Cálculo EC

Neste capítulo vamos estudar dois tipos de equações diferenciais de ordem um numa variável: equações de variáveis separáveis e equações lineares.

Em tudo o que segue, I, J denotarão intervalos abertos e não vazio de $\mathbb{R}$.

1 Equações de variáveis separáveis

Definição. *Chamamos equação de* **variáveis separáveis** *a uma equação que se pode escrever na forma* $y' = f(x)g(y)$ *em que* f *e* g *são funções reais contínuas definidas em intervalos.*

As equações diferenciais da forma $P(x) + Q(y)y' = 0$, em que Q não se anula, são claramente equações de variáveis separáveis, uma vez que, "perto" de pontos onde Q não se anula, esta equação é equivalente à equação diferencial $y' = -P(x)\,\frac{1}{Q(y)}$.

Definição. *Uma* **solução** *de uma equação do tipo* $y' = f(x)g(y)$ *é uma função* $y : I \to \mathbb{R}$*, em que* I *é um* <u>*intervalo aberto*</u>*, tal que*

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = f(x)g(y(x)).$$

Diremos que a solução y *passa por um ponto* (a, b) *se* $a \in I$ *e* $y(a) = b$.

A solução diz-se **maximal** *se não for prolongável a uma outra solução definida num intervalo aberto contendo propriamente* I.

Vejamos dois exemplos.

Exemplos.

a) Para todo $c \in \mathbb{R}$ *as funções,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc}]-c, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc}]-\infty, -c[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial $y' = -y^2$.

b) As funções,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

são duas soluções maximais (com o mesmo domínio) da equação diferencial $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$*, que passam no ponto* $(0, 0)$.

Fica assim claro que os domínios das diversas soluções maximais de uma equação diferencial "não têm forçosamente qualquer relação entre si".

Apesar de existirem resultados de existência e unicidade para equações deste tipo, não se espera conseguir encontrar, mesmo em casos simples, as soluções das equações de um modo explícito. Por outro lado, só quando se encontram soluções explícitas é que se perguntará pelas soluções maximais.

Estamos agora em condições de enunciar uma versão do Teorema Fundamental deste tipo de equações diferenciais.

Teorema (Fundamental das Eq. Diferenciais do tipo $y' = f(x)g(y)$)**.** *Consideremos a equação diferencial $y' = f(x)g(y)$, em que $f : I \to$ é contínua e $g : J \to \mathbb{R}$ admite derivada contínua.*

Se $(a, b) \in I \times J$:

a) existe uma e uma só solução maximal da equação diferencial que passa por (a, b);

b) toda a solução da equação diferencial pode ser prolongada a uma solução maximal;

c) se $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são duas soluções da equação diferencial que passam em (a, b) então $y_{1|I_1 \cap I_2} = y_{2|I_1 \cap I_2}$.

1.1 Método de resolução

Consideremos uma equação diferencial do tipo referido acima. Vamos procurar uma solução que passe num dado ponto $(a, b) \in I \times J$.

- Se $g(b) = 0$ então a função

$$\begin{array}{rccc} y : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & b \end{array}$$

  é **a** solução maximal da equação que passa no ponto (a, b);

- Se $g(b) \neq 0$ então a equação original é equivalente, numa vizinhança de (a, b), à equação,

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = f(x).$$

  Sejam $A(x)$ uma primitiva de $f(x)$ e $B(y)$ uma primitiva de $\dfrac{1}{g(y)}$. Note-se que a derivada de $B \circ y$ em ordem a x é igual a $B'(y)y'$ e portanto

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = f(x) \iff \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad B(y) = A(x) + c.$$

  Esta equação define implicitamente y como função de x, mas apenas em casos muito particulares conseguimos explicitar o valor de y. Por exemplo, se B for invertível então a igualdade acima é equivalente a $y = B^{-1}\left(A(x) + C\right)$.

  Por outro lado, independentemente de se conseguir explicitar y, o valor de c pode ser determinado, "obrigando" o ponto (a, b) a satisfazer a igualdade. Temos assim, $c = B(b) - A(a)$.

