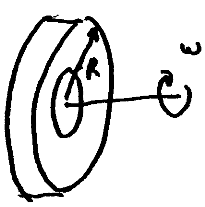
Referenciais inerciais e transformações de Galileu

1. Um referencial inercial é aquele no qual as 1ª e 2ª leis de Newton são válidas: Na ausência de forças exteriores, a partícula permanece em movimento uniforme e, sob acção de uma força, é acelerada proporcionalmente a essa força. É uma boa definição se soubermos distinguir "forças exteriores" de "acelerações", isto é, identificar acelerações que não resultam de forças exteriores. Vamos supor que somos capazes disso. Por exemplo: imaginemos que no espaço livre de gravidade viajamos numa nave que tem a forma de uma roda e que tem uma velocidade angular ω constante em torno do seu eixo de simetria. Qual será essa velocidade $\omega(R)$ para que possamos sentir uma força gravítica familiar (mg)?

Como



vimos, a aceleração em coordenadas polares é:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \hat{\theta}$$

Se $\omega = \text{const.}$; $r = \text{const}$; $\Rightarrow$ $\vec{a} = -r\omega^2 \hat{r}$; Na nave, esta força é exercida nos nossos pés pela parede lateral da nave e permite-nos rodar com a dita velocidade ω

Se $a = g$, $\quad r\omega^2 = g \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r}$

(sentimos o nosso peso usual)

Se $r = 500$ metros $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m}\cdot s^{-2}}{500 \text{ m}}} \simeq \sqrt{0{,}0196} = 0{,}14$ Rad.

($8°/s$). Uma velocidade modesta.

Imaginemos agora uma centrifugadora capaz de rodar a 1000 Revoluções/segundo (60 000 por minuto).

$$\omega = 2\pi \cdot 1000 \sim 6000 \text{ Rad}\cdot s^{-1}$$

Se estivermos a 10 cm do eixo sentiríamos uma ~~[illegible]~~ aceleração

$$a = \omega^2 r = \underbrace{6000^2}_{(\text{Rad}\cdot s^{-1})^2} \cdot 0{,}1 \text{ (m)} = 36 \times 10^6 = 3{,}6 \times 10^6 \text{ m}\, s^{-2}$$

!!!

(não experimentem em casa)

Se o meio em que nos movemos fosse um fluido de densidade $\rho_f < \rho_h$ (a nossa densidade média), qual a força que sentiríamos? Bem,

$$m\,a = m r \omega^2 = 6000^2 \cdot 10^{-1} \times 60 \text{ Kg} \sim 18 \times 10^7 \text{ N}$$

(comparado com $60 \cancel{kg} \times 9{,}8$ N $= 588$ N que sentimos na Terra: esmagador, não?)

O fluido (ar, por exemplo), com uma densidade menor sentirá uma força menor F_{fluido} (por unidade de volume)

$\Rightarrow$

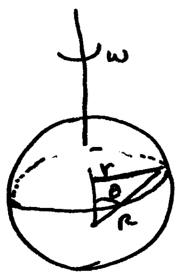
Cada camada radial do fluido precisa de uma força centrípeta proporcional à sua massa/volume e ao raio da sua trajectória, estabelece-se assim um gradiente de densidade; uma partícula suspensa no fluido "cai" para a periferia até que a sua densidade iguale a densidade local do fluido. As partículas suspensas são assim separadas radialmente por densidades!

A centrifugadora não é um "referencial inercial". E a Terra? também roda torno do seu eixo. Na sua superfície:

$$a = \omega^2 R_T = \left[0,73 \times 10^{-4} \, (s^{-1})\right]^2 \cdot 6,4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= 0,034 \text{ m s}^{-2}$$

<u>Problema:</u> se a Terra fosse esférica como variaria g com a latitude, em resultado do seu movimento de rotação?



$$r = R \sin\theta$$

$$a = \omega^2 R \sin\theta$$

$$g = g_0 - \omega^2 R \sin\theta.$$

$g_0 \equiv$ aceleração da gravidade no polo.

