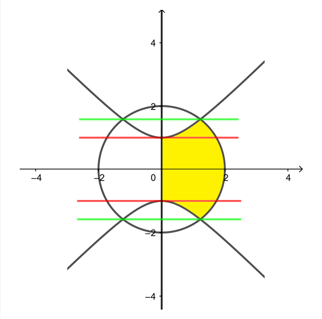


x varia entre 0 e 2. Linha verde $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{3/2}} \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} x\,dy\,dx + \int_{\sqrt{3/2}}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3/2}} 2x\sqrt{1+x^2}\,dx + \int_{\sqrt{3/2}}^{2} 2x\sqrt{4-x^2}\,dx \\
&= \tfrac{5}{6}\sqrt{10} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{6}\sqrt{10} = \tfrac{5}{3}\sqrt{10} - \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_D x\,dx\,dy$, sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ y^2 - x^2 \leq 1\}$.





Linhas verdes $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Linhas vermelhas $y = \pm 1$.

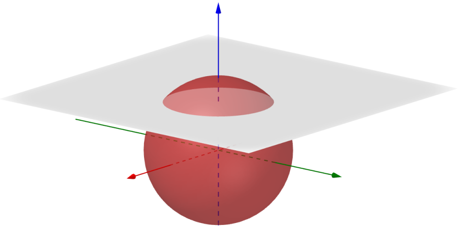
$$\begin{aligned}\iint_D x\,dx\,dy &= \int_{-\sqrt{5/2}}^{-1}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy + \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy + \int_{1}^{\sqrt{5/2}}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{5/2}}^{-1}\left(\tfrac{5}{2}-y^2\right)dy + \int_{-1}^{1}\left(2-\tfrac{y^2}{2}\right)dy + \int_{1}^{\sqrt{5/2}}\left(\tfrac{5}{2}-y^2\right)dy = \tfrac{5}{3}\sqrt{10} - \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

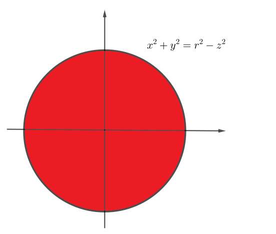
Esfera

Seja $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ a esfera centrada em $(0, 0, 0)$ e de raio R. Denotando $X = (x, y, z)$, temos

$$\int_E f(X)dX = \int_{-r}^{r} \left(\iint_{S_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz$$

em que S_z é a (superfície) intersecção da esfera com o plano $Z = z$.





Temos assim (os parêntesis não são necessários),

$$\int_E f(X)dX = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy \right) dx \right) dz.$$

Volume da esfera

Para calcular o volume de $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ consideramos $f(x,y,z) = 1$. Podemos usar os seguintes raciocínios:

- como $\displaystyle\iint_{S_z} dxdy$ é a área de S_z que sabemos ser $\pi(r^2 - z^2)$ então

$$\mathrm{vol}(E) = \int_E dX = \int_{-R}^{R} \left(\iint_{S_z} dxdy \right) dz = \int_{-R}^{R} \pi(r^2 - z^2)dz = \cdots = \tfrac{4}{3}\pi R^3;$$

- aqui as primitivas podem dar algum trabalho.

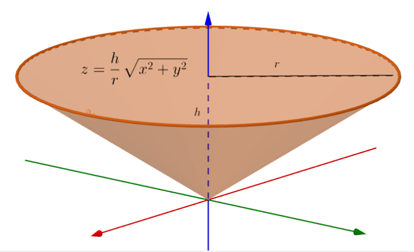
$$\begin{aligned} \int_E dX &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-x^2}} dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} 2\sqrt{R^2 - z^2 - x^2} dx\, dz. \end{aligned}$$

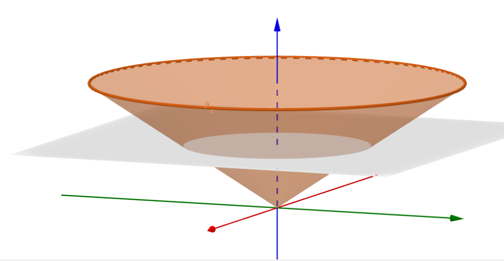
O cálculo da primitiva em ordem a x pode exigir fazer a mudança de variável $x = \sqrt{R^2 - z^2}\,\mathrm{sen}\, t$,

$$\int_E dX = \int_{-R}^{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(R^2 - z^2)\cos^2 t\, dt\, dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Limites de integração para o cone - "começando" pela variável z

Cone de altura h e raio da base R.



