Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Departamento de Electrónica Industrial

# Mestrado Integrado em Engenharia Física

## UC de Análise de Circuitos


Departamento de Eletrónica Industrial e Computadores

Paulo Carvalhal

pcarvalhal@dei.uminho.pt

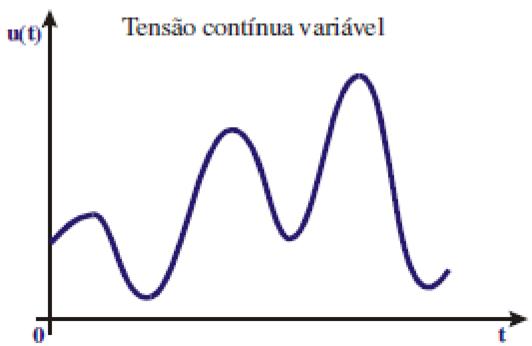
# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

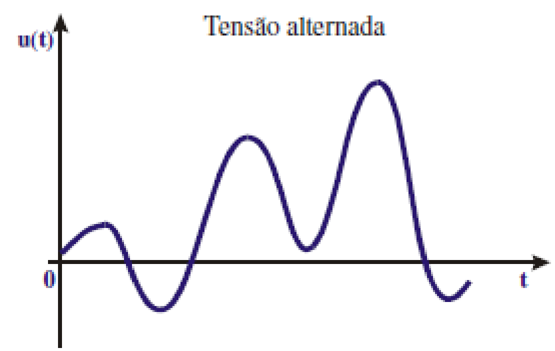
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Até agora temos trabalhado com circuitos alimentados com tensões (e correntes) constantes, ou seja com sinais contínuos.

Agora vamos começar a trabalhar com **SINAIS ALTERNADOS**

Aqueles cuja tensão e corrente evoluem no tempo



# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Quando se fala em sinais alternados, podem-se identificar

- Sinais não periódicos
- Sinais periódicos

Neste contexto interessam-nos particularmente os

**sinais periódicos alternados puramente sinusoidais**

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceitos fundamentais

Sinais periódicos alternados puramente sinusoidais

$$\boxed{u(t) = U_{Máx} \cdot sen(\omega t + \theta_u)}$$

Amplitude: $U_{máx}$ [V]
Período: T [s]
Frequência: f [Hz]
Fase: $\theta_u$ [rad]
Frequência angular(pulsação): $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
Valor eficaz: $V_{rms} = U_{max}/\sqrt{2}$ [V]

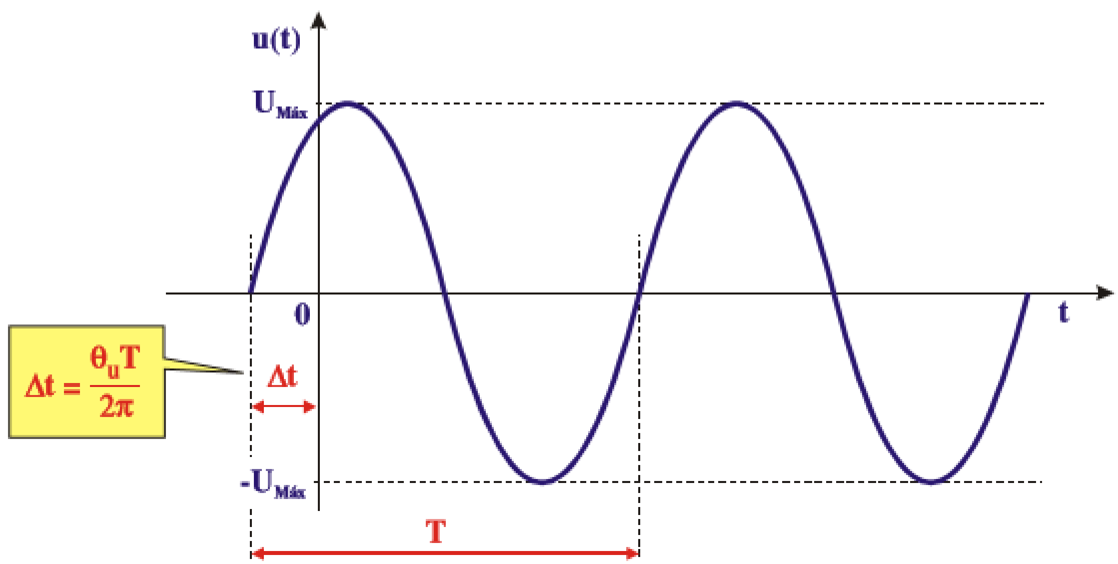



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

$$\begin{array}{l} 2\pi \rightarrow T \\ \theta_u \rightarrow \Delta t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\theta_u \cdot T}{2\pi}}$$

$$t = -\frac{\theta_u \cdot T}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(t) = 0}$$

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## ■ Conceitos fundamentais…

Relembrando o que é o valor eficaz…

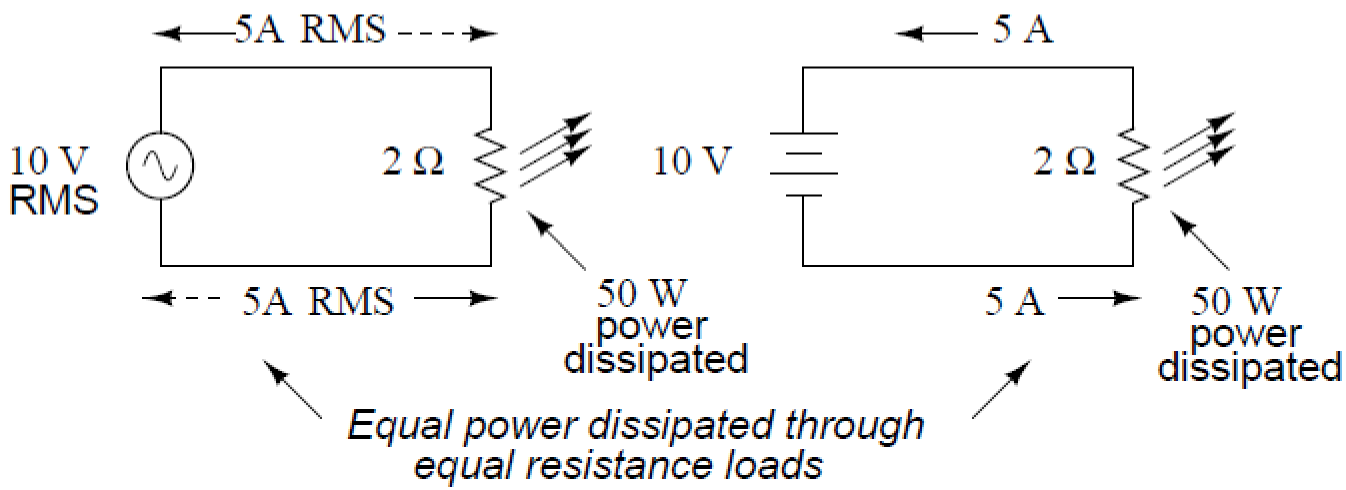


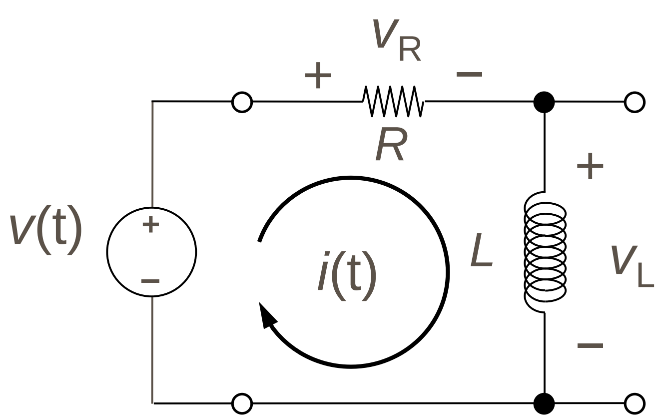

figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

O valor eficaz de uma tensão periódica é igual ao valor da tensão constante que, aplicada a uma resistência, produz nessa resistência uma potência igual à potência média produzida na mesma resistência pela tensão periódica.

Representa a eficácia da grandeza alternada sinusoidal em termos de energia elétrica dissipada.

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

- **Análise de circuitos para sinais com qualquer forma de onda**




$$v = v_R + v_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$v = Ri + L\frac{di}{dt}$$

A análise do circuito implica
A resolução de um sistema de equações diferenciais (no caso geral)

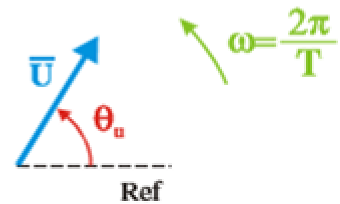
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial


## Conceitos fundamentais

Representação de uma sinusoide com auxílio de um fasor

Um fasor é uma representação vectorial de uma corrente ou tensão.

