Máximos e mínimos condicionados

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ uma função e $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função escalar.

Pretendemos calcular $\max g|_{\Sigma_c}$ e $\min g|_{\Sigma_c}$, sendo

$c = (c_1, \dots, c_m)$ e $\Sigma_c = f^{-1}(\{c\})$.

Notem que

$$f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}(\{(c_1, \dots, c_m)\}) = \{x \in \mathcal{U} : f(x) = c\}$$

$$= \{x \in \mathcal{U} : f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m\}$$

é uma hipersuperfície de nível c de f.

Queremos calcular o máximo (absoluto) e o mínimo (absoluto) da função g restrita ou condicionada às restrições (condições)

$$f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m$$

Exemplo (exercício 16 da Folha 4):

Calcular as medidas dos lados do paralelipípedo de modo que o volume seja mínimo, sabendo que a área lateral do sólido é constante igual a 27.

Definindo $V(x,y,z) = xyz$ o volume do paralelipípedo, sendo x, y e z os comprimentos das arestas, sujeito à condição

$$A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz = 27,$$

isto é, a área lateral é constante igual a 27.

Estamos a resolver o problema de calcular

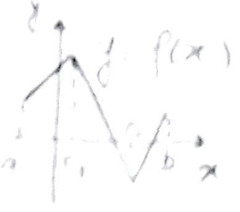
$$\min V|_{\Sigma_{27}},$$

sendo $\Sigma_{27} = A^{-1}(\{27\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : A(x,y,z) = 27\}$

Há, na Folha 4, diversos exercícios, resolvidos detalhadamente, sobre este assunto, que vocês podem consultar como exemplos:

- Exercícios 13, 14 – máximos e mínimos locais (serão explicados a seguir)
- Exercícios 15, 16, 19 – máximos e mínimos condicionados (o que está a ser explicado agora)
- Exercícios 17, 18 – exercícios mistos, que utilizam o que se aprendeu nos dois casos anteriores.

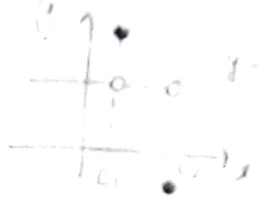
Quando procuramos o máximo ou o mínimo absoluto de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, nós sabemos que esse valor é atingido num dos extremos do intervalo ou num ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. Mas isto só é verdade se a função for "bem comportada", como mostram os exemplos seguintes



$\max f = f(c_1)$

$\min f = f(c_2)$

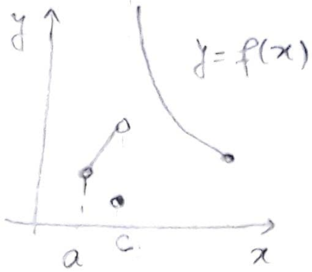
Não existem $f'(c_1)$ e $f'(c_2)$



$\max f = f(c_1)$

$\min f = f(c_2)$

f não tem derivada em c_1 e em c_2



$\min f = f(c)$
$\max f$ não existe

Pretendo que vocês entendam que garantir que o máximo ou o mínimo absoluto de uma função existe não é tarefa fácil.

Relativamente ao problema que estamos a tratar (máximo absoluto e mínimo absoluto de uma função escalar restrita a uma hipersuperfície de nível Σ_C, $C=(c_1,\dots,c_m)$), temos a garantia da sua existência sempre que aconteçam ambas as condições seguintes:

- g é contínua
- Σ_C é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$

Notem que este resultado está relacionado com o bem conhecido resultado que nos garante que uma função contínua definida num intervalo fechado tem máximo e mínimo.

Nós sabemos que o hiperplano normal à hipersuperfície Σ_C num ponto $X_0 \in \Sigma_C$ é dado pela equação

$$X = X_0 + \lambda_1 \nabla f_1(X_0) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(X_0), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$$

sendo $f = (f_1, \dots, f_m)$

(Ver "Hipersuperfícies de nível", página 4)

As propriedades e a interpretação geométrica do vector gradiente da função g que pretendemos maximizar ou minimizar, permitem-nos dizer que os maximizantes absolutos da função g em pontos não singulares de Σ_c estão entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} x \in \Sigma_c \\ \nabla g(x) = \lambda_1 \nabla f_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(x) \end{cases}$$

que pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} f_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ f_m(x) = c_m \end{array}\right\} \text{ m equações} \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x) = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{array}\right\} \text{ n equações} \end{cases}$$

Incógnitas: $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ $\quad$ $n+m$ incógnitas
$m+n$ equações

A dificuldade que existe na aplicação deste método tem a ver com o facto dos sistemas que encontramos poderem não ser lineares e, eventualmente, de difícil resolução.

