Expressão da incerteza em resultados de medições

Introdução

No trabalho experimental – na verdade também na nossa vida do dia-a-dia – somos permanentemente confrontados com a necessidade de atribuir valores a grandezas, por exemplo, ao determinar uma distância, uma massa ou uma área. Em geral, estes valores não são conhecidos com uma certeza absoluta, havendo uma certa incerteza que lhes está associada. Esta realidade levanta algumas questões:

- Com que precisão necessitamos de conhecer a grandeza?
- Quanto tempo estamos dispostos a investir para a determinar com maior precisão?
- Quanto dinheiro estamos dispostos a investir em equipamento, etc., para esse fim?
- Que caraterísticas tem a incerteza associada a uma medição e como podemos minimizá-la?
- Como exprimir essa incerteza quando transmitimos o resultado da medição a outras pessoas?

Este protocolo pressupõe que o aluno tem alguma familiaridade com a estimativa de incertezas e a sua expressão. Conhecimentos de estatística elementar são uma mais-valia mas não são indispensáveis. O objetivo deste protocolo é exemplificar alguns conceitos fundamentais em metrologia mas frequentemente mal compreendidos e capacitar o aluno para, de forma natural, "pensar" os dados experimentais à luz das incertezas que os caraterizam.

Parte I[1]

Conceitos básicos

Chegas a casa tão entusiasmado após esta aula que dizes ao teu amigo: "*Hoje foi o melhor dia da minha vida! Fiz uma experiência de física verdadeiramente empolgante. A melhor parte foi comparar as minhas medições com as dos meus colegas.*". O teu amigo olha para ti perplexo e pergunta: "*O que é uma experiência*?"

Escreve aqui a resposta que darias ao teu amigo:

O teu amigo fica interessado e pergunta: "*O que é uma medição?*". Escreve a resposta que darias:

Compara as tuas respostas com as dos outros elementos do grupo. Não é assim tão fácil responder a estas questões, pois não?

Supõe que te pesas numa balança digital e a balança indica 77.5 kg. Gera-se a seguinte discussão entre os teus amigos:

A. Tu pesas 77.5 kg.

[1] Adaptado de "Introduction to Measurement in the Physics Laboratory", A. Buffler, S. Allie, F. Lubben & B. Campbell, (2009)

B. Isso não é quanto ele pesa. Para saber quanto ele pesa, ele teria que tirar a roupa.
C. Isso também não chega pois depende de ele ter acabado de comer ou não.
D. Tudo depende daquilo que vocês queiram pesar.

Com quem estás mais de acordo? Procura explicar o teu argumento.

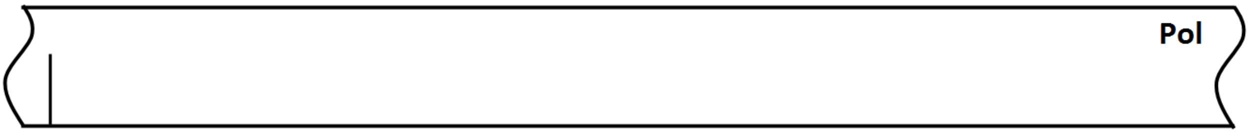
Torna-se evidente que é necessário definir de forma não ambígua a grandeza que pretendemos medir (e à qual se dá o nome técnico de *mensuranda*[2]).

Define a mensuranda para o caso da pesagem descrita acima.

Nota: definir a mensuranda de forma clara e não ambígua é um dos passos importantes numa medição.

Considera agora uma outra situação. Supõe que estavas no meio da serra do Gerês há 10 000 anos atrás. Não existem fitas métricas e não tens nenhuma lembrança da tecnologia atual. Como farias para transmitir informação do tamanho de um objeto a outras pessoas? Consideremos um caso concreto: descreve aos teus colegas de grupo o comprimento de uma caneta sem recorrer a nenhuma das unidades de medida conhecidas.

Alguém tem a ideia brilhante de criar réguas graduadas para medir distâncias. As marcas estão separadas umas das outras de um polegar (Pol). Cada elemento do grupo deve criar a sua usando o seu polegar:



Usando a sua régua graduada em Pol cada um deve medir o comprimento da (mesma) caneta. Procurem estimar frações de Pol, isto é, se for maior do que 3 Pol e menor do que 4 Pol procurem determinar o dígito das décimas, por exemplo, 3.6 Pol. Não observem as medições feitas pelos vossos colegas para não serem influenciados por elas.

Aluno 1 – comprimento da caneta: __________ Pol **{medição M1}**

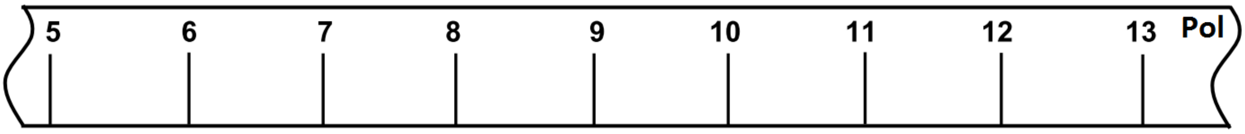
Aluno 2 – comprimento da caneta: __________ Pol

Aluno 3 – comprimento da caneta: __________ Pol

Os três valores de comprimento são iguais? Se não são iguais, por que razão diferem?

[2] Ver definição de mensuranda na página 16 do Vocabulário Internacional de Metrologia (2012) que pode ser obtido em http://www1.ipq.pt/pt/ipq/publicacoes/publicacoesdownload/

Se compararem as vossas réguas graduadas, verão que as graduações diferem porque os vossos polegares não são exatamente iguais. Para poderem comparar as medições que cada um faz de forma que faça sentido, primeiro terão de acordar num padrão comum de distância. Neste caso, eu vou impor esse padrão comum, que passará a ser:



Use este padrão para medir o comprimento da caneta, estimando frações de Pol o melhor que consigam. Mais uma vez, não observem os vossos colegas a efetuarem as medições para não serem influenciados por elas:

Aluno 1 – comprimento da caneta: _________ Pol **{medição M2}**

Aluno 2 – comprimento da caneta: _________ Pol

Aluno 3 – comprimento da caneta: _________ Pol

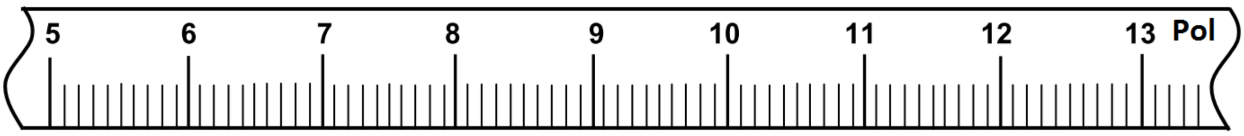
Compare o conjunto de medições M1 com M2. Acha que um deles é melhor? Porquê?

Nota: uma medição consiste na comparação de uma grandeza (a mensuranda) com um padrão da mesma grandeza.

Qual a principal razão para que os valores de M1 não sejam exatamente iguais?

O que achas que pode ser feito para melhorar a qualidade dos resultados?

A principal causa da discrepância do conjunto de valores M2 resulta da estimativa das décimas de Pol. Cada um estima de forma ligeiramente diferente. Este problema pode facilmente ser resolvido desenhando na escala os traços correspondentes a décimos de polegar:



Repitam a medição do comprimento da caneta, desta vez estimando centésimas de polegar (ou seja, um décimo da menor divisão da escala). Mais uma vez, cada um deve efetuar a medição independentemente dos colegas:

Aluno 1 – comprimento da caneta: _________ Pol **{medição M3}**

Aluno 2 – comprimento da caneta: _________ Pol

Aluno 3 – comprimento da caneta: _________ Pol

Se os três valores agora obtidos diferirem, achas que haverá vantagem em subdividir a escala ainda mais, em centipolegares? E, se os três valores forem iguais, que vantagem haverá em usar uma escala graduada em centipolegares?

Achas que é possível continuar a subdividir a escala?

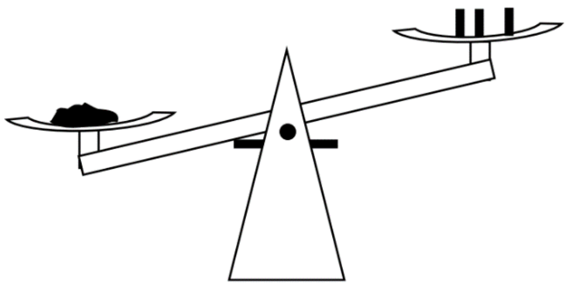
Achas que é possível obter o valor verdadeiro do comprimento da caneta desta forma? Achas que há alguma outra maneira de obter o valor verdadeiro do comprimento da caneta? E se usasses um medidor digital?

