Universidade do Minho
Departamento de Física

Relatório da Experiência T5

Estudo do efeito do atrito no movimento oscilatório

Laboratório de Mecânica Newtoniana

Relatório realizado por Luís Silva (A96534), Mariana Fernandes(A97171) e José Silva(A92205) a 19 de dezembro de 2021, com a realização da experiência no dia 23 de novembro de 2021, no Laboratório da sala 2.63 do Edifício 6, departamento de Física, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, Portugal.
Docente: Armando Ferreira.

Dezembro de 2021

Sumário

Este trabalho tem como objetivo observar a variação de energia de um corpo oscilante ao longo do tempo, sujeito a forças de atrito. O sistema oscilante é constituído por uma mola elástica de constante k, ligado a um sensor de força, na qual se suspende um corpo de massa m. A partir dos dados recolhidos experimentalmente, é calculado o valor da constante da mola elástica, tendo-se obtido $k = (10{,}25 \pm 0{,}05)\ N/m$ e é feito um estudo, sobre o efeito causado no movimento pelas diferentes forças de atrito.

Introdução/Teoria

As oscilações ocorrem quando um sistema é perturbado a partir de uma posição de equilíbrio, neste trabalho iremos estudar o oscilador harmónico amortecido para um sistema mola-massa. Os movimentos oscilatórios ideias, movimentos harmónicos simples, apresentam uma oscilação perpétua graças à ação de uma única força, a força restauradora. Porém, quando aproximamos esses sistemas para o mundo real, onde existem forças dissipativas, estas geram uma oscilação por um tempo limitado até que a amplitude do movimento desapareça, consequentemente, a energia mecânica do sistema diminui com o tempo e o movimento é designado por amortecido, temos como exemplos o movimento harmónico com atrito de escorregamento e o movimento harmónico dentro da parafina.

Movimento harmónico simples

Um corpo executa um movimento harmónico simples quando oscila periodicamente em torno da sua posição de equilíbrio, devido à ação de uma força restauradora, cuja natureza pode ser elástica, gravitacional, elétrica, entre outras. Neste tipo de movimentos não existem forças dissipativas e, por isso, a energia mecânica total do sistema é conservada. A intensidade da força é dada pela lei de Hooke, $F = -kx$, onde x é a deformação (alongamento/compressão) e k é conhecido como constante de elasticidade, apresenta sinal negativo, pois a força elástica devido à mola é no sentido oposto ao sentido da força que causou a deformação.

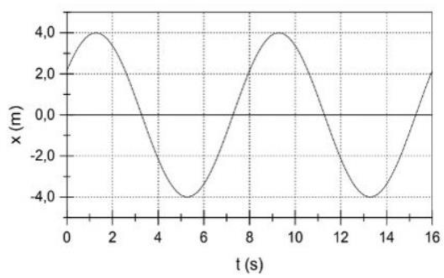

Figura 1(Gráfico que descreve o movimento harmónico simples de um corpo).

Este movimento pode ser descrito com auxílio da segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

No entanto, sabemos que este F, representa a força elástica exercida pela mola, logo

$$\vec{F}_{elástica} = -k\vec{x}$$

como,

$\sum \vec{F} = \vec{F}_{elástica}$ e $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

então:

$$m\vec{a} = -k\vec{x}$$

Ficamos com:

$$-k\vec{x} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k\vec{x}}{m} = 0$$

cuja solução é,

$x(t) = A\, sen\, (\omega_0\, t + \varphi_0)$ (1),

em que A representa a amplitude (deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio), ω_0 a frequência angular e φ_0 a fase inicial. A e φ_0 podem ser determinadas a partir das condições iniciais do movimento e ω_0 pode ser calculado através do período natural, T_0, ou da frequência natural, $f_0 = \frac{1}{T_0}$,

Assim,

$\omega_0 = 2\pi f_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ω_0 depende das caraterísticas do oscilador, nomeadamente da constante elástica da mola, k, e da massa do objeto suspenso.

A velocidade é obtida através da primeira derivada de $x(t)$, portanto:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega\, A\, sen\, (\omega\, t + \varphi_0)$$

Como já foi referido não existem forças dissipativas neste tipo de movimento, como resultado a energia total do oscilador mantém-se constante ao longo do tempo. No entanto, a energia cinética e energia potencial elástica vão variando, sendo que a soma das duas se mantém sempre igual.

$E_{oscilador} = E_{cinética} + E_{potencial}$

$\Leftrightarrow E_{oscilador} = \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\, kx^2$ (2)

Uma vez que, $k = m\omega^2$, substituindo fica:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2$$

Quando a elongação é máxima, ou seja, coincide com a amplitude ($x = A$), a velocidade anula-se, logo a energia cinética é 0, sendo que toda a energia do oscilador é potencial, nesse momento. Nestes pontos de máxima elongação podemos descrever o movimento em função da amplitude do movimento.

$E_{oscilador} = \frac{1}{2}\, m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$ (3)

No ponto em que a deformação é 0, posição de equilíbrio, a energia potencial é nula, logo toda a energia do oscilador é cinética, desta forma atingiu a máxima velocidade. Neste instante, a energia do oscilador pode ser descrita por:

$$E_{oscilador} = \frac{1}{2}\, kx^2 = \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 = \\ = \frac{1}{2} mv_{máx}^2 \text{ (4)}$$

Movimento harmónico amortecido, na presença de força de atrito

Quando a amplitude de um corpo oscilante é reduzida devido à presença de uma força externa, o movimento é dito ser amortecido. Isto acontece, pois na maioria das situações, as forças de atrito presentes não são desprezáveis e contribuem para a diminuição da energia do oscilador e, consequentemente a diminuição da sua amplitude.

Para estudar um movimento oscilatório numa situação real é então necessário conhecer as forças de atrito existentes. O método proposto neste trabalho para estudar o atrito é observar o efeito que provoca na energia do oscilador.

É possível calcular um valor aproximado da variação da energia média por período, através da medição da amplitude do movimento ou da velocidade máxima em períodos consecutivos. Se considerarmos que o atrito é a única força não conservativa que atua no sistema, temos que a variação da energia mecânica do conjunto entre dois instantes é dada pelo trabalho exercido pela força de atrito.

$$W_{atrito} = E_{mecânica\,f} - E_{mecânica\,i}$$

É importante observar que no oscilador amortecido a velocidade máxima não é atingida exatamente na posição de equilíbrio, devido à existência da força de atrito e, por isso o cálculo da energia mecânica do oscilador amortecido através das expressões (3) e (4) não é exato, no entanto, esta é uma aproximação razoável.

Ao elaborar o gráfico da posição do oscilador, x(t), em função do tempo, (t), iremos obter algo similar da figura 2:

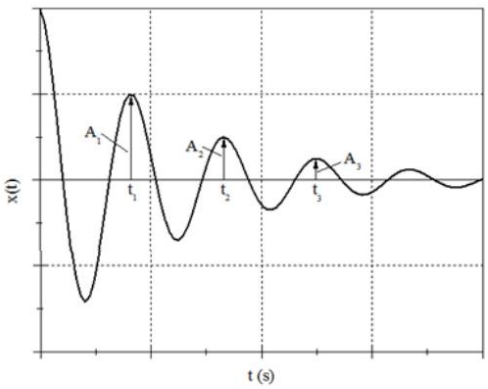

Figura 2 (Posição em função do tempo para um oscilador com atrito (amortecimento fraco)).

Em cada pico (t_1, t_2, t_3), a energia cinética é zero, pois a velocidade nesses pontos é nula, desta forma a energia total do oscilador é dada apenas pela energia potencial elástica:

$$E_{total\ oscilador} = \frac{1}{2}kA^2$$

O trabalho exercido pela força de atrito entre dois pontos pode ser calculado através da diferença de energia entre esses mesmos dois pontos:

$$\begin{aligned} W_{atrito} &= E_{final} - E_{inicial} \\ &= \frac{1}{2}kA_{final}^2 - \frac{1}{2}kA_{inicial}^2 \\ &= \frac{1}{2}k\,(A_{final}^2 - A_{inicial}^2) \end{aligned}$$

Movimento harmónico de um corpo sujeito a uma força de atrito de escorregamento

Se a força de atrito se mantiver constante ao longo do tempo, o trabalho exercido pela mesma durante um período é dado pela definição de trabalho,

$$W_{atrito} = F_{atrito} \times d$$

Em que d representa o espaço percorrido durante um período, isto é, a distância de $x_{máx}$ a x_{min} e de volta de x_{min} a $x_{máx}$.

$$d = 2(A_1 + A_2)$$

Em que A_1 corresponde à primeira amplitude e A_2 à segunda amplitude, representadas na figura 2.

Então temos que,

$$W_{atrito} = F_{atrito} \times 2(A_1 + A_2)$$

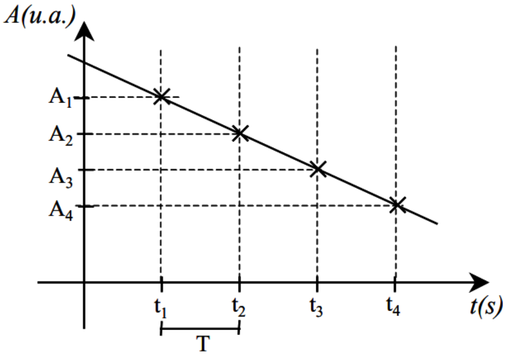

Figura 3 (Amplitude em função do tempo)

A variação de energia entre dois pontos pode, também, ser calculada através das amplitudes, assim a força de atrito pode ser obtida através das amplitudes A_1 e A_2.

Note-se que:

$$(A_2^2 - A_1^2) = (A_2 + A_1) \times (A_2 - A_1)$$

$$W_{atrito} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}k(A_2^2 - A_1^2)$$

$$\Leftrightarrow F_{atrito} \times 2(A_1 + A_2) =$$

$$= \frac{1}{2}k(A_2 + A_1) \times (A_2 - A_1)$$

$$\Leftrightarrow F_{atrito} = \frac{1}{4}k(A_2 - A_1)$$

Se a amplitude variar no tempo de forma linear como mostra a figura 3 obtemos uma regressão linear do tipo $y = ax + b$, da qual podemos retirar informações importantes para os cálculos.

Seja,

$$a = \frac{A_2 - A_1}{T}$$

$$F_{atrito} = \frac{1}{4}k \times aT$$

mas,

$$k = m\omega^2$$

então:

$$F_{atrito} = \frac{1}{4}m\omega^2 \times aT$$

Movimento harmónico de um corpo sujeito a um atrito de Stokes ($\vec{F}_{atrito} = -b\vec{v}$)

Um oscilador harmônico sujeito a uma força restauradora, $\vec{F} = -k\vec{x}$, e outra de atrito, $\vec{F}_{atrito} = -b\vec{v}$, segundo a lei de Newton é:

$$\vec{F}_{resultante} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k\vec{x} - \mathrm{b}\vec{\mathrm{v}} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\vec{a} + k\vec{x} + b\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se iniciar o movimento sem velocidade inicial, obtemos um movimento oscilatório amortecido. A posição em função do tempo, em condições de amortecimento fraco, pode ser dada por

$$x(t) = A\, e^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} sen(\omega t),$$

Com

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Ao elaborar o gráfico de posição, x(t), em função do tempo, t, pode se fazer a interpretação de um gráfico de um movimento oscilatório simples com amplitude decrescente. Assim, a cada período, a amplitude reduz a uma determinada taxa, sendo que seus pontos máximos formam a exponencial decrescente ao longo do tempo.

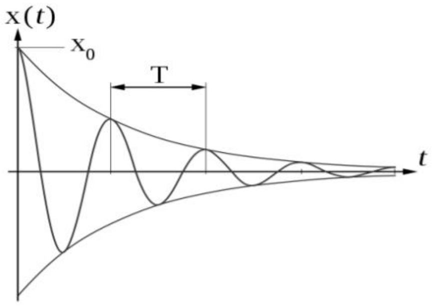

Figura 4 (Gráfico da posição em função do tempo)

Podemos também definir a amplitude em função do tempo:

$$A(t) = A\, e^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)}$$

sendo b uma constante de amortecimento que depende das características do corpo (forma geométrica e tamanho da superfície) e do fluido viscoso no qual o corpo oscila. Se a amplitude em função do tempo corresponder a uma função deste tipo, quer dizer que a força de atrito que atua no sistema é proporcional à velocidade e b pode ser calculado através da função ajustada aos pontos experimentais.

Método de medição – Parte experimental

Para este procedimento experimental, usamos um sistema oscilante constituído por uma mola elástica de constante k, um fio de massa desprezível onde estará suspensa a mola e uma esfera de massa, m, e diâmetro, d, posteriormente medidos. É usado também um sensor de força, onde a mola estará fixada, cujos valores obtidos serão apresentados num computador.

Constante elástica da mola

Para a 1ª parte do trabalho começamos por medir a massa da mola e o diâmetro da esfera. Realizadas as medições, a mola foi colocada sob uma prancha na horizontal, com uma das extremidades da mola agarrada ao suporte da prancha e a outra ao sensor de força, não sendo usada a esfera nesta parte.

Montado o sistema, deslocamos o sensor de força, esticando a mola. Esta foi esticada para 8 posições diferentes, tendo sido essas posições anotadas, tal como as devidas forças dadas pelo computador.

Nesta parte, é necessário ter alguns cuidados como, por exemplo, não tocar na mola diretamente, assegurar que a força lida no computador era zero na posição inicial e verificar que o sistema estava seguro e o mais estável possível durante as medições.

Movimento harmónico com atrito de escorregamento

Nesta parte da experiência, o sistema foi colocado na vertical com o sensor de força fixo na parte superior a uma das extremidades da mola, enquanto na outra extremidade foi colocada a esfera.