A variação da aceleração da gravidade mostra que a Terra não é um perfeito referencial inercial.

Neste referencial, as leis de Newton são aproximadamente verificadas.

Há, além disso a rotação da Terra em torno do Sol, cujo velocidade angular correspondente vale $\sim 2 \times 10^{-7}\ s^{-1}$ (2π radianos são percorridos em 1 ano); o raio da órbita é $\sim 15 \times 10^{10}$ m $\Rightarrow a = \omega^2 R \sim$ ~~[illegible]~~ $6 \times 10^{-3}\ m \cdot s^{-1}$

E o centro da nossa galáxia? Uma estimativa mostra que o sistema solar (e $\therefore$ a Terra) está a uma distância de 3×10^{20} m do centro da galáxia e deve "rodar" a velocidades da ordem de $3 \times 10^{5}\ m\ s^{-1} \Rightarrow a \simeq 3, \times 10^{-10}\ m\ s^{-2}$!
(é um melhor sistema inercial).

Podemos assim admitir um conjunto um conjunto de postulados:

1. O espaço é Euclidiano
2. O espaço é isotrópico
3. As leis de Newton (1.ª e 2.ª) são válidas na superfície da Terra, se descontarmos as correcções do seu movimento de rotação e de translação em torno do Sol. São válidas em referenciais inerciais ideais.
4. O tempo é absoluto.

A noção de referencial ideal é $\therefore$ dependente de sabermos se há ou não forças aplicadas à partícula. E, em rigor, não temos maneira exacta de o saber se não tivermos um referencial inercial: há algo tautológico!

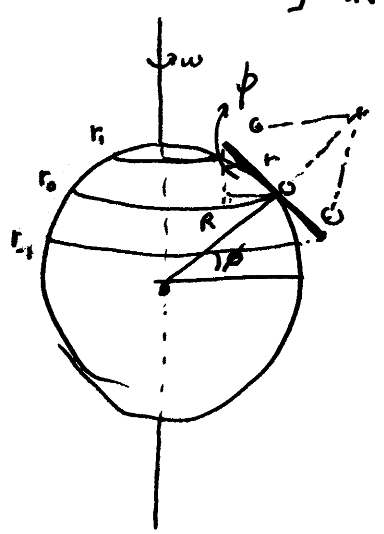
Podemos no entanto dizer que, um referencial inercial é todo aquele que, $\vec{F} = m\vec{a}$ é observado, sempre que observamos que as forças identificadas explicam a aceleração da partícula relativamente a esse referencial. Mas, podemos identificar <u>todas as forças</u>? Bom, as forças que conhecemos decaem com a distância e ∴ forças com origem em objectos suficientemente afastados do nosso sistema podem ser ignorados.

<u>Um problema para pensar (sobre especulações cosmológicas)</u>

É a aceleração absoluta ou relativa? Newton versus Mach (ver Berkeley pag 111). [é o espaço absoluto ou relativo?].

<u>Outro problema:</u> O Pendulo de Foucault (1851)

(ver Berkeley 115)



$$r_1 = R\cos\phi - r\sin\phi$$

$$r_0 = R\cos\phi$$

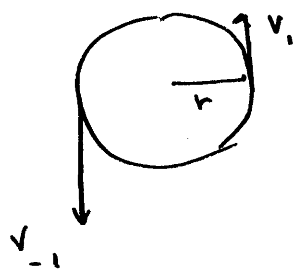
$$r_{-1} = R\cos\phi + r\sin\phi$$

velocidade tangencial

$$v_1 = \omega r_1 = \omega[R\cos\phi - r\sin\phi]$$

$$v_0 = \omega R\cos\phi$$

$$v_{-1} = \omega r_{-1} = \omega[R\cos\phi + r\sin\phi$$



$$\Delta v = \omega r \sin\phi$$

$$T_e = \frac{2\pi r}{\omega r \sin\phi} = \frac{24h}{\sin\phi}$$

(período de rotação do pêndulo)

