# Integrais ao longo de caminhos

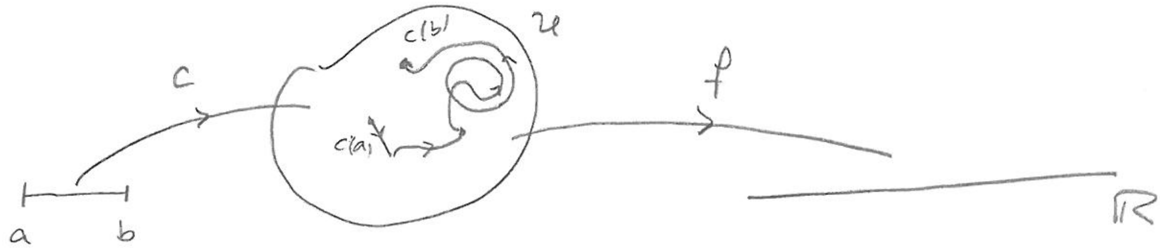
**Def:** $c:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se uma curva se for uma função
$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$

seccionalmente $C^1$, i.e.:

$\exists\; t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $c|_{]t_{i-1}, t_i[}$ é $C^1$, $i = 1, \dots, n$.

**Def:** Integral de $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, ($\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^3$, $f$ contínua) ao longo do caminho $c$ é definido como

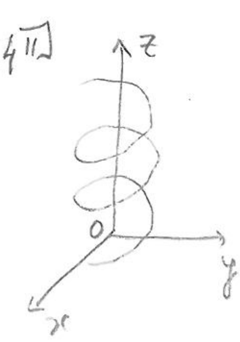
$$\int_c f\,ds = \int_a^b f(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt$$




Nota:

$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$ é o comprimento da curva $c$ (corresponde à integração ao longo de $c$ de $f \equiv 1$.

Exemplo: $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$




a) Calcule $L(c)$

$$L(c) = \int_0^{4\pi} \|c'(t)\|\,dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\,dt = 4\sqrt{2}\,\pi$$

$c'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$\|c'(t)\|^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1 = 2$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\int_c f\,ds = \int_0^{4\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1)\,\|c'(t)\|\,dt$$
$$= 2\sqrt{2}\; 4\pi = 8\sqrt{2}\,\pi$$

# Integral de linha ao longo dum campo vectorial



Seja $\vec{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^3$, um campo de vectores (supomos $\vec{F}$ contínuo)

Seja $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ uma curva. Chamamos integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da curva $c$ a

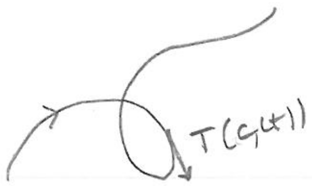
$$\int_c \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t)\,dt$$

## Nota

$$\int_c \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \|c'(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot \vec{T}(c(t)) \|c'(t)\|\,dt \left( = \int_c f\,ds \right)$$

em que $f = \vec{F} \cdot \vec{T}$ e $T$ é o vector unitário tangente à curva




## Exemplo

$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ $\qquad c(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_c \vec{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

ou, mais simplesmente,

$$\int_c \vec{F} \cdot ds = \int_c x\,dx + y\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t)\,dt + \int_0^{2\pi} t\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} x = \operatorname{sen} t &\to dx = \cos t\,dt \\ y = \cos t &\to dy = -\operatorname{sen} t\,dt \\ z = t &\to dz = dt \end{aligned}\right] = \int_0^{2\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

**Def**: Reparametrização duma curva $c: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$c: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ , $h: [c,d] \to [a,b]$ de classe $C^1$ (então $h'>0$ em $[a,b]$ ou $h'<0$ em $[a,b]$)

$c \circ h: [c,d] \to \mathbb{R}^3$ é uma reparametrização da curva $c$

- $h'>0$ preserva a orientação (1)
- $h'<0$ inverte a orientação (2)

(1) Seja $\vec{F}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores. Então

$$\int_c \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot c'(t)\,dt$$

$$\int_{c\circ h} \vec{F} \cdot ds = \int_c^d F(c(h(t)) \cdot (c\circ h)'(t)\,dt$$

$$= \int_c^d F(c(h(t)) \cdot c'(h(t))\, h'(t)\,dt =$$

$h(t) = u$ $\qquad h'(t)\,dt = du$

$t = c \Rightarrow u = h(c) = a$

$t = d \Rightarrow u = h(d) = b$

$$= \int_a^b F(c(u)) \cdot c'(u)\,du = \int_c \vec{F} \cdot ds$$

(2) $\displaystyle\int_c \vec{F} \cdot ds = -\int_{c\circ h} \vec{F} \cdot ds$

**Teorema**: Se $\vec{F}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é um campo de gradientes (ou campo conservativo) (i.e., existe $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tq $\nabla f = \vec{F}$) então, se $c: [a,b] \to \mathcal{U}$ é uma curva, tem-se que

$$\int_c \vec{F} \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a))$$

(logo, o integral não depende do caminho, depende apenas dos pontos inicial e final)

