Álgebra Linear e Geometria Analítica

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática

UM

1º semestre de 2020/2021

1. Determinantes
   - Propriedades
   - Cálculo do determinante pelo método de Gauss
   - Fórmula de Leibniz
   - Teorema de Laplace
   - Determinante de uma matriz invertível
   - Cálculo da inversa
   - Resolução de sistemas de Cramer
   - Aplicações

A função determinante associa a cada matriz de tipo $n \times n$ um número e carateriza-se por três propriedades fundamentais:

• o determinante de uma matriz identidade é igual a 1;

• os determinantes de duas matrizes que dependam entre si apenas por uma troca entre duas linhas (colunas) são simétricos;

• a função é linear em cada linha (coluna).

Será que existe alguma função nestas condições? Em caso afirmativo, será que tal função é única?
A resposta é afirmativa para as duas questões.

Representaremos o determinante de uma matriz A por $|A|$ ou por $det\ A$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

1. Se A tem uma linha (ou uma coluna) toda formada por zeros, então $det\ A = 0$.
2. Se A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, então $det\ A = 0$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Se A' resulta de A por se adicionar uma linha (coluna) com outra multiplicada por um escalar, então $det\ A = det\ A'$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$, uma matriz triangular superior ou inferior. Então, $det\ A = a_{1\,1} \cdots a_{n\,n}$.

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

1. Se multiplicarmos uma linha (ou uma coluna) de A por um escalar α, o determinante da matriz resultante é $\alpha det\, A$.
2. Se trocarmos duas linhas (ou duas colunas) de A, então o determinante da matriz resultante é $-det\, A$.
3. Se a uma linha (coluna) de A somarmos outra linha (outra coluna, respetivamente) de A eventualmente multiplicada por um escalar, o determinante da matriz resultante é $det\, A$.

Se A' resulta de A por se efetuarem transformações elementares nas linhas e/ou nas colunas, então existe um escalar α não nulo tal que $det\, A = \alpha det\, A'$.

Proposição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, $det(A^T) = det\, A$.

Cálculo do determinante pelo método de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{então}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&\underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_1 + L_4}}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \\
&= -(1 \times (-1) \times (-2) \times (-5)) = 10
\end{aligned}$$

Comecemos por considerar $A = [a]$ uma matriz quadrada de ordem 1:

para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $det[a] = det[a \cdot 1] = a\,det[1] = a \cdot 1 = a$.
O número a designa-se *determinante* da matriz $[a]$ de ordem 1.

Notar ainda que a matriz $[a]$ é invertível se e só se $a \neq 0$.

De seguida considere-se $A = [a_{i\,j}]_{2\times 2}$. Efetuando uma análise baseada nos mesmos princípios utilizados no caso de matrizes de ordem 1 obter--se-ia que

$$det\,A = a_{1\,1}a_{2\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}.$$

Em que condições a matriz A é invertível?

Efetuando a condensação de Guass de A conclui-se que a condição é

$$a_{1\,1}a_{2\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1} \neq 0$$

No caso de uma matriz de tipo 3×3, $A = [a_{i\,j}]_{3\times 3}$, fazendo raciocínio semelhante chega-se à expressão

$$det\, A = (a_{1\,1}a_{2\,2}a_{3\,3} + a_{1\,2}a_{2\,3}a_{3\,1} + a_{1\,3}a_{2\,1}a_{3\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}a_{3\,3} - a_{1\,3}a_{2\,2}a_{3\,1} - a_{1\,1}a_{2\,3}a_{3\,2})$$

e A é invertível se e só se

$$(a_{1\,1}a_{2\,2}a_{3\,3} + a_{1\,2}a_{2\,3}a_{3\,1} + a_{1\,3}a_{2\,1}a_{3\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}a_{3\,3} - a_{1\,3}a_{2\,2}a_{3\,1} - a_{1\,1}a_{2\,3}a_{3\,2}) \neq 0.$$

No caso de matrizes quadradas de ordem $n = 1, 2, 3$, as expressões obtidas para o determinate são: um somatório, com um número de parcelas igual ao número de permutações de $\{1, \ldots, n\}$, cada parcela é o produto de n elementos da matriz sendo, simultaneamente, um de cada linha e um de cada coluna. Cada parcela está afetada do sinal $+$ ou $-$.

