Universidade do Minho
Álgebra Linear e Geometria Analítica EC
Exercícios 5 - Espaços Vectoriais

1. Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais:

   a) $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 1\}$ Não

   b) $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ y = 2z\}$ Sim

   c) $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y + z = 1\}$ Não

   d) $V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$ Sim

2. Escreva, se possível:

   a) O vector $(2,3,1)$ como combinação linear dos vectores $(1,-1,3)$ e $(1,2,1)$.

   $(2,3,1) = \alpha(1,-1,3) + \beta(1,2,1)$?

   $$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = 3 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & | & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}, \text{ sistema impossível.}$$

   b) O vector $(1,-4,5)$ como combinação linear dos vectores $(1,-1,3)$ e $(1,2,1)$.

   $(1,-4,5) = \alpha(1,-1,3) + \beta(1,2,1)$?

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & | & -4 \\ 3 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \ \alpha = 2, \ \beta = -1.$$

   $(1,-4,5) = 2\,(1,-1,3) - 1\,(1,2,1)$

   c) O vector $(1,5,-1)$ como combinação linear dos vectores $(1,-1,3)$, $(1,2,1)$ e $(1,-4,5)$.

   $(1,5,-1) = \alpha(1,-1,3) + \beta(1,2,1) + \gamma(1,-4,5)$?

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & -4 & | & 5 \\ 3 & 1 & 5 & | & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 3\beta - 3\gamma = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma - 1 \\ \beta = \gamma + 2 \end{cases}$$

   Solução geral: $(-2k-1, k+2, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

   Seja $k = 0$; $(1,5,-1) = -1\,(1,-1,3) + 2\,(1,2,1) + 0\,(1,-4,5) = -(1,-1,3) + 2\,(1,2,1)$.

   d) O vector $(1,5,-1)$ como combinação linear dos vectores $(1,-1,3)$ e $(1,2,1)$.

   $(1,5,-1) = \alpha(1,-1,3) + \beta(1,2,1)$?

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & | & 5 \\ 3 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \ \alpha = -1, \beta = 2.$$

   $(1,5,-1) = -(1,-1,3) + 2(1,2,1)$.

3. Considere os vectores: $(1,-1,2)$, $(2,1,1)$, $(-1,-5,4)$.

   a) Verifique se os três vectores geram $\mathbb{R}^3$ e em caso negativo determine a equação (ou equações) do subespaço gerado por eles.

   Seja $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ -1 & 1 & -5 & b \\ 2 & 1 & 4 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 3 & -6 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & b-a+c \end{array}\right]$$

   O sistema é possível se e só se $b-a+c=0$, então os três vetores não geram $\mathbb{R}^3$; em vez disso,

   $\langle(1,-1,2),(2,1,1),(-1,-5,4)\rangle = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : -a+b+c=0\}$.

   b) Verifique se os vectores são linearmente independentes.

   Não, porque $r\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 3$.

4. Considere os vectores: $(1,-1,2)$ $(0,2,1)$ $(3,1,-2)$

   a) Verifique se os três vectores geram $\mathbb{R}^3$ e em caso negativo determine a equação (ou equações) do subespaço gerado por eles.

   Seja $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ -1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 1 & -2 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 2 & 4 & a+b \\ 0 & 0 & -10 & c-\frac{5}{2}a-\frac{b}{2} \end{array}\right]$$

   Como o sistema é possível, o vetor genérico (a,b,c) é combinação linear dos vetores dados e portanto os três vetores geram $\mathbb{R}^3$.

   b) Verifique se os vectores são linearmente independentes.

   Sim.

5. Verifique se os seguintes vectores são linearmente independentes:

   $$(1,0,-1,2) \quad (2,-1,3,-1) \quad (-1,4,-2,1) \quad (2,3,0,2)$$

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Não, porque a característica desta matriz é diferente de 4.

