Recordemos que, dado um inteiro positivo n, o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ se diz o espaço euclidiano de dimensão n.
Um elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ diz-se um ponto ou um vetor de $\mathbb{R}^n$.
Frequentemente, identificamos o vetor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com a matriz coluna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Ao vetor $(0, 0, \ldots, 0)$ chamamos zero ou vetor nulo de $\mathbb{R}^n$. Denotamos o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ por $0_{\mathbb{R}^n}$ ou, caso não haja ambiguidade, por 0.

Definição 9.1. Chamamos subespaço de $\mathbb{R}^n$ a qualquer subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $F \neq \emptyset$;
2. $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$;
3. $\alpha \in \mathbb{R}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$.

Exemplo 9.2. Consideremos o conjunto $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4\}$. Vejamos que F é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Começamos por notar que F é, com efeito, um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

1. Tendo em conta que $0 + 0 = 0 - 0$, podemos afirmar que $0 \in F$, pelo que $F \neq \emptyset$.
2. Sejam $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ elementos de F. Então, $x, y \in \mathbb{R}^4$ e $x_1 + x_2 = x_3 - x_4$ e $y_1 + y_2 = y_3 - y_4$. Por definição da adição em $\mathbb{R}^4$, temos que $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ e $x + y \in \mathbb{R}^4$. Para mostrar que $x + y$ é, também, um elemento de F, temos de mostrar que a soma da primeira e da segunda componente de $x + y$ é igual à diferença da terceira e da quarta componente. Temos

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\\ &= (x_3 - x_4) + (y_3 - y_4)\\ &= (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4).\end{aligned}$$

Logo, $x + y \in F$.

3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$. Então, $x \in \mathbb{R}^4$ e $x_1 + x_2 = x_3 - x_4$. Por definição da multiplicação escalar, temos que $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ e $\alpha x \in \mathbb{R}^4$. Mostremos que a soma da primeira e da segunda componente de αx é igual à diferença da terceira e da quarta componente. Temos

$$\begin{aligned} (\alpha x_1) + (\alpha x_2) &= \alpha(x_1 + x_2) \\ &= \alpha(x_3 - x_4) \\ &= (\alpha x_3) - (\alpha x_4). \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha x \in F$.

Por 1., 2. e 3., podemos afirmar que F é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Observação 9.3. Se F é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $0_{\mathbb{R}^n} \in F$: sendo $F \neq \emptyset$, existe pelo menos um vetor v de $\mathbb{R}^n$ que pertence a F e, pela definição de subespaço, sabemos que $0.v \in F$. Logo, $0_{\mathbb{R}^n} \in F$. Assim, se S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que não contém o vetor nulo, então S não é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 9.4. O subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, uma vez que $0_{\mathbb{R}^3} \notin S$.

Proposição 9.5. Um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ se e só se satisfaz as seguintes condições:

1. $0_{\mathbb{R}^n} \in F$;
2. $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$;
3. $\alpha \in \mathbb{R}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$.

Definição 9.6. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Denotamos por $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ o conjunto de todas as possíveis combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Exemplo 9.7. O vetor $(8, 1, 10)$ de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $(1, 2, 5)$ e $(-2, 1, 0)$, pois $(8, 1, 10) = 2(1, 2, 5) + (-3)(-2, 1, 0)$.

Teorema 9.8. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Definição 9.9. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$, o subespaço $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ diz-se o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Se $F =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$, diz-se que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um conjunto gerador de F.

Exemplo 9.10. Sejam $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$. O conjunto de todas as combinações lineares de v_1, v_2 é

$$\begin{aligned} < v_1, v_2 > &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(0, \alpha, 0) + (-\beta, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z\}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.11. Consideremos o vector $v = (1, 5)$ de $\mathbb{R}^2$. O subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por v é o conjunto

$$< (1, 5) >= \{\alpha(1, 5) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 5\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\right\}.$$

Assim, o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por v é a recta de equação $y = 5x$.

Exemplo 9.12. Consideremos, uma vez mais, o subespaço

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4\}$$

de $\mathbb{R}^4$. Note-se que

$$x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \Leftrightarrow x_1 = x_3 - x_4 - x_2.$$

Assim, os elementos de F são exatamente os vetores da forma

$$(x_3 - x_4 - x_2, x_2, x_3, x_4),$$

com $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Dado que

$$(x_3 - x_4 - x_2, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1),$$

podemos concluir que F é o conjunto de todas as possíveis combinações lineares dos vetores $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$. Portanto, $F =< v_1, v_2, v_3 >$.

conjunto gerador

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, temos que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 (1, 0, ..., 0) + x_2 (0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n (0, ..., 0, 1),$$

pelo que qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vectores

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, ..., 0) \\ & & \vdots \\ e_n & = & (0, 0, ..., 0, 1). \end{array}$$

Assim, $\mathbb{R}^n = < e_1, e_2, \ldots, e_n >$. Por outras palavras, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$.

Definição 9.13. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ dizem-se linearmente independentes (abreviamos com l.i.) se nenhum deles for igual a uma combinação linear dos outros $k-1$ vetores.

Um vetor v_1 é linearmente independente se é não nulo.

Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ não são l.i., dizem-se linearmente dependentes (abreviamos com l.d.).

Exemplo 9.14. Os vetores $(1,4), (5,1)$ de $\mathbb{R}^2$ são l.i., enquanto que os vetores $(1,4), (-2,-8)$ são l.d..