$\overline{U}(U_{rms}, \theta_u)$



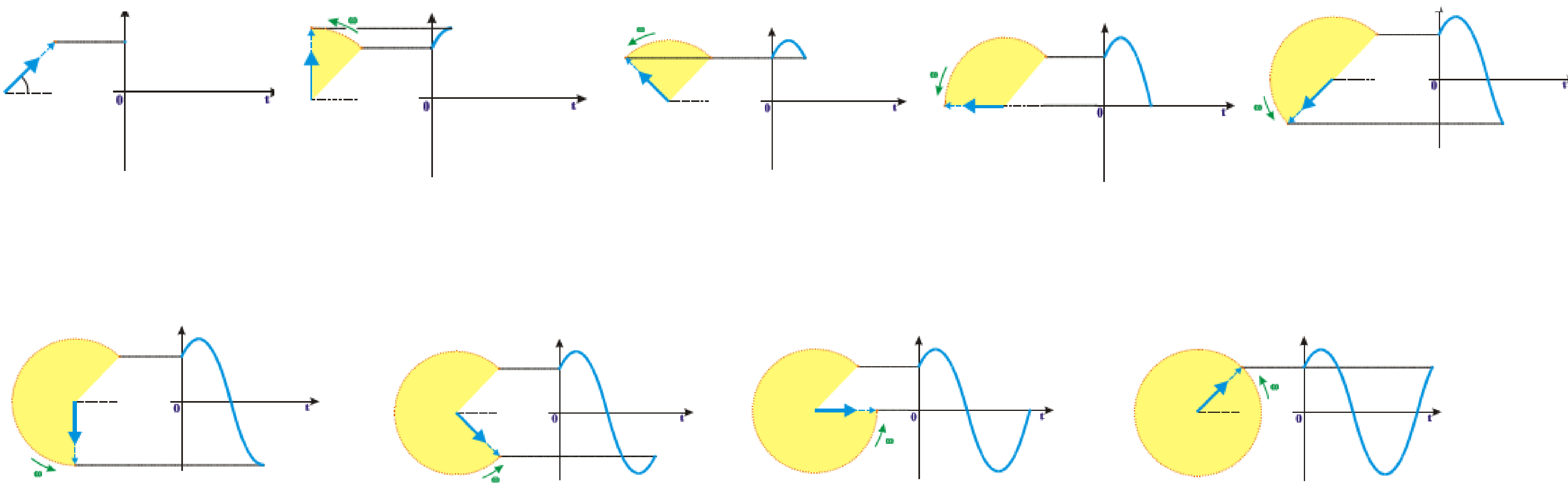



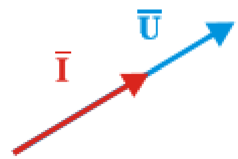
Figura de João Sena Esteves, (DEI)

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

## Conceitos Fundamentais

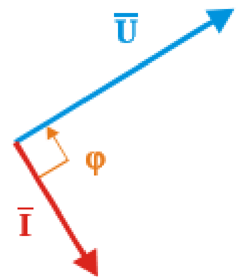
Duas grandezas sinusoidais **<u>com a mesma frequência</u>**, podem:

Estar em fase




**Só neste caso**, (e quando se trata de grandezas com as mesmas unidades), o resultado da soma vetorial é igual ao resultado da soma algébrica.

Em quadratura




Nem uma coisa nem outra!

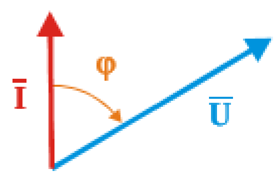



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

A soma de dois vetores faz-se com a regra do paralelogramo ou em alternativa somando cada uma das suas componentes ( em XX e em YY) isoladamente.

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceitos fundamentais…

Obtenção de um fasor a partir de uma sinusoide

$$U(t) = U_{máx}\,.\mathrm{sen}(\omega t+\theta_u)$$

$$= \sqrt{2}U.\mathrm{sen}(\omega t+\theta_u)$$

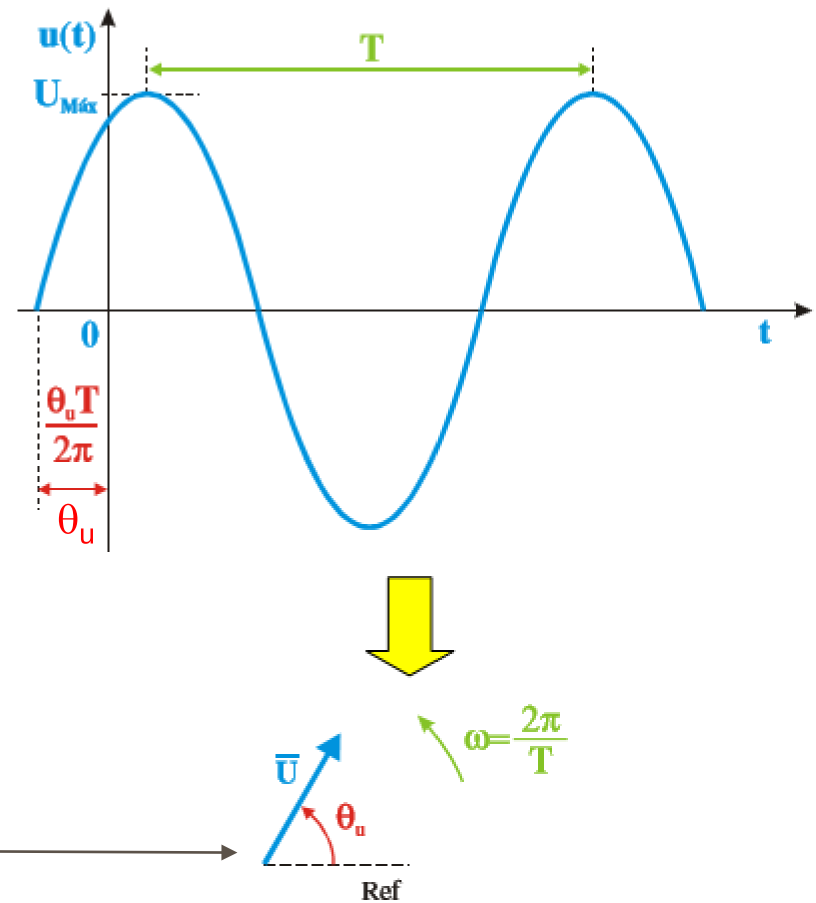



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

Um fasor é uma representação vetorial de uma corrente ou tensão.

$$\overline{U}(Urms, \theta_u)$$

## ■ Conceitos fundamentais

Se mudarmos a referência, os ângulos entre os fasores não mudam

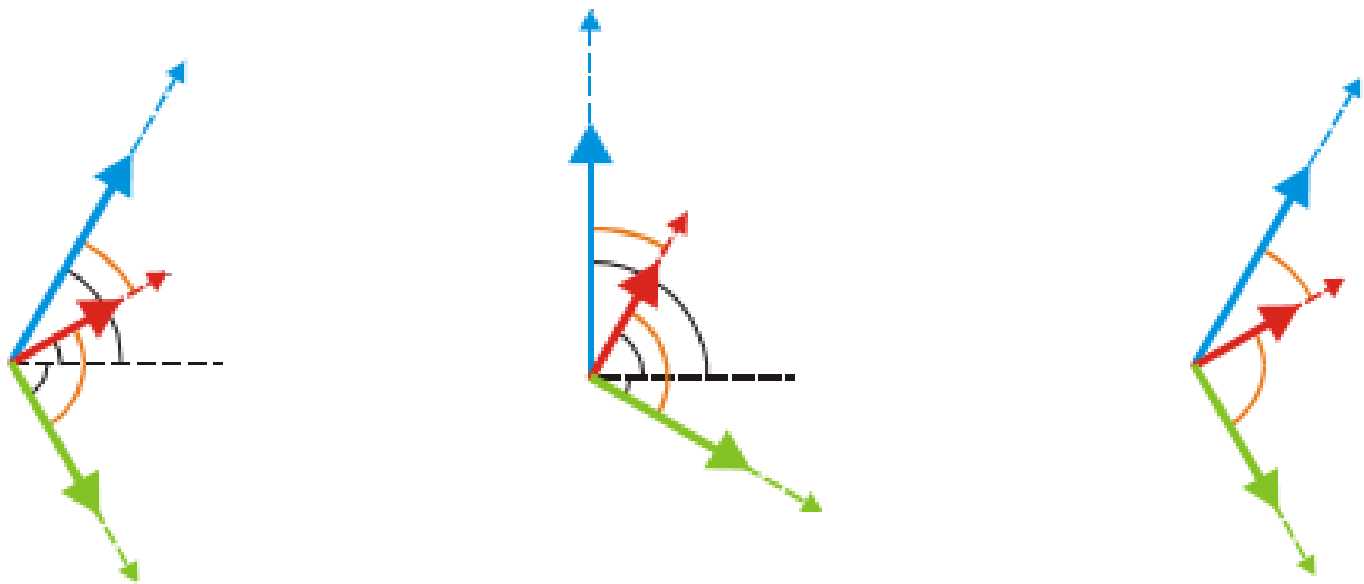


Figura de João Sena Esteves, (DEI)

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Fasores e Números Complexos

- Coordenadas Cartesianas/Polares

$$A + jB \leftrightarrow C\,\underline{\big|\theta}$$

**Rectangular → Polar**

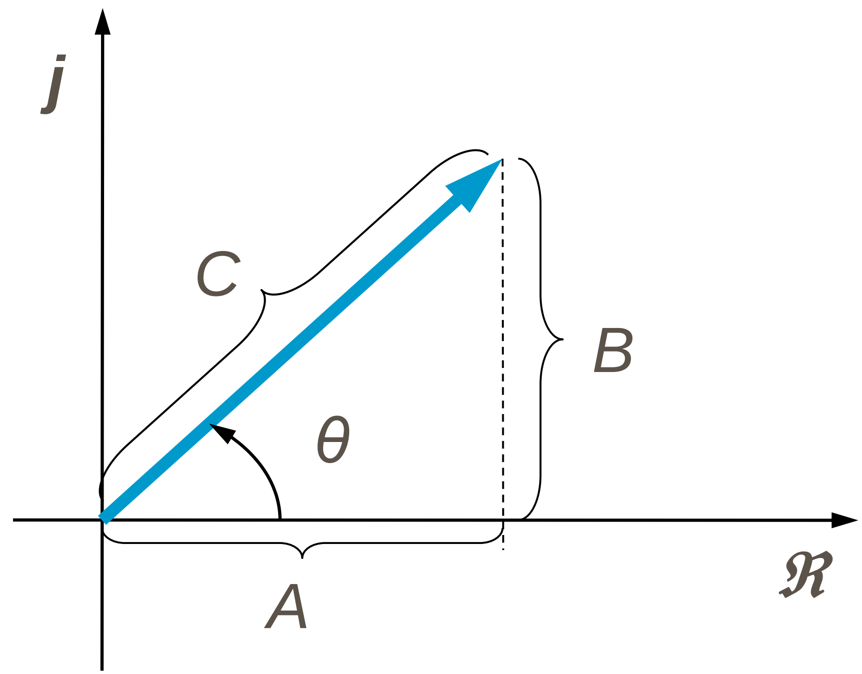
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}$$

