Apontamentos III

Espaços euclidianos

Álgebra Linear | aulas teóricas

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

1º semestre 2016/17

Lina Oliveira
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

1

Espaços euclidianos

1.1 Espaços euclidianos reais

Espaços euclidianos reais: definição de produto interno e de norma. Exemplos em $\mathbb{R}^n$: o produto interno usual; a circunferência de raio unitário quando se considera um produto interno diferente do usual. Desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Seja V um espaço vetorial real. Uma forma ou função real

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V \to \mathbb{R} \\ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

diz-se um **produto interno** se, para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
2. $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0)$

Um espaço linear real V munido com um produto interno diz-se um **espaço euclidiano** (real).

Exemplos.

1. Produto interno usual em $\mathbb{R}^n$
   - $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \qquad (= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.
Note-se que a norma do vetor $\boldsymbol{x}$ satisfaz

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$$

- $\mathbb{R}^n$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Por analogia com os casos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, define-se

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ou seja

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

   Exercício. Determine a circunferência C de raio 1 e centro em $(0, 0)$

   $$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|(x_1, x_2)\| = 1\}$$

   considerando

   a) o produto interno usual
   b) o produto interno

   $$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \frac{1}{9} x_1 y_1 + \frac{1}{4} x_2 y_2$$

Norma e desigualdade triangular

Qualquer que seja o vetor $\boldsymbol{x} \in V$, define-se **norma** de $\boldsymbol{x}$ como

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}. \tag{1}$$

Fica assim definida uma função

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : & V \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\| \end{aligned}$$

tal que, para todo o $\boldsymbol{x} \in V$ e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, se tem

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ e $\|\boldsymbol{x}\| \iff \boldsymbol{x} = 0$
2. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *desigualdade triangular*

Uma função $V \to \mathbb{R}$ que satisfaça as condições (i)-(iii) diz-se uma **norma** definida em V.

A demonstração de que a função definida em (1) satisfaz a desigualdade triangular será feita posteriormente recorrendo à desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Desigualdade de Cauchy–Schwarz

Teorema 1. *Seja V um espaço euclidiano. Quaisquer que sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, tem-se*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|.$$

Note que em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ se tem:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos \theta,$$

donde

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| |\cos \theta| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|.$$

Distância

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, define-se **distância de $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$** como

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Regra do paralelogramo

Quaisquer que sejam os vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, tem-se

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

Exemplo. Um produto interno em $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, define-se

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \operatorname{tr}(B^T A)\\ &= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}\end{aligned}$$

com $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. [1] Observe-se que, sendo B_c a base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle_{\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \langle (A)_{B_c}, (B)_{B_c}\rangle_{\mathbb{R}^4}$$

resultando assim que o produto interno definido acima "respeita" o isomorfismo $A \mapsto (A)_{B_c}$ entre $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$.

Demonstração da desigualdade triangular

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle\\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \quad \longleftarrow \quad \text{produto interno em termos da norma}\\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| + \|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \quad \longleftarrow \quad \text{desigualdade de Cauchy–Schwarz}\\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

Donde

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,$$

o que conclui a demonstração.

[1] Note que $\operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(A^T B)$, o que também permite definir

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

1.2 Matriz de Gram

Seja V um espaço euclidiano real e seja $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ uma base de V. Sendo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ tais que $\boldsymbol{x}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\boldsymbol{y}_B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{b}_n \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_2 \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_n \rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_n \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n \rangle \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, dado um produto interno em V e uma base B, é possível determinar uma matriz G tal que

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{y}_B^T G \mathbf{x}_B.$$

A matriz $G = [g_{ij}]$, onde para todo $i, j = 1, \ldots, n$, se tem $g_{ij} = \langle b_j, b_i \rangle$, diz-se a **matriz de Gram** do conjunto de vetores $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$.

Note que:

- G é uma matriz $n \times n$ real simétrica ($G = G^T$);
- para todo o vetor $\mathbf{x} \in V$, não nulo,

$$\mathbf{x}_B^T G \mathbf{x}_B > 0.$$

Uma matriz (quadrada) real simétrica A de ordem k diz-se **definida positiva** se, para todo o vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ não nulo, $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$.

