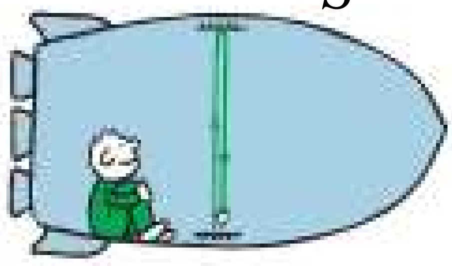
Dilatação do tempo

Na dedução aqui assumimos que não haja contração (ou expansão) na direção perpendicular ao movimento…

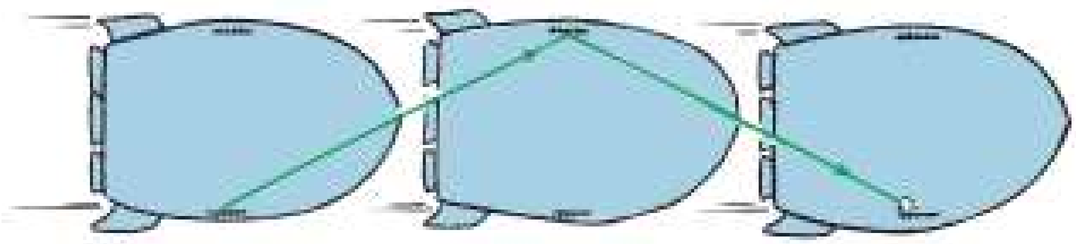
S

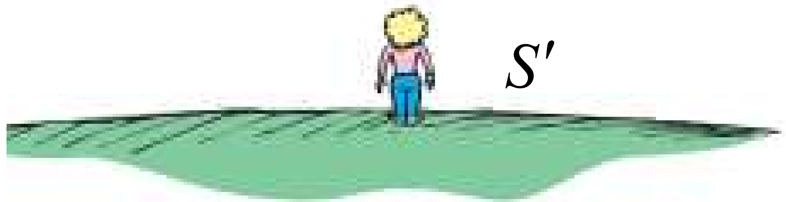


Δt_0

Tempo próprio
Intervalo entre 2 eventos que acontecem no mesmo ponto

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$





S'

Relógios em movimento andam devagar

Não há contração ⊥ ao movimento relativo

Considere 2 pessoas que cruzam com uma velocidade relativa próxima de c.

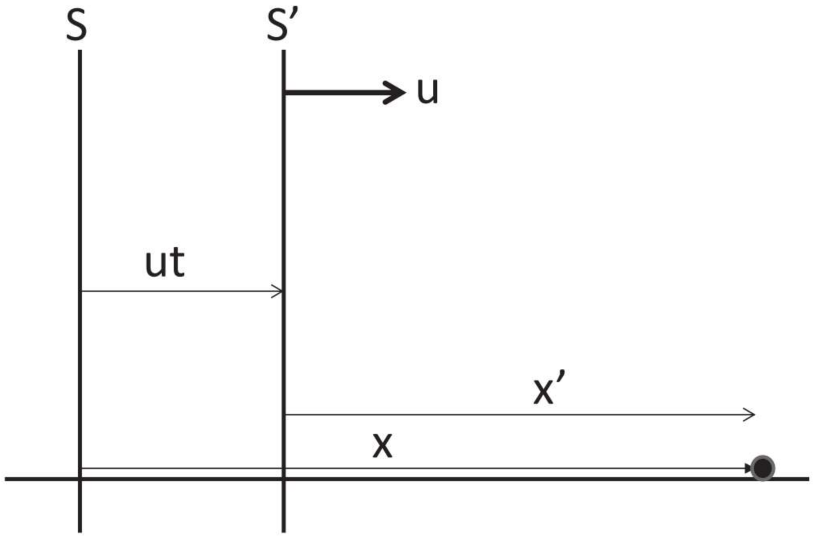
Cada um tem um pincel que segura exatamente 1 m acima do chão (nas suas referências) e deixam uma marca no árbitro

Se houvesse uma contração na direção perpendicular ao movimento relativo as marcas deixadas no arbitro não iriam coincidir.
O jogador do Porto esperava ver a marca vermelho em baixo
O jogador de Benfica o contrário, i.e. a marca azul em baixo

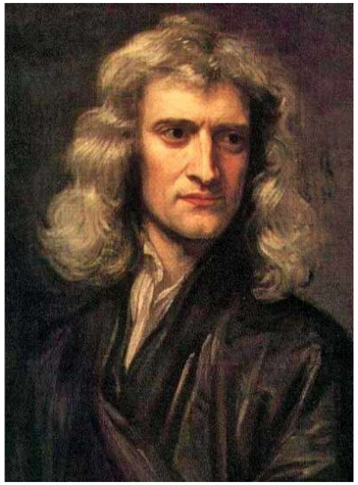
Mas depois ambos podem ir ao referencial do arbitro e ver as marcas. Como as duas marcas não podem ser ambas a baixo da outra, terão estar a mesma altura.

Logo não há contração nas direções perpendicular á direção do movimento relativo.

Transformações de Galileu



"Tempo é universal"



$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

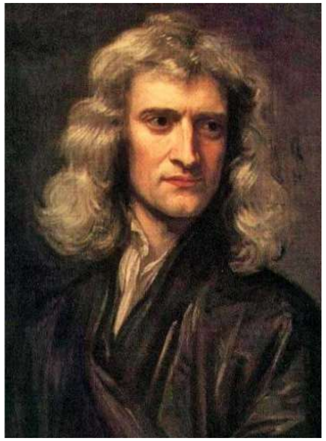
$$\mathrm{v}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - ut)}{dt} = \mathrm{v} - u$$