Teorema 9.15. [Critério de independência linear] Os elementos $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ são linearmente independentes se e só se é impossível escrever o vetor nulo como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, exceto da forma trivial (ou seja, com todos os coeficientes nulos).

Oservação 9.16. Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se e só se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

Exemplo 9.17. Consideremos, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 2)$ e $w = (0, 0, 3)$. Para estudar a dependência ou independência linear destes vetores, determinemos os escalares α, β, γ tais que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,2) + \gamma(0,0,3) = (0,0,0) \\
& \Leftrightarrow \quad (\alpha,\alpha,0) + (\beta,0,2\beta) + (0,0,3\gamma) = (0,0,0) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, os vetores serão l.i. se e só se o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for determinado, o que facilmente se verifica que acontece.

Exemplo 9.18. O vetor $(1,2,3)$ de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $(1,0,1)$ e $(0,4,4)$. De facto,

$$(1,2,3) = 1(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,4,4).$$

Assim, os vetores $(1,2,3),(1,0,1),(0,4,4)$ são l.d..

Note-se que podemos escrever, por exemplo,

$$(0,0,0) = 1(1,2,3) - 1(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,4,4).$$

Exemplo 9.19. No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, os vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são l.i..

De facto, se

$$(0, 0, \ldots, 0) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

então

$$(0, 0, \ldots, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

pelo que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Exemplo 9.20. Os vetores $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$ são l.i..

De facto,

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

se e só se

$$(0, 0, 0, 0) = (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Assim,

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

se e só se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Teorema 9.21. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vetores de $\mathbb{R}^n$, consideremos a matriz A, do tipo $n \times m$, cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Então, um vetor w de $\mathbb{R}^n$ pertence a $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $Ax = w$ tem solução. Equivalentemente, $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $c(A) = c([A|w])$.

Teorema 9.22. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e A a matriz cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Então, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são l.i. se e só se o sistema $Ax = 0$ é determinado. Equivalentemente, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são l.i. se e só se $c(A) = k$.

Observação 9.23. Seja A uma matriz cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Se $c(A) = r < k$, os k vetores são l.d., mas existem r de entre esse k que são l.i. (por exemplo, os correspondentes às colunas com *pivô* na matriz em forma de escada obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz A).

Exemplo 9.24. Consideremos os vetores $u = (1,2,3)$, $v = (4,5,6)$ e $w = (7,8,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Para estudar a dependência ou independência linear destes vetores, verificamos se existem reais α, β e γ que satisfazem $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, o que equivale a classificar o sistema

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Pretendemos, pois, classificar o sistema $Ax = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

e verificar se a solução nula é a única solução deste sistema.

Usando o método de eliminação de Gauss, obtemos de A a matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Assim, $c(A) = 3$ e o sistema em estudo é determinado, pelo que $Ax = 0$ se e só se $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Podemos, pois, concluir que os vetores u, v, w são l.i..

Definição 9.25. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Uma sequência ordenada de vetores de W l.i. que gerem W diz-se uma **base** de W.

Exemplo 9.26. A sequência $((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1))$ é a chamada base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 9.27. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ elementos linearmente independentes de um subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Sejam ainda $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k.$$

Então $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Definição 9.28. Chamam-se **componentes** ou **coordenadas** de $u \in W$ numa base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ de W aos coeficientes escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ da combinação linear

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Notação 9.29. As coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são denotadas por

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Observação 9.30. Recordemos que, se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ é uma base de W, em particular os vetores são linearmente independentes, e, portanto, dado $u \in W$, os coeficientes de u na base $\mathcal{B}$ são únicos.

Teorema 9.31. Se uma base de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é constituída por k vetores, todas são.

Definição 9.32. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se uma base de W tem k elementos, dizemos que W tem **dimensão** k e escrevemos $\dim W = k$. Se $W = \{0\}$, definimos $\dim W = 0$.

Exemplo 9.33. Tem-se $\dim \mathbb{R}^n = n$ (pense-se, por exemplo, na já referida base canónica – tem n elementos).

Exemplo 9.34. Consideremos o subespaço $F = \{(x, 2x - z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad x, z \in \mathbb{R} \;\; e \;\; y = 2x - z \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = x\,(1, 2, 0) + z\,(0, -1, 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in \langle (1, 2, 0)\,, (0, -1, 1) \rangle\,,\end{aligned}$$

pelo que $\{(1, 2, 0)\,, (0, -1, 1)\}$ é um conjunto gerador de F.

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos a matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que $c(A) = 2$ e os vetores $(1, 2, 0)$, $(0, -1, 1)$ são l.i..

Logo, $((1, 2, 0), (0, -1, 1))$ é uma base de F, pelo que $\dim F = 2$.

Exemplo 9.35. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 3)$. Os subespaços $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \langle v_1 \rangle$, $F_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $F_4 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ têm dimensão $0, 1, 2$ e 3, respetivamente.

Teorema 9.36. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então, $\dim F \leq n$ e

1. $\dim F = n$ se e só se $F = \mathbb{R}^n$.
2. Se $k > n$ quaisquer k vetores $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes.
3. Se $\dim F = r < n$ e $v_1, \ldots, v_r \in F$ são linearmente independentes, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de F.
4. Se $\dim F = r < n$ e $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = F$, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de F.

Observação 9.37. Em particular, temos que quaisquer n vetores l.i. em $\mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$ e que quaisquer n vetores geradores de $\mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.