8. Dinâmica Elementar do corpo rígido.

Um corpo rígido é um sistema de partículas com distâncias relativas fixas.

$$\forall_{i,j} \quad |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$$

Consideremos um sistema de partículas num referencial inercial. Como vimos:

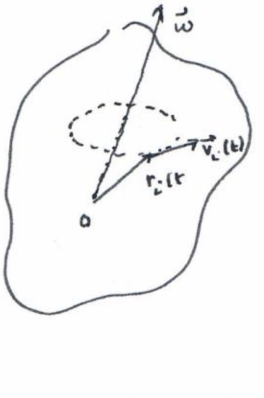
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

($\vec{L} \equiv$ momento angular total a respeito de um ponto O

$\vec{M} \equiv$ momento total das forças relativamente[1] ao mesmo ponto.]

8.1 - Movimento com um ponto fixo:

Consideremos um corpo rígido que se move de tal maneira que exista um <u>ponto fixo O</u>; adoptemos este ponto como



origem do sistema referencial. Seja $\vec{\omega}$ a velocidade angular instantânea de rotação do corpo. A velocidade instantânea da partícula i é:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i(t)$$

---

[1] forças externas; as forças de interacção não produzem qualquer $\vec{M}$

A contribuição desta partícula (de massa m_i) para o momento angular a respeito de O é:

$$\vec{r}_i(t) \times m_i \dot{\vec{r}}_i(t) = (\vec{r}_i \times \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i) m_i$$

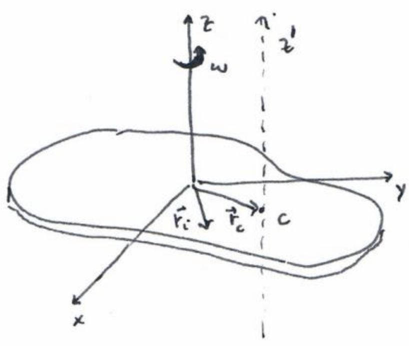
Somando sobre todas as partículas obtemos o momento angular total:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

A energia cinética do corpo neste instante é:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Consideremos alguns casos particulares simples:



i) folha plana em rotação a respeito de um eixo perpendicular fixo

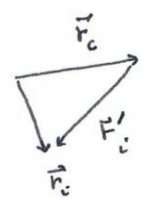
$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Definimos:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

Então $E_c = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ (I_z depende apenas da distribuição de massa da folha. ≡ Momento de inércia)

Teorema de Steiner



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$$

($\vec{r}_c$ = posição do centro de massa da fatia)

($\vec{r}'_i$ = posição da partícula a respeito do C.M)

Vejamos I_z :

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_c + \vec{r}'_i) \cdot (\vec{r}_c + \vec{r}'_i)$$

$$= \sum_i m_i (r_c^2 + 2 \vec{r}_c \cdot \vec{r}'_i + \vec{r}_i'^2)$$

$$= M r_c^2 + 2 \vec{r}_c \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i}_{0} + \underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{I_{cz}}$$

$$= M r_c^2 + I_{cz}$$

(Momento de inércia a respeito de um eixo // que passa pelo C.M).

$$\boxed{I = M r_c^2 + I_{cz}}$$

(teorema dos eixos paralelos)

Então :

$$E_c = \frac{1}{2} M r_c^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2$$

A energia cinética de uma fatia em rotação em torno de um eixo $\perp$, pode ser decomposta na energia de rotação em torno do CM + a energia cinética de translação do CM a respeito do eixo de rotação.

Claro que, como $\vec{\omega} \perp \vec{r}_i$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C})$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i \vec{r}_i \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{= 0}$$

$$= I_z \omega \hat{z}$$

Vejamos agora:

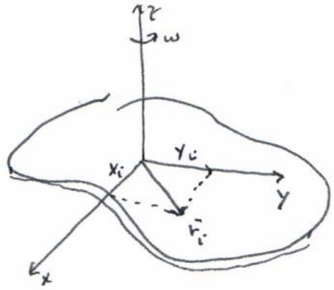
$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i' \quad ; \quad I_z = I_{cz} + M r_c^2$$

Então:

$$\vec{L} = I_{cz} \omega \hat{z} + M r_c^2 \omega \hat{z}$$

(O momento angular a respeito de $\underline{O}$ é igual ao momento angular a respeito do CM, mais o momento angular resultante da translação do CM a respeito de O.)