**Polar → Rectangular**

$$A = C \cdot \cos(\theta)$$

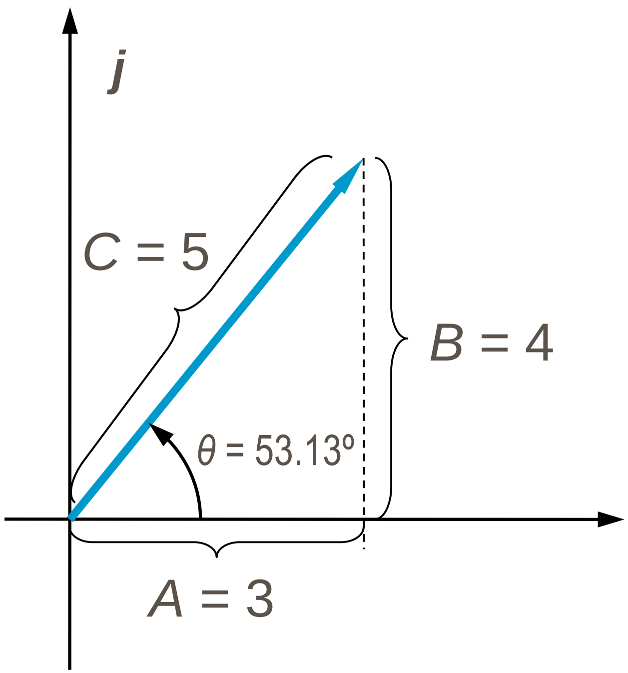
$$B = C \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$



Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Fasores e Números Complexos

- Coordenadas Cartesianas/Polares (exemplo)




Polar → Rectangular

$$3 = 5\cos(53.13^{o})$$

$$4 = 5\mathrm{sen}(53.13^{o})$$

Rectangular → Polar

$$5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$53.13^{o} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

$$3 + j4 \leftrightarrow 5\,\underline{\big|53.13^{\circ}}$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

# Fasores e Números Complexos

## Operações Matemáticas Básicas Sobre Complexos

- É mais fácil somar (ou subtrair) números complexos na forma cartesiana:

$$(A_1 + jB_1) + (A_2 + jB_2) = (A_1 + A_2) + j(B_1 + B_2)$$
$$(A_1 + jB_1) - (A_2 + jB_2) = (A_1 - A_2) + j(B_1 - B_2)$$

- É mais fácil multiplicar (ou dividir) números complexos na forma polar

$$A\angle\alpha \times B\angle\beta = (A \times B)\angle\alpha + \beta$$
$$\frac{A\angle\alpha}{B\angle\beta} = \left(\frac{A}{B}\right)\angle\alpha - \beta$$

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- **Novos conceitos**

Enquanto que a RESISTÊNCIA é um fenómeno decorrente do movimento dos eletrões na estrutura atómica do material (fricção e atrito),

A **REACTÂNCIA** é inércia contra o movimento dos eletrões, e está presente sempre que existam campos elétricos ou magnéticos decorrentes de uma tensão ou corrente (respetivamente) aplicadas.

A **IMPEDÂNCIA** traduz a resultante de todas as formas de oposição ao movimento dos eletrões, e inclui por isso a resistência e a reactância.

**COMPONENTES REACTIVOS** são componentes que apresentam uma reactância, e que por esse fato, introduzem um desfasamento entre a tensão e a corrente

- Componentes resistivos ideais apresentam resistência mas têm reactância nula.
- Condensadores ou bobines ideais apresentam reactância mas têm resistência nula.
- Um circuito reativo não responde da mesma forma quando sujeito a diferentes frequências.

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

Recetor elétrico monofásico genérico (resistivo ou reactivo)

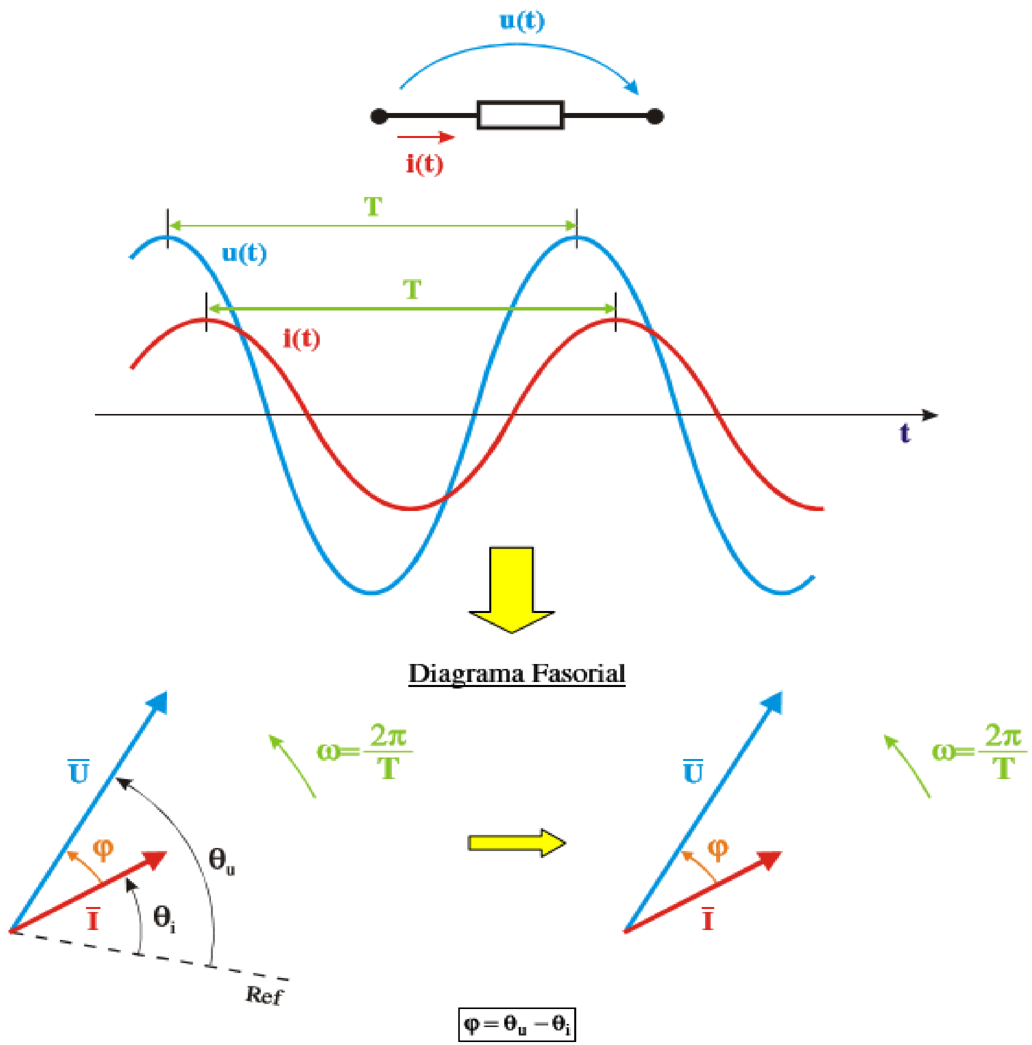



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

Neste exemplo, a tensão está avançada face à corrente

OBS: um diagrama fasorial é constituído por dois fasores (tensão e corrente – duas escalas diferentes), à mesma frequência.

