# Aquisição, análise e tratamento de dados

## Porque nos devemos preocupar com os erros experimentais?

A incerteza de medição é um valor associado ao resultado da medição que descreve um intervalo de valores no qual esperamos que esteja contido o valor verdadeiro da medida, com um determinado nível de confiança.

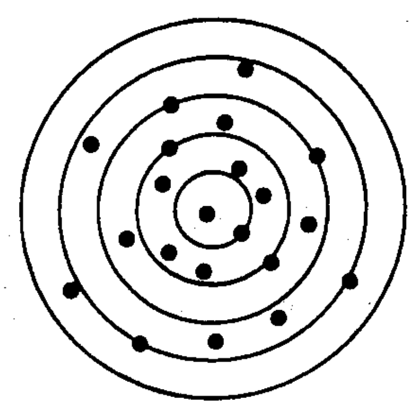
Por exemplo, nas seguintes situações:
- Medição da potência de travagem de um veículo durante a sua inspeção periódica;
- Medição da concentração de substâncias dopantes nos fluidos corporais de um atleta de alta competição;
- Utilização do radar (p.ex., pela Polícia) para conhecer a velocidade instantânea de uma viatura;
- Medição da corrente eléctrica num dispositivo microelectrónico;
- etc., etc.

Quando é necessário agir com base em resultados de medidas experimentais e não se tem em conta a incerteza da medição pode haver consequências gravosas, e/ou injustiças, ou simplesmente cometem-se erros que nos impedem de ver a realidade, e que se poderão propagar.

**ERROS EXPERIMENTAIS**

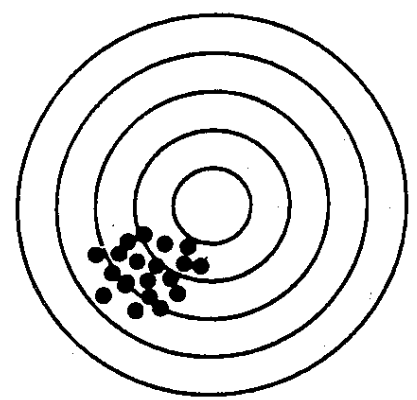
- Sistemáticos
  - Observador (e.g. paralaxe)
  - Instrumento (calibração, zero)
  - Método
  - Modelo teórico (medições indirectas)
- Acidentais ou aleatórios (de observação, ambientais)

**Exacta mas pouco precisa**



Acidental

**Precisa mas pouco exacta (ou de baixo rigor)**



Sistemático

# Apresentação dos resultados

**Os resultados experimentais devem ser apresentados com o respectivo valor estimado do erro da medida e com a unidade utilizada.**

$$\mathbf{x_v = x_1 \pm \Delta x}$$

$$\mathbf{x_1 - \Delta x \leq x_v \leq x_1 + \Delta x}$$

Incerteza numa medição directa

- Precisão limitada (aparelho de medida)
- Erro experimental (processo de medir e experimentador)

Apresentação do erro

- Erro absoluto: Medida = [valor numérico] ± [erro] (unidade)
- Erro relativo: Medida = [valor numérico] (unidade) ± [erro / valor numérico× 100%]

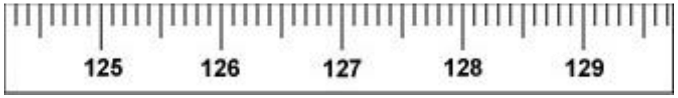
**Medição directa única** → Pouca informação sobre os erros

↓

Limite superior do erro de leitura

↓

*poder de resolução* da escala




ESCALA CONTÍNUA

p.e. uma régua, o erro é igual a metade da menor divisão dessa escala

ESCALA DISCRETA

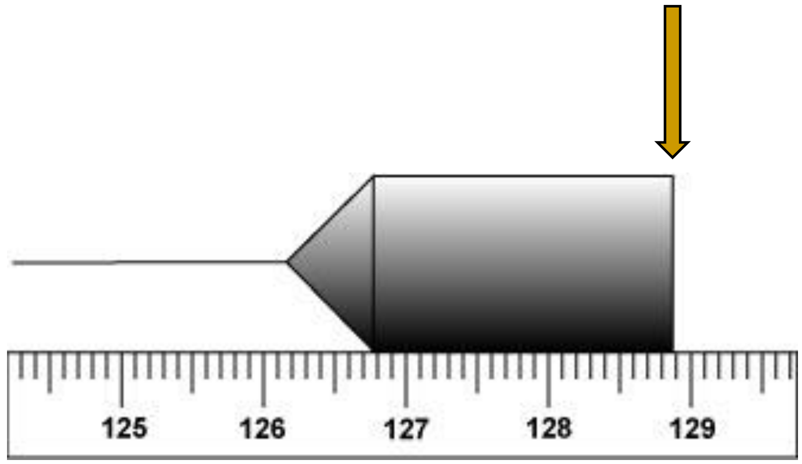
p.e. um balança digital, o erro é igual ao menor valor que é possível ler nessa escala (fabricante poderá fornecer mais informação)


