Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Física e Eng Física
2015/2016

Calculo Vectorial

23 de Julho de 2016

Exame época especial

Duração: 120 minutos

Atenção: Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Considere a função $F(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y} + 2\frac{y}{z}$.

   3 2

   (a) O ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ está na superfície de nível $F(x, y, z) = 7$. Determine a equação do plano tangente à superfície $F = 7$ no ponto P_0.

   (b) Se, iniciando em P_0, fizessemos apenas uma pequena alteração NUMA SÓ das variáveis, qual iria produzir uma maior alteração (em valor absoluto) em F? Se a variação fosse de $0,1$ qual seria o valor dessa alteração?

2. Seja $f(x, y) = x + 4y + \frac{2}{xy}$.

   (a) Determine o(s) ponto(s) críticos de $f(x, y)$.

   (b) Classifique um ponto crítico da função, ou explique como o poderia fazer, usando o teste das segundas derivadas.

3. Determine em que pontos existe $\frac{\partial x}{\partial z}$ sabendo que $x^2 \sin 2y - 5z = 1 + y\cos(6zx)$.

4. Seja $\vec{F}(x, y, z)$ uma função diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\nabla\vec{F}(1, -1, \sqrt{2}) = (1, 2, -2)$. Use a regra da derivação da função composta para determinar $D\vec{F}(\rho, \phi, \theta)$ no ponto $(\rho, \phi, \theta) = (2, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, sabendo que $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ e $z = \rho\cos\theta$.

3. Determine em que pontos existe $\frac{\partial x}{\partial z}$ sabendo que $x^2 \sin 2y - 5z = 1 + y\cos(6zx)$.

4. Seja $\vec{F}(x, y, z)$ uma função diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\nabla \vec{F}(1, -1, \sqrt{2}) = (1, 2, -2)$. Use a regra da derivação da função composta para determinar $D\vec{F}(\rho, \phi, \theta)$ no ponto $(\rho, \phi, \theta) = (2, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, sabendo que $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$ e $z = \rho \cos\theta$.

5. Considere o $\int\int_R f dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} f(x, y) dy dx$.

   (a) Desenhe a região R.

   (b) Escreva um integral novo cujo valor é igual ao dado mas trocando a ordem de integração.

6. Considere o integral $\int\int_R f dA$, em que R é a região do plano delimitada pelas seguintes curvas $x^2y = 4$, $x^2y = 9$, $y/x = 1$, $y/x = 2$. Escreva um integral cujo valor valor seja igual a este mas que resulte da mudança de variável definida por $u = x^2y$ e $v = y/x$. (A transformação inversa é dada por $x = u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$).

7. Seja $\vec{F}(x, y) = (x, x)$ e seja C a curva fechada do plano definida pelo triângulo de vértices na origem e nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

   (a) Faça um esboço do campo vectorial no primeiro quadrante. Determine a divergência do campo vectorial. Interprete o significado do sinal da divergência. É coerente com o esboço que fez?

   (b) Calcule o integral $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ directamente.

   (c) Calcule o integral anterior usando o teorema da divergência para o plano.