Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
Mestrado Integrado em Engenharia Física

Cálculo Vetorial

Exame de recurso — 13.07.2020

- O exame deve ser enviado num ficheiro único em formato pdf. Pode usar a aplicação Adobe Scan (ou outra). No entanto, em caso de dificuldade, aceito o envio de fotografias de cada uma página do teste.
- Escreva, no início da sua resolução, a seguinte frase:

  > "Declaro, por minha honra, que o conteúdo relativo à resolução deste teste, que vou enviar à Prof. Lisa Santos, é da minha integral autoria. Limitei-me a utilizar a pesquisa bibliográfica permitida e a calculadora gráfica ou científica. Em nenhuma resposta tive ajuda de pessoa alguma ou de *software* adicional."

- Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos.
- O teste tem a duração de 2h45. Os alunos têm de enviar a resolução do exame nos 15 minutos após o término do exame.
- O teste tem 5 perguntas e cada uma das quatro primeiras tem 2 versões (A, B). Deverá, para cada questão, escolher a versão que lhe corresponde, segundo a tabela da página seguinte

Escreva o seu nome e número de aluno em todas as folhas que constituem a sua resolução do teste.
Escreva, no início do teste, de forma bem visível, o seu número de aluno e a identificação das questões que tem de resolver, como no exemplo:

$$\text{N}^{\underline{\text{o}}} \text{ de aluno} = 37145 \text{ — 1B — 2A — 3A — 4B — 5}$$

Não se esqueça de considerar, em cada uma das quatro primeiras questões, apenas a letra que lhe diz respeito: uma e uma só de entre (A) ou (B)!
Recorde que a sua letra varia de pergunta para pergunta.
Seja organizado nas suas respostas.

Algarismo das unidades do seu número de alunos	Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3	Pergunta 4
0 ou 9	A	A	B	B
1 ou 8	A	B	A	B
2 ou 7	A	B	B	A
3 ou 6	B	A	A	B
4 ou 5	B	A	B	A

Exercício 1.

a) Mude a ordem de integração e calcule o integral

(A) $$\int_0^1 \int_0^{x^2} x\, dydx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} x\, dydx.$$

(B) $$\int_0^1 \int_0^{y^2} y\, dxdy + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-y)} y\, dxdy.$$

b) Seja

(A) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 4 - x^2 - y^2,\ z \geq -6 + x^2 + y^2\}$.

(B) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \geq -4 + x^2 + y^2,\ z \leq 6 - x^2 - y^2\}$.

Calcule o volume de R, usando coordenadas cilíndricas.

Exercício 2. Considere a função

(A) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & x^3 + 3xy^2 - \frac{3}{2}x^2 \end{array}$$

(B) $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & y^3 + 3x^2y - \frac{3}{2}y^2 \end{array}$$

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Verifique se

(A) $(1,0)$ é maximizante local de f.

(B) $(0,1)$ é maximizante local de f.

c) Seja $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$. Calcule $\min_{|K} f$.

Exercício 3. Seja

(A) $f(x,y) = \left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, y \operatorname{sen}(\ln(1+x))\right)$.

(B) $f(x,y) = \left(x \cos(\ln(1+y)), \dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right)$.

a) Faça um esboço do domínio de f.

b) Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$.

c) Calcule

(A) $f'((1,0);(1,1))$.

(B) $f'((0,1);(1,1))$.

Exercício 4. Considere a curva

(A) $$c: \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2. \\ t & \mapsto & (\cos^2 t, \cos t \,\text{sen}\ t) \end{array}$$

(B) $$c: \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2. \\ t & \mapsto & (\cos t \,\text{sen}\ t, \cos^2 t) \end{array}$$

a) Calcule o comprimento da curva c.

b) Seja

(A) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2y + x^3, g(x, y))$ um campo de vectores de classe C^1.

(B) $\boldsymbol{F}(x, y) = (g(x, y), xy^2 + y^3,)$ um campo de vectores de classe C^1.

Determine uma função g para a qual $\boldsymbol{F}$ seja um campo conservativo e calcule $\displaystyle\int_c \boldsymbol{F} \cdot ds$.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função tal que $\forall\, X \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(X)\| \leq \|X\|^2$.

a) Mostre que $f(0, 0) = (0, 0)$ e que f é contínua em $(0, 0)$.

b) Mostre que o $J_{(0,0)}f$ é a matriz nula.