Foi marcada num papel, no chão do laboratório, a posição de repouso, posição inicial, do movimento harmónico. De seguida, colocamos um bloco de madeira a uma distância dx da posição inicial e encostamos a esfera, já montada no sistema, ao bloco. A esfera é puxada para baixo manualmente e depois solta dando início à oscilação, ao mesmo tempo que se dá também o início da contagem no programa do computador. Este procedimento foi repetido para 7 posições diferentes, sendo que para cada posição realizaram-se 2 ou 3 ensaios. Depois de cada movimento, os dados fornecidos pelo computador foram exportados para um ficheiro Excel para análise posterior.

Esta parte do trabalho envolvia mais cuidados do que a parte anterior, assim sendo tivemos de ter atenção à vibração da mola que causaria ruído nos gráficos obtidos e se tal acontecesse o movimento era repetido e, também se verificou que durante toda a duração do movimento de oscilação a esfera permanecia encostada ao bloco de madeira e que o mesmo não deslizava ou inclinava.

Movimento harmónico dentro da parafina

Para a parte final do procedimento, o sistema usado na parte anterior manteve-se, à exceção do bloco que foi retirado e usou-se um copo com um fluído de elevada viscosidade, a parafina.

A esfera, ligada ao sistema mola-massa, foi totalmente mergulhada na parafina de maneira que não toca-se no fundo nem nos lados do copo. Tal como a 2ª parte do procedimento, para dar início à oscilação a esfera foi empurrada para baixo manualmente e depois solta ao mesmo tempo que se dava início à contagem no computador, tendo sido a oscilação repetida 5 vezes e os dados obtidos transferidos para um ficheiro Excel. Durante esta parte, foi necessário ter cuidados já previamente ditos, como certificar a estabilidade do sistema e garantir que a mola não vibrava, mas também o cuidado adicional de assegurar que durante a oscilação a esfera estaria sempre mergulhada no fluído.

Tratamento e análise de dados

1º Parte - Constante elástica da mola

	Valor		Incerteza
Massa mola, $\boldsymbol{m_m}$ (Kg)	0,016940	$\pm$	0,000001
Massa esfera, $\boldsymbol{m_e}$ (Kg)	0,382330	$\pm$	0,000001
Diâmetro esfera, $\boldsymbol{d_m}$ (m)	0,04480	$\pm$	0,00005

Tabela 1 (Medições e respetivas incertezas)

Posição do sensor, x (m)	Força, F (N)
0	0
0,03	-0,331
0,06	-0,605
0,09	-0,901
0,12	-1,281
0,15	-1,528
0,18	-1,834
0,21	-2,157
0,24	-2,452

Tabela 2 (Força aplicada na mola para a respetiva posição do sensor)

Segundo a Lei do Hooke:

$$F = -kx$$

$$F = mx + b$$

Fazendo assim, um ajuste linear a gráfico da força em função da posição do sensor, podemos obter a constante elástica da mola:

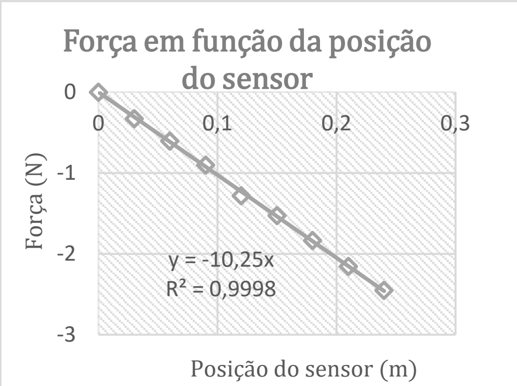

Gráfico 1 (Força aplicada na mola em função da posição do sensor)

Regressão linear		
Declive, m	Incerteza do declive, σ_m	Ordenada na origem, b
-10,25	0,05	0

Tabela 3 (Regressão linear dos pontos experimentais)

Assim, a partir das equações:

$$m = -k$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Temos:

	Valor		Incerteza
Constante elástica, **k** (N/m)	10,25	$\pm$	0,05
Frequência angular, $\boldsymbol{w_0}$ (rad/s)	5,18	$\pm$	0,01
Período natural, $\boldsymbol{T_0}$ (s)	1,214	$\pm$	0,003
Frequência natural, $\boldsymbol{f_0}$ (Hz)	0,824	$\pm$	0,002

Tabela 4 (Valores obtidos e respetivas incertezas (Propagações no apêndice))

Análise 1ªParte

A partir deste primeiro tratamento obtivemos a constante da mola, a frequência angular, o período natural e a frequência natural da mola com as suas respetivas incertezas. Valores que serão usados nos tratamentos de dados da 2º e 3º partes.

2º Parte –Movimento harmónico com atrito de escorregamento

Nesta segunda parte, realizamos 7 ensaios para diferentes valores de dx, no primeiro explicaremos pormenorizadamente o procedimento da análise dos dados. Nos seguintes, apenas apresentaremos os resultados obtidos, tabelas e gráficos pedidos na análise, sendo que foi utilizado o mesmo método experimental e tratamento de dados, os gráficos e tabelas intermédias serão apresentados no apêndice.

$dx = 0,015m$:

A partir dos dados registados pelo sensor podemos representar:

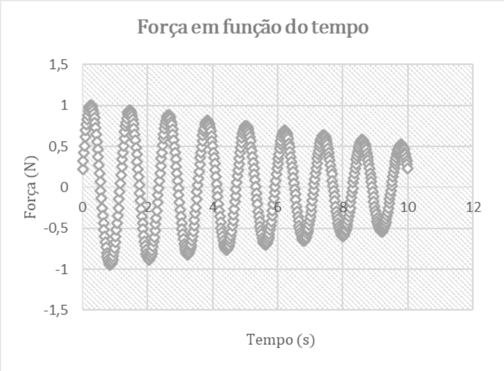

Gráfico 2 (Força em função do tempo $dx = 0{,}015m$)

Para que na posição de equilíbrio a força seja 0, será necessário retirar valor de correção n, aos valores registados pelo sensor:

$$F_c = F - n$$

Caso na fase terminal, a esfera se encontra na posição de equilíbrio, o valor de n corresponde ao valor da força terminal (a partir de $dx = 0{,}038m$).

Neste caso e no próximo, começamos por fazer o gráfico da força corrigida/ da posição em função do tempo dependentes do valor de n:

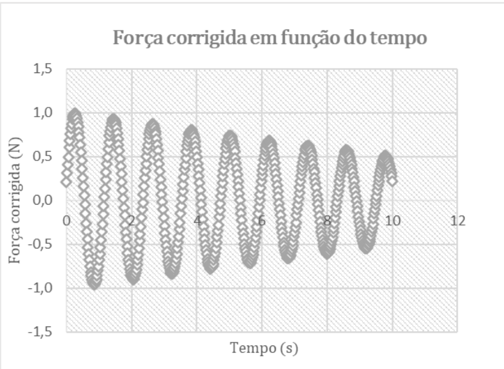

Gráfico 3 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0{,}015m$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

Aplicando a Lei de Hooke a estes valores e, usando o valor da constante elástica k (calculada na 1ª Parte), obtemos:

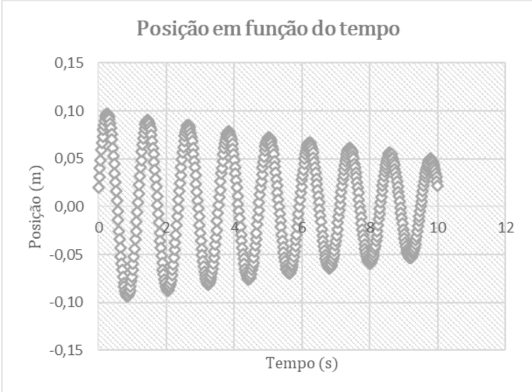

Gráfico 4 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0{,}015m$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

Procuram-se manualmente as amplitudes máximas e as mínimas (usando sempre o mesmo critério de seleção) com os respetivos instantes:

Posição (m)	Instante (s)
0,097	0,25
-0,094	0,84
0,091	1,45
-0,088	2,04
0,085	2,63
-0,081	3,24
0,079	3,84
-0,076	4,42
0,072	5,02
-0,069	5,63
0,067	6,22
-0,064	6,8
0,061	7,41
-0,059	8
0,056	8,58
-0,053	9,2
0,050	9,79

Tabela 5 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}015m$ (estes valores dependem diretamente do valor de n))

Traçando um gráfico do valor absoluto da posição em função do instante podemos estimar o valor para n (a partir do valor de R^2). Caso na posição de equilíbrio a força seja muito afastado de zero, temos:

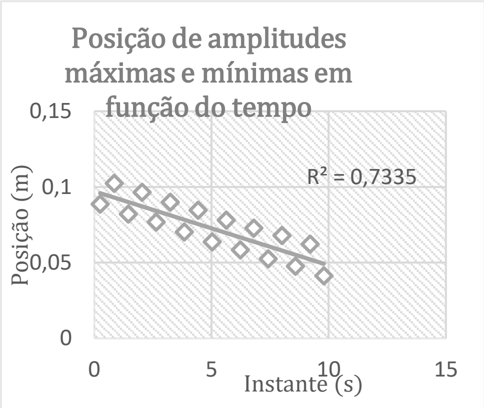

Gráfico 5 ((Exemplo) posição de equilíbrio a força afastada de zero)

O gráfico 5 depende diretamente do valor de n, por isso é possível alterar este gráfico de modo a obter o menor valor de R^2. Ficando assim o gráfico 3 e 4 centralizados. Em $dx = 0{,}015m$ para um $n = 0{,}012\,N$ obtém-se o melhor valor de R^2:

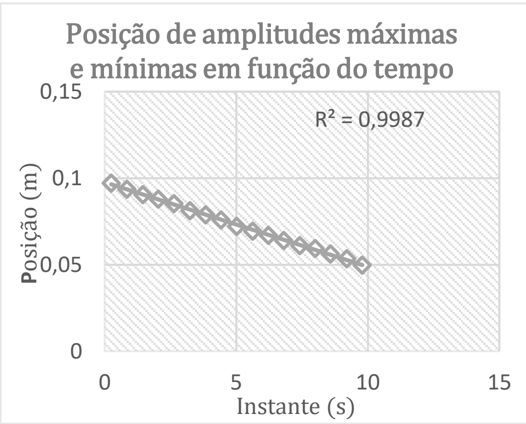

Gráfico 6 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero)

A partir dos instantes da tabela 5 podemos obter um conjunto de valores do período, através da diferença entre picos:

Período (s)
1,2
1,2
1,18
1,2
1,21
1,18
1,18
1,21
1,2
1,17
1,19
1,2
1,17
1,2
1,21

Tabela 6 (Conjunto de períodos)

Assim através da média e do desvio padrão da amostra temos:

$$T = 1{,}19 \pm 0{,}01\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}7\sigma$)

E a partir das equações (e das propagações presentes no apêndice):

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Temos:

$$w = 5{,}26 \pm 0{,}06\ \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}4\sigma$)

$$f = 0{,}83 \pm 0{,}01\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}4\sigma$)

Também podemos calcular a energia das amplitudes máximas e mínimas, através da equação:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Temos então:

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,097	0,25	0,048
-0,094	0,84	0,045
0,091	1,45	0,042
-0,088	2,04	0,040
0,085	2,63	0,037
-0,081	3,24	0,034
0,079	3,84	0,032
-0,076	4,42	0,030
0,072	5,02	0,027
-0,069	5,63	0,025
0,067	6,22	0,023
-0,064	6,8	0,021
0,061	7,41	0,019
-0,059	8	0,018
0,056	8,58	0,016
-0,053	9,2	0,015
0,050	9,79	0,013

Tabela 5 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}015m$)

Podendo traçar um gráfico da energia da mola em função do instante:

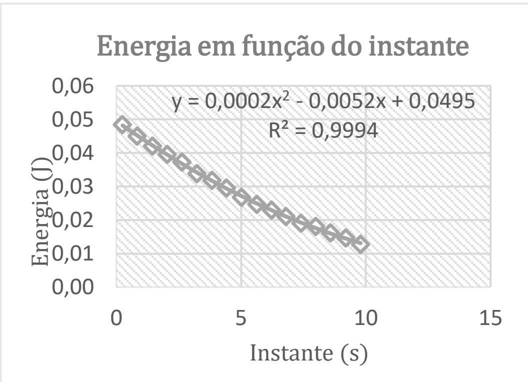

Gráfico 7 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0{,}015m$)

Com os valores da tabela 5 traçamos um gráfico da amplitude máxima em função dos instantes, com a respetiva regressão linear:

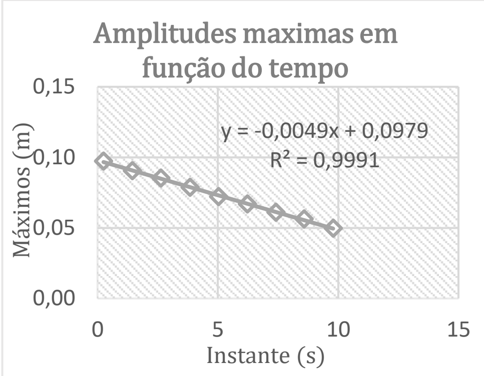

Gráfico 8 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0{,}015m$)

A partir da regressão obtém-se:

$$m = -0{,}00494 \pm 0{,}00006$$

Por isso, a partir da equação e da propagação (presente no apêndice):

$$F_a = \frac{k \cdot m \cdot T}{4}$$

Tem-se:

$$F_a = -0{,}0151 \pm 0{,}0003\ N$$

Da mesma forma para as amplitudes mínimas:

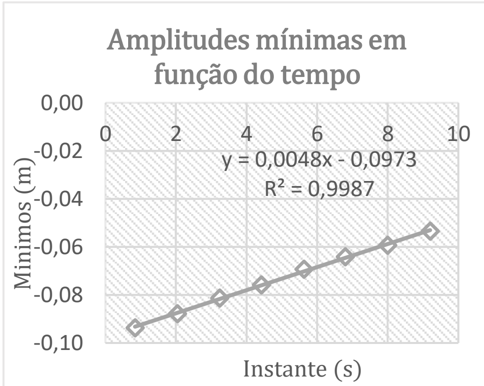

Gráfico 9 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0{,}015m$)

$$m = 0{,}00481 \pm 0{,}00007$$

$$F_a = 0{,}0147 \pm 0{,}0003\ N$$

$dx = 0,031m$:

