Até aqui aprendemos sobre o movimento de translação dos corpos, ou seja, aquele em que todos os pontos se movem em uma mesma direção e sentido. A partir daqui, aprenderemos sobre o movimento de rotação.

O movimento de rotação é caracterizado por possuir um **eixo de rotação**, que se **mantém fixo** durante o movimento e todos os outros pontos rodam ao redor dele. Para analisarmos esse movimento, o primeiro passo é entender o que é momento de inércia.

Vão aparecer dois tipos de objetos para calcular o momento de inércia, os objetos pontuais, que são os considerados muitos pequenos e os objetos extensos, nesses, o tamanho é importante.

OBS: O momento de inércia vai ser SEMPRE em relação a um EIXO e não a um PONTO.

Vamos tratar, nesse primeiro momento, dos objetos que chamamos acimas de "pontuais", ou seja, consideraremos como partículas e analisaremos a rotação delas ao redor de um eixo.

A fórmula é bem simples,

$$I = m_{particula} \cdot r^2$$

O r é a distância dessa partícula ao **EIXO**, lembre-se é a distância ao **EIXO**.

Quando precisarmos de calcular o momento de inércia de um sistema de partículas, usaremos:

$$I_{sistema} = \sum I_{part\acute{i}cula}$$

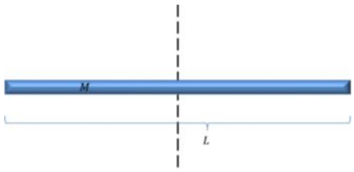
Vamos ter 3 partículas no eixo, então seu momento de inércia é zero.

Cálculo do Momento de Inércia em Corpos Extenso

Fazemos isso pegando um auxilio lá das nossas aulas de cálculo, e para calcular o momento de Inércia de Corpos Extensos precisamos calcular essa integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Ta, então para facilitar nossas contas, ao invés de pensar logo de uma vez em uma bola de basquete, vamos primeiro tentar calcular essa integral para um barra homogênea, que você pode imaginar sendo um taco de beisebol beeeem simplificado. Então vamos calcular o momento de inércia de uma barra homogênea com um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao comprimento da barra como na figura:



Consideremos uma barra de massa M e comprimento L. Considera-se, para esse cálculo, que as outras dimensões da barra são desprezíveis em comparação à L. Lembra que a gente sabe como calcular o momento de Inércia de uma partícula, a gente pode enxergar a nossa barra, como uma linha de varias partículas, uma seguida da outra!

Vamos lembrar da equação:

$$I = \int r^2 dm$$

Agora é necessário que toda a expressão de dentro da integral esteja em função de somente uma variável. Para isso, precisamos achar a relação de m com r, que é a distância do pedacinho de massa dm ao eixo. Cada pedacinho dm de massa, representa uma partícula que vai gerar um pouquinho de momento de inércia em relação ao nosso eixo de rotação e a integral vai ser a responsável por somar todos esses pedacinhos.

Bom sabemos que a barra é **homogênea**. O que isso significa?

Vamos mostrar em equações, que fica mais fácil. Quando um corpo é homogêneo, temos:

$$\frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} = cte.$$

Ou seja, a relação entre massa e comprimento é sempre constante. Com isso, podemos usar que:

$$dm = \frac{M}{L}\,dl$$

Estamos quase lá! Esse l se torna o r, se considerarmos que iremos realizar a nossa integração com relação ao eixo de rotação especificado. Portanto:

$$I_{barra} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \frac{M}{L}\,dr$$

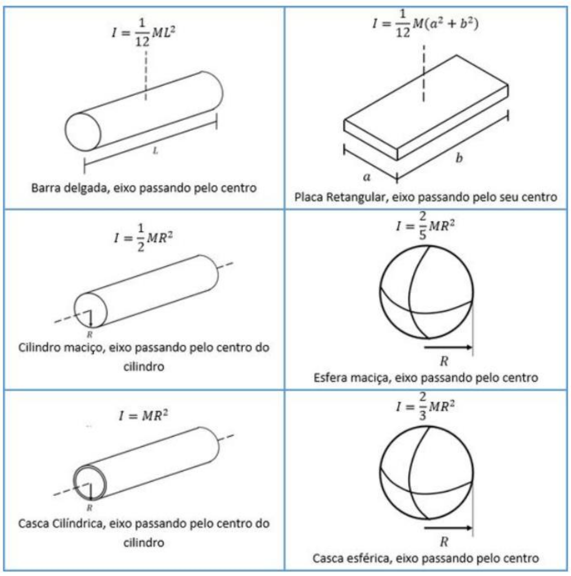
Resolvendo essa integral:

$$I_{barra} = \frac{M}{L}\frac{r^3}{3}\bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rightarrow I_{barra} = \frac{ML^2}{12}$$

Parece complicado né?

