5. Atrito

Até agora ignoramos o efeito de forças dissipativas.

O efeito do atrito é descrito fenomenologicamente. Discutimos aqui dois tipos comuns de modelos: o atrito de Coulomb (independente da velocidade relativa dos 2 meios em contacto) e o atrito de Stokes, cuja força dissipativa efectiva é proporcional à velocidade.

5.1. Coulomb (*)

O atrito de Coulomb é descrito por uma força constante (em magnitude) (que dissipa energia mecânica). A força tem o sinal oposto da velocidade.

Um oscilador harmónico sujeito a esta força dissipativa obedece à equação:

$$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\, \mathrm{sgn}(\dot{x}),$$

onde $\gamma = \text{const}$ e $\mathrm{sgn}\,\dot{x} = \begin{cases} +1 & \text{se } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases}$

Admitamos que $\dot{x} > 0$ (ver figura), sendo x_0 e y_0 as posições e velocidades iniciais; então:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma = 0$$

Definamos por simplicidade escalas de distância e tempo tais que $\tau = \omega_0 t$ e $z = \omega_0^2 x$

Então

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\omega_0^{\cancel{2}}} \frac{dz}{d\tau} \cdot \cancel{\omega_0}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \omega_0 = z'' = \frac{d^2 z}{d\tau^2}$$

A equação de movimento vem:

$$z'' + z + \gamma = 0$$

A solução desta equação é $z(\tau) = (z_0 + \gamma) \cos(\tau) +$

$$+ \dot{z}_0 \sin(\tau) - \gamma$$

[Nota: $\dot{x}(0) = Y_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\omega_0} z'(0)$

Logo $z'(0) = Y_0 \omega_0$]

Se $\dot{x} < 0 \Rightarrow$ obtemos, de forma semelhante,

$$z'' + z - \gamma = 0$$

e

$$z(\tau) = (z_0 - \gamma) \cos\tau + \dot{z}_0 \sin\tau + \gamma$$

Note que a frequência da oscilação não é afectada ($\tau = \omega_0 t$), mas a amplitude vai decaindo com o tempo. Por exemplo, admitamos que $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (começamos com um máximo de desvio e com velocidade nula)

A solução para o primeiro meio ciclo é ($\dot{x}<0$) :

$$z(\tau) = (z_0 - \gamma)\cos\tau + \gamma$$

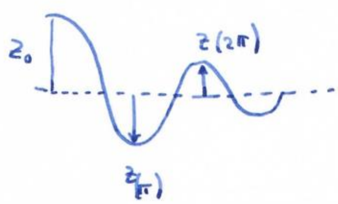
Este meio ciclo termina quando $\tau = \pi$;

$$z(\pi) = -z_0 + \gamma + \gamma = -z_0 + 2\gamma$$

A redução do deslocamento é 2γ ;

O mesmo acontece no 2º meio ciclo (verifique isto)

Logo:



$$z_0 - z(2\pi) = 4\gamma$$
$\downarrow$
Redução da amplitude num ciclo.

Conclusão:

i) A frequência do oscilador não é afectada pelo atrito de Coulomb

ii) A amplitude reduz-se de um valor constante (4γ) (que é proporcional à força de fricção) num período

Logo: a amplitude decai de forma que os máximos (mínimos) diminuem linearmente no tempo.

5.2- Atrito de Stokes.

$$F_a = -b\frac{dx}{dt} = -b\dot{x}$$

A equação diferencial de movimento vem:

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

Note que $\frac{b}{m}$ tem as dimensões do inverso de um tempo

$\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}$; $\tau \equiv$ tempo de Relaxação.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{1}{\tau}\dot{x} = 0$$

Podemos procurar soluções sob a forma

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$$

Vejamos se isso é possível:

[Nota: quando aprenderem a integrar eq. diferenciais atacar novamente este problema]

$$\dot{x}(t) = -\gamma x_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) + x_0 e^{-\gamma t}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 x_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) - \gamma x_0 e^{-\gamma t}\omega\cos(\omega t + \varphi) -$$

$$- x_0\gamma e^{-\gamma t}\omega\cos(\omega t + \varphi) - x_0 e^{-\gamma t}\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

Então:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{1}{\tau}\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_0 e^{-\gamma t}(\gamma^2 - \omega^2)\sin(\omega t+\varphi) - x_0 e^{-\gamma t} 2\gamma\omega \cos(\omega t+\varphi) +$$

$$+ \omega_0^2 x_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi) + \frac{1}{\tau}\left(-\gamma e^{-\gamma t} x_0 \sin(\omega t+\varphi) + \right.$$

$$\left. + x_0 e^{-\gamma t}\omega \cos(\omega t+\varphi)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\gamma^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\gamma}{\tau}\right)\sin(\omega t+\varphi) -$$

$$- \left(2\gamma\omega - \frac{\omega}{\tau}\right)\cos(\omega t+\varphi) = 0$$

Como sin e cos são funções ortogonais, isto impõe que

$$\begin{cases} 2\gamma\omega - \dfrac{\omega}{\tau} = 0 \\ \gamma\left(\gamma - \dfrac{1}{\tau}\right) - \omega^2 + \omega_0^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} = 2\gamma \\ \dfrac{1}{2\tau}\left(\dfrac{1}{2\tau} - \dfrac{1}{\tau}\right) - \\ \qquad - \omega^2 + \omega_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2 = \omega_0^2\left[1 - \left(\dfrac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right] \\ \dfrac{1}{\tau} = 2\gamma \end{cases}$$

