MIEFIS - ANO 1 | 2º Semestre

Complementos Cálculo e Geometria Analítica

Multiplicação de matrizes:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

igual

Ex:

$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times2 + 3\times1 & 2\times1 + 3\times2 \\ 1\times2 + 2\times1 & 1\times1 + 2\times2 \end{pmatrix} =$$

$A \times B_{(3\times2)}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\times2 + 3\times1 & 2\times1 + 3\times2 \\ 1\times2 + 2\times1 & 1\times1 + 2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz Identidade:

Quadrada cujo os elementos da diagonal são todos "=" a 1 (os que não estão na diagonal são "=" a 0).

Identidade de ordem 2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identidade de ordem 3:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa 2x2 :

se $\det(A) = 0$, a inversa não existe

1) A matriz A tem de ser quadrada.
existem matrizes quadradas que não admitem inversa

2) A sua inversa, caso exista, será A^{-1}, da mesma ordem, tal que : $\underbrace{A^{-1} . A = A . A^{-1}}_{\text{propriedade comutativa}} = I$

— " —

⚠ Para calcular matrizes inversas, consideremos apenas

$A . A^{-1} = I$

— " —

Exemplo : Determine, caso exista, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Seja A^{-1} a matriz inversa, caso exista, de A :

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\cdot\ A . A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \times a + 0 \times c & 2 . b + 0 . d \\ 4 \times a - 3 \times c & 4 \times b - 3 . d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 . a & 2b \\ 4a - 3c & 4b - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ 4a - 3c = 0 \\ 4b - 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ 3c = 4 . a \\ 3d = -1 - 4b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{3} \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Matriz Inversa 3x3 | (explicação através de um exemplo)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calcular o determinante da matriz :

$\det = (0 - 24) - 2 . (0 - 20) + 3 . (0 - 5) =$

$= -24 + 40 - 15 =$

$= 1$

2) Obter a matriz dos co-fatores (matriz adjunta) CCF

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -18$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$COF = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ → aplicar a regra do mantém e troca o sinal

3) Calcular a matriz transposta da matriz COF :

⟶ tudo o que é linha para a coluna

$COF^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) Dividir todos os elementos de COF^T pelo determinante calculado em 1) neste caso, a matriz inversa é "=" a COF^T.

Matriz inversa 2x2 (outra maneira):

Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$:

$\det A = (a \cdot d) - (b \times c)$

↳ $A^{-1} = \dfrac{1}{\underbrace{\det(A)}_{\text{determinante da matriz } A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}}_{\text{matriz adjunta de } A}$

Passos:

1) Dividir os termos pelo determinante.

2) Permutar os termos da diagonal principal e inverter o sinal dos termos da diagonal secundária.

Matriz Transposta:

Inverte-se linhas e colunas

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Propriedades:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\underset{\uparrow \text{escalar}}{\alpha} . A)^T = \alpha . A^T$

Matriz simétrica:

Matriz quadrada que é igual à sua transposta: $A = A^T$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Logo, como $A = A^T$, a matriz A é simétrica

Matriz antissimétrica:

Acontece quando $A^T = -A$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$-A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Como $A^T = -A$, então A é antissimétrica!

Matriz conjugada:

Considerando uma matriz A. A

$\overline{A}$ ← matriz conjugada de A obtém-se conjugando todos os elementos que compõem a matriz A.

Exemplos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+2i & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz Conjugada Transposta:

Dado uma matriz A. Obtém-se a matriz conjugada transposta de A $(\overline{A^T})$, conjugando a matriz transposta de A ou transpondo a matriz conjugada de A:

$$\overline{A^T} = \overline{A}^T = A^*$$ → com este símbolo representamos a transposta e a conjugada.

Propriedades:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\alpha . A)^* = \overline{\alpha} . A^*$

Exemplo:

- $A = \begin{pmatrix} (3-i) & (-2+i) & 4 \\ -i & 2i & (-1-i) \end{pmatrix}$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} (3+i) & (-2-i) & 4 \\ i & -2i & (-1+i) \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}^T = \begin{pmatrix} (3+i) & i \\ (-2-i) & -2i \\ 4 & (-1+i) \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A^*$

Matriz hermítica $\boxed{\text{ou}}$ Matriz autoadjunta:

Uma matriz é dita matriz autoadjunta ou hermítica se for idêntica à sua conjugada transposta $(A = A^*$, então A é denominada matriz hermítica.)

