

Cálculo para Ciências

1^o teste B

24.11.2021

Justifique todas as respostas.

Exercício 1. [3,0 valores] Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}. \\ x &\mapsto 3 - |x| \end{aligned}$$

Calcule $f^{-1}([-5, 2])$ e $f(\{-4\} \cup]1, 3])$.

Exercício 2. [3,0 valores] Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4 \wedge x \geq 0\} \cup (\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \sqrt{2}\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Determine, ou justifique porque não existem, o conjunto dos majorantes de A , o dos minorantes de A , o supremo de A e o mínimo de A .

Exercício 3. [5,0 valores] Calcule os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x - \pi} \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Exercício 4. [5,0 valores] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-3x} & \text{se } x < -1, \\ -x & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ x \cos x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- a) Determine a de modo que f seja contínua. Justifique.
- b) Verifique que f não é derivável em $x = 0$, justificando.
- c) Mostre que a função f' tem uma infinidade de zeros positivos.

Exercício 5. [2,0 valores] Dê exemplo de, ou justifique porque não existe:

- a) Duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descontínuas tais que $f + g$ seja contínua;
- b) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que f tem quatro zeros e f' tem quatro zeros.

Pode esboçar apenas gráficos de funções nas condições solicitadas, desde que o esboço seja claro.

Exercício 6. [2,0 valores] Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 \leq f(x) \leq 3$. Mostre que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 3x_0$.

FIM
BOA SORTE