↓

Outros erros (tentar estimar!)

Sempre que possível tentar repetir a medição!

## Medição com uma escala contínua



escala em cm

Com este tipo de medida não conseguimos dizer se o comprimento é 128.89 cm ou 128.88 cm. No entanto podemos verificar que está mais perto de 128.9 cm do que de 128.8 cm. Deste modo podemos constatar com confiança que o comprimento L é dado por:

$$L = 128.90 \pm 0.05 \text{ cm}$$

## Medição com instrumentos digitais

O instrumento dá-nos o valor central da medida.

Todos os instrumentos tem um limite de precisão, e o erro é normalmente fornecido pelo fabricante.

Se não tiver informação do fabricante, poderá utilizar a seguinte regra:
**O erro de um dispositivo digital é normalmente metade da precisão do último algarismo.**

Por exemplo suponha que mediu a massa de um corpo com uma balança e o resultado foi 27.2 g. Se não tem informação do fabricante, como avaliar o erro?
Sendo a resolução da medida de 0.1 g, o dispositivo diz que o valor estará entre 27.1 g e 27.3 g. Assim poderemos dizer que:

$$M = 27.2 \pm 0.1 \text{ g}$$

## Nunca indique a incerteza experimental com base no valor já conhecido!

Não é correcto afirmar "o resultado é *x*, *o valor tabelado ou esperado para esta grandeza é y, deste modo o erro desta medida é* $\pm(x - y)$."
$(x - y)$ representa a diferença entre o resultado obtido e o valor aceite, e não indica a incerteza da medida.

A discrepância só pode ser utilizada para caracterizar a consistência das diferentes medidas mas não a incerteza da experiência. Se essa diferença for grande então, para além de indicar o erro da experiência, também será necessário explicar o que produziu essa diferença.

## Algarismos significativos

**1.** O dígito mais à esquerda (que não seja zero) é o dígito mais significativo
**2.** Se não existe um ponto decimal*, o dígito mais à direita (que não seja zero) é o digito menos significativo.
**3.** Se existir um ponto decimal, o dígito mais à direita (mesmo que seja zero) é o digito menos significativo.
**4.** Todos os dígitos, desde o menos ao mais significativo são contados como dígitos significativos.

*Nota: na convenção portuguesa, o separador decimal é a vírgula. No entanto, devido ao uso generalizado do ponto como separador decimal, tanto na literatura como na maioria dos dispositivos electrónicos, sugere-se aqui o uso do ponto, como forma de facilitar a comunicação científica e técnica, tendo em vista a uniformização da notação.

**exemplos**

Todos os seguintes exemplos têm 4 algarismos significativos:

**1234 ; 123400 ; 123.4 ; 1001 ; 1000. ; 10.10 ; 0.0001010**

**1010** tem 3 algarismos significativos, enquanto **$1.010 \times 10^3$** ou **1010.** têm 4 algarismos significativos

**Prefixos dos múltiplos e submúltiplos** mais comuns das grandezas fundamentais, todos na base de potências de 10

| Múltiplo | prefixo | Símbolo |
|---|---|---|
| $10^{12}$ | tera | T |
| $10^{9}$ | giga | G |
| $10^{6}$ | mega | M |
| $10^{3}$ | kilo | k |
| $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{-9}$ | nano | n |

## Arredondamentos

**1.** Se a fracção for superior a 0.5, incrementa-se o algarismo menos significativo.

**2.** Se a fracção for inferior a 0.5, mantém-se inalterado o algarismo menos significativo.

**3.** Se a fracção for igual a 0.5 , incrementa-se o algarismo menos significativo se ele for ímpar (ou par, conforme a convenção).

