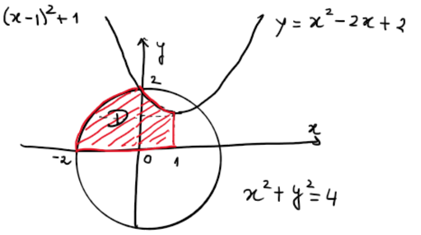
Teste 2 – Correcção

1A $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -2\le x\le 0,\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2-2x+2\}$

a) $y=\sqrt{4-x^2} \iff \begin{cases} y\ge 0\\ y^2=4-x^2\end{cases} \begin{cases} y\ge 0\\ x^2+y^2=4\end{cases}$

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$



b) Variação do y: $0\le y\le 2$

$\boxed{\text{Quando } 0\le y\le 1}$, x varia da curva $x^2+y^2=4$ até $y=1$.

Então $-\sqrt{4-y^2}\le x\le 1$.

$\boxed{\text{Quando } 1\le y\le 2}$, x varia de $x^2+y^2=4$ até $y=x^2-2x+2$.

$y=x^2-2x+2 \iff x^2-2x+(2-y)=0 \iff x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4(2-y)}}{2}$

$\iff x=\dfrac{2\pm\sqrt{4y-4}}{2}=1\pm\sqrt{y-1}$ (e, como $x\le 1$, escolhemos o sinal $-$)

$\boxed{-\sqrt{4-y^2}\le x\le 1-\sqrt{y-1}}$

Assim $\iint_D x\,dy\,dx=\int_0^1\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1} x\,dx\,dy+\int_1^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1-\sqrt{y-1}} x\,dx\,dy$

1A c)

$$\int_{-2}^{0}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^{x^2-2x+2} x\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left[xy\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx+\int_0^1\left[xy\right]_0^{x^2-2x+2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}-2x(4-x^2)^{1/2}dx+\int_0^1 x(x^2-2x+2)\,dx$$

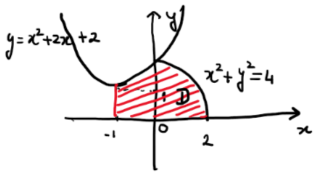
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}\left(4^{3/2}-0\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+1-0\right)$$

$$=-\frac{8}{3}+\frac{3-8+12}{12}=-\frac{8}{3}+\frac{7}{12}$$

$$=\frac{-25}{12}$$

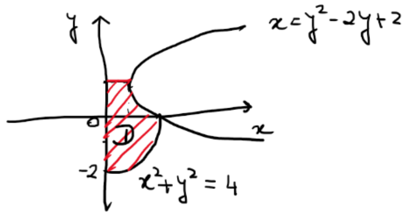
(1B) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 0,\ 0\le y\le x^2+2x+2\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$

$y = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$



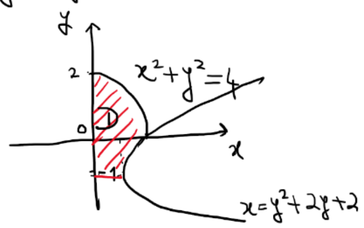
(1C) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -2\le y\le 0,\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2-2y+2\}$

$x=y^2-2y+2 \iff x=(y-1)^2+1$



(1D) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le y\le 0,\ 0\le x\le y^2+2y+2\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le y\le 2,\ 0\le x\le \sqrt{4-y^2}\}$

$x=y^2+2y+2 \iff x=(y+1)^2+1$



(1B) b) $\iint_D y\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-1}^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy + \int_1^2\int_{-1-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy$

$x^2+2x+2-y=0 \iff x=\frac{-2\pm\sqrt{4y-4}}{2} = -1\pm\sqrt{y-1}$ (escolhemos o sinal - porque $x<0$)

c) $\iint_D y\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_0^{x^2+2x+2} y\,dy\,dx + \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$

$= \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2+2x+2} dx + \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$

