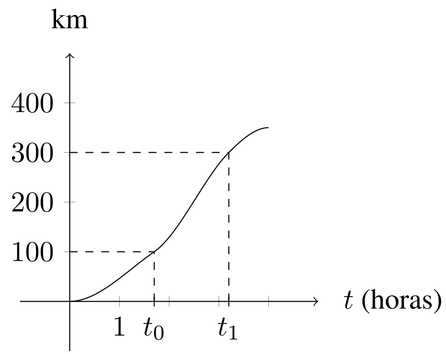
Cálculo diferencial

Introdução

Viagem de carro

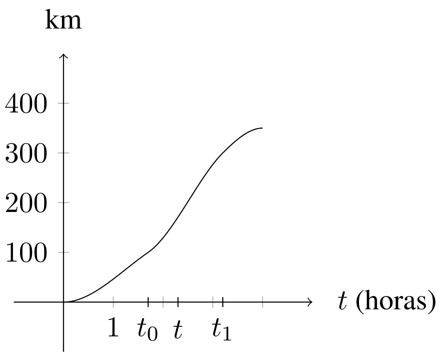
$f(t) =$ km percorridos no instante t



velocidade média entre t_0 e $t_1 = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{300-100}{3.2-1.7} \approx 133$ km/h

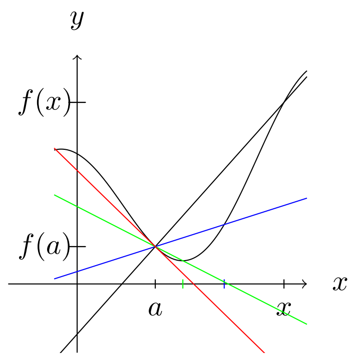
Introdução

$f(t) =$ km percorridos no instante t



velocidade instantânea em $t_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$, *derivada* de f em t_0

Interpretação geométrica de um tal limite



- $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = declive da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$
- $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = declive da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$

Derivadas

Até menção em contrário, só trataremos a partir de agora com funções reais cujos domínios são intervalos ou uniões de intervalos.

Definição

Uma função $f : D \to E$ diz-se *derivável* ou *diferenciável* em $a \in D$ se existir e for finito o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Se f for derivável em a, o valor desse limite cháma-se *derivada* de f em a e indica-se por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

A função f diz-se derivável se for derivável em todos os pontos de D.

A função f diz-se derivável num subconjunto $A \subset D$ se for derivável em todos os pontos de A.

Se f for derivável, então a função $f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ é chamada *derivada* de f.

Exemplos

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é derivável.

Com efeito, seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1.$$

Logo $f'(a)$ existe e é igual a 1.

(b) A função $f(x) = |x|$, mesmo que contínua em 0, não é derivável em 0:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$

Os limites laterais existem mas são diferentes. Logo $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe. Nota-se que f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Derivabilidade e continuidade

Teorema

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in D$. Se f for derivável em a, então f é contínua em a.

Demonstração: Seja $a \in D$. Temos de mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Para $x \neq a$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a).$$

Como f é derivável em a, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe e é finito. Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} (x-a). \\
&= f(a) + f'(a)\cdot 0 \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Equação da reta tangente

Seja $f : D \to E$ uma função. Se f for derivável num ponto $a \in D$, então o gráfico de f tem uma reta tangente em a cuja equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Nota

Esta equação é a equação de uma reta com declive $f'(a)$ pois é equivalente à equação

$$y = f'(a)x + b$$

com $b = f(a) - f'(a)a$.

A reta passa pelo ponto $(a, f(a))$ pois para $x = a$, $y = f(a)$.

Assim trata-se de efetivamente da reta tangente ao gráfico de f em a.

Regras de derivação

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $a \in D$. Então

(i) a função $f + g$ é derivável em a e
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

(ii) para toda a constante $k \in \mathbb{R}$, a função $k \cdot f$ é derivável em a e
$$(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a);$$

(iii) a função $f \cdot g$ é derivável em a e
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a);$$

(iv) se, para todo o $x \in D$, $g(x) \neq 0$, então a função $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$

Regra da cadeia

Sejam $f : D \to E$ e $g : E \to F$ duas funções e $a \in D$. Se f for derivável em a e g for derivável em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é derivável em a e
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemplo