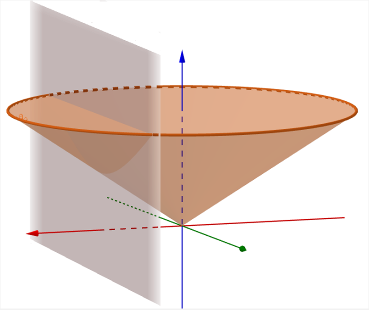


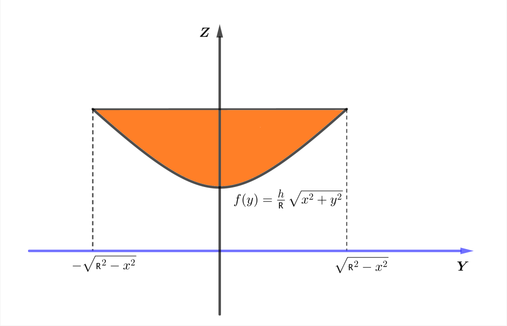
Temos assim, notando que no plano OXY, $C_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2\}$

$$\int_C f(X)dX = \int_0^h \left(\iint_{C_z} f(x,y,z)dx\,dy \right) dz = \int_0^h \int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} \int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2 - x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2 - x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

$$\mathrm{vol}(C) = \int_0^h \left(\iint_{C_z} dx\,dy \right) dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2\,dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Limites de integração para o cone - "começando" pela variável x



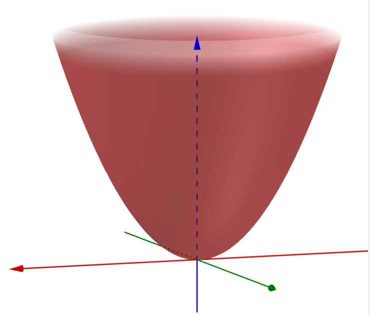


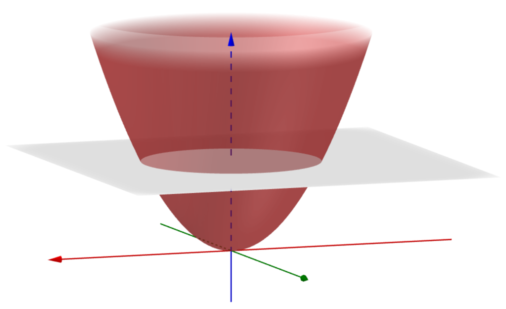
Temos assim, notando que no plano OXY, $C_x = \{(y,z) : \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h\}$

$$\begin{aligned}
\int_C f(X)dX &= \int_{-R}^{R}\left(\iint_{C_x} f(x,y,z)dy\,dz\right)dx \\
&= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Parabolóide de altura h e raio R.

$P = \{(x, y, z) : \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) \leq z \leq h\}.$



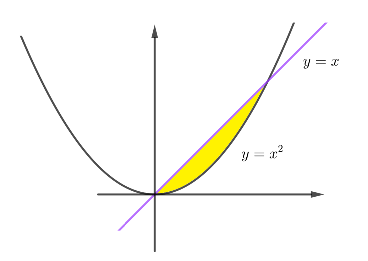


Temos assim, notando que no plano OXY, $P_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h}\, z\}$

$$\mathrm{vol}(P) = \int_P dX \quad = \quad \int_0^h \left(\iint_{P_z} dx\, dy \right) dz = \int_0^h \text{Área}(P_z) dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h}\, z\, dz = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

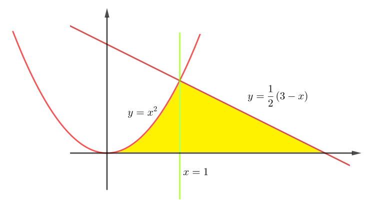
Inversão da ordem de integração:

1. $$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\, dy.$$ $$A = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, y \le x \le \sqrt{y}\}.$$



$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$$

2. $$\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dy\, dx;$$



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} dx\, dy$$

Teorema (da mudança de variável)

