Teorema 10.1. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vetores de $\mathbb{R}^n$, consideremos a matriz A, do tipo $n \times m$, cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Então, um vetor w de $\mathbb{R}^n$ pertence a $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $Ax = w$ tem solução. Equivalentemente, $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $c(A) = c([A|w])$.

Teorema 10.2. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e A a matriz cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Então, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são l.i. se e só se o sistema $Ax = 0$ é determinado. Equivalentemente, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são l.i. se e só se $c(A) = k$.

Observação 10.3. Seja A uma matriz cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Se $c(A) = r < k$, os k vetores são l.d., mas existem r de entre esses k que são l.i. (por exemplo, os correspondentes às colunas com *pivô* na matriz em forma de escada obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz A).

Exemplo 10.4. Consideremos os vetores $u=(1,2,3)$, $v=(4,5,6)$ e $w=(7,8,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Para estudar a dependência ou independência linear destes vetores, verificamos se existem reais α, β e γ que satisfazem $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$, o que equivale a classificar o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+4\beta+7\gamma=0 \\ 2\alpha+5\beta+8\gamma=0 \\ 3\alpha+6\beta+\gamma=0 \end{array}\right. .$$

Pretendemos, pois, classificar o sistema $Ax=0$, onde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

e verificar se a solução nula é a única solução deste sistema.

Usando o método de eliminação de Gauss, obtemos de A a matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Assim, $c(A) = 3$ e o sistema em estudo é determinado, pelo que $Ax = 0$ se e só se $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Podemos, pois, concluir que os vetores u, v, w são l.i..

Exemplo 10.5. Consideremos os vetores $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (2, -3, 1)$, $u_3 = (1, 2, 0)$, $u_4 = (0, 0, 1)$ e $u_5 = (-1, -1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. Para estudar a dependência ou independência linear destes vetores, consideramos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por condensação, obtemos de A a matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $c(A) = 3$ e os cinco vetores u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 são l.d.. No entanto, existem 3 de entre estes que são l.i.. Por exemplo, os vetores u_1,u_2 e u_3, que correspondem às colunas com pivôs.

Definição 10.6. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Uma sequência ordenada de vetores de W l.i. que gerem W diz-se uma **base** de W.

Exemplo 10.7. A sequência $((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1))$ é a chamada base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 10.8. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ elementos linearmente independentes de um subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Sejam ainda $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k.$$

Então $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Definição 10.9. Chamam-se **componentes** ou **coordenadas** de $u \in W$ numa base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ de W aos coeficientes escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ da combinação linear

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Notação 10.10. As coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são denotadas por

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Observação 10.11. Recordemos que, se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ é uma base de W, em particular os vetores são linearmente independentes, e, portanto, dado $u \in W$, os coeficientes de u na base $\mathcal{B}$ são únicos.

Teorema 10.12. Se uma base de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é constituída por k vetores, todas são.

Definição 10.13. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se uma base de W tem k elementos, dizemos que W tem **dimensão** k e escrevemos $\dim W = k$. Se $W = \{0\}$, definimos $\dim W = 0$.

Exemplo 10.14. Tem-se $\dim \mathbb{R}^n = n$ (pense-se, por exemplo, na já referida base canónica – tem n elementos).

Exemplo 10.15. Consideremos o subespaço $F = \{(x, 2x - z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad x, z \in \mathbb{R} \;\; e \;\; y = 2x - z \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = x\,(1, 2, 0) + z\,(0, -1, 1) \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in \langle (1, 2, 0)\,, (0, -1, 1) \rangle\,,
\end{aligned}$$

pelo que $\{(1, 2, 0)\,, (0, -1, 1)\}$ é um conjunto gerador de F.

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos a matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que $c(A) = 2$ e os vetores $(1, 2, 0)$, $(0, -1, 1)$ são l.i..

Logo, $((1, 2, 0), (0, -1, 1))$ é uma base de F, pelo que $\dim F = 2$.

Exemplo 10.16. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 3)$. Os subespaços $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \langle v_1 \rangle$, $F_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $F_4 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ têm dimensão $0, 1, 2$ e 3, respetivamente.

Teorema 10.17. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então, $\dim F \leq n$ e

1. $\dim F = n$ se e só se $F = \mathbb{R}^n$.
2. Se $k > n$ quaisquer k vetores $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes.
3. Se $\dim F = r < n$ e $v_1, \ldots, v_r \in F$ são linearmente independentes, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de F.
4. Se $\dim F = r < n$ e $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = F$, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de F.

Observação 10.18. Em particular, temos que quaisquer n vetores l.i. em $\mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$ e que quaisquer n vetores geradores de $\mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.