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceito de Impedância

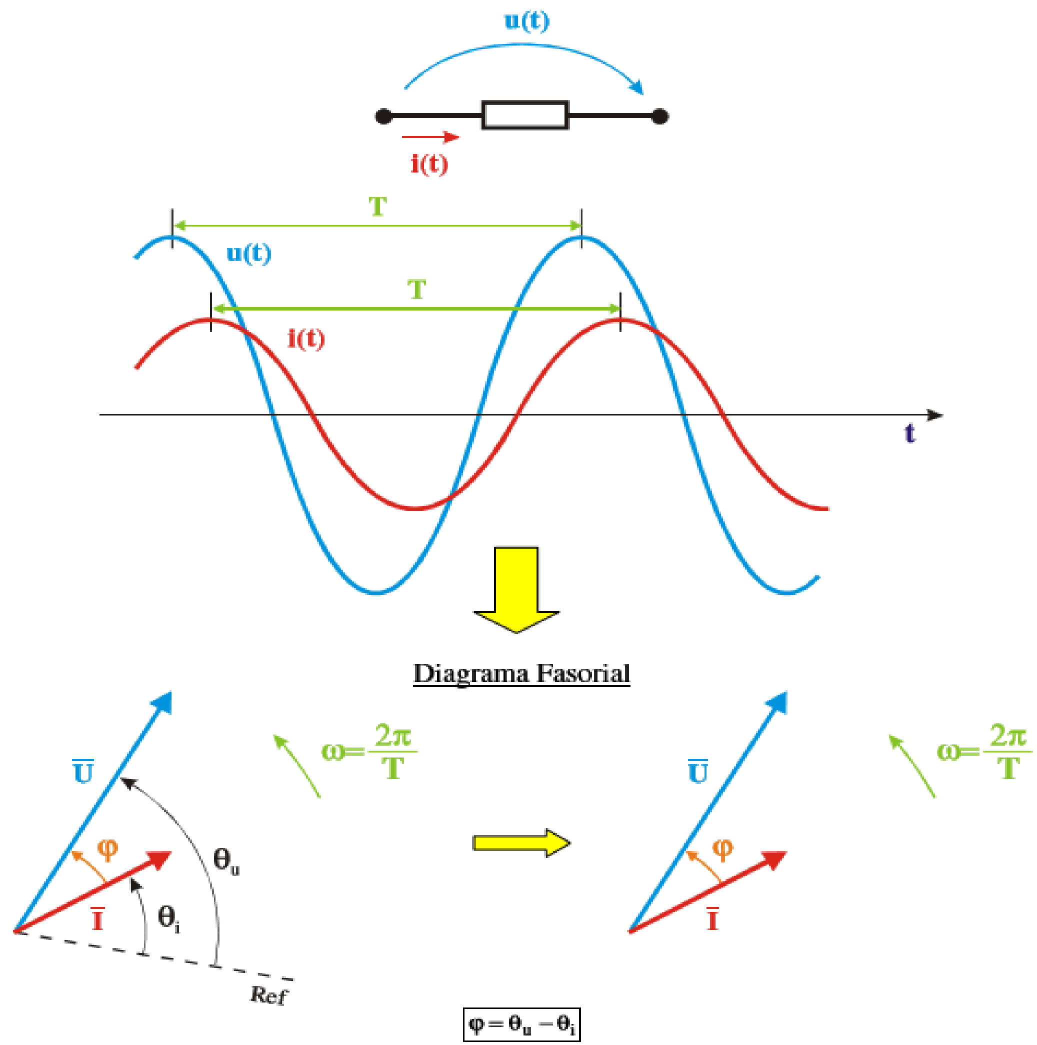



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

Um período da onda (ie um ciclo), corresponde a uma rotação de 360º, ou $2\pi$ radianos.

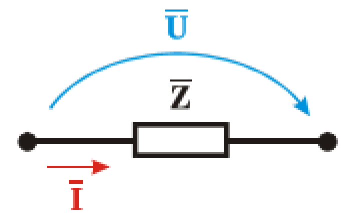
Se este valor for multiplicado pela frequência em Hertz (ciclos por segundo), o resultado vem expresso em rad/s, que corresponde à velocidade angular, $\omega$

Ou seja:

$$\omega = 2\pi f$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

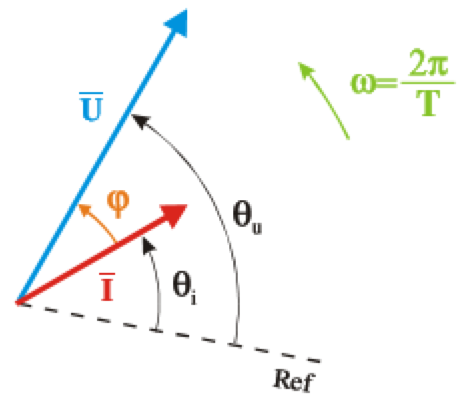
## Conceito de Impedância




Define-se Impedância como um número complexo que expressa a relação entre os fasores $\overline{U}$ e $\overline{I}$

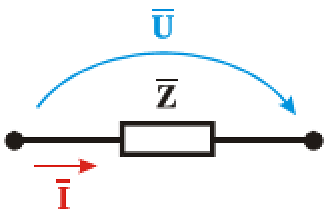
$\overline{U}$ ( U, $\theta_u$)

$\overline{I}$ ( $I$, $\theta_i$) $\Rightarrow$ $$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$




Como se pode verificar, a relação entre tensão e corrente (Impedância) é similar à lei de Ohm, mas com todas as quantidades expressas por números complexos.

## Conceito de Impedância



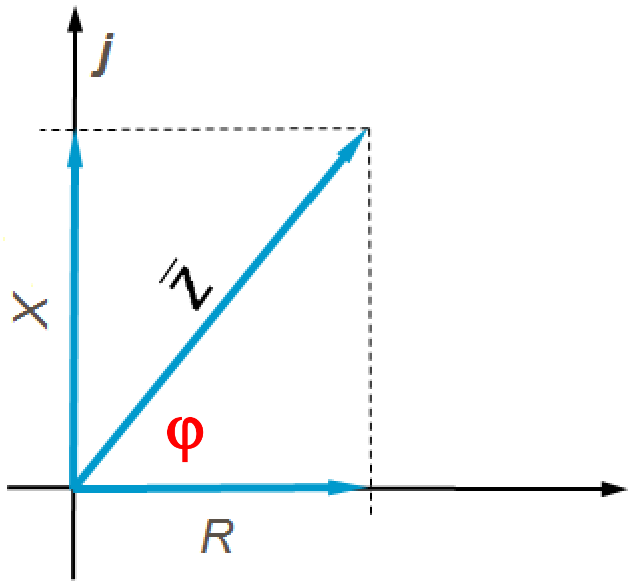




Diagrama de impedância

A Impedância pode exprimir-se em:

**coordenadas retangulares**:
Um escalar R [Ω] (resistência – parte real da impedância)
Um escalar X [Ω] (reatância – parte imaginária da impedância)

$\bar{Z}$ (R,X) $\Rightarrow$ R = Z cos (φ)
X = Z sen (φ)

Ou em

**coordenadas polares:**
Um escalar Z [Ω] (valor da impedância - módulo)
Um angulo φ (argumento da impedância)

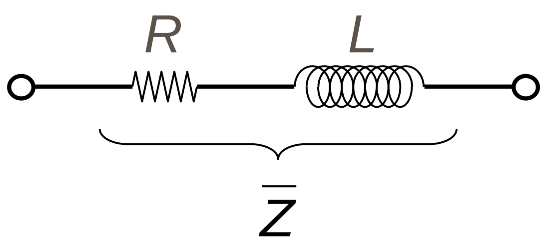
$\bar{Z}$ (Z, φ ) $\Rightarrow$ Z = U/I
$\varphi = \theta_u - \theta_i$

Verificam-se as relações:
$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
cos (φ) = R/Z
tg (φ) = X/R

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceito de Impedância

- Caso particular de associação de R e L




$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L = R + j\omega L$$

resistência
(parte real)
Energia dissipada em calor
(efeito de Joule)

reactância
(parte imaginária)
Não há lugar a dissipação térmica

| Indutiva | Capacitiva |
| --- | --- |
| $X_L$ | $X_C$ |
| $\omega L$ | $1/\omega C$ |

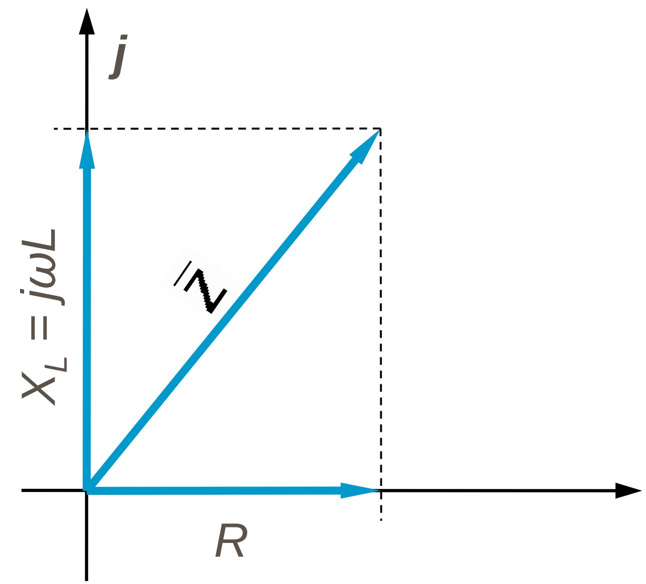



Diagrama de impedâncias
da série *R-L*

$\bar{Z}$ depende de

R,L(ou C)
e também de $\omega$ (i.e. da frequência)

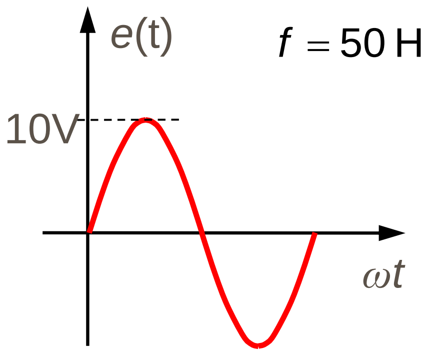
# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

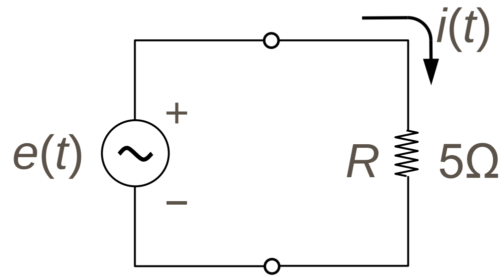
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

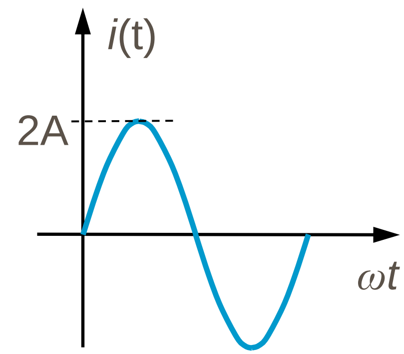
## Conceito de Reactância

- Efeito de uma tensão sinusoidal numa resistência

$$f = 50\,\text{Hz},\ \omega = 2\pi f = 314\,\text{rad/s},\ e = 10\text{sen}(314t)$$




$$i = \frac{e}{R} = \frac{E\text{sen}(\omega t)}{R} \qquad \rightarrow i = \frac{10\text{sen}(\omega t)}{5} = 2\text{sen}(\omega t)$$

➔ A corrente é também sinusoidal, tem a mesma frequência e está **em fase** com a tensão

➔ A resistência opõe-se à passagem de corrente, da mesma forma, em qualquer instante do período.

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- Potência numa resistência

Como a tensão e a corrente estão em fase, a potência dissipada é sempre positiva, o que indica que a resistência está sempre a dissipar energia sob a forma de calor.