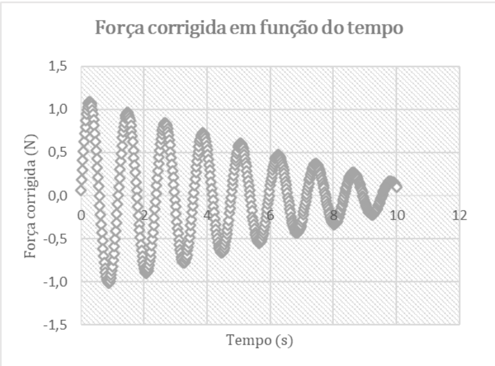

Gráfico 11 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0,031m$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

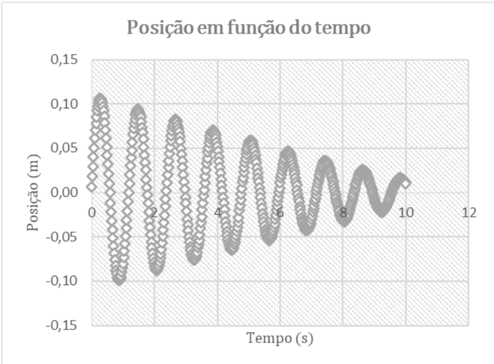

Gráfico 12 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0,031m$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

Em $dx = 0,031m$ com $n = 0,014\ N$ obtém-se o melhor valor de R^2

Temos:

$$T = 1,19 \pm 0,01\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a$ $2,2\sigma$)

$$w = 5,27 \pm 0,04 \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a$ $2,1\sigma$)

$$f = 0,838 \pm 0,007\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a$ $2,1\sigma$)

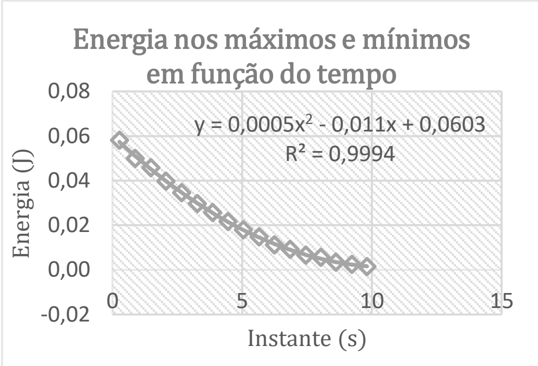

Gráfico 14 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0,031m$)

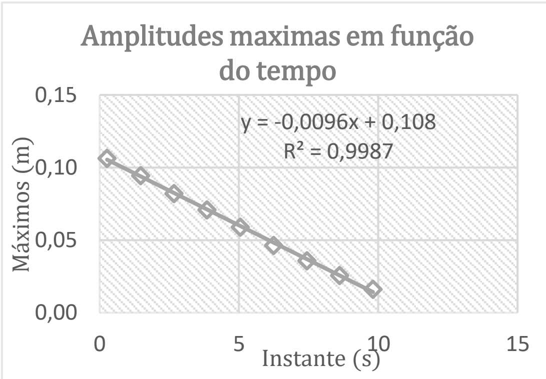

Gráfico 15 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0,031m$)

$$m = -0,0096 \pm 0,0001$$

$$F_a = -0,0292 \pm 0,0005\ N$$

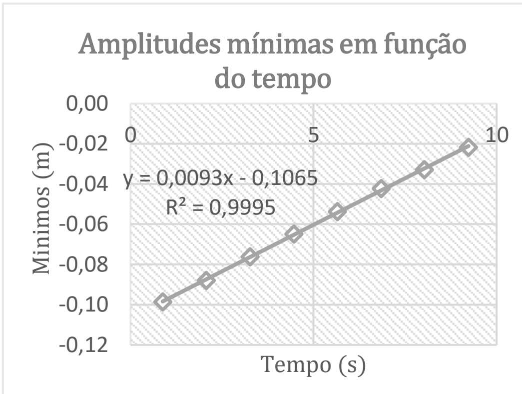

Gráfico 16 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0,031m$)

$$m = 0,00925 \pm 0,00008$$

$$F_a = 0,0283 \pm 0,0004\ N$$

$dx = 0,038m$:

Neste caso o valor de n corresponde a $n = 0,023\ N$,tendo em conta que na fase terminal a esfera se encontra em repouso.

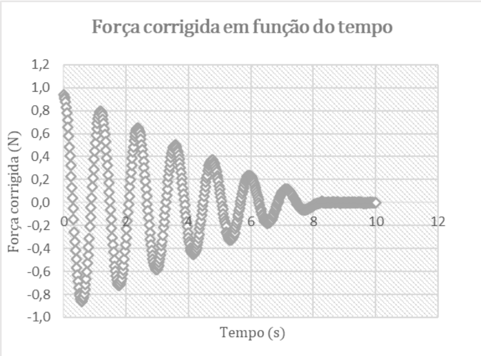

Gráfico 17 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0,038m$)

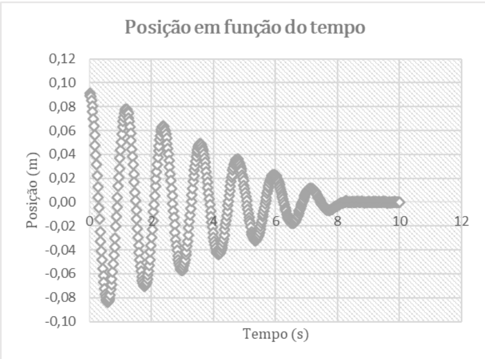

Gráfico 18 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0,038m$)

Temos:

$$T = 1,19 \pm 0,02\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0,84\sigma$)

$$w = 5,3 \pm 0,1 \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0,83\sigma$)

$$f = 0,84 \pm 0,02\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0,83\sigma$)

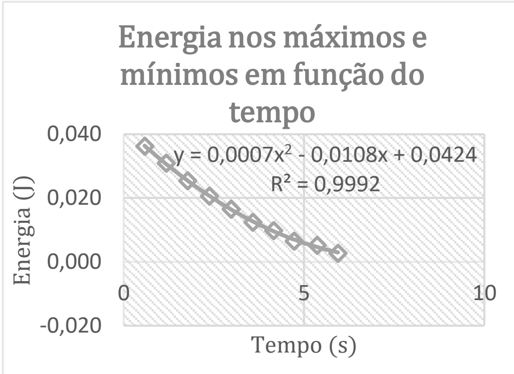

Gráfico 19 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0,038m$)

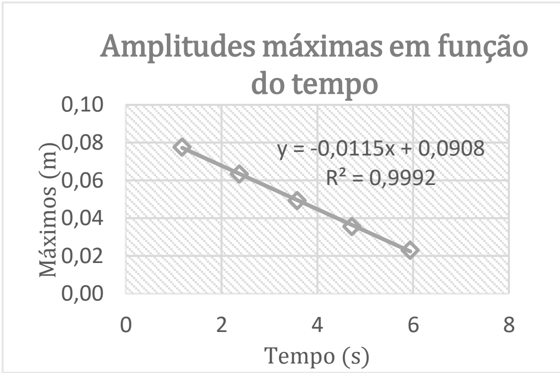

Gráfico 20 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0,038m$)

$$m = -0,0115 \pm 0,0002$$

$$F_a = -0,035 \pm 0,001\ N$$

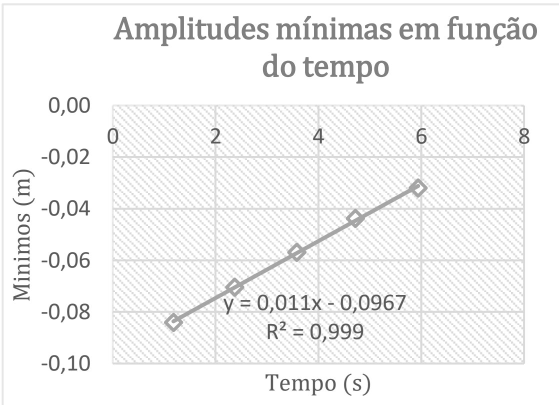

Gráfico 21 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0,038m$)

$$m = 0,0110 \pm 0,0002$$

$$F_a = 0,0337 \pm 0,0009\ N$$

$dx = 0,041m$:

Neste caso o valor de n corresponde a $n = 0{,}011\ N$,tendo em conta que na fase terminal a esfera se encontra em repouso.

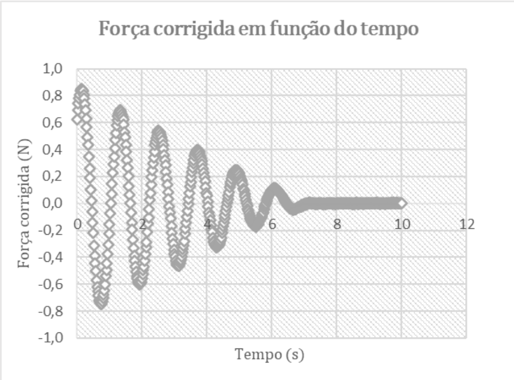

Gráfico 22 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0{,}041m$)

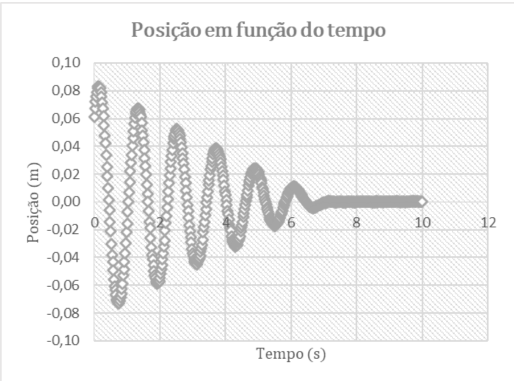

Gráfico 23 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0{,}041m$)

Temos:

$$T = 1{,}20 \pm 0{,}02\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0{,}94\sigma$)

$$w = 5{,}26 \pm 0{,}09 \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0{,}92\sigma$)

$$f = 0{,}84 \pm 0{,}01\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 0{,}92\sigma$)

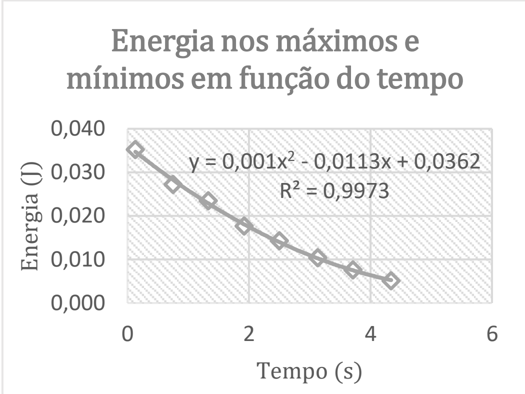

Gráfico 24 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0{,}041m$)

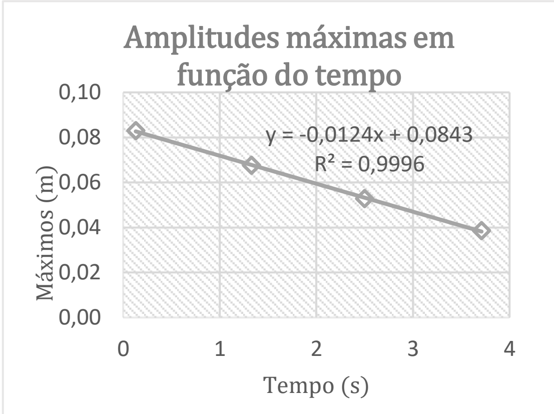

Gráfico 25 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0{,}041m$)

$$m = -0{,}0124 \pm 0{,}0002$$

$$F_a = -0{,}0380 \pm 0{,}0008\ N$$

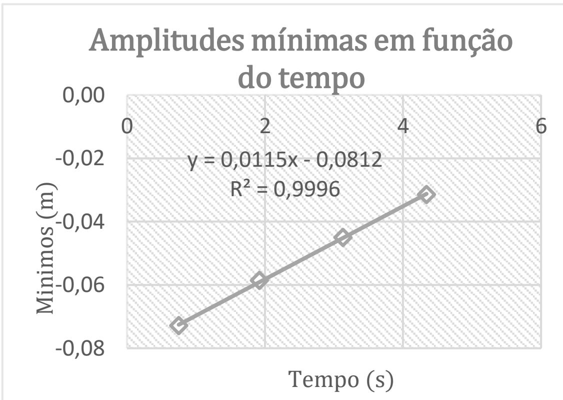

Gráfico 26 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0{,}041m$)

$$m = 0{,}0115 \pm 0{,}0002$$

$$F_a = 0{,}0353 \pm 0{,}0008\ N$$

$dx = 0,047m$:

Neste caso o valor de n corresponde a $n = 0{,}035\ N$,tendo em conta que na fase terminal a esfera se encontra em repouso.

