

Cálculo Vetorial

Exame de recurso

16.06.2021

Justifique todas as respostas.

Exercício 1. [3,0 valores]

- a) Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2, x > 0, y \geq 0\} \cup \{(1, 1)\}$. Esboce os conjuntos A , $\overset{\circ}{A}$ e \overline{A} .
- b) Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{y}$.

Exercício 2. [6,0 valores]

Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2 - 4y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Mostre que g é contínua no ponto $(0, 0)$.
- b) Verifique se existe $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$.
- c) Seja $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} g(x, y)$. Calcule $h'((1, 1); (1, 2))$.

Exercício 3. [6,0 valores]

- a) Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, |y| \geq x\}$. Calcule, utilizando coordenadas polares, a área de R .
- b) Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq z\}$. Calcule $\iiint_V y \, d(x, y, z)$.

Exercício 4. [3,0 valores]

Considere o campo de vetores $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, yz, -z)$.

- a) Calcule o integral $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$, sendo $c(t) = (1, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ uma parametrização da curva C .
- b) Diga, justificando, se o campo de vetores \mathbf{F} é conservativo.

Exercício 5. [2,0 valores]

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h, 2h^2) - 2f(h, h^2) + f(0, 0)}{h^2}.$$

FIM
BOA SORTE