$= \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\left((x^2+2x)^2+2(x^2+2x)2+4\right)dx + \int_0^2 \frac{1}{2}(4-x^2)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(x^4+4x^3+4x^2+4x^2+8x+4\right)dx + \left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}+x^4+\frac{8x^3}{3}+4x^2+4x\right]_{-1}^{0} + \left(4-\frac{8}{6}\right) = \cdots$

1C b) $\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1} x\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1-\sqrt{1-x}} x\,dy\,dx$

$y^2 - 2y + 2 - x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(2-x)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-x}$ e escolhemos o − porque $y<1$

c) $\int_{-2}^{0} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{y^2-2y+2} x\,dx\,dy$

$= \int_{-2}^{0} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy + \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y^2-2y+2} dy$

$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (4-y^2)\,dy + \frac{1}{2}\int_1^2 \left((y^2-2y)^2 + 2(y^2-2y)2 + 4\right) dy$

$= \left[2y - \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(y^4 - 4y^3 + 2y^2 + 4y^3 - 8y + 4\right) dy = \cdots$

1D $\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-1+\sqrt{x-1}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$

$y^2 + 2y + 2 - x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(2-x)}}{2} = -1 \pm \sqrt{x-1}$ escolhemos o sinal + porque $y > -1$

$\int_{-1}^{0} \int_0^{y^2+2y+2} y\,dx\,dy + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy$

$= \int_{-1}^{0} [yx]_0^{y^2+2y+2} dy + \int_0^2 [yx]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$

$= \int_{-1}^{0} y(y^2+2y+2)\,dy + -\frac{1}{2}\int_0^2 -2\, y\sqrt{4-y^2}\,dy$

$= \left[\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + y^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}\frac{(4-y^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \cdots$

(2A) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) $\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{3}x^2 - \cancel{3}y = 0 \\ \cancel{3}y^2 - \cancel{3}x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \begin{cases} - \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$

se $\boxed{x=0}$ então $y=0$ e temos o ponto crítico $A = (0,0)$

Se $\boxed{x=1}$ então $y=1$ e temos o ponto crítico $B = (1,1)$

$$\text{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$M_1 = \text{Hess}_A f = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det M_1 = -9 < 0$. Então M_1 tem um valor próprio negativo e outro positivo. Então A não é maximizante nem minimizante local de f (é ponto de sela

$M_2 = \text{Hess}_B f = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det M_2 = 36 - 9 = 27 > 0$ e $\text{tr}\, M_2 = 12 > 0$. Então ambos os valores próprios de M_2 são positivos. Assim, B é um minimizante local de f

2A-b) $g(x,y) = x+y$

$\Sigma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1$

Temos de resolver 2 sistemas:

(I) $\begin{cases} (x,y) \in \Sigma_1 \\ \nabla g(x,y) = (0,0) \end{cases}$ (II) $\begin{cases} (x,y) \in \Sigma_1 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases}$

(pontos singulares de Σ_1)

$\boxed{(\text{I})}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ (1,1) = (0,0) \end{cases}$ sistema impossível (Σ_1 não tem pontos singulares)

$\boxed{(\text{II})}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x^2-3y = \lambda \\ 3y^2 - 3x = \lambda \end{cases} \begin{cases} - \\ \cancel{3}x^2 - \cancel{3}y = \cancel{3}y^2 - \cancel{3}x \\ - \end{cases} \begin{cases} - \\ x^2 - y^2 = y - x \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ (x-y)(x+y) = -(x-y) \\ - \end{cases} \Rightarrow x-y=0 \vee x+y=-1$

$\boxed{x-y=0} \Rightarrow 2x = 1$ Temos o ponto $C = (1/2, 1/2)$

$\boxed{x+y=-1}$ Como $x+y=1$, é absurdo.