Exercício. Considere que $\mathbb{R}^n$ está munido com a base canónica $\mathcal{E}_n$. Qual é a matriz de Gram G que corresponde ao produto interno usual em $\mathbb{R}^n$? E a que corresponde ao produto interno do exercício (b) da Secção 18?

Proposição 1. *Uma matriz real simétrica é definida positiva se e só se todos os seus valores próprios são positivos.*

Teorema 2. *Seja A uma matriz real simétrica de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) *A expressão*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{y}^T A \mathbf{x}$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(ii) *A é uma matriz definida positiva.*

1.3 Espaços euclidianos complexos. Vetores ortogonais.

Espaços euclidianos complexos. Exemplo: produto interno usual no espaço $\mathbb{C}^n$. Matriz de Gram; matrizes hermitianas e matrizes definidas positivas. Ângulo entre dois vetores, vetores ortogonais e teorema de Pitágoras.

Seja V um espaço vetorial complexo. Uma forma ou função complexa

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V \to \mathbb{C} \\ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

diz-se um **produto interno** se, para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$
2. $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0)$

Um espaço vetorial complexo V munido com um produto interno diz-se um **espaço euclidiano** (complexo).

Tal como no caso dos espaços euclidianos reais, define-se **norma** dum vetor como

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle},$$

e **distância de $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$** como

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Exemplo. Produto interno usual em $\mathbb{C}^n$. Sendo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{C}^n$, define-se

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \cdots + x_n \overline{y}_n$$

e, portanto,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\mathbf{y}}^T \mathbf{x}.$$

Quanto à norma, temos

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n$$

ou seja

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

Todos os resultados apresentados para espaços euclidianos reais são válidos também para os espaços euclidianos complexos (i.e., desigualdade de Cauchy–Schwarz, desigualdade triangular, regra do paralelogramo, ...).

Matriz de Gram

Seja V um espaço euclidiano complexo e seja $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ uma base de V. Sendo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ tais que $\boldsymbol{x}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\boldsymbol{y}_B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \langle \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n, \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{b}_n\rangle \\ &= \begin{bmatrix}\overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 & \ldots & \overline{\beta}_n\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1\rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_1\rangle \\ \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2\rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_2\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_n\rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_n\rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n\rangle\end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, dado um produto interno em V e uma base B, é possível determinar uma matriz G tal que

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \overline{\mathbf{y}}_B^T G \mathbf{x}_B.$$

A matriz $G = [g_{ij}]$, onde para todo $i, j = 1, \ldots, n$, se tem $g_{ij} = \langle b_j, b_i\rangle$, diz-se a **matriz de Gram** do conjunto de vetores $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$.

Note que:

- G é uma matriz $n \times n$ complexa tal que $G = \overline{G}^T$;
- para todo o vetor $\mathbf{x} \in V$, não nulo,

$$\overline{\mathbf{x}}_B^T G \mathbf{x}_B > 0.$$

Uma matriz complexa quadrada A de ordem k diz-se **hermitiana** se $A = \overline{A}^T$.

N.B.- Como vimos na Secção "Valores próprios e vetores próprios", o espetro $\sigma(A)$ de uma matriz hermitiana A está contido em $\mathbb{R}$.

Uma matriz hermitiana A de ordem k diz-se **definida positiva** se, para todo o vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ não nulo, $\bar{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} > 0$.

Proposição 2. *Uma matriz hermitiana é definida positiva sse todos os seus valores próprios são positivos.*

Teorema 3. *Seja A uma matriz hermitiana de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) A expressão
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\mathbf{y}}^T A\mathbf{x}$$
define um produto interno em $\mathbb{C}^n$.

(ii) A é uma matriz definida positiva.

Ângulo entre dois vetores

Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vetores não nulos de um espaço euclidiano real V. Define-se *ângulo* entre os vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ como sendo o ângulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que

V é um espaço euclidiano **real**

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}.$$

A desigualdade de Cauchy–Schwarz mostra que $|\cos\theta| \leq 1$.

Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vetores (possivelmente nulos) de um espaço euclidiano V. Os vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ dizem-se **ortogonais**, e representa-se $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, se

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0.$$

V é um espaço euclidiano **real** ou **complexo**

Exercício. Quais são os vetores ortogonais a $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$, quando se considera em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual?

Teorema 4. ***(Teorema de Pitágoras)*** *Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vetores ortogonais de um espaço euclidiano V. Então*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Demonstração. Exercício. □

1.4 Complemento ortogonal

Conjuntos ortogonais e complemento ortogonal de um subespaço. Complemento ortogonal de um subespaço e os vetores ortogonais a um conjunto gerador desse subespaço. Dimensão do complemento ortogonal e grau de indeterminação do sistema de equações lineares homogéneo obtido a partir duma base do subespaço. Exemplos. Classificação dos complementos ortogonais de subespaços de $\mathbb{R}^n$ baseada na dimensão dos subespaços e no grau de indeterminação do sistema de equações lineares homogéneo correspondente. Subconjuntos ortogonais dum espaço euclidiano: definição e majoração da cardinalidade do subconjunto (dependendo da dimensão do espaço euclidiano). Exemplos em $\mathbb{R}^n$. Complementos ortogonais dos subespaços associados a uma matriz.

Complemento ortogonal

Seja X um subconjunto de um espaço euclidiano V. Diz-se que um vetor $\boldsymbol{u}$ é **ortogonal a** X se $\boldsymbol{u}$ é ortogonal a todos os elementos de X. Designa-se por $\boldsymbol{u} \perp W$.
Por exemplo, $(1, 1, 0)$ é ortogonal ao plano S (cf. exercício anterior).

Seja W um subespaço de V. O **complemento ortogonal** de W, designado por $W^\perp$, é definido por

$$W^\perp = \{\boldsymbol{u} \in V \, : \, \boldsymbol{u} \perp W\}.$$

Exercício. Determine o complemento ortogonal da reta gerada pelo vetor $(1, 1, 0)$.

Proposição 3. *$W^\perp$ é um subespaço de V.*

Proposição 4. *Seja W um subespaço linear de um espaço euclidiano V e seja $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ um conjunto gerador de W. Então $\boldsymbol{u} \in V$ é ortogonal a W sse for ortogonal a $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$.*

Corolário 1. *Nas condições da proposição anterior, $\boldsymbol{u} \in V$ é ortogonal a W sse for ortogonal a uma base de W.*

Exercício. Determine o complemento ortogonal do plano W de $\mathbb{R}^3$ com a equação cartesiana $x = y$.

Solução. $W^\perp$ é a reta de equações:

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \textbf{equações cartesianas}$$

ou

$$(x, y, z) = t(-1, 1, 0) \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \textbf{equação vetorial}$$

ou

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \textbf{equações paramétricas}$$

Proposição 5. *Seja W um subespaço dum espaço euclidiano V.*

(i) $W \cap W^\perp = 0$

(ii) $W^{\perp\perp} = W$

Um subconjunto X dum espaço euclidiano V diz-se um **conjunto ortogonal** se, quaisquer que sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ com $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, se tem $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Pergunta. Seja X um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo.

- Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$, quantos vetores tem X, no máximo?
- Se $X \subseteq \mathbb{R}^3$, quantos vetores tem X, no máximo?

Proposição 6. *Seja V um espaço euclidiano. Seja $X = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ um conjunto ortogonal tal que $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$, para todo $j = 1, \ldots, k$. Então X é linearmente independente.*

Demonstração.

$$\langle \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j \rangle = \alpha_j^2 \|\boldsymbol{v}_j\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

□

Corolário 2. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. e seja $X = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ um conjunto ortogonal tal que $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$, para todo $j = 1, \ldots, k$. Então $k \leq n$.*

Corolário 3. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. e seja $X = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ um conjunto ortogonal tal que $\boldsymbol{v}_j \neq \mathbf{0}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Então X é uma base de V.*

Complementos ortogonais dos subespaços associados a uma matriz real

Proposição 7. *Seja A uma matriz $n \times k$ com entradas reais. Então, considerando em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ os produtos internos usuais, tem-se:*

(i) $L(A)^\perp = N(A)$

(ii) $N(A)^\perp = L(A)$

(iii) $C(A)^\perp = N(A^T)$

(iv) $N(A^T)^\perp = C(A)$

1.5 Projeções ortogonais

Bases ortogonais e bases ortonormais: existência e coordenadas. Exemplos. Projeção ortogonal sobre um vetor. Projeção ortogonal de vetores sobre um subespaço de um epaço euclidiano e decomposição desse espaço em soma direta. Método de ortogonalização de Gram–Schmidt.

