Cálculo Vetorial

Ficha 1

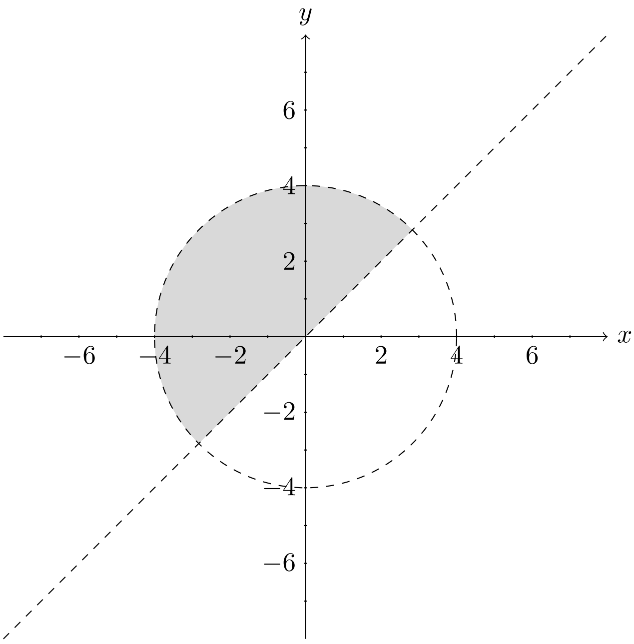
4 de Março de 2013

Questão 1 () Determine e represente geometricamente o domínio da função $f(x,y) = \frac{\log(-y^2-x^2+16)}{\sqrt{y-x}}$.

....

É fácil ver que

$$\text{dom} f = \{(x,y) \mid -y^2 - x^2 + 16 > 0 \wedge y - x > 0\}.$$



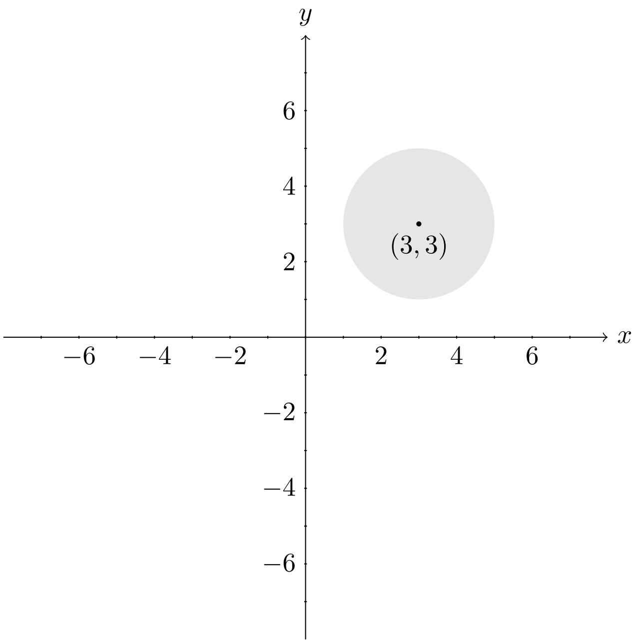
A área cinzenta representa o domínio da função.

Questão 2 () Determine e represente geometricamente o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{-y^2 + 6\,y - x^2 + 6\,x - 14}$.

....

Notemos que

$$\text{dom} f = \{(x,y) \mid -y^2 + 6\,y - x^2 + 6\,x - 14 \geq 0\}.$$
$$= \{(x,y) \mid -(y-3)^2 - (x-3)^2 + 4 \geq 0\}.$$



A área cinzenta representa o domínio da função.

Questão 3 () Seja

$$f(x,y) = \frac{x^{36}\,y^4}{25\,y^{10} + 2\,x^{60}}.$$

Calcule os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ e } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

O que pode concluir sobre a existência do limite duplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

....

Os limites repetidos obviamente são iguais a zero. O limite duplo não existe. De fato, consideremos $y = \alpha x^6$. Então temos

$$f(x, \alpha x^6) = \frac{\alpha^4}{2 + 25\alpha^{10}}.$$

Portanto o limite da função f ao longo da curva $y = \alpha x^6$ depende do valor do parâmetro α. Logo o limite duplo não existe.

Questão 4 () Seja

$$f(x,y) = \frac{x^6\,y^4}{9\,y^4 + 6\,x^4}.$$

Calcule os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ e } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

O que pode concluir sobre a existência do limite duplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

....