Mas poucas vezes você vai precisar realizar todo esse processo, porque alguém já fez isso uma vez! Se liga nessa tabela com os momentos de inércia das formas mais comuns.

$$I_{sistema} = I_{partícula\ 1} + I_{partícula\ 2} + I_{barra\ 1} + I_{barra\ 2}$$



Exercício Resolvido #1

Halliday, David, Fundamentos de física, volume I : mecânica, 8 ed. Rio de Janeiro : TLC, 2008, pp. 292-91

(a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro de massa M e raio R em relação ao eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação ao eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação à qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um *aro equivalente* em torno do mesmo eixo, se o aro tiver a mesma massa M e um raio k dado por

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

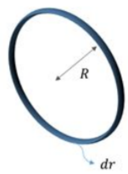
Passo 1

(a) Aprendemos que o cálculo do momento de inércia de corpos extensos é feito por meio de integral, então, a primeira idéia é calcular a integral:

$$\int r^2 dm$$

Passo 2

A primeira coisa a se fazer é calcular o momento de inércia do aro homogêneo de massa M e raio R, em relação ao eixo central do mesmo.



Aqui podemos usar a integral, pois trata-se de uma integral simples, saca só:

$$I_{aro} = \int_0^M r^2 dm$$

No aro, todas as minipartículas que o compõem estão à mesma distância R do eixo de rotação, portanto:

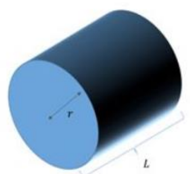
$$I_{aro} = R^2 \int_0^M dm$$

Podemos concluir:

$$I_{aro} = MR^2$$

Passo 3

Beleza! Agora, vamos calcular o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo central. Vamos considerar um elemento da forma de cilindro no interior do cilindro de massa M, raio R e comprimento L. Esse elemento cilíndrico tem massa dm, raio $r < R$ e altura L, como na figura abaixo.



Devemos considerar também que o cilindro possui uma densidade volumétrica γ uniforme, de forma que:

$$M = \gamma \pi R^2 L$$

$$dm = \gamma 2\pi r dr L$$

Assim, temos que o momento de inércia do cilindro maior pode ser obtido integrando o elemento infinitesimal para r de 0 até R:

$$I_{cilindro} = \int I_{cilindro\ inf} = \int dmr^2$$

Substituindo dm pela expressão obtida acima:

$$I_{cilindro} = \int_0^R \gamma 2\pi r^3 dr L = \frac{\gamma 2\pi R^4 L}{4} = \frac{\gamma \pi R^4 L}{2}$$

Substituindo γpor $\frac{M}{\pi R^2 L}$:

$$I_{cilindro} = \frac{M}{\pi R^2 L} \frac{\pi R^4 L}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

Passo 4

Agora que já temos o momento de inércia do cilindro e o momento de inércia do aro em relação ao eixo central, vamos voltar ao enunciado.

O momento de inércia de um cilindro de massa Me raio R é dado por: $\frac{MR^2}{2}$

O momento de inércia de um aro de massa M e raio $R\,/\sqrt{2}$ é dado por: $M\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{MR^2}{2}$

Logo, eles são iguais! :)

Passo 5

(b) Vamos lá, estamos quase acabando!

Agora o que ele quer que a gente mostre é que o momento de inércia de um corpo de mass M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um aro equivalente de massa M e um raio $k = \sqrt{\frac{I}{M}}$ ao redor desse mesmo eixo. Parece complicado, né? Vamos com calma!

Passo 6

Bom, já vimos que o momento de inércia de um aro em relação ao eixo central é dado por:

$$I_{aro} = Mk^2$$

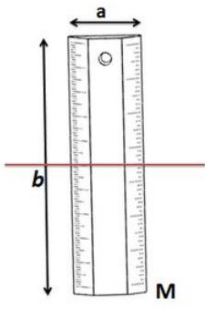
onde k é o raio. Se k é dado por $\sqrt{\frac{I}{M}}$, onde I é o momento de inércia de um corpo em relação ao mesmo eixo, temos que:

$$I_{aro} = M\left(\sqrt{\frac{I}{M}}\right)^2 = I$$

Logo, mostramos que o momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um dado eixo é igual ao momento de inércia de um aro em volta desse eixo de raio $\sqrt{\frac{I}{M}}$.