Sejam A *e* B *subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *com volume,* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável em* B *e* $\Phi : B \longrightarrow A$ *tal que* $\Phi_{|\overset{\circ}{B}}$ *é uma função bijectiva de classe* C^1 *sobre* $\overset{\circ}{A}$*. Então,*

$$\int_A f = \int_B (f \circ \Phi)\ |\det J\,\Phi|,$$

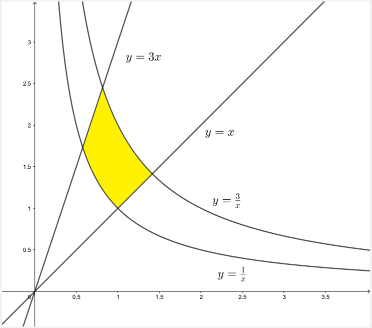
ou seja, se escrevermos $\Phi(u_1, \ldots, u_n) = (x_1, \ldots, x_n)$*,*

$$\overbrace{\int \cdots \int_A}^{n \text{ símbolos}} f(X)\, dX = \overbrace{\int \cdots \int_B}^{n \text{ símbolos}} (f \circ \Phi)(U)\ |\det J\,\Phi(U)|\, dU$$

onde $X = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $dX = dx_1 \ldots dx_n$*,* $U = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $dU = du_1 \ldots du_n$*.* $\square$

Exemplo 1

Cálculo de $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$ sendo $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x\le y\le 3x,\ 1\le xy\le 2\}$.

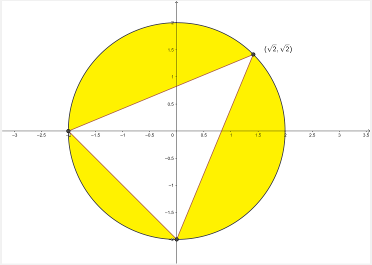


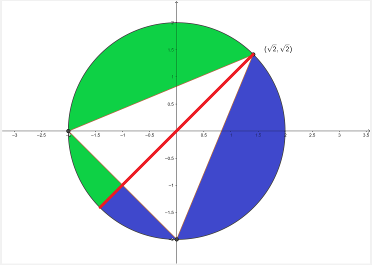
usando a mudança de variável definida por $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$ e $y=\sqrt{uv}$.

$$B=\left\{(u,v) : \sqrt{\tfrac{u}{v}}\le\sqrt{uv}\le 3\sqrt{\tfrac{u}{v}},\ 1\le\sqrt{\tfrac{u}{v}}\cdot\sqrt{uv}\le 2\right\}=\{(u,v) : 1\le v\le 3,\ 1\le u\le 2\}$$

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint_B \left(\tfrac{u}{v}+uv\right)\cdot\tfrac{1}{2v}du\,dv=\tfrac{1}{2}\int_1^3\int_1^2 \left(\tfrac{u}{v^2}+u\right)du\,dv$$

Exemplo 2



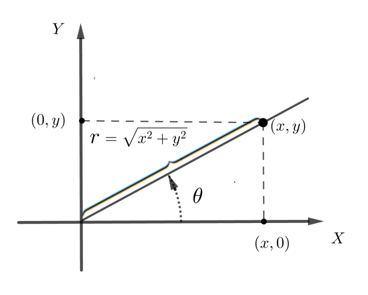


$\Phi(x, y) = (y, x)$.

$$\iint_{RVerde} (y - x) dx\, dy \quad = \quad \iint_{RAzul} (x - y) | -1 | dx\, dy.$$

$$\iint_{R} (y - x) dx\, dy \quad = \quad 0.$$

Coordenadas polares



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

Note-se que:

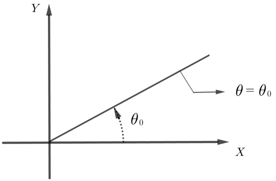
- a restrição de Φ a $\mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$ é de classe C^1 e é bijectiva sobre $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})$;
- Φ pode então ser usada como uma mudança de variável (nas condições do Teorema) para todo o conjunto A contido em $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})$;
- uma vez que $\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ tem "volume zero", podemos usar esta função para qualquer $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Formalmente, estamos a usar a igualdade,

  $$\int_A f = \int_{A \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})} f,$$

