7 - Osciladores acoplados $\qquad (k_1 = k_2) \equiv$ por simplicidade
$\qquad\qquad m_1 = m_2 \equiv$ " "

$$m\ddot{x} = -kx + \delta y$$

$$m\ddot{y} = -ky + \delta x$$

Repare que estas equações de movimento correspondem a uma energia potencial $U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) - \delta xy$. Existe um termo de acoplamento cujo magnitude é medido por $\delta$. Este termo faz com que as equações de movimento sejam acopladas e nas independentes.

Como podemos proceder? . Vejamos uma maneira

Método - 1: Somamos as duas equações:

$$m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -k(x+y) + \delta(x+y)$$

$$\ddot{x}+\ddot{y} = \left(-\frac{k}{m} + \frac{\delta}{m}\right)(x+y)$$

Subtraímos as duas equações:

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -k(x-y) + \delta(y-x)$$

$$\ddot{x}-\ddot{y} = -\left(\frac{k}{m} + \frac{\delta}{m}\right)(x-y)$$

ambas as equações têm um aspecto de osciladores harmónicos independentes, cada um com diferentes frequências naturais.

$$\omega_1^2 = \frac{k-\delta}{m} \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\ddot{x}+\ddot{y}) + \omega_1^2 (x+y) = 0 \\ \\ (\ddot{x}-\ddot{y}) + \omega_2^2 (x-y) = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_2^2 = \frac{k+\delta}{m}$$

Estas duas equações são agora independentes e sabemos imediatamente escrever as soluções:

$$(x+y) = 2A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$(x-y) = 2B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Podemos agora somar e subtrair estas duas soluções:

$$x = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

As 4 constantes de integração $(A, B, \varphi_1$ e $\varphi_2)$ devem ser ajustadas às condições iniciais. Transformamos duas equações acopladas em duas equações independentes. As combinações que garantem isto, $(x+y)$ e $(x-y)$ designam-se por <u>modos normais de vibração</u>. Transformamos dois osciladores acoplados (acoplamento quadrático na energia) em dois novos osciladores independentes.

Método - 2 : O que nós fizemos de facto foi uma mudança de base : $(x, y) \rightarrow [(x+y), (x-y)]$ para resolver o problema. Como podemos proceder com maior generalidade?

Imaginemos que o sistema dos dois osciladores acoplados têm soluções harmonicas (o que é verdade, como vimos anteriormente). Escrevemo-las do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{i\alpha t}$$

( e vamos usar funções complexas, por simplicidade )

Então

$$\left( \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \bar{\delta}^2 = \frac{\delta}{m} \end{array} \right) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x - \bar{\delta}^2 y = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - \bar{\delta}^2 x = 0 \end{array} \right. \quad *$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = i\alpha \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{i\alpha t}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -\alpha^2 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{i\alpha t}$$

(*) Pode ser escrito sob a forma de uma matriz:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & +\bar{\delta}^2 \\ +\bar{\delta}^2 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \omega_0^2 & -\bar{\delta}^2 \\ -\bar{\delta}^2 & -\alpha^2 + \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \qquad (**)$$

Soluções com A e B diferentes de zero só serão possíveis se a matriz:

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2+\omega_0^2 & -\bar{\delta}^2 \\ -\bar{\delta}^2 & -\alpha^2+\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

for não invertível.

(Se for invertível, poderíamos multiplicar (**) à esquerda pela matriz inversa para obter $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.)

O cálculo da matriz inversa implica vários procedimentos que incluem divisão pelo determinante da matriz. Se este determinante for nulo, essa matriz não pode ser construída. A existência de soluções não triviais com A e B $\neq 0$ $\Rightarrow$ pois que:

$$\det \begin{bmatrix} -\alpha^2+\omega_0^2 & -\bar{\delta}^2 \\ -\bar{\delta}^2 & -\alpha^2+\omega_0^2 \end{bmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \left[-\alpha^2+\omega_0^2\right]^2 - \bar{\delta}^4 = 0$$

$$\alpha^4 + \omega_0^4 - 2\alpha^2\omega_0^2 - \bar{\delta}^4 = 0$$

$$\alpha^4 - 2\omega_0^2\alpha^2 + (\omega_0^4 - \bar{\delta}^4) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 4(\omega_0^4 - \bar{\delta}^4)}}{2}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \pm \bar{\delta}^2$$

Isto é encontramos 4 possíveis soluções:

$$\alpha = \pm\,\omega_+ \quad e \quad \alpha = \pm\,\omega_-$$

Voltando a (**) verificamos que:

$$\begin{bmatrix} \mp\bar{\delta}^2 & -\bar{\delta}^2 \\ -\bar{\delta}^2 & \mp\bar{\delta}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = B$ se $\pm\omega_+ = \alpha$

