valores e vetores próprios

Nota 13.1. Ao longo desta aula, $\mathbb{K}$ representa $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Como já fizemos anteriormente, identificamos uma matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ com o vetor $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Exemplo 13.2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 2$.

Então,

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda x.$$

Definição 13.3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Se um vetor **não nulo** $x \in \mathbb{K}^n$ e um número real ou complexo λ são tais que

$$Ax = \lambda x,$$

então diz-se que x é **vetor próprio de A associado ao valor próprio λ**.

Observação 13.4.

1. Um vetor próprio de A está associado a um único valor próprio de A. De facto, se $x \neq 0$ e

   $$Ax = \lambda x \quad \text{e} \quad Ax = \mu x \quad \text{então} \quad \lambda x = \mu x \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\, x = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

2. A cada valor próprio de A está associada uma infinidade de vetores próprios de A. De facto, se $x \neq 0$ e α é um número real ou complexo não nulo, então,

   $$Ax = \lambda x \quad \text{e} \quad y = \alpha x \Rightarrow Ay = A(\alpha x) = \alpha (Ax) = \alpha (\lambda x) = \lambda (\alpha x) = \lambda y,$$

   pelo que $y \neq 0$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

valores próprios

Teorema 13.5. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Então, $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } A \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in \mathbb{K}^n) \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad Ax = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists x \in \mathbb{K}^n) \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda I_n)\, x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{o sistema } (A - \lambda I_n)\, x = 0 \text{ tem pelo menos duas soluções} \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\, x = 0 \text{ é um sistema possível indeterminado} \\
&\Leftrightarrow \quad A - \lambda I_n \text{ é não invertível} \\
&\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo 13.6.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) = 0 \quad &\iff \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \quad -(\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0 \\ &\iff \quad \lambda = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4, \end{aligned}$$

   temos que $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$ são os valores próprios de A.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

   pelo que A não admite valores próprios reais.

Definição 13.7. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se **equação característica de A** à equação

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Chama-se **polinómio característico de A** ao polinómio em λ

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Observação 13.8. Se A é uma matriz de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), o polinómio característico é de ordem n. Os valores próprios são os zeros do polinómio característico, pelo que se A é uma matriz real, p_A tem **no máximo** n raízes e, se A é uma matriz complexa, p_A tem **exactamente** n raízes.

Definição 13.9. Sejam $n \in \mathbb{N}$, A uma matriz de ordem n e λ um valor próprio de A. Se λ ocorre k vezes como raíz do polinómio característico, diz-se que λ é um valor próprio de **multiplicidade algébrica** k. No caso particular de $k = 1$, diz-se que λ é um **valor próprio simples**.

Exemplo 13.10. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$. Então, $\lambda = -2$ é um valor próprio de multiplicidade algébrica 2 e $\lambda = 4$ é um valor próprio simples.

vetores próprios

Dado um valor próprio λ de uma matriz quadrada A de ordem n, determinar os vetores próprios de A associados a λ corresponde a resolver o sistema possível indeterminado

$$(A - \lambda I_n)\, x = 0 \quad \text{e} \quad x \neq 0.$$

Exemplo 13.11. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$. Para determinar os vetores próprios associados a $\lambda = -2$ resolvemos o sistema

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 & -1 \\ -7 & 5-(-2) & -1 \\ -6 & 6 & -2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 6L_1]{L_2 \to L_2 - 7L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que $x_3 = 0$ e $x_1 = x_2$, com $x_2 \neq 0$.

Logo, $x = (x_2, x_2, 0)$, com $x_2 \neq 0$, é vetor próprio de A associado a $\lambda = -2$.