Obtivemos, então, um único ponto, o C. Como o enunciado nos garante a existência de mínimo, então

$\min f|_{\Sigma_1} = f(1/2, 1/2) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 3 \frac{1}{4} = 0$

(2B) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy \qquad g(x,y)=x-y$

a) $\nabla f(x,y)=(3x^2+3y,3y^2+3x)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ y^2+x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4+x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=-1$

$A=(0,0)$, $B=(-1,-1)$ pontos críticos de f

$\text{Hess}_{(x,y)}f=\begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$ $\qquad M_1=\text{Hess}_{(0,0)}f=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det M_1=-9<0$

$A=(0,0)$ é ponto de sela

$M_2=\text{Hess}_{(-1,-1)}f=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\det M_2=36-9>0$, $\operatorname{tr} M_2=-12<0$

$B=(-1,-1)$ é maximizante local de f

b) (I) Pontos críticos de Σ: $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma \\ \nabla g(x,y)=(0,0) \end{cases}$ Impossível

(II) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma \\ \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x^2+3y=\lambda \\ 3y^2+3x=-\lambda \end{cases} \Rightarrow x^2+y=-y^2-x$

Como $y=x-1$, obtemos

$x^2+(x-1)^2+(x-1)+x=0 \Leftrightarrow 2x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

obtemos um único ponto $C=(0,-1)$ ...

(2C) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy \qquad g(x,y)=x+y$

a) $\nabla f(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 3y^2-6x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ \frac{3}{4}x^2-6x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{—} \\ 3x^2-24x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{—} \\ 3x(x^3-8)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \vee x=2 \end{cases}$

$A=(0,0)$ e $B=(2,2)$ são os pontos críticos de f.

$\text{Hess}_{(x,y)}f=\begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$ $\qquad M_1=\text{Hess}_{(0,0)}f=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\det M_1=-36<0$

Então $A=(0,0)$ é ponto de sela de f

$M_2=\text{Hess}_{(2,2)}f=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ $\det M_2=144-36>0$, $\operatorname{tr} M_2=24>0$

n ' $=(2,2)$ e minimizante e

b) (I) Σ não tem pontos singulares (análogo a 2A e 2B)

(II) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x^2-6y=\lambda \\ 3y^2-6x=\lambda \end{cases} \Rightarrow x^2-2y=y^2-2x \iff (x-y)(x+y)+2(x-y)=0$

$\iff (x-y)(x+y+2)=0$

$\iff y=x \ \vee \ x+y=-2$

$\boxed{y=x}$ $x+y=1 \Rightarrow x=y=1/2$

$\boxed{x+y=-2}$ $x+y=1$ Impossível

Obtivemos, então, um único ponto $C=(1/2, 1/2)$...

2D) $f(x,y)=x^3+y^3+6xy \qquad g(x,y)=x-y$

a) $\nabla f(x,y)=(0,0) \iff \begin{cases} 3x^2+6y=0 \\ 3y^2+6x=0 \end{cases} \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2 \\ \frac{3}{4}x^4+6x=0 \end{cases} \begin{cases} 3x(x^3+8)=0 \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y=0, \quad A=(0,0)$

$x=-2 \Rightarrow y=-2, \quad B=(-2,-2)$

$\mathrm{Hess}_{(x,y)}f=\begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6y \end{pmatrix}$ $\quad M_1=\mathrm{Hess}_{(0,0)}f=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\det M_1=-36<0$

Então $A=(0,0)$ é ponto de sela de f

$M_2=\mathrm{Hess}_{(-2,2)}f=\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$ $\det M_2=144-36>0$

$\mathrm{tr}\, M_2=-24<0$

Então $B=(-2,2)$ é maximizante local de f.

b) (I) Σ não tem pontos singulares (análogo a 2A ou 2B)

(II) $\begin{cases} (x,y)\in\Sigma \\ \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \end{cases} \begin{cases} x-y=1 \\ 3x^2+6y=\lambda \\ 3y^2+6x=-\lambda \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2+2y-2x=0$

$\iff (x-y)(x+y)-2(x-y)=0 \iff (x-y)(x+y-2)=0 \iff y=x \ \vee \ y=2-x$

$\boxed{y=x} \rightarrow 0=1$ Impossível

$\boxed{y=2-x} \Rightarrow x-2+x=1 \iff 2x=3 \iff x=\frac{3}{2}$ e, então $y=1/2$.