Teorema dos Eixos Paralelos

O momento de inércia de um retângulo em relação ao eixo que passa no seu centro de massa é $I = \frac{M}{12}\left[a^2 + b^2\right]$. Que é esse caso aqui:

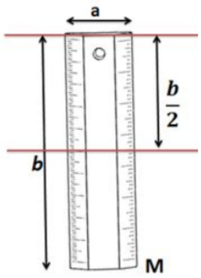


Pra calcular o momento de inércia em um eixo que está a uma distância d do centro de massa de um corpo basta usar a seguinte formulinha:

$$I_f = I_{CM} + Md^2$$

Sendo I_f o momento de inércia no eixo que você quer calcular, I_{CM} o momento de inércia no eixo que passa pelo centro de massa do objeto e M a massa desse corpo.

Lá no nosso exemplo quem que era o d?



$$d = \frac{b}{2}$$

Logo, a gente pode usar aquela relação:

$$I_f = I_{CM} + Md^2$$

$$I_f = \frac{M}{12}\left[a^2 + b^2\right] + M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}\left[a^2 + 4b^2\right]$$

E isso você pode fazer pra qualquer corpo ou partícula. Só seguir os passos:

Passo 1: Identificar qual o eixo de rotação.

Passo 2: Identificar qual a distância do eixo de rotação para o eixo que passa pelo centro de massa (vulgo d).

Passo 3: Calcular o momento de inércia do corpo com rotação no centro de massa (I_{CM}).

Passo 4: Aplicar o Teorema dos eixos paralelos: $I_f = I_{CM} + md^2$

Passo 5: Marcar a resposta correta e correr pro abraço.

Energia Cinética de Rotação

A sua intuição não te enganou! Vamos aprender aqui sobre a **energia cinética de rotação**, que é usada quando objetos giram e ganham energia, mesmo que seu centro de massa fique parado (ou não).

Em problemas de energia, a abordagem vai ser a mesma aprendida lá em Dinâmica de Translação, vamos **CONSERVAR A ENERGIA MECÂNICA**. Só que, dessa vez, tomaremos cuidado com esse termo relacionado a rotação do objeto que pode aparecer.

Tá, beleza... Mas, como eu calculo essa energia de **rotação**?

Simples! Só usar a fórmula:

$$K_{rotação} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Onde:

- $K_{rotação}$ é a energia cinética de rotação;
- I é o momento de inércia do corpo;
- e ω é a velocidade angular do corpo no instante desejado.

Um modo de facilitar a memorização não só dessa fórmula, mas de muitas outras aqui em Dinâmica de Rotação é pensar em "irmãozinhos".

- A **massa (m)** lá do movimento translacional é "irmãzinha" do **momento de inércia(I);**
- A **velocidade linear(v)** é "irmãzinha" da **velocidade angular (ω)**.

Então, basta lembrarmos da fórmula da energia cinética rotacional:

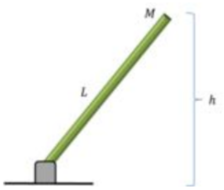
$$K_{translação} = \frac{mv^2}{2}$$

E, se decorarmos as irmãzinhas, fica fácil lembrar da fórmula da $K_{rotação}$.

Energia de Rotação + Translação + Potencial Gravitacional

Há situações cujos corpos executam os dois tipos de movimento e, por isso, temos que colocar todos os tipos de energia nos exercícios. Vamos a um exemplo!

A barra da figura abaixo possui massa M e tamanho L e é presa no nível do chão por uma de suas extremidades. A sua outra extremidade é abandonada de uma altura h do nível do solo. Qual é a velocidade linear da extremidade livre quando esta chega ao nível do solo?



O problema é solucionado por **conservação da energia mecânica**.

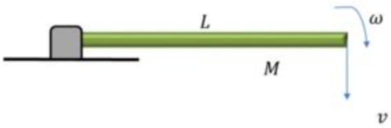
$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$U_i + K_{T_i} + K_{R_i} = U_f + K_{T\,f} + K_{R\,f}$$

Como no inicio a barra está parada ela não translada nem rotaciona, então só há energia potencial gravitacional e como a barra é um corpo extenso, levamos em conta os dados em relação ao seu centro de massa:

$$E_i = U_i = Mg\frac{h}{2}$$

Já pra situação final:



Teremos energia cinética rotacional, porque a barra estará girando em torno do seu eixo, e de translação porque seu centro de massa terá uma velocidade conforme cai, porém não teremos energia potencial gravitacional, já que a barra estará na altura do chão.

$$E_f = K_{T_f} + K_{R\,f}$$

$$E_f = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Iw^2}{2}$$

Energia cinética rotacional: lá da cinemática da rotação, conseguimos uma relação entre a velocidade linear da extremidade e a velocidade angular da barra (**QUE É A MESMA PARA TODOS OS PONTOS DA BARRA!**)

$$v = \omega L \rightarrow \omega = \frac{v}{L}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\left(\frac{v}{L}\right)^2}{2} = \frac{Iv^2}{2L^2}$$

Show! Estamos quase lá! Vamos agora aplicar a conservação da energia mecânica:

$$U_i = K_{T_f} + K_{R\,f}$$

$$Mg\frac{h}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2L^2}$$

Como o momento de inércia de uma barra de massa M e comprimento L, presa pela extremidade, é dado por:

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

(Não se preocupe! No geral essas expressões de momento de inércia são dadas!)