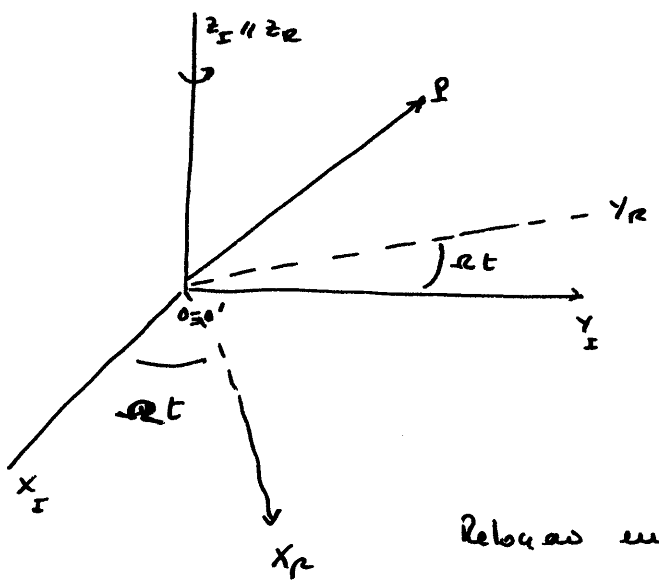
Força de Coriolis:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (\text{ref. inercial}) \quad S$$

$S' \equiv$ Referencial que roda em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\Omega}(t)$

$$\vec{F}' = ?$$

Vejamos um caso simples: S' roda em torno de $z' /\!/ z$ com velocidade angular constante: $\Omega\,\hat{z}$ *



Simples algebra:

$$x_I = x_R \cos\Omega t - Y_R \sin\Omega t$$

$$Y_I = x_R \sin\Omega t + Y_R \cos\omega t$$

$$z_I = z_R$$

Relações entre as velocidades ~~[illegible]~~ nos dois ref.:

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}_I = \dot{x}_R \cos\Omega t - \Omega x_R \sin\Omega t - \dot{Y}_R \sin\Omega t - \Omega Y_R \cos\Omega t \\ \dot{Y}_I = \dot{x}_R \sin\Omega t + \Omega x_R \cos\Omega t + \dot{Y}_R \cos\Omega t - \Omega Y_R \sin\Omega t \\ \dot{z}_I = \dot{z}_R \end{cases}$$

((*) $t = t' = 0 \Rightarrow \hat{x}_R \equiv \hat{x}_I$)

Observação: se uma partícula estiver em repouso em S'

então $\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{x}_I = -\Omega x_R \sin\Omega t - \Omega y_R \cos\Omega t$$

$$\dot{y}_I = \Omega x_R \cos\Omega t - \Omega y_R \sin\Omega t$$

Se uma partícula estiver em repouso no Ref. inercial, temos:

$$0 = (\dot{x}_R - \Omega y_R)\cos\Omega t - (\Omega x_R + \dot{y}_R)\sin\Omega t$$

$$0 = (\Omega x_R + \dot{y}_R)\cos(\Omega t) + (\dot{x}_R - \Omega y_R)\sin\Omega t$$

o que impõe que

$$\begin{cases} \dot{x}_R - \Omega y_R = 0 \\ \dot{y}_R + \Omega x_R = 0 \end{cases}$$

A aceleração da partícula é calculada derivando novamente (*) em ordem ao tempo:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos\Omega t - 2\Omega \dot{x}_R \sin\Omega t - \Omega^2 x_R \cos\Omega t - \ddot{y}_R \sin\Omega t - 2\Omega \dot{y}_R \cos\Omega t + \Omega^2 y_R \sin\Omega t$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{x}_R \sin\Omega t + 2\Omega \dot{x}_R \cos\Omega t - \Omega^2 x_R \sin\Omega t + \ddot{y}_R \cos\Omega t - 2\omega \dot{y}_R \sin\Omega t - \Omega^2 y_R \cos\omega t$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R$$