$h(x) = \operatorname{sen} x^3$

$h(x) = g(f(x))$

$f(x) = x^3, \quad g(y) = \operatorname{sen} y$

$f'(x) = 3x^2, \quad g'(y) = \cos y$

$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

Derivadas das funções usuais

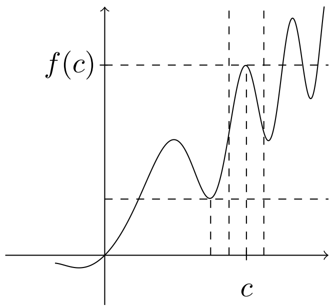
1. $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, x \in \mathbb{R})$
2. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$
3. $(e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
5. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$
6. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R})$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$
8. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Derivadas das funções usuais

9. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R});$
10. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R});$
11. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x \quad (x \in \mathbb{R});$
13. $(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1} \quad (\rho \in \mathbb{R}, x > 0)$
14. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$
12. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, x \in \mathbb{R})$
pois temos $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e portanto $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$

Extremos locais

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$.
– Diz-se que f tem um *máximo local* em c se existir $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap D$ se tem $f(x) \leq f(c)$.

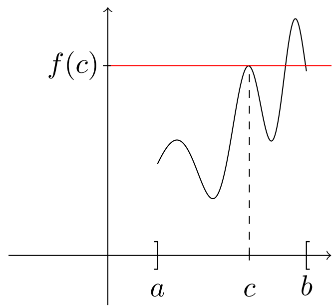


– Diz-se que f tem um *mínimo local* em c se existir $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap D$ se tem $f(x) \geq f(c)$.
– Diz-se f tem um *extremo local* em c quando f tem um máximo ou um mínimo local em c.

Extremos locais

Proposição

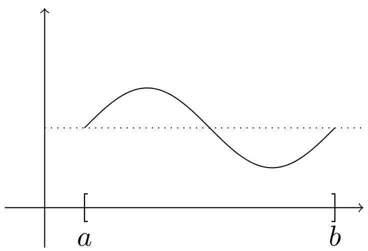
Seja $f :]a,b[\to E$ uma função derivável. Se f tem um extremo local em $c \in]a,b[$, então $f'(c) = 0$.



Extremos locais

Teorema

Seja f contínua em $[a,b]$. Se $f(a) = f(b)$, então f admite um extremo local em $]a,b[$.



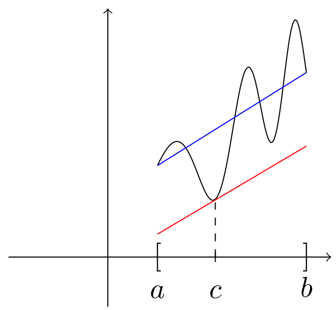
Teorema de Lagrange

Teorema de Rolle

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Lagrange

Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Teorema de Lagrange

Corolário 1

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a,b[$, então f é constante em $[a,b]$.

Nota

Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ é constante, então $f' = 0$. Com efeito, para qualquer $a \in D$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(a)}{x-a} = 0.$$

Corolário 2

Seja f contínua em $]a,b[$ e seja $c \in]a,b[$. Se f é derivável em $]a,b[\setminus\{c\}$ e se existe um número real L tal que $\lim_{x\to c} f'(x) = L$, então f é derivável em c e $f'(c) = L$.

Monotonia de funções reais

Teorema

Seja f uma função contínua, definida num intervalo I. Seja J o maior intervalo aberto contido em I. Suponhamos que f é derivável em J.

(i) *Se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in J$, então f é crescente em I.*

(ii) *Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in J$, então f é estritamente crescente em I.*

(iii) *Se $f'(x) \leq 0$ para todo o $x \in J$, então f é decrescente em I.*

(iv) *Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in J$, então f é estritamente decrescente em I.*

Exemplo

$f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é estritamente crescente

$I = [0,+\infty[$, $J =]0,+\infty[$

$f'(x) = 3x^2 > 0 \; \forall\, x \in J$

Nota-se que $f'(0) = 0$.

Derivadas de ordem superior

Uma função derivável $f : D \to E$ diz-se *derivável até a 2^a ordem* se a derivada f' for derivável. A derivada de f' denomina-se *derivada de 2^a ordem* de f e é indicada por f'' ou por $f^{(2)}$. De modo análogo, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

Exemplo

$f(x) = \operatorname{sen} x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

Pontos críticos e extremos locais

Seja $f : D \to E$ uma função derivável. Um ponto $c \in D$ diz-se *ponto crítico* de f se $f'(c) = 0$. Sabemos que os pontos de extremo local de uma função derivável num intervalo aberto são pontos críticos da função.

Nota

0 é ponto crítico de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, mas f não tem um extremo local em 0.

Proposição

Sejam I um intervalo, $f : I \to E$ uma função derivável até a 2^a ordem e $c \in I$ um ponto crítico de f.