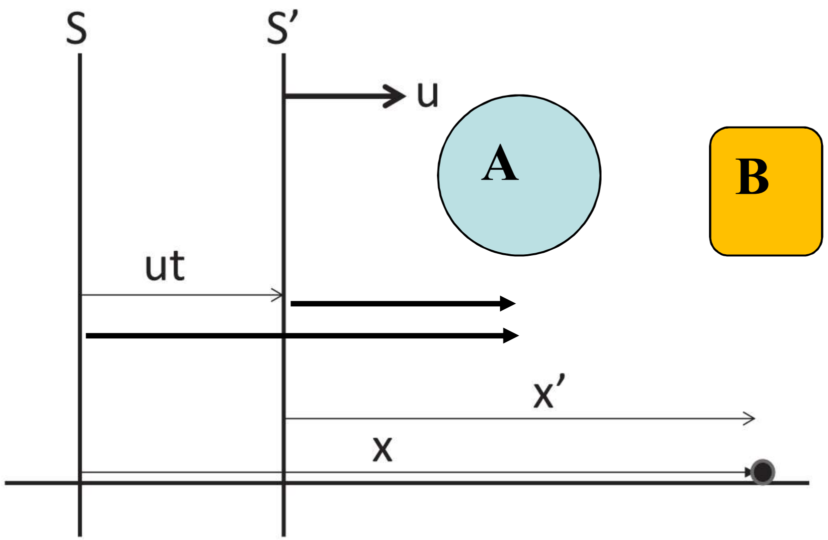
$$a' = \frac{d\mathrm{v}'}{dt'} = \frac{d(\mathrm{v} - u)}{dt} = a$$

"As leis de Física são iguais em todos os sistemas inerciais "

Não existe um referencial absoluto

Leis de Newton são iguais em referências de inércia





Imagine que objetos A e B interagem através uma força $F\left(x_A - x_B\right)$

Observador em S

$$m_A \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F\left(x_A - x_B\right)$$

$$m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -F\left(x_A - x_B\right)$$

Observador em S'

$$x'_A - x'_B = \left(x_A - ut\right) - \left(x_B - ut\right)$$

$$m_A \frac{d^2 x'_A}{dt^2} = F\left(x'_A - x'_B\right)$$

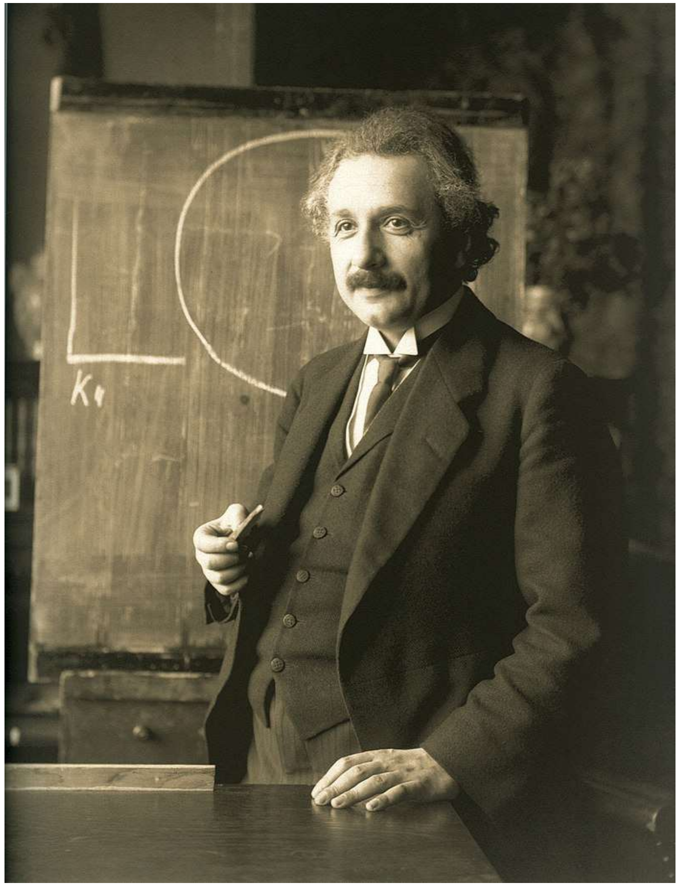
$$m_B \frac{d^2 x'_B}{dt^2} = -F\left(x'_A - x'_B\right)$$

Postulados de Einstein

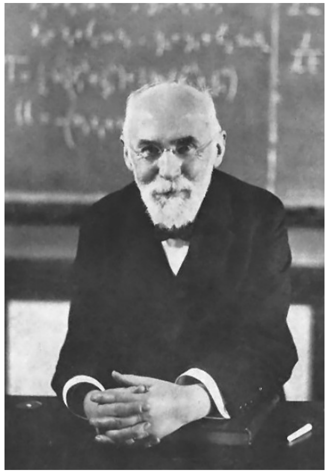
As leis de Física são as mesmas em todos os referências de inércia (sem aceleração).

A velocidade da luz no vácuo é constante independente da velocidade do observador ou da fonte.

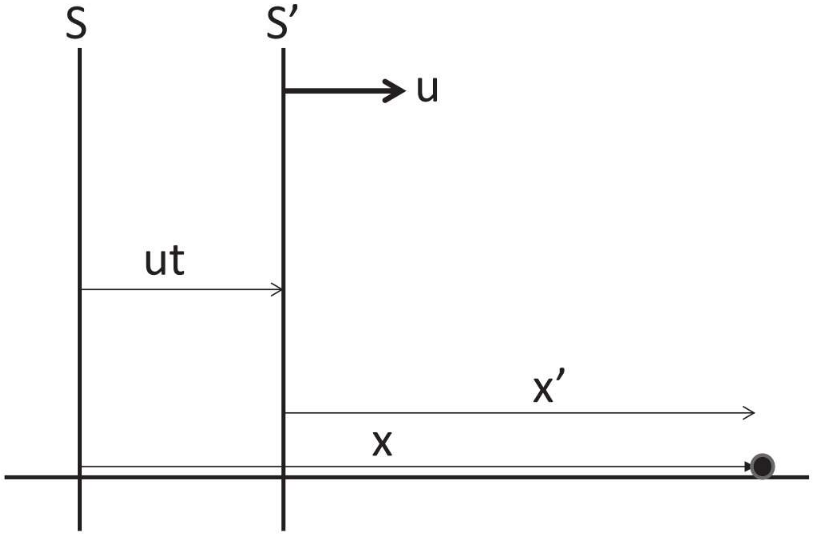
Caso contrário seria possível usar a velocidade da luz para estabelecer um referencial absoluto