Logo:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left[\omega_0 t\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{1/2} + \varphi\right]$$

A amplitude decai exponencialmente no tempo e a frequência é reduzida por um factor $\left[1-\left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{1/2}$ relativamente à frequência natural ω_0.

O que é que isto significa em termos de dissipação de energia?

Vamos fazer as contas apenas para o caso de atrito pouco intenso, isto é $\omega_0\tau \gg 1$. Nestas condições, a solução que encontramos pode ser aproximada por

$$x(t) \simeq x_0\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin[\omega_0 t + \cancel{\varphi}] \qquad (\varphi = 0) \text{ por simplicidade}$$

$$\dot{x}(t) \simeq -\frac{x_0}{2\tau}\, e^{-t/2\tau} \sin[\omega_0 t + \cancel{\varphi}] + x_0\, e^{-t/2\tau}\, \omega_0 \cos[\omega_0 t + \cancel{\varphi}]$$

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_0^2\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin^2(\omega_0 t) + \omega_0^2 x_0^2\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos^2(\omega_0 t) -$$

$$- \frac{\omega_0}{\tau} x_0^2\, e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Quando fazemos integrais para calcular o valor médio da energia cinética obtemos:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2\, dt =$$

$$T_0 \cdot \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_0^2 \int_0^T e^{-t/\tau} \sin^2(\omega_0 t)\, dt \; + \right.$$

$$+ \; \omega_0^2 x_0^2 \int_0^T e^{-t/\tau} \cos^2(\omega_0 t)\, dt \; +$$

$$\left. + \; \frac{\omega_0}{\tau} x_0^2 \int_0^T e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t)\, dt \right]$$

Admitimos que, no limite do pequeno atrito, $T \ll \tau$; . Neste limite, as contas são triviais visto que $\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle \sin \cdot \cos \rangle = 0$. Obtemos:

$$T_0 \, \langle E_c \rangle \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2 \right] x_0^2 \, e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{1}{4} m \, x_0^2 \, e^{-t/\tau} \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2 \right]$$

Como $\omega\tau \gg 1$ podemos ainda simplificar.

$$= \frac{1}{4} m \, \omega_0^2 x_0^2 \, e^{-t/\tau} \left[\left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2 + 1 \right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{4} m \, \omega_0^2 x_0^2 \, e^{-t/\tau}$$

No limite dos pequenos atritos ($\omega\tau \gg 1$) o valor médio da energia decai de forma aproximadamente exponencial.

O mesmo acontece com a energia potencial (neste limite):

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_o^2 x_o^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2(\omega_o t) \rangle$$

$$\simeq \frac{1}{4} M \omega_o^2 x_o^2 e^{-t/\tau}$$

A energia dissipada por unidade de tempo é, em média:

$$-\langle P \rangle = \frac{d\langle E \rangle}{dt} \simeq \frac{d}{dt} [\langle E_c \rangle + \langle U \rangle] \simeq$$

$$\simeq -\frac{1}{\tau} \frac{1}{2} m \omega_o^2 x_o^2 e^{-t/\tau} = -\frac{\langle E \rangle}{\tau}$$

Este resultado corresponde (como seria de esperar) ao trabalho que a força de atrito realiza por unidade de tempo:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{at.} = \langle F_{at} \cdot V \rangle = -\frac{m}{2\tau} \omega_o^2 x_o^2 e^{-t/\tau}$$

(verifique isto).

<u>Observações</u>: Factor de qualidade de um oscilador:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia armazenada}}{\text{energia dissipada por período}}$$

$$Q = 2\pi \frac{E}{P \cdot T} = \frac{2\pi}{1/\nu} \cdot \frac{E}{P} = \frac{\omega E}{P}$$

Para pequenas dissipações $\langle P \rangle = + \frac{\langle E \rangle}{\tau} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q \simeq \frac{\omega \langle E \rangle}{\langle E \rangle / \tau} \simeq \omega_0 \tau$$

□

6. Oscilador forçado (excitação harmónica)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F(t) \equiv F_0 \sin(\omega t)$$

$$(*) \qquad \ddot{x} + \frac{1}{\sigma}\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \qquad ; \; a_0 = \frac{F_0}{m}$$