Bases ortogonais e bases ortonormais

Diz-se que uma base $\mathcal{B}$ de um espaço euclidiano V é:

- uma **base ortogonal** se for um conjunto ortogonal;
- uma **base ortonormal** se for um conjunto ortogonal e todos os seus elementos tiverem norma unitária.

Seja $\boldsymbol{x}$ um vetor de V e seja

$$(\boldsymbol{x})_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

o vetor das coordenadas de $\boldsymbol{x}$ na base $\mathcal{B}$.

Vetor das coordenadas numa base ortogonal $\mathcal{B}$

$$\alpha_j = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j \rangle}{\|\boldsymbol{b}_j\|^2}$$

Vetor das coordenadas numa base ortonormal $\mathcal{B}$

$$\alpha_j = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j \rangle$$

Pergunta: Há sempre bases ortogonais (respetivamente, bases ortonormais)?
R: Sim. $\longrightarrow$ **Método de ortogonalização de Gram–Schmidt**

Projeções ortogonais

Define-se a **projeção ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{b}_j$** com o vetor

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_j} \boldsymbol{x} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j \rangle}{\|\boldsymbol{b}_j\|^2} \boldsymbol{b}_j$$

$$= \alpha_j \boldsymbol{b}_j$$

Mais geralmente, dados vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ de um espaço euclidiano V, com $\boldsymbol{v} \neq 0$, a **projeção ortogonal de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{v}$** é o vetor definido por

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2} \boldsymbol{v}.$$

Exemplo. Considerando que $\mathbb{R}^2$ está munido com a base canónica $\mathcal{E}_2 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, qualquer vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso como uma soma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \operatorname{proj}_{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{u} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{u}_W + \boldsymbol{u}_{W^\perp} \ , \end{aligned}$$

onde W é o eixo dos xx.

Teorema 5. *Seja W um subespaço linear de um espaço euclidiano V. Todo o vetor $\boldsymbol{u}$ de V se decompõe de forma único como*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_W + \boldsymbol{u}_{W^\perp},$$

onde $\boldsymbol{u} \in W$ e $\boldsymbol{u}_{W^\perp} \in W^\perp$.

Nestas condições, diz-se que V é a **soma directa** de W com $W^\perp$ e denota-se

$$V = W \oplus W^\perp,$$

o que por definição é dizer:

- $V = W + W^\perp$
- $W \cap W^\perp = \{0\}$

Define-se a **projeção ortogonal de $\boldsymbol{u}$ sobre W** como sendo o vetor $\boldsymbol{u}_W$.

Se considerarmos que W está munido com a base ordenada ortogonal $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$, tem-se

$$\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_1} \boldsymbol{u} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_2} \boldsymbol{u} + \cdots + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}_k} \boldsymbol{u}.$$

Pergunta: Como calcular o vetor $\boldsymbol{u}_{W^\perp}$ ou, por outras plavras, a $\operatorname{proj}_{W^\perp} \boldsymbol{u}$?
Resposta:

$$\operatorname{proj}_{W^\perp} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_W$$

ou, se considerarmos que $W^\perp$ está munido com a base ordenada ortogonal $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_l)$, tem-se

$$\mathrm{proj}_{W^\perp} \boldsymbol{u} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}'_1} \boldsymbol{u} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}'_2} \boldsymbol{u} + \cdots + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}'_l} \boldsymbol{u}.$$

Pergunta: Qual é o número l de vetores na base $\mathcal{B}'$?
Resposta: Supondo que V tem dimensão n, temos $l = n - k$ porque

1. $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ é linearmente independente (porque é ortogonal)
2. o Teorema 5 garante que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ gera V

Conclui-se assim que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ é uma base de V, e o resultado torna-se imediato.