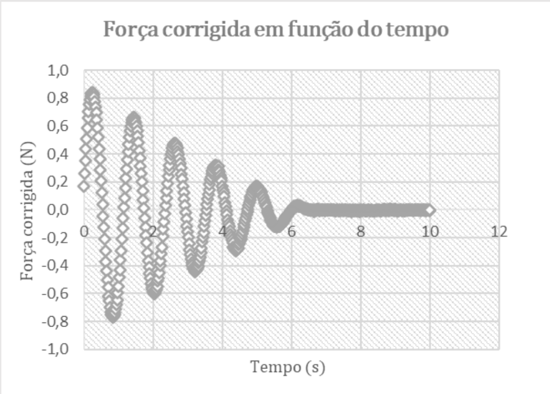

Gráfico 27 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0{,}047m$)

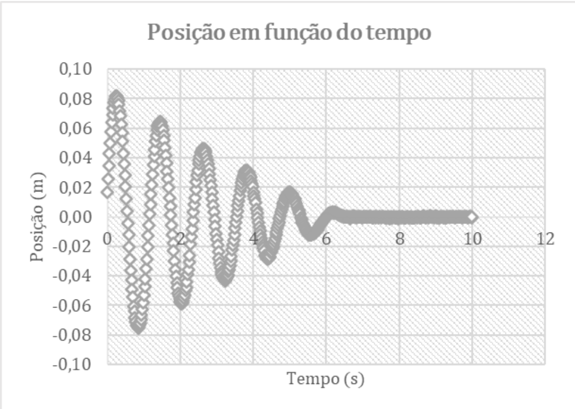

Gráfico 28 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0{,}047m$)

Temos:

$$T = 1{,}19 \pm 0{,}01\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 3{,}4\sigma$)

$$w = 5{,}30 \pm 0{,}04 \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 3{,}3\sigma$)

$$f = 0{,}844 \pm 0{,}006\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 3{,}3\sigma$)

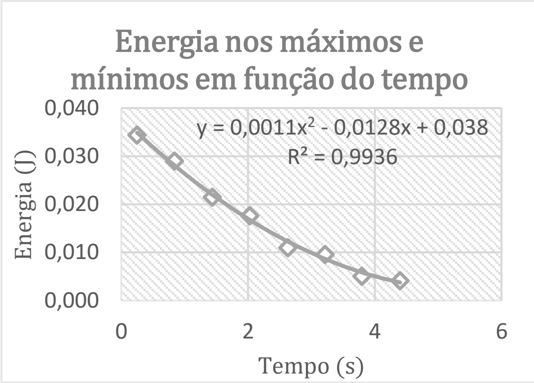

Gráfico 29 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0{,}047m$)

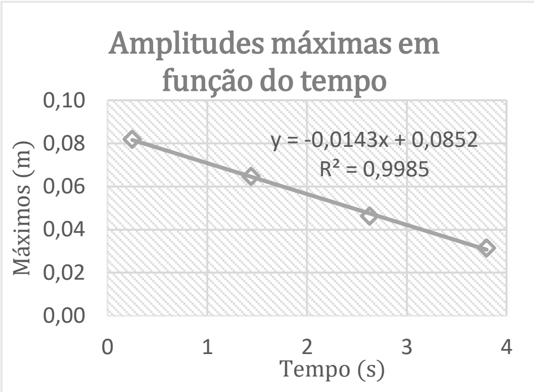

Gráfico 30 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0{,}047m$)

$$m = -0{,}0143 \pm 0{,}0004$$

$$F_a = -0{,}044 \pm 0{,}001\ N$$

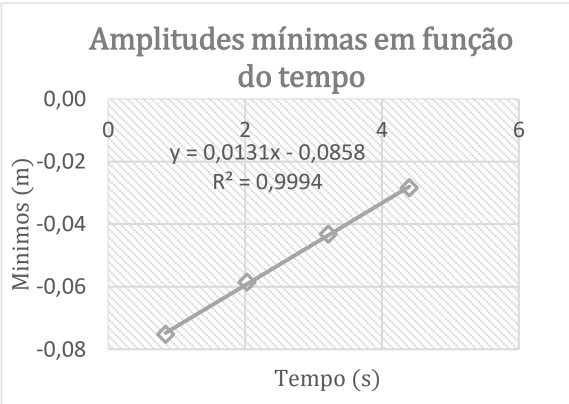

Gráfico 31 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0{,}047m$)

$$m = 0{,}0131 \pm 0{,}0002$$

$$F_a = 0{,}0399 \pm 0{,}0008\ N$$

$dx = 0,052m$:

Neste caso o valor de n corresponde a $n = 0{,}011\ N$,tendo em conta que na fase terminal a esfera se encontra em repouso.

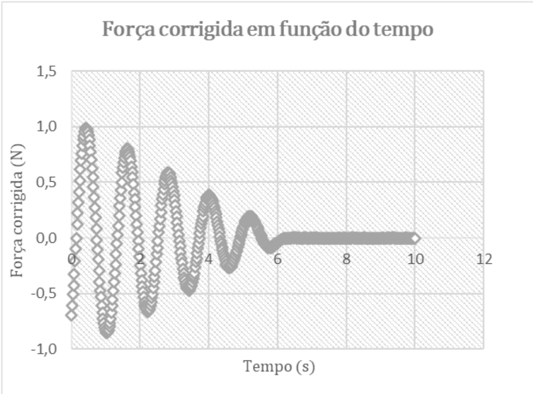

Gráfico 32 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0{,}052m$)

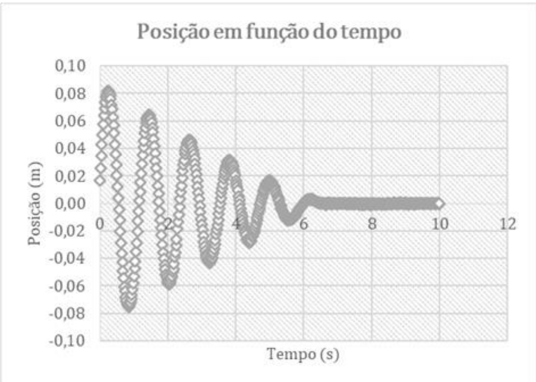

Gráfico 33 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0{,}052m$)

Temos:

$$T = 1{,}19 \pm 0{,}02\ s$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}4\sigma$)

$$w = 5{,}28 \pm 0{,}07 \frac{rad}{s}$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}4\sigma$)

$$f = 0{,}84 \pm 0{,}01\ Hz$$

($O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 1{,}4\sigma$)

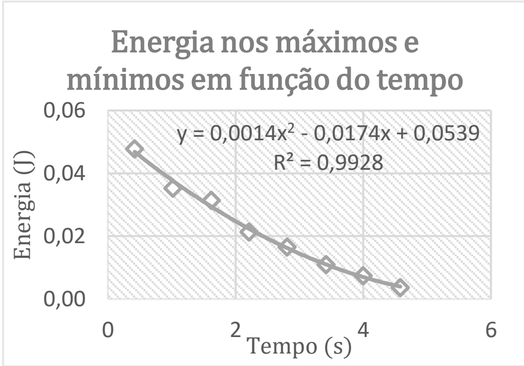

Gráfico 34 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0{,}052m$)

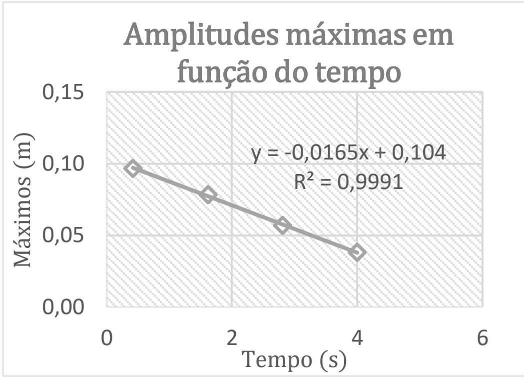

Gráfico 35 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0{,}052m$)

$$m = -0{,}0165 \pm 0{,}0003$$

$$F_a = -0{,}050 \pm 0{,}001\ N$$

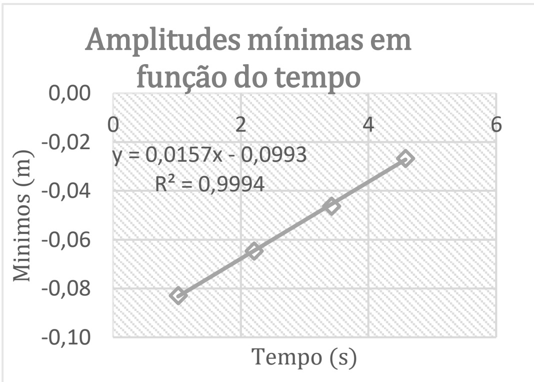

Gráfico 36 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0{,}052m$)

$$m = 0{,}0157 \pm 0{,}0003$$

$$F_a = 0{,}048 \pm 0{,}001\ N$$

$dx = 0,063m$:

Neste caso o valor de n corresponde a $n = 0,017\ N$,tendo em conta que na fase terminal a esfera se encontra em repouso.

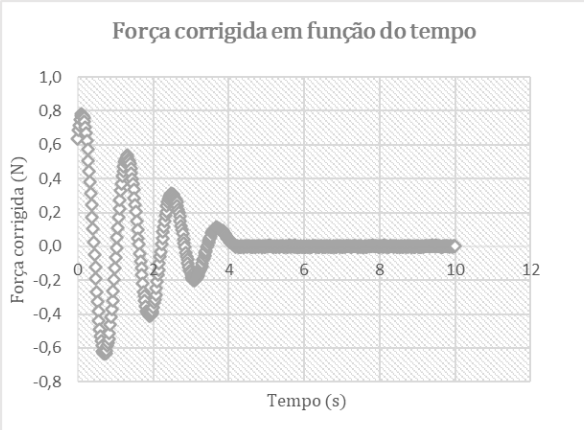

Gráfico 37 (Força corrigida em função do tempo $dx = 0,063m$)

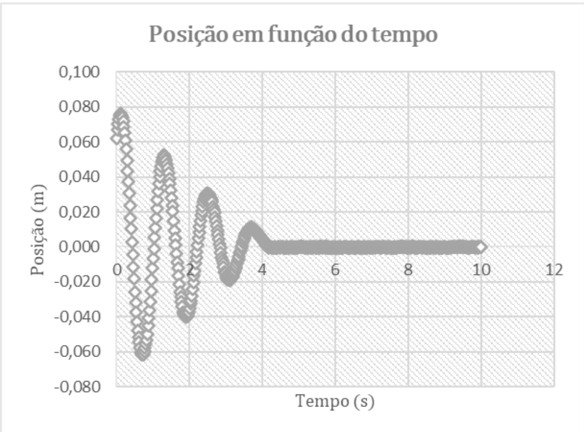

Gráfico 38 (Posição da esfera em função do tempo $dx = 0,063m$)

Temos:

$$T = 1,19 \pm 0,01\ s$$

(O *desvio ao valor natural corresponde a* $2,2\sigma$)

$$w = 5,27 \pm 0,04 \frac{rad}{s}$$

(O *desvio ao valor natural corresponde a* $2,2\sigma$)

$$f = 0,839 \pm 0,006\ Hz$$

(O *desvio ao valor natural corresponde a* $2,2\sigma$)

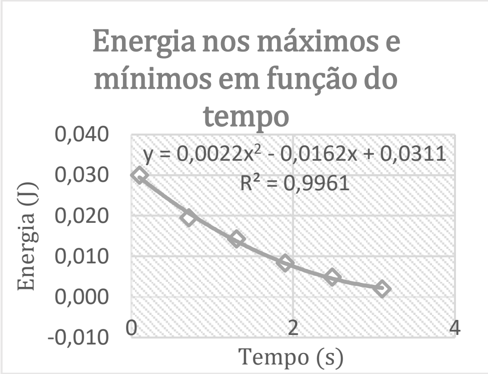

Gráfico 39 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $dx = 0,063m$)

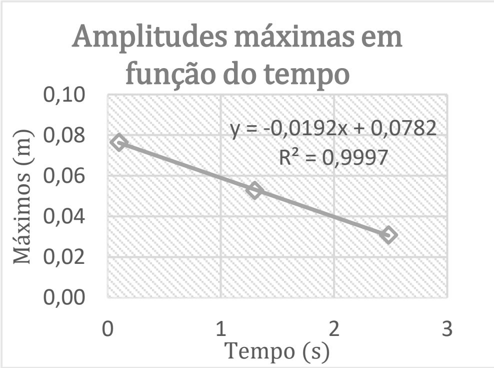

Gráfico 40 (Amplitudes máximas em função do tempo $dx = 0,063m$)

$$m = -0,01923 \pm 0,0003$$

$$F_a = -0,059 \pm 0,001\ N$$

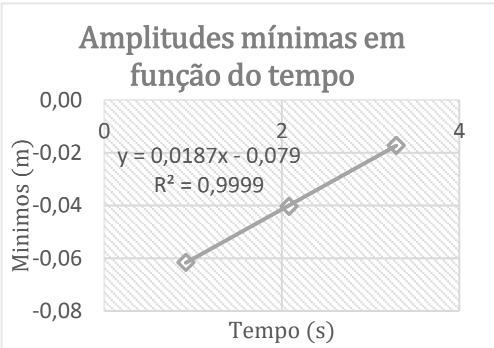

Gráfico 41 (Amplitudes mínimas em função do tempo $dx = 0,063m$)

$$m = 0,0176 \pm 0,0002$$

$$F_a = 0,0539 \pm 0,0008\ N$$

Análise de resultados 2º Parte

Analisando os valores obtidos da frequência angular, da frequência e do período, podemos ver que se encontram desviados entre 0,83σ e 3,4σ dos respetivos valores naturais, certamente se devem a erros experimentais cometidos.

Em relação aos gráficos de energia-tempo temos que:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Onde k é a contante da mola, visto que a amplitude da esfera decai linearmente em relação ao tempo, então a energia sofre um decaimento quadrático em relação ao tempo.

Observando os gráficos da energia em função do tempo individualmente, verificamos que quanto maior o valor de dx maior é o decaimento da energia, ou seja, aumenta o valor do 1º coeficiente da equação de segundo grau.

Com os valores das forças de atrito obtidas, podemos criar um gráfico das forças de atrito em função do respetivo valor de dx:

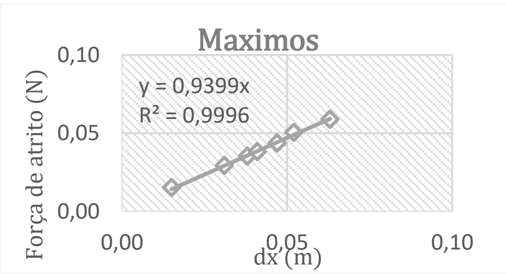

Gráfico 42 (Força de atrito em função de dx (máximos)

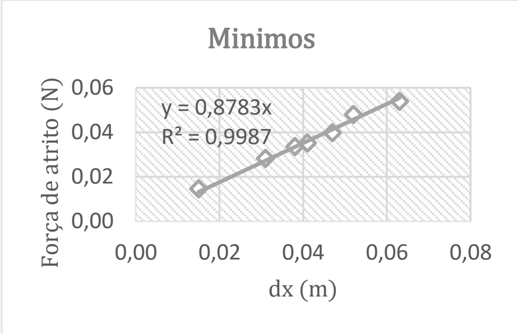

Gráfico 43 (Força de atrito em função de dx (mínimos))

Podemos ver assim que a força de atrito aumenta linearmente conforme aumentamos a distância dx.