Definição - Fórmula de Leibniz

Dada uma matriz $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$, com $n \in \mathbb{N}$, chama-se determinante de A ao número resultante da soma de $n!$ parcelas, uma para cada permutação de $\{1, \ldots, n\}$, e em que cada parcela é

- o produto de n elementos da matriz, um de cada linha e, simultaneamente, um de cada coluna,
- afetada pelo sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação correspondente é par ou ímpar,

ou seja,

$$det\, A = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

onde σ representa uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$, e $sgn(\sigma) = 1$ ou $sgn(\sigma) = -1$, conforme σ é uma permutação par ou ímpar, respetivamente.

Definição

Sejam $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \geq 2$, e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por $A(i|j)$ representa-se a matriz que resulta de A por se eliminar a linha i e a coluna j.

O valor $(-1)^{i+j} det\,(A(i|j))$ designa-se complemento algébrico de a_{ij}, que se representa por Δ_{ij}.

Proposição (Teorema de Laplace)

Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \geq 2$, e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então:

1. $det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$;
2. $det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \Delta_{ji}$.

Teorema de Laplace

$$
\begin{aligned}
det\,A &= det\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= (-2)(-1)^{1+1} det\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&\quad +0(-1)^{1+3} det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + 3(-1)^{1+4} det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -2\,det\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 3\,det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Teorema de Laplace

$$= -2\left(-\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right) +$$

$$+\det\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -2\left(-\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right) +$$

$$+\left(0\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$-3\left(\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= -2\Big(-(-2-3)+0+0\Big) + \Big(0-4(-2-3)+2(1-1)\Big)$$

$$-3\Big((1-1)+0+0\Big) \qquad = \mathbf{10}$$

Proposição

Sejam A e B matrizes quadradas. Então

$$det\,(AB) = det\,A \cdot det\,B.$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \in \mathbb{N}$. Então A é invertível se e só se $det\,A \neq 0$.

Corolário

Seja A uma matriz invertível. Então $det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,A}$.

De seguida vai ser apresentado um método alternativo para calcular a inversa de uma matriz baseado no cálculo dos complementos algébricos.

Definição

Seja $A = [a_{i\,j}]_{n\times n}$. A matriz quadrada de ordem n cujo elemento na posição (i, j) é $\Delta_{j\,i}$, o complemento algébrico de $a_{j\,i}$, diz-se a matriz adjunta de A e representa-se por $\mathrm{Adj}(A)$, ou seja,

$$\mathrm{Adj}(A) = [\Delta_{i\,j}]^T_{n\times n}.$$

Proposição

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A = |A|\, I_n.$$

Corolário

Se A é uma matriz quadrada invertível, então $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$.

Definição

O sistema de equações lineares $AX = B$ de n equações em n incógnitas diz-se um sistema de Cramer se a matriz A é uma matriz invertível.

Proposição - Regra de Cramer

Seja $AX = B$ um sistema de Cramer. Então, a solução do sistema é:

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

onde, para $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \ldots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \ldots & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Problema: Interpolação polinomial

Suponha que são dados n pontos distintos do gráfico de uma função, (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Como determinar uma função polinomial de grau $n-1$ que 'passa' por estes pontos?

Pretende-se determinar uma função polinomial

$$y(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

em que $y(x_i) = y_i$, para $i = 1, \ldots, n$. O problema é equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} a_{n-1}x_1^{n-1} + & \cdots & +a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ a_{n-1}x_2^{n-1} + & \cdots & +a_1 x_2 + a_0 & = & y_2 \\ & & & \vdots & \\ a_{n-1}x_n^{n-1} + & \cdots & +a_1 x_n + a_0 & = & y_n \end{array}\right. ,$$

de incógnitas a_{n-1}, …, a_1, a_0.

Problema: Interpolação polinomial

O sistema

$$\begin{cases} a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1x_1 + a_0 & = & y_1 \\ a_{n-1}x_2^{n-1} + \cdots + a_1x_2 + a_0 & = & y_2 \\ & \vdots & \\ a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1x_n + a_0 & = & y_n \end{cases}$$

tem solução única se a matriz dos coeficientes tiver determinante não nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ & \vdots & & \\ x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Problema: Interpolação polinomial

Considerem-se três pontos distintos do gráfico de uma função, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Determinar um polinómio de grau 2 que 'passa' por estes três pontos é equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_2 \cdot x_1^2 & +a_1 \cdot x_1 & +a_0 & = & y_1 \\ a_2 \cdot x_2^2 & +a_1 \cdot x_2 & +a_0 & = & y_2 \\ a_2 \cdot x_3^2 & +a_1 \cdot x_3 & +a_0 & = & y_3 \end{array}\right. ,$$

de incógnitas a_2, a_1, a_0.

