Cálculo EC - aula 4

18. Calcule as derivadas $f'(x)$ das funções (no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (d) $f(x) = \cos(\ln(x))$

(e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$

a) $$f'(x) = \frac{(x^2-2x+1)'(x+2) - (x^2-2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x+2) - x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$

b) $$f'(x) = (2x^{-3} + 4x^{-2} - 3 + 5x)'$$
$$= -6x^{-4} - 8x^{-3} + 5 = -\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^3} + 5$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}, \ n \in \mathbb{Q}$$

c) $$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1/x \, x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Regra da cadeia

Seja $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow D$. Suponhamos que f é derivável em $x = x_0$ e g é derivável em $y = f(x_0)$. Então $g \circ f: A \longrightarrow D$ é derivável em $x = x_0$ e $(g \circ f)'(x_0) =$
$= f'(x_0)\, g'(f(x_0))$.

$$[f(u(x))]' = u'(x)\, f'(u(x))$$

d) $f'(x) = [\cos(\ln x)]' = (\ln x)' \cos'(\ln x) = -\frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x)$

e) $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^+$

$f'(x) = (x \ln x)' \, e^{x \ln x} = (\ln x + x \, 1/x)\, x^x = (\ln x + 1)\, x^x$

f) $f'(x) = \left(\operatorname{sen}(e^{x^2})\right)' = (e^{x^2})' \operatorname{sen}'(e^{x^2}) =$
$= 2x\, e^{x^2} \cos(e^{x^2})$

19. Estude a derivabilidade em 0 das seguintes funções

a) $f(x) = x - |x|$ b) $f(x) = (x - |x|)x$

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

$\nexists f'(0)$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ 2x^2 & , x < 0 \end{cases}$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} 2x = 0$$

$f'(0) = 0$

20. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Demonstre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule o valor da derivada nesse ponto. Calcule a derivada em todo $\mathbb{R}$. Esta derivada é contínua?

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$= 0$ uma vez que $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada.

$x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{1}{x}\right)' \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & se \ x \neq 0 \\ 0, & se \ x = 0 \end{cases}$

f' é contínua ?

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underset{0}{\underset{\|}{2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}} - \underbrace{\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{não existe}}$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$

$\Rightarrow f'$ não é contínua em $x = 0$

21. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Indique os coeficientes a e b necessários para que f seja derivável em 1.

f contínua em $x = 1$ $\qquad f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = a+b \end{array}\right\} \quad a+b = 1 \Rightarrow b = 1-a$$

f derivável em $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax+\cancel{1}-a-\cancel{1}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{ax-a}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = a$$

$a = 2 \quad$ e $\quad b = 1-2 = -1$

22. Seja $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável.

(a) Calcule as derivadas das funções f e g dadas por $f(x) = \cos(u(x))$ e $g(x) = e^{u(x)} + (u(x))^4$.

(b) Sabendo que $u(1) = 0$ e $u'(1) = 1$, determine a equação da recta tangente em 1 ao gráfico de f, e ao gráfico de g.

$$\left[(u(x))^n \right]' = n\, u^{n-1}(x)\, u'(x)$$
$n \in \mathbb{Q}$

a) $f'(x) = -u'(x)\,\text{sen}(u(x))$

$g'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} + 4\, u^3(x)\, u'(x)$

b) Equação da reta com declive m que incide no ponto (x_0, y_0)

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Equação da Reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Função f:

$f(1) = \cos(u(1)) = \cos(0) = 1$

$f'(1) = -u'(1)\,\text{sen}(u(1)) = -1\,\text{sen}(0) = 0$

Reta tangente: $y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = 1}$

Função g:

$g(1) = e^{u(1)} + (u(1))^4 = e^0 = 1$

$g'(1) = u'(1)\, e^{u(1)} + 4\, u^3(1)\, u'(1) = e^0 = 1$

Reta tangente: $y = g(1) + g'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y = 1 + (x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = x}$

23. Determine os intervalos de monotonia da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x = x \cos x$

$f'(x) = 0 \iff x \cos x = 0 \iff x = 0 \lor x = \pi/2 \quad (x \in [0, \pi])$

	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$f(0) = 1$

$f(\pi/2) = \pi/2$ máximo global

$f(\pi) = -1$ mínimo global

Em $]0, \pi/2[$ f é estritamente crescente

Em $]\pi/2, \pi[$ f é estritamente decrescente

24. Estude a função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (i.e. indique o domínio, os intervalos de monotonia, os extremos locais, o sentido da concavidade por intervalos, os pontos de inflexão e esboce o gráfico). zeros, assintotas, paridade.

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = f(x) \implies f$ é par

$f'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' e^{-x^2/2} = -x\, e^{-x^2/2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

		0	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘

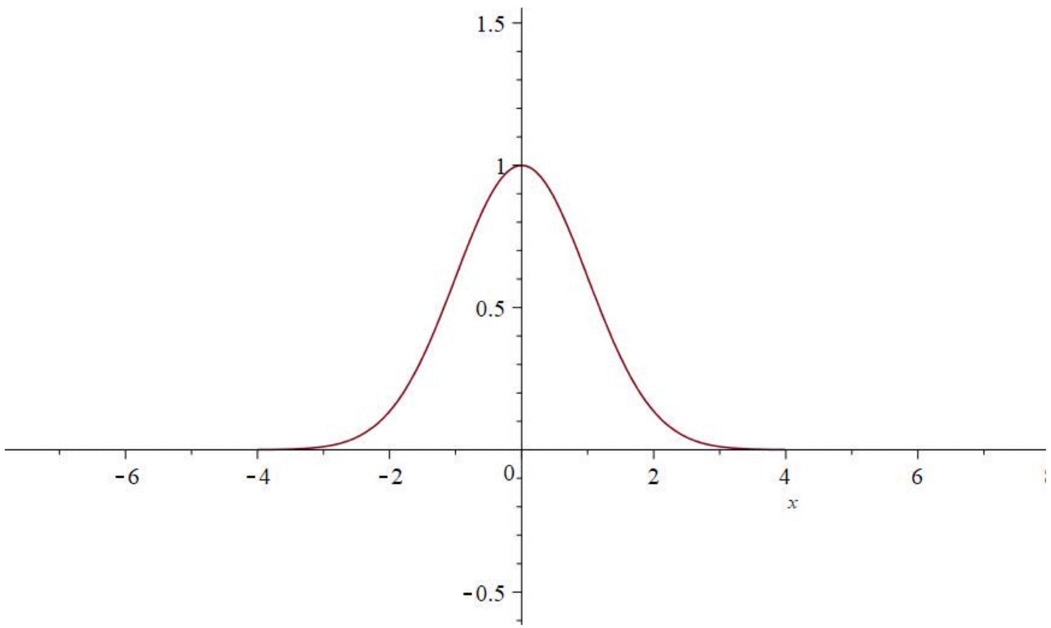
$f''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} = (x^2-1)\, e^{-x^2/2}$

$f''(x) = 0 \iff x = 1 \lor x = -1$

		-1		1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

f tem uma assíntota horizontal: $y = 0$



esboço do gráfico de f