3º Parte – Movimento harmónico com atrito, dentro da parafina

Nesta segunda parte, realizamos 5 ensaios, no primeiro explicaremos pormenorizadamente o procedimento da análise dos dados. Nos seguintes, apenas apresentaremos os resultados obtidos, tabelas e gráficos pedidos na análise, sendo que foi utilizado o mesmo método experimental e tratamento de dados, os gráficos e tabelas intermédias serão apresentados no apêndice. Nesta 3ª parte, o valor de n deveria ser igual em todos os ensaios (tendo em conta que fizemos 5 ensaios seguidos sem mudar as condições da experiência), mas como o valor de n afeta diretamente o valor de b, será estimado o melhor valor para cada ensaio.

Nesta 3ª parte, como:

$$w = \sqrt{{w_0}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Temos que,

$$b = 6\pi\eta r$$

$$\eta_{Parafina} = 0{,}9Ns/m^2 \ (T = 20ºC)$$

então:

$$b = 0{,}38 \ Ns/m$$

Logo:

$$w = 5{,}15 \ rad/s$$

$$T = 1{,}22 \ s$$

$$f = 0{,}82 \ Hz$$

Nesta terceira parte, teremos de comparar o período, frequência e frequência natural obtida em cada ensaio com os valores agora deduzidos. Contrariamente á 2ª parte onde eram comparados com os valores naturais da mola.

1º Ensaio:

A partir dos dados registados pelo sensor podemos representar:

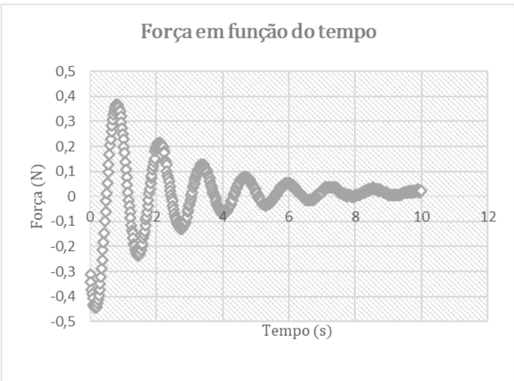

Gráfico 44 (Força em função do tempo 1º *ensaio*)

Para que na posição de equilíbrio a força seja 0, será necessário retirar o valor de correção n, aos valores registados pelo sensor:

$$F_c = F - n$$

Começamos por fazer o gráfico da força corrigida/ da posição em função do tempo dependentes do valor de n:

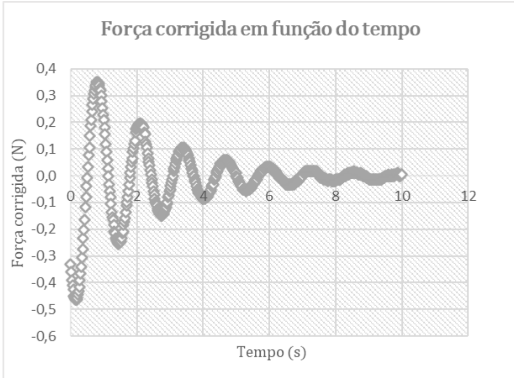

Gráfico 45 (Força corrigida em função do tempo 1º *ensaio*(este gráfico depende diretamente do valor de n))

Aplicando a Lei de Hooke a estes valores e usando o valor da constante elástica k (calculada na 1ª Parte), obtemos:

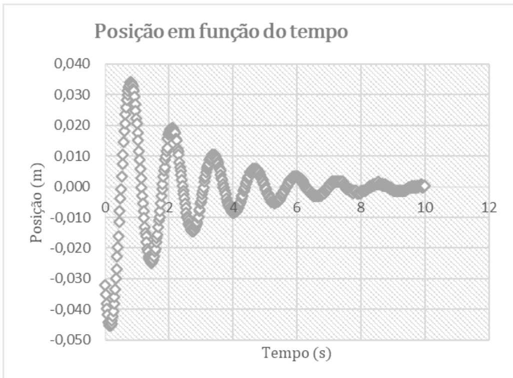

Gráfico 46 (Posição da esfera em função do tempo 1º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

Procuram-se manualmente as amplitudes máximas e as mínimas (usando sempre o mesmo critério de seleção) com os respetivos instantes:

Posição (m)	Instante (s)
-0,045	0,16
0,034	0,8
-0,025	1,44
0,019	2,1
-0,014	2,74
0,010	3,39
-0,008	4,01
0,006	4,67

Tabela 6 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes 1º *ensaio* (estes valores dependem diretamente do valor de n))

Traçando um gráfico do valor absoluto da posição em função do instante podemos estimar o valor para n (a partir do valor de R^2). Caso na posição de equilíbrio a força seja muito afastado de zero, temos:

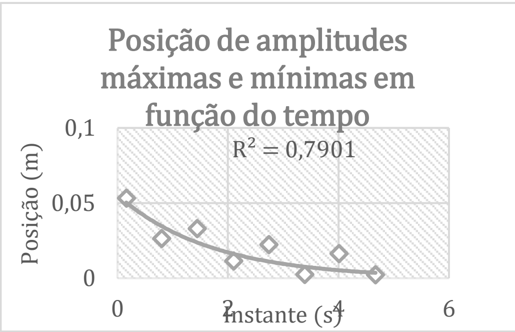

Gráfico 47 ((Exemplo) posição de equilíbrio a força afastada de zero)

O gráfico 47 depende diretamente do valor de n, por isso é possível alterar este gráfico de modo a obter o menor valor de R^2. Ficando assim o gráfico 48 e 49 centralizados. No 1º *ensaio* para um $n = 0{,}019\ N$ obtém se o melhor valor de R^2:

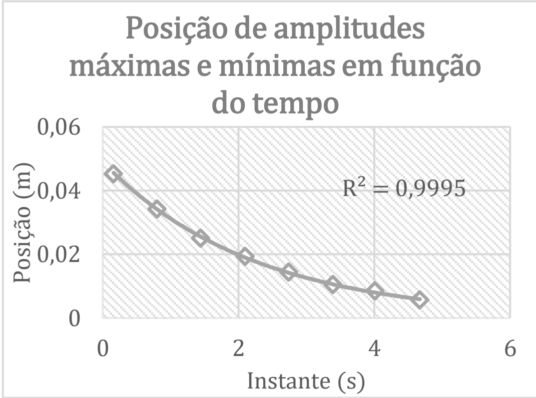

Gráfico 48 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero)

A partir dos instantes da tabela 6 podemos obter um conjunto de valores do período, através da diferença entre picos:

Período (s)
1,28
1,3
1,3
1,29
1,27
1,28

Tabela 7 (Conjunto de períodos)

Assim através da média e do desvio padrão da amostra temos:

$$T = 1{,}29 \pm 0{,}01\ s$$

(*O desvio ao valor natural corresponde a* $7{,}7\sigma$)

E a partir das equações e das propagações (presentes no apêndice):

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Temos:

$$w = 4{,}86 \pm 0{,}04 \frac{rad}{s}$$

$(O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 8{,}1\sigma)$

$$f = 0{,}773 \pm 0{,}005\ Hz$$

$(O\ desvio\ ao\ valor\ natural\ corresponde\ a\ 8{,}1\sigma)$

Também podemos calcular a energia das amplitudes máximas e mínimas, através da equação:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Temos então:

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
-0,045	0,16	0,011
0,034	0,8	0,006
-0,025	1,44	0,003
0,019	2,1	0,002
-0,014	2,74	0,001
0,010	3,39	0,0006
-0,008	4,01	0,0004
0,006	4,67	0,0002

Tabela 8 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes 1º *ensaio*)

Podendo traçar um gráfico da energia da mola em função do instante:

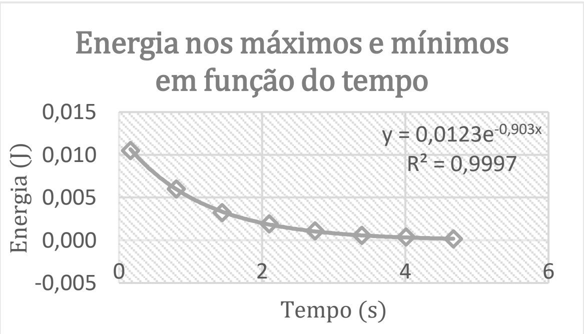

Gráfico 49 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante 1º *ensaio*)

Com os valores da tabela 6 traçamos um gráfico da amplitude máxima em função dos instantes, com a respetiva regressão exponencial:

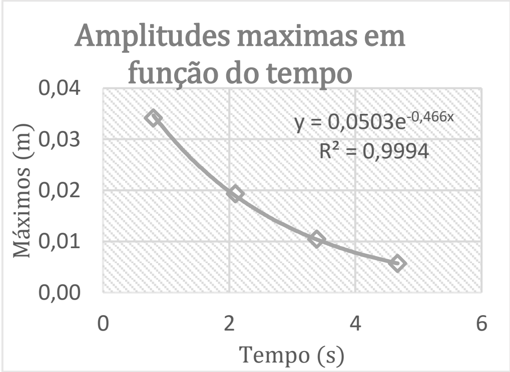

Gráfico 50 (Amplitudes máximas em função do tempo 1º *ensaio*)

Por isso a partir da equação:

$$A(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}}$$

Então:

$$b = 0{,}36\ Ns/m$$

Da mesma forma para as amplitudes mínimas:

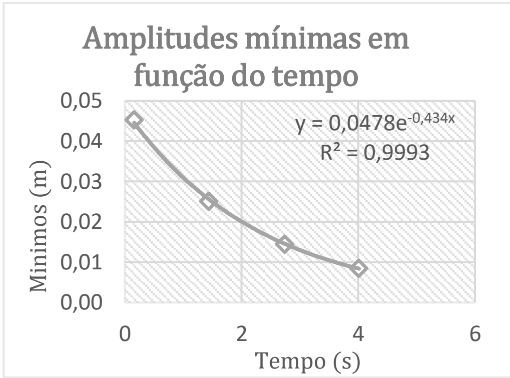

Gráfico 51 (Amplitudes mínimas em função do tempo 1º *ensaio*)

$$b = 0{,}33\ Ns/m$$

2º Ensaio:

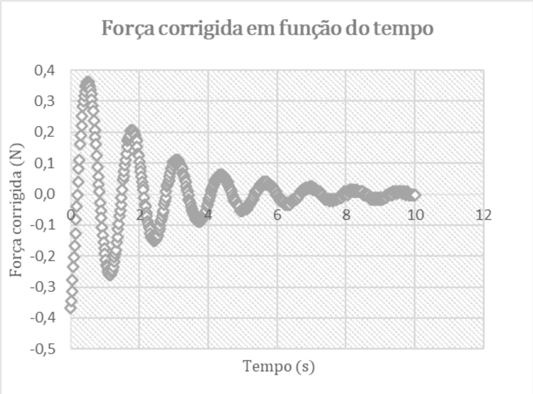

Gráfico 52 (Força corrigida em função do tempo $2^{\underline{o}}\ ensaio$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

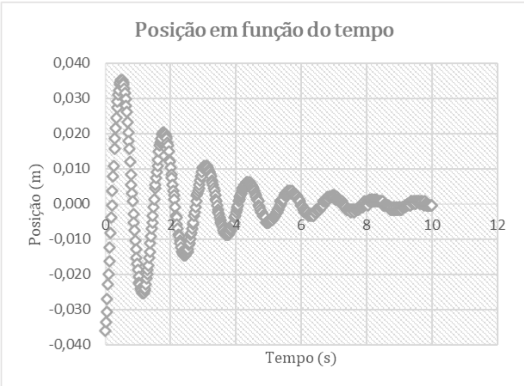

Gráfico 53 (Posição da esfera em função do tempo $2^{\underline{o}}\ ensaio$ (este gráfico depende diretamente do valor de n))

No $2^{\underline{o}}\ ensaio$ com $n = 0{,}021\ N$ obtém-se o melhor valor de R^2.