Nota: Especificar as unidades no resultado de uma medição é a forma de indicarmos o padrão de grandeza que usamos. Por exemplo, uma caneta pode medir 7.6 Pol de comprimento. Ou, se usarmos uma fita métrica graduada em centímetros, 15.5 cm. 7.6 e 15.5 sem a indicação das unidades são valores inúteis! Normalmente usa-se o sistema de unidades SI. Neste sistema, a unidade de base de comprimento é o metro. Mas o centímetro também é uma unidade de comprimento do sistema SI, só que não é a unidade de base, é um submúltiplo.

Limitações da informação que obtemos com uma medição

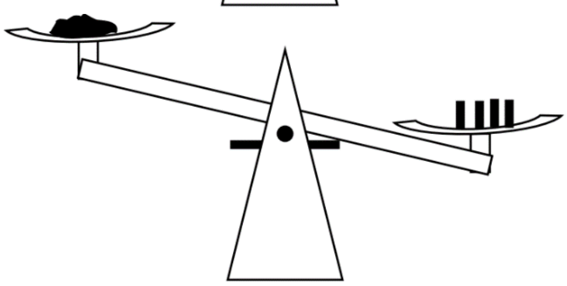
Considera a seguinte situação:

Um pó químico é colocado no braço esquerdo da balança e massas aferidas no braço direito como mostra a figura ao lado.



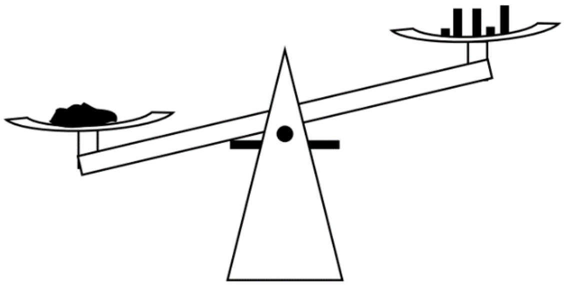
Inicialmente usam-se 3 massas de 1.0 g. O pó, claramente, pesa mais de 3.0 g.

Acrescentando uma quarta massa de 1.0 g a balança inclina para o outro lado.

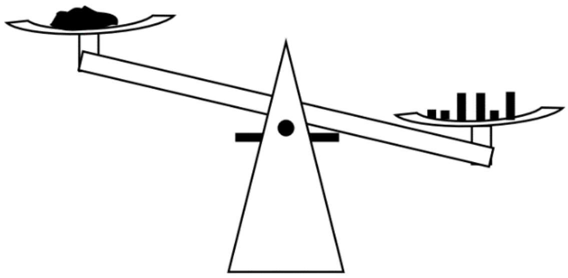


O que podes concluir sobre a massa do pó?

O químico remove uma das massas de 1.0 g e começa a adicionar cuidadosamente massas aferidas de 0.1 g. Adicionar duas destas massas não faz a balança inclinar para o lado direito.



Adicionar mais uma massa aferida de 0.1 g faz a balança inclinar para o lado direito.



O que é que se pode concluir, neste momento, sobre o valor da massa do pó?

Nota: há um limite para a precisão com que se pode conhecer a massa da amostra do pó. Tudo o que é possível concluir é que a massa do pó está entre 3.2 g e 3.3 g. Mesmo que estivessem disponíveis massas aferidas de menor valor (0.01 g, 0.001 g, por exemplo) o nosso conhecimento seria mais preciso mas não perfeito.

Propósito da medição

Supõe que vais fazer um bolo e a receita diz: "adicionar 50 gramas de açúcar". Colocas o açúcar numa balança e esta indica 52.0 g. Os teus amigos discutem:

A – Penso que está bem.

B – Penso que assim não serve. Temos de pesar de novo o açúcar.

C – Penso que assim não serve. Temos de tirar 2 gramas de açúcar.

Com qual dos teus amigos, A, B ou C concordas mais? Justifica porquê:

Supõe agora que estás num laboratório de química na UM. Uma experiência exige que adiciones 50.0 gramas de um determinado produto químico. Colocas o produto químico numa balança e esta indica 52.0 g. Os teus amigos discutem:

A – Penso que está bem.

B – Penso que assim não serve. Temos de pesar de novo o produto químico.

C – Penso que assim não serve. Temos de tirar 2.0 gramas do produto químico.

Com qual dos teus amigos, A, B ou C concordas mais? Justifica porquê:

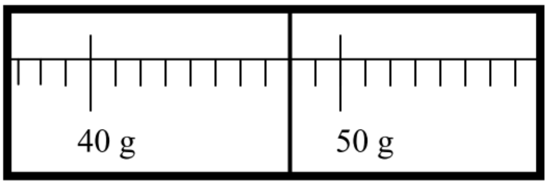
Compara as duas respostas e explica em que é que são idênticas e em que aspetos são distintas.

Se considerarmos o exercício em que mediram o comprimento da caneta, o que pretendíamos era obter informação sobre a caneta, ou seja, sermos capazes de responder à questão "qual é o comprimento da caneta?". Contudo, nestes dois últimos exemplos discutiram se a amostra medida tinha um valor suficientemente próximo dum valor de referência (indicado na receita do bolo ou no protocolo do trabalho laboratorial). A questão neste caso é "este valor é suficientemente próximo do pretendido para o fim em vista?". Ambos os tipos de medições se verificam tanto em ciência como na vida do dia-a-dia. O que é importante num contexto científico e de engenharia é que deve haver uma forma de anotar o resultado da medição comum e independente do propósito da medição.

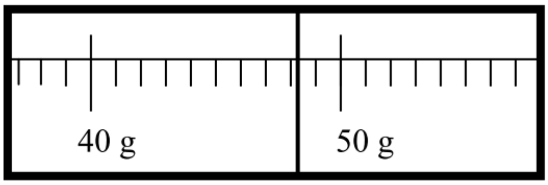
No exemplo do bolo acima, à pergunta "quanto açúcar usaste?" podes responder "cerca de 52 g" ou então responder "exatamente 52 g". Mas o que significam estes termos? Em ciência e engenharia os termos usados não podem ser ambíguos.

"Exatamente aproximadamente"

Num laboratório pesaram-se dois blocos de madeira e obtiveram-se os resultados seguintes (desta vez em lugar de anotar os valores numéricos tirou-se uma fotografia com o telemóvel ;-)):



Bloco 1



Bloco 2

Considera a seguinte discussão entre três estudantes relativa ao **Bloco 1**:

A – Penso que a leitura da escala da esquerda é exatamente 48.0 g.

B – Penso que a leitura da escala da esquerda é aproximadamente 48.0 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

Considera agora a seguinte discussão entre três estudantes relativa ao **Bloco 2**:

A – Penso que a leitura da escala da direita é exatamente 48.0 g.

B – Penso que a leitura da escala da direita é aproximadamente 48.0 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

Compara as respostas que deste em relação à leitura das duas escalas. Descreve em que aspetos são semelhantes e em que aspetos se diferenciam.

Parece evidente que o valor da leitura da escala da esquerda é, exatamente, 48.0 g. Será que isso significa que a massa do Bloco 1 seja exatamente 48.0 g?

Considera a seguinte discussão entre três alunos em relação à escala da esquerda (Bloco 1):

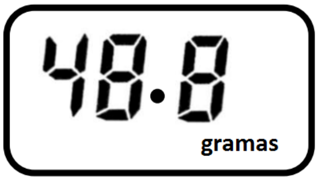
A – Penso que a massa do Bloco 1 é exatamente 48.0 g.

B – Penso que a massa do Bloco 1 é aproximadamente 48.0 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

O professor resolve fornecer uma balança digital para determinar a massa dos blocos de madeira.



O professor coloca um bloco de madeira na balança digital e esta indica o valor mostrado ao lado.

Considera a seguinte discussão entre três alunos:

A – Penso que a leitura do ecrã é exatamente 48.8 g.

B – Penso que a leitura do ecrã é aproximadamente 48.8 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

Em seguida os mesmos três alunos começam a discutir o valor da massa do bloco e têm as seguintes opiniões, muito originais:

A – Penso que a massa do bloco é exatamente 48.8 g.

B – Penso que a massa do bloco é aproximadamente 48.8 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

O professor, em seguida, altera a sensibilidade da balança digital e o mostrador passa a indicar o que se vê na figura ao lado.

Considera a seguinte discussão entre três alunos:

A – Penso que a leitura do ecrã é exatamente 48.82 g.

