

Cálculo para Ciências

Folha 7

outubro de 2021

Exercício 1. Considere as sucessões de termo geral:

$$a_n = 1; \quad b_n = (-1)^n; \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad d_n = n^2.$$

Indique, justificando, as que são monótonas, as que são limitadas e as que são convergentes.

Exercício 2. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_n \frac{1+n^3}{n^2+2n-1}; & \text{g)} \quad \lim_n \left(1 - \frac{3}{n+2}\right)^n; \\ \text{b)} \quad \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n; & \text{h)} \quad \lim_n \frac{\cos(n\pi) + \cos(2n\pi)}{n}; \\ \text{c)} \quad \lim_n \frac{2^n + 3^n}{3^{n+1} + 4}; & \text{i)} \quad \lim_n \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+2)}; \\ \text{d)} \quad \lim_n \sqrt{n+5} - \sqrt{n}; & \text{j)} \quad \lim_n \sqrt{n^2 + 2n} - n; \\ \text{e)} \quad \lim_n \frac{n \cos n}{n^2 + 24}; & \text{k)} \quad \lim_n \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n}; \\ \text{f)} \quad \lim_n \frac{\sqrt{n} - \sin n}{n+2}; & \text{l)} \quad \lim_n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n. \end{array}$$

Exercício 3. Utilizando o teorema das sucessões encastradas, calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_n \frac{n!}{n^n}; & \text{c)} \quad \lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right); \\ \text{b)} \quad \lim_n \frac{10^n}{n!}; & \text{d)} \quad \lim_n \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right). \end{array}$$

Exercício 4. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, então $(u_n)_n$ é convergente;
- b) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 5\}$, então $(u_n)_n$ é divergente;
- c) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes, então a sucessão $(u_n + v_n)_n$ é divergente;
- d) se $(u_n)_n$ e $(v_n + u_n)_n$ são sucessões convergentes, então a sucessão $(v_n)_n$ é convergente;

- e) sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais. Se $\lim_n u_n v_n = 0$ então $\lim_n u_n = 0$ ou $\lim_n v_n = 0$;
- f) $\lim_n u_n = 0$ se e só se $\lim_n |u_n| = 0$;
- g) se $\lim_n |u_n| = 1$, então $\lim_n u_n = 1$;
- h) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $(u_n)_n$ é convergente;
- i) qualquer sucessão crescente de termos em $] - 1, 1[$ é convergente;
- j) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]0, 1[$ e $u_{2n-1} \in]1, 2[$, então $(u_n)_n$ é divergente;
- k) se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(u_n)_n$ é convergente.

Exercício 5. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

- a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0$, $\lim_n v_n = +\infty$ e $\lim_n (u_n v_n) = 1$;
- b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0$, $\lim_n v_n = +\infty$ mas $\lim_n (u_n v_n)$ não exista;
- c) uma sucessão convergente e não monótona;
- d) uma sucessão não monótona e não limitada;
- e) uma sucessão crescente, convergente para zero;
- f) uma sucessão não majorada que admite uma subsucessão convergente;
- g) uma sucessão convergente para zero e com todos os termos em $\mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$.

Exercício 6. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$$

Exercício 7. Estude a natureza das seguintes séries:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos \frac{1}{n}; & \text{h) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+5}; \\ \text{b) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{e^n}; & \text{i) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos n}{n!}; \\ \text{c) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n} \right)^n; & \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}; \\ \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}; & \text{k) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{10} + 7}; \\ \text{e) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}; & \text{l) } \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{1 + n^3}; \\ \text{f) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n + 5^n}{3^n}; & \text{m) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{n}; \\ \text{g) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 2n}; & \text{n) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \end{array}$$

$$\text{o) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$\text{q) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln n}{n};$$

$$\text{p) } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!};$$

$$\text{r) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n}.$$

Exercício 8. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

- a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja divergente, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;
- b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja convergente, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;
- c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ seja convergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja divergente;
- d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja convergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ seja divergente;
- e) uma série de termos negativos divergente;
- f) uma série alternada divergente;
- g) uma série alternada absolutamente convergente.

Exercício 9. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ é convergente, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente;
- b) se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n < 0$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ é convergente;
- c) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + u_n)$ é divergente;
- d) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + u_n}$ é convergente;
- e) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente, então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{1 + u_n}$ é também convergente.