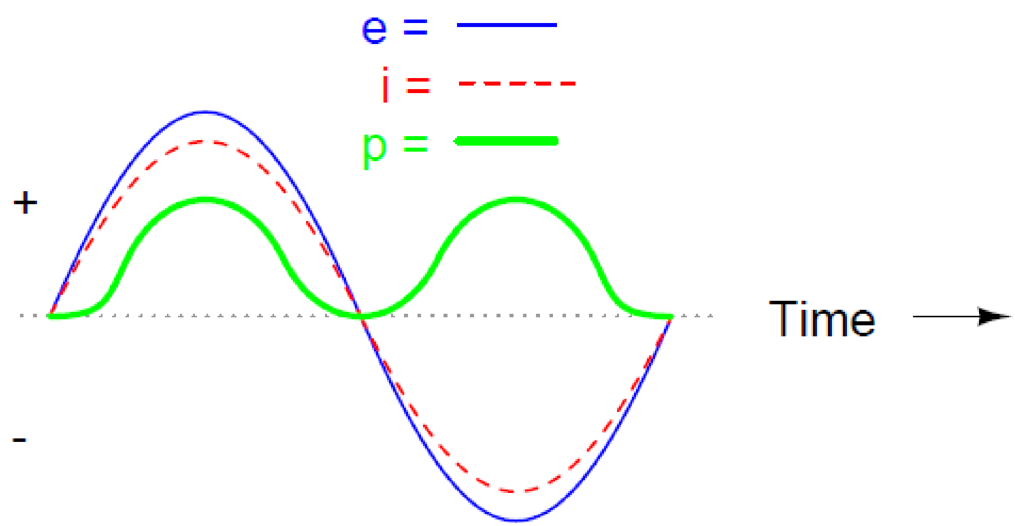



figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceito de Reactância

- Reactância num indutor

- O indutor oferece uma "resistência" proporcional às variações de corrente, e a tensão aos seus terminais é proporcional à taxa de variação de corrente.

- Pela lei de Lenz, sabemos que a tensão induzida aos terminais do indutor tem sempre uma polaridade que procura opor-se à variação da corrente.

- A tensão está em quadratura de avanço relativamente à corrente.

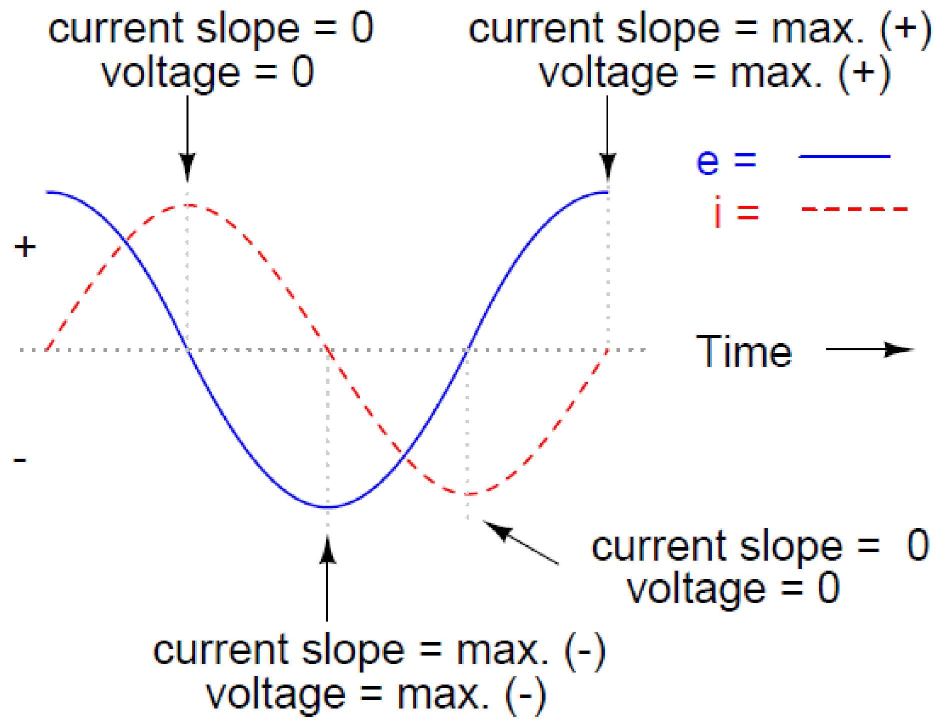


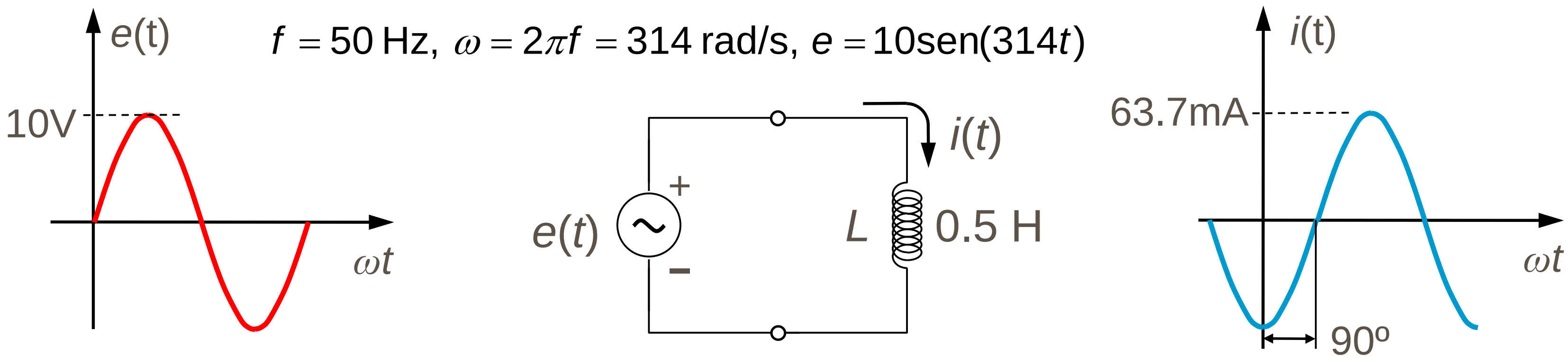

figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceito de Reactância

- Efeito de uma tensão sinusoidal num indutor

$$f = 50\,\text{Hz},\ \omega = 2\pi f = 314\ \text{rad/s},\ e = 10\text{sen}(314t)$$




$$e = L\frac{di}{dt} \rightarrow i = \frac{1}{L}\int e \cdot dt \rightarrow i = -\left(\frac{E\cos(\omega t)}{\omega L}\right) = \left(\frac{E}{\omega L}\right)\text{sen}(\omega t - 90°) = I(\omega)\text{sen}(\omega t - 90°)$$

$$I(\omega) = \frac{E}{X_L},\quad X_L = \omega L \quad \rightarrow \textbf{reactância da bobina}$$

$$X_L = \omega L = 157\ \Omega \qquad \rightarrow i = \frac{E}{X_L}\text{sen}(\omega t - 90º) = 63.7\times 10^{-3}\text{sen}(\omega t - 90º)$$

➔ A corrente é também sinusoidal, tem a mesma frequência e está **atrasada de 90º** relativamente à tensão

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial


- Potência num indutor
  - Agora podemos ter potências negativas.
  - Repare-se no entanto que os semi-ciclos positivo e negativo da curva de potência são iguais e de sinal contrário. Isto significa que a bobine em um período completo, não gasta energia.

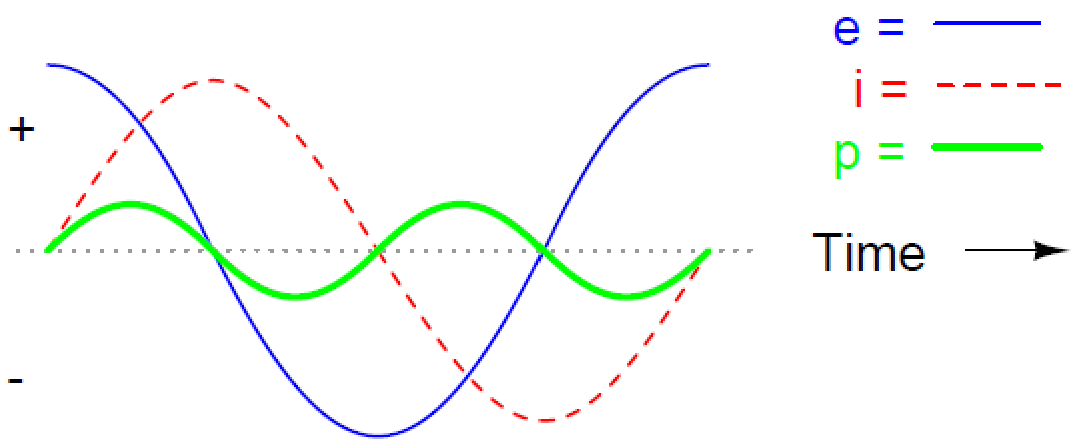



figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

- Quando a potência é positiva a bobine armazena energia (sob a forma de um campo magnético) obtida do circuito
- Quando a potência é negativa a bobine entrega a energia armazenada ao circuito

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Conceito de Reactância

- Reactância num condensador

- Efeito de uma tensão sinusoidal num condensador

- Um condensador reage às variações de tensão absorvendo ou entregando cargas eléctricas ao circuito, quando está a carregar ou descarrega, respetivamente.

