Universidade do Minho

Álgebra Linear e Geometria Analítica EC

Exercícios 6 - Aplicações Lineares

1. Verifique se as seguintes aplicações são lineares:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x, y + z)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x, y + 3z, x + z)$
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, 1)$

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z, 2x - y + t, -3y - 2z + t)$$

a) Calcule uma base e a dimensão de Nuc(f).
b) Calcule uma base e a dimensão de Im(f).

3. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, -2x + 3y - z) \qquad g(x, y) = (x + y, 2x - y, 0, x)$$

a) Calcule uma base e a dimensão de Nuc(f) e de Nuc(g).
b) Calcule uma base e a dimensão de Im(f) e de Im(g).

4. Considere o subespaço vectorial $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.

a) Dê exemplo de uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que Nuc(f)=U.
b) Dê exemplo de uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que Im(g)=U.

5. Considere o subespaço vectorial $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + t = 0\}$.

a) Dê exemplo de uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que Nuc(f)=U.
b) Dê exemplo de uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que Im(g)=U.

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que:

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \qquad f(1, 0, 1) = (1, -2, 0) \qquad f(1, -1, 3) = (1, -1, 1)$$

a) Determine $f(x, y, z)$.
b) Indique a matriz da aplicação linear f relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, -2x + 3y - z) \qquad g(x, y) = (x + y, 2x - y, 0, x)$$

a) Calcule M_f e M_g.
b) Calcule $g \circ f$ e $M_{g \circ f}$.
c) Calcule o produto das matrizes $M_g M_f$ e compare o resultado com a alínea anterior.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + z, y - 3z)$$

a) Calcule a inversa da aplicação linear f.
b) Indique M_f e $M_{f^{-1}}$ e verifique que $M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$.

9. Considere as bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $B' = ((1, 0, 2), (-1, 1, 0), (0, 1, 3))$ e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2z, x - y + z)$$

a) Calcule M_f.
b) Calcule $M_f^{B'B}$.
c) Calcule $M_f^{BB'}$.