Transformações do Lorentz



Hendrik Lorentz



$$y = y'$$
$$z = z'$$

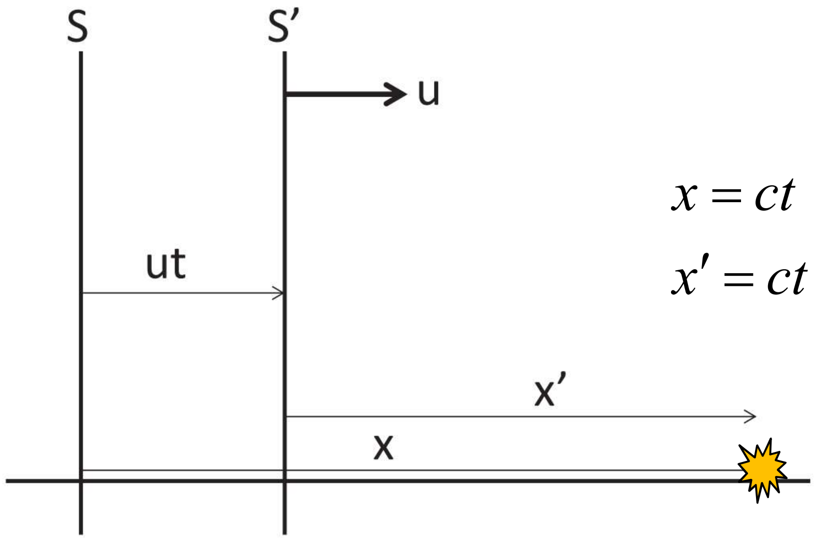
Imagine que u = 3c/4. Eu, no referencial S lança um feixe da luz na direção x
Eu meço a velocidade de luz ser igual a c.
Para alguém em S' também medir a velocidade da luz igual a c terá haver uma diferença nos distância medidos ao longo do eixo dos x (e talvez intervalos de tempo)

$$x' = (x - ut) \quad \rightarrow \quad x' = \gamma(x - ut)$$
$$x = (x' + ut') \quad \rightarrow \quad x = \gamma(x' + ut')$$

Estas transformações se mantêm a sincronização dos origens. Nos coordenados x= 0 t = 0, x' = 0
x'= 0 t' = 0, x = 0

Transformações do Lorentz

No t=t'=0 (quando x=x'=0), eu no S lanço um feixe laser que causa um fogo artificial explodir



$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

(1) $x' = \gamma\left(x - ut\right)$

(2) $x = \gamma\left(x' + ut'\right)$

(1)x(2)

$$xx' = \gamma\left(x' + ut'\right)\gamma\left(x - ut\right)$$

$$= \gamma^2\left[xx' - ux't + uxt' - u^2tt'\right]$$

substituir $x = ct$

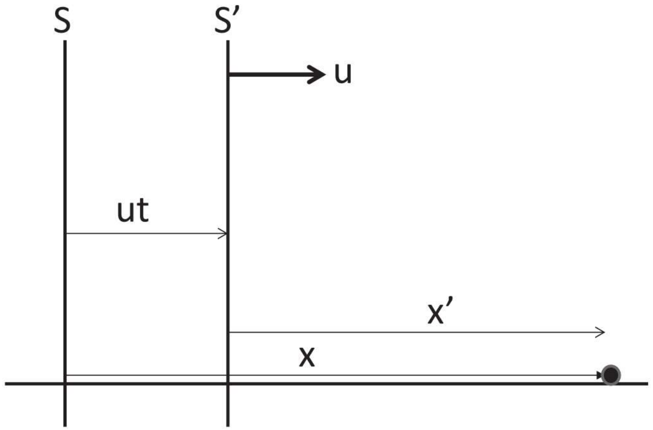
$x' = ct'$

$$c^2tt' = \gamma^2\left[c^2tt' - uct't + uctt' - u^2tt'\right]$$

$$c^2 = \gamma^2\left[c^2 - u^2\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(u/c\right)^2}}$$

Transformações do Lorentz



(1) $x' = \gamma(x - ut) \rightarrow x' = \gamma(x - \beta ct)$

(2) $x = \gamma(x' + ut') \rightarrow x = \gamma(x' + \beta ct')$

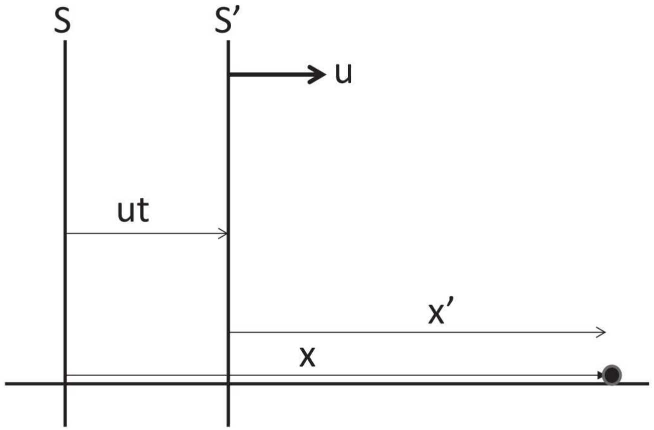
Usar o variável ct em vezes de c

$$\beta \equiv u / c \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Resolver (2) para ct'

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\gamma}x - x'\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\gamma}x - \gamma(x - \beta ct)\right) \\ &= \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{\gamma^2}x - (x - \beta ct)\right) \\ &= \frac{\gamma}{\beta}\left(x(1-\beta^2) - (x - \beta ct)\right) \\ &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

Transformações do Lorentz



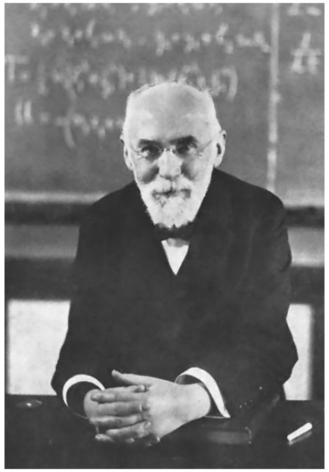
$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$

com

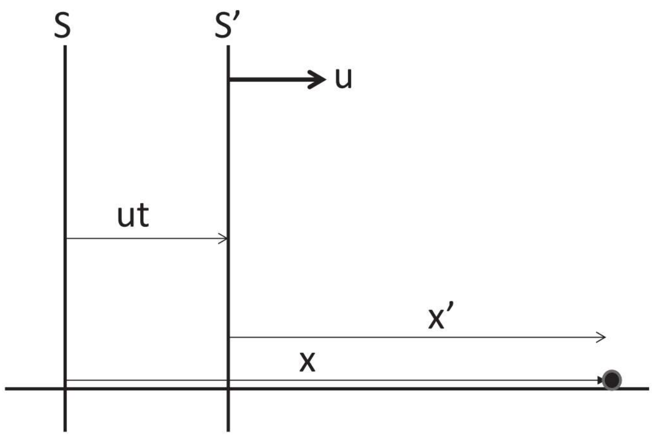
$$\beta = u / c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Transformações inversas?
(x,t) em termos de x' e t'

