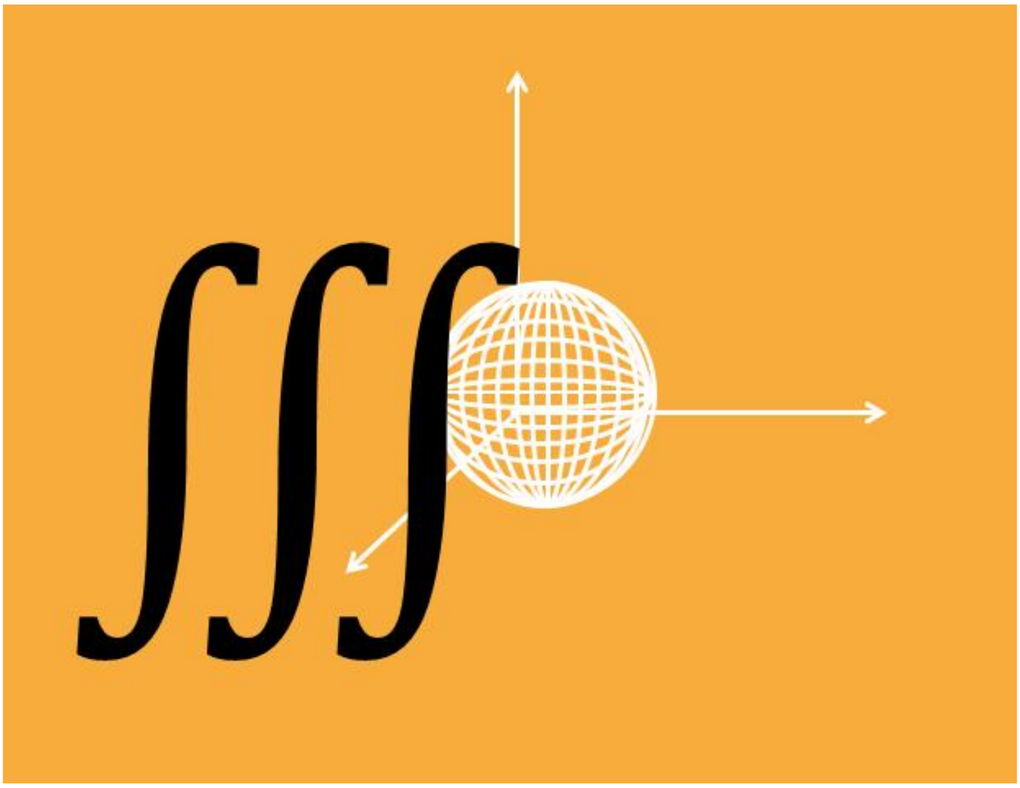
- RESUMÃO -
INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



Responde Aí

www.respondeai.com.br

Integrais de Superfície – Caso Escalar

Da mesma forma que, nas integrais duplas, nós "somamos" os valores de uma função $f(x,y,z)$ em áreas planas $dA = dxdy$, podemos fazer algo semelhante quando temos àreas não planas, superfícies no espaço.

A integral de uma função f escalar ao longo de uma superfície S é calculada pela seguinte fórmula:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

Onde: $\varphi(u,v)$ é a parametrização de S, D é o domínio dos parâmetros u e v, e $f(\varphi(u,v))$ é o campo $f(x,y,z)$ escrito em função da parametrização de S.

OBS: Se você não se lembra muito bem de como parametrizar superfícies, dá uma olhada na revisão que fizemos no final do resumo! =)

Área de uma superfície

A área de uma superfície S é:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

Massa de uma superfície

Sendo δ a densidade de S, sua massa é:

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)dS = \iint_D \delta(\varphi(u,v)) \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

Passo a passo

Integrais de superfície – caso escalar

1. Parametrizar S como $\varphi(u,v)$, encontrando D;
2. Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$;
3. Calcular a normal à superfície $\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}$;
4. Tirar o módulo desse vetor: $\|\vec{N}(u,v)\| = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|$;
5. Montar a integral usando a fórmula que demos lá em cima, trazendo os valores encontrados nos passos anteriores;
6. Integrar!

Integrais de Superfície – Caso Vetorial

Para calcular a integral de superfície de um campo vetorial F ao longo de uma superfície S, usamos a seguinte fórmula:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{\mathrm{n}}\, dS = \iint_D \vec{F}\big(\varphi(u,v)\big).\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) dudv$$

Basicamente, a diferença com o que acabamos de ver é que não tiramos o módulo da normal à superfície.

Por esse motivo, a orientação dada à superfície importa agora. Temos que lembrar que existem dois campo de vetores normais à S:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad e \quad \vec{N}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

Em geral, o problema vai nos dizer a orientação que devemos tomar.

