Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LFIS e MIEFIS

# Cálculo para Ciências

Folha 8 — outubro de 2021

**Exercício 1.** Encontre expressões globais para as soluções das seguintes equações diferenciais:

a) $y' = y^2$;
b) $(x + xy) - y' = 0$;
c) $(x + 1)y' + y^2 = 0$;
d) $yy' = e^{x+2y} \operatorname{sen} x$;
e) $x\, y' + y = \frac{1}{y^2}$;
f) $yx^{y-1} + (x^y \log x)y' = 0$;
g) $\operatorname{tg} x \, \cos y = -y' \operatorname{tg} y$.

**Exercício 2.** Considere uma equação diferencial do tipo $y' = f(y)$ em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1$.

a) Mostre que, se $f$ se anula em algum ponto $b$, então nenhuma solução da equação diferencial é sobrejectiva.
b) Mostre que toda a solução não constante da equação é injectiva.

**Exercício 3.** Quais são as soluções maximais da equação diferencial $y' = x(1 - y^2)$ cujo domínio é $]0, +\infty[$?

**Exercício 4.** Encontre uma expressão local das soluções das equações diferencial. $y' = \dfrac{x^2y - y}{y + 1}$, que passa em $P = (-1, 3)$;

**Exercício 5.** Para cada uma das equações, calcule a solução maximal que passa nos pontos referidos:

a) $y' = \dfrac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$, $P = (1, -1)$;
b) $(xy^2 + x) + (y - x^2y)y' = 0$, $P = (\frac{1}{2}, 1)$ e $Q = (2, -1)$;
c) $xy' = y^2$, $P = (1, 1)$;
d) $xy' = -y^2$, $P = (1, 1)$;
e) $x^2y' - y^2 = 0$, $P = (1, \frac{2}{3})$;
f) $y' = 3x^2(y^2 - 1)$, $P = (1, 1)$, $Q = (0, \frac{1}{2})$ e $R = (1, 3)$;
g) $xy' = 2y^2$, $P = (1, 1)$.

**Exercício 6.** Quais são as funções $f : I \to \mathbb{R}$ (com $I$ intervalo aberto) cujas tangentes em qualquer ponto passam no ponto $(1, 2)$?

**Exercício 7.** Encontre as soluções maximais da equação

$$y' = \frac{(y^2 - 4)e^{3x}}{y},$$

que passam nos pontos $(\frac{1}{3} \log(\log 3), 2)$ e $(\frac{1}{3} \log(\log 3), 1)$.

**Exercício 8.** Considere a equação diferencial $y' = e^x \sqrt{|y|}$.

a) Determine todas as soluções maximais da equação.

b) Quais das funções encontradas na alínea anterior podem ser prolongadas a $\mathbb{R}$, de modo a obter uma solução da equação diferencial $y' = e^x\sqrt{|y|}$ em $\mathbb{R}^2$?

Exercício 9. Resolva as equações diferenciais:

a) $y' + 2y = 4x$ com $J = \mathbb{R}$;

b) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x+1}{x}$, com $J = ]0, +\infty[$;

c) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ com $J = \mathbb{R}^+$;

d) $-x^2y' + xy = 4$, com $J = \mathbb{R}^+$.

e) $x^2y' - xy = 4$, com $J = \mathbb{R}^+$.

f) $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 1$ com $J = ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;

g) $(x \log x)y' + y = 0$ com $J = \mathbb{R}^+$.

Exercício 10. Quais as funções $y$ que satisfazem as condições:

a) $y' - (\operatorname{tg} x)y = e^{\operatorname{sen} x}$, $y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$?

b) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x^2}$, $y(1) = e$, com $J = ]0, +\infty[$?

Exercício 11. Sejam $a \in J$ e $p(x), q(x) \in C^0(J)$ tais que $p(x) > 0$ para todo $x \in J$. Considere a equação

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Mostre que, se $y$ é uma solução da equação diferencial, então a recta tangente a $y$ no ponto $(a, y(a))$ passa no ponto $\left(a + \frac{1}{p(a)}, \frac{q(a)}{p(a)}\right)$.