- A corrente é proporcional à taxa de variação da tensão aos terminais

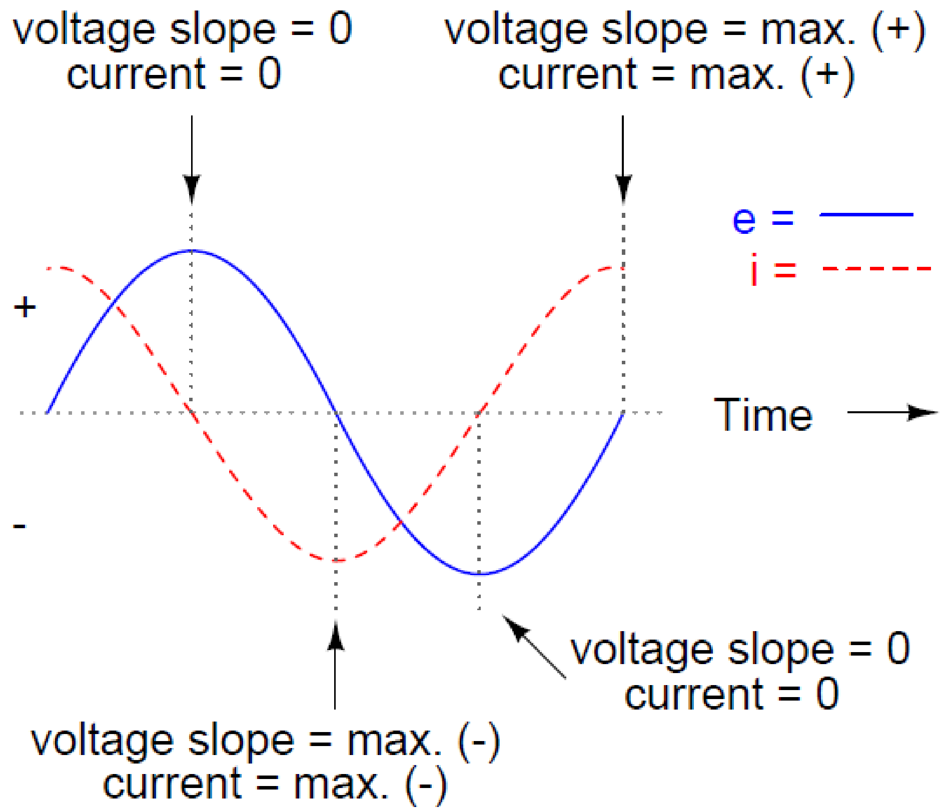



figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

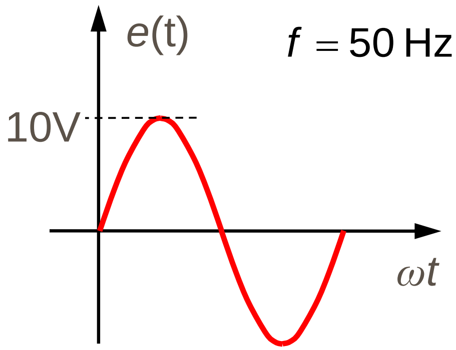
# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

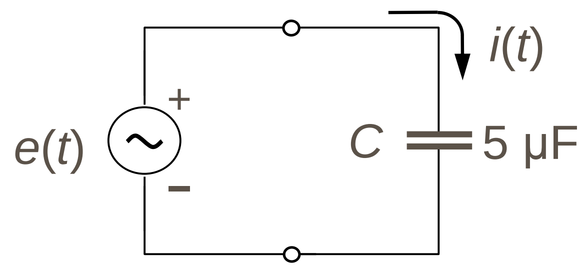
Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

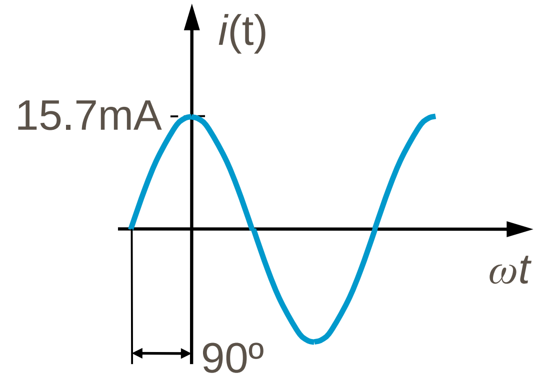
## Conceito de Reactância

- Efeito de uma tensão sinusoidal num condensador

$$f = 50\text{ Hz},\ \omega = 2\pi f = 314\text{ rad/s},\ e = 10\,\text{sen}(314t)$$




$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \rightarrow i = \omega C E\cos(\omega t) = \left(\frac{E}{1/\omega C}\right)\text{sen}(\omega t + 90°) = I(\omega)\text{sen}(\omega t + 90°)$$

$$I(\omega) = \frac{E}{X_C}, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \rightarrow \textbf{reactância do condensador}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 637\ \Omega \qquad \rightarrow i = \frac{E}{X_C}\text{sen}(\omega t + 90^o) = 15.7\times 10^{-3}\text{sen}(\omega t + 90^o)$$

➔ A corrente é também sinusoidal, tem a mesma frequência e está **avançada 90º** relativamente à tensão

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- Potência num condensador
  - À semelhança do que se passa na bobine, temos também potências negativas.
  - Ou seja, o condensador não gasta energia quando reage a uma variação de tensão
  - Ele absorve ou entrega energia ao circuito, alternadamente.

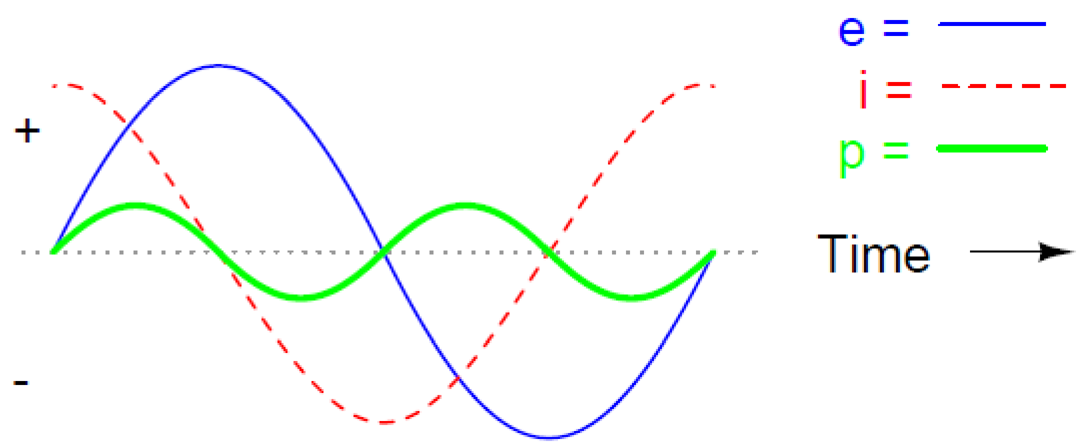



figura retirada de https://www.allaboutcircuits.com/textbook/

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

- Resumindo…

**Na resistência**

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{R}} = \frac{V\lfloor 0^o}{R\lfloor 0^o} = I\lfloor 0^o$$

$$\overline{Z_R} = R \quad \leftrightarrow \quad R\lfloor 0^o$$

**Na bobine**

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L} = \frac{V\lfloor 0^o}{X_L\lfloor 90^o} = I\lfloor -90^o$$

$$\overline{Z_L} = j\omega L \quad \leftrightarrow \quad X_L\lfloor 90^o$$

**No condensador**

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_c} = \frac{V\lfloor 0^o}{X_C\lfloor -90^o} = I\lfloor +90^o$$

$$\overline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \leftrightarrow \quad X_C\lfloor -90^o$$

## Fasores e Números Complexos

- Representação Vectorial dos Componentes Básicos

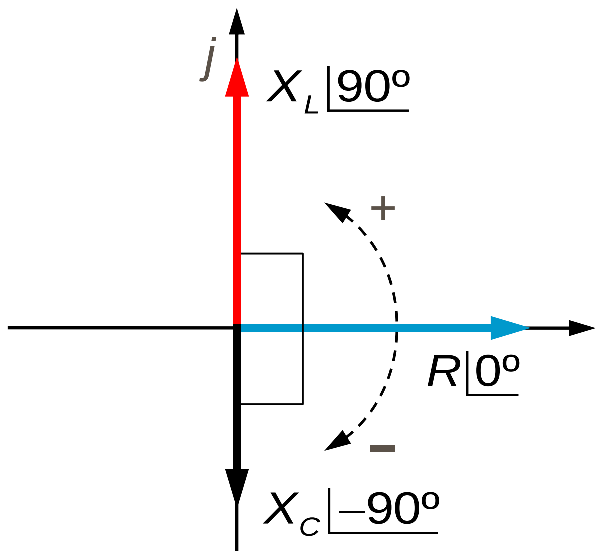



Diagrama de impedâncias

**Impedância da resistência**

$$\overline{Z_R} = R \quad \leftrightarrow \quad R\angle 0^o$$

**Impedância da bobine**

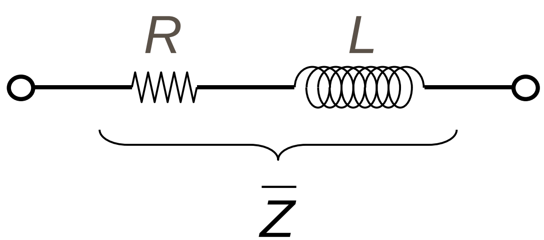
$$\overline{Z_L} = j\omega L \quad \leftrightarrow \quad X_L\angle 90^o$$

**Impedância do condensador**

$$\overline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \leftrightarrow \quad X_C\angle -90^o$$

## Fasores e Números Complexos

- Representação Vectorial dos Componentes Básicos
  - Caso geral (impedância de qualquer combinação de resistências, indutores e condensadores)




$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L = R + j\omega L$$

resistência (parte real)

reactância (parte imaginária)