# Regras para apresentação de resultados experimentais

**1- Os erros devem ser dados somente com um único algarismo significativo.** Só em casos excepcionais, o erro poderá ser dado com dois algarismos significativos (e neste caso, o segundo algarismo deve ser 5 ou 0).

**2- O último algarismo significativo no valor de uma grandeza física e o seu erro, expresso nas mesmas unidades, devem corresponder à mesma ordem de grandeza (centenas, dezenas, unidades, décimas, centésimas).**

**expressões incorrectas** pela regra 1

$23456 \pm 3456$ m    $12.345 \pm 0.165$ m    $234.50 \pm 2.30$ m

**expressões incorrectas** pela regra 2

$24567 \pm 3000$ m    $43 \pm 0.06$ m    $345.2 \pm 3$ m

**expressões correctas**

$37000 \pm 2000$ m    $37.3 \pm 0.3$ m    $375 \pm 3$ m    $53.00 \pm 0.07$ m

ou $(37 \pm 2) \times 10^3$ m

## Regras para apresentação de resultados experimentais

Por exemplo, a apresentação do resultado da medida de uma certa distância:
17 ± 2 cm.
Significa que esta grandeza tem um valor em que existe uma certa *probabilidade* de estar no intervalo entre 15 cm e 19 cm.

Uma medida de uma velocidade expressa da forma 22.67±10 m/s
**não está correctamente expressa**, já que o algarismo das dezenas pode variar entre 1 e 3. Os algarismos que aparecem depois, 2, 6 e 7 não têm significado e devem ser arredondados.

A medida deve ser expressa por: **20±10 m/s**

com um erro de 0.03 deve ser expressa por: **12.67 ± 0.03 m/s**

com um erro de 0.3 deve ser expressa por: **12.7 ± 0.3 m/s**

com um erro de 3 deve ser expressa por: **23 ± 3 m/s**

# Tratamento estatístico dos erros aleatórios

## Medição apenas com erros aleatórios


## Medição com erros aleatórios e erro sistemático

## Medição directa múltipla

Muitas vezes os dados provêm de uma distribuição normal ou gaussiana e as medidas podem considerar-se independentes umas das outras. Além disso, à partida não há razão para considerar que os erros associados a algumas medidas são maiores do que a outras.

Usa-se o valor mais provável, geralmente a **média amostral** para estimar o valor verdadeiro do parâmetro desconhecido

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

N é o número de medidas

Se o erro cometido na medição for inferior ao limite superior do erro de observação, pode ser estimado através do cálculo do **desvio padrão da amostra (s)**:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$$

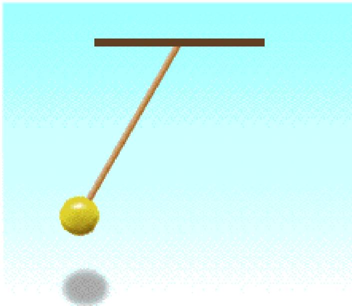
Erro estimado de cada medida individual

O **desvio padrão da média ou erro estatístico para N medidas será**: $s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$

O significado de ***s*** é que cerca de 68% dos resultados se situam no intervalo $\left|\bar{x} - s, \bar{x} + s\right|$

# Exemplo

## Medição do período de oscilação de um pêndulo



| Trial number, $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Measured Value, $x_i$ (seconds) | 3.9 | 3.5 | 3.7 | 3.4 | 3.5 |

O valor médio é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{3.9+3.5+3.7+3.4+3.5}{5}\,\mathrm{s} = 3.6\ \mathrm{s}$$

O desvio padrão amostral é:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{0.09+0.01+0.01+0.04+0.01}{4}}\,s = 0.2\ s$$

O melhor valor estimado para o período da oscilação e para o erro dessa estimativa é:

$$T = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{N}} = 3.6\ \mathrm{s}\ \pm\ 0.1\ \mathrm{s}$$