É importante perceber que estes sistemas podem ter várias soluções ou, até, nenhuma solução.

Não nos podemos esquecer que só considerámos pontos não singulares de Σ_c. À semelhança do que fazíamos em $\mathbb{R}$, em que juntávamos os extremos do intervalo, os pontos de descontinuidade ou de não diferenciabilidade da função, também aqui temos de juntar os pontos singulares de Σ_c. Podemos, então, dizer que

O máximo e o mínimo absoluto de $g|\Sigma_c$, sendo $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^m$ e $\Sigma_c = f^{-1}(\{c\})$ é o maior e o menor valores, respectivamente, que g toma nas soluções dos sistemas

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x \in \Sigma_c \\ \text{car } J_x f < m \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} x \in \Sigma_c \\ \nabla g(x) = \lambda_1 \nabla f_1(x) + \cdots + \lambda_m \nabla f_m(x) \end{cases}$$

pontos singulares de Σ_c

<u>Exemplos</u>: Ver exercícios da Folha 4 já referidos no início desta secção.

<u>Observação</u>: 1) O cálculo de máximos e mínimos condicionados correspondem, no caso em que $n=m=1$, ao cálculo do valor da função nos extremos a e b do intervalo que constitui o seu domínio, o que não apresenta dificuldade. Só precisamos de "ferramentas mais poderosas" quando a dimensão do domínio é superior a 1.

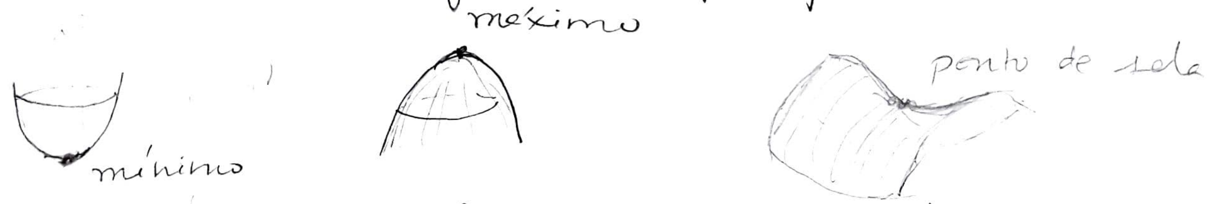
2) Veremos, de seguida, a "generalização" para $n>1$ do que se passa em $]a,b[$.

Máximos e mínimos locais

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (função e derivadas parciais contínuas até à ordem 2, em particular $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$)

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{U}$ é um ponto crítico de f se $\nabla f(x_0) = 0 = (0,\dots,0)$.

Sabe-se que os maximizantes e os minimizantes locais de f estão entre os pontos críticos de f (notem que nesta secção $D_f = \mathcal{U}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$)
Temos de perceber, agora, como classificar os pontos críticos, isto é, encontrar critérios que nos permita decidir se um ponto crítico é maximizante, minimizante ou nem uma coisa nem outra, que designaremos por ponto de sela



Desculpem a má qualidade dos meus desenhos. Se escreverem "ponto de sela" no Google verão várias imagens sobre o assunto.

Se voltarmos ao que aprendemos sobre funções $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ que admitem 2ª derivada, sabemos que se $f'(x_0) = 0$ e

i) $f''(x_0) > 0$, então x_0 é minimizante local;
ii) $f''(x_0) < 0$, então x_0 é maximizante local;
iii) $f''(x_0) = 0$, então nada se pode concluir.

Com as funções de várias variáveis passa-se algo semelhante.

Seja $\mathrm{Hess}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$, que designaremos por <u>matriz hessiana de f em x_0</u>.

Como referi no início desta secção, a função f é de classe C^2, o que implica que <u>a matriz quadrada $Hess_{x_0} f$</u> é <u>simétrica</u>. Recordo que uma matriz quadrada $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é simétrica se $a_{ij}=a_{ji}$, para todo o $i,j\in\{1,\dots,n\}$.