Transformações do Lorentz

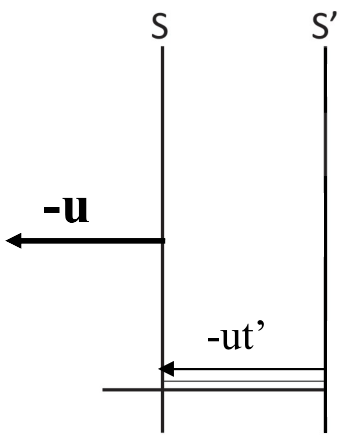


$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$
$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$

com

$$\beta = u / c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Transformações inversas?
(x,t) em termos de x' e t'

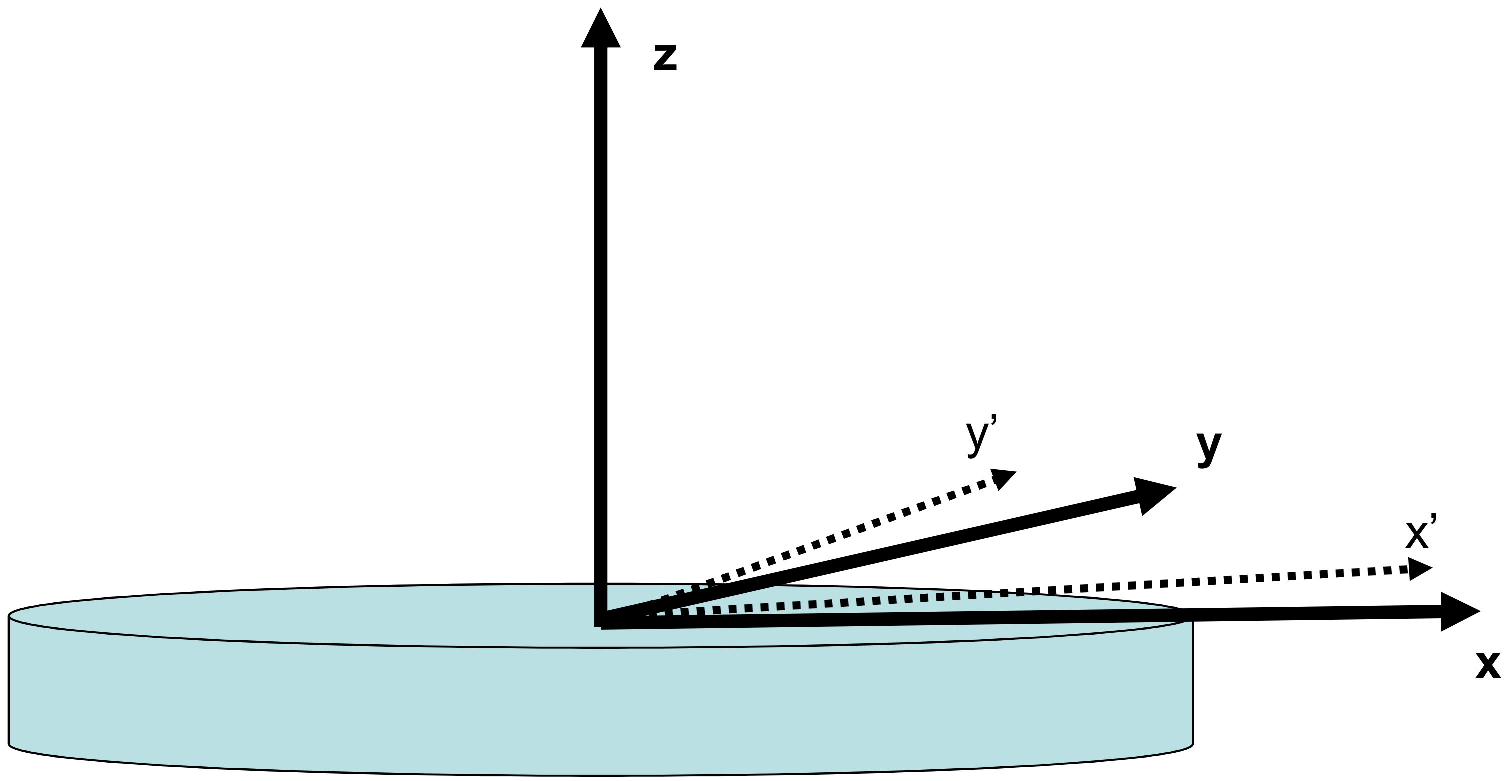


$$x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right)$$
$$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right)$$

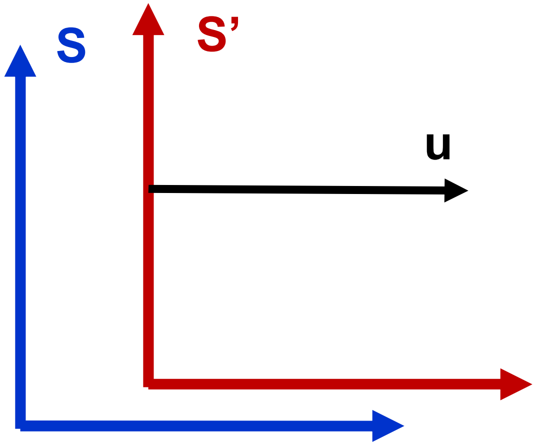
limite $u \ll c \quad \beta \ll 1$

$$\gamma \to 1$$

$$x \to \left(x' + ut'\right)$$
$$t \to t'$$


z
y'
y
x'
x

Aplicações das transformações



Considere 2 eventos

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - \beta c t_1\right) \qquad x_2' = \gamma\left(x_2 - \beta c t_2\right)$$

$$ct_1' = \gamma\left(ct_1 - \beta x_1\right) \qquad ct_2' = \gamma\left(ct_2 - \beta x_2\right)$$