Consideremos, por simplicidade a aceleração em $t=0$ de uma partícula que executa um movimento circular uniforme relativamente ao Referencial em rotação:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R - \Omega^2 x_R - 2\Omega \dot{y}_R \Longrightarrow m\ddot{x}_I = F_x = m\ddot{x}_R - m\Omega^2 x_R - 2\Omega m \dot{y}_R$$

$$m\ddot{x}_R = F_x + 2m\Omega\dot{y}_R + m\Omega^2 x_R \qquad (**)$$

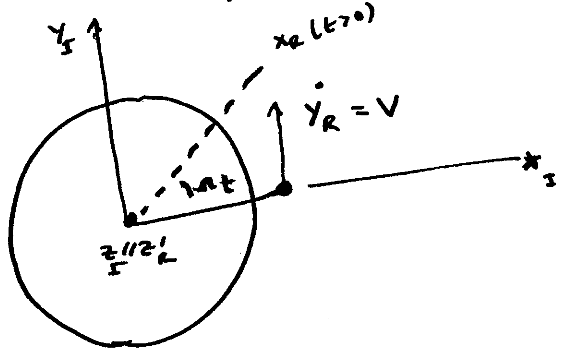
$m\ddot{x}_R$: "Força efectiva" no ref. em rotação

F_x: força externa actua na partícula

$2m\Omega\dot{y}_R$: Coriolis

$m\Omega^2 x_R$: centrífuga.

Para $t=0$ $\quad \dot{y}_R$



Imaginemos a situação do ponto de vista do ref. Inercial:

$$-m\frac{[\Omega r + V]^2}{r} = F_x = -m\underline{\omega}^2 r - 2m\Omega V - \frac{mV^2}{r}$$

exactamente em acordo com (**)

- Imaginemos um outro exemplo:

uma partícula move-se no ref. inercial como

$$x_I = V_0 t \quad ; \quad Y_I = Z_I = 0$$

Qual a trajectória vista do referencial em rotação?

$$(**) \begin{cases} V_0 t = x_R \cos\Omega t - Y_R \sin\Omega t \\ 0 = x_R \sin\Omega t + Y_R \cos\Omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} V_0 t \cos\Omega t = x_R \cos^2 - Y_R \sin\ldots \\ 0 = x_R \sin^2 + Y_R \sin \cos \end{array}$$

$$(V_0 t)\cos\Omega t = x_R$$

de forma semelhante

$$Y_R = -V_0 t \sin(\omega t)$$

trajectória circular

Das eq. da página (ii)

$$\ddot{X}_I = 0, \quad \ddot{Y}_I = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\Omega t \qquad 0 = (\ddot{X}_R - \Omega^2 x_R - 2\Omega \dot{Y}_R)\cos\Omega t - (2\Omega \dot{X}_R + \ddot{Y}_R - \Omega^2 Y_R)\ldots$$

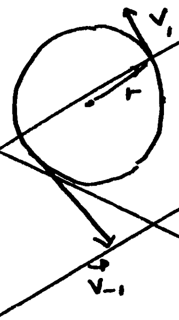
$$\sin\Omega t \qquad 0 = (2\Omega \dot{X}_R + \ddot{Y}_R - \Omega^2 Y_R)\cos\Omega t + (\ddot{X}_R - \Omega^2 X_R - 2\Omega \dot{Y}_R)\sin\Omega t$$

+

$$\ddot{X}_R - \Omega^2 X_R - 2\Omega \dot{Y}_R = 0$$

Observação: 3d:

$$\boxed{\vec{a}_I = \underbrace{\vec{a}_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_R}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}}_{\text{centrífuga}} = \frac{\vec{F}}{m}}$$



$\Delta \vec{V} = \omega r \sin\phi$

$T_R = \frac{2\pi r}{\omega r \sin\phi} = \frac{24h}{\sin\phi}$ (período de rotação do pêndulo)

(ver nota sob força de Coriolis).