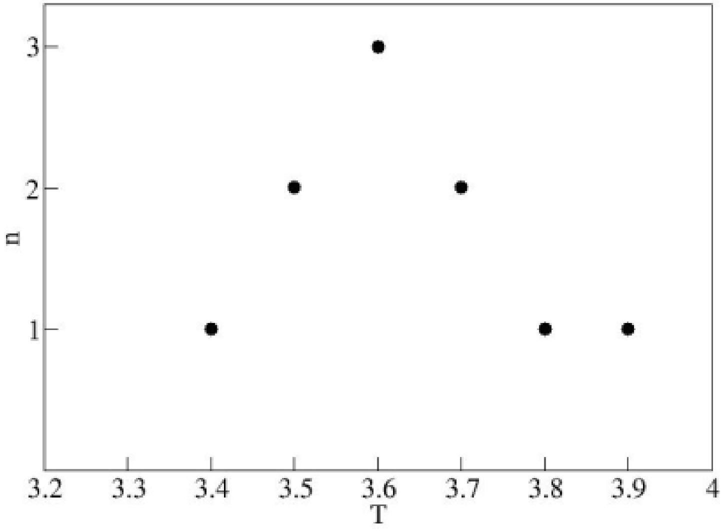
Suponha que continuamos a medir o período da oscilação, até termos 10 medidas :
3.9;  3.5;  3.7;  3.4;  3.5;  3.6;  3.7;  3.6;  3.8;  3.6

Podemos contar as ocorrências de cada valor:

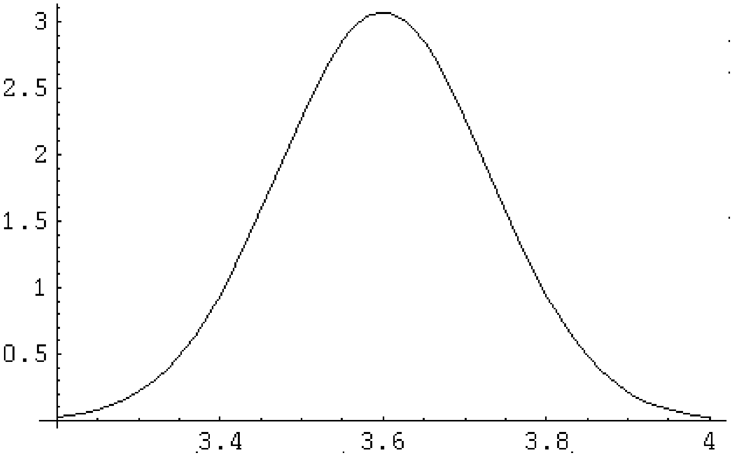
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores, T (s) | 3.4 | 3.5 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 |
| Ocorrências, n | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Se medirmos muito mais vezes, os dados aproximam-se em distribuição de uma curva teórica conhecida como a distribuição normal ou gaussiana

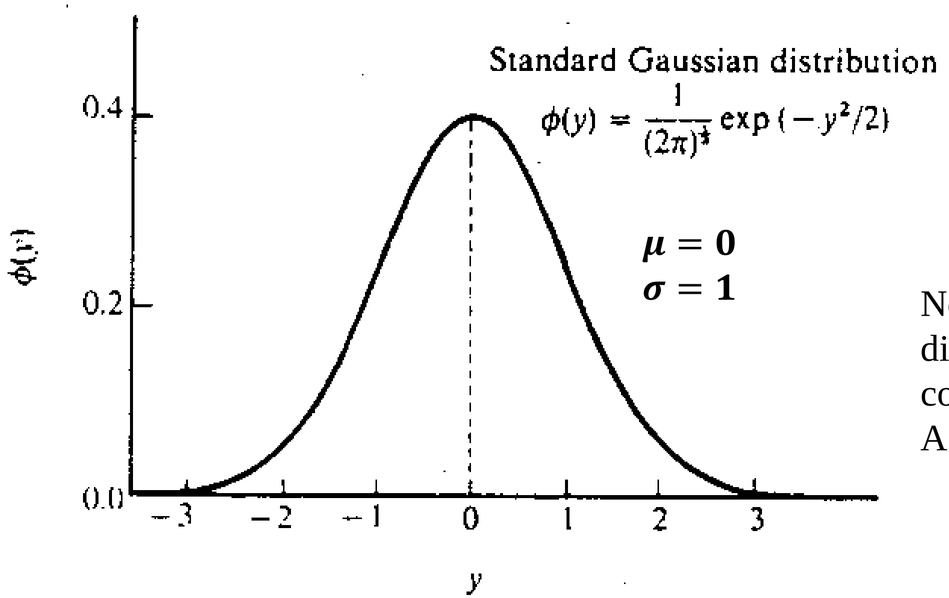
$N = 10$




$N = \infty$



**Com um número elevado de medidas teremos, aproximadamente, uma distribuição gaussiana em torno do valor médio teórico, $\mu$, de uma variável aleatória (*v.a.*) $X$ com desvio-padrão $\sigma$.**




$$\langle \sigma^2 \rangle \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

