

Cálculo para Ciências

Folha 2

outubro de 2021

Exercício 1. Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínio:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{|x|}{x}$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} - 1$$

$$\text{c) } f:]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$$

Exercício 2. Considere as seguintes funções:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2$$

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x$$

$$i(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]-1, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 2] \end{cases}$$

- a) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.
b) Determine $f([-1, 1])$, $i([-1, 0])$, $i(]-1, 3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $h^{-1}(\{0\})$ e $g^{-1}(]-1, 3])$.

Exercício 3. Sejam $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = \sin x - x \quad \text{e} \quad g(x) = 2\sqrt{x}.$$

Caracterize a função $f \circ g$.

Exercício 4. Para a função h dada indique duas funções f e g , diferentes da identidade, tais que $h = f \circ g$:

$$\text{a) } h(x) = \sin\left(\frac{5}{x^2-4}\right);$$

$$\text{b) } h(x) = \cos(x^2 + 2) + \frac{1}{x^2+2};$$

$$\text{c) } h(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 2.$$

Exercício 5. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x|x|$$

Justifique que f é invertível e determine a sua inversa.

Exercício 6. Considere a função $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ x^2+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a) $f([0, 3]) = [-2, 1]$;
- b) existe $x \in [1, 3]$ tal que $f(x) = -1$;
- c) não existe $x \in [-3, 0]$ tal que $f(x) = 2$.

Exercício 7. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esboce o gráfico da função g definida por:

$$x \mapsto |x|$$

- a) $g(x) = f(x) + 2, x \in \mathbb{R}$;
- b) $g(x) = f(x+2), x \in \mathbb{R}$;
- c) $g(x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$;
- d) $g(x) = f(2x), x \in \mathbb{R}$;
- e) $g(x) = \max\{f(x), 2\}, x \in \mathbb{R}$;
- f) $g(x) = \min\{f(x), 1\}, x \in \mathbb{R}$.

Exercício 8. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) a função $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ é estritamente crescente;
- b) a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $\frac{\pi}{2}$;
$$x \mapsto \sin(4x)$$
- c) a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é minorada mas não é majorada.
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$