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3).$$

Como os três pontos são pontos distintos do gráfico de uma função, o determinante é diferente de zero, pelo que o problema tem solução única.
Este raciocínio pode ser generalizado para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Problema: Interpolação polinomial

Em particular considerem-se os seguintes 3 pontos distintos do gráfico de uma função, $(1,1)$, $(2,-2)$, $(5,1)$. Qual é o polinómio de grau 2 que 'passa' por estes pontos?

O problema é equivalente a resolver o sistema:

$$\left\{\begin{array}{llllr} a_2\cdot 1^2 & +a_1\cdot 1 & +a_0 & = & 1\\ a_2\cdot 2^2 & +a_1\cdot 2 & +a_0 & = & -2\\ a_2\cdot 5^2 & +a_1\cdot 5 & +a_0 & = & 1\end{array}\right. ,$$

de incógnitas a_2, a_1, a_0. A solução é

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 25 & 5 & 1\end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ 25 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 25 & 5 & 1\end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -2\\ 25 & 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 25 & 5 & 1\end{vmatrix}}\right) = (1,\ -6,\ 6),$$

ou seja, o polinómio é $x^2 - 6x + 6$.

Problema: Cálculo de uma equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$

Considerem-se dois pontos de $\mathbb{R}^2$, (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Dado que uma equação cartesiana da reta é uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0,$$

então pretende-se determinar a, b e c tais que

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Como qualquer ponto (x, y) da reta é solução da equação cartesiana da reta, o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases},$$

de incógnitas a, b e c, deve ter solução não trivial, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema: Cálculo de uma equação de um plano em $\mathbb{R}^3$

Considerem-se três pontos de $\mathbb{R}^3$, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3). Como calcular uma equação cartesiana do plano que contém os três pontos? Dado que uma equação cartesiana do plano é uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

pretende-se determinar a, b, c e d tais que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d &= 0 \end{aligned}$$

De forma análoga ao caso da equação da reta, uma equação cartesiana do plano é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema: Cálculo do produto vetorial

A resolução de diversos problemas geométricos em $\mathbb{R}^3$ passa pela determinação de um vetor ortogonal a dois vetores dados. A operação produto vetorial definida em $\mathbb{R}^3$ fornece uma resposta.

Definição

Se $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ são vetores de $\mathbb{R}^3$, então o *produto vetorial de u por v* é um vetor, que se representa por $u \times v$, tal que:

$$u \times v = \left(x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \right)$$

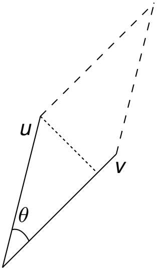
Podemos então usar a regra de cálculo do determinante para lembrar o cálculo o produto vetorial:

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Problema: Cálculo do produto vetorial

Interpretação geométrica do produto vetorial

$$\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \, sen(\theta).$$



- Base do paralelogramo = $\| v \|$;
- Altura do paralelogramo = $\| u \| \, |sen(\theta)|$.

Assim,

$$\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \; |sen(\theta)|$$

é a área do paralelogramo.

Problema: Cálculo de volumes

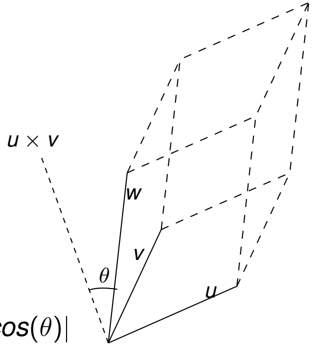
Definição

Se u, v e w são vetores de $\mathbb{R}^3$, então o *produto misto, ou produto escalar triplo, de u , v e w* é o escalar:

$$(u \times v) \cdot w.$$

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot w &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (z_1, z_2, z_3) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Interpretação geométrica do produto misto



- Área da base do paralelipípedo = $\| u \times v \|$;
  - Altura do paralelipípedo = $\| w \| \; |cos(\theta)|$.
- O que representa $|(u \times v) \cdot w|$?

$$|(u \times v) \cdot w| = \| u \times v \| \cdot \| w \| \; |cos(\theta)|$$

$$= \left| det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

é o volume do paralelipípedo.