Cálculo EC - aula 11

39. Utilizando a fórmula de Taylor-Lagrange obtida no exercício 38 mostre que que $0,98$ é um valor arredondado de $\cos(0,2)$, isto é $0,975 \leq \cos(0,2) < 0,985$.

Como calculado no exercício 38.a)

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} c}{6} x^3}_{R(x)}, \text{ para algum } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Portanto: $\cos(0.2) = \underbrace{P(0.2)}_{\text{estimativa}} + \underbrace{R(0.2)}_{\text{Resto}}$

$$P(0.2) = 1 - \frac{0.2^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4}{100} = 1 - \frac{2}{100} = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$R(0.2) = \frac{\operatorname{sen} c}{6} 0.2^3 = \frac{\operatorname{sen} c}{6}\frac{8}{1000} = \operatorname{sen} c \, \frac{4}{3} 10^{-3}$$

$$|R(0.2)| = |\operatorname{sen} c| \frac{4}{3} \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3} \Rightarrow -5\times 10^{-3} < R(0.2) < 5 \times 10^{-3}$$

Logo: $\cos(0.2) = 0.98$ calculado com erro inferior a 5×10^{-3}
ou seja com duas casas decimais corretas

40. Utilizando fórmulas de Taylor-Young à ordem 2 em volta de 0, calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\operatorname{sen} x}{x^3+2x^2}$$

a) Dos cálculos do exercício 38, sabemos que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x) \quad , \text{ com } \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$$

$$\operatorname{tg}(x) = x + x^2\beta(x) \quad , \text{ com } \lim_{x\to 0} \beta(x) = 0$$

Logo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + x^2\alpha(x)}{(x + x^2\beta(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \frac{1/2 + \alpha(x)}{(1 + x\beta(x))^2} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{(1-e^{x}) \operatorname{sen} x}{x^3 + 2x^2}$$

$f(x) = e^{x}$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = e^{x}$ $\qquad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^{x}$ $\qquad$ $f''(0) = 1$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \alpha(x) \qquad \text{com} \lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$$

$g(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $g(0) = 0$

$g'(x) = \cos x$ $\qquad$ $g'(0) = 1$

$g''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $g''(0) = 0$

$$\operatorname{sen} x = x + x^2 \beta(x) \qquad \text{com} \lim_{x \to 0} \beta(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-e^{x}) \operatorname{sen} x}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(-x - \frac{x^2}{2} + x^2 \alpha(x)\right)\left(x + x^2 \beta(x)\right)}{x^3 + 2x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \frac{\left(-1 - \frac{x}{2} + x\,\alpha(x)\right)\left(1 + x\beta(x)\right)}{(x+2)} = -\frac{1}{2}$$

41. Calcule:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{4^k}$

- Séries: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \longrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

  "soma infinita"

- Séries geométricas: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, q constante

  se $|q| \geq 1$ a série diverge

  se $|q| < 1$ a série converge para $S = \dfrac{1}{1-q}$

- Séries harmónicas (ou de Riemann)

  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, α constante,

  se $\alpha > 1$ a série converge

  se $\alpha \leq 1$ a série diverge

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

série geométrica onde $q = -\frac{1}{2}$

Como $|q| < 1$, a série converge e a sua soma é $\dfrac{1}{1+1/2} = \dfrac{2}{3}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$ —— série harmónica com $\alpha = 1/3$

A série diverge e a sua soma é $+\infty$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{4^k} = 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 3\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) =$

$= 3\left(\dfrac{1}{1-1/4} - \left(1+\dfrac{1}{4}\right)\right) = 3\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

42. Convergente ou divergente? Justifique a sua resposta.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\frac{1}{3}}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$

Critério: condição necessária de convergência

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é uma série convergente então $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-3)^k$

$$(-3)^k = \begin{cases} -3^k, & k \text{ ímpar} \\ 3^k, & k \text{ par} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{k \to +\infty} a_k$$

Logo a série diverge.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3-1}{k^3}$

$\lim_{k \to +\infty} \frac{k^3-1}{k^3} = 1 \neq 0$ logo a série diverge

Critério de Leibniz

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ uma série onde $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Se: • $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

• a_k é uma sucessão decrescente, isto é,

$a_{k+1} < a_k \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$

então: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/3}}$, $a_k = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

• $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0$

• $k < k+1 \Rightarrow \sqrt[3]{k} < \sqrt[3]{k+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k}} > \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$

$\Rightarrow a_k > a_{k+1}$. Logo a_k é uma sucessão decrescente.

Pelo critério de Leibniz, a série converge.

Critério da comparação

Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ duas séries tais que $b_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

- Se $|a_k| \leq b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge
  então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, converge

- Se $a_k \geq b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge
  então $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ diverge.

d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right| = \frac{|\operatorname{sen} k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (série harmónica com $\alpha = 2$)

então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ converge.

TPC: Verificar no Wolfram Alpha qual é a soma de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Resposta: $\dfrac{\pi^2}{6}$

Critério da Raiz

Seja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ uma série e seja $\ell = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

- Se $\ell < 1$, a série converge
- Se $\ell > 1$, a série diverge
- Se $\ell = 1$, nada se pode concluir

Critério da Razão

Seja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ uma série e seja $\ell = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

- Se $\ell < 1$, a série converge
- Se $\ell > 1$, a série diverge
- Se $\ell = 1$, nada se pode concluir

43. Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o raio de convergência:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} x^k$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} x^k$

Séries de potências : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos uma série numérica que pode convergir ou divergir.

- A série converge sempre quando $x = 0$ (e a soma é 0)

Teorema : Existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$

- a série converge para todo o x tal que $|x| < R$
- a série diverge para todo o x tal que $|x| > R$

Nota: o teorema nada diz quando $x = R$ ou $x = -R$

A R chamamos raio de convergência.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Método I

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge — série harmónica com $\alpha = 1/2$

$\Rightarrow$ o raio de convergência é no máximo 1

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge — Critério de Leibniz

$\Rightarrow$ o raio de convergência é pelo menos 1

Portanto $r = 1$

Podemos concluir que a série converge sse $x \in [-1, 1[$

Método II:

Aplicando o critério da razão:

Seja $p_k = \dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$ e seja $\ell = \lim\limits_{k \to +\infty} \left| \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \right|$

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{k+1}}{\sqrt{k+1}}}{\dfrac{x^k}{\sqrt{k}}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k}\ |x|^{k+1}}{\sqrt{k+1}\ |x|^k} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}}\ |x| = |x|$$

Segundo o critério da razão:

- a série converge se $|x| < 1$
- a série diverge se $|x| > 1$
- nada se pode concluir para $x = 1$ ou $x = -1$

Para $x = \pm 1$ fazemos o estudo separadamente (ver método I)

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k}$$

Método I:

Série geométrica com $q = \frac{x}{2}$

A série converge <u>sse</u> $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ sse $|x| < 2$

Logo $R = 2$.

Método II: TPC

Aplicar o critério da razão

Método III: TPC

Aplicar o critério da raiz

c) $$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$$

Critério da Raiz:

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|k^k x^k|} = \lim_{k \to +\infty} k|x| = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Logo a série converge apenas para $x = 0$ e $R = 0$.

d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$$

Critério da raiz:

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^k}\right|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x|}{k} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e $R = +\infty$