Temos:

$$Mg\frac{h}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{6}$$

Resolvendo a equação para acharmos o valor da velocidade

$$gh = v^2 + \frac{v^2}{3} = \frac{4v^2}{3}$$

$$v = \frac{\sqrt{3gh}}{2}$$

$602 \; rev/min.$ (Conversão da unidade de ω)

$$\omega = 602\frac{rev}{min} \; . \; \frac{1}{60}\frac{min}{s} \; . \, 2\pi\frac{rad}{rev} \rightarrow \omega = \frac{602 \; . \; 2\pi}{60} \; rad/s$$

$$\omega \cong 63 \; rad/s$$

Uma esfera é lançada rolando sem deslizar subindo um plano inclinado com velocidade inicial $\vec{v}$ do seu centro de massa. Um bloco é lançado subindo em translação um plano inclinado com a mesma inclinação e com a mesma velocidade inicial $\vec{v}$ do seu centro de massa. No plano onde se encontra a esfera há atrito suficiente para que ela permaneça rolando sem deslizar e no plano onde está o bloco não há atrito.

A relação entre a altura máxima H_b que o bloco atinge e a altura máxima H_e que a esfera atinge nos respectivos planos é dada por

(a) $H_b = H_e$, pois tanto a energia cinética do bloco como a da esfera se conserva.

(b) $H_b = H_e$, pois tanto a energia mecânica do bloco como a da esfera se conserva.

(c) $H_b > H_e$, pois o bloco desliza sem atrito.

(d) $H_e > H_b$, pois a esfera rola sem deslizar.

(e) $H_e > H_b$, pois tanto a energia mecânica do bloco como a da esfera se conserva.

Passo 1

Primeiro vamos determinar se a energia mecânica se conserva pro bloco e pra esfera.

Pro caso do bloco é fácil: não tem atrito (nem outra força não-conservativa) atuando, então ela se conserva.

Já pra esfera temos que ficar ligados! Tem atrito, mas se não tivesse a esfera não poderia rolar sem deslizar! Que nem provavelmente você já ouviu dizer que se o chão não tivesse atrito, não daria pra gente andar (por isso que pessoas que andam no gelo escorregam).

Enfim, o ponto é que esse atrito é só o suficiente pra esfera rolar sem deslizar, mas ele não faz a esfera perder energia!

Portanto, tanto a energia mecânica do bloco como a da esfera se conserva.

Passo 2

Apesar de na figura a esfera e o bloco não estarem exatamente no nível do chão, vamos considerar que eles partem com energia potencial gravitacional zero, ok?

Então a energia mecânica inicial E_i deles é igual à energia cinética inicial K associada à velocidade v.

Passo 3

Começando pela esfera: vamos considerar que ela tem massa M e raio R.

Ela tem as energias cinéticas de rotação K_{rot} e de translação K_{tran}, então sua energia mecânica inicial é:

$$E_{i\,esfera} = K_{rot} + K_{tran}$$

$$\Rightarrow E_{i\,esfera} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

Passo 4

O momento de inércia de uma esfera de massa M e raio R é

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

E também temos a relação

$$v = \omega R \ \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

Passo 5

Então a equação que achamos antes vai dar:

$$E_{i\,esfera} = \frac{1}{2} \bullet \frac{2}{5}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$\Rightarrow E_{i\,esfera} = \frac{2}{10}MR^2\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$\Rightarrow E_{i\,esfera} = \frac{2}{10}Mv^2 + \frac{5}{10}Mv^2$$

$$\Rightarrow E_{i\,esfera} = \frac{7}{10}Mv^2$$

Então essa é a energia mecânica inicial da esfera!

Passo 6

Agora vamos supor que o bloco tem massa m. Como vimos, sua energia mecânica inicial é igual à sua energia cinética inicial e vale

$$E_{i\,bloco} = \frac{1}{2}mv^2$$

Passo 7

Agora vamos estudar as energias mecânicas finais E_f da esfera e do bloco, começando pela esfera!