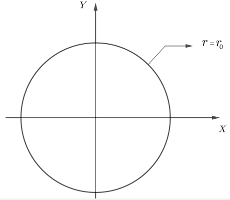
  e só depois a mudança de variável.
- $\det \mathcal{J}_{(r,\theta)} \Phi = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$

Interpretação “geométrica” de $\det \mathcal{J}_{(r,\theta)}\Phi$

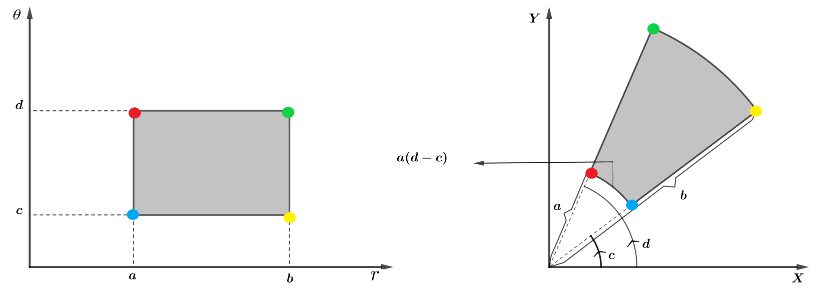
- se fixarmos $\theta = \theta_0$, o conjunto dos pontos (x, y) “cujo” θ é igual a θ_0 (ou seja, o conjunto $\Phi(\{\theta_0\} \times \mathbb{R}^+)$) é a semi-recta representada na figura



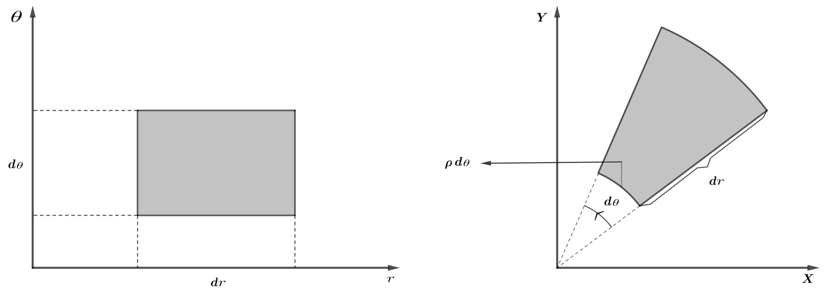
- se fixarmos $r = r_0$, o conjunto dos pontos (x, y) “cujo” r é igual a r_0 (ou seja, o conjunto $\Phi([0, 2\pi[\times\{r_0\}))$ é a circunferência representada na figura



- o rectângulo $[a,b] \times [c,d]$ é transformado por Φ no conjunto da direita



- um "rectângulo infinitesimal" cujos lados meçam dr e $d\theta$ é transformado por Φ numa figura cuja área é $r\,dr\,d\theta + \frac{1}{2}d\theta\,dr\,dr \approx r\,dr\,d\theta$.



Note-se que, para efeitos de cálculo da área, estamos a aproximar a segunda figura por um rectângulo (recorda-se que o raio de uma circunferência é perpendicular à circunferência) em que um dos lados mede dr e outro $r\,d\theta$ (que é a medida do arco de circunferência de amplitude $d\theta$ e de raio r).

Coordenadas polares: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

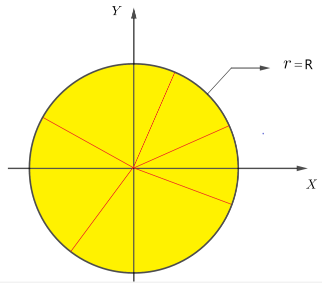
Em coordenadas polares S é definido pela desigualdade $r \leq R$. Deste modo:

- θ não tem restrições para além do facto de pertencer ao conjunto $[0, 2\pi[$;
- $0 \leq r \leq R$, independentemente de θ.