No gráfico ao lado está representada a v.a. $Z$ com distribuição normal reduzida (ou *standard*), i.e., com $\mu = 0$ *e* $\sigma = 1$.
A v.a. $X$ está relacionada com $Z$ por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ ou } X = \sigma \cdot Z + \mu$$

68.3% dos valores estão no intervalo $[\mu - \boldsymbol{\sigma}, \mu + \boldsymbol{\sigma}]$

95 % dos valores estão no intervalo $[\mu - \mathbf{1.96}\boldsymbol{\sigma}, \mu + \mathbf{1.96}\boldsymbol{\sigma}]$

**A identificação do erro de um valor experimental como o desvio padrão amostral, obtido de *n* medidas directas consecutivas, só faz sentido no caso do desvio-padrão (ou o erro médio quadrático) ser maior do que o erro instrumental, aquele que vem definido pela resolução do aparelho de medida.**

Erro experimental
Erro calculado

Erro a considerar é o maior dos dois

## Exemplos

**a. Medida da intensidade de corrente com um amperímetro digital**
leitura da corrente 0.64 A (valor constante durante o intervalo de tempo da medida)
menor divisão do amperímetro é de 0.01 A,
Sem outra informação do fabricante, a medida será expressa como: **0.64±0.01 A**

## Exemplos

**b. Medida de um determinado intervalo de tempo, *t*, quatro vezes com um cronómetro que permite medir décimos de segundo.**

Os resultados são: 6.3; 6.2; 6.4 e 6.2 s.

O valor médio da medida é 6.275 s e o desvio-padrão da média é $s/\sqrt{n}$ = 0.0479 s.

O erro médio quadrático é 0.0829 s. Usaremos $s/\sqrt{n}$ como estimador do erro.

Este erro é expresso com um só algarismo significativo, $\Delta t$ = 0.05 s.

O erro aleatório é menor do que o erro instrumental, que é 0.1 s,

O resultado final da medida é **t = 6.3 ± 0.1 s**

**c. Medida de um determinado intervalo de tempo, *t*, quatro vezes com um cronómetro que permite medir décimos de segundo.**

Os resultados são: 5.5; 5.7; 6.2 e 6.5 s.

O valor médio é 5.975 s, o desvio padrão amostral é $s$ = 0.4573474 s. O desvio padrão da média é 0.2286737 s.

O desvio padrão da média é maior do que o erro instrumental.

Resultado final da medida é **t = 6.0 ± 0.2 s**

## Estimativa de erros nas medidas com o multímetro digital

Tipicamente, o número de dígitos que um multímetro digital apresenta é 4. Assim, medidas possíveis de *ddp* são, por exemplo, 0.123 V, 12.34 V ou 123.4 V. A **resolução** da medida para cada um dos casos é, respectivamente, 1 mV, 10 mV e 0.1 V, e corresponde ao último algarismo significativo. Na maior parte dos casos a **precisão** da medida é superior à resolução da medida, pelo que nestes casos é a precisão que deve ser tida em conta para a estimativa do erro. A precisão dos multímetros é fornecida pelos fabricantes, e é habitualmente descrita por uma expressão do tipo:

$$\Delta M = M.E_{rel} + n.\ Res$$


onde **M** é a medida efetuada, $\mathbf{E_{rel}}$ é um erro relativo fornecido em valor percentual, **Res** a resolução da medida e **n** um número inteiro. Nesta expressão, o primeiro termo é proporcional ao valor medido, enquanto que o segundo é um termo residual, igual a um certo número de dígitos de resolução, informação dada pelo fabricante do dispositivo.

# Fluke 21, Fluke 73

| Function | Range | Accuracy |
|---|---|---|
| $\overline{\overline{V}}$ | 3.200 V, 32.00 V, 320.0 V<br>600 V | ± (0.3 %+1)<br>± (0.4 %+1) |
| m$\overline{\overline{V}}$ | 320.0 mV | ± (0.3 %+1) |
| $\tilde{V}$ (45 to 500 Hz, 3.2 V range. Other ranges 45 Hz to 1 kHz) | 3.200 V, 32.00 V,<br>320.0 V, 600 V | ± (2 %+2)<br>± (2 %+2) |
| Ω | 320.0 Ω<br>3200 Ω, 32.00 kΩ,<br>320.0 kΩ, 3.200 MΩ<br>32.00 MΩ | ± (0.5 %+2)<br>± (0.5 %+1)<br>± (0.5 %+1)<br>± (2 %+1) |

| Function | Range | Accuracy | Typical Burden Voltage |
|---|---|---|---|
| $\tilde{A}$ (45 Hz to 1 kHz) | 32.00 mA, 320.0 mA<br>10.00 A * | ± (2.5 %+2)<br>± (2.5 %+2) | 6 mV/mA<br>50 mV/A |
| $\overline{\overline{A}}$ | 32.00 mA, 320.0 mA<br>10.00 A * | ± (1.5 %+2)<br>± (1.5 %+2) | 6 mV/mA<br>50 mV/A |