B – Penso que a leitura do ecrã é aproximadamente 48.82 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

A mesma discussão em relação à massa do bloco toma o seguinte aspeto:

A – Penso que a massa do bloco é exatamente 48.82 g.

B – Penso que a massa do bloco é aproximadamente 48.82 g.

C – Não estou de acordo com nenhum de vocês.

Com qual aluno concordas mais? Explica detalhadamente:

O valor lido no aparelho de medida e o valor do mensurando não são a mesma coisa. Cada leitura efetuada acrescenta alguma informação ao conhecimento que temos do valor do mensurando.

Medições em ciência

O objetivo da ciência é compreender os fenómenos naturais e, por conseguinte, o propósito de uma medição em ciência é fornecer informação relativa a uma dada grandeza. Não é fácil definir o que é "conhecimento científico". Do ponto de vista que nos interessa aqui, podemos distinguir na ciência teoria e experimentação, aspetos interligados e que se influenciam mutuamente. Um propósito da teoria é descrever e explicar as experiências e fazer previsões relativas a futuras experiências.

Por outro lado, as experiências envolvem observações sistemáticas de eventos que têm lugar sob condições controladas e compreendidas tão bem quanto possível. Tipicamente uma experiência envolve uma série de medições. A qualidade dos dados obtidos numa experiência depende da forma como a experiência foi programada, do cuidado com que os procedimentos foram realizados e de quão bem compreendemos os parâmetros que influenciam as medições.

Existem uma série de conceitos e procedimentos relacionados com a realização de medições científicas e a forma como se transmitem os resultados das medições. Uma boa compreensão dos conceitos e destreza na aplicação dos procedimentos é de vital importância. Igualmente importante é o domínio da terminologia usada, pois vários termos são também usados noutros contextos, em particular na vida do dia-a-dia, mas com um significado díspar.

Um aspeto importante em todo o trabalho experimental consiste em identificar todos os fatores que influenciam o resultado de uma experiência. Esses fatores podem estar relacionados com o ambiente em que é realizada a experiência, a destreza e os conhecimentos do experimentador, os instrumentos utilizados, etc., e todos eles nos afastam de um resultado "perfeito".

No que se segue vermos algumas formas de analisar e caracterizar dados experimentais e de os descrever de forma padronizada. A existência de um padrão claro e sem ambiguidades e aceite por todos é de vital importância neste mundo globalizado em que vivemos. Nesta UC seguiremos o GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement), adotado por diversas organizações internacionais no início da década de 90.[3]

Parte II[4]

Densidade

Se um amigo te perguntar o que é "densidade", é provável que uma das primeiras ideias que te venham à cabeça seja "densidade é massa por unidade de volume". Isso significa que, para um dado objeto, se mede simultaneamente a massa e o volume e a densidade é dada pela massa a dividir pelo volume.

Se um bloco de madeira tem de massa 130 kg e de volume 0.2 m^3, qual é a densidade da madeira?

Embora o termo "densidade" seja frequentemente usado para relacionar massa com volume, ele é igualmente usado em muitas outras situações. Por exemplo, "densidade populacional" é o número de pessoas por unidade de área que vive numa região. Para além da densidade volúmica e da densidade superficial, também se fala em densidade linear.

Em todos estes casos a densidade refere-se a quanto de alguma coisa existe numa certa quantidade de volume ou de área ou de comprimento. Matematicamente a densidade é calculada dividindo a quantidade em questão pelo volume ou área ou comprimento. A densidade tal como foi definida dois parágrafos acima podia também ser chamada de massa volúmica.

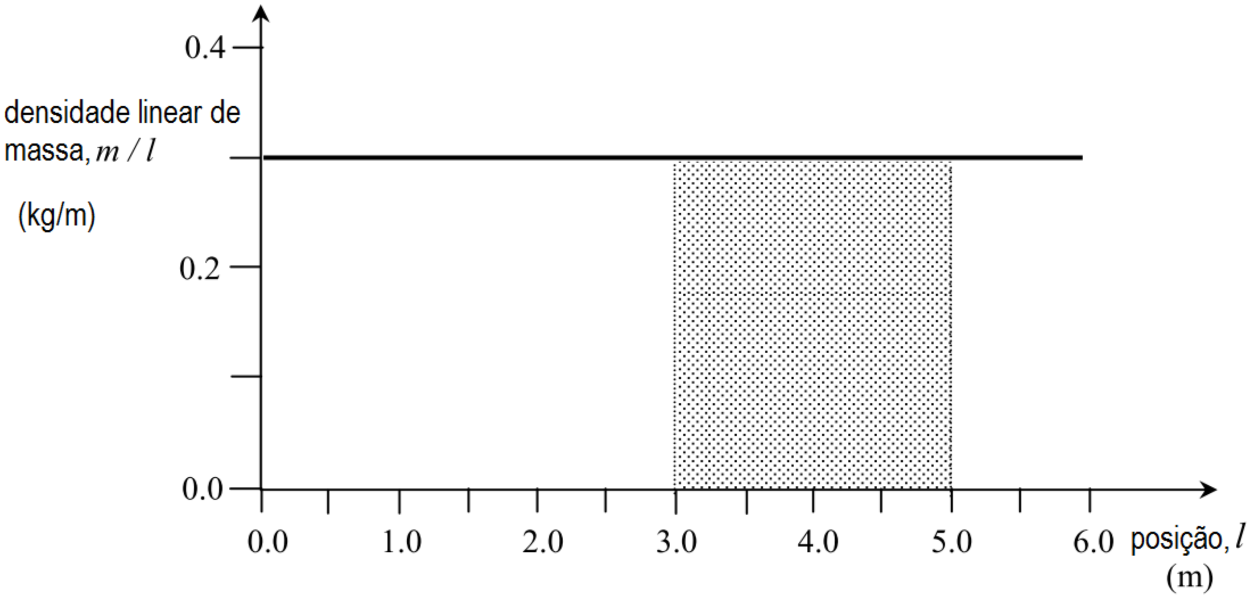
Densidade como função

Considera um cabo com 6 metros de comprimento. O gráfico seguinte representa a densidade linear de massa em função da posição ao longo do cabo. A função em si é representada pela linha horizontal a negrito. O facto de ser uma linha horizontal significa que o valor da função densidade linear de massa é a mesma para todos os pontos, ou seja, é constante.

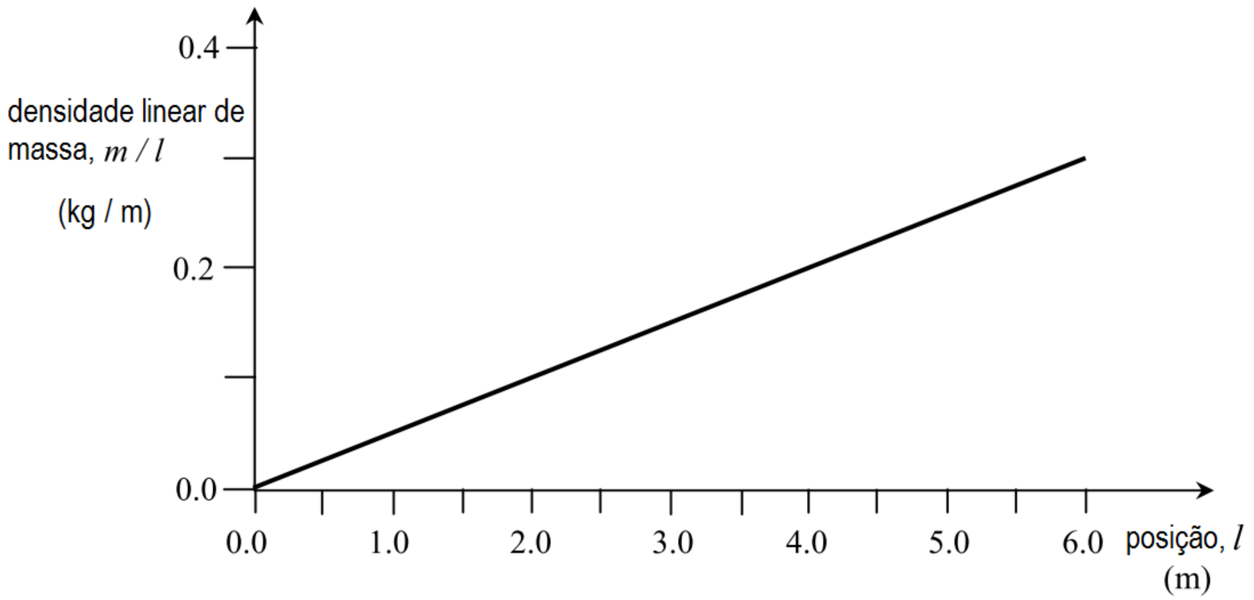
Supõe que pretendemos cortar um troço do cabo, por exemplo, entre a posição 3.0 m e a posição 5.0 m. A massa desse troço de cabo pode ser calculada multiplicando a densidade linear de massa (porque é constante neste caso) pelo comprimento do troço de cabo: (5.0 - 3.0) m x 0.3 kg / m = 0.6 kg. Este cálculo está representado no gráfico pela área sombreada.

