Equações diferenciais

Equações diferenciais ordinárias

Uma *equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem* é uma equação cuja incógnita é uma função real de uma variável real e que se escreve em termos da variável (denotada, por exemplo, por x), da função incógnita (denotada, por exemplo, por y) e da sua derivada (denotada por y').

Equações diferenciais lineares

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma *equação diferencial (ordinária) linear de 1ª ordem* em I é uma equação diferencial da forma

$$(*) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

onde a, b e c são funções (conhecidas) contínuas em I tais que para todo o $x \in I$, $a(x) \neq 0$. Costuma-se indicar o *domínio* I da equação diferencial na própria equação escrevendo

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I.$$

Se não se dizer nada sobre o domínio da equação diferencial supõe-se $I = \mathbb{R}$.
Uma função derivável y definida em I que satizfaz a condição $(*)$ diz-se *solução* da equação diferencial $(*)$. A equação diferencial linear $(*)$ diz-se *homogénea* se a função $c(x)$ é constante igual a 0. Uma equação diferencial linear com *coeficientes constantes* é uma equação diferencial linear da forma $(*)$ em que as funções $a(x)$ e $b(x)$ são constantes.

Resolução das equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Uma maneira de resolver uma equação diferencial linear

$$(*) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I$$

consiste no seguintes passos:

- Transformar a equação $(*)$ na equação

  $$(**) \quad y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

  em que $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ e $q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$. As duas equações diferenciais são *equivalentes*, isto é, têm as mesmas soluções.
- Determinar uma primitiva P de p.
- Multiplicar a equação $(**)$ por $e^{P(x)}$. Obtem-se uma equação equivalente em que o lado esquerdo é

  $$e^{P(x)}y'(x) + e^{P(x)}p(x)y(x) = (y(x)e^{P(x)})'.$$

Resolução das equações diferenciais lineares de 1ª ordem

- Determinar uma primitiva Q da função do lado direito da equação obtida no passo anterior, isto é da função $e^{P(x)}q(x)$. A equação diferencial é então equivalente à equação

$$e^{P(x)}y(x) = Q(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

  que já não é uma equação diferencial.
- Resolver a última equação em ordem a $y(x)$. Obtem-se assim a *solução geral* de $(*)$:

$$y(x) = e^{-P(x)}Q(x) + Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R},\ x \in I.$$

  Indica-se aqui novamente o domínio I.

Exemplo

Pretende-se resolver a equação diferencial linear

$$(*) \quad x^2y'(x) + y(x) = x^3e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

No domínio da equação $(*)$ temos

$$\begin{aligned}
& x^2y'(x) + y(x) = x^3e^{\frac{1}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & y'(x) + \tfrac{1}{x^2}y(x) = xe^{\frac{1}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & e^{-\frac{1}{x}}y'(x) + e^{-\frac{1}{x}}\tfrac{1}{x^2}y(x) = xe^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & (e^{-\frac{1}{x}}y(x))' = x \\
\Leftrightarrow\ & e^{-\frac{1}{x}}y(x) = \tfrac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & y(x) = \tfrac{x^2}{2}e^{\frac{1}{x}} + Ce^{\frac{1}{x}}, \quad C \in \mathbb{R},\ x \in]0, +\infty[.
\end{aligned}$$

As soluções de $(*)$ são as funções $y\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ da forma

$$y(x) = \tfrac{x^2}{2}e^{\frac{1}{x}} + Ce^{\frac{1}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Condição inicial

Teorema
Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e a, b e c funções contínuas em I tais que para todo o $x \in I$, $a(x) \neq 0$. Então para quaisquer números $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, a equação diferencial linear

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I$$

admite uma única solução y que satizfaz a condição inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Exemplo

Pretende-se resolver o problema com condição inicial

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& y'(x) + y(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^xy'(x) + e^xy(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^xy(x))' = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^xy(x) = C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ora,

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

A solução do problema com condição inicial $(*)$ é a função $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$y(x) = 2e^{-x}.$$