No fim do movimento, a esfera para numa altura H_e: toda a sua energia cinética se transformou em energia potencial gravitacional, então:

$$E_{f\,esfera} = MgH_e$$

Passo 8

E pela conservação da energia mecânica,

$$E_{i\,esfera} = E_{f\,esfera}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}Mv^2 = MgH_e$$

Multiplicando por $\frac{10}{7M}$ dos 2 lados:

$$v^2 = \frac{10}{7} g H_e$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} g H_e}$$

Passo 9

Da mesma forma, pro bloco,

$$E_{f\,bloco} = mgH_b$$

e

$$E_{i\,bloco} = E_{f\,bloco}$$

Passo 10

Logo,

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgH_b$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gH_b$$

Passo 11

Recapitulando, achamos

$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{10}{7} g H_e} \\ v = \sqrt{2gH_b} \end{cases}$$

Passo 12

Igualando as 2 expressões:

$$\sqrt{\frac{10}{7} g H_e} = \sqrt{2gH_b}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{7} g H_e = 2gH_b$$

$$\Rightarrow \frac{10}{7} H_e = 2H_b$$

$$\Rightarrow H_e = \frac{7}{10} 2H_b = \frac{14}{10} H_b$$

$$\Rightarrow H_e > H_b$$

Chegamos nesse resultado por causa da conservação da energia mecânica, então a alternativa certa é a letra (e)!

Torque

Lá no estudo da estática nós aprendemos um conceito chamado torque. Aqui em dinâmica de rotação o torque vai ser fundamental para a análise dos movimentos.

A definição segue a mesma, se liga:

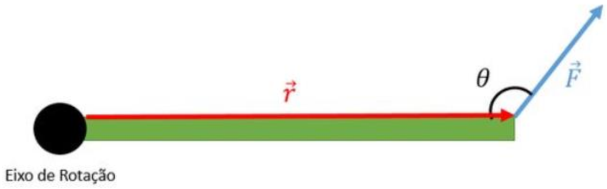
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Onde $\vec{r}$ é o vetor da posição do ponto de aplicação da força relativo ao eixo de rotação, esse vetor também é conhecido por braço de alavanca.

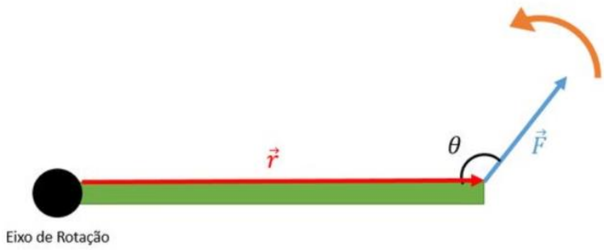
Esse negocinho aí com $\times$ se chama produto vetorial. Por isso o torque é uma grandeza vetorial, portanto, possui módulo, direção e sentido. Mas, como descobrir isso tudo?

- Direção do Torque

Imagina uma barra de tamanho L que está sobre o eixo x. Suponha também que existe uma força $\vec{F}$, agindo na extremidade que distancia L da origem, e que faz um ângulo θ com a com o vetor $\vec{r}$. A imagem vai dar uma ideia melhor.

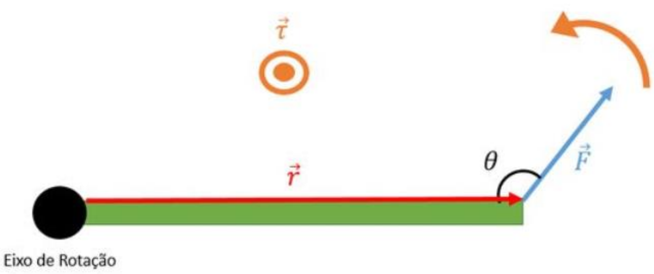


Esse vetor $\vec{F}$ faz o nosso objeto girar no sentido anti-horário, correto? Olha só



Pra saber a direção e o sentido do vetor, gire a sua mão no mesmo sentido da tendência de rotação que $\vec{F}$ faz

Nesse nosso caso o torque aponta para fora da página



- **Módulo do Torque**:

O módulo do torque é dado por

$$\tau = rFsen\theta$$

Uma coisa importante aqui é que se $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{F}$ são paralelos, o ângulo entre eles vai ser 0 e o torque vai ser nulo! Isso porque

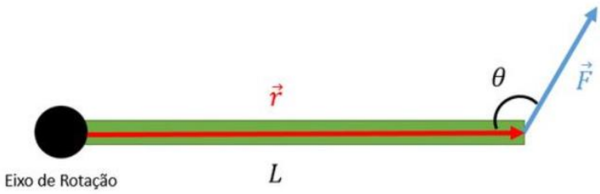
$$\theta = 0 \rightarrow sen(0) = 0 \rightarrow \tau = rFsen(0) = 0$$

Vai ser essa situação aqui:

Faz total sentido, né? A força, desse jeito, nunca vai girar o nosso objeto!