$A = -B$ se $\pm\,\omega_- = \alpha$

Então, a solução geral é uma combinação linear destas 4 soluções:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_+ t} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_+ t} +$$

$$+ A_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{+i\omega_- t} + A_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_- t}$$

As constantes $A_i$ devem ser encontradas para ajustar as condições iniciais $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$ e $\dot{y}(0)$

Podemos simplificar as soluções gerais para o nosso problema de mecânica; $x$ e $y$ devem ser funções reais (são deslocamentos de partículas). Usando a fórmula de Euler - de Moivre é fácil verificar que isto impõe que

$$A_1 = A_2^* \qquad A_3 = A_4^*$$

$$( x = A_1 \cos(\omega_1 t) + iA_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) - iA_2 \sin(\omega_1 t) + (\ldots.)$$

$$\mathbb{R} A_1 = \mathbb{R} A_2$$

$$\mathbb{I}m A_1 = - \mathbb{I}m A_2 \quad )$$

Logo:

$$A_1 = A_2^* = \frac{B_1}{2} e^{i\phi_1}$$

(são números complexos)

$$A_3 = A_4^* = \frac{B_2}{2} e^{i\phi_2}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_1) + B_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_2)$$

$$x(t) = B_1 \cos(\omega_+ t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_- t + \phi_2)$$

$$Y(t) = B_1 \cos(\omega_+ t + \phi_1) - B_2 \cos(\omega_- t + \phi_2)$$

Como antes:

• $x + y$ (modo simétrico) oscila c/ frequência $\omega_+$

• $(x - y)$ ( " antisimétrico) " " " $\omega_-$

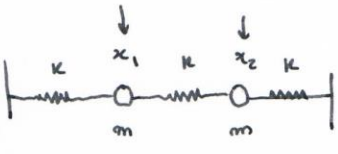
• $B_2 = 0 \Rightarrow x = y$ e $\omega = \omega_+$

• $B_1 = 0$ $x = -y$ e $\omega = \omega_-$

Estes dois modos puros (modos normais de vibração) correspondem à combinação $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (simétrica) ou $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ antisimétrica dos deslocamentos.

(A) (S)

Exemplo:




$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Exploremos os dois métodos discutidos atrás:

Método-1: Somo e subtrai as duas equações:

$$\begin{cases} (\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1+x_2) = 0 \\ (\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + 3\omega_0^2 (x_1-x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1+x_2) = A_+ \cos(\omega t + \varphi_+) \\ (x_1-x_2) = A_- \cos(\omega t\sqrt{3} + \varphi_-) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{A_+}{2}\cos(\omega t+\varphi_+) + \frac{A_-}{2}\cos(\sqrt{3}\,\omega t+\varphi_-)$$

$$x_2 = \frac{A_+}{2}\cos(\omega t+\varphi_+) - \frac{A_-}{2}\cos(\sqrt{3}\,\omega t+\varphi_-)$$

Método-2:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{i\alpha t}$$

$$\begin{cases} -\alpha^2 A \cancel{e^{i\alpha t}} + 2\omega_0^2 A \cancel{e^{i\alpha t}} - \omega_0^2 B \cancel{e^{i\alpha t}} = 0 \\ -\alpha^2 B \cancel{e^{i\alpha t}} + 2\omega_0^2 B \cancel{e^{i\alpha t}} - \omega_0^2 A \cancel{e^{i\alpha t}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (2\omega_0^2-\alpha^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2-\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \bar{\bar{\mathbb{A}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[2\omega_0^2 - \alpha^2\right]^2 - \omega_0^2 = 0$$

$$4\omega_0^4 - \omega_0^2 4\alpha^2 - \omega_0^2 + \alpha^4 = 0$$

$$\alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 3\omega_0^4 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{4\omega_0^2 \pm \sqrt{16\omega_0^4 - 4\cdot 3\omega_0^4}}{2} \begin{cases} \nearrow \omega_0^2 \\ \searrow 3\omega_0^2 \end{cases}$$

$$\alpha_- = \pm\,\omega$$

$$\alpha_+ = \pm\sqrt{3}\,\omega$$

$$\alpha_- : \quad \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 - \omega_0^2 & -\omega_0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\alpha_+ \Rightarrow A = -B$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_0 t} + A_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} +$$

$$+ A_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}$$

$$\mathbb{R} \Big| \rightarrow \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = |A_1| \left[ e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ |A_3| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left( e^{i(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)} + e^{-i(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)} \right)$$

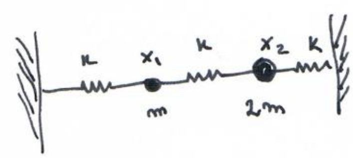
$$x_1(t) = 2|A_1| \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + 2|A_3| \cos(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = 2|A_1| \cos(\omega_0 t + \varphi_1) - 2|A_3| \cos(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \varphi_2)$$

(como antes).

