Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MIEBIOM

Cálculo Vetorial

Folha 4 — março de 2020

Exercício 1. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(x,y)$;
b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y)=(xe^y+\cos y, x, x+e^y)$;
c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y)=(xye^{xy}, x\,\mathrm{sen}\,y, 5xy^2)$;
d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z)=(x-y, y+z)$;
e) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z)=(x+y+e^z, x^2y)$.

Exercício 2. Considere a função $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2y-xz\end{array}$ e $a\in\mathbb{R}$. Sendo $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & f(at^2,at,t^3)\end{array}$ determine a de modo que g tenha derivada nula.

Exercício 3. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável. Considere $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $F(x,y)=f(xy)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x}=y\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Exercício 4. Calcule:

a) $\dfrac{du}{dt}$, onde $u=\ln\left(\mathrm{sen}\,\frac{x}{y}\right)$ e $x=3t^2$, $y=\sqrt{1+t^2}$;
b) $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial q}$, onde $w=r^2+s^2$ e $r=pq^2$, $s=p^2\mathrm{sen}\,q$;
c) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, onde $z=x^2\mathrm{sen}\,y$ e $x=s^2+t^2$, $y=2st$.

Exercício 5. Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções duas vezes deriváveis e seja

$$h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\;.\\ (x,y) & \longmapsto & f(x+y)+g(x-y)\end{array}$$

Verifique que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$.

Exercício 6. Determine, caso existam, funções $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, tais que:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x+y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+y$;
b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=xy^2-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2y+2y$.

Exercício 7. Determine equações da recta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:

a) $x^2+2y^2+3z^2=10$, $(1,\sqrt{3},1)$;
b) $xyz^2=1$, $(1,1,1)$;
c) $z=x^2+3y^3+\mathrm{sen}\,(xy)$, $(1,0,1)$;
d) $x^3+xyz=12$, $(2,2,1)$.

Exercício 8. Determine os pontos da curva de equação $x(x^2+y^2)+9x^2+y^2=0$ cuja tangente é horizontal ou vertical.

Exercício 9. Determine os pontos da elipse $2x^2+y^2=1$ cuja tangente passa pelo ponto $(1,1)$.

Exercício 10. Determine os pontos da curva $x^2+y^2-2x+xy=0$ cuja normal é paralela à recta $y=x$.

Exercício 11. Determine os planos tangentes à esfera de equação $x^2+y^2+z^2=5$ que contêm a recta de equação

$$\begin{cases} x=5-z \\ y=-5+2z \end{cases}$$

Exercício 12. Sejam $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x-y^2 \end{array}$ e $A=(-1,0)$.

a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa em A.

b) Calcule o vector $\nabla f(A)$; coloque no esboço efectuada na alínea anterior, um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A.

c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(A, f(A))$.

Exercício 13. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

a) $f(x,y)=x^2+y^4$;

b) $f(x,y)=2-x-y^2$;

c) $f(x,y)=xy$;

d) $f(x,y)=x^2y^2$.

Exercício 14. Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto sela:

a) $f(x,y)=x^2-y^2+xy$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$;

c) $f(x,y)=x^2+y^2+2xy$;

d) $f(x,y)=x^2+y^2+3xy$;

e) $f(x,y)=e^{1+x^2-y^2}$;

f) $f(x,y)=x^2-3xy+5x-2y+6y^2+8$;

g) $f(x,y)=3x^2+2xy+2x+y^2+y+4$;

h) $f(x,y)=y+x\,\mathrm{sen}\,y$;

i) $f(x,y)=e^x\cos y$;

j) $f(x,y)=(x-y)(xy-1)$;

k) $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$;

l) $f(x,y)=\ln(2+\mathrm{sen}\,xy)$;

m) $f(x,y)=(x+y)(xy+1)$;

n) $f(x,y)=(x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$.

o) $f(x,y)=\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)$, (analise apenas o ponto crítico $(0,0)$);

p) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$, (analise apenas os pontos críticos $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e $(0,\sqrt{\pi})$);

Exercício 15. Determine o ponto pertencente ao plano $2x-y+2z=20$ que se encontra mais próximo da origem.

Exercício 16. Mostre que um paralelepípedo de volume 27 possui superfície mínima quando é um cubo.

Exercício 17. Determine os extremos absolutos da função $f_{|K}$, sendo $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ e f definida por

a) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^4$;

b) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$.

Exercício 18. Determine o mínimo e o máximo absoluto de $f(x,y)=\mathrm{sen}\,x+\cos y$ no retângulo $R=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

Exercício 19. Determine os extremos das funções f definidas a seguir, sujeitas às condições indicadas:

a) $f(x,y)=\ln(xy)$ e $2x+3y=5$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2$ e $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$;

c) $f(x,y)=xy$ e $x^2+y^2=4$;

d) $f(x,y)=xy$ e $x+y=1$;

e) $f(x,y)=x^3+y^3$ e $x^2+y^2=1$;

f) $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ e $2x+3y+4z=12$;

g) $f(x,y,z)=z$ e $x^2+y^2=5-z$, $x+y+z=1$.