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4+3i \\ 4-3i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & 4+3i \\ 4-3i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ logo a matriz A é hermítica

Matriz anti-hermítica: ou hemi-hermítica

Uma matriz é dita matriz anti-hermítica se a sua conjugada transposta é a negativa da matriz original. Isto é, a matriz A é anti-hermítica se satisfaz a relação $A = -A^*$.

Matriz unitária:

Uma matriz é unitária se a sua conjugada transposta é também o seu inverso, ou seja:

$$U^* . U = U . U^* = I \Rightarrow U^{-1} = U^*$$

Matriz ortogonal:

Uma matriz A é ortogonal se a sua transposta é igual ao seu inverso:

$$A^T . A = I \Leftrightarrow A . A^T = I \implies A^T = A^{-1}$$

Uma matriz A ortogonal é necessariamente:

↳ invertível (com inversa $A^{-1} = A^T$)

↳ unitária ($A^{-1} = A^*$)

↳ normal ($A^* . A = A . A^*$)

O determinante de qualquer matriz ortogonal é +1 ou −1.

EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

EDOs ↳ equações que envolvem derivadas

Homogêneas ↳ porque a equação é igualada a 0.

Coeficientes Constantes ↳ tudo o que acompanha a variável são nº constantes (e não funções)

Exemplos:

i) $\frac{dx}{dt} = x.$

ii) $\boxed{1}x'' \boxed{-5}x' + \boxed{6}.x \boxed{=0}$ ⇐ iremos estudar estas agora!

iii) $t^3 . f''' + t . f' = 3$

- Tratam-se de equações de 2º ordem porque a maior derivada nela é de 2º ordem.

- Forma Geral para este tipo de EDOs:

$$\boxed{a . x'' + b . x' + c . x = 0}$$

onde a, b e c são números !!! → daí ser "coeficientes constantes"

A solução é da forma $x(t) = e^{z.t}$.

Substituindo:

$$a . (e^{z.t})'' + b . (e^{z.t})' + c . (e^{z.t}) = 0$$

↳ $(e^{z.t})'' = (z . e^{z.t})' = z^2 . e^{z.t}$

↳ $(e^{z.t})' = z . e^{z.t}$

Ou seja:

$a.(e^{z.t})'' + b.(e^{z.t})' + c.(e^{z.t}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a.z^2.e^{z.t} + b.z.e^{z.t} + c.e^{z.t} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{z.t}.(\underbrace{a.z^2 + b.z + c}_{\text{equação característica}}) = 0$

→ como $e^{z.t}$ nunca pode ser 0, então:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

- $a.z^2 + b.z + c = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\overbrace{b^2 - 4.a.c}^{\Delta}}}{2.a}$

- Se $b^2 - 4.a.c > 0 \Rightarrow$ raízes reais distintas
- se $b^2 - 4.a.c < 0 \Rightarrow$ raízes reais complexas
- se $b^2 - 4.a.c = 0 \Rightarrow$ raízes reais iguais

{Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$}

$x'' - 5.x' + 6.x = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 25 - 4\times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

Solução geral: $x(t) = c_1.e^{z_1.t} + c_2.e^{z_2.t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Calculando z_1 e z_2: são raízes do polinómio:

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = 3 \end{cases}$

$z^2 - 5.z + 6 = 0$

$\therefore x(t) = c_1.e^{2.t} + c_2.e^{3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

{Caso 2: $b^2 - 4.a.c = 0$}

$x'' - 6.x' + 9.x = 0$

O z é único (pois $z_1 = z_2$)

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times9 = 0 (= 0)$

é colocado para ficar $\neq$

Solução geral: $x(t) = c_1.e^{z.t} + c_2.t.e^{z.t}$

Calculando z:

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Leftrightarrow z = 3$

$\therefore x(t) = c_1.e^{3t} + c_2.t.e^{3.t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

{Caso 3: $b^2 - 4.a.c < 0$}

$x'' + 4.x = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 0 - 4\times1\times4 = -16 < 0 \longrightarrow z = \alpha \pm \beta.i$

Solução geral: $x(t) = e^{\alpha.t}.(c_1.\cos(\beta.t) + c_2.\text{sen}(\beta.t))$

Calculando z:

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Leftrightarrow z = \pm 2.i$

$\therefore x(t) = e^{0.x}.(c_1.\cos(2.t) + c_2.\text{sen}(2.t)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t) = c_1.\cos(2.t) + c_2.\text{sen}(2t)$

Problema do valor inicial (PVI)

1) Resolver a equação diferencial

↳ trocar o x'' por z^2, o x' por z e o x por $z^0 = 1$. Obtenho a equação característica. De seguida, resolvo-a de forma a obter as raízes)

2) Calcular a 1ª derivada da solução

3) Substituir valores iniciais ⟶ 2 equações

4) Resolver o sistema de equações encontrado no passo 3.

5) Encontrar solução para PVI.

Exemplo:

Resolva $x'' - 5.x' + 6.x = 0$ sabendo que $x(0) = 2$ e $x'(0) = 5$.

$\boxed{1.}$ $x'' - 5.x' + 6.x = 0 \Rightarrow z^2 - 5.z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \lor z_2 = 3$

Solução Geral: $x(t) = C_1 . e^{2t} + C_2 . e^{3t}$

$\boxed{2.}$ $x'(t) = 2 . C_1 . e^{2t} + 3 . C_2 . e^{3t}$

$\boxed{3.}$ $x(0) = 2$ $\quad x'(0) = 5$

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2.C_1 + 3.C_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{5.}$ $x(t) = e^{2t} + e^{3t}$

EDOs Lineares Não Homogéneas

↳ **Método dos Coeficientes Indeterminados**

EDO de 2ª ordem não homogénea

$\underbrace{a}\,.x'' + \underbrace{b}\,.x' + \underbrace{c}\,.x = \underline{f(t)}$

a, b, c → são números

$f(t)$ → é uma função que pode aparecer de 3 maneiras diferentes:

- $e^{n.t}$
- t^n
- $\cos(n.t)$ $\boxed{\text{ou}}$ $\text{sen}(n.t)$

Exemplos:

i) $x'' + x' - 2.x = 3.t$

ii) $x'' - 3.x' - 4.x = 2.\text{sen}(t)$

Como resolver: $a.x'' + b.x' + c.x = f(t)$

1) Resolver EDO como se fosse homogénea

Colocar $a.x'' + b.x' + c.x$ igual a zero e encontrar a solução: $x_H(t)$

$a.x'' + b.x' + c.x = 0 \Rightarrow x_h(t)$ → solução homogénea

2) Encontrar solução particular

Considerar $a.x'' + b.x' + c.x = f(x)$ e aí encontrar uma solução particular: $x_p(t)$

$a.x'' + b.x' + c.x = f(x) \Rightarrow x_p(t)$ → solução particular

3) Encontrar a solução geral

Basta somar a solução particular à solução particular.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Obter solução particular:

Caso 1: $f(t) = a.e^{d.t} \Rightarrow x_p(t) = A.e^{d.t}$

Exemplo: $x'' - 3.x' + 2.x = 2.e^{3.t}$

$x_p(t) = A.e^{3.t}$ se é solução então:

$\hookrightarrow x_p''(t) = (A.e^{3t})'' = (3A.e^{3.t})' = 9.A.e^{3.t}$

$\hookrightarrow x_p'(t) = (A.e^{3t})' = 3.A.e^{3.t}$

Assim, $x'' - 3.x' + 2.x = 2.e^{3t}$

$\Downarrow$

- $(A.e^{3t})'' - 3.(A.e^{3t})' + 2.(A.e^{3t}) = 2.e^{3t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9.A.e^{3.t} - 9.A.e^{3t} + \cancel{2}.A.e^{3t} = \cancel{2}.e^{3t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{A = 1}$