Os limites repetidos obviamente são iguais a zero. O limite duplo existe e é igual a zero. De fato, temos

$$\left|\frac{x^6\,y^4}{9\,y^4 + 6\,x^4}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{x^{12} + y^8}{9\,y^4 + 6\,x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^8x^4 + y^4y^4}{9\,y^4 + 6\,x^4}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^8(x^4 + y^4) + y^4(x^4 + y^4)}{9\,y^4 + 6\,x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x^8 + y^4)(x^4 + y^4)}{9\,y^4 + 6\,x^4}\right) \leq x^8 + y^4 \to 0, \ \text{ quando } \ (x, y) \to (0, 0).$$

Questão 5 () Seja

$$f(x, y) = \frac{x^8\,y^2}{36\,y^6 + 6\,x^{12}}.$$

Calcule os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \ \text{e} \ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right).$$

O que pode concluir sobre a existência do limite duplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

....

Os limites repetidos obviamente são iguais a zero. O limite duplo não existe. De fato, consideremos $y = \alpha x^2$. Então temos

$$f(x, \alpha x^2) = \frac{\alpha^2}{6 + 36\alpha^6}.$$

Portanto o limite da função f ao longo da curva $y = \alpha x^2$ depende do valor do parâmetro α. Logo o limite duplo não existe.

Questão 6 () Seja

$$f(x, y) = \frac{x^4\,y^8}{9\,y^{12} + 6\,x^4}.$$

Calcule os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \ \text{e} \ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right).$$

O que pode concluir sobre a existência do limite duplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)?$$

....

Os limites repetidos obviamente são iguais a zero. O limite duplo existe e é igual a zero. De fato, temos

$$\left|\frac{x^4\,y^8}{9\,y^{12} + 6\,x^4}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^8 + y^{16}}{9\,y^{12} + 6\,x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4x^4 + y^4y^{12}}{9\,y^{12} + 6\,x^4}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^4(x^4 + y^{12}) + y^4(x^4 + y^{12})}{9\,y^{12} + 6\,x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x^4 + y^4)(x^4 + y^{12})}{9\,y^{12} + 6\,x^4}\right) \leq x^4 + y^4 \to 0, \ \text{ quando } \ (x, y) \to (0, 0).$$

Questão 7 () Considere a função $f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4\,y^6}{16\,y^8 + 4\,x^{16}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

a). Estude a continuidade da função $f(x, y)$;

b). Determine a expressão de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

....

a). A função f é contínua em $R^2\backslash\{(0,0)\}$ por ser o quociente de duas funções polinomiais que são contínuas. A continuidade de f no ponto $(0,0)$ pode ser estudada, verificando se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. O que se conlcui, é que o limite duplo não existe. De fato, consideremos $y = \alpha x^2$. Então temos

$$f(x, \alpha x^2) = \frac{\alpha^6}{4 + 16\alpha^8}.$$

Portanto o limite da função f ao longo da curva $y = \alpha x^2$ depende do valor do parâmetro α. Logo o limite duplo não existe e, assim, a função não é contínua em $(0,0)$.

b). Calculando $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ para $(x,y) \in R^2\backslash\{(0,0)\}$, obtém-se:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{4\,x^3\,y^6}{16\,y^8 + 4\,x^{16}} - \frac{64\,x^{19}\,y^6}{\left(16\,y^8 + 4\,x^{16}\right)^2}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$, a derivada parcial calcula-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Assim, a função $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ é definida por

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{4\,x^3\,y^6}{16\,y^8+4\,x^{16}} - \frac{64\,x^{19}\,y^6}{(16\,y^8+4\,x^{16})^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Questão 8 () Considere a função $f(x,y)$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3\,y^7}{36\,y^{12}+3\,x^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

a). Estude a continuidade da função $f(x,y)$;

b). Determine a expressão de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

....

a). A função f é contínua em $R^2\backslash\{(0,0)\}$ por ser o quociente de duas funções polinomiais que são contínuas. A continuidade de f no ponto $(0,0)$ pode ser estudada, verificando se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. O que se conlcui, é que o limite duplo existe e é igual a zero e, assim, a função é contínua em $(0,0)$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^3\,y^7}{36\,y^{12}+3\,x^4}\right| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^6+y^{14}}{36\,y^{12}+3\,x^4}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2x^4+y^2y^{12}}{36\,y^{12}+3\,x^4}\right) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2(x^4+y^{12})+y^2(x^4+y^{12})}{36\,y^{12}+3\,x^4}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+y^2)(x^4+y^{12})}{36\,y^{12}+3\,x^4}\right) &\leq x^2+y^2 \to 0, \text{ quando } (x,y)\to(0,0). \end{aligned}$$

Logo, a função f é contínua em R^2.

b). Calculando $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ para $(x,y) \in R^2\backslash\{(0,0)\}$ obtém-se:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{3\,x^2\,y^7}{36\,y^{12}+3\,x^4} - \frac{12\,x^6\,y^7}{\left(36\,y^{12}+3\,x^4\right)^2}.$$

A derivada parcial de f no ponto $(0,0)$ calcula-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{3\,x^2\,y^7}{36\,y^{12}+3\,x^4} - \frac{12\,x^6\,y^7}{(36\,y^{12}+3\,x^4)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Questão 9 () Seja $f(x,y) = \left(y+\sqrt{x}\right)^2 \tan\left(y+x^2\right)$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

....