<u>Teorema dos eixos perpendiculares</u>: (algo trivial para a física):



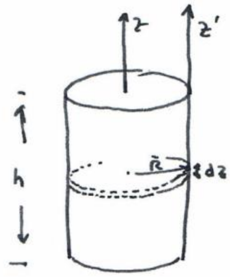
$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

$$I_x + I_y = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z$$

Exemplos: (distribuições contínuas de massa)

i) Cilindro oco (cascão cilíndrico) ($\rho \equiv$ dist. sup. de massa)

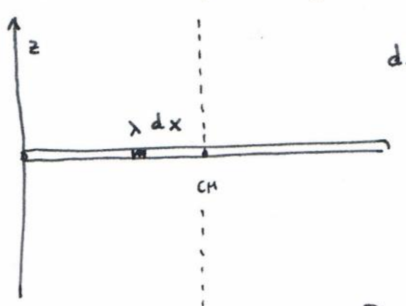


$$dI_z = \underbrace{2\pi R\, dz \cdot \rho}_{dm} \cdot R^2$$

$$I_z = 2\pi R^3 h \rho = (2\pi R h \rho)\, R^2 = M R^2$$

(Steiner): $I_{z'} = I_z + MR^2 = 2MR^2$

ii) Agulha uniforme ($\lambda \equiv$ distribuição linear de massa)



$$dI_z = \lambda\, x^2\, dx$$

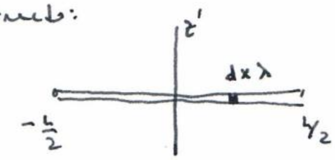
$$I_z = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2$$

$$I_c = I - M r_c^2 \qquad \text{(Steiner)}$$

$$= \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) M L^2 =$$

$$= \frac{1}{12} M L^2 .$$

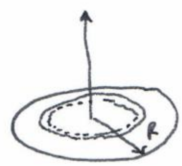
Evidentemente, este resultado pode ser obtido por integração directa:



$$dI_c = \lambda\, dx \cdot x^2$$

$$I_c = \lambda \qquad \frac{1}{3}\; 2\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} M L^2$$

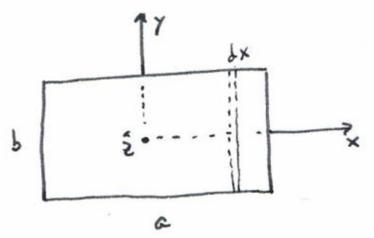
iii) Disco circular:



$$dI_z = \underbrace{2\pi r\, dr \cdot \sigma}_{dm} \cdot r^2$$

$$I_z = \int_0^R \sigma\, 2\pi\, r^3\, dr = \frac{1}{4} R^4 \cdot \sigma \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M R^2$$

iv) Fatia rectangular $I_z = ?$ (Teorema eixos $\perp$):



$$dI_y = \sigma\, b\, dx\, x^2$$

$$I_y = b\sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} x^2\, dx = \frac{1}{3} b\sigma \frac{a^3}{8} \cdot 2$$

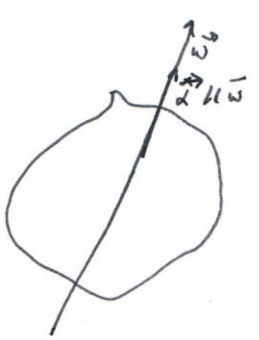
$$= \frac{1}{12} M a^2$$

Analogamente $I_x = \frac{1}{12} M b^2$

Logo: $I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

TPC: obtenha este resultado por integração directa.

8.2 - Movimento de Rotação em torno de um eixo fixo ($\vec{\alpha}$)



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dL_\alpha}{dt} = M_\alpha$$

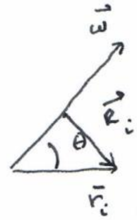
↳ Momento das forças exteriores a respeito do eixo de rotação.

$$L_\alpha = \vec{L} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left[\sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] \cdot \vec{\omega}$$

$$L_\alpha = \frac{1}{\omega} \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\, \vec{r}_i \right] \cdot \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i \left[r_i^2 \omega^2 - r_i^2 \omega^2 \cos^2\theta \right]$$



$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i\, r_i^2 \omega^2 (1 - \cos^2\theta) = \frac{1}{\omega} \sum_i m_i\, r_i^2 \omega^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i \left| \vec{r}_i \times \vec{\omega} \right|^2$$

$$L_\alpha = \sum_i m_i\, R_i^2\, \omega = I_\alpha\, \omega$$

Quanto à componente axial do momento das forças, podemos proceder de forma análoga:

$$M_\alpha = \vec{M} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$ (componente do momento ao longo do eixo de rotação).