Relação entre o Torque e a Aceleração Angular

Show! Vamos continuar com o nosso exemplo aqui:



Quando eu aplico nessa barra a força $\overrightarrow{F}$ ela vai girar, correto? E se eu te perguntasse qual é a aceleração linear do centro de massa dessa barra? Como você ia agir? Chorar? Não! Se acalma aí que vai ficar tudo claro como a neve. =]

Já aprendemos o que é **torque**:

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

No entanto, temos mais uma relação pro torque que é super importante, principalmente para esse nosso exemplo. Saca só!

$$\overrightarrow{\tau} = I\overrightarrow{\alpha}$$

Isso aí! Essa fórmula te ajuda a achar a **aceleração angular** $\boldsymbol{\alpha}$ do corpo, se você souber o **torque total** que age sobre este mesmo corpo.

Vamos tentar usar essa fórmula pra resolver o exemplo que foi dado.

Primeiramente temos que achar o torque total que tá agindo no corpo. Para isso, vamos usar o conceito que aprendemos.

Dado que o eixo de rotação do corpo é a extremidade presa da barra, temos que:

$$\tau = Frsen\theta$$

Como o tamanho do vetor $\overrightarrow{r}$ é o tamanho L da barra

$$\tau = FLsen\theta$$

Podemos relacionar o torque com a aceleração angular por

$$\tau = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I}$$

O momento de inércia de uma barra é $I = ML^2/3$. Substituindo tudo que a gente sabe:

$$\alpha = \frac{LFsen\theta}{\frac{ML^2}{3}} \rightarrow \alpha = \frac{3Fsen\theta}{ML}$$

Show de bola! Mas não podemos parar por aqui. Lembre-se que a aceleração angular é **SEMPRE** a mesma para todos os pontos de um corpo rígido.

Usaremos um conceito simples lá da cinemática de rotação:

$$a = \alpha r$$

Como r é a distância entre o eixo de rotação e o ponto onde você quer obter a aceleração linear, temos que o centro de massa está a uma distância $r = L/2$ do eixo de rotação, assim:

$$a_{CM} = \alpha r = \alpha \frac{L}{2}$$

Substituindo o valor de α:

$$a_{CM} = \frac{3Fsen\theta}{ML} \frac{L}{2}$$

$$a_{CM} = \frac{3}{2} \frac{Fsen\theta}{M}$$

Beleza? Então é assim que usa o torque!

Energia Mecânica no Rolamento sem Deslizamento

Quando uma bola rola sem deslizar, você sabe dizer qual é energia mecânica envolvida no movimento?

Talvez você tenha pensado "ahh é a energia cinética", e você está certíssimo. Mas não é qualquer energia cinética, será a energia cinética de rotação mais a de translação. Mas ainda tem como complicar e se a bola estiver acelerando?

Se não há deslizamento podemos dizer que há conservação de energia mecânica que é composta de:

$$E_p + K_{Trans} + K_{Rot} = E_{mec}$$

Mas caramba, a gente não falou de força de atrito aqui? A energia se conserva nesse caso?

A resposta é SIM! Mas como isso?

No caso de um rolamento sem deslizamento, o ponto de contato com o solo está parado certo? É nesse ponto que o atrito atua também.

A energia que o atrito tiraria do sistema teria que ser dada pelo seu trabalho

$$W_{F_{at}} = F_{at} d$$

Só que o ponto de contato da roda com o solo está parado! Ou seja, o deslocamento é 0, o que significa que o trabalho realizado pelo atrito também é zero, assim, conservando a energia mecânica!

O que o atrito está fazendo aqui é converter energia cinética translacional em energia cinética rotacional.

Agora vamo que vamo meter a cara nos exercícios!!!

O que é momento angular?

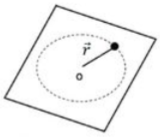
Hoje vamos continuar vendo algumas semelhanças entre a translação e a rotação. São relações que podemos criar para nos ajudar a entender melhor os conceitos e guardar as fórmulas!

Tá ligado na irmandade entre a rotação e a translação? Sabe quem é o irmãozinho do momento linear? É o **momento angular** que esta relacionado com o movimento de rotação dos corpos. Foi ai que eu pensei que isso podia ser tipo uma "Quantidade de Movimento Angular", que aumenta o quanto mais rápido o corpo ta rodando ou quanto mais pesado é o corpo.

Será que existe alguma relação mais intima entre esses dois irmãos ai?

Como calcular o momento angular?