Obtemos um único ponto $C=(3/2, 1/2)$, ...

3A a) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\leq 1,\ 2x^2+2y^2\leq z+3\}$

Coordenadas cartesianas

$\begin{cases} z\leq 1 \\ 2x^2+2y^2\leq z+3 \end{cases}$

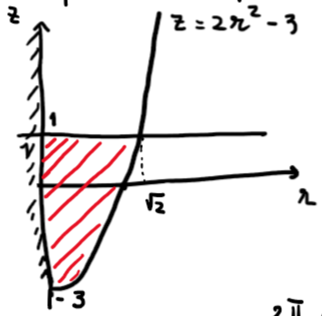
Coordenadas cilíndricas

$\begin{cases} z\leq 1 \\ 2r^2\leq z+3 \end{cases}$

Então $0\leq\theta\leq 2\pi$

a) Coordenadas cilíndricas

Corte pelo semi-plano $\theta=\theta_0$



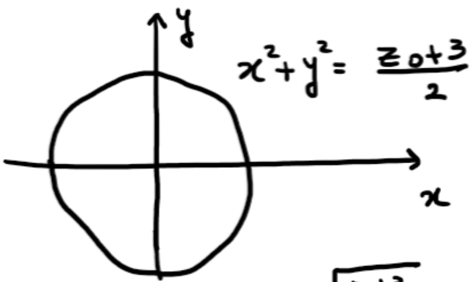
$\begin{cases} z=1 \\ z=2r^2-3 \end{cases} \begin{cases} - \\ 2r^2=4 \end{cases} \begin{cases} r=\sqrt{2} \end{cases}$

$$\iiint_V d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{2r^2-3}^{1} r\,dz\,dr\,d\theta$$

b) Coordenadas cartesianas

Variação de z: $-3\leq z\leq 1$

Corte pelo plano $z=z_0$

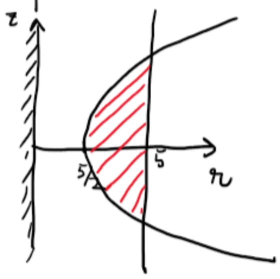


$$\iiint_V d(x,y,z) = \int_{-3}^{1}\int_{-\sqrt{\frac{z+3}{2}}}^{\sqrt{\frac{z+3}{2}}}\int_{-\sqrt{\frac{z+3}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{z+3}{2}-x^2}} dy\,dx\,dz$$

(3B) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq 5,\ \sqrt{4x^2+4y^2}\geq 2z^2+5\}$

a) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\leq 5\\ \sqrt{4x^2+4y^2}\geq 2z^2+5\end{cases}$ $\begin{cases} r\leq 5\\ 2r\geq 2z^2+5\end{cases}$ Então $0\leq\theta\leq 2\pi$

Corte por $\theta=\theta_0$



$r=z^2+\frac{5}{2}$

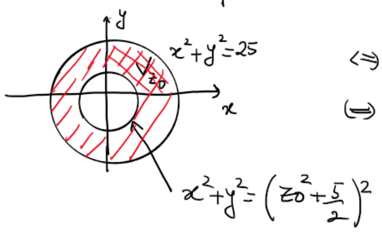
$$\text{Volume }(V)=\int_0^{2\pi}\int_{5/2}^{5}\int_{-\sqrt{r-5/2}}^{\sqrt{r-5/2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

