Repare que se $M_1 > M_2$

$$\cos\theta + \frac{M_1}{M_2} > 0 \quad , \forall \theta$$

$\Rightarrow (\theta_1)_{max} < \frac{\pi}{2}$; se $M_1 = M_2 \Rightarrow (\theta_1)_{max} = \frac{\pi}{2}$ e

se $M_1 < M_2 \Rightarrow (\theta_1)_{max}$ = qualquer!

3. Sistemas com massa variável

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vejamos um exemplo simples: Um satélite atravessa uma região com poeira (no espaço livre de gravidade), e a sua massa varia a uma taxa: $\frac{dm}{dt} = c\,v$, onde c é uma constante e v é a sua velocidade relativamente à poeira.

O momento linear do sistema "poeira + satélite" é conservado. Então:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\frac{dp}{dt}\right)_{poeira} = 0$$

$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{poeira} = 0$ (visto que está em repouso)

(d=1) $$\frac{dm}{dt}v = -m\frac{d\vec{v}}{dt} = c\,v^2$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -c\frac{v^2}{m}$$ (o satélite vai sendo travado)

Podemos analisar este problema de uma outra forma; podemos dizer que o satélite sente uma força de resistência que é inverso do que ele exerce na poeira. O impulso que o satélite confere à poeira é

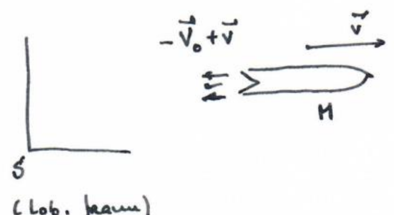
$$dI = F\,dt = (\Delta p)_{poeira} = \frac{dM}{dt}\cdot dt \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt\,F = -\frac{dM}{dt}\, v\, dt = -c v^2\, dt$$

$$a = -\frac{F}{m} = -\frac{c v^2}{m}$$ (como antes)

<u>Exemplo: motor de propulsão:</u>

(avançar expelindo matéria):



Na ausência de forças externas o momento total mantém-se constante

$$\frac{dp_{TOT}}{dt} = 0 = M\dot{v} - v\frac{dM}{dt} + (v - V_0)\frac{dM}{dt}$$

aceleração — perda de massa — momento do matéria ejectado

Então:

$$M\dot{v} = +V_0\frac{dM}{dt}$$

se const $= \alpha$

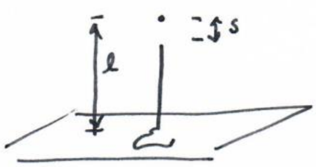
$$M = M_0 - \frac{dM}{dt}\cdot t$$

$$(M_0 - \alpha t)\,\dot{v} = V_0\,\alpha$$

$$\dot{v} = \frac{V_0\,\alpha}{M_0 - \alpha t}$$

$$v(t) = \int_0^t \frac{V_0\,\alpha / M_0}{1 - \frac{\alpha}{M_0} t'}\,dt' = V_0 + V_0 \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right)$$

Exemplo:



Uma corrente flexível com uma densidade linear de massa λ e comprimento l está suspensa c/ uma extremidade em contacto com uma plataforma. É deixada cair.

Qual a força que a plataforma tem que suportar?

Seja s o pedaço de cadeia que "caiu" sobre a plataforma.

Então:

$$f = \underbrace{\lambda s g}_{\text{peso adicional}} + \underbrace{\lambda \frac{ds}{dt} \cdot \dot{s}}_{\text{variação do movimento da cadeia}}$$

Mas como a cadeia cai sob acção da gravidade,

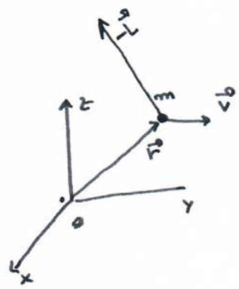
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2 g s$$

$$f = \lambda s g + \lambda \dot{s}^2$$

$$= \lambda s g + 2 \lambda g s = 3 \lambda g s$$

A plataforma deve suportar $3\times$ o peso da cadeia que lá repousa.

4. Conservação do momento angular:



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Se $\vec{F}$ for a força que actua na partícula então definimos momento de $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Repare então:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{\substack{= 0 \\ \dot{\vec{r}} \, // \, \vec{p}}} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Note que se $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ = constante : Na ausência de momentos exteriores, o momento angular permanece constante. Neste caso, $\vec{r}$ e $\vec{v}$ definem um plano $\perp$ $\vec{L}$.