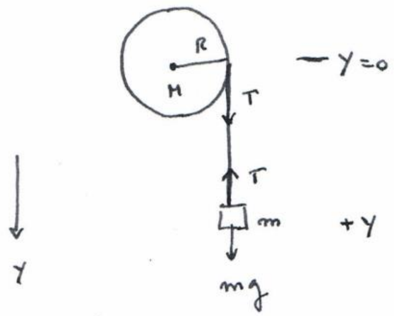
$$\frac{d L_\alpha}{dt} = I_\alpha \frac{d\omega}{dt} = M_\alpha$$

Como a energia cinética é (página 2):

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i\, (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i\, \omega^2 r_i^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} I_\alpha \omega^2$$

Exemplos Roldana cilíndrica $I = \frac{1}{2} M R^2$



$$\begin{cases} \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = TR \\ -T + mg = m\,a \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T = m(g-a)$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \frac{d\omega}{dt} = m(g-a)R$$

Mas $a = R\frac{d\omega}{dt} \longrightarrow \frac{d\omega}{dt}\frac{1}{2}MR^2 = m\left(g - R\frac{d\omega}{dt}\right)R$

$v = R\omega$

$$\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{1}{2}MR^{\cancel{2}} + mR^{\cancel{2}}\right) = mg\cancel{R}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{\frac{M}{2}+m}\,\frac{g}{R}$$

Nota:

Evidentemente, a energia é conservada. Isso permite-nos abordar o problema de outra maneira:

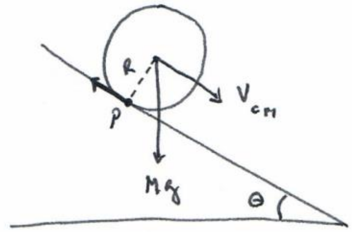
$$\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y + \frac{1}{2} I \omega^2 = \text{const.}$$

$$m\dot{y}\ddot{y} - mg\dot{y} + I\omega\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$m \cancel{\dot y} R^{\cancel{2}}\dot{\omega} - mgR\cancel{\omega} + \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}} \cancel{\omega}\dot{\omega} = 0$$

$$\dot{\omega}\left(mR + \frac{1}{2}MR\right) = mg \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{m}{m+\frac{1}{2}M}\,\frac{g}{R} \quad \square$$

<u>Rolamento sem deslizamento</u>



O objecto rola sem deslizar num plano inclinado. Vamos supor que se trata de um cilindro homogeneo

$$I_c = \frac{1}{2} M R^2$$

O ponto de contacto P corresponde a um centro instantaneo de rotação do objecto. O momento de inércia relativamente ao eixo que passa pelo ponto P (// ao do cm) – – que é o eixo instantaneo de rotação – é (Teorema de Steiner):

$$I_P = I_c + M R^2$$

A velocidade instantanea de rotação é $\omega = v_{cm}/R$

$$L_P = (I_c + MR^2) \frac{v}{R}$$

$$M_p = R M g \sin\theta$$

Logo

$$(I_c + MR^2) \frac{a}{R} = R M g \sin\theta$$

$$a = \frac{R^2 M g \sin\theta}{I_c + MR^2}$$ (aceleração do cm

$$I_c = \frac{1}{2} MR^2 \longrightarrow a = \frac{\cancel{R^2}\cancel{M} g \sin\theta}{\frac{3}{2}\cancel{M}\cancel{R^2}} = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

Observação: se fizessem uma corrida entre uma esfera e um cilindro quem ganhava? (com o mesmo raio)

$I_{esf} = \frac{2}{5} M R^2$ $\qquad$ $I_{cil.} = \frac{1}{2} M R^2$

$a_{esf} = \underbrace{\frac{5}{7}}_{0{,}714} g \sin\theta$ $\qquad$ $a_{cil.} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{0{,}666} g \sin\theta$

$$a_{esf} > a_{cil.}$$

Partindo ambos do repouso t_{esf} : $\Delta l = \cancel{\frac{1}{2}} a_{esf} t^{*2}_{esf} = \cancel{\frac{1}{2}} a_c t^{*2}_{cil.}$

(a esfera ganha). $\qquad$ $\dfrac{a_{esf}}{a_{cil}} = \sqrt{\dfrac{t_{cil}}{t_{esf}}}$