Temos:

$$T = 1{,}29 \pm 0{,}02\ s$$

$$(Desvio\ de\ 3{,}9\sigma)$$

$$w = 4{,}87 \pm 0{,}07 \frac{rad}{s}$$

$$(Desvio\ de\ 4{,}1\sigma)$$

$$f = 0{,}78 \pm 0{,}01\ Hz$$

$$(Desvio\ de\ 4{,}1\sigma)$$

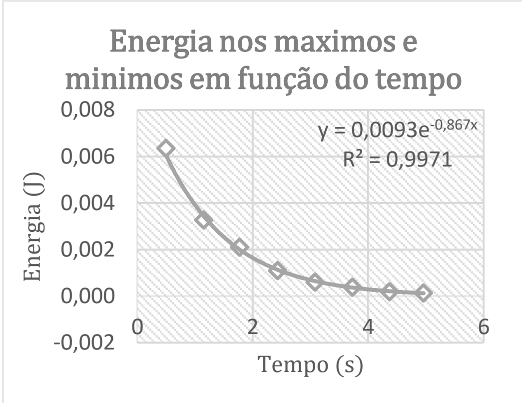

Gráfico 54 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante $2^{\underline{o}}\ ensaio$)

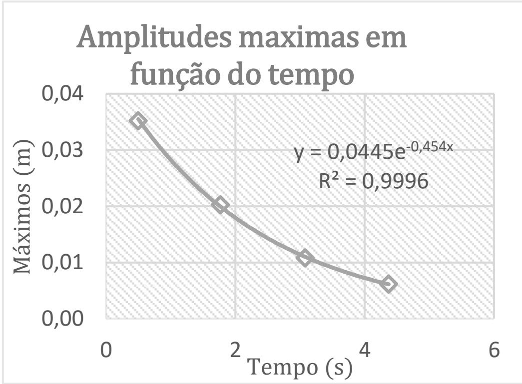

Gráfico 55 (Amplitudes máximas em função do tempo $2^{\underline{o}}\ ensaio$)

$$b = 0{,}35\ Ns/m$$

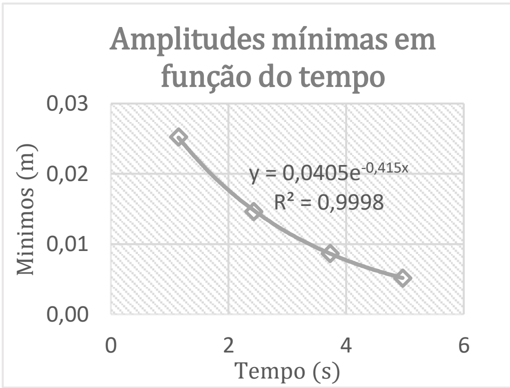

Gráfico 56 (Amplitudes mínimas em função do tempo $2^{\underline{o}}\ ensaio$)

$$b = 0{,}32\ Ns/m$$

3º Ensaio:

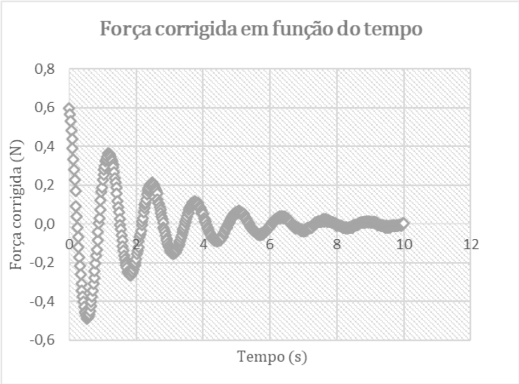

Gráfico 57 (Força corrigida em função do tempo 3º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

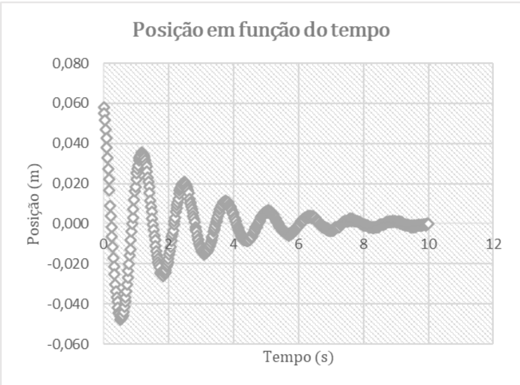

Gráfico 58 (Posição da esfera em função do tempo 3º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

No 2º *ensaio* com $n = 0{,}022\ N$ obtém-se o melhor valor de R^2

Temos:

$$T = 1{,}29 \pm 0{,}02\ s$$

$$(Desvio\ de\ 3{,}6\sigma)$$

$$w = 4{,}86 \pm 0{,}08 \frac{rad}{s}$$

$$(Desvio\ de\ 3{,}8\sigma)$$

$$f = 0{,}77 \pm 0{,}01\ Hz$$

$$(Desvio\ de\ 3{,}8\sigma)$$

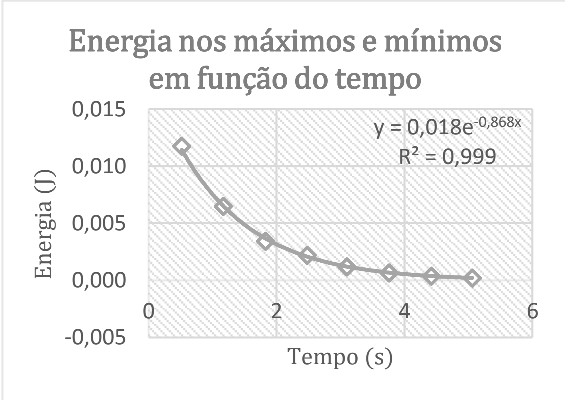

Gráfico 59 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante 3º *ensaio*)

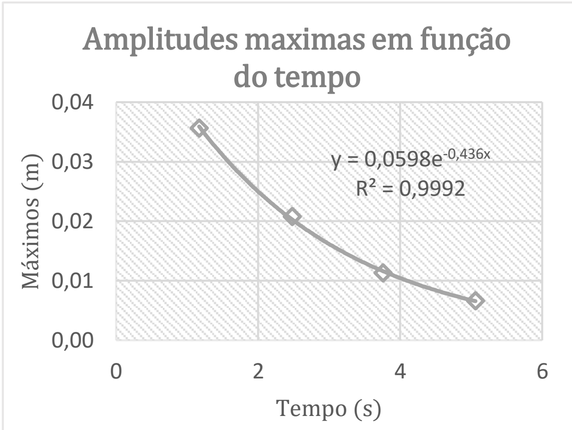

Gráfico 60 (Amplitudes máximas em função do tempo 3º *ensaio*)

$$b = 0{,}33\ Ns/m$$

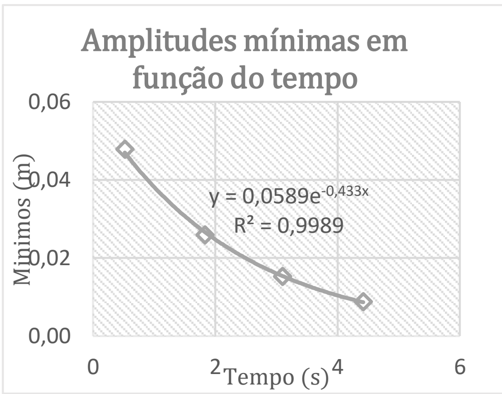

Gráfico 61 (Amplitudes mínimas em função do tempo 3º *ensaio*)

$$b = 0{,}33\ Ns/m$$

4º Ensaio:

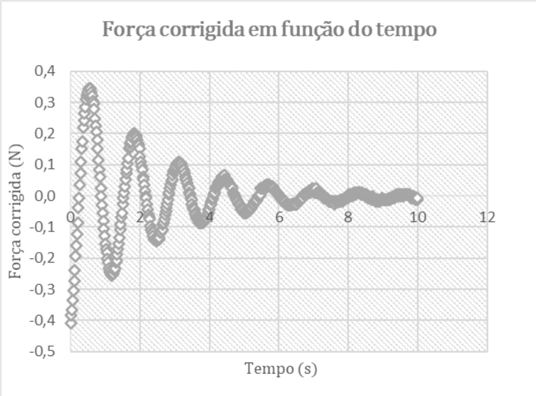

Gráfico 62 (Força corrigida em função do tempo 4º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

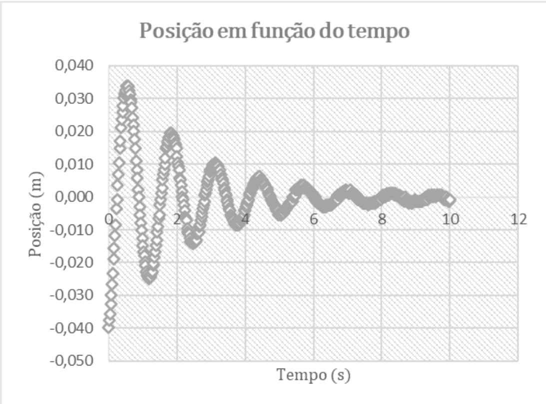

Gráfico 63 (Posição da esfera em função do tempo 4º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

No 2º *ensaio* com $n = 0{,}024\ N$ obtém-se o melhor valor de R^2

Temos:

$$T = 1{,}29 \pm 0{,}02\ s$$

$$(Desvio\ de\ 4{,}9\sigma)$$

$$w = 4{,}88 \pm 0{,}06 \frac{rad}{s}$$

$$(Desvio\ de\ 4{,}8\sigma)$$

$$f = 0{,}78 \pm 0{,}01\ Hz$$

$$(Desvio\ de\ 4{,}8\sigma)$$

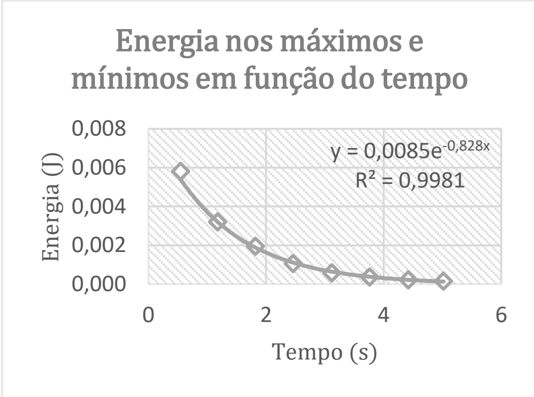

Gráfico 64 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante 4º *ensaio*)

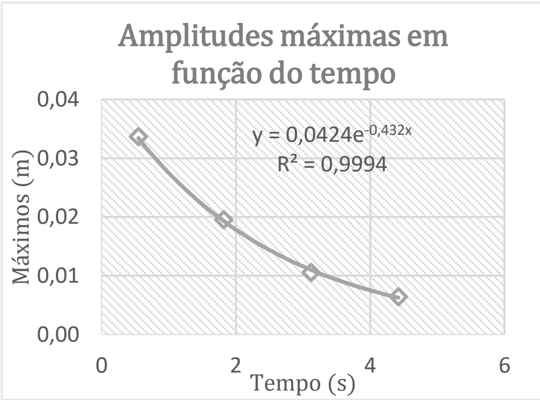

Gráfico 65 (Amplitudes máximas em função do tempo 4º *ensaio*)

$$b = 0{,}33\ Ns/m$$

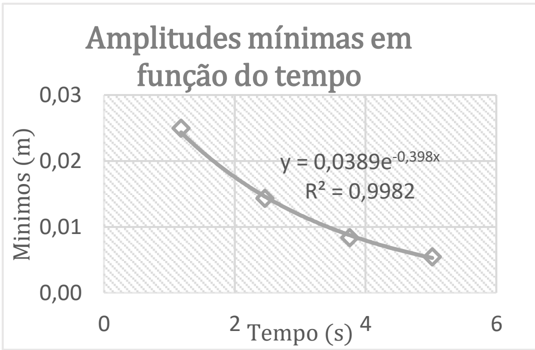

Gráfico 66 (Amplitudes mínimas em função do tempo 4º *ensaio*)

$$b = 0{,}31\ Ns/m$$

5º Ensaio:

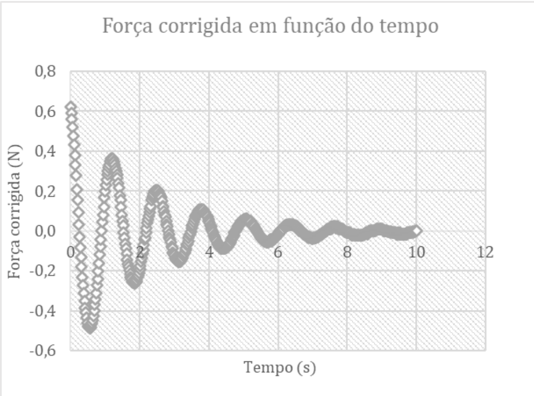

Gráfico 67 (Força corrigida em função do tempo 5º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

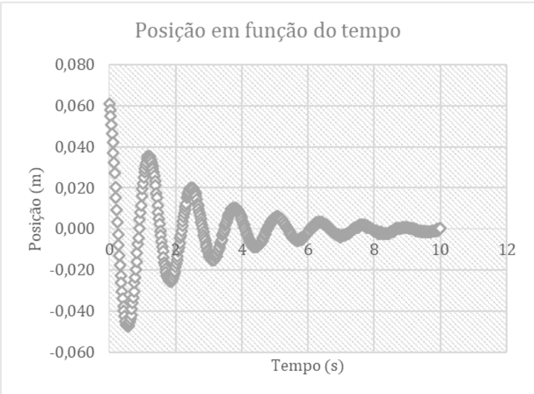

Gráfico 68 (Posição da esfera em função do tempo 5º *ensaio* (este gráfico depende diretamente do valor de n))

No 2º *ensaio* com $n = 0{,}026\ N$ obtém-se o melhor valor de R^2

Temos:

$$T = 1{,}30 \pm 0{,}01\ s$$

$$(Desvio\ de\ 13{,}1\sigma)$$

$$w = 4{,}85 \pm 0{,}02 \frac{rad}{s}$$

$$(Desvio\ de\ 14{,}0\sigma)$$

$$f = 0{,}77 \pm 0{,}003\ Hz$$

$$(Desvio\ de\ 14{,}0\sigma)$$

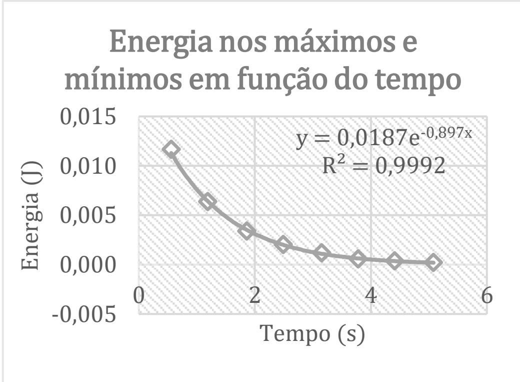

Gráfico 69 (Energia da mola nos máximos e mínimos em função do instante 5º *ensaio*)

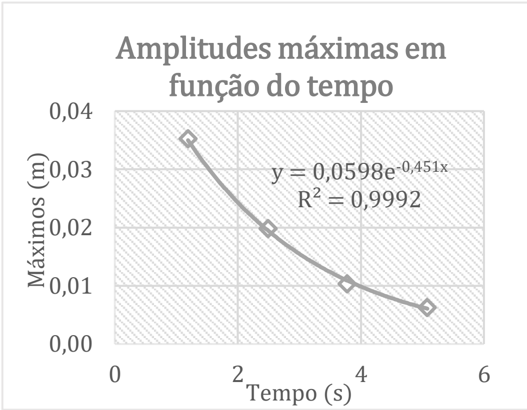

Gráfico 70 (Amplitudes máximas em função do tempo 5º *ensaio*)

$$b = 0{,}34\ Ns/m$$

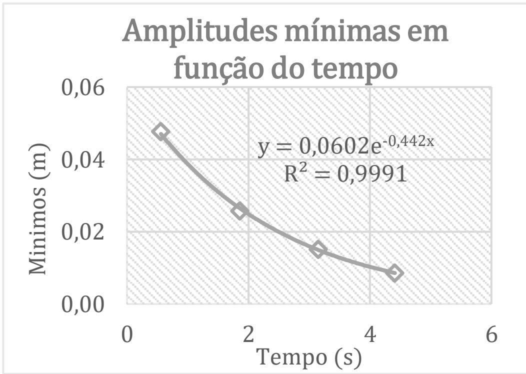

Gráfico 71 (Amplitudes mínimas em função do tempo 4º *ensaio*)

$$b = 0{,}34\ Ns/m$$

Análise de resultados 3º Parte

Novamente há um enorme desvio em relação aos valores calculados no início da 3º Parte do período, da frequência angular e da frequência. É maior nesta 3º parte, embora ambas as experiências tenham sido repetidas, os valores não melhoraram e não foi notado nenhum erro experimental

Em relação aos gráficos de energia-tempo temos que:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Como a amplitude da esfera decai exponencialmente em relação ao tempo, a energia então sofre um decaimento também exponencial em relação ao tempo.