(i) *Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.*

(ii) *Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.*

Pontos críticos e extremos locais

Exemplos

(i) Consideremos a função $f(x) = x^2$. Temos $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Como $f'(0) = 0$, 0 é um ponto crítico de f. Como $f''(0) > 0$, f tem um mínimo local em 0.

(ii) Consideremos a função $f(x) = x^4$. Temos $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Como $f'(0) = 0$, 0 é um ponto crítico de f. Como $f''(0) = 0$, não podemos concluir com a proposição anterior que f tem um mínimo local em 0.

Proposição

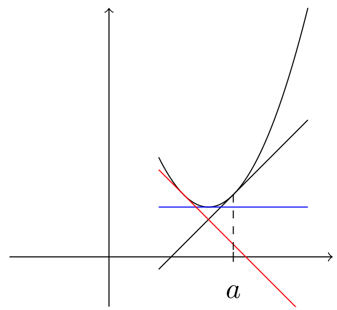
Sejam $f : D \to E$ uma função contínua e $c \in D$. Então f tem um mínimo (respectivamente máximo) local em c se existir um número real $r > 0$ tal que f é crescente (resp. decrescente) em $D \cap]c, c + r[$ e decrescente (resp. crescente) em $D \cap]c - r, c[$.

Concavidade e pontos de inflexão

Sejam $f : D \to E$ uma função derivável e $I \subset D$ um intervalo.

Diz-se que f tem *concavidade para cima* em I se

$$\forall\, x, a \in I \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$



Diz-se que f tem *concavidade para baixo* em I se

$$\forall\, x, a \in I \quad f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Concavidade e pontos de inflexão

Um ponto $c \in D$ diz-se *ponto de inflexão* de f se existir um número real $r > 0$ tal que $]c - r, c + r[\subset D$ e f tem

– concavidade para cima mas não para baixo em $]c - r, c[$ e concavidade para baixo mas não para cima em $]c, c + r[$

– ou concavidade para baixo mas não para cima em $]c - r, c[$ e concavidade para cima mas não para baixo em $]c, c + r[$.

Teorema

Sejam $f : D \to E$ uma função derivável até a 2ª ordem e $I \subset D$ um intervalo. Então

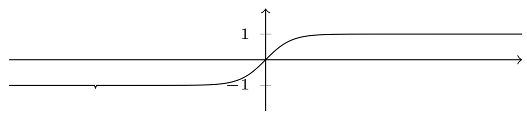
(i) *f tem concavidade para cima em I se e só se $f''(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$;*

(ii) *f tem concavidade para baixo em I se e só se $f''(x) \leq 0$ para todo o $x \in I$.*

Concavidade e pontos de inflexão

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = \operatorname{th} x$.



Temos $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = (\operatorname{ch} x)^{-2}$ e

$$f''(x) = -2(\operatorname{ch} x)^{-3} \operatorname{sh} x = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

Portanto $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Logo f tem concavidade para cima em $]-\infty, 0]$ e concavidade para baixo em $[0, +\infty[$. 0 é ponto de inflexão.

Regras de l'Hospital

A primeira regra de l'Hospital aplica-se a cálculos de limites que apresentam uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$:

Teorema

Sejam $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que para todo o $x \in]a, b[$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). Se

$$\begin{cases} \bullet \ \lim_{x\to a} f(x) = 0 \\ \bullet \ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \bullet \ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe (finito ou infinito),} \end{cases}$$

então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Regras de l'Hospital

A segunda regra de l'Hospital aplica-se a cálculos de limites que apresentam uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

Teorema

Sejam $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que para todo o $x \in]a, b[$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). Se

$$\begin{cases} \bullet \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \\ \bullet \ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe (finito ou infinito),} \end{cases}$$

então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nota

As duas regras de l'Hospital permanecem válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to b$. Por conseguinte, as regras permanecem válidas se considerarmos domínios da forma $]c, a[\cup]a, b[$.

Exemplos

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = ?$ Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

$\rightsquigarrow$ 2ª regra de l'Hospital

$f, g \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$

$g(x) \neq 0$, $g'(x) = 1 \neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pela 2ª regra de l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Exemplos

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = ?$ Indeterminação $\frac{0}{0}$

$\rightsquigarrow$ 1ª regra de l'Hospital

$f, g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$

$g(x) \neq 0$, $g'(x) = 1 \neq 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$

Temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Pela 1ª regra de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Exemplos

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x+\cos x - x\operatorname{sen} x}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplos

(5)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad\neq\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{1}$$

Não podemos aplicar a regra de l'Hospital porque lim $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{1}$ não existe!

Pelo Teorema do confronto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0.$$