**Exemplo**: $F(x,y) = (y, x)$ é campo de gradientes?

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f(x,y) = yx + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) = x \Rightarrow g'(y) = 0$

$\Rightarrow g(y) = c$ $\qquad f(x,y) = yx + c$

A resposta é SIM

$\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$

Exemplo

$\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$ $\qquad c(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}t\right), 0\right), t \in [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{array}\right| \Rightarrow f(x,y) = -yx + g(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -x + g(x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x \Rightarrow f(x,y) = -yx + \frac{x^2}{2} + D, \ D \in \mathbb{R}$$

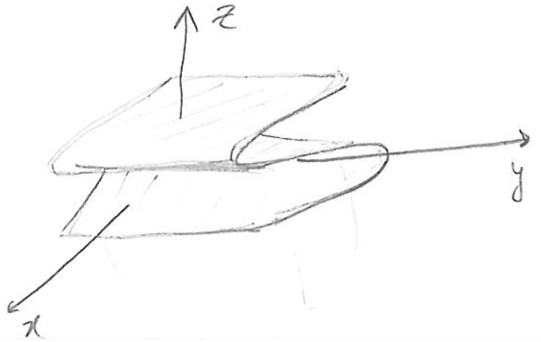
(escolhemos $D=0$)

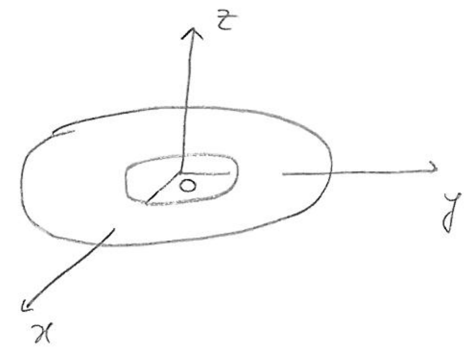
Então

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = f\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right) - f(0,0,0)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{32}$$

Superfícies parametrizadas




(pneu)

**Def**: Superfícies parametrizadas

Uma superfície parametrizada diferenciável $S$ é uma função

$$\phi: D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ em que } D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

tal que $\phi(D) = S$ e tal que

$$\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

é uma função de classe $C^1$.

Dizemos que $S$ é regular em $(u_0, v_0)$ se

$$\operatorname{car} J_{(u_0,v_0)} \phi = 2$$

(ou, equivalentemente, se denotarmos $\phi_u = \frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\phi_v = \frac{\partial \phi}{\partial v}$, então $\phi_u \times \phi_v \neq (0,0,0)$ em todos os pontos do domínio

## Exemplo 1

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{é uma função de classe } C^1$$
$$(u,v) \longmapsto (u\cos v, u \,\text{sen}\, v, u)$$

$$J_{(u,v)}\phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v \\ \text{sen}\, v & u\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\phi_u = (\cos v, \text{sen}\, v, 1) \qquad \phi_v = (-u\,\text{sen}\, v, u\cos v, 0)$

$\phi_u \times \phi_v = (-u\cos v, -u\,\text{sen}\, v, u\cos^2 v + u\,\text{sen}^2 v) = (-u\cos v, -u\,\text{sen}\, v, u)$

$\|\phi_u \times \phi_v\|^2 = u^2\cos^2 v + u^2\text{sen}^2 v + u^2 = 2u^2 \neq 0 \iff u \neq 0$

Então $S = \phi(\mathbb{R}^2)$ é regular em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = 0\}$

Alternativamente, poderíamos verificar quais os pontos onde

$\text{car}\, J_{(u,v)}\phi < 2 \iff \det\begin{pmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v \\ \text{sen}\, v & u\cos v \end{pmatrix} = 0 \wedge \det\begin{pmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\wedge \det\begin{pmatrix} \text{sen}\, v & u\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} u\cos^2 v + u\,\text{sen}^2 v = 0 \\ -u\,\text{sen}\, v = 0 \\ -u\cos v = 0 \end{cases}$$

## Exemplo 2

$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ e $\quad S = \text{Gr}\, f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y, x^2+y^2)$$

$\phi_x = (1, 0, 2x), \quad \phi_y = (0, 1, 2y)$

$\phi_x \times \phi_y = (-2x, -2y, 1) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Então $S$ é regular em todos os pontos.