Transformações Lorentz também são validas para intervalos

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c \Delta t\right)$$

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta \Delta x\right)$$

Soma das velocidades

Considere

Evento 1: Ronaldo chuta uma bola dentro uma carruagem
Evento 2: A bola bate no fundo da carruagem

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \beta c \Delta t'\right)$$

$$c\Delta t = \gamma\left(c\Delta t' + \beta \Delta x'\right)$$

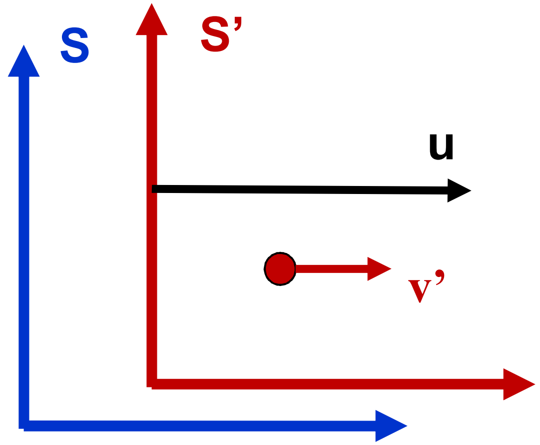
Segundo o Ronaldo a velocidade da bola é $\mathrm{v}' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$

Segundo um observador na estação

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim \frac{\gamma\left(\Delta x' + \beta c \Delta t'\right)}{\gamma\left(\Delta t' + \beta \Delta x' / c\right)} = \lim \frac{\left(\Delta x' / \Delta t' + \beta c \Delta t'\right)}{\left(1 + \beta \Delta x' / \Delta t' c\right)}$$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}' + \mathrm{u}}{1 + \mathrm{v}'\mathrm{u}/\mathrm{c}^2}$$

Soma das velocidades



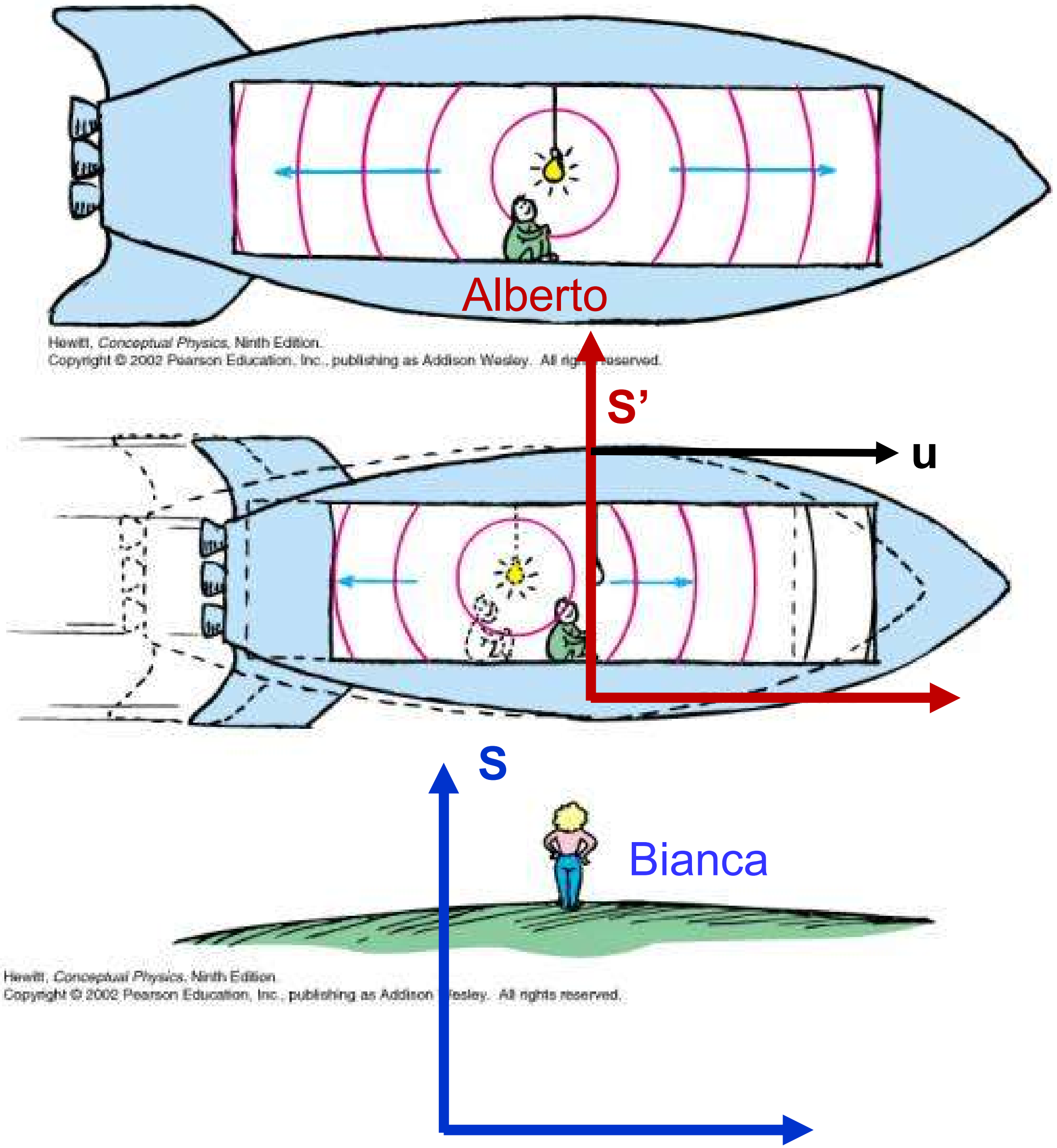
$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}' + \mathrm{u}}{1 + \mathrm{v}'\mathrm{u}/\mathrm{c}^2}$$