Exemplos. *Vejamos alguns exemplos em que vamos encontrar as soluções maximais que passam num ponto genérico* (a, b). *É claro que teremos de separar em vários casos.*

a) *Consideremos a equação* $y' = -y^2$ *de domínio* $\mathbb{R}^2$. *Esta equação é de variáveis separáveis. Note-se que* $-y^2$ *só se anula no ponto* 0. *Assim podemos concluir que:*

- *a função nula, definida em* $\mathbb{R}$, *é a solução maximal que passa nos ponto da forma* $(a, 0)$;
- *a equação é equivalente, em alguma vizinhança de um dado ponto* (a, b), *com* $b \neq 0$ *à equação,* $-\frac{1}{y^2}\, y' = 1$. *Integrando em ordem a* x, *obtemos, obtemos* $\frac{1}{y} = x + c$, *para algum* $c \in \mathbb{R}$ *e, portanto* $y = \frac{1}{x+c}$.

  Como $y(a) = b$ *concluímos que* $c = -a + \frac{1}{b}$. *O domínio da solução é maximal é então* $]-c, +\infty[$ *ou* $]-\infty, -c[$ *consoante* a *é maior ou menor do que* $-c$, *uma vez que* a *tem de pertencer ao domínio!*
  Por exemplo, a solução maximal que passa no ponto $(1, 1)$ *é a função*

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

  Mais geralmente a solução maximal que passa em (a, b) *é*

$$\begin{array}{rccc} y: &]a - \frac{1}{b}, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x-a+\frac{1}{b}} \end{array} \qquad \textit{se } b > 0;$$

$$\begin{array}{rccc} y: &]-\infty, a - \frac{1}{b}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x-a+\frac{1}{b}} \end{array} \qquad \textit{se } b < 0.$$

b) *Consideremos a equação diferencial* $y' = y(1 - y)$ *de domínio* $\mathbb{R}^2$ *e vamos encontrar a solução maximal que passa no ponto* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *De modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior,*

- *se* $b = 0$, *a função nula, definida em* $\mathbb{R}$, *é a solução maximal pedida;*
- *se* $b = 1$, *a solução maximal é a função constante e igual a* 1, *definida em* $\mathbb{R}$;
- *se* $b \notin \{0, 1\}$, *a equação é equivalente, em alguma vizinhança de* (a, b), *à equação,* $\dfrac{1}{y(1-y)}\, y' = 1$.
  Integrando em ordem a x *obtemos* $\log|y| - \log|1 - y| = x + d$, *para algum* $d \in \mathbb{R}$, *ou equivalentemente,* $\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + d$. *Para prosseguir, vamos dividir em dois casos:*

  – *se* $\dfrac{b}{1-b} > 0$, *ou seja, se* $b \in]0, 1[$, *então,*

$$\begin{aligned} \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + d \quad &\Leftrightarrow \quad \log\frac{y}{1-y} = x + d \quad \textit{numa vizinhança de } (a, b) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{1-y} = e^{x+d} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{x+d}}{1 + e^{x+d}}, \end{aligned}$$

  em que $d = \log\dfrac{b}{1-b} - a$ *e o domínio da solução é* $\mathbb{R}$;

– *se* $\dfrac{b}{1-b} < 0$ *ou seja, se* $b \notin]0,1[$ *então,*

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x+d \quad &\Leftrightarrow \quad \log\frac{y}{y-1} = x+d \quad \textit{numa vizinhança de } (a,b)\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y-1} = e^{x+d}\\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{x+d}}{e^{x+d}-1},\end{aligned}$$

em que $d = \log\dfrac{b}{b-1} - a$ *e o domínio da solução é o maior intervalo aberto contido em* $\mathbb{R}\setminus\{-d\}$ *e que contém* a. *Mais concretamente, o domínio é (recorde-se que* $b \notin]0,1[$*),*

$$\begin{cases}]-\infty,-d[& \textit{se } a < -d, \textit{ ou seja, se } b < 0;\\ \\ ]-d,+\infty[& \textit{se } a > -d, \textit{ ou seja, se } b > 1.\end{cases}$$

c) Aplicando o mesmo raciocínio à equação $x - yy' = 0$ *de domínio, chegamos à solução geral (implícita)*

$$x^2 - y^2 = A \quad \textit{para algum } A \in \mathbb{R}.$$

Deste modo as soluções maximais são de uma das seguintes formas,

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-A}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\sqrt{x^2-A}\end{array}$$

