Universidade do Minho

Álgebra Linear e Geometria Analítica EC

Exercícios 5 - Espaços Vectoriais

1. Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais:

a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = 1\}$
b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = 0, \; y = 2z\}$
c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y + z = 1\}$
d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0\}$

2. Escreva, se possível:

a) O vector $(2, 3, 1)$ como combinação linear dos vectores $(1, -1, 3)$ e $(1, 2, 1)$.
b) O vector $(1, -4, 5)$ como combinação linear dos vectores $(1, -1, 3)$ e $(1, 2, 1)$.
c) O vector $(1, 5, -1)$ como combinação linear dos vectores $(1, -1, 3)$, $(1, 2, 1)$ e $(1, -4, 5)$.
d) O vector $(1, 5, -1)$ como combinação linear dos vectores $(1, -1, 3)$ e $(1, 2, 1)$.

3. Considere os vectores: $(1, -1, 2) \quad (2, 1, 1) \quad (-1, -5, 4)$

a) Verifique se os três vectores geram $\mathbb{R}^3$ e em caso negativo determine a equação (ou equações) do subespaço gerado por eles.
b) Verifique se os vectores são linearmente independentes.

4. Considere os vectores: $(1, -1, 2) \quad (0, 2, 1) \quad (3, 1, -2)$

a) Verifique se os três vectores geram $\mathbb{R}^3$ e em caso negativo determine a equação (ou equações) do subespaço gerado por eles.
b) Verifique se os vectores são linearmente independentes.

5. Verifique se os seguintes vectores são linearmente independentes:

$$(1, 0, -1, 2) \quad (2, -1, 3, -1) \quad (-1, 4, -2, 1) \quad (2, 3, 0, 2)$$

6. Verifique se os seguintes vectores são uma base de $\mathbb{R}^4$:

$$(1, -1, 2, 0) \quad (1, -3, 2, 1) \quad (2, 1, 0, 3) \quad (1, 1, 1, 1)$$

7. Calcule uma base e a dimensão dos seguintes subespaços:

a) $V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x = y, \; z = t\}$
b) $V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + y + z + t = 0\}$
c) $V_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; 2x + y - z = 0, \; x + t = y - 3z\}$
d) $V_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; y - z = x - t, \; -z - 2t = x + y, \; x - 3y + 3z - 2t = 0\}$
e) $V_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; y - z = x - t, \; -z - 2t = x + y, \; x - 3y + z - 4t = 0\}$

8. Seja: $\quad W = < (1, 1, 1), (-2, -3, -5), (0, 1, 3), (1, 2, 4) >$

a) Calcule a dimensão de W.
b) Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 3y - 2x\}$.

9. Calcule uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

   a) $W_1 =< (1,2,1,2),(0,1,0,1),(1,0,0,0),(0,0,2,0) >$

   b) $W_2 =< (1,1,1,2),(0,1,0,-2),(-1,1,1,0),(0,-2,-1,1) >$

10. Seja: $U_k =< (1,1,0,0),(1,0,1,0),(2,k,1,0) >$
    Determine os valores reais de k tais que:

    a) $\dim(U_k)$=1
    b) $\dim(U_k)$=2
    c) $\dim(U_k)$=3
    d) $\dim(U_k)$=4