Logo $\boxed{x_p(t) = e^{3t}}$

Caso 2: $f(t) = \cos(d.t)$ $\boxed{ou}$ $f(t) = \text{sen}(d.t)$

$\Downarrow$

$x_p(t) = A.\text{sen}(d.t) + B.\cos(d.t)$

Exemplo: $x'' - 3.x' + 2.x = \text{sen}(t)$

$x_p(t) = A.\text{sen}(t) + B.\cos(t)$ se é solução então:

$\hookrightarrow x_p'(t) = A.\cos(t) - B.\text{sen}(t)$

$\hookrightarrow x_p''(t) = -A.\text{sen}(t) - B.\cos(t)$

Assim, $x'' - 3.x' + 2.x = \text{sen}(t)$

$\Downarrow$

$(-A.\text{sen}(t) - B.\cos(t)) - 3.(A.\cos(t) - B.\text{sen}(t)) + 2.(A.\text{sen}(t) + B.\cos(t)) = \text{sen}(t) \Leftrightarrow$

$-A.\text{sen}(t) - B.\cos(t) - 3.A.\cos(t) + 3.B.\text{sen}(t) + 2.A.\text{sen}(t) + 2.B.\cos(t) = \text{sen}(t) \Leftrightarrow$

$\text{sen}(t).[-A + 3.B + 2.A] - \cos(t).[-B - 3.A + 2.B] = \text{sen}(t) \Leftrightarrow$

$\text{sen}(t).[A + 3.B] - \cos(t).[-3A + B] = \text{sen}(t) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A + 3.B = 1 \\ -3A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{B}{3}\right) + 3.B = 1 \\ A = \frac{B}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{3}{10} \\ A = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Logo $\boxed{x_p(t) = \frac{1}{10}.\text{sen}(t) + \frac{3}{10}.\cos(t)}$

$$\boxed{\text{Caso 3: } f(t) = a.t^{d} + b.t^{d-1} + \dots + c \;\} \text{ polinómio}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_p(t) = A.t^{d} + B.t^{d-1} + \dots + C$$

Exemplo: $x'' - 3.x' + 2.x = t^2 + 1$

$\underbrace{x_p(t) = A.t^2 + B.t + C}$

se é solução então:

↳ $x_p'(t) = (A.t^2 + B.t + C)' = 2.A.t + B$

↳ $x_p''(t) = (2.A.t + B)' = 2.A$

Assim, $x'' - 3.x' + 2.x = t^2 + 1$

$$\Downarrow$$

$x_p''(t) - 3.x_p'(t) + 2.x_p(t) = t^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2.A - 3.(2.A.t + B) + 2.(A.t^2 + B.t + C) = t^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2.A - 6.A.t - 3.B + 2.A.t^2 + 2.B.t + 2.C = t^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2.A.t^2 + t.[-6.A + 2.B] + [2.A - 3B + 2.C] = t^2 + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.A = 1 \\ -6A + 2.B = 0 \\ 2A - 3B + 2.C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 3.A \\ 2.A - 3.B + 2.C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ B = \frac{3}{2} \\ \cancel{1} - \frac{9}{2} + 2.C = \cancel{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 3/2 \\ C = 9/4 \end{cases}$$

$\therefore \boxed{x_p(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3.t}{2} + \frac{9}{4}}$

Exemplo geral: $x'' - 2.x' + x = -2.e^t$

1) $x_h(t) = C_1.e^t + C_2.t.e^t$

2) $x_p(t) = A.e^t$ ✗ → errado porque temos que comparar com a homogénea

↓

porque esta x_p também aparece na homogénea.

Para solucionar este problema:

$x_p(t) = A.t.e^t$ → continua errado porque aparece na homogénea

$$x_p(t) = A.t^2.e^t \quad (\text{certo} ✓)$$

Nota: se $x_p(t)$ tiver termos iguais aos da homogénea, multiplique por "t" até que $x_p(t)$ fique diferente!