Fluxo

O fluxo de um campo F sobre uma superfície S é:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.\vec{\mathrm{n}}\, dS$$

Passo a passo

Integrais de superfície – caso vetorial

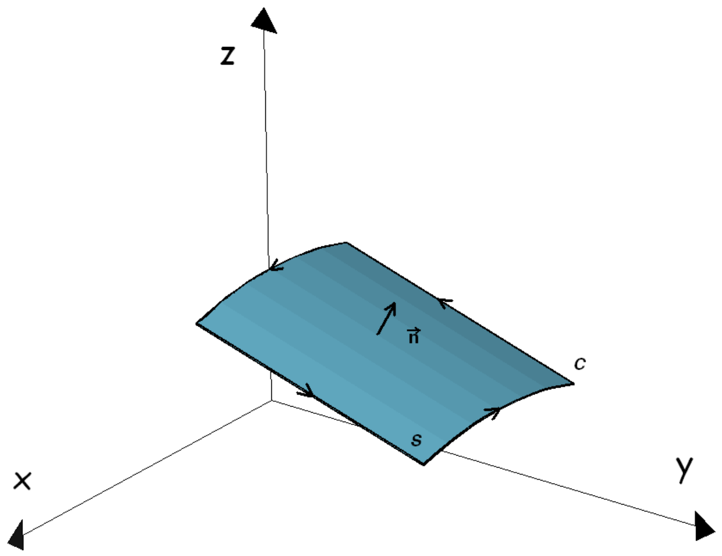
1. Parametrizar S como $\varphi(u,v)$, encontrando D;
2. Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$;
3. Calcular a normal à superfície $\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ e verificar a orientação pedida pelo problema; caso seja a contrária, escolher como normal o vetor oposto, trocando o sinal de $\vec{N}(u,v)$;
4. Montar a integral usando a fórmula que demos lá em cima, trazendo os valores encontrados nos passos anteriores;
5. Fazer o produto escalar $\vec{F}\big(\varphi(u,v)\big).\vec{N}(u,v)$;
6. Integrar!

Teorema de Stokes

O **Teorema de Stokes** vai nos dar uma relação entre a **integral de superfície** sobre uma superfície S com a **integral de linha** sobre a sua fronteira, que é uma curva no espaço**.**

Para aplicar Stokes, precisamos de uma curva **orientada positivamente**. Com base na orientação de S, podemos orientar sua fronteira usando a **Regra da Mão Direita**. Fica atento a isso porque se você orientar ao errado vai dar treta.

O conceito é o seguinte: quando seu polegar direito apontar no sentido da curva C, seus outros dedos, que vão "furar" a superfície S devem estar no sentido de $\vec{\mathrm{n}}$. Dessa forma, a curva estará orientada positivamente. Por exemplo:



Então, sendo S uma superfície orientada, se $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial de classe C^1 (sua primeira derivada é contínua) e se a fronteira de S, ∂S está orientada positivamente, pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S (rot(\vec{F}).\vec{n})dS = \oint_{\partial S} \vec{F}.dr$$

Isso quer dizer que a integral de superfície do **rotacional** de F em S é igual à integral de linha de F na sua fronteira.

Onde o rotacional de F é dado pelo produto vetorial:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Lendo o teorema da direita para a esquerda: a integral de linha de F sobre uma curva ∂S é igual à integral de superfície do rotacional de F sobre uma superfície que tenha ∂S como fronteira. Isso quer dizer que podemo *escolher* S dada uma curva! Claro, a boa é escolher S de uma forma que simplifique o problema!

Hora do Bizú

Pensamos em usar Stokes quando:

- A curva da integral de linha é difícil de parametrizar
- O campo F tem uma expressão bizarra