em que $A = a^2 - b^2$ *e*

$$I = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } A < 0 \textit{ (ou seja, } |b| > |a|);\\ \\ \mathbb{R}^+ & \textit{se } A = 0 \textit{ (ou seja, } |b| = |a|) \textit{ e } a > 0;\\ \\ \mathbb{R}^- & \textit{se } A = 0 \textit{ (ou seja, } |b| = |a|) \textit{ e } a < 0;\\ \\ ]\sqrt{A},+\infty[& \textit{se } A > 0 \textit{ (ou seja, } |b| < |a|) \textit{ e } a > \sqrt{A};\\ \\ ]-\infty,-\sqrt{A}[& \textit{se } A > 0 \textit{ (ou seja, } |b| < |a|) \textit{ e } a < -\sqrt{A}.\end{cases}$$

d) Consideremos a equação $y' = (1-y^2)\cos x$ *de domínio* $\mathbb{R}^2$. *Assim,*

- *se* $b = 1$ *a função constante e igual a* 1, *definida em* $\mathbb{R}$, *é a solução maximal que passa nos pontos da forma* $(a,1)$*;*
- *se* $b = -1$ *a função constante e igual a* -1, *definida em* $\mathbb{R}$, *é a solução maximal que passa nos pontos da forma* $(a,-1)$*;*
- *se* $b \notin \{-1,1\}$, *a equação é equivalente, em alguma vizinhança do ponto* (a,b), *à equação,*

$$\frac{1}{1-y^2}\,y' = \cos x.$$

Integrando em ordem a x *obtemos* $\log\left|\dfrac{y+1}{y-1}\right| = 2\,\mathrm{sen}\,x + D$ *para algum* D. *Deste modo,*

– *se* $\frac{b+1}{b-1} < 0$ *(ou seja, se* $b \in]-1,1[$*), então, numa vizinhança de* (a,b)*,*

$$\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = 2\operatorname{sen}x + D \iff \log\frac{y+1}{1-y} = 2\operatorname{sen}x + D$$
$$\iff y = \frac{e^{2\operatorname{sen}x+D}-1}{e^{2\operatorname{sen}x+D}+1},$$

em que $D = \log\dfrac{1+b}{1-b} - 2\operatorname{sen}a$*. Deste modo a solução maximal tem domínio* $\mathbb{R}$*.*

– *se* $\frac{b+1}{b-1} > 0$ *(ou seja, se* $b \notin]-1,1[$ *) então, numa vizinhança de* (a,b)*,*

$$\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = 2\operatorname{sen}x + D \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2\operatorname{sen}x+D}+1}{e^{2\operatorname{sen}x+D}-1},$$

Em que $D = \log\dfrac{b+1}{b-1} - 2\operatorname{sen}a$*. O domínio da solução maximal é o maior intervalo aberto contendo* a *e contido em*

$$\{x \in \mathbb{R} : 2\operatorname{sen}x + D \neq 0\}.$$

O cálculo deste intervalo fica ao cuidado do leitor.

e) Pretende-se neste exemplo encontrar as funções $y : I \to \mathbb{R}$*, em que* $0 \in I$*, de classe* C^1 *tais que:*

- *se* $P = (a, y(a))$ *é um ponto genérico do gráfico da função e* M *é o ponto de intersecção da recta normal ao gráfico no ponto* $(a, y(a))$ *com o eixo* OX*, então o ponto* $N = (a, 0)$ *é o ponto médio do segmento que une a origem ao ponto* M*;*
- $y(0) = 1$*.*

Passos da resolução:

- *Equação da recta normal:* $Y = -\dfrac{1}{y'(a)}X + \left(y(a) + \dfrac{a}{y'(a)}\right)$*;*
- *Intersecção da recta normal com o eixo* OX*:* $(y(a)y'(a) + a, 0)$*;*
- *Condição sobre o ponto* N*:* $2(a,0) = (y(a)y'(a) + a, 0)$ *ou seja* $y(a)y'(a) = a$*.*