Nota: $r=z^2+\frac{5}{2} \iff z=\pm\sqrt{r-5/2}$

b) A alínea a) ajuda-nos a perceber qual é a variação máxima de z, que se obtém quando $r=5$, pelo que, fazendo $r=5$ em $2r=2z^2+5$, obtemos $z=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Então $-\sqrt{\frac{5}{2}}\leq z\leq\sqrt{\frac{5}{2}}$

Fazendo um corte de V por $z=z_0$, obtemos



$\sqrt{4(x^2+y^2)}=2z_0^2+5$

$\iff \sqrt{x^2+y^2}=z_0^2+\frac{5}{2}$

$\iff x^2+y^2=\left(z_0^2+\frac{5}{2}\right)^2$

$V_{z_0}=V\cap\{(x,y,z_0): x,y\in\mathbb{R}\}$

$$\text{Volume }(V)=4\,\text{Volume}_{\boxtimes}\ (*) = 4\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\int_0^{z^2+\frac{5}{2}}\int_{\sqrt{\left(z^2+\frac{5}{2}\right)^2-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy\,dx\,dz$$

$$+4\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\int_{z^2+\frac{5}{2}}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy\,dx\,dz$$

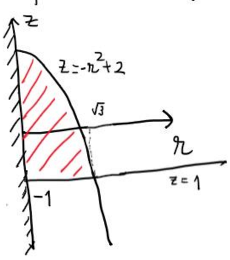
(*) Há aqui um abuso de notação na escrita pois estamos só a ver o corte por $z=z_0$

(3C) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq -1,\ z\leq -(x^2+y^2)+2\}$

$\begin{cases} z\geq -1\\ z\leq -(x^2+y^2)+2\end{cases}$ $\begin{cases} z\geq -1\\ z\leq -r^2+2\end{cases}$ (então $0\leq\theta\leq 2\pi$)

a) Coordenadas cilíndricas

Corte pelo semi-plano $\theta=\theta_0$

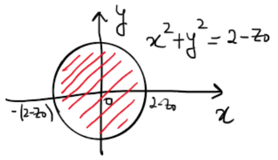


$$\text{Volume }(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-r^2+2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

b) Coordenadas cartesianas

Pela alínea a), vemos que a variação total de z é: $-1 \leq z \leq 2$

Fazendo o corte por $z = z_0$,



$$\text{Volume }(V) = \int_{-1}^{2} \int_{-(2-z)}^{2-z} \int_{-\sqrt{2-z-x^2}}^{\sqrt{2-z-x^2}} dy\,dx\,dz$$

3D) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \geq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq -z^2+3\}$

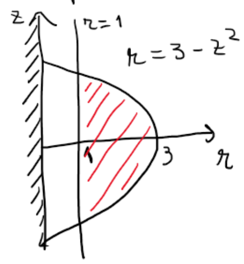
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq -z^2+3 \end{cases} \quad \begin{cases} r \geq 1 \\ r \leq -z^2+3 \end{cases}$$

(então $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

a) Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} r \geq 1 \\ r \leq -z^2+3 \end{cases}$$

Corte por $\theta = \theta_0$



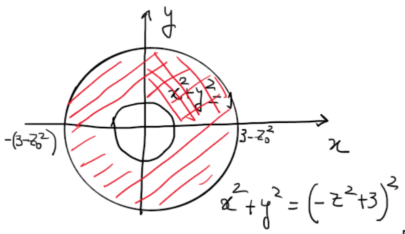
$$\text{Volume }(V) = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_{-\sqrt{3-r}}^{\sqrt{3-r}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

b) Coordenadas cartesianas

Pela alínea a), vemos que a variação total do z é: $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$

(intersecção de $r=1$ com $r = 3-z^2$)

Corte por $z = z_0$



$$\text{Volume}(V) = 4\ \text{Volume}_{\text{⊠}} = 4\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{(3-z^2)^2-x^2}} dy\,dx\,dz + 4\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_1^{3-z^2} \int_0^{\sqrt{(3-z)^2-x^2}} dy\,dx\,dz$$

4A $\vec{F}(x,y) = \left(2xy + y\cos(xy),\ x^2 + x\cos(xy) + y^2\right)$

a) Vou mostrar que $\vec{F}$ é conservativo encontrando $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ (bastaria mostrar que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, mas teríamos de calcular f na alínea b)).

