Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Física
2008/2009

Análise Matemática II
Teste 1

27 Abril/2009
Duração: 2h

Atenção: Todos as respostas devem ser justificadas.

1. [1 valor] Seja $z = x^4y3 - x8 + y4$. Calcule $\dfrac{\partial 2z}{\partial y \partial x}$.

2. [3 valores] Considere a função $f\colon \mathbb{R}3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

   (a) Indique e represente a curva de nível para o valore $f(x, y, z) = -1$.
   (b) Determine o gradiente de f no ponto $(0, 0, 1)$.
   (c) Represente, sobre o gráfico representado na alínea (a), o gradiente calculado na alínea (b).

3. [2 valores] Seja $f\colon \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}\,.$$

   (a) Determine o plano tangente à função no ponto $(x, y) = (1, 2)$.
   (b) Indique um vector perpendicular a esse plano.

4. [3 valores] Seja $f\colon \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathbb{R}2$ definida por

$$f(x, y) = (\mathrm{e}^{-x-y}, \mathrm{e}^{xy})$$

   e seja $g\colon \mathbb{R}2\backslash\{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(u, v) = \frac{u2 + v2}{u2 - v2}.$$

   (a) Determine a matriz da derivada da função $g \circ f\colon \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
   (b) Diga qual a expressão para $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x}$.

5. [1.5 valores] Determine os pontos críticos da função $f\colon \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{1-x2-y2}\,.$$

6. [3 valores] Sabendo que $g(x, y) = 3x3 - 5xy + 3y2$ tem um ponto crítico em $(0, 0)$, verifique se se trata de um extremo.

7. Nods textos de termodinâmica aparece a igualdade $(\frac{\partial y}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial x}{\partial z} = -1$. Verifique esta igualdade. Sugestão considere uma função $F(x, y, z) = 0$ que verifica as hipóteses do teorema da função implícita e uma função f tal que $x = f(y, z)$, uma função g tal que $y = g(x, z)$ e uma função h tal que $z = h(x, y)$, use o teorema da função implícita para calcular as derivadas parciais

8. Diga sem efectuar os cálculos como poderia saber quais são as medidas de um rectângulo que tem área maxima e perímetro igual a 400 metros

9. [3 valores] Suponha que
$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}.$$
Mostre que se existe uma função $f(x, y)$ com derivadas de segunda ordem contínuas tais que $F = \nabla f$, então $P_y = G_x$.