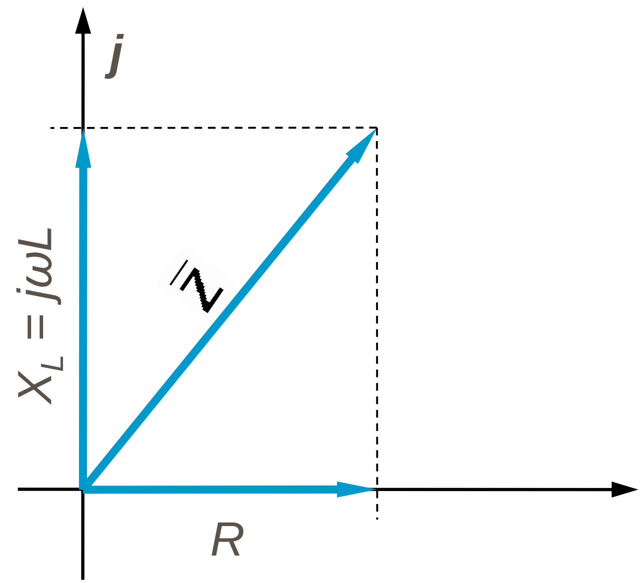



Diagrama de impedâncias da série *R-L*

## Fasores e Números Complexos

- Representação Vectorial de Tensões e Correntes Sinusoidais

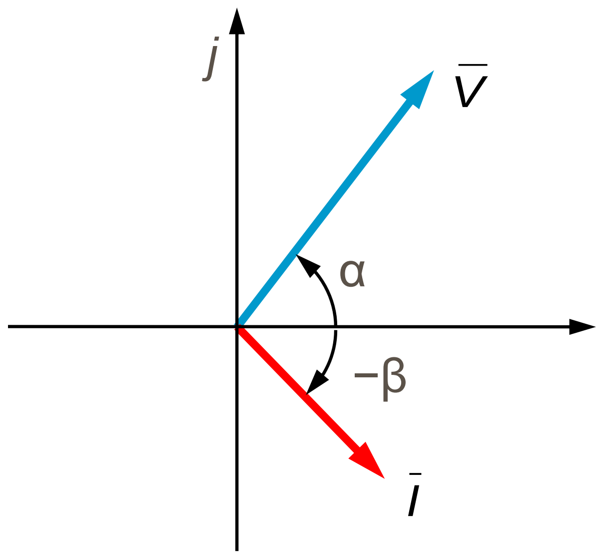



Diagrama de fasores

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad \leftrightarrow \quad \bar{V} = V_{ef} \underline{|+\alpha}$$

$$\left(V_{ef} = V_m / \sqrt{2}\right)$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \beta) \quad \leftrightarrow \quad \bar{I} = I_{ef} \underline{|-\beta}$$

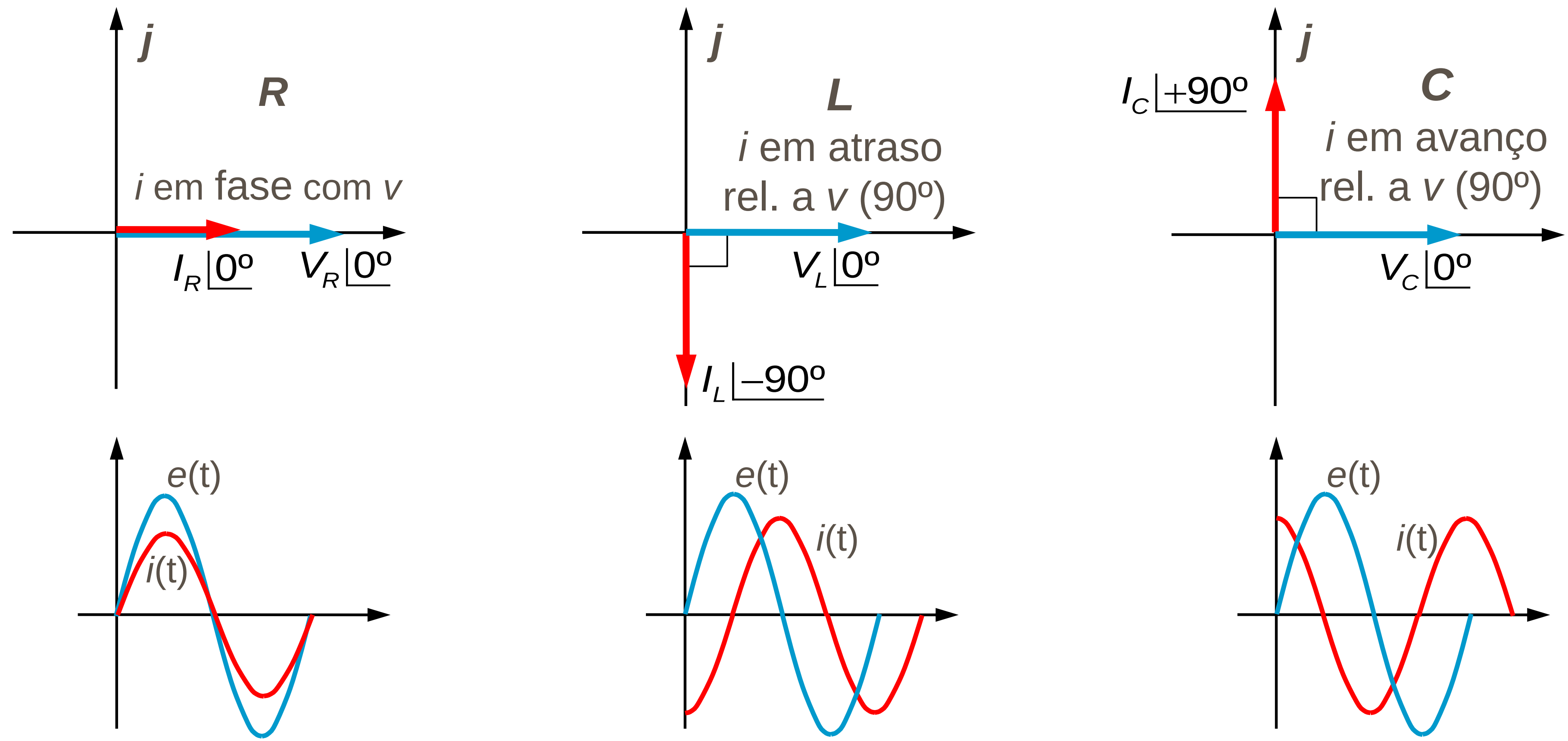
$$\left(I_{ef} = I_m / \sqrt{2}\right)$$

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Fasores e Números Complexos

- Representação Vectorial de Tensões e Correntes Sinusoidais

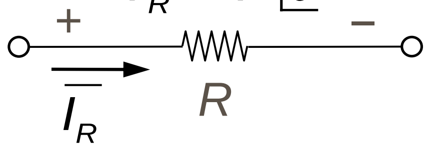


# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

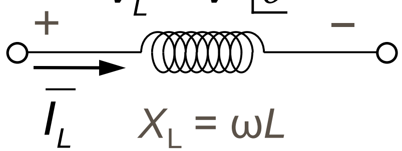
## ■ Análise de Circuitos de Corrente Alternada

$V_R = V\angle\theta$




$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{\bar{R}} = \frac{V\angle\theta}{R\angle 0^\circ} = \frac{V}{R}\angle(\theta - 0^\circ) = \frac{V}{R}\angle\theta$$

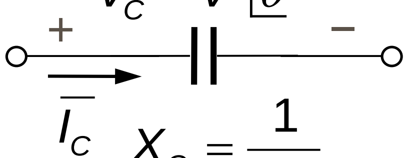
$\bar{V}_L = V\angle\theta$




$X_L = \omega L$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L} = \frac{V\angle\theta}{j\omega L} = \frac{V\angle\theta}{X_L\angle 90^\circ} = \frac{V}{X_L}\angle(\theta - 90^\circ)$$

$\bar{V}_C = V\angle\theta$



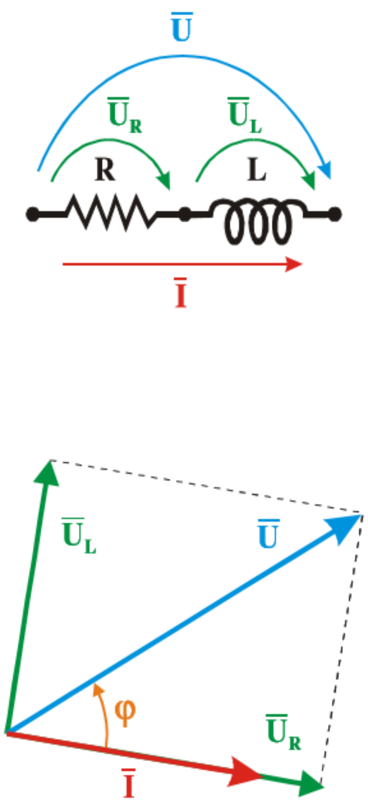

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} = \frac{\bar{V}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{V\angle\theta}{X_C\angle(-90^\circ)} = \frac{V}{X_C}\angle(\theta + 90^\circ)$$

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Associação RL em série e em paralelo