---

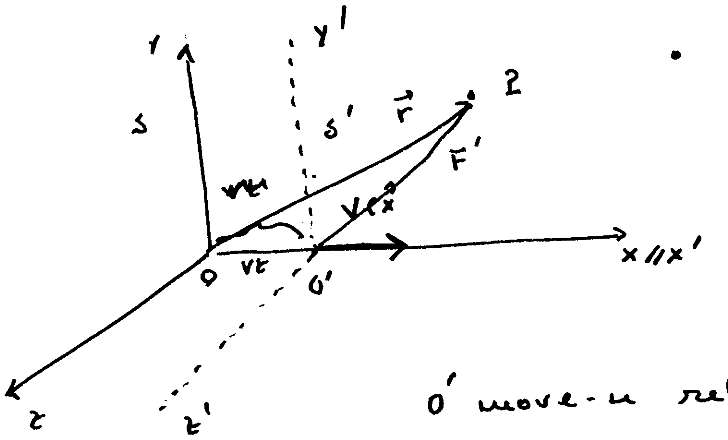
2. Hipótese de Galileu

A velocidade absoluta não tem sentido porque não há maneira experimental de o demonstrar: as leis da física são as mesmas para dois observadores que se movem com velocidade constante um relativamente ao outro. Isto impõe condições sobre como se transformam as equações que exprimem leis físicas sob transformação de referenciais inerciais

Consideremos as seguintes hipóteses de partida.

i) O tempo "corre" do mesmo modo para todos os observadores inerciais; é universal.

ii) O comprimento de um vector (num rígido) é o o mesmo para todos os observadores inerciais



• $t = t' = 0 \rightarrow x' = x = 0$

O' move-se relativamente a O como se ilustra.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}\,' + Vt\,\hat{x} \\ t = t' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x' + Vt = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array}\right.$$

Escrevemos isto sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{V} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{M}}} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad \text{(Galileu)}$$

Note que $\det \bar{\bar{T}} = 1$: uma transformação de Galileu é uma transformação ortogonal: preserva a norma dos vectores (como havíamos requerido).

$$[t_1, x_1, y_1, z_1] \cdot \begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = [t_1', x_1', y_1', z_1'] \; M^T M \begin{bmatrix} t_2' \\ x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M^T M = \bar{\bar{E}} \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$$

Uma consequência desta transformação é a lei de adição de velocidades

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{d}{dt'}(x' + Vt') = v'_x + V$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}}$$

As leis da física devem ser invariantes sob $\overline{\overline{M}}$.

Como $\vec{V} = \vec{c}$ (constante), $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{a}'$

Logo

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m'\vec{a}' \\ \vec{F} &= m\vec{a} \end{aligned} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F} \quad \underline{\text{se}} \quad \underline{\underline{m' = m}}$$

<u>Problema</u>: Duas partículas colidem. ~~no~~ Um observador num dado referencial garante que há conservação de momento linear. Que pode concluir um outro observador que se move relativamente ao primeiro com velocidade $\vec{U} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y})$?

S:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{w}_1 + m_2\vec{w}_2$$

S' $\quad \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{U} \quad ; \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{U} \quad$ etc.

em S'

$$m_1\left(\vec{v}_1' + \vec{U}\right) + m_2\left(\vec{v}_2' + \vec{U}\right) = m_1\left(\bar{w}_1' + \bar{U}\right) + m_2\left(w_2' + \bar{U}\right)$$

$\Rightarrow$ o momento também é conservado em S'

$\square$