Neste caso (3ªParte), como as condições da experiência não foram alteradas durante os diferentes ensaios, podemos juntar todos os valores do coeficiente de restituição das amplitudes máximas e mínimas, e desta forma, calcular o valor médio e o respetivo desvio padrão do conjunto de valores,

$$b = 0{,}33 \pm 0{,}05\ Ns/m$$

como,

$$b = 0{,}38\ Ns/m$$

então temos um desvio de σ ao valor teórico, que tendo em conta que a condição de temperatura, ou a possibilidade de impurezas na parafina é um bom resultado.

Conclusão

No decorrer desta atividade laboratorial, foi nos possível observar e quantificar o efeito de vários tipos de atrito, num movimento sujeito a uma força elástica.

Na segunda parte do trabalho com a presença de uma força de atrito exercida no sistema pelo contacto com o bloco de madeira, teoricamente concluímos que a amplitude do movimento diminui linearmente ao longo do tempo e, consequentemente, constatamos que a energia do oscilador decresce quadraticamente com o tempo, um comportamento característico de um movimento harmónico com atrito de escorregamento.

Verifica-se também que, aumentando o dx o valor da força de atrito aumenta linearmente, o número de oscilações e valores de amplitude vão sendo cada vez menores. Isto implica que a força de atrito seja constante em todo o movimento da esfera, então esta não depende da velocidade da esfera, logo, estamos perante um atrito seco, embora possamos estar perante outros tipos de forças de atrito, que afetam pouco o ajuste (Atrito de Stokes no ar).

É notório, o efeito de algumas forças exteriores (por exemplo, força exercida pelo aluno que faz a esfera oscilar levemente horizontalmente) no final da experiência, sendo uma das possíveis causas nos desvios associados aos valores obtidos.

Na terceira parte, sendo a parafina um fluído que exerce uma força de atrito de amortecimento no nosso movimento, o módulo da amplitude decai exponencialmente como visto na introdução, consequentemente, a energia do sistema ao longo do tempo vai decrescendo exponencialmente. Neste caso, a força de atrito de Stokes é predominante, embora possamos estar perante outros tipos de forças de atrito.

Algumas irregularidades são visíveis, comparando os 5 ensaios, isto pode-se dever ao facto de impurezas na parafina, oscilações horizontais na mola, entre outros. Acresço referir que foi tido em conta a esfera não sair do fluido nem bater no chão.

Observando os valores obtidos nas análises da 1ª e 2ª parte chegamos há conclusão de que há um erro experimental, embora não tenha sido detetado (após refazermos a experiência).

Bibliografia

Helerbrock, R. *Movimento harmônico simples. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em* https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm

O que é a Lei de Hooke? Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://pt.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/hookes-law/a/what-is-hookes-law

(Porto, 1 de junho de 2001). *Ondas-Pêndulo Simples e Compostos*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://web.fe.up.pt/~ee99049/31_Ondas/RelatorioPendulos.html

Diniz,E.M.(2020). *O oscilador linearmente amortecido revisitado*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://www.scielo.br/j/rbef/a/yvBb9FTHyPkw5ZkdxWVkhFP/?lang=pt

DeCross,M.(2021).*Damped Harmonic Oscillators*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://brilliant.org/wiki/damped-harmonic-oscillators/

(2018).*Resumo e Lista de Exercícios Física II.*Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://estudar.com.vc/contentfiles/uploads/11595-Fi%CC%81sica_II_Resumo_e_Lista_de_Exerci%CC%81cios_Fuja_do_Nabo_P2_2018.2.original.pdf

Roque,A. *Ondas. Fluidos e Termodinâmica*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em http://sisne.org/Disciplinas/Grad/Fisica2FisMed/aula7.pdf

Silva,L.S. *Prática: oscilações – Oscilador Harmônico Amortecido*. Obtido em 3 de dezembro de 2021 em https://studylibpt.com/doc/6207109/oscilador-harm%C3%B4nico-amortecido

"Protocolos 2021-2022",Armando Ferreira,2021

Apêndice

Tratamento de dados:

1º Parte

$$m_m \equiv Massa\ da\ mola$$

$$d_e \equiv Diâmetro\ da\ esfera$$

$$m_e \equiv Massa\ da\ esfera$$

$$x \equiv Posição\ do\ sensor$$

$$F \equiv Força\ elástica$$

$$k \equiv Constante\ elástica$$

$$w_0 \equiv Frequência\ angular\ natural\ oscilador$$

$$T_0 \equiv Periodo\ natural\ do\ oscilador$$

$$f_0 \equiv Frequência\ natural\ do\ oscilador$$

$$F_a \equiv Força\ de\ atrito$$

Propagações:

$$m = -k$$

$${\sigma_m}^2 = \left(\frac{\partial m}{\partial k}\right)^2 {\sigma_k}^2$$

$${\sigma_m}^2 = (-1)^2 {\sigma_k}^2$$

$$\sigma_m = \sigma_k$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

$$\sigma_{w_0}^2 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial m_e}\right)^2 \sigma_{m_e}^2$$

$$\sigma_{w_0}^2 = \left(\frac{\sigma_k}{2 \cdot m_e} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{k}}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{m_e} \cdot k}{2 \cdot {m_e}^2} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{k}}\right)^2$$

$$\sigma_{w_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2 \cdot m_e} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{k}}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{m_e} \cdot k}{2 \cdot {m_e}^2} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{k}}\right)^2}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

$$\sigma_{T_0}^2 = \left(\frac{\partial T_0}{\partial w_0}\right)^2 \sigma_{w_0}^2$$

$$\sigma_{T_0}^2 = \left(\frac{-2\pi}{{w_0}^2}\right)^2 \sigma_{w_0}^2$$

$$\sigma_{T_0} = \frac{2\pi \cdot \sigma_{w_0}}{{w_0}^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\sigma_{f_0}^2 = \left(\frac{\partial f_0}{\partial T_0}\right)^2 \sigma_{T_0}^2$$

$$\sigma_{f_0}^2 = \left(-\frac{1}{{T_0}^2}\right)^2 \sigma_{T_0}^2$$

$$\sigma_{f_0} = \frac{\sigma_{T_0}}{{T_0}^2}$$

2º Parte

Propagações:

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{-2\pi}{T^2}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_w = \frac{2\pi \cdot \sigma_T}{T^2}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_f^2 = \left(-\frac{1}{T^2}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2}$$

$$F_a = \frac{k \cdot m \cdot T}{4}$$

$$\sigma_{F_a}^2 = \left(\frac{\partial F_a}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial F_a}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial F_a}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_{F_a}^2 = \left(\frac{m \cdot T}{4}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{k \cdot T}{4}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{k \cdot m}{4}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_{F_a}^2 = \left(\frac{m \cdot T \cdot \sigma_k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot T \cdot \sigma_m}{4}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot m \cdot \sigma_T}{4}\right)^2$$

$$\sigma_{F_a} = \sqrt{\left(\frac{m \cdot T \cdot \sigma_k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot T \cdot \sigma_m}{4}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot m \cdot \sigma_T}{4}\right)^2}$$

$dx = 0,031m$:

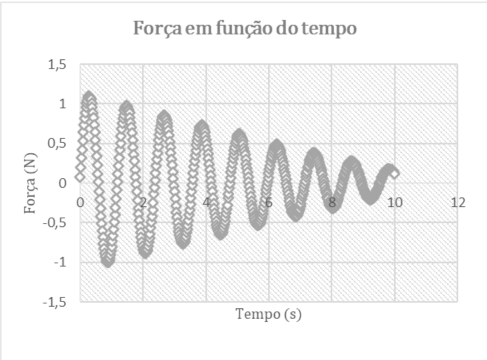

Gráfico 72 (Força em função do tempo $dx = 0,031m$)

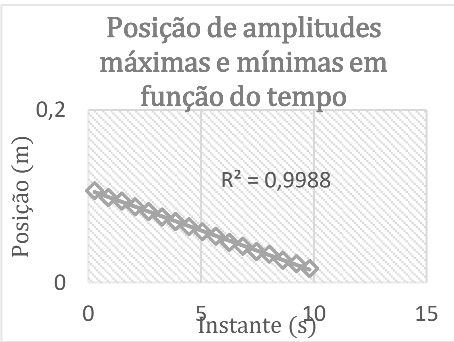

Gráfico 73 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero para $n = 0,014\ N$)

Posição (m)	Instante (s)
0,106	0,27
-0,099	0,88
0,095	1,48
-0,088	2,07
0,082	2,67
-0,076	3,27
0,071	3,86
-0,065	4,46
0,059	5,05
-0,054	5,65
0,047	6,25
-0,042	6,85
0,036	7,45
-0,033	8,03
0,026	8,62
-0,022	9,23
0,016	9,81

Tabela 9 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0,031m$ (estes valores dependem diretamente do valor de n))

Período (s)
1,21
1,19
1,19
1,2
1,19
1,19
1,19
1,19
1,2
1,2
1,2
1,18
1,17
1,2
1,19

Tabela 10 (Conjunto de períodos $dx = 0,031m$)

Posição (m)	Energia (J)	Instante (s)
0,106	0,058	0,27
-0,099	0,050	0,88
0,095	0,046	1,48
-0,088	0,040	2,07
0,082	0,035	2,67
-0,076	0,030	3,27
0,071	0,026	3,86
-0,065	0,022	4,46
0,059	0,018	5,05
-0,054	0,015	5,65
0,047	0,011	6,25
-0,042	0,009	6,85
0,036	0,007	7,45
-0,033	0,006	8,03
0,026	0,003	8,62
-0,022	0,002	9,23
0,016	0,001	9,81

Tabela 11 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}031m$)

$dx = 0,038m$:

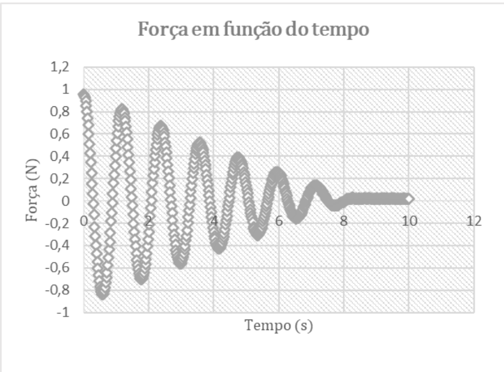

Gráfico 74 (Força em função do tempo $dx = 0{,}038m$)

Posição (m)	Instante (s)
-0,084	0,58
0,078	1,18
-0,070	1,77
0,063	2,37
-0,057	2,98
0,049	3,58
-0,044	4,16
0,036	4,72
-0,032	5,36
0,023	5,94

Tabela 12 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}038m$)

Período (s)
1,19
1,19
1,21
1,21
1,18
1,14
1,2
1,22

Tabela 13 (Conjunto de períodos $dx = 0{,}038m$

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
-0,084	0,58	0,036
0,078	1,18	0,031
-0,070	1,77	0,025
0,063	2,37	0,021
-0,057	2,98	0,017
0,049	3,58	0,012
-0,044	4,16	0,010
0,036	4,72	0,006
-0,032	5,36	0,005
0,023	5,94	0,003

Tabela 14 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}038m$)

$dx = 0,041m$:

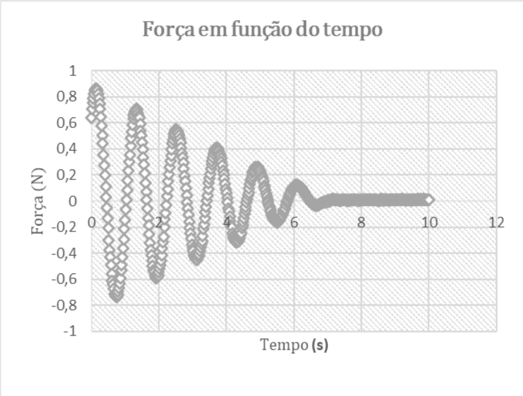

Gráfico 75 (Força em função do tempo $dx = 0{,}041m$)

Posição (m)	Instante (s)
0,083	0,13
-0,073	0,75
0,068	1,33
-0,059	1,92
0,053	2,5
-0,045	3,13
0,039	3,71
-0,031	4,34

Tabela 15 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}041m$)

Período (s)
1,2
1,17
1,17
1,21
1,21
1,21

Tabela 16 (Conjunto de períodos $dx = 0{,}041m$)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,083	0,13	0,035
-0,073	0,75	0,027
0,068	1,33	0,023
-0,059	1,92	0,018
0,053	2,5	0,014
-0,045	3,13	0,010
0,039	3,71	0,008
-0,031	4,34	0,005