6. Verifique se os seguintes vectores são uma base de $\mathbb{R}^4$:

   $$(1,-1,2,0) \quad (1,-3,2,1) \quad (2,1,0,3) \quad (1,1,1,1)$$

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

   $r(A)=4$, logo por um lado $Ax=b$ é possível para qualquer vetor b, e por outro os quatro vetores são linearmente independentes; assim os vetores dados formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

7. Calcule uma base e a dimensão dos seguintes subespaços:

a) $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = y, \ z = t\}$

$V_1 = \{(x,x,z,z) : \ x,z \ \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1) : \ x,z \ \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle.$

$\dim V_1 = 2$, uma base: $\big((1,1,0,0),(0,0,1,1)\big)$.

b) $V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + t = 0\}$

$V_2 = \{(-y-z-t,y,z,t) : \ y,z,t \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\rangle.$

$\dim V_2 = 3$, uma base: $\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$.

c) $V_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x + y - z = 0, \ x + t = y - 3z\}$

$V_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x + y - z = 0, \ x + t = y - 3z\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}z, y = \frac{2}{3}t + \frac{7}{3}z\}$
$= \{(-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}t + \frac{7}{3}z, z, t) : z,t \in \mathbb{R}\} = \langle(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1),(-\frac{2}{3},\frac{7}{3},1,0)\rangle = \langle(-1,2,0,3),(-2,7,3,0)\rangle.$

$\dim V_3 = 2$, uma base: $\big((-1,2,0,3),(-2,7,3,0)\big)$.

d) $V_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y - z = x - t, \ -z - 2t = x + y, \ x - 3y + 3z - 2t = 0\}$

$$\begin{cases} y - z = x - t \\ -z - 2t = x + y \\ x - 3y + 3z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = -t \end{cases}$$

$V_4 = \{(\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t, -t, t) : \ t \in \mathbb{R}\} = \langle(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-1,1)\rangle = \langle(1,-3,-2,2)\rangle.$

$\dim V_4 = 1$, uma base: $\big((1,-3,-2,2)\big)$.

e) $V_5 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y - z = x - t, \ -z - 2t = x + y, \ x - 3y + z - 4t = 0\}$

$$\begin{cases} y - z = x - t \\ -z - 2t = x + y \\ x - 3y + z - 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t - z \\ y = -\frac{3}{2}t \end{cases}$$

$V_5 = \{(-\frac{1}{2}t - z, -\frac{3}{2}t, z, t) : z,t \in \mathbb{R} \ \} = \langle(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1),(-1,0,1,0)\rangle.$

$\dim V_5 = 2$, uma base: $\big((-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1),(-1,0,1,0)\big)$.

8. Seja: $\quad W = \langle(1,1,1),(-2,-3,-5),(0,1,3),(1,2,4)\rangle.$

a) Calcule a dimensão de W.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim W = 2$

b) Mostre que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3y - 2x\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & | & x \\ 1 & -3 & 1 & 2 & | & y \\ 1 & -5 & 3 & 4 & | & z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & y - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2x - 3y + z \end{bmatrix}$$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3y - 2x\}.$

9. Calcule uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

a) $W_1 = \langle(1,2,1,2),(0,1,0,1),(1,0,0,0),(0,0,2,0)\rangle.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma base: $\big((1,2,1,2),(0,1,0,1),(1,0,0,0)\big)$, a dimensão: 3.

b) $W_2 = \langle (1,1,1,2),(0,1,0,-2),(-1,1,1,0),(0,-2,-1,1) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma base: $\big((1,1,1,2),(0,1,0,-2),(-1,1,1,0)\big)$, a dimensão: 3.

10. Seja: $U_k = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(2,k,1,0) \rangle$

Determine os valores reais de k tais que:

a) dim(U_k)=1

b) dim(U_k)=2

c) dim(U_k)=3

d) dim(U_k)=4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Impossível.

b) $k = 1$.

c) $k \neq 1$.

d) Impossível.