1.6 Distância de um ponto a um subespaço. Equações cartesianas de k-planos.

Distância de um ponto a um subespaço e aproximação óptima. Equações cartesianas de k-planos.

Aproximação óptima

Dado $\boldsymbol{u}$ em V e um subespaço W de V, pretende-se responder à questão:

Qual é o elemento $\boldsymbol{x}$ em W que está mais próximo de $\boldsymbol{u}$?

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})^2 = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\|^2 &= \|(\boldsymbol{u}-\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}) + (\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{u}-\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}\|^2 + \|\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\|^2 \qquad \text{(teorema de Pitágoras)} \\
&= \|\operatorname{proj}_{W^\perp} \boldsymbol{u}\|^2 + \underbrace{\|\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\|^2}_{\text{mínimo quando é igual a } 0}
\end{aligned}$$

Donde se conclui que

a aproximação óptima coincide com $\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}$
o ponto mais próximo de $\boldsymbol{u}$ em W é $\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}$

Assim, define-se **distância de $\boldsymbol{u}$ a um subespaço** W como

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{u},W) = \|\operatorname{proj}_{W^\perp} \boldsymbol{u}\|.$$

Equações cartesianas de k-planos

Um k-**plano** de $\mathbb{R}^n$ é qualquer subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ que se possa exprimir na forma

$$S = W + \boldsymbol{p},$$

onde W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e $\boldsymbol{p}$ é um elemento de $\mathbb{R}^n$. Dependendo da dimensão de W, teremos a seguinte notação:

- se $k=0$, S diz-se um **ponto**
- se $k=1$, S diz-se uma **reta**

- se $k = 2$, S diz-se um **plano**
- se $k = n - 1$, S diz-se um **hiperplano**

(Se $k = n$, $S = \mathbb{R}^n$.)

Sendo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um elemento de S, existe $\boldsymbol{y}$ em W tal que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$$

ou, equivalentemente,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}. \tag{2}$$

A equação (2) mostra que à custa duma equação vetorial, de equações cartesianas ou de equações paramétricas de W se obtém facilmente (substituindo $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$), respetivamente, uma equação vetorial, equações cartesianas ou equações paramétricas de S.

Analogamente, à custa do subespaço $W^\perp$ também se pode obter equações de S. Se $\mathcal{B}_{W^\perp} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-k})$ for uma base do complemento ortogonal de W, temos que $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \in W$ ou, equivalentemente, $\dim W = k$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-k}^T \end{bmatrix}}_{(n-k)\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{(n-k)\times 1}$$

Definindo a matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-k}^T \end{bmatrix},$$

obtemos o sistema de equações lineares homogéneo $A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Consequentemente, a partir duma equação vetorial de $N(A)$, de equações cartesianas de $N(A)$ ou de equações paramétricas $N(A)$, obtêm-se as equações correspondentes de S.

Exercício. Determine uma equação vetorial, equações cartesianas e equações paramétricas do plano que passa no ponto $\boldsymbol{p} = (1, 2, 0)$ e é perpendicular à reta que passa nesse ponto e tem a direção do vetor $\boldsymbol{n} = (5, 1, -2)$.

Distância dum ponto a um k-plano

Seja $S = W + \boldsymbol{p}$ e consideremos um ponto $\boldsymbol{q}$ de $\mathbb{R}^n$. Dado $\boldsymbol{x}$ em S,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}\| \\
&= \|(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x})\| \\
&= \|(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{y}\| \\
&= \mathrm{d}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

O valor mínimo desta distância obtém-se para $\boldsymbol{y} = \operatorname{proj}_W(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})$, como foi visto anteriormente. Define-se então a **distância do ponto $\boldsymbol{q}$ ao plano** S como

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{S}) &= \mathrm{d}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, W) \\
&= \|\operatorname{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})\|.
\end{aligned}$$

Exemplo. Calcule a distância de $(3, 2, -1)$ ao plano S do exercício anterior.