ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA EC

Exercícios - Transformações Lineares

2020/2021

1. Diga quais das seguintes funções são aplicações lineares entre espaços vetoriais reais:

   (a) $\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, 0, z) \end{array}$;

   (b) $\begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, 1, z) \end{array}$;

   (c) $\begin{array}{rccl} f_3: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x, y+z, z+2) \end{array}$;

   (d) $\begin{array}{rccl} f_4: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (\frac{1}{x^2+1}, 0, y) \end{array}$;

   (e) $\begin{array}{rccl} f_5: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & (x',y') \end{array}$ em que $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

2. Sendo $\mathcal{B}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$, considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $f(-1, 0, 1)$.

   (b) Calcule a expressão geral de um vetor da imagem de f.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ x_2,\ x_3 + x_4)$$

   (a) Verifique que f é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcule a matriz de f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Calcule $f(\mathbb{R}^4)$.

   (d) Seja $\mathcal{W} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b = d - 2b = 0\}$. Calcule $f(\mathcal{W})$.

   (e) Calcule $f^{-1}(\{(0, 0, 0)\})$.

4. Em $\mathbb{R}^3$, considere a transformação linear reflexão em relação ao plano $x = 0$.
   (a) Calcule o resultado da reflexão dos vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
   (b) Escreva a matriz da reflexão relativamente à base canónica.
   (c) Calcule a expressão da imagem de um vetor (x, y, z).

5. Em $\mathbb{R}^3$, considere a a transformação linear rotação de $\pi/2$ no sentido direto em torno do eixo x.
   (a) Calcule o resultado da rotação dos vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
   (b) Escreva a matriz da rotação relativamente à base canónica.
   (c) Calcule a imagem de $(3, -5, 0)$ e de $(-2, 0, 5)$.

6. Considere as bases

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 1)) \text{ de } \mathbb{R}^3,$$
$$\mathcal{B}' = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 2)) \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

   Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $f(x, y, z) = (2x, x + z, y + z, -z)$.
   (a) Calcule $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_4)$, onde $\mathcal{B}_4$ é a base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calcule $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}')$, onde $\mathcal{B}_3$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Calcule $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
   (d) Calcule a imagem do vetor $(2, 3, -2)$ por f usando a matriz que calculou na alínea: (i) (a); (ii) (b); (iii) (c).

7. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação tal que

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 2),\ \varphi(0, -1, 1) = (0, 2),\ \varphi(2, -2, 2) = (2, 8).$$

   (a) Verifique se existem aplicações lineares nas condições acima. Em caso afirmativo identifique uma.
   (b) Calcule a imagem de $(2, -3, 3)$ pela aplicação determinada na alínea anterior.

8. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$\varphi(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1),\ \varphi(0, -1, 0, 1) = (1, 0, 2),\ \varphi(1, -3, 1, 0) = (2, 1, 3).$$

   (a) Com base na informação fornecida é possível determinar a imagem de $(2, 1, -3, 3)$?
   (b) Dê um exemplo de uma aplicação linear nas condições acima.