Beleza, então imagina ter que calcular o momento angular de uma partícula que se move em movimento circular presa por um fio em cima de uma mesa:



Então, a partícula tem massa e uma certa velocidade tangencial, portanto ela possui momento linear, mas não podemos esqucer que ela está fazendo um movimento circular, então como ela está rodando, ela vai possuir uma certa quantidade de movimento angular, ou seja, momento angular! Que podemos calcular com o seguinte produto vetorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Onde $\vec{r}$ é o **braço**, ou **vetor distância**, $\vec{p}$ é o nosso amigo **momento linear** e $\vec{L}$ o momento angular. Usualmente, essa fórmula é utilizada para calcular o momento angular de corpos pequenos. Podemos lembrar que, quando temos um produto vetorial, podemos usar que:

$$\left|\vec{L}\right| = L = mvrsen\theta$$

E então, quando $\vec{r}$ e $\vec{p}$ forem perpendiculares:

$$\left|\vec{L}\right| = L = mvr$$

Quando pensamos em corpos extensos como um ventilador de teto com duas pás, podemos pensar ele como uma barra homogênea rodando em volta de um eixo que passa pelo seu centro de massa e podemos utilizar o momento de inércia e a velocidade angular para descobrir o momento angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Onde o momento angular vai ter a direção da velocidade angular. Lembrando que a direção e o sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita!

Relação entre momento angular e torque?

Quando dizemos que o momento linear se conserva, dizemos que o sistema está livre da atuação de forças externas. Então se existe a variação do momento linear, existe algum tipo de Força no sistema que ta gerando essa variação. Podemos ver isso pela fórmula que relaciona força, momento linear, e tempo:

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{F}$$

Na rotação não é tão diferente, mas sabemos que haverá uma troca de variáveis.

- O momento linear $\overrightarrow{p}$ vira o momento angular $\overrightarrow{L}$;
- A força $\overrightarrow{F}$ vira o torque $\overrightarrow{\tau}$.

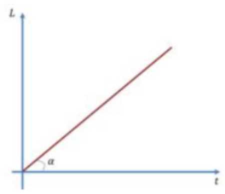
Então, o momento angular está intimamente relacionado a existência, ou não, de torques no sistema:

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt}$$

Análise de gráficos

Tem muitas variáveis aí vagando na tua cabeça, né? Vamos ver como elas aparecem mais: na análise de gráficos que as relacionam.

Se liga nesse gráfico $L\ x\ t$:



A pergunta é: que informações conseguimos tirar desse gráfico? Aprendemos ali em cima que:

$$\frac{dL}{dt} = \tau$$

Pelo gráfico, vimos que a variação do momento angular com o tempo segue uma relação linear, então, de cara podemos falar que o torque é constante!

A inclinação da reta define o valor do torque:

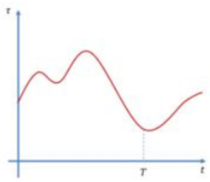
$$tg\ \alpha = \tau$$

Se tivermos mais informações sobre o corpo que está sendo analisado, podemos ir mais além! Sabendo o momento de inércia, usamos a segunda lei de Newton da rotação:

$$\tau = I\alpha$$

E encontramos a aceleração angular a que o corpo está sujeito.

Outro gráfico comum é o de torque por tempo, $\tau\ x\ t$:



Temos aí uma curva aleatória do torque variando com o tempo. O que você faria se te pedissem o momento angular que age no corpo no momento T?

Vamos às equações:

$$\frac{dL}{dt} = \tau\left(t\right)$$

$$dL = \tau(t)dt$$

Se integrarmos dos dois lados:

$$\int_{L_1}^{L_2} dL = \int_0^T \tau(t)dt = Área\ do\ Gráfico$$

Portanto, se considerarmos que o momento angular no instante $t = 0$ é nulo, **o momento angular no tempo $\boldsymbol{T}$ é a área sobre o gráfico até o ponto $\boldsymbol{T}$**.

Conservação do Momento Angular

Eita, conservação do momento angular, será que funciona igual ao momento linear?

Temos aqui mais uma coisa que a Dinâmica de Rotação se assemelha à Dinâmica de Translação.

Como fizemos antes, vamos relembrar o "irmãozinho" desse conceito:

O momento linear se mantém constante, desde que não haja **forças** agindo **no sistema**.

Beleza, esse era o conceito lá na translação. Agora, temos que trocar as variáveis. Então, bora lá!

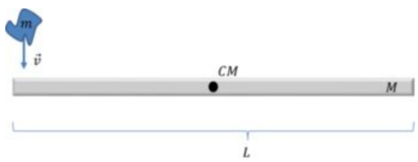
- O momento linear vira momento angular (lembrando que a conservação **é vetorial**, ou seja, a direção e sentido do momento angular também deve ser conservada);
- "Forças" são substituídas por "torques";

Então, o momento angular se conserva, desde que não haja torques **externos** que aumentem ou diminuam a rotação do sistema.