Deste modo, a função é solução da equação diferencial de variáveis separáveis $yy' = x$ *que passa no ponto* $(0,1)$*. A solução, definida no maior intervalo possível, é então,*

$$\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Uma versão um pouco mais geométrica desta demonstração é a seguinte (para simplificar a notação vamos supor que a *e* $y(a)$ *são positivos):*

- *consideramos o triângulo rectângulo de vértices* N*,* M *e* P*;*
- *notamos que a tangente do ângulo do triângulo em* M *é o simétrico da inclinação da recta que une* P *a* M *(ou seja é igual a* $\frac{1}{y'(a)}$*);*
- *por outro lado, essa tangente é o quociente entre a medida do cateto vertical* $y(a)$ *e a medida do cateto horizontal* a*.*

Igualando as duas quantidades encontradas ($\frac{1}{y'(a)}$ *e* $\frac{y(a)}{a}$)*, chegamos à equação diferencial referida acima.*

1.2 Exercícios

Exercício 1. Encontre expressões globais para as soluções das seguintes equações diferenciais:

a) $y' = y^2$;
b) $(x + xy) - y' = 0$;
c) $(x + 1)y' + y^2 = 0$;
d) $yy' = e^{x+2y} \operatorname{sen} x$;
e) $x\, y' + y = \frac{1}{y^2}$;
f) $yx^{y-1} + (x^y \log x)y' = 0$;
g) $\operatorname{tg} x \, \cos y = -y' \operatorname{tg} y$.

Exercício 2. Considere uma equação diferencial do tipo $y' = f(y)$ em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

a) Mostre que, se f se anula em algum ponto b, então nenhuma solução da equação diferencial é sobrejectiva.
b) Mostre que toda a solução não constante da equação é injectiva.

Exercício 3. Quais são as soluções maximais da equação diferencial $y' = x(1 - y^2)$ cujo domínio é $]0, +\infty[$?

Exercício 4. Encontre uma expressão local das soluções das equações diferencial. $y' = \dfrac{x^2y - y}{y + 1}$, que passa em $P = (-1, 3)$;

Exercício 5. Para cada uma das equações, calcule a solução maximal que passa nos pontos referidos:

a) $y' = \dfrac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$, $P = (1, -1)$;
b) $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$, $P = (\frac{1}{2}, 1)$ e $Q = (2, -1)$;
c) $xy' = y^2$, $P = (1, 1)$;
d) $xy' = -y^2$, $P = (1, 1)$;
e) $x^2y' - y^2 = 0$, $P = (1, \frac{2}{3})$;
f) $y' = 3x^2(y^2 - 1)$, $P = (1, 1)$, $Q = (0, \frac{1}{2})$ e $R = (1, 3)$;
g) $xy' = 2y^2$, $P = (1, 1)$.

Exercício 6. Quais são as funções $f : I \to \mathbb{R}$ (com I intervalo aberto) cujas tangentes em qualquer ponto passam no ponto $(1, 2)$?

Exercício 7. Encontre as soluções maximais da equação

$$y' = \frac{(y^2 - 4)e^{3x}}{y},$$

que passam nos pontos $(\frac{1}{3} \log(\log 3), 2)$ e $(\frac{1}{3} \log(\log 3), 1)$.

Exercício 8. Considere a equação diferencial $y' = e^x \sqrt{|y|}$.

a) Determine todas as soluções maximais da equação.
b) Quais das funções encontradas na alínea anterior podem ser prolongadas a $\mathbb{R}$, de modo a obter uma solução da equação diferencial $y' = e^x \sqrt{|y|}$ em $\mathbb{R}^2$?

2 Equações diferenciais lineares de ordem um

Esta secção é dedicada ao estudo das equações lineares de ordem um.

Definição. *Uma* **equação diferencial** *linear de ordem um é uma equação do tipo*

$$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x),$$

em que $a_1, a_0, f : J \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a_1(x) \neq 0$, para todo $x \in J$.

Dizemos que a equação é **homogénea** *se f for a função nula.*

À equação diferencial $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$ chamamos equação homogénea associada à equação original.

Note-se que, se y_1, y_2 são soluções de uma equação diferencial linear homogénea então $\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, também é. Em particular o conjunto das soluções da equação homogénea é um espaço vectorial.

O teorema que está na base de tudo o que segue é o seguinte.

