1. Valores e Vetores Próprios
   - Definições básicas
   - Determinação de valores e vetores próprios

## Definições

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Diz-se que uma matriz coluna $X$, de tipo $n \times 1$, é *vetor próprio (ou vetor caraterístico) de $A$* se:

- $X \neq 0_{n\times 1}$;
- existir um escalar $\lambda$ tal que $AX = \lambda X$.

O valor $\lambda$ designa-se *valor próprio (ou valor caraterístico) de $A$* e diz-se que o *vetor próprio $X$ está associado ao valor próprio $\lambda$*.

## Definição

Se $\lambda$ é um valor próprio,

$$\mathcal{V}_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$$

designa-se o *subespaço próprio (ou subespaço caraterístico) associado ao valor próprio $\lambda$*.

### Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Então $\lambda$ é um valor próprio de $A$ se e só se $det(A - \lambda I_n) = 0$.

### Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Então o polinómio de grau $n$ em $\lambda$ $det(A - \lambda I_n)$ designa-se *polinómio caraterístico de $A$*.

Assim, os valores próprios de $A$ são as raízes do polinómio caraterístico de $A$ e a multiplicidade de uma sua raiz $\lambda_0$ diz-se a *multiplicidade algébrica de $\lambda_0$* .

## Resumo:

Dada uma matriz quadrada $A$, para determinar os valores e os vetores próprios de $A$ deve-se:

1. calcular o polinómio caraterístico, $det(A - \lambda I)$;
2. determinar as raízes do polinómio caraterístico, para obter os valores próprios;
3. para cada valor próprio $\lambda$ resolver o sistema
$$(A - \lambda I)X = 0,$$
para obter os vetores próprios associados a $\lambda$.

- Exemplo 1

Considere-se a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(G-\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}) = -\lambda^3+3\lambda+2$$

e as raízes do polinómio $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$ são 2 e $-1$. De facto

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

pelo que os valores próprios de $A$ são 2, com multiplicidade algébrica 1, e $-1$, com multiplicidade algébrica 2.

Para calcular os subespaços próprios é necessário resolver os sistemas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os subespaços próprios são:

$$\mathcal{V}_2 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e}$$

$$\mathcal{V}_{-1} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

.

## ▶ Exemplo 2

Considere-se a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$det(M - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}) = -\lambda^3 + 3\lambda^2$$

e as raízes do polinómio $-\lambda^3 + 3\lambda^2$ são 3 e 0. Dado que

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3),$$

os valores próprios de $A$ são 0, com multiplicidade algébrica 2, e 3, com multiplicidade algébrica 1.

Os subespaços próprios são as soluções dos sistemas:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\mathcal{V}_3 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad e \quad \mathcal{V}_0 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

### ▶ Exemplo 3

Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$det(A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 3 + \lambda^2$$

e as raízes do polinómio $3+\lambda^2$ são $-i\sqrt{3}$ e $i\sqrt{3}$, ou seja, $A$ não tem valores próprios reais. Consequentemente, também não existem vetores próprios com coordenadas reais.