Passo a passo

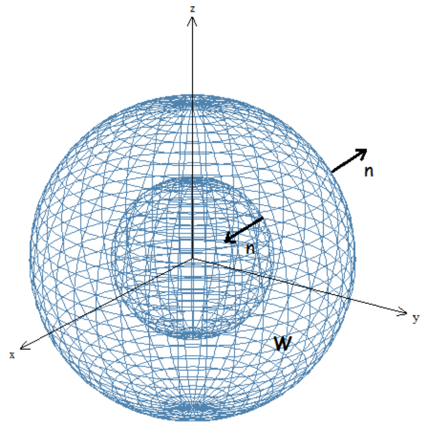
Teorema de Stokes

1. Ver que não conseguimos calcular a integral de linha pela definição e calcular $rot(\vec{F})$ (rezando para ser uma expressão tranquila);
2. Escolher uma superfície S que tenha a curva do problema como fronteira (o campo F deve estar definido ao longo dela);
3. Parametrizar S como $\varphi(u, v)$, encontrando o domínio dos parâmetros D;
4. Calcular sua normal $\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ e usar a Regra da Mão Direita para ver se a orientação está de acordo com a da curva; se não, trocar o sinal de $\vec{N}(u, v)$;
5. Montar a integral de superfície pela seguinte forma:
$$\iint_S (rot(\vec{F}).\vec{n})ds = \iint_D rot\left(\vec{F}(\varphi(u, v))\right).\vec{N}(u, v)\, dudv$$
Trazendo o que encontramos nos passos anteriores e escrevendo $rot(\vec{F})$ em função das variáveis da parametrização;
6. Fazer o produto escalar $rot\left(\vec{F}(\varphi(u, v))\right).\vec{N}(u, v)$;
7. Integrar!

Teorema de Gauss (Teorema do Divergente)

O Teorema de Gauss relaciona uma **integral tripla** sobre um volume W com uma **integral de superfície** sobre a sua fronteira, que chamamos de ∂W.

Novamente, precisamos nos preocupar com a orientação de S: para uma superfície que limita um sólido estar **orientada positivamente**, seu vetor normal deve sempre **apontar para fora do sólido.** Por exemplo, temos essa esfera com uma parte oca:



Assim, sendo ∂W uma superfície orientada positivamente, fronteira de uma região sólida W, e $\vec{F}$ um campo vetorial que tenha derivadas parciais contínuas em W:

$$\iint_{\partial W} \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iiint_{W} div(\vec{F})\, dV$$

Onde o divergente de $F = (F_1, F_2, F_3)$ é dado por:

$$div(\vec{F}) = \nabla.\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Em outras palavras, trocamos a integral de superfície por uma integral tripla do divergente do campo no sólido limitado por essa superfície.

Hora do Bizú

Pensamos em usar Gauss quando:

- A superfície da integral é difícil de parametrizar
- O campo tem uma expressão complicada
- S é formada por várias superfícies

Se liga em duas coisas importantes:

E se S não for fechada?

Se você achar que a boa é usar Gauss, feche a região com uma superfície auxiliar S_2:

$$\iint_{S_1} \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iiint_W div(\vec{F})\, dV - \iint_{S_2} \vec{F}.\vec{n}\, ds$$

A integral em S_2 você calcula pela definição.

E se F tiver uma singularidade dentro de W?

Se isso acontecer, precisamos "remover" o ponto em que F não está definido da região, usando, por exemplo, a esfera menor da imagem que vimos lá em cima. Aí você precisa descontar a integral na superfície nova,como vimos ao lado.

Passo a passo

Teorema de Gauss

1. Ver que não é fácil resolver a integral de superfície pela definição e calcular $div(\vec{F})$;
2. Fazer um esboço para identificar a região D e aplicar Gauss (se S não formar uma região fechada, fechar com uma superfície auxiliar);
3. Escrever matematicamente a região D (se for preciso, fazer mudança para coordenadas cilíndricas ou esféricas) e resolver a integral tripla;
4. Se você tiver usado uma superfície auxiliar, resolver a integral nela pela definição e encontrar a integral em S.

Relembrando as Principais Superfícies...

Para resolver questões de integrais de superfícies, é bom a gente saber com que superfícies estamos trabalhando, até para fazermos esboços. Por isso, fizemos aqui um resumo das principais que mais aparecem nesse tipo de questão, para você saber reconhecer quando vir:

- Cones: $z^2 = ax^2 + by^2$;
- Cilindros: $ax^2 + by^1 = 1$ (cilindro elíptico); $y = ax^2$ (cilindro de parábola);
- Paraboloides elípticos: $z = ax^2 + by^2$;
- Hiperboloides de uma folha: $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$;

OBS: o eixo de simetria é sempre aquela variável que "falta" na equação ou aquela com sinal diferente. Aqui, escrevemos essas superfícies com eixo de simetria z.

- Esferas: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (quando os coeficientes são diferentes de 1, temos um elipsoide);

OBS: no nosso resumo, as superfícies estão centradas na origem, mas também podemos encontrar algo do tipo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Isso é uma esfera com centro deslocado para (a, b, c). O mesmo raciocínio vale para as outras superfícies!

- Planos: $ax + by + cz + d = 0$ (todas as variáveis são elevadas a "1").

Relembrando Parametrização de Superfícies...

Já viu que nessa matéria você vai precisar usar parametrização de superfícies o tempo todo, né? Fizemos aqui um resumo disso para te ajudar!

Para descrever uma superfície, nós teremos *dois* parâmetros (pois temos uma "área").

As superfícies podem ter mais de uma parametrização. Então, cabe a nós escolher a que for melhor para a questão. Vamos usar essa notação aqui para a superfície parametrizada:

$$\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Dentro de um domínio D do plano uv, utilizamos u e v como parâmetros, mas você pode escolher a variável que quiser.