[3] O GUM não está disponível gratuitamente mas podem obter aqui uma versão adaptada: http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines/TN1297/tn1297s.pdf. Encontram uma introdução à utilização do GUM aqui: http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Info/Uncertainty/index.html.

[4] Adaptado de "Introduction to Measurement in the Physics Laboratory", A. Buffler, S. Allie, F. Lubben & B. Campbell, (2009)



Mesmo no caso em que a função densidade de massa não é constante, é sempre possível calcular a massa entre dois pontos calculando a área por baixo da função entre esses mesmos dois pontos. Considera agora um cabo cuja função densidade linear de massa varia de acordo com o gráfico seguinte:



Baseando-te no gráfico, descreve por palavras tuas de que forma a densidade de massa varia com a posição.

Identifica no gráfico a área que corresponde à massa do troço de cabo entre a posição 0.0 m e 2.0 m.

Identifica igualmente a área que corresponde à massa do troço de cabo entre a posição 4.0 m e 6.0 m.

Claramente, a segunda área é maior. Que podes concluir em relação à massa desses dois troços?

Massa do troço entre 0.0 m e 2.0 m = _________________ kg.

Massa do troço entre 4.0 m e 6.0 m = _________________ kg.

Probabilidade

A probabilidade indica se um evento é muito ou pouco provável acontecer.

Usualmente a probabilidade é representada por um número entre 0 e 1 inclusive.

Uma probabilidade de 1 significa uma certeza de 100% de que o evento *irá* ocorrer.

Uma probabilidade de 0 significa uma certeza de 100% de que o evento *não irá* ocorrer.

Por exemplo, considera um saco opaco contendo quatro bolas (vermelha, verde, azul e amarela). Extrai-se uma bola à sorte. Qual a probabilidade de sair a bola verde?

A probabilidade neste caso é 0.25 ou 25%.

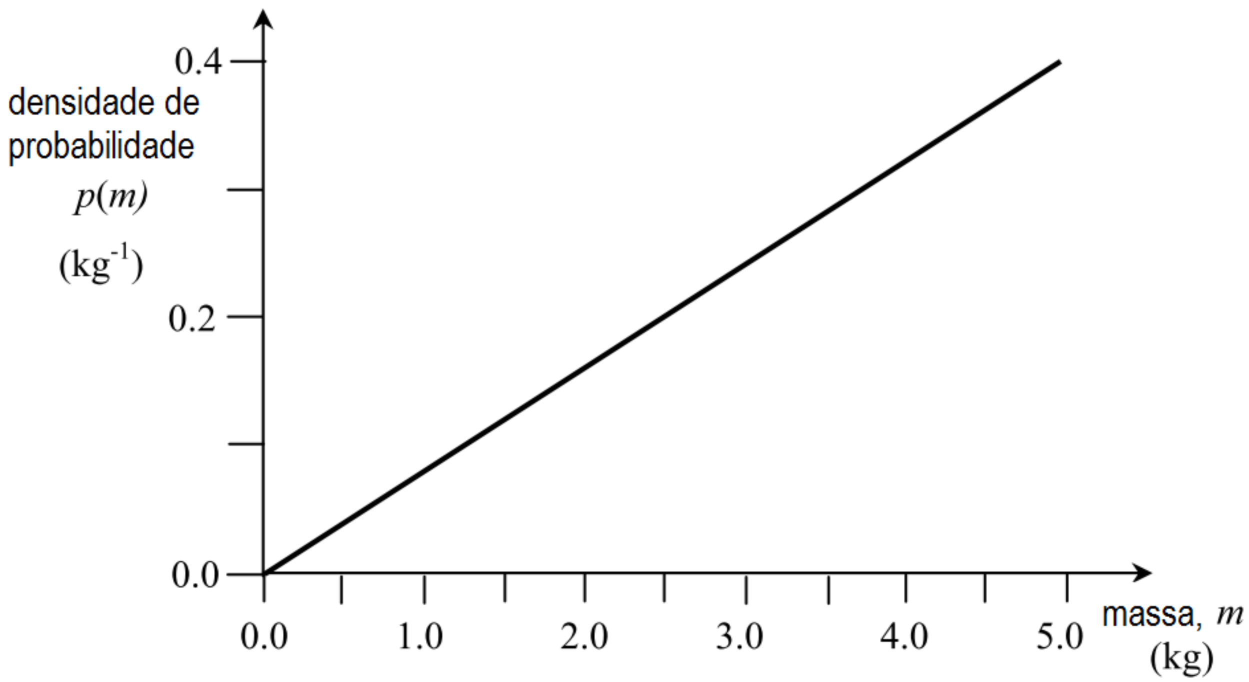
Um outro exemplo: considera que tens 10 pares de meias todas diferentes e todas misturadas numa gaveta. Tu precisas de um par de meias que casem. Tiras uma meia ao calha e questionas-te qual a probabilidade de tirar uma segunda meia ao calha que case com a primeira.

Probabilidade da segunda meia casar com a primeira = ________________

Função densidade de probabilidade (FDP)

A função densidade de probabilidade $p(x)$ representa a densidade de probabilidade p em função da variável x. Nota: neste documento vamos usar o símbolo p para densidade de probabilidade e o símbolo P para a probabilidade.

Vejamos um exemplo concreto. O gráfico seguinte representa a FDP que descreve a densidade de probabilidade p em função dos valores possíveis da massa de um objeto.



Achas que é mais provável a massa estar entre 1.0 kg e 2.0 kg ou entre 4.0 kg e 5.0 kg? Explica.

Qual a probabilidade da massa estar entre 1.0 kg e 2.0 kg?

Probabilidade da massa estar entre 1.0 kg e 2.0 kg = __________________ .

Qual a probabilidade da massa estar entre 4.0 kg e 5.0 kg?

Probabilidade da massa estar entre 4.0 kg e 5.0 kg = __________________ .

Qual a probabilidade da massa ser exatamente 5.0 kg?

Probabilidade da massa ser exatamente 5.0 kg = __________________ .

É necessário distinguir densidade de probabilidade de probabilidade. Embora a densidade de probabilidade seja de 0.4 kg^{-1} no ponto 5.0 kg, a probabilidade da massa ser 5.0 kg é zero. Isso deve-se a que a área que dá a probabilidade é zero se o intervalo de massas for zero.

Responde por palpite, sem fazer a conta: quanto achas que é a área total debaixo de toda a FDP?

Agora faz as contas. A tua previsão confirma-se?

Nota: a área total sob uma FDP é sempre um (isto pode também ser dito como o integral a todo o eixo dos XX da FDP é um) porque é 100% certo que a grandeza (neste caso a massa) terá algum valor, qualquer que este seja. Nota ainda que, dada uma FDP, só faz sentido falarmos de probabilidade para um intervalo de valores da grandeza que é o argumento da FDP.

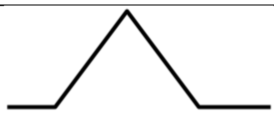
Um modelo probabilístico da medição

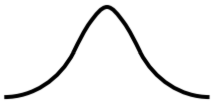
Em 1993 o International Standards Organization (ISO) recomendou que a metrologia (a ciência que estuda as medições) tinha vantagem em adotar um modelo probabilístico da análise dos dados. As recomendações da ISO foram adotadas pela maioria das organizações internacionais da área, tal como a IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics), a IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry), o BIPM (Bureau Internacional des Poids e Mesures), etc., e afeta a forma como os resultados das medições e respetivas incertezas são (ou devem ser) expressos em documentos científicos e técnicos.

Independentemente de terem um conjunto de dados experimentais ou apenas um dado experimental, a questão que devem colocar a vós próprios é sempre a mesma: <u>A partir dos meus dados e de outras informações que eu possa ter, o que é que eu sei acerca da mensuranda</u>? O processo que nos permite, a partir dos dados e de outros conhecimentos, delimitar o conhecimento que temos da mensuranda é baseado na teoria das probabilidades. As funções matemáticas usadas neste processo são FDPs, que servem para sintetizar a confiança que temos no valor da mensuranda.