## Exemplos do cálculo do erro máximo de um multímetro digital

**1-** Medida: 2.220 V        Escala: 3.200 V

Fórmula do erro (retirada da tabela): ±(0.3 % + 1)

Nesta escala o dígito menos significativo equivale a 0.001V. Assim, de acordo com as especificações do multímetro, o erro máximo desta medida é:

$$\Delta V = \frac{0.3}{100} \times 2.220 + 1 \times 0.001 = 0.00766\, V$$

**2-** Medida: 12.22 V Escala: 32.00 V

Fórmula do erro (retirada da tabela): ±(0.3 % + 1)

Nesta escala o dígito menos significativo equivale a 0.01V. Assim, de acordo com as especificações do multímetro, o erro máximo desta medida é:

$$\Delta V = \frac{0.3}{100} \times 12.22 + 1 \times 0.01 = 0.04666\, V$$

## Medição indirecta: propagação dos erros (limite superior do erro)

**Funções de várias variáveis**

A grandeza $G$ é determinada pela medida de várias grandezas $g_1$, $g_2$, $g_3$, etc., onde o **limite superior do erro** será dado por:

$$G = G(g_1, g_2, \ldots, g_n) \longrightarrow \Delta G = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial G}{\partial g_i}\right| \Delta g_i = \left|\frac{\partial G}{\partial g_1}\right| \Delta g_1 + \left|\frac{\partial G}{\partial g_2}\right| \Delta g_2 + \ldots$$

As incertezas $\Delta g_n$ podem ser estimadas utilizando o erro de observação, o maior desvio em relação à média, a média dos módulos dos desvios em relação à média ou desvio padrão da média.

Fórmula funcional de $G$

$$\left.\begin{array}{l} G = A + B \\ G = A - B \end{array}\right\} \qquad \Delta G = \Delta A + \Delta B$$

Erro relativo

$$\left.\begin{array}{l} G = A \times B \\ G = \dfrac{A}{B} \end{array}\right\} \qquad \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

$$G = A \times B^n \qquad \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A} + n\frac{\Delta B}{B}$$

## Medição indirecta: propagação dos erros (limite superior do erro) (continuação)

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial G}{\partial g_i} \right| \Delta g_i = \left| \frac{\partial G}{\partial g_1} \right| \Delta g_1 + \left| \frac{\partial G}{\partial g_2} \right| \Delta g_2 + \ldots$$

Qual será a expressão para o cálculo do erro ?

$$F = \frac{A.B^2}{\sqrt{C}} \qquad \Delta F = \frac{B^2}{\sqrt{C}} \Delta A + \frac{A.2B}{\sqrt{C}} \Delta B + \frac{1}{2} \frac{AB^2}{C^{3/2}} \Delta C$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta A}{A} + 2 \frac{\Delta B}{B} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C}$$

## Medição indirecta: propagação dos erros (erro mais provável)

Atendendo a que nem todos os erros contribuem no mesmo sentido, deve-se utilizar a expressão para o **erro mais provável** da grandeza G:

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial g_1}\right)^2 (\Delta g_1)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial g_2}\right)^2 (\Delta g_2)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial g_3}\right)^2 (\Delta g_3)^2 + \ldots}$$

Exemplos

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \\ z = x - y \end{array}\right\} \qquad \Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x \cdot y \\ z = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \qquad \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

**Exemplo**

A medida dos lados de um rectângulo são 1.53 ± 0.06 cm, e 10.2 ± 0.1 cm, respetivamente. Calcule a área do rectângulo e o erro da medida indirecta.