Vou agora fazer uma pequena revisão de Álgebra Linear. Seja $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma aplicação linear, isto é, uma função que satisfaz:

i) $\forall x,y\in\mathbb{R}^n \quad T(x+y)=T(x)+T(y)$

ii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}^n \quad T(\lambda x)=\lambda T(x)$

Seja A a matriz de T na base canónica de $\mathbb{R}^n$, isto é, se denotarmos $\vec{e_i}=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{posição } i}}{1},0,\dots,0)$ e $T(\vec{e_i})=(a_{1i},\dots,a_{ni})$

então $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Dizemos que $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ é <u>um vector próprio de T</u> se

$\exists\lambda\in\mathbb{R} \quad T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$

Ao número λ chamamos <u>valor próprio de T associado ao vector próprio $\vec{v}$</u>.

Para determinar os valores próprios de T, ou da matriz A associada a T, devemos procurar os números reais λ que são solução de

$\det(T-\lambda I)=0$, sendo I a matriz identidade

ou, equivalentemente, encontrar os zeros do polinómio

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}=0,$$

sendo $P(\lambda)$ um polinómio de grau n. É sabido que um polinómio de grau n tem exactamente n zeros complexos, se contarmos as multiplicidades dos seus zeros.

Mostra-se que, se a matriz A é simétrica, então os zeros de $P(\lambda)$ são todos reais! E este resultado é óptimo para nós porque nos vai permitir decidir, em muitas situações, a natureza dos pontos críticos que queremos classificar.

Voltando ao nosso problema: temos uma função $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n$ e x_0 um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(x_0) = 0$.

Olhando para a matriz simétrica

$$\text{Hess}_{x_0} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,n},$$

designemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os seus valores próprios (que sabemos serem todos reais). Então:

(i) se $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, o ponto x_0 é <u>minimizante</u> local

(ii) se $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$, o ponto x_0 é <u>maximizante</u> local

(iii) se existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$, então x_0 é ponto de sela

<u>Exemplos</u>: Há muitos exemplos nos exercícios 13 e 14 da Folha 4

Quando estamos a considerar funções de apenas duas variáveis, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sendo $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^2$, então

$$\text{Hess}_{(x_0,y_0)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Estamos a assumir que (x_0, y_0) é um ponto crítico de f o sinal dos valores próprios de M.

Notem que quando $\det M = 0$ então um dos valores próprios de M é zero e não conseguimos classificar o ponto crítico que estamos a considerar.

O que devemos fazer nestes casos?

Há diversos exercícios resolvidos da Folha 4 que mostram que, nestas situações, podemos encontrar a resposta que procuramos analisando directamente a função

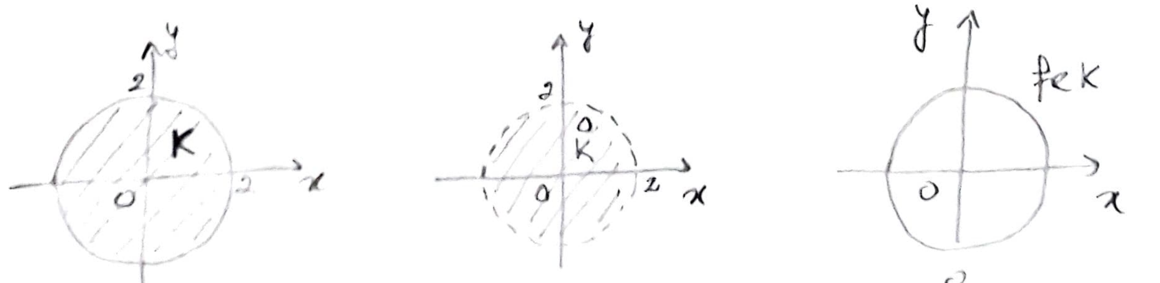
Máximos e mínimos em domínios mais gerais

Seja $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.

Podemos pretender calcular $\max f|_K$ e $\min f|_K$, sendo K um conjunto que não é um aberto nem uma hipersuperfície de nível. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1 Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$ e $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Observem que K não é uma linha de nível. Podemos decompor o conjunto K do seguinte modo:



Notem que $K = \overset{\circ}{K} \cup \text{fr}\, K$ e que $\overset{\circ}{K}$ é um aberto, enquanto que $\text{fr}\, K = g^{-1}(\{4\})$, sendo $g(x,y) = x^2 + y^2$, é uma linha de nível

Como K é um subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^2$, sabemos que existe $\max f|_K$ e $\min f|_K$, respectivamente o máximo absoluto e o mínimo absoluto de K.

