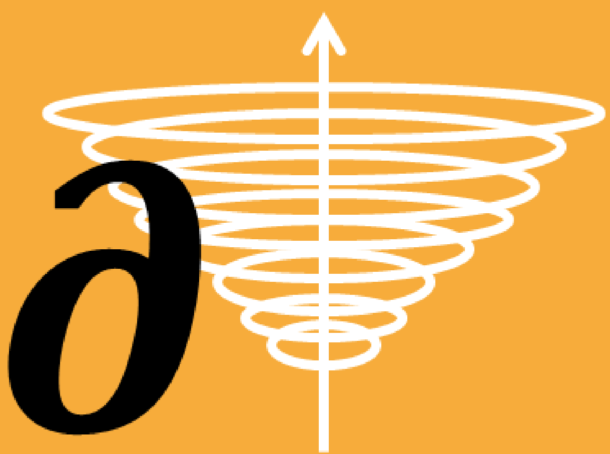
- RESUMÃO -

DERIVADAS EM FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS E VETORIAIS

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



www.respondeai.com.br

Derivadas Parciais e o Vetor Gradiente

Para "derivar parcialmente" uma função, trate todas as variáveis como constantes, exceto aquela em relação a qual você está derivando. E, então, é só derivar!

OBS:

Quando uma função estiver definida diferente em um ponto, a derivada parcial é, pela definição

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

E quando te pedirem o vetor gradiente? De boa, vai ser uma parada assim:

Vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Lembre-se também de que uma função é contínua se o limite quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ é igual ao valor que a função assume em (x_0, y_0).
Sabendo disso, se perguntarem qualquer coisa sobre continuidade, tudo se resume em:

1. Se uma função é **diferenciável** em um ponto, então ela é **contínua** nesse ponto;
2. Se uma função é **diferenciável** em um ponto, então ela possui derivadas parciais nesse ponto;
3. Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são **contínuas** em um ponto, então a função é **diferenciável** nesse ponto.
4. Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

existe, então garantimos que a função é diferenciável no ponto.

Plano Tangente e Reta Normal

A missão é encontrar o plano tangente ou reta normal a $f(x, y)$ no ponto P_0. De boa, temos um passo a passo maroto.

Passo a passo Maroto

Substituir $f(x, y)$ por z

$\downarrow$

Jogar tudo para o lado esquerdo e deixar 0 do lado direito

$\downarrow$

Chamar o lado esquerdo de $F(x, y, z)$

$\downarrow$

Cálcular $\nabla F(P_0)$

$\downarrow$

$\vec{n} = \nabla F(P_0)$

Plano Tangente:

$$(x, y, z) \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n}$$

Reta Normal:

$$r(t) = P_0 + \vec{n}t$$

Regra da Cadeia

Quando tiver que resolver derivadas pela Regra da Cadeia, basta seguir os 3 passos da felicidade:

Os 3 passos da felicidade

Calcular ∇f

$\downarrow$

Derivada da Parametrização $\sigma(t)$

$\downarrow$

Resolver essa equação:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \sigma'(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Derivadas Direcionais

Te pediram a derivada de uma função f, num ponto P_0, e no sentido de um vetor $\vec{u}$? Só fazer:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

Mas aqui vai um detalhe que geral esquece, existe uma situação que você não pode usar essa fórmula, e aí qual vai ser?

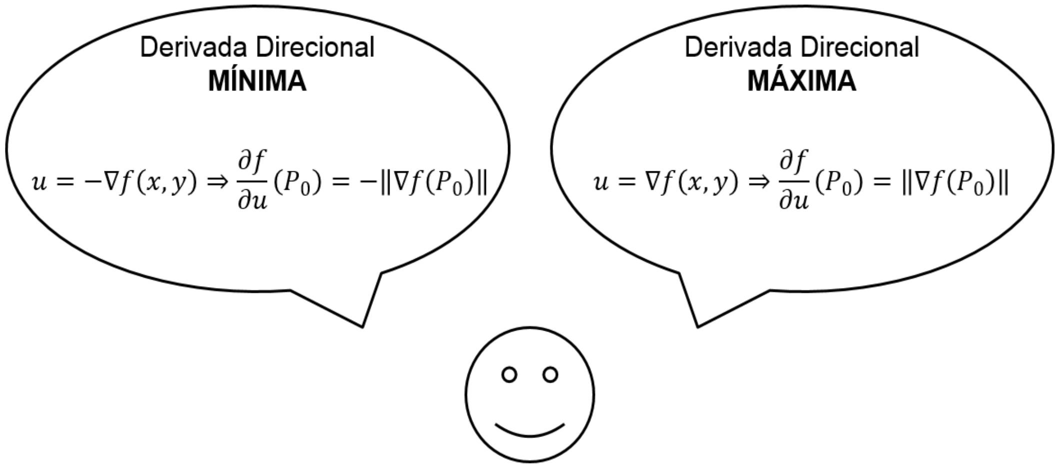
- Quando a função f não for diferenciável no ponto P_0 não vale a fórmula
  Vamos pela definição

