1. [3 valores] Escreva explicitamente:

   (a) A matriz relativamente à base $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ dada por $u = (1,0)$ e $v = (1,1)$ da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(x,y) = (3x - y, x).$$

   (b) A matriz da rotação de $\mathbb{R}^3$ em torno do vetor $e_3 = (0,0,1)$ e de ângulo $2\pi/3$.

   (c) A matriz de uma isometria linear de $\mathbb{R}^2$ que não é uma rotação.

   (d) Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ não real que é simultanemente hermítica e unitária.

2. [3,5 valores] Considere a equação diferencial $(\mathcal{E})$ $y'' - 2y' + y = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada à equação $(\mathcal{E})$.

   (b) Determine uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$ e escreva a sua solução geral.

3. [1 valor] Escreva uma equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem cuja solução general seja dada por

   $$y(x) = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

4. [4,5 valores] Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifique que A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ e complete, justificando, a seguinte igualdade:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   (b) Calcule e^{tA}, para $t \in \mathbb{R}$, e^{tA}.

   (c) Usando a alínea anterior, determine a solução do sistema

   $$\begin{cases} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & 4x(t) \end{cases} \quad \text{com a condição inicial} \quad \begin{cases} x(0) & = & 2 \\ y(0) & = & 0. \end{cases}$$

   Represente graficamente a curva solução no espaço de fases $\mathbb{R}^2$. Poderá começar por verificar que esta curva está contida na curva de equação $4x^2 - y^2 = 16$.

5. [3 valores] Identifique e represente graficamente a cónica de $\mathbb{R}^2$ definida pela seguinte equação:

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9.$$

6. [2,5 valores] Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   (a) A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Seja $\mathcal{B} = (u, v)$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$ e seja $w \in \mathbb{R}^2$. As coordenadas α, β de w na base $\mathcal{B}$ são dadas por $\alpha = (u|w)$ e $\beta = (v|w)$.

   (c) Existe uma isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que admite 0 como valor próprio.

7. [2,5 valores] Considere o conjunto de matrizes $T = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Verifique que T é um subgrupo do grupo multiplicativo

   $$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

   (b) Verifique que $\varphi : \mathbb{Z} \to T$ dado por $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é um homomorfismo injetivo de grupo do grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ para o grupo multiplicativo $(T, \cdot)$.