Cálculo Vetorial

Ficha 2

23 de Março de 2013

Questão 1 () A função $u = u(x, y)$ verifica a equação

$$F(x, y, u) = 4\,u\,x^2 + x^2\,y^3 + \arctan u\,\cos y = (\text{const}).$$

Encontre as suas derivadas parciais para o sistema de valores $(x, y, u) = (-1, -4, -1)$.

....

Como

$$\frac{\partial F(-1, -4, -1)}{\partial u} = 4 + \frac{\cos 4}{2} \neq 0$$

pelo Teorema da Função Implícita temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(-1,-4,-1)}{\partial x}}{\frac{\partial F(-1,-4,-1)}{\partial u}}$$

$$= -\frac{136}{4 + \frac{\cos 4}{2}}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(-1,-4,-1)}{\partial y}}{\frac{\partial F(-1,-4,-1)}{\partial u}}$$

$$= \frac{-48 + \frac{\sin 4\,\pi}{4}}{4 + \frac{\cos 4}{2}}.$$

Questão 2 () A função $u = u(x, y)$ verifica a equação

$$F(x, y, u) = -3\,\sin u\,\sin x - 2\,u^2\,\arctan y + \sin x\,\cos y = (\text{const}).$$

Encontre as suas derivadas parciais para o sistema de valores $(x, y, u) = (3, 1, 6)$.

....

Como

$$\frac{\partial F(3, 1, 6)}{\partial u} = -3\,\sin 3\,\cos 6 - 6\,\pi \neq 0$$

pelo Teorema da Função Implícita temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(3,1,6)}{\partial x}}{\frac{\partial F(3,1,6)}{\partial u}}$$

$$= \frac{-\cos 1\,\cos 3 + 3\,\cos 3\,\sin 6}{-3\,\sin 3\,\cos 6 - 6\,\pi}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(3,1,6)}{\partial y}}{\frac{\partial F(3,1,6)}{\partial u}}$$

$$= \frac{36 + \sin 1\,\sin 3}{-3\,\sin 3\,\cos 6 - 6\,\pi}.$$

Questão 3 () Sejam

$$\begin{aligned} z &= (x, y), \\ f(z) &= 6\,x + 6\,y, \\ g(z) &= -2 + 3\,(-1 + x)^2 + 3\,(8 + y)^2. \end{aligned}$$

Utilizando a regra dos multiplicadores de Lagrange resolva o problema

$$\begin{aligned} &f(z) \to \min, \\ &g(z) = 0. \end{aligned}$$

....

A função de Lagrange é dada por

$$L(x, y, \lambda) = 6\,x + 6\,y + \lambda(-2 + 3\ (-1 + x)^2 + 3\ (8 + y)^2).$$

A condição necessária de mínimo $\nabla_z L(z, \lambda) = 0$ toma a forma

$$\begin{aligned} &6 + 6\lambda(-1 + x) = 0, \\ &6 + 6\lambda(8 + y) = 0. \end{aligned}$$

Daqui obtemos

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{\lambda}, \\ y &= -8 - \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na igualdade $g(z) = 0$, obtemos

$$\frac{6}{\lambda^2} = 2.$$

Daqui encontramos

$$\lambda = \pm\sqrt{3}.$$

Escolhendo o sinal $\pm$, encontramos os respetivos $z = (x, y)$ e $f(z)$, e vemos que o sinal menos corresponde ao máximo e o sinal mais ao mínimo. Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ y &= -8 - \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Questão 4 () Sejam

$$\begin{aligned} &z = (x, y), \\ &f(z) = 3\,x - 4\,y, \\ &g(z) = -6 + 2\ (2 + x)^2 + 5\ (8 + y)^2. \end{aligned}$$

Utilizando a regra dos multiplicadores de Lagrange resolva o problema

$$\begin{aligned} &f(z) \to \min, \\ &g(z) = 0. \end{aligned}$$

....

A função de Lagrange é dada por

$$L(x, y, \lambda) = 3\,x - 4\,y + \lambda(-6 + 2\ (2 + x)^2 + 5\ (8 + y)^2).$$

A condição necessária de mínimo $\nabla_z L(z, \lambda) = 0$ toma a forma

$$\begin{aligned} &3 + 4\lambda(2 + x) = 0, \\ &-4 + 10\lambda(8 + y) = 0. \end{aligned}$$

Daqui obtemos

$$\begin{aligned} x &= -2 - \frac{3}{4\,\lambda}, \\ y &= -8 + \frac{2}{5\,\lambda}. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na igualdade $g(z) = 0$, obtemos

$$\frac{77}{40\,\lambda^2} = 6.$$

Daqui encontramos

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{77}{240}}.$$

Escolhendo o sinal $\pm$, encontramos os respetivos $z = (x, y)$ e $f(z)$, e vemos que o sinal menos corresponde ao máximo e o sinal mais ao mínimo. Portanto a solução do problema é

$$x = -2 - \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{77}},$$
$$y = -8 + \frac{8\sqrt{15}}{5\sqrt{77}}.$$