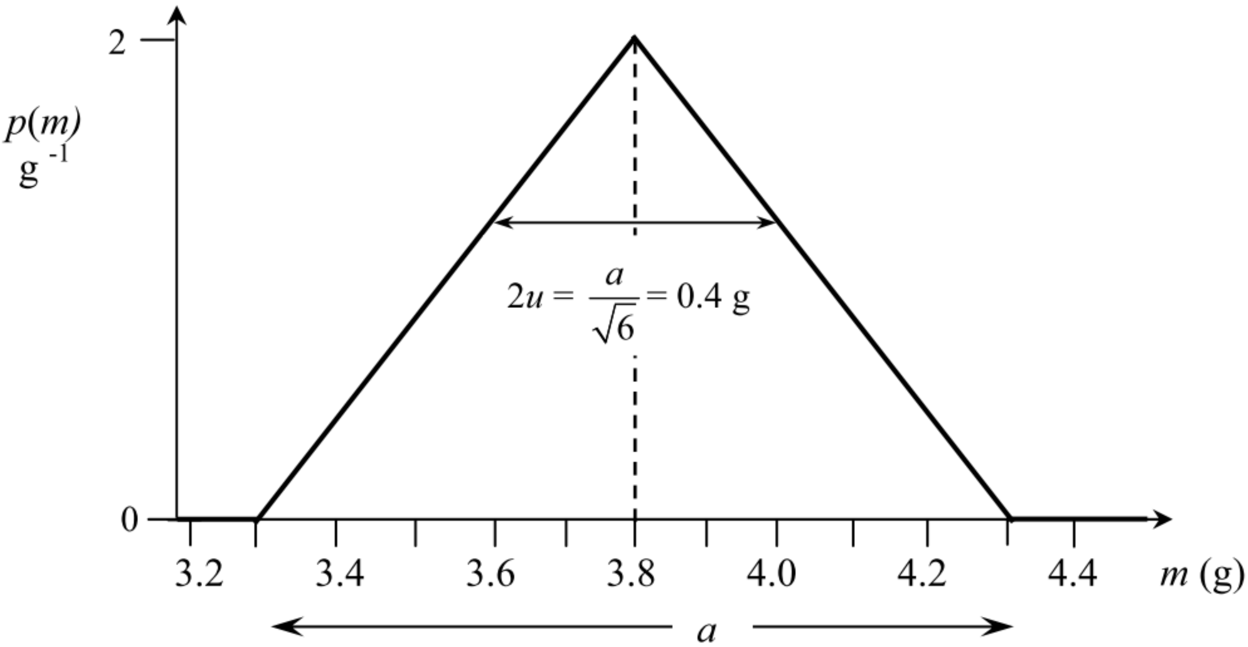
FDPs mais comumente usadas em metrologia

Existem muitas FDPs usadas diversas áreas do conhecimento. No contexto da metrologia, as três FDPs mais usadas estão apresentadas na tabela abaixo. Notem que há outras FDPs importantes em metrologia para além das três referidas.

FDP retangular ou uniforme		Geralmente usada para a leitura de um único valor digital
FDP triangular		Geralmente usada para a leitura de um único valor analógico

FDP normal ou gaussiana		Geralmente usada quando se combinam vários dados ou várias informações

Uma vez terminada a experiência, independentemente de teres feito apenas uma leitura ou várias, toda a informação que podes ter sobre a mensurada fica completamente descrita pela FDP. Considera a medição de uma massa descrita pela seguinte FDP:



O centro da FDP dá, neste caso, a melhor estimativa para o valor da mensuranda, uma vez que é o *valor mais provável*.

A área sob a FDP, neste caso um triângulo, é sempre igual a 1. Contudo esta informação não nos diz se o triângulo é muito largo ou muito estreito. Quanto mais estreito for o triângulo, melhor conhecemos a mensuranda. Torna-se necessário fornecer um segundo valor indicativo do quão largo ou estreito é o triângulo. É habitual descrever o espraiamento da FDP através de um parâmetro chamado ***incerteza--padrão*** e representado pelo símbolo *u*. Quanto maior for o espraiamento dos pontos em volta do valor médio, maior é a incerteza padrão.

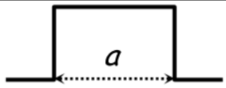
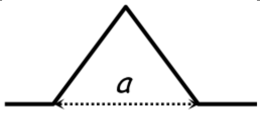
Quando comunicamos o valor final de uma experiência a alguém, a melhor forma seria transmitir a FDP. No entanto, por motivos práticos, é mais habitual indicar apenas a seguinte informação:

- O valor mais provável da mensuranda (que corresponde ao centro da FDP quando esta é simétrica)
- A incerteza-padrão *u* (a qual é dada pela FDP)
- A forma da FDP que está a ser usada (se é triangular, gaussiana, etc.)

No exemplo acima, poderíamos dizer: a melhor estimativa para a massa, *m*, é 3.8 g, a incerteza-padrão é 0.2 g e a FDP usada é triangular.

A incerteza-padrão

Dependendo do tipo de FDP usada, a incerteza-padrão (que está relacionada com a FDP) é calculada de formas diferentes. A seguinte tabela indica o valor da incerteza-padrão para os casos das FDPs mais usadas em metrologia.

Tipos de FDP		A incerteza-padrão u é dada por:
FDP retangular ou uniforme		$u = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
FDP triangular		$u = \frac{a}{2\sqrt{6}}$
FDP normal ou gaussiana		$u = \sigma$ (desvio padrão da média)

A incerteza numa medição é uma medida quantitativa do peso que têm os diversos fatores que afetam negativamente o conhecimento/confiança que temos na mensuranda. É habitual classificar a incerteza em dois tipos, tipo A e tipo B, consoante o método utilizado para a determinar.

Certos tipos de incerteza como, por exemplo, os baseados na incerteza associada à leitura de uma escala, ou baseados a incerteza associada à calibração de um instrumento, ou ainda os baseados em qualquer informação que tenhamos ligado ao procedimento experimental seguido, são considerados incertezas do tipo B. As FDPs triangulares e retangulares estão frequentemente associadas a incertezas deste tipo.

Incertezas determinadas por métodos puramente estatísticos, por exemplo repetindo várias vezes uma medição e calculando o desvio padrão dos resultados usando métodos estatísticos, são consideradas incertezas do tipo A. Na maioria dos casos, as incertezas do tipo A estão associadas a FDPs gaussianas.

Notem que a classificação nestes dois tipos de incertezas não está relacionada com a classificação em sistemático / aleatório. Devem ter particular cuidado com a interpretação dos termos "erro sistemático" e "erro aleatório".

Uma vez determinadas todas as incertezas-padrões que afetam uma medição, a incerteza total, chamada ***incerteza-padrão combinada***, é dada pela raiz quadrada da soma dos quadrados das diversas incertezas-padrões da medição.

Por exemplo, se efetuar a medição da mensuranda *m* e determinar 3 causas de incerteza, $u_1(m)$, $u_2(m)$ e $u_3(m)$, a incerteza-padrão combinada será dada por:

$$u_c(m) = \sqrt{u_1^2(m) + u_2^2(m) + u_3^2(m)}$$

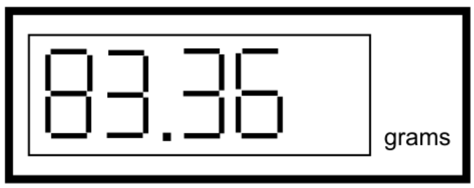
Notem que cada uma das incertezas padrão poderá ser do tipo A ou do tipo B.

