# Resolução da Folha 4

①

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n$ , $m, n \in \mathbb{N}$

$x \longmapsto f(x)$

$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad f = (f_1, \dots, f_m)$

$\mathcal{M}_{m,n} = \{$ matrizes com $m$ linhas e $n$ colunas $\}$

$$J_{(x_1, \dots, x_n)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

① a) $J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — 2 variáveis, 2 funções componentes, $J_{(x,y)} f \in \mathcal{M}_{2,2}$

b) $J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$ — 2 variáveis, 3 funções componentes, $J_{(x,y)} f \in \mathcal{M}_{3,2}$

c) $J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ \operatorname{sen} y & x\cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{pmatrix}$ — 2 variáveis, 3 funções componentes

d) $J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — 3 variáveis, 2 funções componentes

e) $J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{pmatrix}$ — 3 variáveis, 2 funções componentes

② Resolução 1 (calculando a função composta)

$g(t) = f(at^2, at, t^3) = (at^2)^2 \cdot at - at^2 \cdot t^3 = (a^3 - a)t^5$

$g'(t) = (a^3 - a)5t^4 = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^3 - a = 0 \Leftrightarrow a(a^2-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 0 \vee a = 1 \vee a = -1}$

Resolução 2 (sem calcular a composta)

$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(at^2, at, t^3)\frac{\partial}{\partial t}(at^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(at^2, at, t^3)\frac{\partial}{\partial t}(at) + \frac{\partial f}{\partial z}(at^2, at, t^3)\frac{\partial}{\partial t}(t^3)$

$= (2xy - z)\big|_{(at^2, at, t^3)} 2at + x^2\big|_{(at^2, at, t^3)} \cdot a - x\big|_{(at^2, at, t^3)} 3t^2$

$= (2at^2 \cdot at - t^3)\, 2at + (at^2)^2 \cdot a - at^2 \cdot 3t^2 = 4a^3t^4 - 2at^4 + a^3t^4 - 3at^4 = (a^3 - a)5t^4$

e a resolução 2 continua como na resolução 1

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(xy)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) = f'(xy)\,y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) = f'(xy)\,x$$

Então

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = f'(xy)\,xy \qquad y\frac{\partial F}{\partial y} = f'(xy)\,xy$$

iguais

(4) a) Feito no ficheiro Derivada_composta, pg 4

b) " " " " , pg 4

c) $z = x^2 \operatorname{sen} y \qquad x = s^2+t^2,\ y = 2st$

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x(s,t),\,y(s,t))}\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x(s,t),\,y(s,t))}\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$= 2x \operatorname{sen} y\Big|_{(s^2+t^2,\,2st)} \cdot 2s + x^2\cos y\Big|_{(s^2+t^2,\,2st)} \cdot 2t$$

$$= 2(s^2+t^2)\operatorname{sen}(2st)\cdot 2s + (s^2+t^2)^2\cos(2st)\cdot 2t$$

$$= 4s(s^2+t^2)\operatorname{sen}(2st) + 2t(s^2+t^2)^2\cos(2st)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x(s,t),\,y(s,t))}\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x(s,t),\,y(s,t))}\frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$= 2x \operatorname{sen} y\Big|_{(s^2+t^2,\,2st)} \cdot 2t + x^2\cos y\Big|_{(x(s,t),\,y(s,t))} \cdot 2s$$

$$= 2(s^2+t^2)\operatorname{sen}(2st)\,2t + (s^2+t^2)^2\cos(2st)\cdot 2s$$

$$= 4t(s^2+t^2)\operatorname{sen}(2st) + 2s(s^2+t^2)^2\cos(2st)$$

(5) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis, $h(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + g'(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x-y) = f'(x+y) + g'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f''(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + g''(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x-y) = f''(x+y) + g''(x-y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = f'(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y) + g'(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = f'(x+y) - g'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f''(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - g''(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = f''(x+y) + g''(x-y)$$

Então $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f''(x+y) + g''(x-y) - (f''(x+y) - g''(x-y)) = 0$

(6) Vou explicar um método de resolução deste tipo de problemas (3)
na alínea a) e depois resolvo b) sem explicações intermédias.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y^2$

- Vamos integrar esta função de $x$, assumindo $y$ constante. Então

$$(*)\ f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (x+y^2)\, dx = \frac{x^2}{2} + y^2 x + C(y), \text{ com } C(y) \in \mathbb{R}$$

- Notem que a constante que surge na integração pode depender de $y$, uma vez que estamos a supor $y$ constante.