Teorema (Teorema fundamental)**.** *Se $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$ é uma equação diferencial nas condições acima e $(a, b) \in J \times \mathbb{R}$ então existe uma e uma só solução da equação diferencial $y : J \to \mathbb{R}$ tal que $y(a) = b$.*

Note-se que:

a) nas condições do teorema os gráficos de duas soluções diferentes não se podem intersectar;

b) se não exigíssemos que $a_1(x)$ não se anulasse, a tese do teorema não seria válida. Por exemplo, fazendo $J = \mathbb{R}$:

- **não existe nenhuma solução** da equação $xy' + y = 0$ tal que $y(0) = 1$ *(*basta notar que, se y é uma solução então $0y'(0) + y(0) = 0$ e portanto $y(0) = 0$*)*;
- **existe mais do que uma solução** da equação $xy' - 3y = 0$ tais que $y(0) = 0$. De facto, a função nula e a função y tal que $y(x) = x^3$ estão nessas condições.

Vejamos que, para resolver uma equação de uma equação diferencial linear "basta" encontrar uma sua solução e uma solução da equação homogénea associada.

Proposição. *Sejam $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$ uma equação nas condições acima, y_p uma sua solução particular e y_1 uma solução não nula da equação homogénea associada. Então, se $y : J \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 então y é solução se e só se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y = y_p + cy_1$.*

Demonstração. Comecemos por notar que y_1 nunca se anula porque caso contrário y_1 "cruzaria" a função nula e ambas são soluções da mesma equação diferencial.

Se $c \in \mathbb{R}$ então $y_p + cy_1$ é solução da equação diferencial porque

$$a_1(x)\,(y_p + cy_1)' + a_0(x)\,(y_p + cy_1) = \underbrace{a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p}_{=f(x)} + c\underbrace{\left(a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1\right)}_{=0} = f(x).$$

Inversamente,se y é uma solução da equação diferencial, $a \in J$ e $b = y(a)$ então $z = y_p + \frac{b - y_p(a)}{y_1(a)}\, y_1$ é uma solução da equação diferencial (pelo que vimos acima) e $z(a) = y_p(a) + \frac{b - y_p(a)}{y_1(a)}\, y_1(a) = b = y(a)$. Pelo teorema fundamental $z = y$, pois são duas soluções da mesma equação diferencial que têm o mesmo valor num ponto. Daqui se conclui que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y = y_p + c\, y_1$.

□

Por exemplo, é fácil de ver que $y_p(x) = x$ é solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$ e que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ é solução da equação homogénea associada. Se quisermos a solução y tal que $y(1) = 3$ fazemos o seguinte: toda a solução da equação diferencial é da forma $y(x) = x + \frac{c}{x}$, com $c \in \mathbb{R}$; deste modo $y(1) = 3$ se e só se $1 + \frac{c}{1} = 3$ ou seja $c = 2$. Conclusão: a solução pedida é $y(x) = x + \frac{2}{x}$ (com domínio $\mathbb{R}^+$).

2.1 Método de resolução equações diferenciais lineares de primeira ordem

Consideremos uma equação $a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)$, nas condições referidas acima.

Como vimos acima basta-nos encontrar uma qualquer solução e uma solução não nula da equação homogénea associada. Quanto à equação homogénea é fácil de ver que se trata de uma equação de variáveis separáveis.

Teorema. *Seja $a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)$ uma equações diferencial nas condições do teorema fundamental. Então:*

- *a função y_1 definida por $y_1(x) = e^{B(x)}$ em que $B'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ é uma solução não nula da equação diferencial homogénea associada;*
- *a função y_p definida por $y_p(x) = c(x)y_1(x)$, em que $c'(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)y_1(x)}$ é uma solução da equação diferencial.*

