Definição 7.1. Uma equação linear em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é uma equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Definição 7.2. Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares que são resolvidas simultaneamente

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Exemplo 7.3. O sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

é um sistema de 3 equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3.

O sistema da definição anterior pode ser representado na forma $Ax = b$, onde A, x e b são as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Definição 7.4. Na representação matricial $Ax = b$ de um sistema de equações lineares chamamos matriz (simples) do sistema à matriz A, coluna das incógnitas à matriz x, coluna dos termos independentes à matriz b e matriz aumentada do sistema à matriz $[A|b]$ obtida juntando a coluna b à matriz A, separando esta com um traço vertical.

Exemplo 7.5. O sistema do último exemplo, $\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1+3x_2-5x_3 & = & 1 \\ x_1+4x_3 & = & 0 \\ -x_1+x_2+3x_3 & = & -1 \end{array}\right.$, pode ser representado na forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.6. Podemos representar matricialmente o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 = 5 \end{cases}$$

por $Ax = b$, onde a matriz simples é $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, a coluna das incógnitas é $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e a coluna dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

A matriz aumentada do sistema é $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$.

Definição 7.7. Uma solução de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de escalares tais que as substituições $x_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, transformam as equações do sistema em igualdades verdadeiras.

Exemplo 7.8. Consideremos o sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

$(0, 2, -3, 2)$ é solução deste sistema: substituindo nas equações as incógnitas pelos valores correspondentes, obtemos:

$$\begin{cases} 2 \times 0 + 2 + (-3) + 2 = 1 \\ 4 \times 0 + 2 \times 2 + 3 \times (-3) + 4 \times 2 = 3 \\ -6 \times 0 - 3 \times 2 - (-3) + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

Já $(1,1,1,1)$ não é solução do sistema, uma vez que, susbtituindo na primeira equação do sistema cada um das incógnitas por 1, obtemos

$$2 \times 1 + 1 + 1 + 1 = 1,$$

o que é uma falsidade.

Uma sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de escalares será solução de um sistema de equações lineares em n incógnitas $Ax = b$ se multiplicando a matriz A pela matriz coluna cujo elemento na linha i é α_i $(i = 1, \ldots, n)$ se obtém b.

Exemplo 7.9. Consideremos o sistema do exemplo anterior. A sua representação matricial $Ax = b$ é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Note-se que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Isto significa que $(0, 2, -3, 2)$ é solução do sistema.

Note-se ainda que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ -9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Isto significa que $(1, 1, 1, 1)$ não é solução do sistema.

Definição 7.10. Resolver um sistema de equações lineares consiste em determinar todas as suas soluções ou mostrar que não existe nenhuma.

Definição 7.11. Um sistema de equações diz-se:

possível determinado se tiver exatamente uma solução;
possível indeterminado se tiver mais que uma solução;
impossível se não tiver nenhuma solução.

Definição 7.12. Dois sistemas de equações lineares dizem-se sistemas equivalentes se têm exatamente as mesmas soluções.

Descreveremos, de seguida, com exemplos, como poderemos traduzir matricialmente o método da adição ordenada para a resolução de sistemas.

Exemplo 7.13. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 \\ 6x + y = -10 \\ -x + 2y - 10z = -4 \end{cases}$$

e o método da adição ordenada para a sua resolução. Este método pode ser traduzido matricialmente pela condensação da matriz aumentada do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{4}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 \\ -2y - 12z = -16 \\ -23z = -23 \end{cases}$$

representado pela matriz em forma de escada obtida, é equivalente ao sistema dado.

Usando a substituição de baixo para cima, obtemos $z = 1$, $y = 2$ e $x = -2$.

Portanto, o conjunto das soluções do sistema dado é $C.S. = \{(-2, 2, 1)\}$.

Observação 7.14. Neste primeiro exemplo temos que $r(A) = r([A|b]) = 3$, sendo 3 o número de incógnitas. O sistema é possível determinado.

Exemplo 7.15. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}.$$

A condensação da matriz aumentada seria descrita da seguinte forma:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Obtemos, assim, o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = 3 \\ 3z = 6 \end{cases} .$$

equivalente ao sistema dado.

Usando a substituição de baixo para cima, obtemos $z = 2$, $y = 1$ e $x = 1$.

Logo, o conjunto de soluções do sistema é $C.S. = \{(1, 1, 2)\}$.

Observação 7.16. No exemplo 7.15 temos que $r(A) = r([A|b]) = 3$, sendo 3 o número de incógnitas. O sistema é possível determinado.

Exemplo 7.17. Consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z + w = 1 \\ 4x + 2y + 3z + 4w = 3 \\ -6x - 3y - z + w = \alpha \end{array}\right.$$

A condensação da matriz aumentada seria descrita da seguinte forma:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -1 & 1 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \alpha + 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \end{array}\right]$$

Obtemos, assim, o sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ z + 2w = 1 \\ 0 = \alpha + 1 \end{cases}$$

Claramente, o sistema é impossível se $\alpha \neq -1$.