Utilizando regra de cadeia obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(y+\sqrt{x}\right)\tan\left(y+x^2\right)}{\sqrt{x}} + 2\,x\,\left(y+\sqrt{x}\right)^2 \sec^2\left(y+x^2\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,\left(y+\sqrt{x}\right)\tan\left(y+x^2\right) + \left(y+\sqrt{x}\right)^2 \sec^2\left(y+x^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4\,x\,\left(y+\sqrt{x}\right)^2 \sec^2\left(y+x^2\right)\tan\left(y+x^2\right) + \frac{\tan\left(y+x^2\right)}{\sqrt{x}} + 4\,x\,\left(y+\sqrt{x}\right)\sec^2\left(y+x^2\right) + \frac{\left(y+\sqrt{x}\right)\sec^2\left(y+x^2\right)}{\sqrt{x}}.$$

Questão 10 () Seja $f(x,y) = (y+x)^{\frac{3}{2}} \arctan\left(y+x^2\right)$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

....

Utilizando regra de cadeia obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\,\sqrt{y+x}\,\arctan\left(y+x^2\right)}{2} + \frac{2\,x\,(y+x)^{\frac{3}{2}}}{\left(y+x^2\right)^2+1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3\,\sqrt{y+x}\,\arctan\left(y+x^2\right)}{2} + \frac{(y+x)^{\frac{3}{2}}}{\left(y+x^2\right)^2+1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3\,\arctan\left(y+x^2\right)}{4\,\sqrt{y+x}} + \frac{3\,x\,\sqrt{y+x}}{\left(y+x^2\right)^2+1} + \frac{3\,\sqrt{y+x}}{2\,\left(\left(y+x^2\right)^2+1\right)} - \frac{4\,x\,(y+x)^{\frac{3}{2}}\,\left(y+x^2\right)}{\left(\left(y+x^2\right)^2+1\right)^2}.$$

Questão 11 () Seja $f(x,y) = \cos\left(y+\sqrt{x}\right)\log\left(y+\sqrt{x}\right)$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

....

Utilizando regra de cadeia obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos\left(y+\sqrt{x}\right)}{2\,\sqrt{x}\,\left(y+\sqrt{x}\right)} - \frac{\log\left(y+\sqrt{x}\right)\sin\left(y+\sqrt{x}\right)}{2\,\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos\left(y+\sqrt{x}\right)}{y+\sqrt{x}} - \log\left(y+\sqrt{x}\right)\sin\left(y+\sqrt{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\sin\left(y+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\,\left(y+\sqrt{x}\right)} - \frac{\cos\left(y+\sqrt{x}\right)\log\left(y+\sqrt{x}\right)}{2\,\sqrt{x}} - \frac{\cos\left(y+\sqrt{x}\right)}{2\,\sqrt{x}\,\left(y+\sqrt{x}\right)^2}.$$

Questão 12 () A função $f(x,y) = |x|^{\frac{1}{4}}\,|y|^{\frac{1}{5}}$ é diferenciável no ponto $(0,0)$?

....

É fácil ver que as derivadas parciais da função f no ponto $(0,0)$ existem e são iguais a zero. Fazendo $x = y$ obtemos $|f(x,x)| = |x|^{1/4+1/5} \geq |x|$, sempre que $|x|$ é suficientemente pequeno. Logo a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Questão 13 () A função $f(x,y) = \arcsin|x|\,\log\left(|y|+1\right)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$?

....

É fácil ver que as derivadas parciais da função f no ponto $(0,0)$ existem e são iguais a zero. Seja $h : R \to R$ uma função diferenciável tal que $h(0) = 0$ e $h'(0) \neq 0$. Então verifica-se a desigualdade $|h(x)| \leq (\text{const})|h'(0)||x|$, sempre que $|x|$ é suficiente pequeno. Utilizando esta observação obtemos

$$|f(x,y)| \leq (\text{const})|x||y|.$$

Da desigualdade $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ vem

$$|f(x, y)| \leq \frac{(\text{const})}{2}(|x|^2 + |y|^2).$$

Portanto a função f é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Questão 14 () A função $f(x, y) = |x|^{\frac{1}{7}} \sqrt{|y|}$ é diferenciável no ponto $(0, 0)$?