Exemplo: u= 3c/4 v'=3c/4 $\mathrm{v} = \frac{\frac{3c}{4} + \frac{3c}{4}}{1 + \left(\frac{3c}{4}\right)^2 / \mathrm{c}^2} = \frac{3c}{2\left(1 + \frac{9}{16}\right)} = \frac{24c}{25}$

se v' = c $\mathrm{v} \rightarrow \frac{c+u}{1 + u/\mathrm{c}} = c$

Respeita o limite máximo das velocidades, c

Perda da Simultaneidade



$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \beta c \Delta t'\right)$$

$$c\Delta t = \gamma\left(c\Delta t' + \beta \Delta x'\right)$$

Os 2 eventos são é a luz incidir na parede a frente e na parede atrás

São simultâneas em S' mas não em S

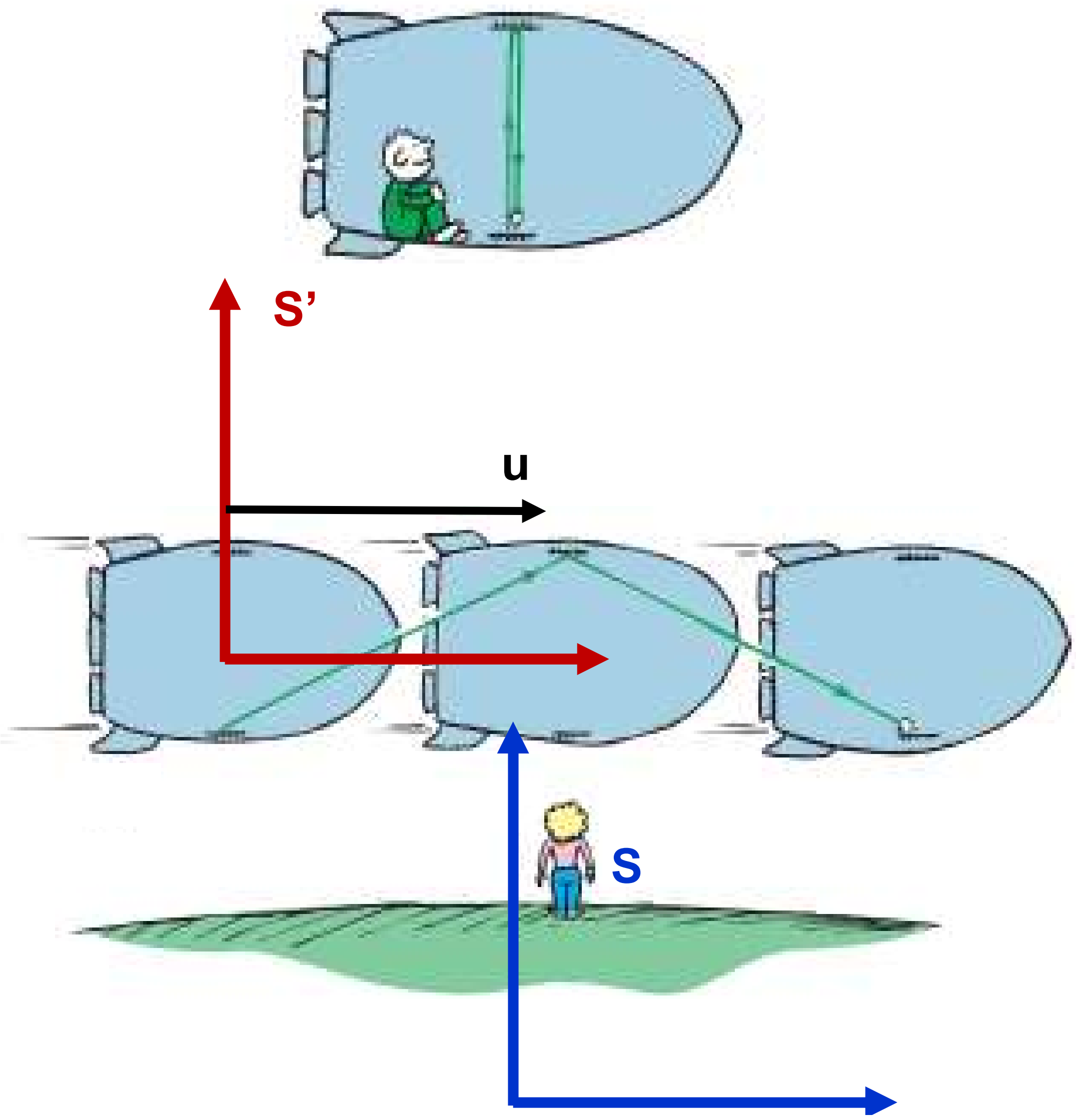
$$\Delta t' = 0 \quad \Delta x' = L_0$$

$$c\Delta t = \gamma\left(\beta \Delta x'\right)$$

$$\Delta t = \frac{\gamma u L_0}{c^2}$$

Dilatação do tempo

O relógio em S' se desloca com uma velocidade u relativo um observador na referência S