## Plano tangente a uma superfície parametrizada

$\phi: D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(u_0, v_0) \in D$, $S = \phi(D)$

$\vec{n} = \vec{\phi_u} \times \vec{\phi_v}$ é ortogonal a $S$ em $\phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0$ é uma equação do plano tangente a $S$ em $(x_0, y_0, z_0)$

Sendo $\vec{n} = \vec{n}(u_0, v_0)$

## Exemplo 1 (pg 5) - continuação

Plano tangente a $S$ em $\phi(1, \pi/2) = (0, 1, 1)$

$\phi_u \times \phi_v \, (1, \pi/2) = (0, -1, 1)$

Então, a equação pretendida é

$$(x, y-1, z-1) \cdot (0, -1, 1) = 0 \iff -(y-1) + z - 1 = 0 \iff y - z = 0$$

## Área duma superfície

Seja $\phi: D \to \mathbb{R}^3$ uma função $C^1$ e $S = \phi(D)$ uma superfície regular. Então

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, d(u,v)$$

CASO PARTICULAR - S é o gráfico de uma função

$$\phi: D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \phi(D) = S = \text{Gr} f = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y, f(x,y))$$

$$\phi_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \phi_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \phi_x \times \phi_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

$$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \qquad \text{e}$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, d(x,y)$$

## Integrais de funções escalares em superfícies

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\phi(u,v))\,\|\phi_u \times \phi_v\|\,d(u,v)$$

sendo $\phi : D \longrightarrow S$ uma parametrização de $S$

Caso particular – $S$ é o gráfico de uma função

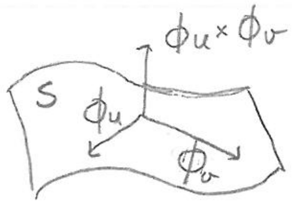
$$\begin{aligned} \phi : D &\longrightarrow S \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,g(x,y)) \end{aligned} \qquad S = Gr\,g$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\;d(x,y)$$

## Integral de um campo vectorial numa superfície

$\phi : D \to \mathbb{R}^3$, $S = \phi(D)$, $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$

$$\iint_S \vec{F}\cdot dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v))\cdot \phi_u \times \phi_v \; d(u,v)$$




Exemplo 1 – continuação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (xy, z, -y) \end{aligned}$$

$\phi(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, u)$
sendo $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u| \le 1 \wedge |v| \le 1\}$
domínio do $\phi$

$$\iint_S \vec{F}\cdot dS = \iint_D \vec{F}(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, u)\cdot(-u\cos v, -u\,\mathrm{sen}\,v, u)\,d(u,v)$$

$$= \iint_D \left(u\cos v \cdot u\,\mathrm{sen}\,v \cdot (-u\cos v) + u\,\mathrm{sen}\,v(-u\,\mathrm{sen}\,v) + u^2\right) d(u,v)$$

$$= \iint_D \left(-u^3\cos^2 v\,\mathrm{sen}\,v - u^2\,\mathrm{sen}^2 v + u^2\right) d(u,v)$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(-u^3\cos^2 v\,\mathrm{sen}\,v - u^2\,\mathrm{sen}^2 v + u^2\right) dv\,du$$

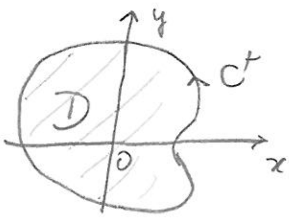
Teorema: Independência dos valores dos integrais de funções escalares ou vectoriais relativamente às parametrizações (regulares) de uma superfície orientada

Isto é: Se $\Phi_1$ e $\Phi_2$ são duas parametrizações de S com a mesma orientação:

- $\Phi_1(S) = \Phi_2(S)$
- $\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}$ e $\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}$ têm o mesmo sentido

Então
$$\iint_{\Phi_1} \vec{F}\cdot dS = \iint_{\Phi_2} \vec{F}\cdot dS \quad e \quad \iint_{\Phi_1} f\,dS = \iint_{\Phi_2} f\,dS$$

Teorema de Green: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio simples, $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$
$$(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$$




Então
$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y)$$

Corolário: Com as mesmas hipóteses, escolhendo $Q(x,y) = x$ e $P(x,y) = -y$, concluímos que