<u>Sistema de partículas:</u>

Seja F_i a força total que actua na partícula i de um sistema de N-partículas. O momento angular total é

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Podemos decompor $\vec{F}_i$ em força interna e externa:

$$\vec{F}_i = \vec{f}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$$

Então:

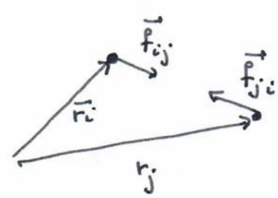
$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{f}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \right) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}}_{*}$$

$$* = \sum_i \sum_{j\neq i} \left[\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right]$$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \qquad (\text{visto que } -\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ji})$$

<u>Se</u> as forças entre partículas forem forças centrais,



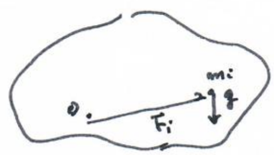
Então $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{f}_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ que esta contribuição é nula.

(Mas, mesmo que não sejam forças centrais, o resultado permanece válido)

Exemplo: momento da gravidade sobre um corpo extenso:

Imagine um corpo extenso com uma distribuição contínua de massa, sujeito à aceleração da gravidade.



É possível encontrar um ponto tal que o momento seja nulo?

Seja $\underline{O}$ um ponto fixo:

$$\vec M_O = \sum \vec r_i \times m_i \vec g$$

$\vec g$ = const.

$$= \left(\sum_i m_i \vec r_i \right) \times \vec g$$

$$= M \vec r_{CM} \times \vec g$$

Se $O \equiv CM \Rightarrow \vec M_O = 0$

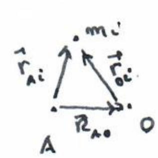
(centro de gravidade de um corpo)

Observação: O que acontece se o ponto escolhido (A) não for o centro de gravidade (O)?

$$\sum \vec F_i = \sum_i m_i \vec g = M \vec g$$

O momento das forças exteriores (gravíticas) é então:

$$\vec M_A = \sum \vec r_{Ai} \times m_i \vec g = \sum_i \left(\vec R_{AO} + \vec r_{Oi} \right) \times m_i \vec g =$$

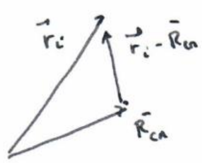


$$= \vec R_{AO} \times M \vec g + \underbrace{\sum_i \vec r_{Oi} \times m_i \vec g}_{0}$$

Exemplo: Momento angular a respeito do centro de massa:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Seja $\vec{R}_{cm}$ o raio vector de posição do c.m. do sistema:



$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_i$$

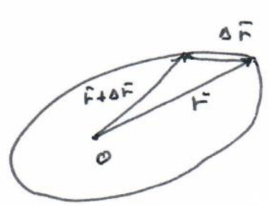
$$= \vec{L}_{cm} + \underbrace{\vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{TOT}}_{\vec{R}_{cm} \times M \vec{V}_{cm}}$$

Momento angular a respeito do CM.

Momento angular do c.m. a respeito da origem escolhida

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} = \frac{d}{dt}\left[\vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times M \vec{V}_{cm}\right]$$

Exemplo (Kepler)



Consideremos uma partícula descrevendo uma órbita fechada em torno de O.

Consideremos o triângulo representado na figura. A sua área é

$\Delta S = \frac{1}{2} \Delta r \cdot r$ ou definindo apropriadamente

a área "vectorial": $\Delta \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r})$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \frac{1}{2m}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{1}{2m}\vec{L}$$

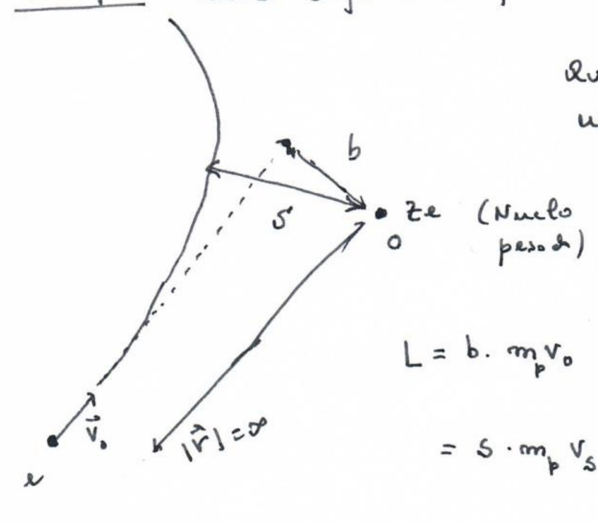
A área varrida por unidade de tempo pelo raio-vector de posição visto de O.

No movimento de um planeta em torno do Sol (ignorando o efeito dos outros planetas), apenas actuam forças centrais $\Rightarrow$ Momento angular é conservado, Então

i) O movimento é necessariamente plano

ii) A área varrida por $\vec{r}$ por unidade de tempo é constante

Exemplo: Protão difundido por um potencial central



Qual a distância de maior aproximação s?

$$L = b \cdot m_p v_0 = \text{const.}$$

$$= s \cdot m_p v_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{v_0 b}{s}$$

Como a energia do protão é conservada:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{Ze^2}{s}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2\right] = \frac{Ze^2}{s}$$

Podemos resolver esta equação em ordem a s.

$\square$