Estimar a incerteza-padrão associada à leitura de uma escala

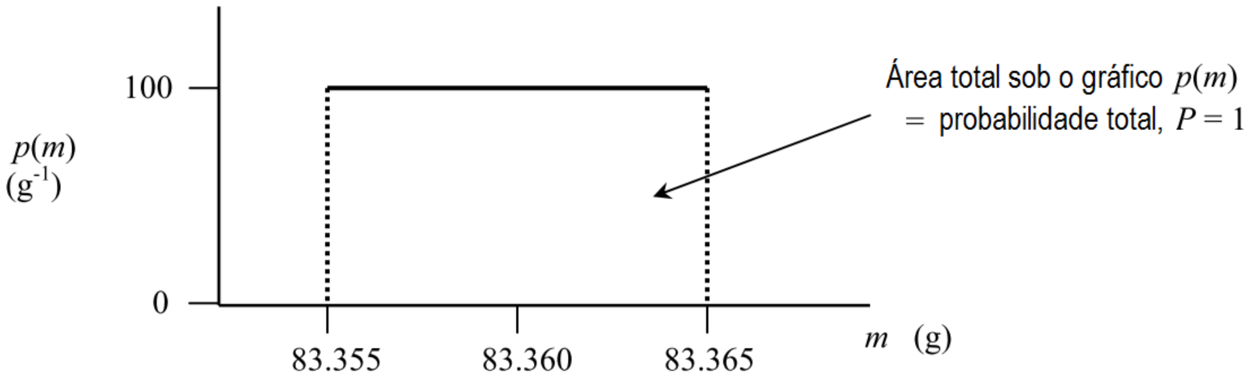
Vamos considerar duas situações: (a) leitura digital simples e (b) leitura analógica simples. Convém chamar a atenção para o facto de apenas estarmos a estimar a incerteza devida à leitura da escala. Para além desta há outras como a incerteza associada à calibração do instrumento que deverá ser estimada e usada conjuntamente para estimar a incerteza-padrão combinada tal como indicado na fórmula acima.

(a) Leitura digital simples

Considera que pretendes determinar a massa de um objeto e o mostrador da mostra o que vês na figura ao lado.



O valor mais provável é 83.36. Qual é a incerteza-padrão associada a este valor? É razoável supor que os valores possíveis estarão entre 83.355 e 83.365. Dentro deste intervalo, nenhum valor é mais provável que o outro, pelo que a FDP apropriada é a retangular. A FDP para esta situação está representada no próximo gráfico.



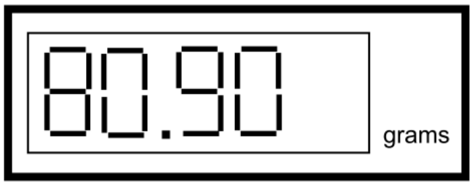
Para uma FDP retangular, a incerteza-padrão é dada por

$$\frac{(metade\ da\ largura\ do\ intervalo)}{\sqrt{3}}$$

Ou seja, neste caso, incerteza-padrão = $\frac{\frac{1}{2}(83.365-83.355)}{\sqrt{3}} = 0.0029g$

Nota: é habitual representar a incerteza com duas casas decimais.

Agora é a tua vez:

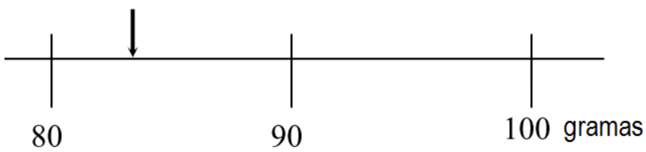


Valor mais provável = ____________

Incerteza-padrão associada à leitura da escala = _______________

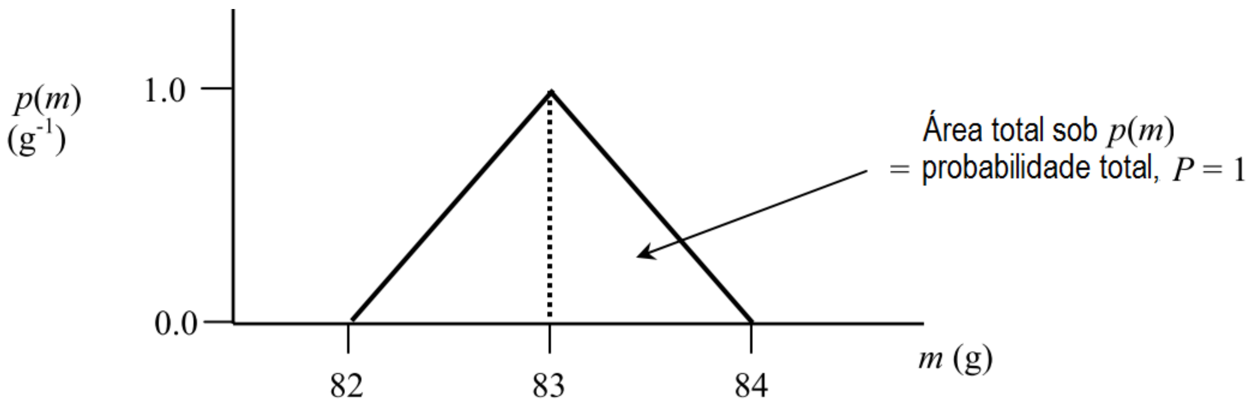
(b) Leitura analógica simples

As leituras das escalas analógicas são um pouco mais complicadas pois baseiam-se na estimativa que tu fizeres. Vejamos o caso concreto seguinte:



Suponhamos que estimavas 83 g. Claro que o valor pode ser um pouco maior ou um pouco menor. Para além disso, 84 g é mais provável que 85 g e este mais do que 86 g. Para valores menores a situação é simétrica. Isto sugere-nos uma FDP triangular. Também precisamos de saber qual a largura dessa função. Para o determinares deves colocar-te a seguinte questão: quais os valores mais próximos dos quais eu estou seguro de que não podem ser? Suponhamos que a decisão que tomavas era 82 g e 84 g.

A FDP correspondente está representada no próximo gráfico.

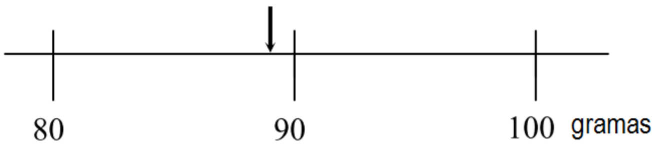


Nota: nunca te esqueças de que a área total tem de ser igual a um!

Numa FDP triangular a incerteza-padrão é dada por: $\frac{(metade\ da\ largura\ do\ intervalo)}{\sqrt{6}}$

Pelo que a incerteza-padrão é = $\frac{\frac{1}{2}(84-82)}{\sqrt{6}} = 0.41g$

Agora é a tua vez:



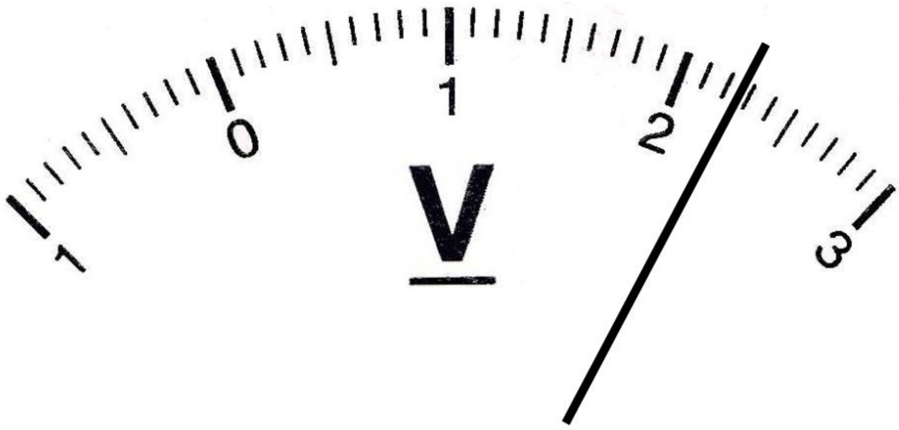
Valor mais provável = ___________

Incerteza-padrão associada à leitura da escala = ______________

Não te esqueças de que a incerteza associada à leitura da escala não é a única incerteza da medição!

Exercício: uso de um voltímetro analógico para medir a tensão de uma fonte de tensão

A figura ao lado mostra o mostrador do voltímetro.