Um exemplo rápido, se uma barra está girando em torno de um eixo de rotação que passa pelo centro de massa e não tem nenhum motor que aumente a sua velocidade de rotação e considerando também uma situação ideal em que a barra não sofre resistência do ar, então não perde velocidade de rotação, podemos dizer que ela está livre de torques externos e portanto ela vai manter sua velocidade angular constante e existirá a conservação do momento angular do sistema

Show? Então beleza. Só vamos falar rapidinho de um ponto ali no conceito. A análise de conservação é **NO SISTEMA**, tome muito cuidado com isso!

Temos aqui uma massa de modelar de massa m se aproximando com velocidade v de uma barra homogênea de massa M e tamanho L, presa em uma mesa pelo seu centro de massa. Após a colisão, a massa de modelar gruda na barra. Qual a velocidade angular da barra logo após a colisão?



Lendo aqui no exemplo você sabe que vamos usar conservação do momento angular, mas e lá na hora da prova? Como você ia descobrir que vamos usar isso?

Analisando a situação inicial, a barra está parada e, após o choque, a barra sofre um torque, pois existe uma força de interação entre a massa e a barra. Aí você pensa assim, vê que tem torque agindo e desconsidera o uso da conservação.

NÃO!! Por isso eu repeti que a análise é feita **NO SISTEMA**. Então vamos recomeçar.

Analisando o sistema, temos que não há forças externas agindo nele, nem antes e nem depois da colisão. Podemos então usar a conservação do momento angular.

$$\overrightarrow{L}_{antes} = \overrightarrow{L}_{depois}$$

OBS IMPORTANTE!! Você sabe que momentos angulares são calculados em relação a um eixo, não esqueca que $\overrightarrow{L}_{antes}$ e $\overrightarrow{L}_{depois}$ devem ser calculados em relação ao mesmo eixo!

Para antes da colisão, temos a barra parada, sem gerar nenhum tipo de momento e a massa se movendo com velocidade v, portanto gerando Momento Linear. Lembrando aqui que o "antes da colisão", assim como fazíamos lá na conservação da quantidade de movimento, consideramos os corpos tão próximos, mas tão próximos, que é como já estivessem grudados, mas sem considerar a interação entre eles.

Se considerarmos o eixo z com o sentido positivo saindo da tela, temos:

$$\overrightarrow{L}_{antes} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{r} = \frac{mvL}{2}\,\hat{k}$$

Já depois da colisão, temos uma barra com uma massa de modelar presa na ponta, rodando com velocidade angular ω. Usando a regra da mão direita para definir o sentido do vetor, temos:

$$\overrightarrow{L}_{depois} = I_{sistema}\omega\,\hat{k}$$

Sabemos que o momento de inércia de uma barra de massa M e tamanho L em relação ao centro de massa é dado por:

$$I = \frac{ML^2}{12}$$

Mas não podemos esquecer que temos uma massa de modelar de massa m grudada na barra, que vamos pensar sendo uma partícula! Logo:

$$I_{sistema} = \frac{ML^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

E então:

$$\overrightarrow{L}_{depois} = \left(\frac{ML^2}{12} + \frac{mL^2}{4}\right)\omega\,\hat{k}$$

Juntando os resultados dos momentos angulares:

$$\frac{mvL}{2}\,\hat{k} = \frac{L^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m\right)\omega\,\hat{k}$$

Chegamos então ao valor da velocidade angular:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{2mv}{L\left(\frac{M}{3} + m\right)}\,\hat{k}$$

AEEW! Chegamos no resultado!!

Antes de terminar, cabe um adendo. Temos que nos atentar quando há **alteração do momento de inércia**. Se liga:

Imagina então que você tá lá rodando sua "marimba", usando um fio de comprimento L, uma pedra de massa m e aplicando uma velocidade angular ω. Se você "der mais linha", aumentando o comprimento do fio pra L', qual vai ser a nova velocidade angular da pedra?

Sabemos que o momento de inércia muda quando aumentamos o fio, porque estamos alterando o raio, então:

$$I = mL^2 \rightarrow I^{'} = mL^{'2}$$

E conservando o momento angular, teríamos:

$$I\omega = I^{'}\omega'$$

E então:

E então:

$$\omega^{'} = \frac{I}{I^{'}}\omega \rightarrow \omega^{'} = \frac{L^2}{L^{'2}}\omega$$

A conta em si não é tão complicada, né? Encontramos a nova velocidade angular com base nos nossos dados, então temos que ter bastante atenção pra saber quando usar a conservação do momento angular, que pode se conservar mesmo que exista a alteração do momento de inércia, desde que o sistema esteja livre da atuação de torques externos.