Vejamos se existe uma solução estacionária que consiste em x variar periodicamente, com o mesmo período de excitação mas, eventualmente, com um desfasamento

$$x(t) \overset{?}{=} x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Vejamos:

$$\dot{x}(t) = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Substituindo na equação (*) :

$$-\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\sigma} x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= a_0 \sin(\omega t)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\sigma} x_0 \cos(\omega t + \varphi) = a_0 \sin(\omega t)$$

Mas: $\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi$

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi$$

Entaõ:

$$(\omega_0^2-\omega^2)\, x_0 \left[\sin(\omega t) \cos\varphi + \cos(\omega t)\cdot \sin\varphi\right] + \frac{\omega}{\tau} x_0 \left[\cos(\omega t) \cos\varphi - \sin(\omega t) \sin\varphi\right]$$

$$= a_0 \sin(\omega t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi\right] x_0 \sin(\omega t) +$$

$$+ \left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi\right] x_0 \cos\omega t = a_0 \sin(\omega t)$$

Claro que isto implica que:

$$\begin{cases} (\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi = 0 \\ \left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi\right] x_0 = a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2} \\ x_0 = \dfrac{a_0}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi\right]} \end{cases}$$

Como $\boxed{tg\,\varphi = -\dfrac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}}$

$$\sin\varphi = \frac{-\omega/\tau}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

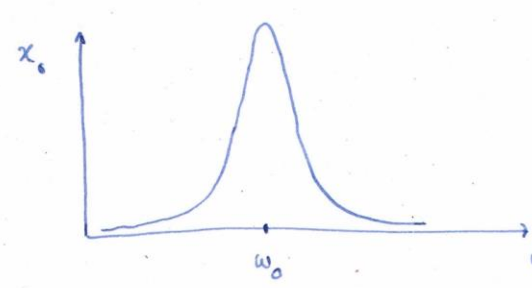
Logo:

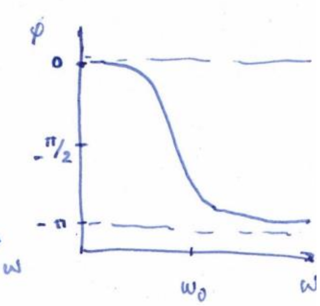
$$x_0 = \frac{a_0}{\dfrac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Em resumo:

$$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}\,\sin\left[\omega t + \underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_0^2}}_{\phi}\right]$$

é uma solução estacionária da equação do movimento





Potência absorvida pelo oscilador

Calculemos a potência que é absorvida pelo oscilador. Esta potência corresponde ao trabalho realizado por unidade de tempo pela força externa (harmónica):

$$P = F \cdot \dot{x}$$

$$= m\, a_0 \sin(\omega t) \cdot \frac{a_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{m\, a_0^2\, \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \sin(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

[Mas $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t) \cdot \cos\phi - \sin(\omega t) \sin\phi$)

$$= \frac{m\, a_0^2\, \omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \sin(\omega t) \left[\cos(\omega t) \cos\phi - \sin(\omega t) \sin\phi \right.$$

Se calcularmos o valor médio ao longo de um período

$$\langle \ \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \dots\, dt \qquad \text{obtemos} \quad \langle \sin \cdot \cos \rangle = 0$$

$$\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

Logo, a potência média absorvida é:

$$\langle P \rangle = - \frac{m\, a_0^2\, \omega / 2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \sin\phi \, .$$

$$\langle P\rangle = -\frac{m a_0^2 \omega^2/2\tau}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{2} m a_0^2 \frac{\cancel{\omega^2}/\cancel{\tau}}{\frac{\cancel{\omega^2}}{\cancel{\tau^2}}\left[1+\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2\tau^2}{\omega^2}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2} m a_0^2 \tau \left[1+\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega/\tau}\right)^2\right]^{-1}$$

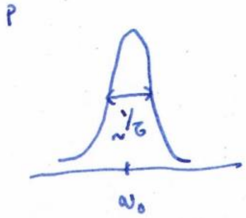
Na ressonância $(\omega=\omega_0)$, $\langle P\rangle_{res} = -\frac{1}{2} m a_0^2 \tau$. A absorção de potência reduz-se quando ω se afasta de ω_0. Reduz-se a metade quando $\omega \to \omega_0 \pm \Delta\omega_{1/2}$

$$(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) = \omega_0^2-\omega^2 = \frac{\omega}{\tau} \Rightarrow (2\omega_0+\Delta\omega)\Delta\omega = \frac{\omega}{\tau}$$

$$\overset{\parallel}{(\omega_0+\omega_0+\Delta\omega)\Delta\omega} \qquad 2\omega\Delta\omega \simeq \frac{\omega}{\tau} \Rightarrow 2(\Delta\omega)_{1/2} \simeq \frac{1}{\tau}$$

A largura da potência a meia altura é $\sim 1/\tau$

$$\text{Como } Q = \omega_0\tau \simeq \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}}$$



Logo Q é uma medida da largura da absorção do oscilador.

□