....

É fácil ver que as derivadas parciais da função f no ponto $(0, 0)$ existem e são iguais a zero. Fazendo $x = y$ obtemos $|f(x, x)| = |x|^{1/7+1/2} \geq |x|$, sempre que $|x|$ é suficientemente pequeno. Logo a função não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Questão 15 () A função $f(x, y) = |x| \arcsin |y|$ é diferenciável no ponto $(0, 0)$?

....

É fácil ver que as derivadas parciais da função f no ponto $(0, 0)$ existem e são iguais a zero. Seja $h : R \to R$ uma função diferenciável tal que $h(0) = 0$ e $h'(0) \neq 0$. Então verifica-se a desigualdade $|h(x)| \leq (\text{const})|h'(0)||x|$, sempre que $|x|$ é suficiente pequeno. Utilizando esta observação obtemos

$$|f(x, y)| \leq (\text{const})|x||y|.$$

Da desigualdade $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ vem

$$|f(x, y)| \leq \frac{(\text{const})}{2}(|x|^2 + |y|^2).$$

Portanto a função f é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Questão 16 () Usando diferenciais, calcule um valor aproximado de $S = \sqrt[3]{9.000999999999999^3 + 9.002000000000001^2 - 783.}$

....

Sejam $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 - 783}$, $x = 9$, $y = 9$, $\Delta x = 0.001$ e $\Delta y = 0.002$. Então temos

$$S = f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

$$= 3 + \frac{3}{3}9^2 3^{-2}(0.001) + \frac{2}{3}9^1 3^{-2}(0.002) = 3.010333333333333.$$

Questão 17 () Usando diferenciais, calcule um valor aproximado de $S = \sqrt[3]{7.999^5 + 8.997999999999999^5 - 91753}.$

....

Sejam $f(x, y) = \sqrt[3]{x^5 + y^5 - 91753}$, $x = 8$, $y = 9$, $\Delta x = -0.001$ e $\Delta y = -0.002$. Então temos

$$S = f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

$$= 4 + \frac{5}{3}8^4 4^{-2}(-0.001) + \frac{5}{3}9^4 4^{-2}(-0.002) = 2.206458333333333.$$

Questão 18 () Determine polinómio de Taylor $P(x, y)$ de grau 3 no ponto $(0, 0)$ para a função $f(x, y) = \frac{e^x}{\sqrt{1+y}}$.

....

Desenvolvendo as funções e^x e $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ em séries de Taylor no ponto 0, obtemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3\,y^2}{8} - \frac{5\,y^3}{16} + \dots.$$

Deixando os termos até ao grau 3 e desenvolvendo o produto obtemos

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{3\,y^2}{8} - \frac{5\,y^3}{16}\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{y}{2} - \frac{x\,y}{2} - \frac{x^2\,y}{4} - \frac{x^3\,y}{12} + \frac{3\,y^2}{8} + \frac{3\,x\,y^2}{8} + \frac{3\,x^2\,y^2}{16} + \frac{x^3\,y^2}{16} - \frac{5\,y^3}{16} - \frac{5\,x\,y^3}{16} - \frac{5\,x^2\,y^3}{32} - \frac{5\,x^3\,y^3}{96}.$$

Daqui vemos que o polinómio de Taylor de grau 3 da função $\frac{e^x}{\sqrt{1+y}}$ no ponto $(0,0)$ é

$$P(x,y) = 1 + \frac{2\,x - y}{2} + \frac{4\,x^2 - 4\,x\,y + 3\,y^2}{8} + \frac{8\,x^3 - 12\,x^2\,y + 18\,x\,y^2 - 15\,y^3}{48}.$$

Questão 19 () Determine polinómio de Taylor $P(x,y)$ de grau 3 no ponto $(0,0)$ para a função $f(x,y) = \frac{\arctan x}{1+y}$.

....

Desenvolvendo as funções $\arctan x$ e $\frac{1}{1+y}$ em séries de Taylor no ponto 0, obtemos:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

e

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots.$$

Deixando os termos até ao grau 3 e desenvolvendo o produto obtemos

$$\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\left(1 - y + y^2 - y^3\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - x\,y + \frac{x^3\,y}{3} + x\,y^2 - \frac{x^3\,y^2}{3} - x\,y^3 + \frac{x^3\,y^3}{3}.$$

Daqui vemos que o polinómio de Taylor de grau 3 da função $\frac{\arctan x}{1+y}$ no ponto $(0,0)$ é

$$P(x,y) = x - x\,y + \frac{-x^3 + 3\,x\,y^2}{3}.$$