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1\,d(x,y) = \frac{1}{2}\int_{C^+} x\,dy - y\,dx$$

Teorema da divergência no plano

Nas condições do Teorema de Green, se $\vec{F} = (P,Q)$ é um campo vectorial,

$$\int_{C^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \nabla\cdot\vec{F}\,d(x,y)$$

em que $\vec{n}$ é a normal unitária exterior à curva C e

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(P,Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

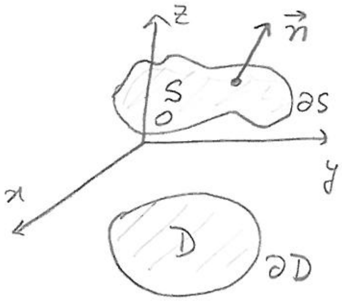
Nota: Se $c(t) = (x(t), y(t))$, como $c'(t) = (x'(t), y'(t))$ é tangente à curva, então

$$\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

# Teorema de Stokes

$S$ superfície orientada (regular), $\vec{F}: D \to S$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e

$c: [a,b] \to S$ uma curva que parametriza o bordo da superfície $S$




$$\nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

sendo $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds$$

Notas:
1) Se $S$ é uma sup. esférica $\partial S = \emptyset$
2) Se $S$ é uma sup. cilíndrica $S$ então $\partial S$ é constituída pelas 2 circunferências

Exemplo 1: Calcule, usando o T. Stokes

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

sendo $C$ a curva orientada que limite a superfície $S$ de equação $z = 1 - x - y$, para $(x,y) \in D((0,0), 1)$.

Parametrização de $S$

$\Phi: D((0,0),1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x, y, 1-x-y)$

- $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$

$$\nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{pmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(-z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3)\right)$$

$$- \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^3)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3)\right)$$

$$= (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

Então

$$\underbrace{\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz}_{1} = \underbrace{\iint_D \nabla \times \vec{F} \cdot (\Phi_x \times \Phi_y)\, d(x,y)}_{2} = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\, d(x,y)$$

$$2 \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ 3\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

em coordenadas polares

O exemplo está concluído

Mas podemos tentar calcular o integral directamente

1 A curva c parametriza-se por

$$c: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, 1-\cos t - \operatorname{sen} t)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)^3(-\operatorname{sen} t)dt + (\cos t)^3 \cos t\, dt - (1-\cos t - \operatorname{sen} t)^3 (\operatorname{sen} t - \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t) dt - \underbrace{\left[\frac{(1-\cos t - \operatorname{sen} t)^4}{4}\right]_0^{2\pi}}_{= 0}$$

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t) dt = \ldots$$

Teorema de Gauss (ou Teorema da divergência)

Seja $V$ uma região de $\mathbb{R}^3$. Se denotarmos por $\partial W$ a superfície orientada fechada que limita $V$ e se $\vec{F}$ um campo de vectores regulares sobre $V$ então

$$\iiint_V \nabla . \vec{F}\, dx dy dz = \iint_{\partial V} (\vec{F}.\vec{n}) dS \qquad \boxed{\partial V = \operatorname{fr} V}$$

Exemplo $\vec{F}(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$$\underbrace{\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS}_{1} = \underbrace{\iiint_W \nabla . \vec{F}\, dx dy dz}_{2} \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$\nabla . \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2 + 2y + 2z$$

$$2 = 2\iiint_W (1+y+z) d(x,y,z) = 2\iiint_W 1\, d(x,y,z) = \frac{8}{3}\pi$$

pela imparidade das funções

O cálculo de 1 dá muito mais trabalho, como podem ver abaixo

1 Parametrização do $S = \partial W$

$$\phi: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow S$$
$$(\theta, \varphi) \longmapsto (\operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$$

Normal a S em $(x,y,z)$

Como $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=1$ em $S$, $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z) \perp S$

$$\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x,y,z)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = (2x, y^2, z^2)\cdot(x,y,z) = 2x^2+y^3+z^2$$

$$1 = \iint_S (2x^2+y^3+z^2)\,dS$$

$$\phi_\theta = (-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 0)$$

$$\phi_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\phi_\theta \times \phi_\varphi = \det\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

$$= (-\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta, -\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos^2\theta)$$

$$= (-\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta, -\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$\|\phi_\theta\times\phi_\varphi\|^2 = \operatorname{sen}^4\varphi\,(\underbrace{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}_{=1}) + \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^3\varphi\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}^4\varphi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^5\varphi\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi\, d\theta = \cdots$$