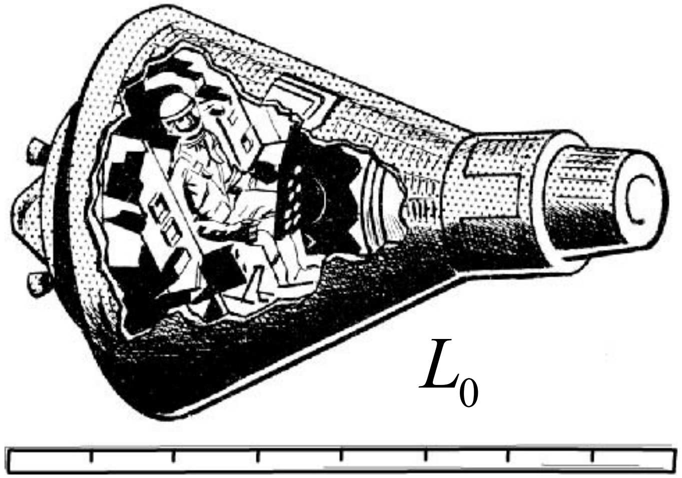


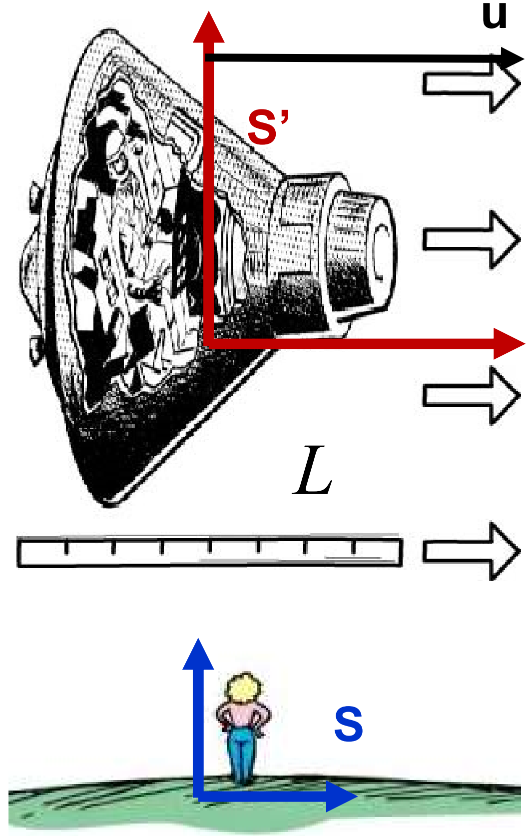
$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \beta c \Delta t'\right)$$
$$c\Delta t = \gamma\left(c\Delta t' + \beta \Delta x'\right)$$

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta t' = \Delta t_0$$
$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

Mais tempo passa pelo observador em S entre os dois eventos, do que pelo observador in S'

Contração do comprimento





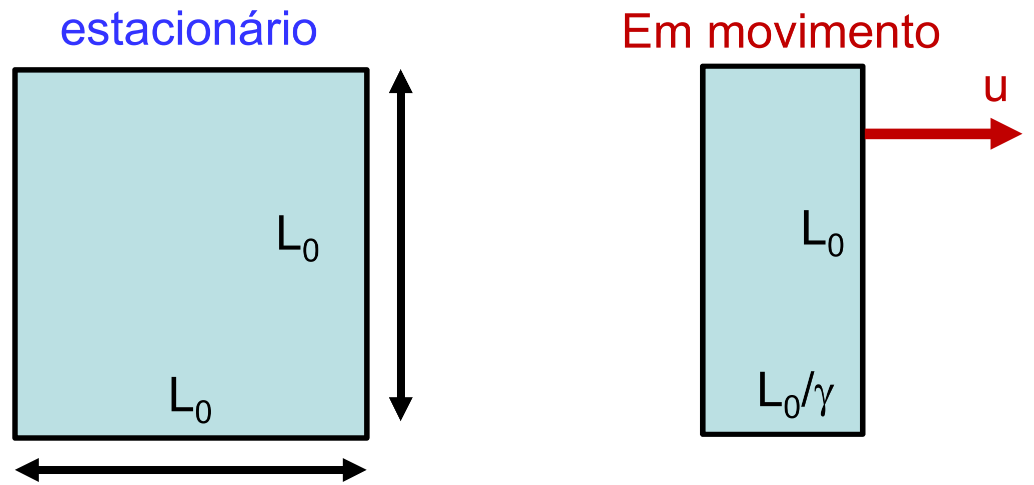
$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c \Delta t\right)$$
$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta \Delta x\right)$$

$$\Delta x' = L_0 \qquad \Delta t = 0$$
$$\Delta x' = L_0 = \gamma \Delta x = \gamma L \qquad\qquad L = L_0 / \gamma$$

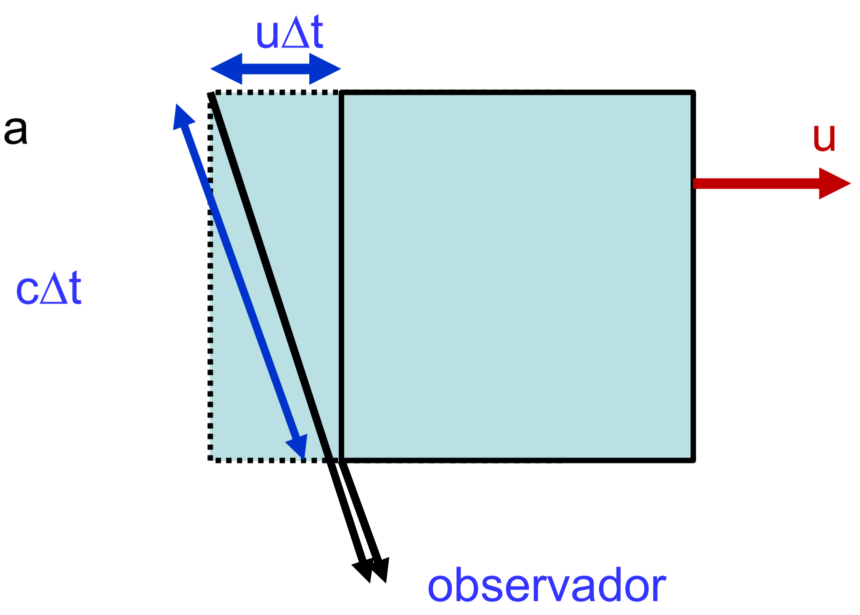
Distorções geométricas

Rotação Terrell (James Terrell, Roger Penrose 1959)

Visto do lado



Visto da cima

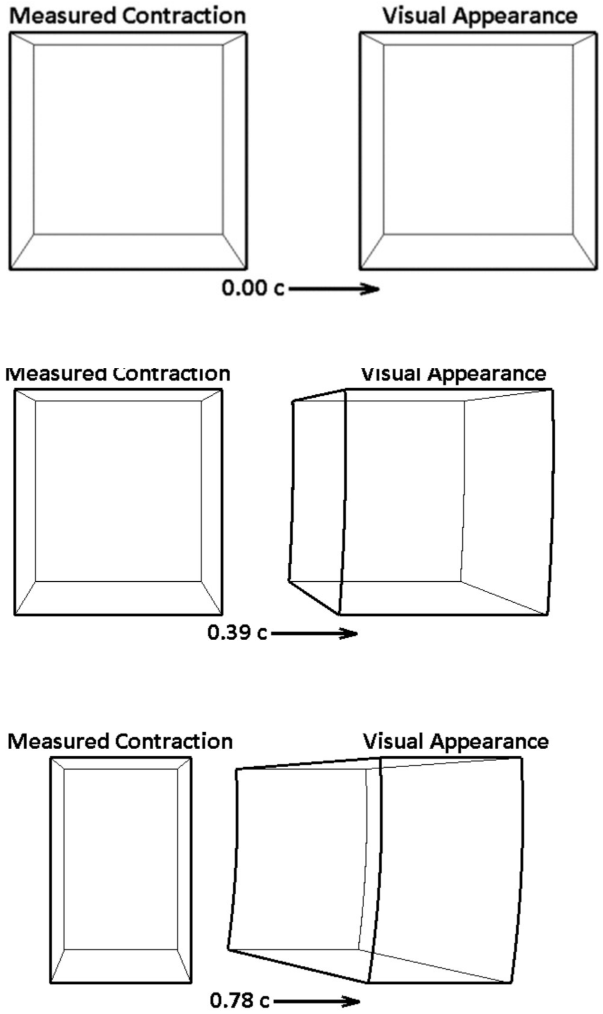


Devida a velocidade finita da luz o cubo parece ser “rodado”