## Problemas:

P1. Obtenha os modos normais de vibração deste sistema




$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k x_1 - k(x_1 - x_2) \\ 2m\ddot{x}_2 = -k x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ 2\ddot{x}_2 = -2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

$$x_1 = A_1 e^{i\alpha t} \quad ; \quad x_2 = A_2 e^{i\alpha t}$$

$$\begin{cases} -\alpha^2 A_1 = -2\omega_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_2 \\ -2\alpha^2 A_2 = -2\omega_0^2 A_2 + \omega_0^2 A_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2\omega_0^2 - \alpha^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - 2\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (*)$$

$$(2\omega_0^2 - \alpha^2)(2\omega_0^2 - 2\alpha^2) - \omega_0^4 = 0$$

$$4\omega_0^4 - 6\omega_0^2\alpha^2 + 2\alpha^4 - \omega_0^4 = 0$$

$$2\alpha^4 - 6\omega_0^2\alpha^2 + 3\omega_0^4 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{6\omega_0^2 \pm \sqrt{36\omega_0^4 - 24\omega_0^4}}{4}$$

$$\frac{3}{2}\omega_0^2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(3 \pm \sqrt{3})$$

$$\alpha = \pm\,\omega_0\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}}$$

Substituindo em (*) : $\alpha_+^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(3+\sqrt{3})$

$$\begin{bmatrix} 2\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}(3+\sqrt{3}) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega_0^2(3+\sqrt{3}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -(\omega_0^2 + \omega_0^2\sqrt{3}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2(1+\sqrt{3}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 - (1+\sqrt{3})A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = -(\sqrt{3}+1)A_2$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

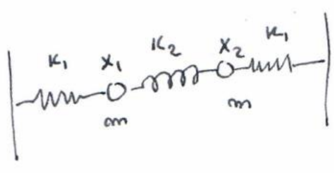
De forma semelhante: para $\alpha_-^2$ : $\begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Os modos normais são:

$$A \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos\left[ \omega_0 \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\, t + \phi_1 \right]$$

$$B \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left[ \omega_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}\, t + \phi_2 \right]$$

---

P2 - 


$k_2 \ll k_1$

Obtenha as equações de movimento admitindo que

$x_1(0) = a$ . $x_2(0) = 0$ e $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

Somando e subtraindo:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_1 (x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k_1 (x_1 - x_2) + 2k_2 (x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) & \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}} \\ (x_1 - x_2) = B \cos(\omega_2 t + \phi_2) & \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}} \end{cases}$$

Condições iniciais:

$$\left.\begin{aligned} (x_1 + x_2)_{t=0} &= a = A \cos\phi_1 \\ (x_1 - x_2)_{t=0} &= a = B \cos\phi_2 \end{aligned}\right\} = \quad a = A = B$$

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)_{t=0} = 0 = -A\,\omega_1 \sin\phi_1 \quad \rightarrow \quad \phi_1 = 0, \text{ ou } \pi$$

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 = -B\,\omega_2 \sin\phi_2 \quad \rightarrow \quad \phi_2 = 0 \text{ ou } \pi$$

Então:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \cos(\omega_1 t) \\ x_1 - x_2 = a \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right]$$

$$x_2 = \frac{a}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right]$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\left[\cos\left[\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t - \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right).t\right]\right] + \frac{a}{2}\cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) + \frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right.$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$$

$$\begin{cases} x_1 = a\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right] \\ x_2 = a\left[\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right] \end{cases}$$

Repare agora:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} \quad e \quad k_2 \ll k_1$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}\left[1 + \frac{2k_2}{k_1}\right]^{1/2} \sim \omega_1\left[1 + \underbrace{\frac{k_2}{k_1}}_{\varepsilon} + \cdots\right]$$

$$\begin{cases} \omega_2 - \omega_1 = -\varepsilon\,\omega_1 \\ \omega_2 + \omega_1 \simeq 2\omega_1 \end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1 \simeq a\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_1 \varepsilon t) \\ x_2 = a\sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\omega_1 \varepsilon t) \end{cases}$$

(batimento) → Amplitude modulada !