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\|u\|}$$

- Vamos suspeitar desse problema quando temos funções estranhas, tipo aquelas definidas fora de um ponto, aqui um exemplo de algo a olhar se é diferenciável primeiro

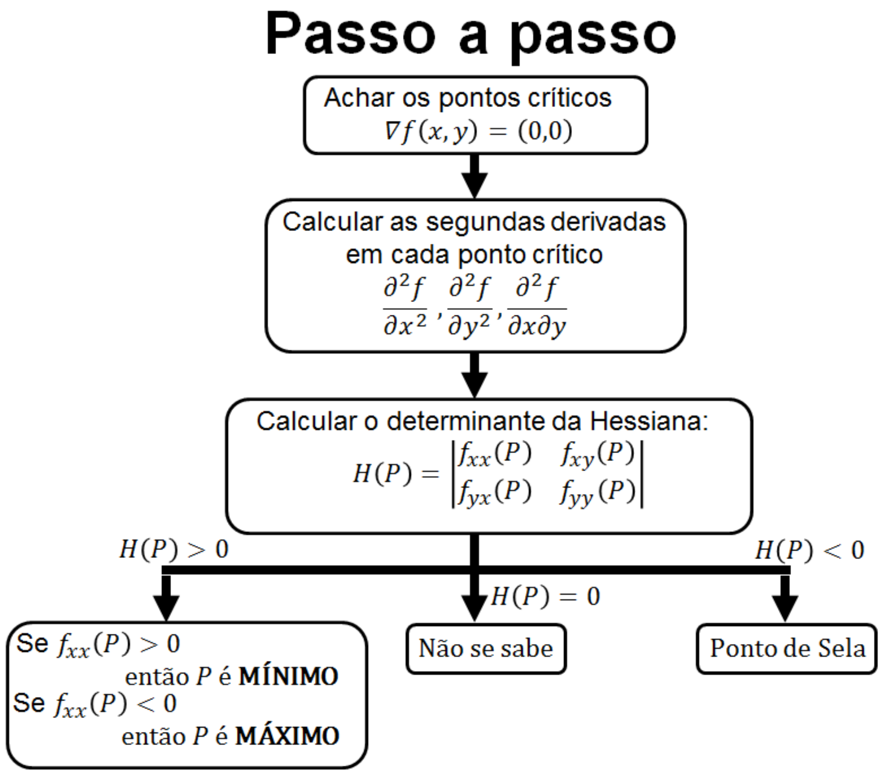
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aqui vai outra dica, de maximizar ou minimizar a derivada direcional:



Máximos e Mínimos sem Restrição

Pediram os pontos máximos e mínimos da função? Então:



Máximos e Mínimos com Restrição (Multiplicadores de Lagrange)

Grande LaGrange! Finalmente chegamos nele! Quando tivermos que encontrar máximos ou mínimos de uma função f em uma região g, vamos fazer:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

Procedimento:

1. calcular gradiente da função: ∇f;
2. pegar a equação da curva e jogar tudo pro lado esquerdo (deixe zero no lado direito);
3. definir a função $g(x,y)$, sendo o lado esquerdo da equação acima;
4. calcular gradiente de g: $\nabla g(x,y)$;
5. utilizar multiplicador de Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$;
6. adicionar a equação da curva ao sistema encontrado acima;
7. resolver o sistema.

O caso geral, onde ele quer o máximo e mínimo na região g e no interior da g, é só fazer