Queremos, então, determinar f tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y\cos(xy) \Rightarrow f(x,y) = x^2 y + \operatorname{sen}(xy) + g(y) \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x\cos(xy) + y^2 \quad (2) \end{cases}$$

~~Então~~, devemos ter:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \underset{\text{por }(1)}{=} \cancel{x^2} + \cancel{x\cos(xy)} + g'(y) \underset{\text{por }(2)}{=} \cancel{x^2} + \cancel{x\cos(xy)} + y^2.$$

b) Como $\vec{F}$ é um campo de vectores conservativo (por a)), então

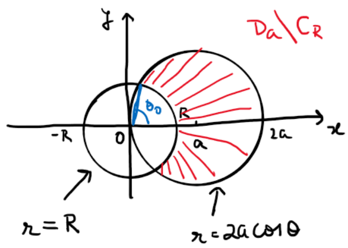
$$\int_C \vec{F} \cdot ds = f(-1, \pi/2) - f(1, \pi) = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi^2}{4} - (\pi + \pi^2)$$

4B $f(x,y) = y^2 x + \cos(xy) + \frac{x^3}{3}$

4C $f(x,y) = y^2 x + \operatorname{sen}(xy) + \frac{x^3}{3}$

4D $f(x,y) = x^2 y + \cos(xy) + \frac{y^3}{3}$

④ $C_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$, $D_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$



$x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow r^2=R^2 \Leftrightarrow r=R$

$(x-a)^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2ax \Leftrightarrow r^2=2ar\cos\theta$

$\Leftrightarrow r=2a\cos\theta$

Determinação de θ_0:

$$\begin{cases} r=R \\ r=2a\cos\theta \end{cases} \Big\{ \cos\theta = \frac{R}{2a} = \alpha \Big\} \theta = \arccos\alpha$$

Seja $D_a^+ = D_a \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Sabemos que

$$\iint_{D_a\setminus C_R} d(x,y) = 2\iint_{D_a^+\setminus C_R} d(x,y)$$

Calculemos o integral da direita:

Variação de θ: $0 \leq \theta \leq \arccos\alpha = \theta_0$

Variação de r: $R \leq r \leq 2a\cos\theta$

Variação de r: $R \leq r \leq 2a\cos\theta$

Então

$$\iint_{D_a^+\setminus C_R} d(x,y) = \int_0^{\theta_0}\int_R^{2a\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0}\left(2a^2\cos^2\theta - \frac{R^2}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} a^2(1+\cos(2\theta))\,d\theta - \frac{R^2\theta_0}{2}$$

$$= \left[a^2\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\right]_0^{\theta_0} - \frac{R^2\theta_0}{2}$$

$$= a^2\theta_0 + a^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 - \frac{R^2\theta_0}{2}$$

$$= a^2\left(1-\frac{R^2}{2a^2}\right)\theta_0 + a^2\cos\theta_0\sqrt{1-\cos^2\theta_0}$$

$$= a^2(1-2\alpha^2)\arccos\alpha + a^2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$$

C.A. $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$\cos(\arccos\alpha) = \alpha$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ porque estamos no 1º quadrante.

Então

$\operatorname{sen}(\arccos\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$

Finalmente,

$$\frac{1}{2}\iint_{D_a} d(x,y) = \iint_{D_a\setminus C_R} d(x,y) \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{2} = 2a^2(1-2\alpha^2)\arccos\alpha + 2a^2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = (1-2\alpha^2)\arccos\alpha + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}$, como queríamos mostrar.