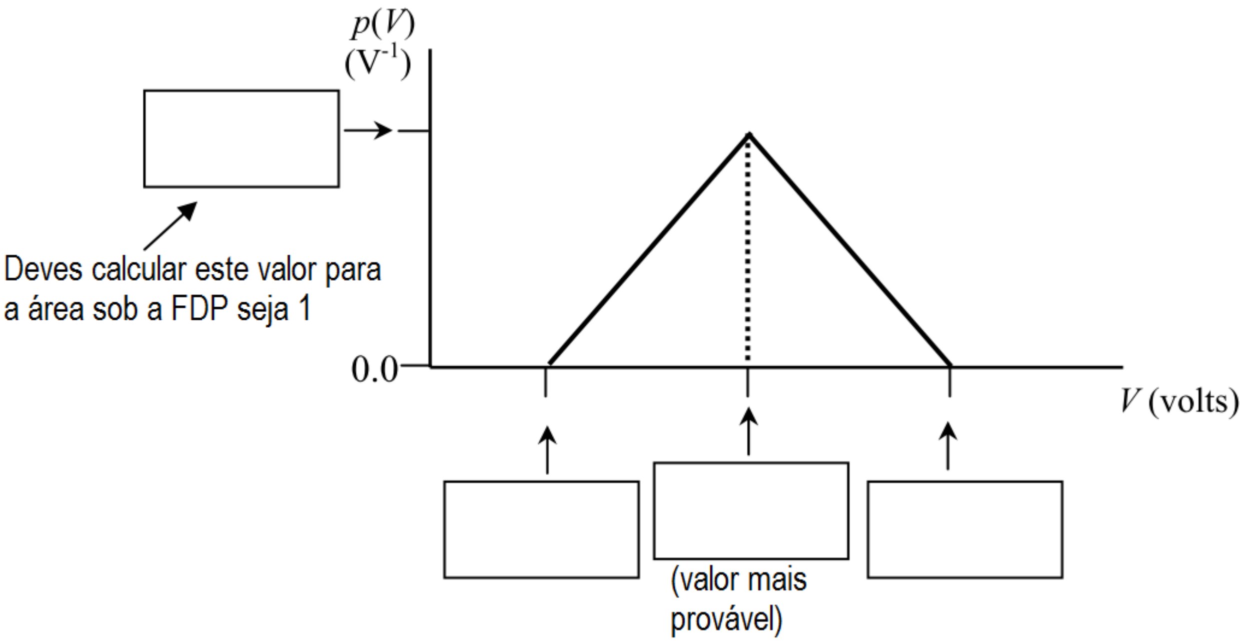
Leitura da escala do voltímetro: ________________ .

Este valor representa a melhor estimativa (valor mais provável).

Em seguida estima a incerteza-padrão. Para isso começa por te colocares a seguinte questão: quais são os valores mais próximos do valor mais provável que apontei acima que claramente não são possíveis?

Valor à esquerda: _________________ valor à direita: __________________

Com base nos valores que estimaste, preenche o gráfico seguinte:



Incerteza-padrão associada à leitura da escala: ____________________

Considera agora que te informam que a incerteza associada à calibração do voltímetro é 2%. Isso significa que há uma incerteza associada ao valor lido igual a 2% desse valor lido. Vamos supor que essa incerteza corresponde à incerteza padrão.

Determina a incerteza-padrão para o valor que obtiveste associada à calibração do voltímetro.

Incerteza-padrão devida à calibração do voltímetro: ___________________

A incerteza total vai ser obtida combinando as duas:

$$Incerteza\ total = \sqrt{u_{escala}^2 + u_{calibração}^2}$$

Calcula a *incerteza-padrão combinada* para a leitura da tensão aos terminais da fonte de tensão.

Incerteza padrão combinada = ___________________

Balanço de incerteza

O balanço de incerteza é uma avaliação, geralmente apresentada sob a forma de uma tabela, de todas as incertezas que afetam uma medição particular. Estas componentes são depois usadas para calcular a incerteza-padrão combinada, u_c, do resultado da medição. O balanço da incerteza é uma forma conveniente de sumariar e apresentar toda a informação relevante tida em conta no cálculo da incerteza final.

Vejamos alguns exemplos:

Voltímetro analógico

Considera a situação em que usas um voltímetro analógico para medir a tensão aos terminais de uma pilha elétrica ou bateria.

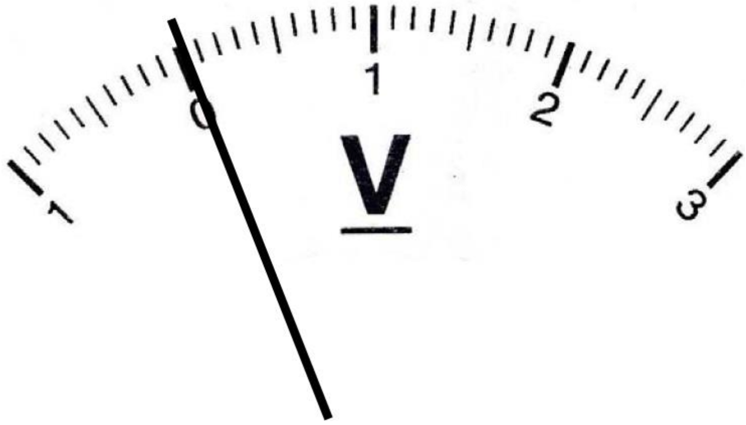
Faz uma listagem de todos os fatores que pensas que podem influenciar essa medição:

Após conectar o voltímetro ao terminais da bateria, vê-se o que mostra a figura ao lado.

Suponhamos que a leitura que fazes é $V_{bateria}$ = 1.54 V, que usas uma FDP triangular correspondendo a uma incerteza-padrão, $u(V_{bateria})$, de:

$$u(V_{bateria}) = \frac{\frac{1}{2}(1.57 - 1.51)}{\sqrt{6}} = 0.012\,V$$

Quando desligas os fios de ligação, o voltímetro mostra o seguinte valor (ver figura ao lado).



Como podes ver, o ponteiro não indica 0.00 V quando os fios estão desligados. Pelo contrário, lê 0.02 V. Suponhamos que a tua estimativa para a confiança no valor dava o mesmo intervalo que a situação acima, ou seja, que:

$$u(V_{zero}) = 0.012\,V$$

Nota: mesmo que a leitura fosse 0.00 V, seria necessário estimar a incerteza-padrão associada ao zero! O mesmo se aplica à medição de um comprimento usando uma fita métrica.

Suponhamos ainda que que a incerteza associada à calibração do voltímetro é de 1%:

$$u(V_{calibração}) = 0.01 \times 1.54V = 0.015\,V$$

Claro que pode ainda haver outras fatores que introduzem incerteza no resultado final, como a temperatura a que o instrumento foi usado, resistências de contacto do fios, etc., etc.. Vamos supor que podemos desprezar estes fatores.

Ah, claro que ainda tinhas de verificar se tinhas usado o instrumento de forma correta ou se a forma como o usaste pode ter influenciado a incerteza final, ou seja, a confiança que tens no resultado da medição.

Com base nesta informação podemos construir uma tabela com o balanço de incertezas:

Componente de incerteza	Incerteza-padrão (V)	Tipo de estimativa
$u(V_{bateria})$	0.012	Tipo B
$u(V_{zero})$	0.012	Tipo B
$u(V_{calibração})$	0.015	Tipo B
Incerteza-padrão combinada: $u_c(V) = \sqrt{0.012^2 + 0.012^2 + 0.015^2} = 0.023\,V$		

O resultado final pode ser sumariado como: "o valor mais provável da tensão da bateria é 1.520 V com uma incerteza-padrão combinada de 0.023 V".

Conjunto de valores digitais

Pretende determinar-se a aceleração da gravidade, *g*, a partir do período *T*, de um pêndulo simples e do seu comprimento, *l*.

Suponhamos que se determinou *l* = (0.2619 ± 0.0058) m sendo *u*(*l*) obtido através do tipo B de estimativa da incerteza.

Foi usado um cronómetro digital para determinar a duração de vinte oscilações completas do pêndulo. Esta medição foi repetida dez vezes e obtiveram-se os resultados mostrados na tabela seguinte:

Tempo de 20 oscilações, T_{20} (s)		Período, $T = T_{20} / 20$ (s)	
19.56	21.31	0.978	1.066
20.49	20.82	1.025	1.041
20.76	19.78	1.038	0.989
20.63	20.39	1.032	1.020
21.56	20.02	1.078	1.001

Neste caso observamos uma grande dispersão dos tempos medidos, muito superior à resolução do cronómetro usado. A melhor forma de tratar os dados é usando a média e o desvio padrão.

Assim, o valor mais provável é *T* = média dos *T* = 1.027 s

E a incerteza-padrão é *u*(*T*) = desvio padrão dos *T* = 0.010 s

Contudo, para além destes fatores (a que está associada uma estimativa da incerteza do tipo A) há muitos outros a considerar. Desde logo, o tempo de reação do operador do cronómetro. Poderá pensar-se que o tempo de reação inicial e final se cancelam, o que será verdade se a técnica usada for a correta. Mas pode não ser esse o caso.

A habilidade ou falta dela a sincronizar o iniciar e parar o cronómetro contribui para a maior ou menor dispersão dos resultados obtidos e é provável que seja a principal causa da dispersão. Outros fatores entram em conta, por exemplo, o período do pêndulo varia com a amplitude das oscilações. Se as oscilações não tiverem todas a mesma amplitude, isso vai induzir uma dispersão nos resultados finais.