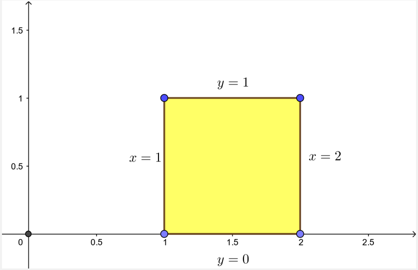
Assim

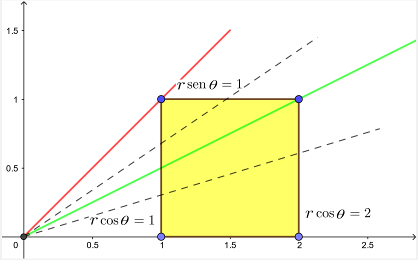
$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Tudo isto pode ser visto facilmente se fizermos o desenho



Coordenadas polares: $Q = [1,2] \times [0,1]$

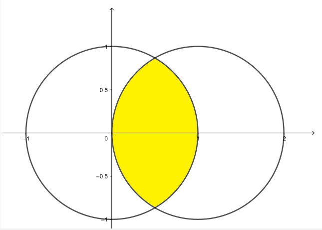


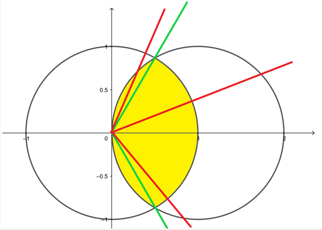


- θ varia entre 0 e $\frac{\pi}{4}$;
- se $\theta \in \left[0, \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})\right]$ então r varia da recta $r\cos\theta = 1$ até à recta $r\cos\theta = 2$;
- se $\theta \in \left[\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}), \frac{\pi}{4}\right]$ então r varia da recta $r\cos\theta = 1$ até à recta $r \operatorname{sen}\theta = 1$.

$$\begin{aligned}\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, {\color{red}r}\, dr\, d\theta + \\ &\quad \int_{\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, {\color{red}r}\, dr\, d\theta\end{aligned}$$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$





Em coordenadas polares A é definido pelas desigualdades $\begin{cases} r \leq 1 \\ r \leq 2\cos\theta \end{cases}$, $0 \leq r$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

$\boxed{\text{Olhando}}$ para o desenho, vemos que θ varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Os ponto de intersecção das circunferências são $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.Assim

$$\iint_A xy^2\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, dr\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, dr\, d\theta +$$
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, dr\, d\theta$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$\boxed{\text{Sem desenho}}$

Em coordenadas polares A é definido pelas desigualdades $\begin{cases} r \leq 1 \\ r \leq 2\cos\theta \end{cases}$, $0 \leq r$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

Da segunda desigualdade tiramos logo que θ varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

As desigualdades acima significam $r \leq \min\{1, 2\cos\theta\}$.

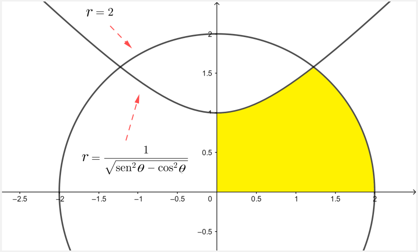
Temos assim:

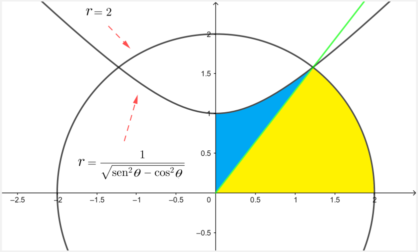
- $r \leq 1$ se $2\cos\theta \geq 1$, ou seja, se $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$;
- $r \leq 2\cos\theta$ se $2\cos\theta \leq 1$, ou seja, se $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Assim

$$\iint_A xy^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{1} r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta +$$
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta$$

Cálculo de $\iint_D x\,dx\,dy$, sendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ y^2 - x^2 \leq 1\}$.





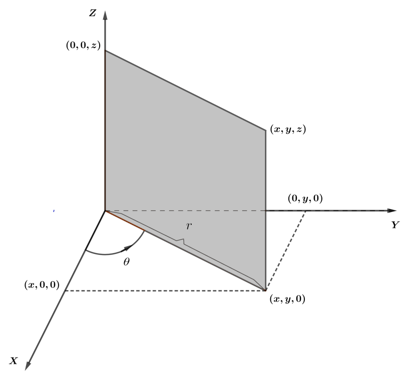
θ varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. O ponto relevante é $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2})$. Assim

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{5}{3}})} \int_0^2 r^2 \cos\theta\,dr\,d\theta + \int_{\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{5}{3}})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta}}} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta.$$