Equações diferenciais separáveis

Uma *equação diferencial separável* é uma equação diferencial da forma

$$(*) \quad y'(x) = g(x)h(y(x)), \quad x \in I,\, y \in J$$

em que I e J são intervalos abertos, g é uma função contínua definida em I e h é uma função contínua definida em J que nunca se anula. Se não se dizer nada sobre um dos intervalos I e J supõe-se que este intervalo é $\mathbb{R}$. Uma função derivável $y\colon I' \to J$ definida num intervalo aberto $I' \subseteq I$ que satizfaz a condição $(*)$ diz-se *solução* da equação diferencial $(*)$. Uma solução $y\colon I' \to J$ de $(*)$ diz-se *maximal* se não existe nenhuma solução $\tilde{y} : \tilde{I} \to J$ de $(*)$ com $I' \subsetneqq \tilde{I}$ tal que para todo o $x \in I'$, $\tilde{y}(x) = y(x)$.

Resolução das equações diferenciais separáveis

A resolução de uma equação diferencial separável

$$(*) \quad y'(x) = g(x)h(y(x)), \quad x \in I,\, y \in J$$

consiste nos seguintes passos:

- Como h nunca se anula, é possível "separar as variáveis" x e y e transformar a equação $(*)$ na equação diferencial equivalente

$$(**) \quad \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x).$$

- Determinar uma primitiva H da função $\frac{1}{h}$ e substituir o lado esquerdo da equação $(**)$ por $(H(y(x)))'$.
- Determinar uma primitiva G de g. A equação diferencial é então equivalente à equação

$$H(y(x)) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

que já não é uma equação diferencial.

Resolução das equações diferenciais separáveis

- Como a sua derivada nunca se anula, a função $H\colon J \to ImH$ é estritamente monótona e então bijectiva. Podemos então substituir a última equação por

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Determinar os valores possíveis para a constante C e, em função disso, o maior domínio possível da solução encontrada. Indica-se a *solução (maximal) geral* de $(*)$ sob a forma

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C), \quad C \in \dots,\, x \in \dots$$

Exemplo

Pretende-se resolver a equação diferencial

$$(*) \quad y'(x) = xy(x)^3, \quad x \in \mathbb{R},\, y > 0.$$

No domínio da equação $(*)$ temos

$$\begin{aligned}
& y'(x) = xy(x)^3 \\
\Leftrightarrow\ & y'(x)y(x)^{-3} = x \\
\Leftrightarrow\ & \left(-\frac{1}{2}y(x)^{-2}\right)' = x \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2}y(x)^{-2} = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & y(x)^{-2} = -x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & y(x)^2 = \frac{1}{-x^2 + K}, \quad K \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + K}}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Tem-se

$$\begin{aligned} & -x^2+K>0 \\ \Leftrightarrow \quad & K>x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & K>0 \quad \text{e} \quad x \in]-\sqrt{K}, \sqrt{K}[. \end{aligned}$$

A solução geral de $(*)$ é dada por

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2+K}}, \quad K>0,\, x \in]-\sqrt{K}, \sqrt{K}[.$$

Condição inicial

Teorema
Sejam I e J intervalos abertos, g uma função contínua definida em I e h uma função contínua definida em J que nunca se anula. Então para quaisquer números $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, a equação diferencial separável

$$y'(x)=g(x)h(y(x)), \quad x \in I,\, y \in J$$

admite uma única solução maximal y que satizfaz a condição inicial

$$y(x_0)=y_0.$$

Exemplo

Pretende-se determinar a solução maximal do problema com condição inicial

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x)=xy(x)^3, & x \in \mathbb{R},\, y>0, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Pelo exemplo precedente a solução geral da equação diferencial dada é

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2+C}}, \quad C>0,\, x \in]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[.$$

Temos

$$y(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{C}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{C}=1 \Leftrightarrow C=1.$$

A solução maximal do problema com condição inicial $(*)$ é a função $y\colon]-1,1[\to]0+\infty[$ dada por

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}.$$