Introdução a Física Moderna Conjunto 4

1. Em referencial **S**, o evento 1 toma lugar nos coordenados (ct1 = 0, x1=0) enquanto o evento 2 acontece no (ct2=1m, x2 = 2m).
Determinar a velocidade dum referencial **S´** para qual os dois eventos ocorrem no simultaneamente.
Segundo a transformação de Lorentz $c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta \Delta x\right)$ para $\Delta t' = 0$, necessitamos que $\beta = c\Delta t / \Delta x = (1m - 0m)/(2m - 0m) = 0.5$ S' tem deslocar com uma velocidade 0.5 na direção $+\hat{x}$.
Qual é a velocidade dum referencial **S´** para qual a diferença temporal c(t2-t1) seja igual a -1m?
$c\Delta t' = -1m = \gamma\left(c\Delta t - \beta\Delta x\right)$ ao substituir os valores de Δt e Δx temos resolver a equação $-1 = \gamma\left(1 - 2\beta\right) \Rightarrow -\sqrt{1-\beta^2} = \left(1 - 2\beta\right)$ Ao fazer o quadrado os dois lados $1 - \beta^2 = 1 - 4\beta + 4\beta^2 \quad \rightarrow \quad 5\beta^2 = 4\beta \quad \rightarrow \quad \beta = 4/5$. S' terá deslocar com uma velocidade de 0.8c na direção $+\hat{x}$.

2. **Dois comboios:** Comboio A com um comprimento próprio de L se desloca para o norte a uma velocidade v. Numa linha paralela, comboio B com um comprimento próprio de 2L se desloca para o sul também com uma velocidade v.
Quanto demora o tempo de "cruzamento", i.e. o tempo desde que as duas frentes coincidem até a altura em que as duas traseiras dos comboios se cruzam:
(a) no referencial do comboio A?
Segundo um observador no comboio A a velocidade relativa entre A e B é usando a expressão para somar velocidades (A vê alguém na estação deslocar com uma velocidade v para sul e alguém na estação vê o comboio B deslocar a velocidade para sul)

$u = \dfrac{\mathrm{v}+\mathrm{v}}{1+\left(\mathrm{v}/c\right)^2} = \dfrac{2\mathrm{v}}{1+\left(\mathrm{v}/c\right)^2}$ o que tem um fator $\gamma = \dfrac{1+\left(\mathrm{v}/c\right)^2}{1-\left(\mathrm{v}/c\right)^2}$.

No referencial de A o comboio tem se deslocar a soma dos comprimentos dos dois comboios com a velocidade u. Mas no referencial de A o comboio B sofre uma contração. Assim o tempo de cruzamento é

$$\Delta t_A = \left(L + \frac{2L}{\gamma}\right)\frac{1}{u} = L\left(1 + 2\frac{1-\left(\mathrm{v}/c\right)^2}{1+\left(\mathrm{v}/c\right)^2}\right)\frac{1+\left(\mathrm{v}/c\right)^2}{2\mathrm{v}}$$

$$= L\frac{\left(3-\left(\mathrm{v}/c\right)^2\right)}{2\mathrm{v}}$$

(b) no referencial do comboio B?
As contas são quase iguais no referencial de B, a velocidade relativa é a mesmo e o fator gama também, apenas troca o comboio que sofre contração

$$\Delta t_B = \left(2L + \frac{L}{\gamma}\right)\frac{1}{u} = L\left(2 + \frac{1-(\mathrm{v}/c)^2}{1+(\mathrm{v}/c)^2}\right)\frac{1+(\mathrm{v}/c)^2}{2\mathrm{v}}$$

$$= L\frac{\left(3+(\mathrm{v}/c)^2\right)}{2\mathrm{v}}$$

(c) Verificar que o intervalo invariante é o mesmo nos dois referenciais.

Para o A a distância entre os eventos é L e temos que o intervalo invariante é

$$\Delta s_A^2 = (c\Delta t_A)^2 - \Delta x_A^2 = L^2\frac{\left(3-(\mathrm{v}/c)^2\right)^2}{4(\mathrm{v/c})^2} - L^2$$

$$= \frac{L^2}{4(\mathrm{v/c})^2}\left(9 - 10\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^4\right)$$

Para o B a distância entre os eventos é 2L e o intervalo invariante é

$$\Delta s_B^2 = (c\Delta t_B)^2 - \Delta x_B^2 = \frac{c^2L^2}{4\mathrm{v}^2}\left(3+(\mathrm{v}/c)^2\right) - 4L^2$$

$$= \frac{c^2L^2}{4\mathrm{v}^2}\left(9 - 10\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^4\right)$$

que claro é o mesmo.

3. **Invariância do produto interno:** Considere dois "tetra vetores" $\mathbf{A} = (\mathrm{a}_t, \mathrm{a}_x, \mathrm{a}_y, \mathrm{a}_z)$ e $\mathbf{B} = (b_t, \mathrm{b}_x, \mathrm{b}_y, \mathrm{b}_z)$ no referencial **S**. Os valores dos elementos deste tetra vetors e variam se tranformam de acordo com as transformações de Lorentz, i.e. num referencial S' que se desloca com uma velocidade constante u ao longo do eixo dos xxs os novo componentes de $\mathbf{A}'$ serão:

$$\mathrm{a}_t' = \gamma[\mathrm{a}_t - \beta \mathrm{a}_x]$$

$$\mathrm{a}_x' = \gamma[\mathrm{a}_x - \beta \mathrm{a}_t]$$

$$\mathrm{a}_y' = \mathrm{a}_y; \quad \mathrm{a}_z' = \mathrm{a}_z$$

Aqui os fatores β e γ são os de costume, $\beta = u/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Os elementos de B se transformam duma maneira análoga. Demonstrar que o valor do produto interno $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = \mathrm{a}_t\mathrm{b}_t - (\mathrm{a}_x\mathrm{b}_x + \mathrm{a}_y\mathrm{b}_y + \mathrm{a}_z\mathrm{b}_z)$ mantém se igual em S´, i.e. $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = \mathbf{A}'\bullet\mathbf{B}'$.

Isso é apenas álgebra…

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}' \bullet \mathrm{B}' &= \left(a_t' b_t'\right) - \left(a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z'\right) \\
&= \gamma^2 \left[\mathrm{a}_t - \beta \mathrm{a}_x\right]\left[b_t - \beta b_x\right] - \gamma^2 \left[\mathrm{a}_x - \beta \mathrm{a}_t\right]\left[b_x - \beta b_t\right] - \left(a_y b_y + a_z b_z\right) \\
&= \gamma^2 \left\{\mathrm{a}_t b_t - \beta \mathrm{a}_t b_x - \beta \mathrm{a}_x b_t + \beta^2 \mathrm{a}_x b_x\right\} \\
&\quad - \gamma^2 \left\{\beta^2 \mathrm{a}_t b_t - \beta \mathrm{a}_t b_x - \beta \mathrm{a}_x b_t + \mathrm{a}_x b_x\right\} - \left(a_y b_y + a_z b_z\right) \\
&= \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \mathrm{a}_t b_t - \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \mathrm{a}_x b_x - \left(a_y b_y + a_z b_z\right) \\
&= \mathrm{a}_t b_t - \mathrm{a}_x b_x - \left(a_y b_y + a_z b_z\right) \\
&= \mathrm{A} \bullet \mathrm{B}
\end{aligned}
$$