Cálculo Vetorial

Ficha 2

28 de Maio de 2013

Questão 1 () Calcule o integral de superfície

$$I = \int\int_{z=\sqrt{x^2+y^2},\ 2\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 3} xyz dS.$$

....

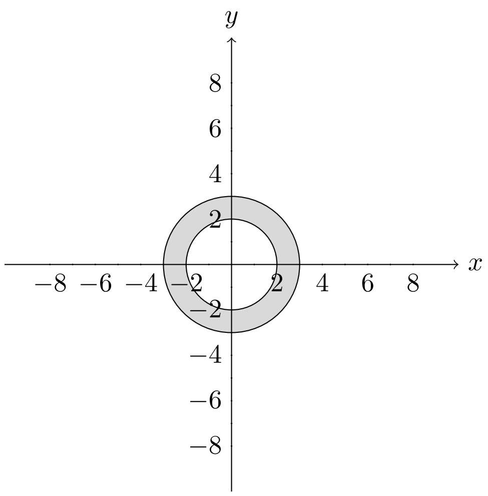
Pela definição do integral de superfície temos

$$I = \int\int_{2\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 3} xy\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+((\sqrt{x^2+y^2})'_x)^2+((\sqrt{x^2+y^2})'_y)^2}dxdy$$

$$= \int\int_{2\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 3} xy\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy.$$

$$= \int\int_{2\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 3} xy\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy.$$

A seguinte figura representa o domínio de integração no plano xy.



Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \sin(\phi)\cos(\phi)r^4 dr d\phi$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin(\phi)\cos(\phi)\left(\frac{3^5}{5}-\frac{2^5}{5}\right)d\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{211}{5}\left[\sin^2(\phi)\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Questão 2 () Calcule o integral de superfície

$$I = \int\int_{z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 2} y^2 z dS.$$

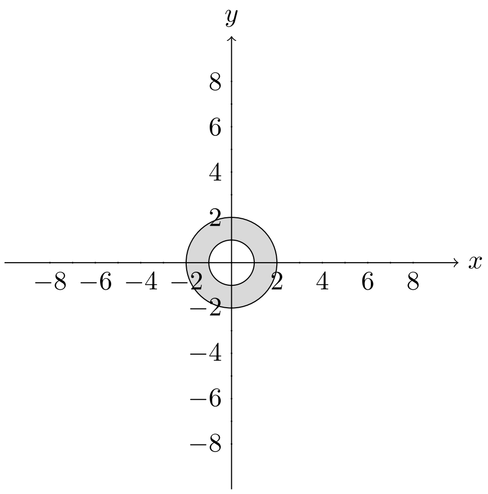
....

Pela definição do integral de superfície temos

$$I = \int\int_{1\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 2} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+((\sqrt{x^2+y^2})'_x)^2+((\sqrt{x^2+y^2})'_y)^2}dxdy$$

$$= \int\int_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy.$$
$$= \int\int_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy.$$

A seguinte figura representa o domínio de integração no plano xy.



Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sin^2(\phi)r^4 dr d\phi$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(\phi)\left(\frac{2^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right)d\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{31}{5}\left[\phi-\frac{\sin(2\phi)}{2}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\frac{31}{5}\pi.$$

Questão 3 () Calcule o integral de superfície

$$I = \int\int_{x\le 0\wedge y\le 0 z=\sqrt{x^2+y^2},\ 3\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} y^2 z dS.$$

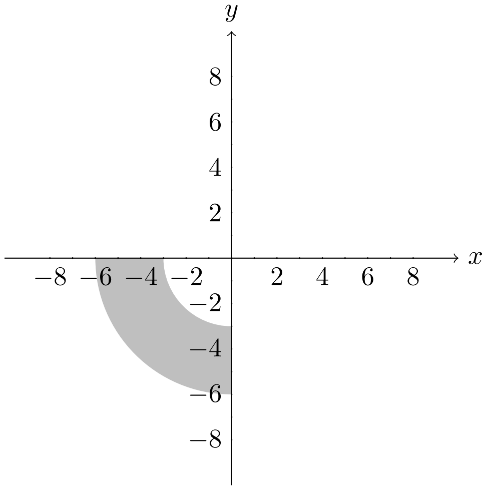
....