Devemos calcular:

1. Máximos e mínimos locais de f em $\mathring{K}$

- Aqui devemos procurar os pontos críticos de f

$$\nabla f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$ e obtemos um único ponto crítico, $A=(0,0)$

- Notem que, como queremos calcular o máximo absoluto e o mínimo absoluto de f, não precisamos de classificar o A pois, de todos os pontos que formos seleccionando, só precisamos de calcular os valores que f toma nesses pontos, escolhendo o maior e o menor valores.

2. Máximo e mínimo de f em $\Sigma_4 = g^{-1}(\{4\}) = \text{fr}\, K$

- Aqui procuramos as soluções dos dois sistemas seguintes:

$$(I) \begin{cases} (x,y) \in \Sigma_4 \\ \nabla g(x,y) = (0,0) \end{cases}$$ (pontos singulares de Σ_4)

$$(II) \begin{cases} (x,y) \in \Sigma_4 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Sistema (I)}}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (2x,2y) = (0,0) \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ sistema impossível

$\boxed{\text{Sistema (II)}}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (y,x) = \lambda(2x,2y) \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ y=2\lambda x \Rightarrow y^2 = 2\lambda xy \\ x = 2\lambda y \Rightarrow x^2 = 2\lambda xy \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$$

$\boxed{y=x}$

$$\begin{cases} 2x^2 = 4 \ (\text{logo } x \neq 0) \\ \cancel{x} = 2\lambda \cancel{x} \Leftrightarrow \lambda = 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} = y \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$$ $B=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $C=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$\boxed{y=-x}$

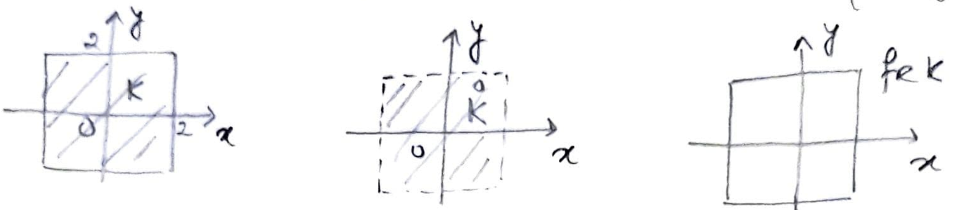
$$\begin{cases} 2x^2 = 4 \ (\text{logo } x \neq 0) \\ -x = 2\lambda x \Leftrightarrow \lambda = 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} = -y \\ \lambda = -1/2 \end{cases}$$ $D=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $E=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$f(A)=0 \qquad f(B)=2=f(C)$

$\qquad\qquad\quad f(D)=-2=f(E)$

Então $\max f|_K = 2$ e $\min f|_K = -2$

Exemplo 2: Seja $f(x,y)=yx$ e $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 2 \wedge |y|\leq 2\}$



Notem que $K=\mathring{K}\cup \text{fr}K$, que $\mathring{K}$ é abeeto e $\text{fr}K$ é uma linha

(1) Máximos e mínimos locais de f em $\mathring{K}$

obtemos, como no exemplo anterior, apenas o ponto $A=(0,0)$.

(2) Máximo e mínimo de f em $\text{fr}K$

- Notem que $\text{fr}K$ é uma linha, mas eu não consigo encontrar uma função $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\text{fr}K = g^{-1}(\{c\})$, para algum $c\in\mathbb{R}$.
- Mas eu posso decompor a $\text{fr}K$ em 4 segmentos:

$\Sigma_{-2}=\{-2\}\times[-2,2]$, $\Sigma_2=\{2\}\times[-2,2]$, $\Pi_{-2}=[-2,2]\times\{-2\}$, $\Pi_2=[-2,2]\times\{2\}$,

sendo $g:\mathbb{R}\times[-2,2]\to\mathbb{R}$ e $\Sigma_{-2}=g^{-1}(\{-2\})$, $\Sigma_2=g^{-1}(\{2\})$
$\qquad (x,y)\longmapsto x$

e $h:[-2,2]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\Pi_{-2}=h^{-1}(\{-2\})$, $\Pi_2=h^{-1}(\{2\})$.
$\qquad (x,y)\longmapsto y$