Tabela 17 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}041m$)

$dx = 0,047m$:

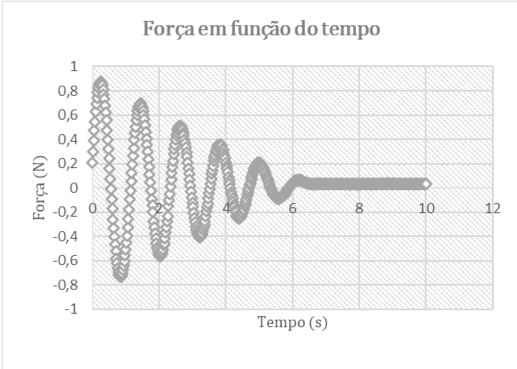

Gráfico 76 (Força em função do tempo $dx = 0{,}047m$)

Posição (m)	Instante (s)
0,082	0,25
-0,075	0,84
0,065	1,44
-0,059	2,03
0,046	2,63
-0,043	3,22
0,031	3,8
-0,028	4,4

Tabela 18 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}047m$)

Período (s)
1,19
1,19
1,19
1,19
1,17
1,18

Tabela 19 (Conjunto de períodos $dx = 0{,}047m$)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,082	0,25	0,034
-0,075	0,84	0,029
0,065	1,44	0,021
-0,059	2,03	0,018
0,046	2,63	0,011
-0,043	3,22	0,010
0,031	3,8	0,005
-0,028	4,4	0,004

Tabela 20 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}047m$)

$dx = 0,052m$:

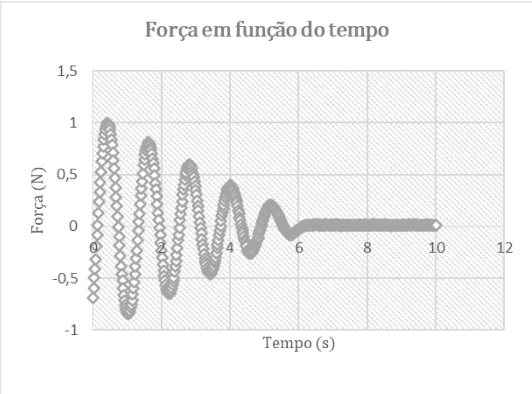

Gráfico 77 (Força em função do tempo $dx = 0{,}052m$)

Posição (m)	Instante (s)
0,097	0,42
-0,083	1,02
0,078	1,62
-0,065	2,21
0,057	2,81
-0,046	3,42
0,038	4
-0,027	4,58

Tabela 21 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}052m$)

Período (s)
1,2
1,19
1,19
1,21
1,19
1,16

Tabela 22 (Conjunto de períodos $dx = 0{,}052m$)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,097	0,42	0,048
-0,083	1,02	0,035
0,078	1,62	0,031
-0,065	2,21	0,021
0,057	2,81	0,017
-0,046	3,42	0,011
0,038	4	0,007
-0,027	4,58	0,004

Tabela 23 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}052m$)

$dx = 0,063m$:

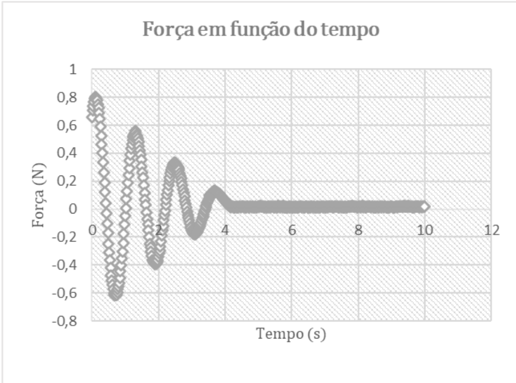

Gráfico 78 (Força em função do tempo $dx = 0{,}063m$)

Posição (m)	Instante (s)
0,07	0,3
-0,062	0,92
0,047	1,5
-0,040	2,08
0,024	2,7
-0,017	3,29

Tabela 24 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes $dx = 0{,}063m$)

Período (s)
1,2
1,16
1,2
1,21

Tabela 25 (Conjunto de períodos $dx = 0{,}063m$)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,07	0,3	0,025
-0,062	0,92	0,019
0,047	1,5	0,011
-0,040	2,08	0,008
0,024	2,7	0,003
-0,017	3,29	0,002

Tabela 26 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes $dx = 0{,}063m$)

3º Parte

Propagações:

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{-2\pi}{T^2}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_w = \frac{2\pi \cdot \sigma_T}{T^2}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_f^2 = \left(-\frac{1}{T^2}\right)^2 \sigma_T^2$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2}$$

2º ensaio:

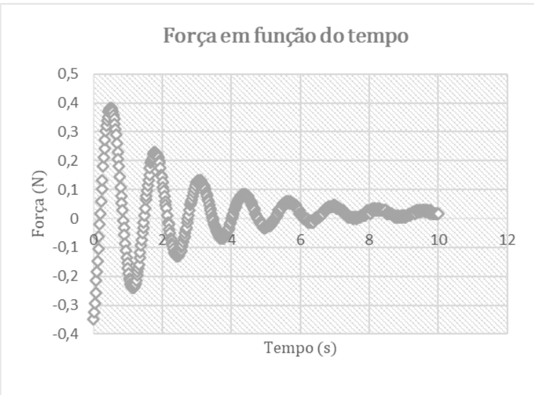

Gráfico 79 (Força em função do tempo 2º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)
0,035	0,5
-0,025	1,15
0,020	1,77
-0,015	2,43
0,011	3,08
-0,009	3,73
0,006	4,37
-0,005	4,96

Tabela 27 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes 2º *ensaio* (estes valores dependem diretamente do valor de n))

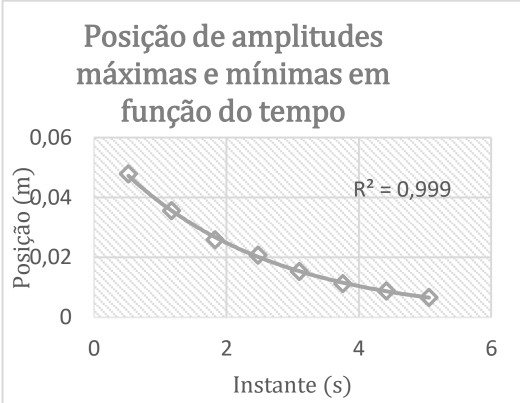

Gráfico 80 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero $n = 0{,}021\ N$)

Período (s)
1,27
1,28
1,31
1,3
1,29
1,23

Tabela 28 (Conjunto de períodos 2º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,035	0,5	0,006
-0,025	1,15	0,003
0,020	1,77	0,002
-0,015	2,43	0,001
0,011	3,08	0,0006
-0,009	3,73	0,0004
0,006	4,37	0,0002
-0,005	4,96	0,0001

Tabela 29 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes 2º *ensaio*)

3º ensaio:

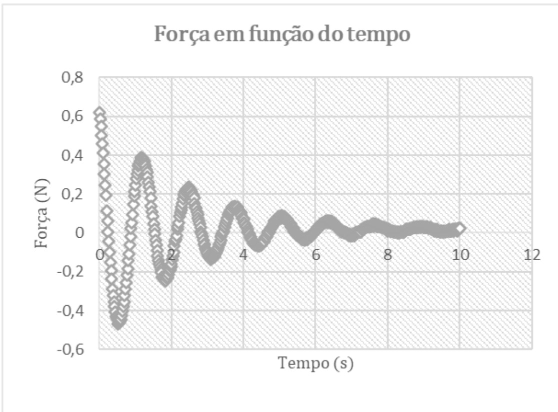

Gráfico 81 (Força em função do tempo 3º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)
-0,048	0,52
0,036	1,17
-0,026	1,83
0,021	2,48
-0,015	3,1
0,011	3,76
-0,009	4,42
0,007	5,06

Tabela 30 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes 3º *ensaio* (estes valores dependem diretamente do valor de n))

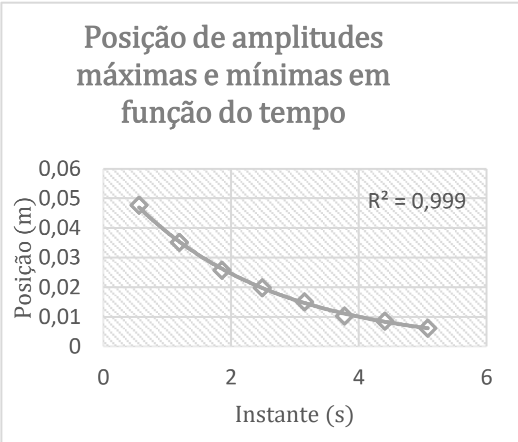

Gráfico 82 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero $n = 0{,}022\ N$)

Período (s)
1,31
1,31
1,27
1,28
1,32
1,3

Tabela 31 (Conjunto de períodos 3º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
-0,048	0,52	0,012
0,036	1,17	0,006
-0,026	1,83	0,003
0,021	2,48	0,002
-0,015	3,1	0,001
0,011	3,76	0,0007
0,009	4,42	0,0004
-0,007	5,06	0,0002

Tabela 32 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes 3º *ensaio*)

4º ensaio:

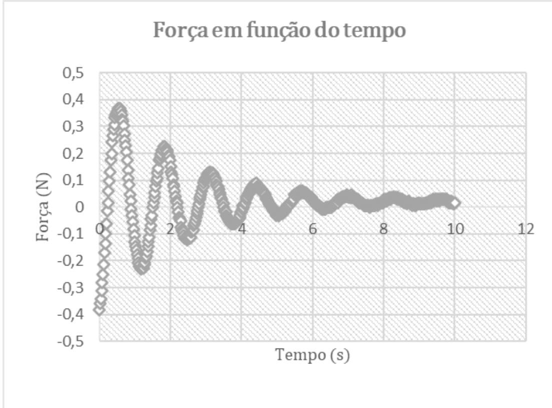

Gráfico 83 (Força em função do tempo 4º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)
0,034	0,55
-0,025	1,18
0,020	1,82
-0,014	2,46
0,011	3,12
-0,008	3,76
0,006	4,42
0,005	5,02

Tabela 33 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes 4º *ensaio* (estes valores dependem diretamente do valor de n))

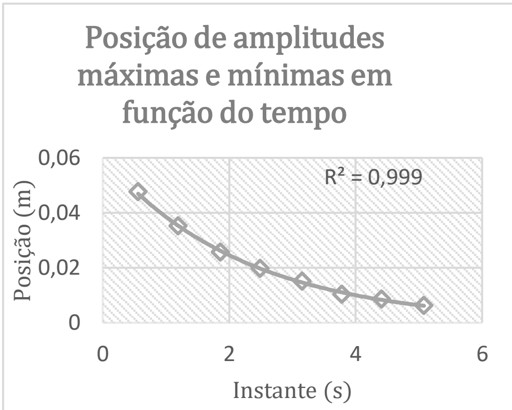

Gráfico 84 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero $n = 0{,}024\ N$)

Período (s)
1,27
1,28
1,3
1,3
1,3
1,26

Tabela 34 (Conjunto de períodos 4º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
0,034	0,55	0,006
-0,025	1,18	0,003
0,020	1,82	0,002
-0,014	2,46	0,001
0,011	3,12	0,0006
-0,008	3,76	0,0004
0,006	4,42	0,0002
0,005	5,02	0,0001

Tabela 35 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes 4º *ensaio*)

5º ensaio:

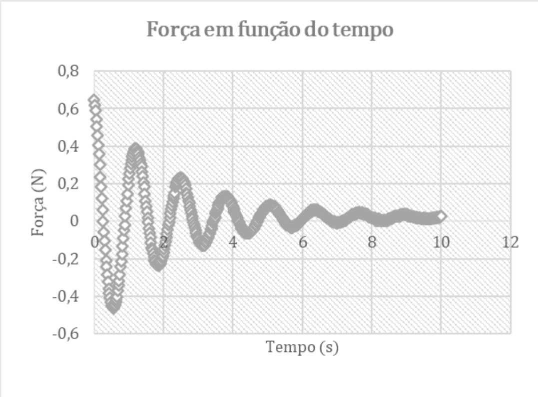

Gráfico 85 (Força em função do tempo 5º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)
-0,048	0,56
0,035	1,19
-0,026	1,86
0,020	2,49
-0,015	3,15
0,0010	3,78
-0,009	4,41
0,006	5,08

Tabela 36 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas) e respetivos instantes 5º *ensaio* (estes valores dependem diretamente do valor de n))

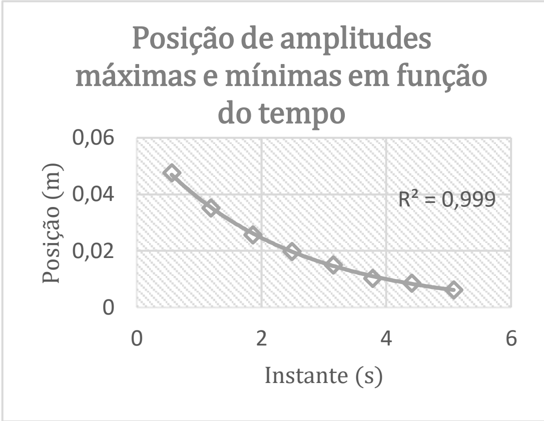

Gráfico 86 (Posição de equilíbrio a força próxima de zero $n = 0,026\ N$)

Período (s)
1,3
1,3
1,29
1,29
1,26
1,3

Tabela 37 (Conjunto de períodos 5º *ensaio*)

Posição (m)	Instante (s)	Energia (J)
-0,048	0,56	0,012
0,035	1,19	0,006
-0,026	1,86	0,003
0,020	2,49	0,002
-0,015	3,15	0,001
0,0010	3,78	0,0006
-0,009	4,41	0,0004
0,006	5,08	0,0002

Tabela 38 (Posição de amplitudes (máximas/mínimas), energia e respetivos instantes 5º *ensaio*)