Definição 6.1. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. O complemento algébrico do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido por $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$.

Exemplo 6.2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, o complemento algébrico do elemento a_{23} é

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -(5 \times (-4) - 0 \times 0) = 20.$$

Teorema 6.3. [Teorema de Laplace] O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma qualquer linha pelos correspondentes complementos algébricos. Por outras palavras, para $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, tem-se

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Temos, ainda, o resultado análogo para colunas, ou seja:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A(i|j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

para qualquer $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplo 6.4. Calculemos o determinante da seguinte matriz A usando o Teorema de Laplace:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Usaremos a primeira linha, visto conter dois zeros.

$$\det A = 5(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} + 0(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+0(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 2(-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

exemplos

Observe-se que para calcularmos o determinante da matriz A de ordem 4 apenas temos de calcular quatro determinantes de matrizes de ordem 3 (de facto, neste caso apenas temos de efetuar o cálculo de dois destes determinantes).

Usando a Regra de Sarrus, rapidamente se conclui que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{e} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, $\det A = 10$.

Teorema 6.5. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n.

1. Se A tem uma linha ou uma coluna nula então $\det A = 0$.
2. $\det A = \det(A^T)$.
3. Se A é triangular (inferior ou superior) então $\det A = \prod_{i=1,\ldots,n} a_{ii}$.

Observação 6.6. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal. Em particular, $\det I_n = 1$ e $\det 0_{n\times n} = 0$.

Teorema 6.7. Dados uma matriz quadrada A e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. se B é a matriz obtida de A multiplicando uma sua linha (ou coluna) por α então $\det B = \alpha \det A$.
2. se C é uma matriz obtida de A por troca de duas suas linhas (ou colunas), $\det C = -\det A$.
3. se D é uma matriz obtida de A substituindo uma sua linha (ou coluna) pela sua soma com outra eventualmente multiplicada por um escalar distinto de zero então $\det D = \det A$.

Exemplo 6.8. $\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} = 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} =$
$2 \times 3 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 6 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$

Exemplo 6.9.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -(1 \times 1 \times (-1) \times 3) = 3.$$

Corolário 6.10. Uma matriz com duas linhas (colunas) iguais tem determinante nulo.

Corolário 6.11. Tem determinante nulo uma matriz que tenha uma linha que se escreve como a soma de múltiplos de outras das suas linhas.

Corolário 6.12. Seja U a matriz em forma de escada obtida da matriz quadrada A por condensação usando apenas troca de linhas e substituição de uma linha pela sua soma com outra eventualmente multiplicada por um escalar não nulo. Então $\det A = (-1)^r \det U$, onde r indica o número de trocas de linhas no processo de condensação.

Corolário 6.13. Se A é uma matriz de ordem n e α é um escalar, então

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Teorema 6.14. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Temos que $\det(AB) = \det A \det B$.

Corolário 6.15. Se A é uma matriz invertível então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Teorema 6.16. Para $i = 1, \ldots, n$, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ii}+b_{ii} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ii} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.17.

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Definição 6.18. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos matriz dos complementos algébricos de A à matriz de ordem n cujo elemento na posição (i, j) é o complemento algébrico de a_{ij}. A transposta desta matriz chama-se matriz adjunta de A e é denotada por $Adj(A)$. Assim,

$$Adj(A) = \left[(-1)^{i+j} \det A(i|j)\right]^T = [A_{ij}]^T .$$

Exemplo 6.19. Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Então,

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 6.21. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então

1. $A\,Adj(A) = (\det A)I_n$.
2. Se A é invertível então
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A).$$
3. A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.

Exemplo 6.22. Calculemos a inversa da seguinte matriz A usando determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Comecemos por calcular os complementos algébricos dos vários elementos de A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det A(1|1) = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det A(1|3) = -2, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \det A(2|1) = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det A(2|2) = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det A(3|1) = -3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \det A(3|2) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det A(3|3) = 5.$$

Assim,

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observemos que a determinação da matriz adjunta implica o cálculo dos complementos algébricos de todas as entradas de A. Assim, podemos calcular o determinante de A usando o Teorema de Laplace sobre qualquer linha ou coluna, uma vez que todos os cálculos necessários já estão feitos.
Usemos, por exemplo, o Teorema de Laplace sobre a primeira linha:

$$\det A = 3 \times 2 + 1 \times 0 + 2 \times (-2) = 6 - 4 = 2.$$

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} Adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ -1 & -2 & 2,5 \end{bmatrix}.$$