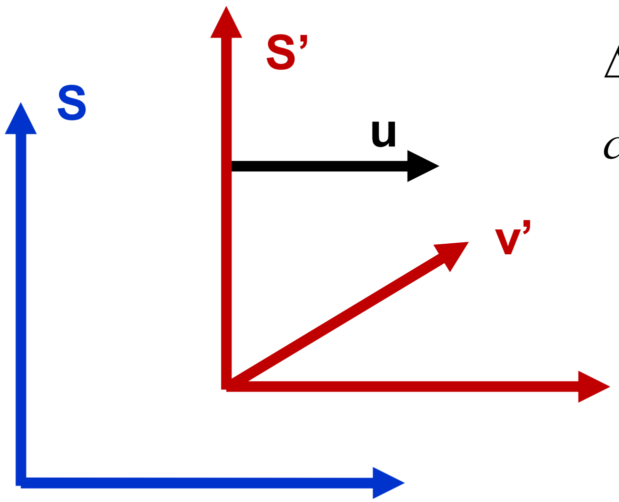
A luz que chega ao observado parte de pontos diferentes do objeto em altura diferentes

Rotação Terrell

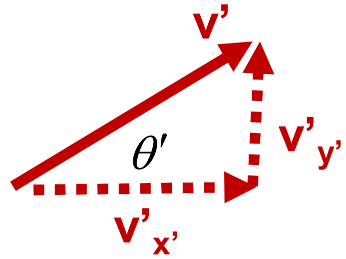
https://en.wikipedia.org/wiki/Terrell_rotation



Efeito Farrol



$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \beta c \Delta t'\right)$$
$$c\Delta t = \gamma\left(c\Delta t' + \beta \Delta x'\right)$$

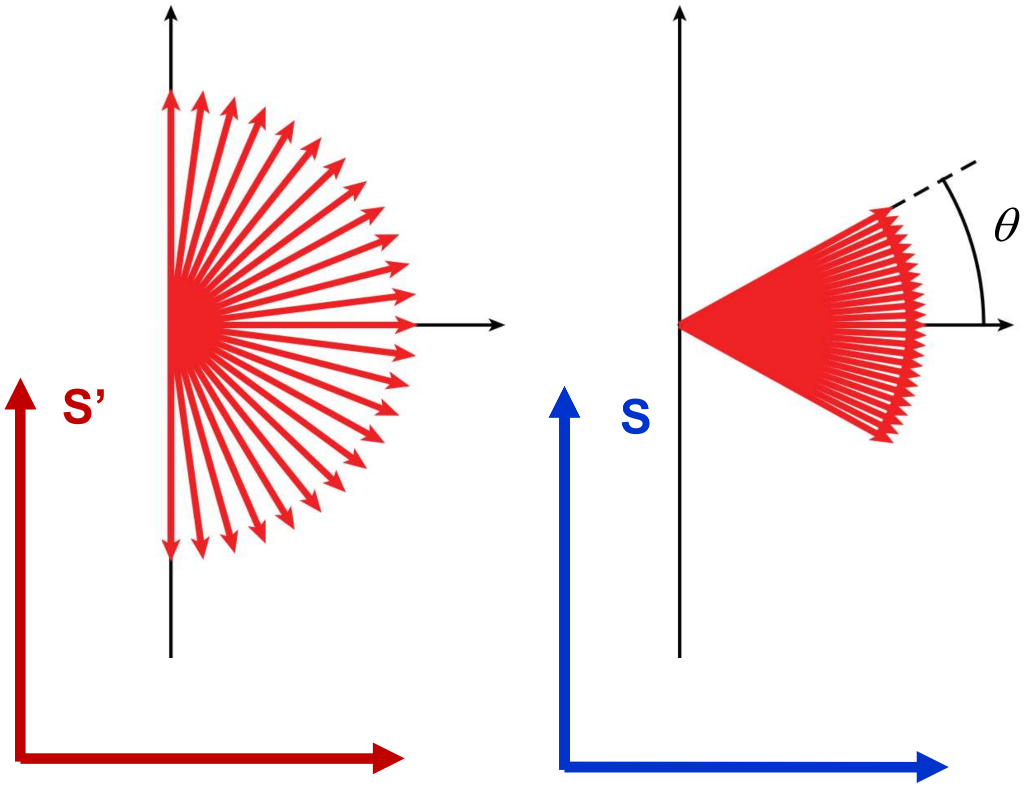


Sabemos que observado do referencial S o componente v_x é $\quad \mathrm{v}_x = \dfrac{\mathrm{v}'_x + u}{1 + \mathrm{v}'_x u / c^2}$

$$\mathrm{v}_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + u\Delta x' / c^2\right)}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y' / \Delta t'}{\gamma\left(1 + \dfrac{u \Delta x'}{c^2 \Delta t'}\right)} \to \mathrm{v}_y = \frac{\mathrm{v}'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u \mathrm{v}'_x}{c^2}\right)}$$

Efeito Farol



$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u v'_x}{c^2}\right)}$$

em S $\qquad v_x = u \qquad v_y = \frac{c}{\gamma}$

Notar que

$$v_x^2 + v_y^2 = u^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} = u^2 + c^2\left(1 - (u/c)^2\right)$$

$$= c^2$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{c} = \frac{1}{\gamma}$$

Considere um raio da luz que se propaga ao longo a direção y' em S'

$$v'_x = 0; v'_y = c$$