Derivemos $f$ (definida em $(*)$) em ordem a $y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + C'(y)$$

- Por outro lado, queremos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ valha $x^2+y$ (enunciado).

Teríamos, então, de ter

$$2xy + C'(y) = x^2 + y$$

ou, equivalentemente, que

$$C'(y) = x^2 + y - 2xy,$$

o que é absurdo porque a função $C$ é apenas função de $y$.

Conclusão: não existe nenhuma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\nabla f(x,y) = (x+y^2,\ x^2+y)$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 - 1 \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - x + C(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y + C'(y) \underset{\text{enunciado}}{=} x^2 y + 2y$$

Então $C'(y) = 2y$ e $C(y) = y^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$

Conclusão:

$$\nabla f(x,y) = (xy^2-1,\ x^2y+2y) \iff f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - x + y^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$$

7 a) Feito nos apontamentos linhas_superficies_manuscrito

b) $f(x,y,z) = xyz^2$

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\}$, $f(1,1,1) = 1$ logo $(1,1,1) \in \Sigma_1$

$\nabla f(x,y,z) = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ , $\nabla f(1,1,1) = (1,1,2)$

Recta normal:

$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Plano tangente

$((x,y,z) - (1,1,1)) \cdot \nabla f(1,1,1) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-1, z-1) \cdot (1,1,2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) + (y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 4$

c) $z = x^2 + 3y^2 + \operatorname{sen}(xy) \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 + \operatorname{sen}(xy) - z = 0$

$\Sigma_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + \operatorname{sen}(xy) - z = 0\}$

(notem que não podem falar de superfície de nível $\Sigma_z$, o conjunto dos pontos onde $x^2+3y^2+\operatorname{sen}(xy)$ é igual a $z$. Na definição de linha ou superfície de nível é fundamental que o segundo membro da equação seja constante)

$g(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + \operatorname{sen}(xy) - z$ $\qquad g(1,0,1) = 1+0+0-1 = 0$

Então $(1,0,1) \in \Sigma_0$ $\qquad \nabla g(x,y,z) = (2x + y\cos(xy), 6y + x\cos(xy), -1)$

Recta normal $\qquad \nabla g(1,0,1) = (2,1,-1)$

$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Plano tangente

$((x,y,z) - (1,0,1)) \cdot (2,1,-1) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + y - (z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - z = 1$

d) $f(x,y,z) = x^3 + xyz$ $\qquad f(2,2,1) = 8 + 4 = 12$

$\Sigma_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$ $\qquad (2,2,1) \in \Sigma_{12}$

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + yz, xz, xy)$ $\qquad \nabla f(2,2,1) = (14, 2, 4) = 2(7,1,2)$

Recta normal

$(x,y,z) = (2,2,1) + \lambda(7,1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(notem que $(14,2,4)$ e $(7,1,2)$ são vectores colineares)

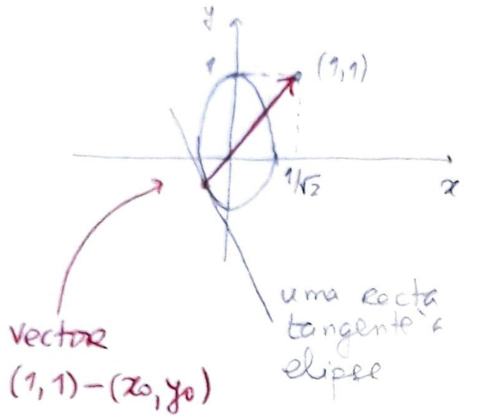
Plano tangente

$((x,y,z) - (2,2,1)) \cdot (7,1,2) = 0 \Leftrightarrow 7(x-2) + (y-2) + 2(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 7x + y + 2z = 18$