**A = x . y**  A área é **A = 1.53x10.2 = 15.606 cm$^2$**

**Erro mais provável**

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

**$\Delta A_{+provável}$ = 0.63083**

A medida da área é escrita como **15.6 ± 0.6 cm$^2$**

## Erro dominante

Muitas vezes pode-se simplificar a estimativa do erro de uma grandeza. Por exemplo a grandeza A é calculada por:

A= B.C

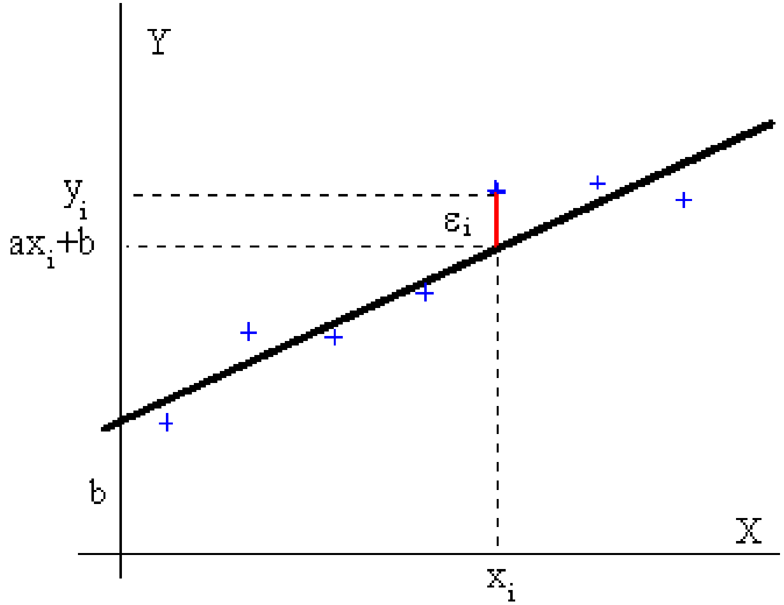
Se uma das grandezas, B ou C, tiver um erro relativo muito superior ao da outra, por exemplo se a grandeza B tiver um erro de 10% e a grandeza C, um erro de 0.5% , então a estimativa do erro da grandeza A é essencialmente determinada pelo erro da variável B.

Deste modo, na estimativa do erro da grandeza A, pode-se ignorar o pequeno erro da variável C.

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

## Procedimento de ajuste de dados experimentais a uma linha recta denominado regressão linear

Suponhamos uma grandeza física $y$, relacionada com outra $x$, mediante a **função $y = ax+b$**, a que corresponde **uma reta de inclinação $a$ e ordenada na origem $b$**.




A reta mais provável é aquela em que é minimizada a soma dos quadrados de todos os desvios:

$$E(a,b)=(y_1-ax_1-b)^2+(y_2-ax_2-b)^2+\ldots(y_i-ax_i-b)^2+\ldots+(y_n-ax_n-b)^2$$

Os valores que minimizam o $E(a,b)$ são aqueles para os quais

$$\frac{\partial E}{\partial a}=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b}=0$$

Obtemos um sistema de duas equações com duas incógnitas *a* e *b* cuja soluções são:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\Delta} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i}{N\Delta}$$

com

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Estes parâmetros podem ser facilmente calculados com um ajuste efetuados com uma calculadora.

Expressões mais elaboradas permitem-nos determinar as incertezas associadas ao declive ($\sigma_a$) e à ordenada na origem ($\sigma_b$):

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{N}\sigma}{\sqrt{\Delta}} \qquad \sigma_b = \sigma_a \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}{\sqrt{N}}$$

onde:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - a x_i - b\right)^2}{N-2}}$$