Demonstração. Para a primeira parte podemos seguir o que foi feito no caso das equações de variáveis separáveis ou então notar

$$\begin{aligned} a_1(x)\,y_1' + a_0(x)\,y_1 &= a_1(x)B'(x)e^{B(x)} + a_0(x)e^{B(x)} = e^{B(x)}\left(a_1(x)B(x) + a_0(x)\right) \\ &= e^{B(x)}\left(a_1(x)\frac{-a_0(x)}{a_1(x)} + a_0(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Para a segunda parte basta ver que

$$\begin{aligned} a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x) &= a_1(x)\left(c(x)y_1'(x) + c'(x)y_1(x)\right) + a_0(x)c(x)y_1(x) \\ &= a_1(x)c(x)y_1'(x) + a_1(x)c'(x)y_1(x) + a_0(x)c(x)y_1(x) \\ &= c(x)\underbrace{\left(a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\right)}_{=0} + a_1(x)\underbrace{c'(x)}_{=\frac{f(x)}{a_1(x)y_1(x)}}y_1(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplos. *Vejamos alguns exemplos.*

a) *Consideremos a equação diferencial $(x+1)y' + (2x+1)y = 0$, com $J =]-1, +\infty[$.*

Começamos por encontrar **uma** *solução y estritamente positiva (usando o método dado para as equações de variáveis separáveis em vez da fórmula dada no teorema acima). Nessas condições:*

$$\begin{aligned} (x+1)y' + (2x+1)y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{2x+1}{x+1} \\ &\Longleftarrow \log(y) = -2x + \log(x+1) \\ &\qquad \textit{note-se que } |x+1| = x+1 \textit{ em } J \\ &\iff y = (x+1)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Conclusão: toda a solução da equação é da forma $c(x+1)e^{-2x}$ com $c \in \mathbb{R}$.

b) Consideremos a equação diferencial $y' + (2e^x - 1)y = 0$, com $J = \mathbb{R}$.

Começamos por encontrar **uma** *solução y estritamente positiva (usando o método dado para as equações de variáveis separáveis). Temos,*

$$\begin{aligned} y' + (2e^x - 1)y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = 1 - 2e^x \\ &\Longleftarrow \quad \log(y) = x - 2e^x \\ &\Longleftrightarrow \quad y = e^x e^{-2e^x}. \end{aligned}$$

Conclusão: toda a solução da equação é da forma $c\,e^x e^{-2e^x}$ com $c \in \mathbb{R}$.

c) Consideremos a equação diferencial $y' + y = x$. Fazendo $y_1 = e^{-x}$ e usando o método referido, uma solução particular desta equação é: $y_p = c(x)e^{-x}$, em que $c(x)$ é tal que $c'(x) = xe^x$. Posso assim considerar $c(x) = e^x(x-1)$ e, portanto a solução geral da equação é: $y = (x-1) + c\,e^{-x}$ com $c \in \mathbb{R}$.

d) Consideremos a equação diferencial $y' - \frac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3$, com $J =]0, +\infty[$.

Uma solução não nula da equação homogénea é $y_1 = (x+1)^2$. Aplicando o método referido, vamos procurar $c_1(x)$ tal que $y_p = c_1(x)\,y_1$ seja solução da equação. Para isso basta considerar $c_1(x)$ tal que

$$c_1'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}(x+1)^3 = (x+1).$$

Uma função nestas condições é $\dfrac{(x+1)^2}{2}$.

Conclusão: a solução geral da equação é $y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + c\,(x+1)^2$, com $c \in \mathbb{R}$.

2.2 Exercícios

Exercício 1. Resolva as equações diferenciais:

a) $y' + 2y = 4x$ com $J = \mathbb{R}$;
b) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x+1}{x}$, com $J =]0, +\infty[$;
c) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ com $J = \mathbb{R}^+$;
d) $-x^2y' + xy = 4$, com $J = \mathbb{R}^+$.
e) $x^2y' - xy = 4$, com $J = \mathbb{R}^+$.
f) $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 1$ com $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
g) $(x \log x)y' + y = 0$ com $J = \mathbb{R}^+$.

Exercício 2. Quais as funções y que satisfazem as condições:

a) $y' - (\operatorname{tg} x)y = e^{\operatorname{sen} x}$, $y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$?
b) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x^2}$, $y(1) = e$, com $J =]0, +\infty[$?

Exercício 3. Sejam $a \in J$ e $p(x), q(x) \in C^0(J)$ tais que $p(x) > 0$ para todo $x \in J$. Considere a equação

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Mostre que, se y é uma solução da equação diferencial, então a recta tangente a y no ponto $(a, y(a))$ passa no ponto $\left(a + \frac{1}{p(a)}, \frac{q(a)}{p(a)}\right)$.