(8) Resolvido nos apontamentos linhas_superficies_manuscrito

(9) $\Sigma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=1\}$ sendo $f(x,y)=2x^2+y^2$




Queremos encontrar os pontos $(x_0,y_0)\in\Sigma_1$ onde a recta tangente a $\Sigma_1$ nesse ponto passa em $(1,1)$

Notem que se pretende que o vector

$$(1,1)-(x_0,y_0)$$

seja tangente à elipse, isto é,

$$\big((1,1)-(x_0,y_0)\big)\cdot\nabla f(x_0,y_0)=0$$

Queremos, portanto, resolver o sistema

$$\begin{cases}(x_0,y_0)\in\Sigma_1\\ ((1,1)-(x_0,y_0))\cdot\nabla f(x_0,y_0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}2x_0^2+y_0^2=1\\ (1-x_0,\,1-y_0)\cdot(4x_0,\,2y_0)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\\ 4x_0-4x_0^2+2y_0-2y_0^2=0\end{cases}\quad\begin{cases}2x_0^2+y_0^2=1\\ 2x_0^2+y_0^2=2x_0+y_0\end{cases}\quad\begin{cases}-\\ 2x_0+y_0=1\end{cases}\quad\begin{cases}\\ y_0=1-2x_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x_0^2+(1-2x_0)^2=1\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}2x_0^2+1-4x_0+4x_0^2=1\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}6x_0^2-4x_0=0\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}x_0(3x_0-2)=0\\ -\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0=0 \vee x_0=\frac{2}{3}\\ -\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{x_0=0}\\ y_0=1-2x_0=1\end{cases}$$

Obtemos o ponto $A=(0,1)$

$$\begin{cases}x_0=\frac{2}{3}\\ y_0=1-2x_0=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Obtemos o ponto $B=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Precisamos de excluir os pontos encontrados nos quais o gradiente nesse ponto é nulo, porque nesse caso o vector gradiente não aponta qualquer direcção. Mas

$$\nabla f(A)=(0,2)\neq(0,0)\quad e\quad \nabla f(B)=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)\neq(0,0)$$

Assim, os pontos pretendidos são os pontos A e B.

Notem que podem verificar:

$\vec{v}=(1,1)-A=(1,1)-(0,1)=(1,0)$, $\nabla f(A)=(0,2)$ $\quad \vec{v}\perp\nabla f(A)$

$\vec{w}=(1,1)-B=(1,1)-\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\nabla f(B)=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$\vec{w}\cdot\nabla f(B)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=0$ $\quad \vec{w}\perp\nabla f(B)$

Observação:

Recordem que

- o vector $(a,b,c)$ é perpendicular ao plano $ax+by+cz+d=0$
- o vector $(a,b)$ é perpendicular à recta $ax+by+c=0$

(10) $f(x,y)=x^2+y^2-2x+xy=0$ ($\perp$ significa ortogonal)

$\Sigma_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$

Se $(x_0,y_0)\in\Sigma_0$ então $\nabla f(x_0,y_0)\perp\Sigma_0$

O vector $(-1,1)$ é ortogonal à recta de equação $y=x$

Queremos resolver o sistema

$$\begin{cases}(x_0,y_0)\in\Sigma_0\\ \nabla f(x_0,y_0)\perp(-1,1)\end{cases}\quad\begin{cases}x_0^2+y_0^2-2x_0+x_0y_0=0\\ (2x_0-2+y_0,\ 2y_0+x_0)\cdot(-1,1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\\ -2x_0+2-y_0+2y_0+x_0=0\end{cases}\begin{cases}-\\ y_0=x_0-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0^2+(x_0-2)^2-2x_0+x_0(x_0-2)=0\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}x_0^2+x_0^2-4x_0+4-2x_0+x_0^2-2x_0=0\\ -\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x_0^2-8x_0+4=0\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}x_0=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}\\ -\end{cases}\quad\begin{cases}x_0=-\dfrac{8\pm4}{2}=-4\pm2\\ -\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0=-2\\ y_0=-4\end{cases}\quad\begin{cases}x_0=-6\\ y_0=-8\end{cases}$$