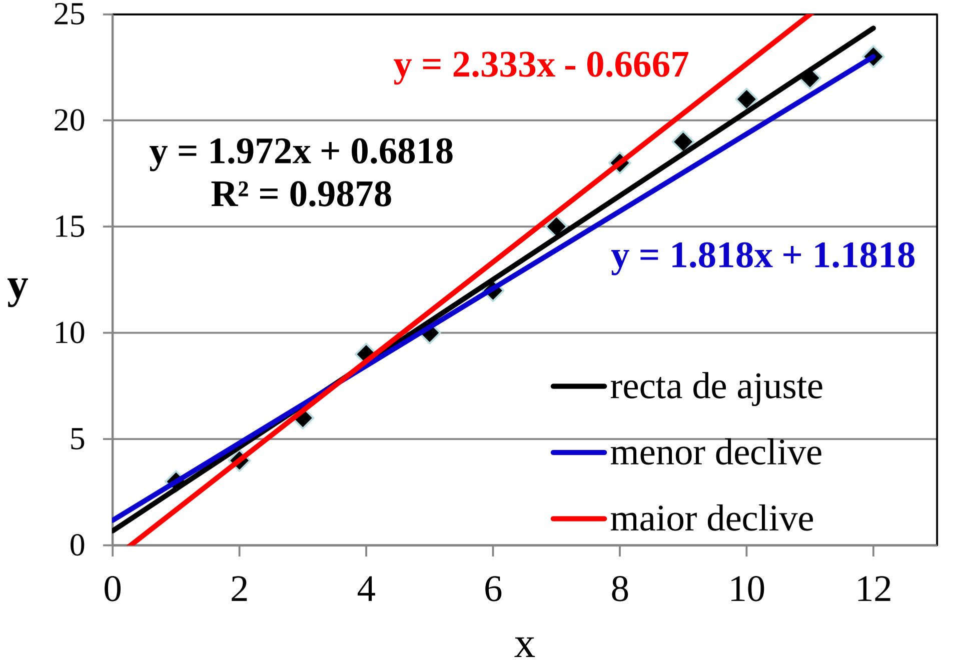
O **coeficiente de correlação** é outro parâmetro que nos indica o grau de ajuste dos dados experimentais à reta. O coeficiente de correlação *r* é obtido a partir da seguinte expressão:

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{\Delta\left[N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}}$$

A utilização do coeficiente de correlação permite também o cálculo das incertezas associada ao declive e à ordenada na origem:

$$\sigma_a = a\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{N-2}} \qquad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

## Estimativa rápida dos erros dos coeficientes de uma recta a partir de um gráfico




Os parâmetros a e b podem ser determinados a partir da recta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, tendo em conta as respectivas barras de erro.

A partir do declive e da ordenada na origem das rectas de inclinação máxima e mínima podem-se calcular aproximadamente os erros nos parâmetros a e b:

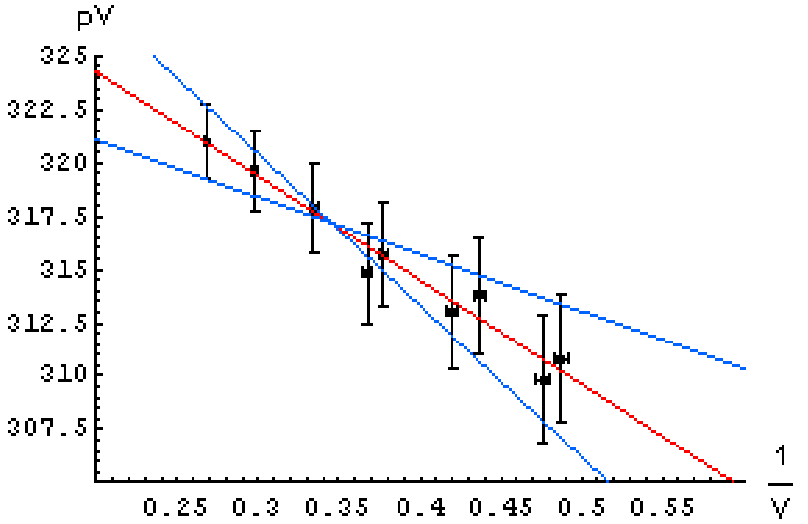
$$\Delta a = m\acute{a}x\{(a_{max} - a);(a - a_{min})\} \qquad \Delta b = m\acute{a}x\{(b_{max} - b);(b - b_{min})\}$$

**exemplo**

$a_{max}$=2.333; a=1.972; $a_{min}$= 1.818 $b_{max}$=1.1818; b=0.6818; $b_{min}$= -0.6667

Δa=máx(0.361; 0.154) → Δa=0.361 Δb=máx(0.5; 1.3485) → Δb=1.3485

Se os pontos tiverem barras de erro, as rectas de inclinação máxima e mínima deverão ser traçadas de modo a cruzar a maior parte das barras de erro (ver figura)



## Bibliografia

Herman J. C. Berendsen, A Student's Guide to Data and Error Analysis, Cambridge University Press, 2011

M.C. Abreu, L. Matias, L.F. Peralta, Física Experimental - Uma Introdução, 1ª edição, Lisboa, 1994

M.E. Athayde, Estatística em R, Universidade do Minho, 3ª edição, Braga, 2011 (ISBN 972-8810-12-1)