3) Solução ⇒ $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Nota importante: Nos casos em que a EDO estiver igualada a mais do que uma função, fazer uma solução particular para cada função e por fim somar as soluções particulares.

Exemplo: Encontre a solução geral da equação diferencial $\ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2.t}$.

Resolução:

1) Encontrar solução homogénea $x_h(t)$

$x_h(t) = ??? \Rightarrow \ddot{x} + \dot{x} = 0$

$\Downarrow$ A solução é da forma $x_h(t) = e^{z.t}$

$$(e^{z.t})'' + (e^{z.t})' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 . e^{z.t} + z . e^{z.t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{z.t} . \underbrace{(z^2 + z) = 0}$$

$\hookrightarrow z^2 + z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 0}}{2} \Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = -1$

$\therefore x_h(t) = C_1 + C_2 . e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) Encontrar solução particular $x_p(t)$

Como a ED está igualada a duas funções, tenho que fazer duas $x_p(t)$, uma para cada função

$\boxed{2.1.}$ para $\ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} \Rightarrow x_{p_1}(t) = A.t.e^{-t}$

$\hookrightarrow x_{p_1}'(t) = (A.t.e^{-t})' = A.e^{-t} - A.t.e^{-t}$

$\hookrightarrow x_{p_1}''(t) = (A.e^{-t} - A.t.e^{-t})' = -A.e^{-t} - A.e^{-t} + A.t.e^{-t} =$

$= -2.A.e^{-t} + A.t.e^{-t}$

Assim, $\ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} \Rightarrow (A.t.e^{-t})'' + (A.t.e^{-t})' = e^{-t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2.A.e^{-t} + \cancel{A.t.e^{-t}} + A.e^{-t} - \cancel{A.t.e^{-t}} = e^{-t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -A.\cancel{e^{-t}} = \cancel{e^{-t}} \Leftrightarrow -A = 1 \Leftrightarrow A = -1$

$\therefore \boxed{x_{p_1}(t) = -t.e^{-t}}$

$\boxed{2.2.}$ para $\ddot{x} + \dot{x} = -e^{-2.t} \Rightarrow x_{p_2}(t) = A.e^{-2.t}$

$\hookrightarrow x_{p_2}'(t) = (A.e^{-2.t})' = -2.A.e^{-2.t}$

$\hookrightarrow x_{p_2}''(t) = (-2.A.e^{-2.t})' = 4.A.e^{-2.t}$

Assim, $\ddot{x} + \dot{x} = -e^{-2.t} \Rightarrow \underline{(A.e^{-2.t})'' + (A.e^{-2.t})' = -e^{-2.t}}$

$\hookrightarrow \Leftrightarrow 4.A.e^{-2.t} - 2.A.e^{-2.t} = -e^{-2.t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2.A.e^{-2.t} = -e^{-2.t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2.A.e^{-2.t} + e^{-2.t} = 0 \Leftrightarrow e^{-2.t}.[2.A + 1] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{x_{p_2}(t) = -\frac{e^{-2.t}}{2}}$

3) Encontrar a solução geral $x(t)$

$x(t) = x_h(t) + [x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)] \Leftrightarrow$

$$\boxed{x(t) = C_1 + C_2.e^{-t} - t.e^{-t} - \frac{e^{-2.t}}{2}}$$

Espaços Euclidianos :

(= produto escalar)

- Espaço vetorial E, real ou complexo, que contém um produto interno (ou hermítico, se for complexo), isto é, em E, o produto interno é uma função

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$
$$x, y \longmapsto \langle x, y \rangle$$

↳ par de vetores → escalar

tal que

i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

ii) $\underbrace{\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ e } \langle \lambda.x, y \rangle = \lambda.\langle x, y \rangle}_{\langle \lambda.x + \mu.z, y \rangle = \lambda.\langle x, y \rangle + \mu.\langle z, y \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle > 0$, se $x \neq 0$

o resultado é sempre um número real

⚠ Se o espaço é real, então $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Nota: Sabemos que $\langle \lambda.x, y \rangle = \lambda.\langle x, y \rangle$, mas ter em atenção que $\langle x, \lambda.y \rangle = \overline{\lambda}.\langle x, y \rangle$