Coordenadas cilíndricas

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R})$, fica definido pela sua 3ª componente e pelas "coordenadas polares" de $(x, y, 0)$. Temos as novas coordenadas, r, θ e z, definidas por

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{cases}$$



Temos assim a função

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ & (r, \theta, z) & \mapsto & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z). \end{array}$$

Coordenadas cilíndricas: algumas observações

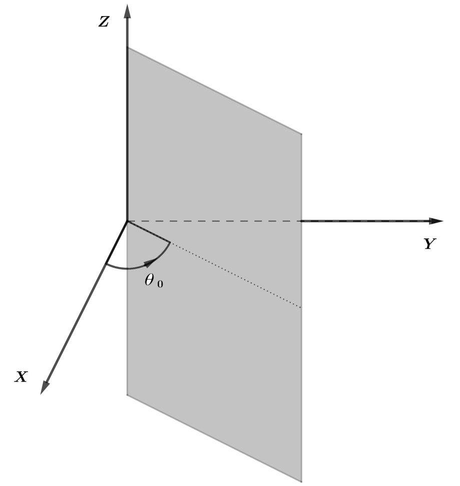
- como nas coordenadas polares, podemos considerar que θ varia em qualquer intervalo de amplitude 2π;

- a restrição de Φ a $\mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ é uma bijecção de classe C^1 sobre $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ (ou seja, $\mathbb{R}^3$ excepto o semi-plano de equação $y = 0$, $x \geq 0$);

- para efeitos de cálculo de integrais podemos "pensar" em Φ como uma mudança de variável em $\mathbb{R}^3$, uma vez que o conjunto $\mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$ tem "volume zero".

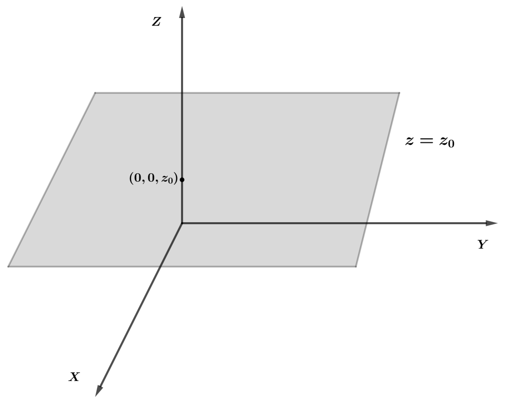
$\boxed{\theta = \theta_0}$

Se fixarmos $\theta = \theta_0$, o conjunto dos pontos (x, y, z) "cujo" θ é igual a θ_0 ou seja, $\Phi(\mathbb{R}^+ \times \{\theta_0\} \times \mathbb{R})$, é o semi-plano



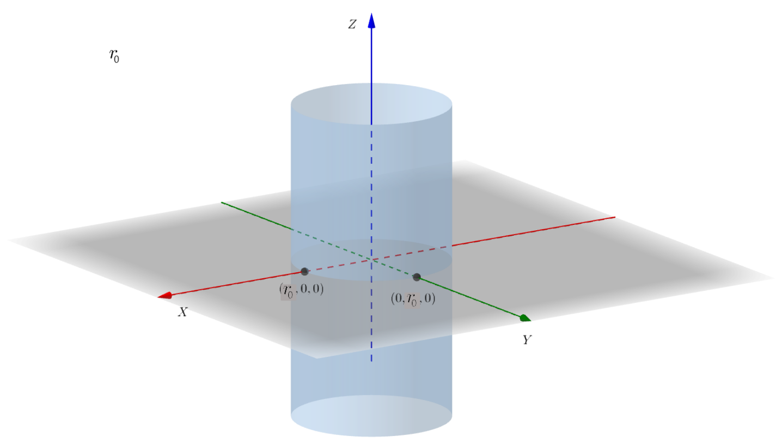
$\boxed{z = z_0}$

Se fixarmos $z = z_0$, isto é, se calcularmos $\Phi(\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\{z_0\})$, obtemos o plano de equação $z = z_0$,