Pela definição do integral de superfície temos

$$I = \int\int_{x\le 0\wedge y\le 0 3\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+((\sqrt{x^2+y^2})'_x)^2+((\sqrt{x^2+y^2})'_y)^2}dxdy$$

$$= \int\int_{x\le 0\wedge y\le 0 3\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy.$$
$$= \int\int_{x\le 0\wedge y\le 0 3\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} y^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy.$$

A seguinte figura representa o domínio de integração no plano xy.



Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$I = \sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{3}^{6}\sin^2(\phi)r^4drd\phi$$

$$= \sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2(\phi)\left(\frac{6^5}{5}-\frac{3^5}{5}\right)d\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{7533}{5}\left[\phi-\frac{\sin(2\phi)}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2}\frac{7533}{20}\pi.$$

Questão 4 () Calcule o integral de superfície

$$I = \int\int_{x\geq 0\wedge y\leq 0 z=\sqrt{x^2+y^2},\ 4\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 7} x^2zdS.$$

....

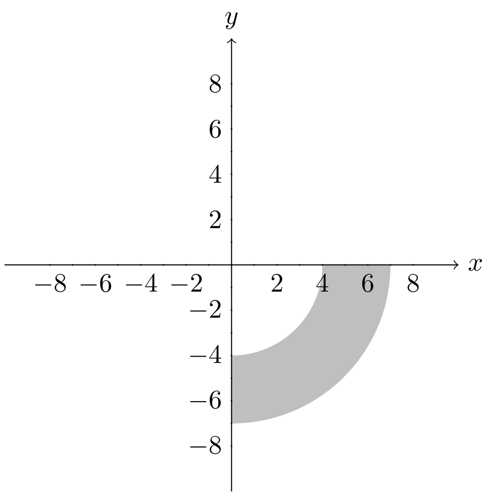
Pela definição do integral de superfície temos

$$I = \int\int_{x\geq 0\wedge y\leq 0 4\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 7} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+((\sqrt{x^2+y^2})'_x)^2+((\sqrt{x^2+y^2})'_y)^2}dxdy$$

$$= \int\int_{x\geq 0\wedge y\leq 0 4\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 7} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy.$$

$$= \int\int_{x\geq 0\wedge y\leq 0 4\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 7} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy.$$

A seguinte figura representa o domínio de integração no plano xy.



Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$I = \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{4}^{7}\cos^2(\phi)r^4 dr d\phi$$

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos^2(\phi)\left(\frac{7^5}{5}-\frac{4^5}{5}\right)d\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{15783}{5}\left[\phi+\frac{\sin(2\phi)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sqrt{2}\frac{15783}{20}\pi.$$

Questão 5 () Calcule o integral de superfície

$$I = \int\int_{z=3(x^2+y^2)^2,\ x^2+y^2\leq 4}(1+144(x^2+y^2)^3)^{-2}(x^2+y^2)^2 dS.$$

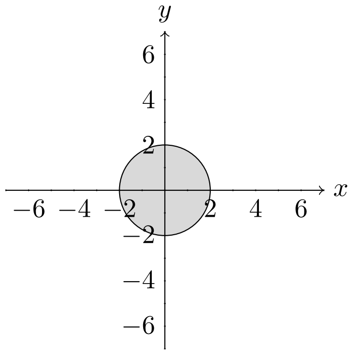
....

Pela definição do integral de superfície temos

$$I = \int\int_{x^2+y^2\leq 4}(1+144(x^2+y^2)^3)^{-2}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+((3(x^2+y^2)^2)'_x)^2+((3(x^2+y^2)^2)'_y)^2}dxdy$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 4}(1+144(x^2+y^2)^3)^{-2}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+144(x^2+y^2)^3}dxdy.$$

A seguinte figura representa o domínio de integração no plano xy.



Introduzindo as coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$, obtemos

$$I = \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^2(1+144r^6)^{-2}r^4\sqrt{1+144r^6}rdr.$$

Fazendo $u = 1+144r^6$, obtemos

$$I = \frac{2\pi}{864}\int_1^{9217}u^{-2+\frac{1}{2}}du = \frac{\sqrt{9217}-1}{216\sqrt{9217}}\pi.$$