$\langle x, \lambda.y \rangle = \overline{\langle \lambda.y, x \rangle} = \overline{\lambda.\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}.\overline{\langle y, x \rangle} =$
$= \overline{\lambda}.\langle x, y \rangle$

⇒ No espaço euclidiano real, $\mathbb{R}^n$,

$\langle x, y \rangle = x_1.y_1 + \ldots + x_n.y_n \overset{\Rightarrow}{\omega} \langle x, y \rangle = \|x\|.\|y\|.\cos\theta$

∢ formado entre dois vetores

⇒ No espaço euclidiano complexo, $\mathbb{C}^n$,

$\langle x, y \rangle = x_1.\overline{y_1} + \ldots + x_n.\overline{y_n}$

Norma euclidiana: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \Leftrightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

↳ O único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\vec{0}$: $\|\vec{0}\| = 0$

↳ $\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$ → pois $\langle \lambda.x, \lambda.x \rangle = \lambda.\overline{\lambda}.\langle x, x \rangle$

↳ $\|x\| = 1$ } então o vetor é unitário

↳ $x = \frac{v}{\|v\|}$ } normalização (transformar qualquer vetor em unitário)

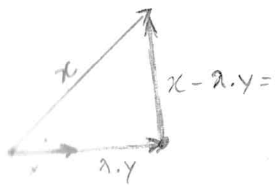
x e y são ortogonais / perpendiculares,

$$x \perp y$$

... se $\langle x, y \rangle = 0$

... se x e y são ortogonais então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

⊙ Todo vetor $x \in E$, existe um único vetor $\lambda.y$ tal que:



$x = \lambda.y + z \longrightarrow \underbrace{\langle z, y \rangle = 0}_{\text{são ortogonais}}$

$z = x - \lambda.y$

$\langle z, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x - \lambda.y, y \rangle = 0$

$\Downarrow$

$\langle x - \lambda.y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda.\|y\|^2$

Por isso, $\lambda = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

componente de x ao longo de y

$\lambda . y \Rightarrow$ projeção ortogonal de x no vetor y

Desigualdade de Cauchy - Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

e $|\langle x, y \rangle| = \|x\| . \|y\|$ se e só se x e y forem ~~linearmente dependentes~~ dependentes

Consequência:

↳ a norma satisfaz a desigualdade do Triângulo:

$$\underbrace{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}_{\text{Teorema de Pitágoras}}$$

Nota: Se o espaço euclidiano é real, então é possível definir o ângulo θ entre 2 vetores

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| . \|y\|}$$

$\Rightarrow \underbrace{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}_{\text{base ortonormal}}$ é um conjunto ortogonal se $x_i \perp x_j$ $\forall i \neq j$ e $|x_i| \neq 0$. → ou seja, se os vetores forem todos perpendiculares uns aos outros

↓

os vetores são todos $\underbrace{\text{linearmente independentes}}_{\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + \ldots + \lambda_n . x_n = 0}$

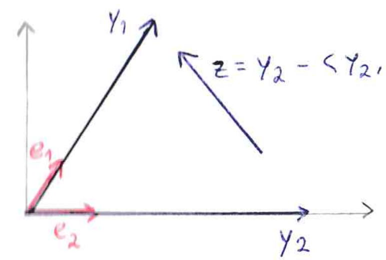
Base Ortonormada:

- base de E formada apenas por vetores $\underbrace{\text{unitários}}_{\text{norma} = 1}$ ortogonais.

⚠ Conjuntos independentes, não necessariamente finitos, podem ser transformados em ortogonais.

Exemplo: Ortogonalização de Gram - Schmidt

$\mathbb{R}^2$



- $e_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$
- $e_2 = \dfrac{z}{\|z\|} = \dfrac{f_2}{\|f_2\|}$
- $e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|}$

- $f_2 = y_2 - \langle y_2, e_1 \rangle . e_1$
- $f_3 = y_3 - \langle y_3, e_1 \rangle . e_1 - \langle y_3, e_2 \rangle . e_2$

Nota: Todo o espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.