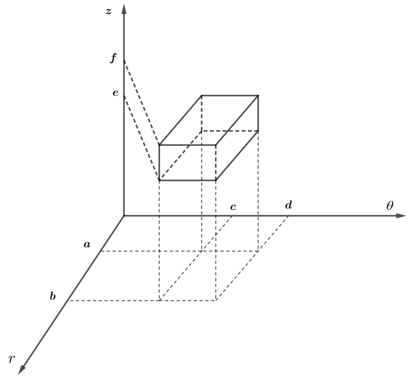
$$\boxed{r = r_0}$$

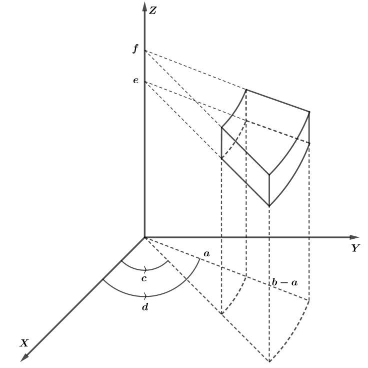
Se fixarmos $r = r_0$, o conjunto dos pontos (x, y, z) "cujo" r é igual a r_0, ou seja, o conjunto $\Phi([0, 2\pi[\times\{r_0\} \times \mathbb{R})$, é o cilindro vertical infinito nos dois sentidos, cuja intersecção com o plano $z = 0$ é a circunferência centrada na origem e de raio r_0,



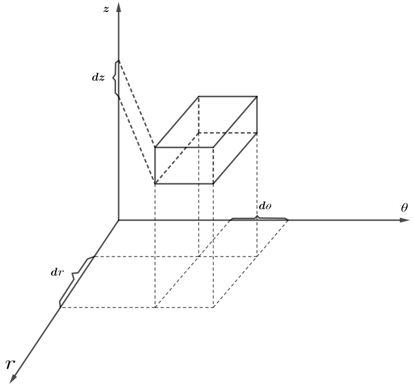
Unidade de volume (1)

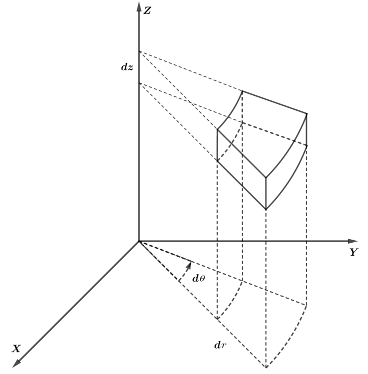
O rectângulo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ é transformado por Φ no conjunto $\big\{(x, y, z) : \exists (r, \theta) \in [a, b] \times [c, d] : x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z \in [e, f]\big\}$, ou seja,





- um "rectângulo infinitesimal" cujos lados meçam dr, $d\theta$ e dz é transformado por Φ numa figura cujo volume é aproximadamente $r\,dr\,d\theta\,dz$;



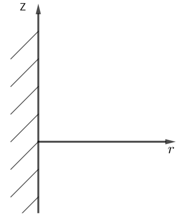


Este conjunto tem volume $\left(r\,dr\,d\theta + \frac{1}{2}d\theta\,dr\,dr\right)\,dz \approx r\,dr\,d\theta\,dz$.

- $J\Phi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\,\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, portanto, $|\det J\,\Phi| = r$.

Coordenadas cilíndricas: exemplos

Note-se que em geral é mais fácil começar por ver a variação de z (neste caso ficamos reduzidos a um integral duplo em "coordenadas polares") ou a variação de θ e, neste caso, o "melhor" é fazer um desenho no semi-plano definido por θ igual a constante

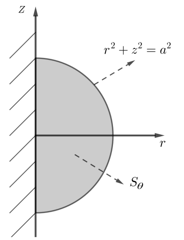


Um cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq r^2,\ a \leq z \leq b\}$ é essencialmente um "paralelipípedo" em coordenadas cilíndricas ($[0,r] \times [0,2\pi] \times [a,b]$) da mesma maneira que um círculo centrado na origem é um rectângulo em $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{Cil_{r,a,b}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^r f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Coordenadas cilíndricas: esfera