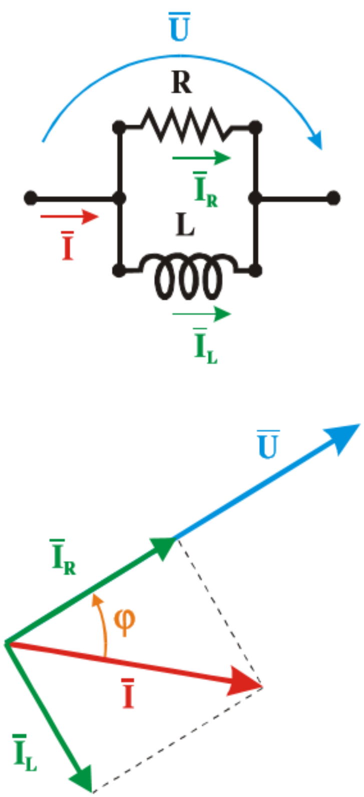



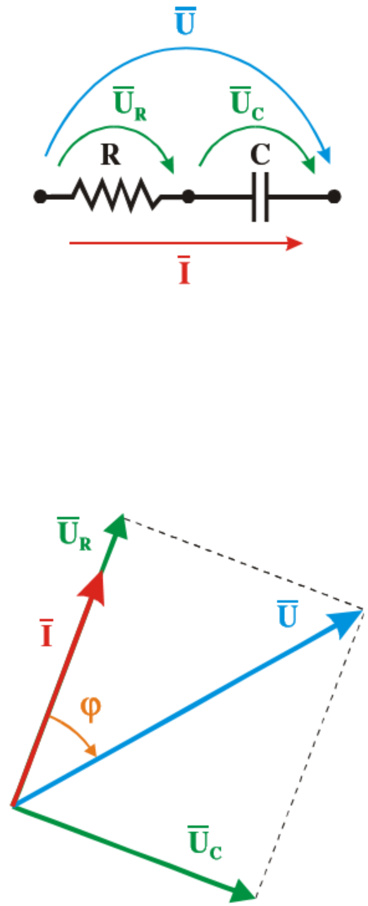

Figura de João Sena Esteves, (DEI)

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## ■ Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Associação RC em série e em paralelo



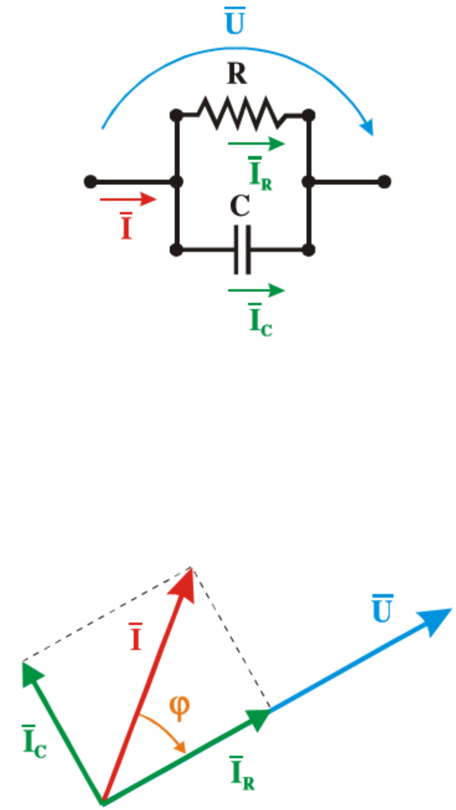
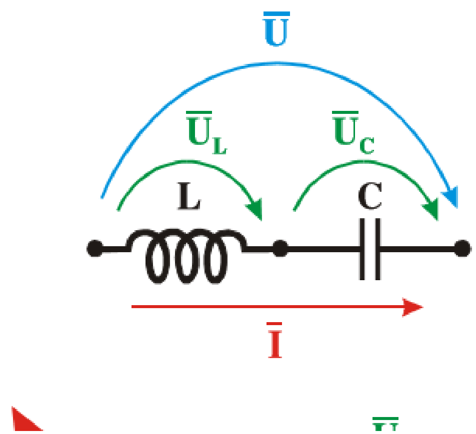
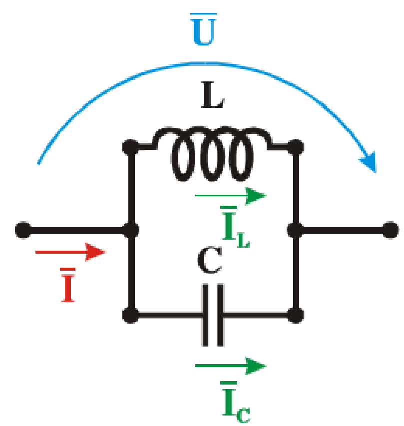




Figura de João Sena Esteves, (DEI)

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Associação LC em série e em paralelo




Ressonância Série (de tensões)
Z atinge o seu valor mínimo (neste caso, zero)
$U_L$ e $U_C$ anulam-se
Corrente atinge o seu valor máximo

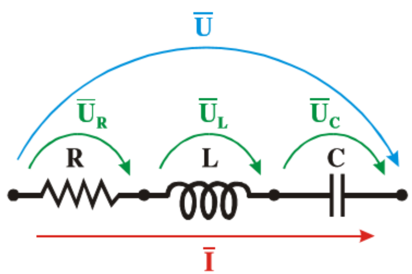
Ressonância Paralelo (de correntes)
$I_L$ e $I_C$ anulam-se
Z atinge o seu valor máximo (neste caso, $\infty$)
Corrente atinge o seu valor mínimo

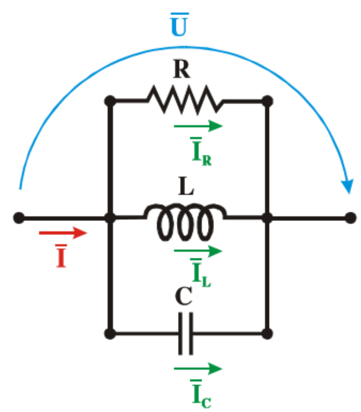
Figura de João Sena Esteves, (DEI)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Associação RLC em série e em paralelo




Ressonância Série (de tensões)
$U_L$ e $U_C$ anulam-se
Z atinge o seu valor mínimo (neste caso, R)
Corrente atinge o seu valor máximo

Ressonância Paralelo (de correntes)
$I_L$ e Ic anulam-se
Z atinge o seu valor máximo (neste caso, R)
Corrente atinge o seu valor mínimo

Figura de João Sena Esteves, (DEI)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Aplicações práticas do fenómeno de ressonância

- Sintonização de estações de rádio
- Detetores de Metal

Manifestações práticas do fenómeno de ressonância

- Pneus descalibrados numa viatura
- Partir copos de vidro expostos a um som com uma determinada frequência
- Colapso da ponte Tacoma
  - Lec 03: Damped Forced Oscillations, Destructive Resonance | 8.03 Vibrations and Waves (Walter Lewin) @ 01:01:42 (YOUTUBE)

Figura de João Sena Esteves, (DEI)

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

Tipos de recetores monofásicos

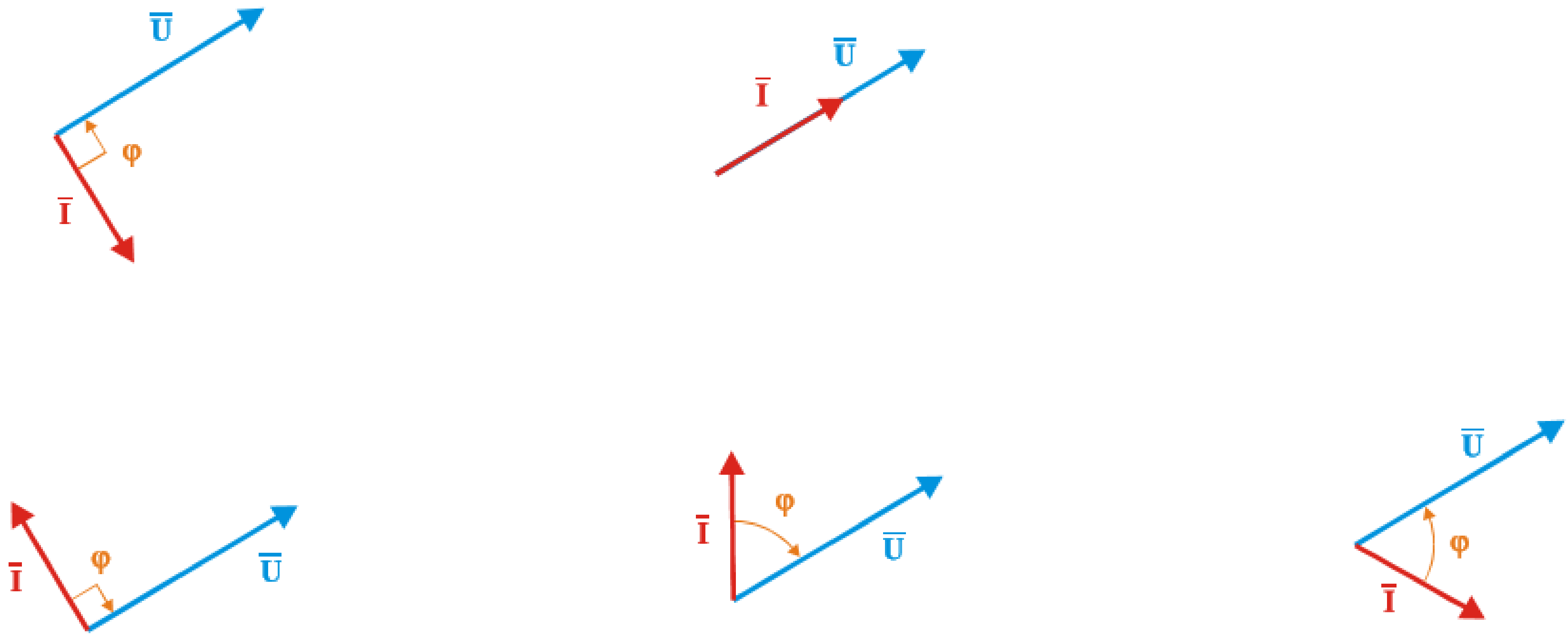



Figura de João Sena Esteves, (DEI)

# Circuitos de Corrente Alternada (CA)

Universidade do Minho
Dep. de Electrónica Industrial

## Análise de Circuitos de Corrente Alternada

**Leis de Kirchhoff** em circuitos com correntes e tensões puramente alternadas sinusoidais, com a mesma frequência

Lei das Correntes
A **soma fasorial** das correntes que convergem para um ponto
é igual à **soma fasorial** das correntes que divergem desse ponto

Lei das Tensões
A **soma fasorial** de todas as tensões considerados
num mesmo sentido ao longo de um percurso fechado é nula

Figura de João Sena Esteves, (DEI)