Tá, e na prática? Como parametrizamos? Infelizmente, o segredo para parametrizar é treinar mesmo, mas vamos listar umas dicas gerais para te dar uma luz nessa missão:

- Isolar uma variável: é a forma mais simples de parametrizar, você escolhe, entre (x, y, z), duas variáveis como parâmetros e a terceira fica em função delas.

Exemplo: queremos parametrizar o paraboloide: $x^2 + y^2 - 2z = 0$

Podemos fazer o seguinte: $x = x$; $y = y$; $z = \frac{x^2+y^2}{2}$

$$\varphi(x,y) = \left(x, y, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

Os intervalos de x e y vão depender dos dados da questão.

- Esferas, elipsoides: pode ser uma boa parametrizar com coordenadas esféricas.

Ex: para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, fazendo $\rho = 1$ nas coordenadas esféricas, temos a parametrização:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \, sen\varphi, sen\,\theta \; sen\,\varphi, \cos\varphi)$$

- Cones, paraboloides, cilindros: tente as coordenadas cilíndricas.

Ex: usando coordenadas cilíndricas no cone $z^2 = x^2 + y^2$

Temos: $z^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\,sen\,\theta)^2 = r^2$ e podemos, então, parametrizá-lo como:

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta, r)$$

- Quando uma superfície é cortada por outra: importante, isso gera muitas dúvidas!

Ex: parametrizar a superfície S formada pela parte do plano $z = 2x$ contida dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Nesses casos, você faz o seguinte:

1. já que S pertence ao plano, parametrize o plano. Temos $x = x$ e $z = 2x$ (como a equação do plano não tem y, independe dele e escrevemos $y = y$). Ou seja, $\varphi(x, y) = (x, y, 2x)$.
2. Beleza. Agora, vamos limitar essa superfície nos parâmetros x e y, para termos S. Vamos fazer a interseção entre as duas superfícies:
$$z = 2x = x^2 + y^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$
E encontrar a projeção de S no plano xy: no caso, uma circunferência. O seu interior é o domínio D da parametrização.
3. A parametrização que queremos é: $\varphi(x, y) = (x, y, 2x)$, onde $D = (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Depois, é claro, iríamos usar coordenadas polares para resolver a integral em D. Você poderia ter parametrizado S direto em coordenadas polares, mas achamos que desse jeito aqui fica menos confuso! Você quem sabe! :)

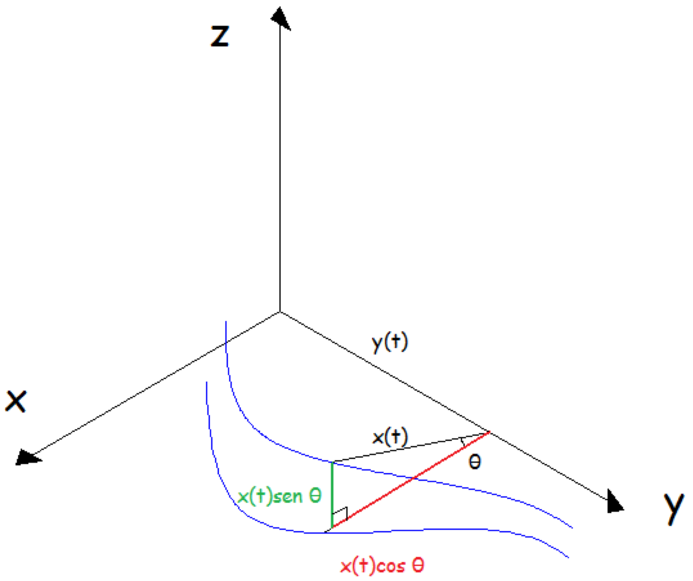
- Superfícies de revolução: esse é um caso que tem uma parametrização especial.

Superfícies de revolução são aquelas geradas quando giramos uma curva em relação a um eixo.

Sendo γ uma curva do plano xy parametrizada por $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big), a \leq t \leq b$, a parametrização da superfície gerada quando rotacionamos γ em torno do eixo y é:

$$\varphi(\theta, t) = (x(t)\cos\theta\,, y(t), x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$a \leq t \leq b;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



Em resumo: a variável y, paralela ao eixo de rotação não se altera: $y = y(t)$.

As outras duas variáveis serão escritas em função de $x(t)$, a coordenada da parametrização da curva que nos restou. Como x é pertencente ao plano da curva, apresentará $\cos\theta$; e z, não pertencente, apresentará $\mathrm{sen}\,\theta$.

Esse raciocínio pode ser seguido para rotação em torno dos eixos x e z também.