Teríamos, então, de resolver 4 problemas, um em cada linha de nível. Felizmente, as restrições (ou condições) são neste caso muito simples, permitindo-nos tratar o problema de outra forma

- $\max f|_{\Sigma_{-2}} = \max\limits_{y\in[-2,2]} f(-2,y)$ e $\min f|_{\Sigma_{-2}} = \min\limits_{y\in[-2,2]} f(-2,y)$

Procuramos, então, o máximo e o mínimo da função

$\alpha:[-2,2]\to\mathbb{R} \qquad (\alpha(y)=f(-2,y))$
$\qquad y\longmapsto -2y$

$\alpha'(y)=2\neq 0$, $\forall y\in[-2,2]$

Então $\min\alpha=\alpha(2)=-4$ e $\max\alpha=\alpha(-2)=4$

- $\max f|_{\Sigma_2} = \max\limits_{y\in[-2,2]} f(2,y)$ e $\min f|_{\Sigma_2} = \min\limits_{y\in[-2,2]} f(2,y)$

Procuramos o máximo e o mínimo da função

$$\begin{aligned}\beta: [-2,2] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto 2y\end{aligned} \qquad (\beta(y) = f(2,y))$$

$\beta'(y) = 2 \neq 0$, $\forall y \in [-2,2]$

Então $\min \beta = \beta(-2) = -4$ e $\max \beta = \beta(2) = 4$

- $\max f|_{\Pi_{-2}} = \max\limits_{x\in[-2,2]} f(x,-2)$ e $\min f|_{\Pi_2} = \min\limits_{x\in[-2,2]} f(x,2)$

e procuramos o mínimo e o máximo de

$$\begin{aligned}\gamma: [-2,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2x\end{aligned} \qquad (\gamma(x) = f(x,-2))$$

$\gamma'(x) = -2 \neq 0$, $\forall x \in [-2,2]$

e então $\min \gamma = \gamma(2) = -4$, $\max \gamma = \gamma(-2) = 4$

- $\max f|_{\Pi_2} = \max\limits_{x\in[-2,2]} f(x,2)$ e $\min f|_{\Pi_2} = \min\limits_{x\in[-2,2]} f(x,2)$

e procuramos o máximo e o mínimo de

$$\begin{aligned}\delta: [-2,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x\end{aligned} \qquad (\delta(x) = f(x,2))$$

$\delta'(x) = 2 \neq 0$, $\forall x \in [-2,2]$

pelo que $\min \delta = \delta(-2) = -4$ e $\max \delta = \delta(2) = 4$

Então

$$f(A) = 0, \quad f(-2,2) = -4 = f(2,-2) = \min f|_K$$
$$f(-2,-2) = 4 = f(2,2) = \max f|_K$$

Exemplo 3: Apenas a título de exemplo, podem olhar para os exercícios 19-f) e 19-g) da Folha 4, que tratam o problema de determinar o máximo e o mínimo de uma função f sujeita a duas condições (ou restrições). Estes problemas dão algumas contas mas a abordagem apresentada nestas folhas resolve este tipo de problemas

Se λ_1, λ_2 forem os valores próprios da matriz $\text{Hess}_{(x_0,y_0)} f$, que denotaremos por M para simplificar a escrita, é um resultado de Álgebra Linear que

$$\det M = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

e

$$\operatorname{Tr} M = a + c = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$$

sendo $\operatorname{Tr}(M)$ o traço da matriz M, que consiste na soma dos elementos da diagonal

Então podemos afirmar que

$$\begin{cases} \det M = \lambda_1 \lambda_2 \\ \operatorname{Tr} M = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}.$$

Assim,

$\boxed{\text{se } \det M > 0}$ então λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal logo

- se $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ temos que λ_1 e λ_2 são negativos e (x_0, y_0) é maximizante local de f
- se $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ temos que λ_1 e λ_2 são negativos e (x_0, y_0) é minimizante local de f

$\boxed{\text{se } \det M < 0}$ então λ_1 e λ_2 têm sinais contrários e (x_0, y_0) é ponto de sela

Concluímos, assim, que o sinal do determinante de M e o sinal do traço de M são suficientes para conhecermos o