Temos, então, dois pontos satisfazendo o pedido, $A=(-2,-4)$, $B=(-6,-8)$, desde que o gradiente nesses pontos não seja nulo

$\nabla f(B)=(\dots,-16-6)\neq(0,0)$

$\nabla f(A)=(\dots,-8-2)\neq(0,0)$

(11) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Esfera $\Sigma_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=5\}$

Para que uma recta esteja contida num plano, basta que contenha dois pontos nesse plano.

Vamos seleccionar 2 pontos distintos da recta:

- fazendo $z=0$, obtemos o ponto $(5,-5,0)$
- fazendo $x=0$, obtemos o ponto $(0,5,5)$

(por exemplo, poderiam ser outros)

Queremos que

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_5 \\ (5,-5,0)-(x_0,y_0,z_0) \perp \nabla f(x_0,y_0,z_0) \\ (0,5,5)-(x_0,y_0,z_0) \perp \nabla f(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)$

↳ vectores no plano tangente a $\Sigma_5$ em $(x_0,y_0,z_0)$

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=5 \\ (5-x_0,-5-y_0,-z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0 \\ (-x_0,5-y_0,5-z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 5x_0-x_0^2-5y_0-y_0^2-z_0^2=0 \\ -x_0^2+5y_0-y_0^2+5z_0-z_0^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 5x_0-5y_0=x_0^2+y_0^2+z_0^2 \\ 5y_0+5z_0=x_0^2+y_0^2+z_0^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 5x_0-5y_0=5 \\ 5y_0+5z_0=5 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x_0=1+y_0 \\ z_0=1-y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+y_0)^2+y_0^2+(1-y_0)^2=5 \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} 1+\cancel{2y_0}+y_0^2+y_0^2+1-\cancel{2y_0}+y_0^2=5 \\ = \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y_0^2=3 \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} y_0=1 \vee y_0=-1 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y_0=1 \\ x_0=2 \\ z_0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_0=-1 \\ x_0=0 \\ z_0=2 \end{cases}$$

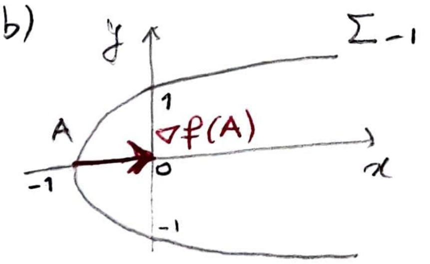
Temos, então, dois pontos nas condições pedidas, $A=(2,1,0)$, $B=(0,-1,2)$

Notem que $\nabla f(A)\neq(0,0,0)$ e $\nabla f(B)\neq(0,0,0)$

12) $f(x,y)=x-y^2$, $f(A)=-1$

$\Sigma_{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y^2=-1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y^2-1\}$

a) b)




$\nabla f(x,y)=(1,-2y)$

$\nabla f(A)=(1,0)$

c) $Gr f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y^2-z=0\}$

$=\Pi_0=g^{-1}(\{0\})$ sendo $g(x,y,z)=x-y^2-z$, isto é, o gráfico de $f$ é a superfície de nível zero da função $g$.

$\nabla g(x,y,z)=(1,-2y,-1)$

Equação do plano tangente a $Gr f$ em $(-1,0,-1)=(A,f(A))$

$((x,y,z)-(-1,0,-1))\cdot\nabla g(-1,0,-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1,y,z+1)\cdot(1,0,-1)=0 \Leftrightarrow x-z=0$

$\nabla g(-1,0,-1)=(1,0,-1)$