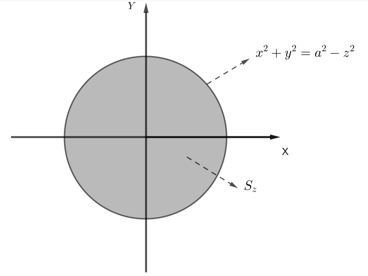
Vamos "calcular" $\int_S f(X)\, dX$, em que $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, com $a > 0$.
Comecemos por ver a variação de θ.
A esfera é definida por $r^2 + z^2 \leq a^2$. Como não existe restrição a θ, isto significa que θ varia no intervalo $[0, 2\pi[$. De seguida, desenhamos no semi-plano θ igual a constante a região S_θ, que é a intersecção de S com esse semi-plano



Assim, $\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, dz\, dr\, d\theta.$
Se quisermos calcular o volume de S então $f \equiv 1$ e as primitivas a calcular são todas simples.

Coordenadas cilíndricas: esfera (2)

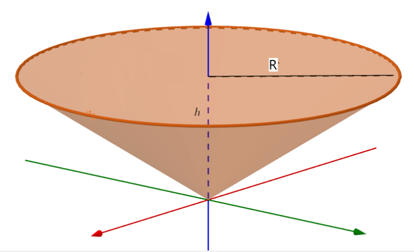
Comecemos agora pela variação de z.
Da equação da esfera, em coordenadas cartesianas ou em cilíndricas, vemos que z varia em $[-a, a]$. Fixado z, ficamos com uma região S_z, de equação $x^2 + y^2 \leq a^2 - z^2$. De seguida calculamos os limites de integração de S_z em "coordenadas polares".

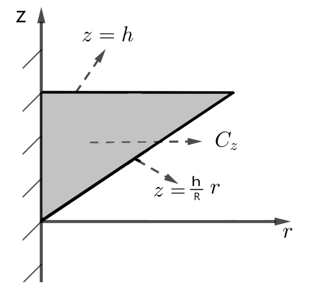


Deste modo,

$$\iint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-r}^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r\,f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,dr\,d\theta\;dz.$$

Coordenadas cilíndricas: cone



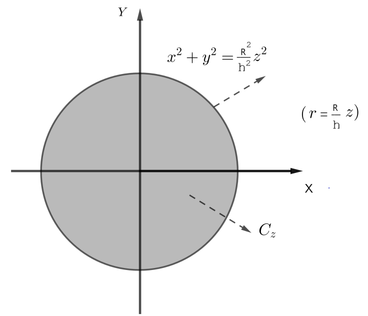


À direita está a intersecção do cone com um semi-plano θ igual a constante.
Deste modo $C_{h,r} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} z^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ e

$$\mathrm{vol}(C_{h,R}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h}{R} r}^{h} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(h - \tfrac{h}{R}\, r\right) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6}\, d\theta = \tfrac{1}{3}\pi\, R^2 h.$$

Coordenadas cilíndricas: cone (2)

z varia no intervalo $[0, h]$. O desenho no plano z igual a constante é

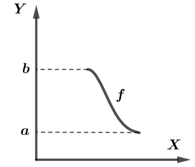


Neste caso,

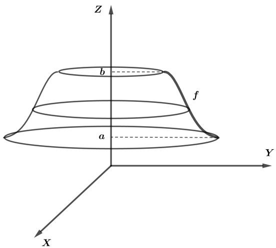
$$\mathrm{vol}(C) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h} z} r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2h^2} z^2 \, d\theta \, dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Sólidos de revolução - primeiro caso

Consideremos uma função positiva $\begin{array}{rccc} f: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & y & \mapsto & f(y) \end{array}$ em que $a < b$



"Imaginemos" o gráfico da função a rodar à volta do eixo OY. Obtemos assim um superfície. Note-se que um ponto $(y, f(y))$ do gráfico percorre, na sua rotação, uma circunferência de raio $f(y)$.



O sólido de revolução V é definido por $\sqrt{x^2+y^2} \le f(z)$ e $a \le z \le b$. A intersecção de V com um plano $Z = z$ é um círculo de raio $f(z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(V) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_a^b \pi f(z)^2\, dz. \end{aligned}$$

Sólidos de revolução - segundo caso

Consideremos funções $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $0 \leq f \leq g$.

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times [a,b] : f(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq g(z)\}.$$

Então

$$\mathrm{vol}(V) \quad = \quad \int_a^b \pi \left(g(z)^2 - f(z)^2\right)\, dz.$$