Estudemos, então, o caso em que $\alpha = -1$:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ z + 2w = 1 \\ 0 = -1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ z + 2w = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Note-se que a matriz em forma de escada obtida no caso em que $\alpha = -1$ é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

As colunas que contêm pivôs são a 1^a, correspondente à incógnita x, e a 3^a, correspondente à incógnita z. Dizemos que estas são as incógnitas básicas e que as restantes são as incógnitas livres. Escrevemos as incógnitas x e z em função das restantes variáveis (que podem variar livremente em $\mathbb{R}$):

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z + w = 1 \\ z + 2w = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 1 - y - (1 - 2w) - w \\ z = 1 - 2w \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{-y+w}{2} \\ z = 1 - 2w \end{array}\right.$$

O conjunto das soluções do sistema dado é

$$C.S. = \left\{ \left(\frac{-\lambda + \delta}{2}, \lambda, 1 - 2\delta, \delta \right) \; : \; \lambda, \delta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observação 7.18. No exemplo 7.17., para $\alpha \neq -1$, $r(A) = 2 \neq 3 = r([A|b])$. Nesse caso, como vimos, o sistema é impossível. Para $\alpha = -1$, $r(A) = r([A|b]) = 2 < 4$, sendo 4 o número de incógnitas. Neste caso, o sistema é possível indeterminado.

Exemplo 7.19. Consideremos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A condensação da matriz aumentada pode ser obtida do seguinte modo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{3}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema equivalente ao dado

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Os pivôs estão na 1^a, na 3^a e na 4^a colunas, que correspondem às incógnitas x_1, x_3 e x_4. Escrevamos estas em função das restantes variáveis, x_2 e x_5:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 - 7x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_2 + (1 - 8x_5) - 2(1 - x_5) - x_5 \\ x_3 = 1 - 8x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 1 - 8x_5 \\ x_4 = 1 - x_5 \end{cases}$$

O conjunto de soluções é $\{(-3x_2 - 7x_5, x_2, 1 - 8x_5, 1 - x_5, x_5) \;:\; x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

Observação 7.20. No exemplo 7.19., $r(A) = r([A|b]) = 3 < 5$, sendo 5 o número de incógnitas. Neste caso, o sistema é possível indeterminado.

Algoritmo de Eliminação de Gauss para a resolução de $Ax = b$ com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

`Passo 1.` Determinação de uma matriz em forma de escada $[U|c]$ por condensação da matriz aumentada $[A|b]$. Seja $r(A) = t$ e $r([A|b]) = s$.

`Passo 2.` Se $t \neq s$, o sistema é impossível e o conjunto de soluções de $Ax = b$ é $\{\}$. Se $t = s$, o sistema é possível. No sistema $Ux = c$, equivalente ao inicial, separam-se as incógnitas em básicas [correspondentes às colunas com pivôs, em número de t] e livres [correspondentes às colunas sem pivôs, em número de $n - t$]. Se não houver incógnitas livres [ou seja, se $n = t$], o sistema é determinado. Se houver, é indeterminado.

`Passo 3.` Se o sistema for possível, resolve-se $Ux = c$ de baixo para cima, usando o método da substituição. Se existirem incógnitas livres, escrevemos as incógnitas básicas em função das incógnitas livres, determinando, desta forma, o conjunto de soluções de $Ax = b$.

Observação 7.21. Dado um sistema de m equações lineares $Ax = b$ a n incógnitas, a aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema, $[A|b]$, permite-nos determinar a característica dessa matriz mas também a característica da matriz simples do sistema, A.

De facto, basta contar o número de pivôs para obter $r([A|b])$ e contar o número de pivôs esquecendo a última coluna para obter $r(A)$. Note-se que

$$r(A) \leq r([A|b])$$

Claramente, $r(A) < r([A|b])$ se e só se existe alguma linha em que os coeficientes são todos nulos e o termo independente é não nulo [o pivô dessa linha seria, então, o termo independente], ou seja,

$$r(A) < r([A|b]) \Leftrightarrow Ax = b \text{ é um sistema impossível}$$

Assim,

$$Ax = b \text{ é um sistema possível } \Leftrightarrow r(A) = r([A|b])$$

Um sistema possível é determinado se e somente se não existem variáveis livres, ou seja, se o número de pivôs é exactamente igual ao número de incógnitas [o que faz com que todas sejam básicas]. Podemos, então, concluir que, existindo n incógnitas,

$$Ax = b \text{ é um sistema possível determinado } \Leftrightarrow r(A) = r([A|b]) = n$$

e

$$Ax = b \text{ é um sistema possível indeterminado } \Leftrightarrow r(A) = r([A\ b]) < n$$

Notação 7.22. Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde A é uma matriz de ordem n invertível, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e b é do tipo $n \times 1$, denote-se por $A^{(i)}$ a matriz obtida de A substituindo a coluna i de A pela coluna b.

Teorema 7.23. [Regra de Cramer] Nas condições do parágrafo anterior, a única solução de $Ax = b$ é dada por

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}.$$

Exemplo 7.24. Apliquemos a Regra de Cramer na resolução do sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível, e portanto $Ax = b$ é um sistema possível com uma única solução. Comecemos por definir as matrizes $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

exemplo

De seguida, aplicamos a regra de Cramer para determinar a solução do sistema.

Temos que $\det A = -3$, $\det A^{(1)} = -4$, $\det A^{(2)} = 1$ e $\det A^{(3)} = 3$.

Assim, obtemos:

$$x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = -1.$$

Os valores obtidos formam, de facto, a solução pretendida, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de soluções do sistema dado é $\{(4/3, -1/3, -1)\}$.