Nota: as incertezas do tipo A são fáceis de detetar e é possível diminuir a sua influência repetindo muitas vezes a experiência e calculando a média.

Para além das incertezas do tipo A, também há incertezas do tipo B a considerar. Em particular as nossas conhecidas (i) incerteza na leitura da escala, (ii) incerteza no zero e (iii) incerteza na calibração do aparelho.

Suponhamos que o fabricante do cronómetro indica uma incerteza associada à calibração de 0.5%. No nosso caso essa incerteza traduz-se em:

$$U(T_{\text{calibração}}) = 0.005 \times 1.027 = 0.0051 \text{ s}$$

A aceleração da gravidade será calculada a partir da fórmula: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Donde $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

O valor mais provável é obtido substituindo *l* e *T* pelos respetivos valores mais prováveis:

$$g = \frac{4\pi^2 \times 0.2619}{1.027^2} = 9.8028\, ms^{-2}$$

O balanço de incerteza para a determinação do período é:

Componente de incerteza	Incerteza-padrão (s)	Tipo de estimativa
$u(T_{dispersão})$	0.010	Tipo A
$u(T_{calibração})$	0.0051	Tipo B

A incerteza-padrão combinada é: u_c(T) = $\sqrt{0.010^2 + 0.0051^2}$ = 0.011 s

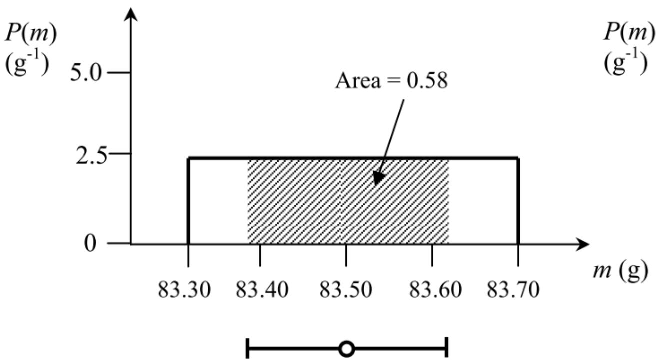
A incerteza-padrão para o valor de g é $\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2}$

Donde $u(g)$ = 0.302 ms^{-2}.

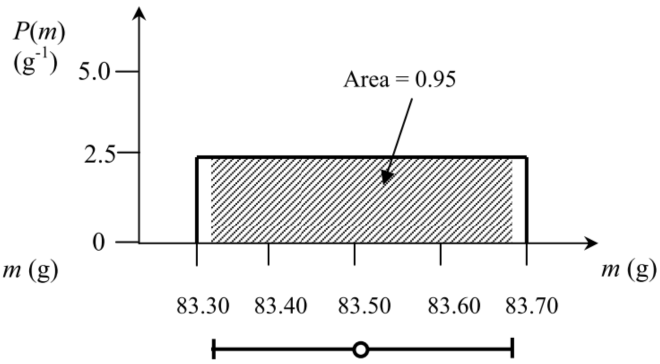
O resultado final é expresso como g = (9.80±0.30) ms^{-2}.

Incerteza de medição expandida

Suponhamos que se efetuou uma medição com o objetivo de determinar a massa de um objeto. A partir da FDP do resultado da medição, mostrada a baixo, vemos que a melhor aproximação para a massa é m = 83.50 g com uma incerteza padrão u = 0.12 g. Podemos ter uma confiança de 58% de que o valor da massa se encontra no intervalo (83.50 ± 0.12) g.



m = 83.50 ± 0.12 g



m = 83.50 ± 0.19 g

Embora a incerteza padrão seja um parâmetro universal e útil para caraterizar a confiança que temos nos resultados das medições, há situações em que se torna conveniente indicar um intervalo com uma confiança maior.

Se aumentarmos a largura do intervalo para abranger uma maior área sob a FDP, então teremos uma confiança maior de que o valor da mensuranda se situa nesse intervalo. Nota que no caso da FDP retangular do caso anterior nós estamos 100% confiantes de que a massa está no intervalo entre 83.30 g e 83.70 g.

A probabilidade da mensuranda estar no intervalo fornecido altera-se indicando como limites de desse intervalo u multiplicado por uma constante chamada fator de expansão, k, e o resultado é chamado incerteza de medição expandida, $U = ku$.

A probabilidade associada ao intervalo $y \pm U$ depende do fator de expansão k mas também da forma da FDP:

FDP gaussiana:

- $k = 1 \rightarrow y \pm ku$ define um intervalo de 68% de probabilidade.
- $k = 2 \rightarrow y \pm ku$ define um intervalo de 95% de probabilidade.
- $k = 3 \rightarrow y \pm ku$ define um intervalo de 99% de probabilidade.

FDP retangular:

- k = 1 → $y \pm ku$ define um intervalo de 58% de probabilidade.
- k = 1.65 → $y \pm ku$ define um intervalo de 95% de probabilidade.
- k = 1.73 ($\sqrt{3}$) → $y \pm ku$ define um intervalo de 100% de probabilidade.

FDP triangular:

- k = 1 → $y \pm ku$ define um intervalo de 58% de probabilidade.
- k = 1.81 → $y \pm ku$ define um intervalo de 95% de probabilidade.
- k = 2.45 ($\sqrt{6}$) → $y \pm ku$ define um intervalo de 100% de probabilidade.

Isto significa que, para sermos completos ao dizermos o valor da mensuranda, temos de indicar a forma da FDP e também o fator de expansão usado ou o intervalo de probabilidade consequente. Em ciência um fator de expansão de 1 é habitual. Em engenharia outros intervalos de probabilidade são habituais (95% e 99%, por exemplo).

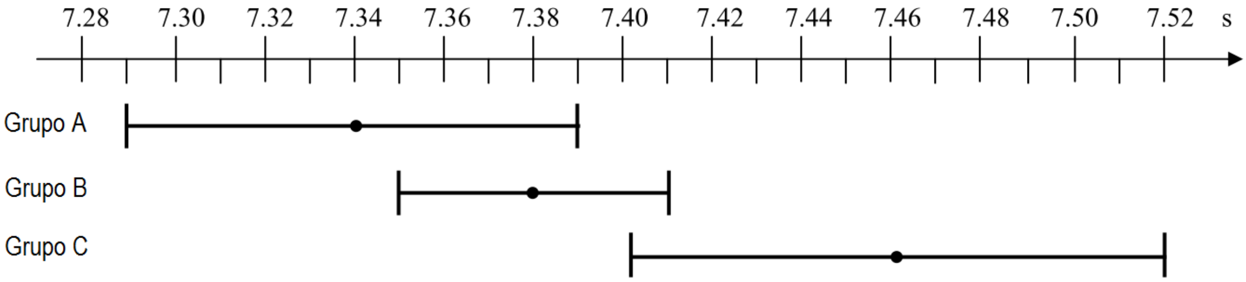
Comparação de duas medições

Considera agora a seguinte situação. Um grupo de cientistas (Grupo A) mediu o tempo que demorou uma reação química a ocorrer e obteve (7.34 ± 0.05) s, sendo os 0.05 s a incerteza padrão. Um segundo grupo de cientistas (Grupo B) realizou uma experiência equivalente e obteve para a mesma reação química o tempo (7.38 ± 0.03) s.

Estes resultados concordam um com o outro?

A resposta parece ser relativamente simples: se os intervalos dos dois resultados se sobrepuserem, então eles concordam dentro do limite das incertezas expressas.

Isto é fácil de perceber se atentarmos no seguinte gráfico:



Dizemos que os resultados dos grupos A e B coincidem dentro dos limites dos intervalos de confiança expressos.

Um terceiro grupo de cientistas, Grupo C, medo o tempo de reação como sendo (7.46 ± 0.06) s. Podes ver que os resultados dos grupos B e C estão de acordo dentro do limite das incertezas expressas, contudo os resultados dos grupos A e C não concordam.

Qual dos grupos, A, B ou C, pensas que tem os melhores resultados? Explica a tua resposta detalhadamente.

Só faz sentido comparar resultados de medições se as incertezas associadas a cada um deles forem conhecidas. Se as incertezas não forem conhecidas é impossível concluir o que quer que seja, não importando o quão "próximos" ou "afastados" os resultados das medições estiverem um do outro.

Para cada um dos seguintes casos, decide se os dois resultados A e B estão de acordo:

	Resultado A (s)	Resultado B (s)	Os dois resultados concordam dentro das incertezas expressas (sim/não)?
(a)	4.16 ± 0.04	4.16 ± 0.03	
(b)	4.16 ± 0.04	4.18 ± 0.03	
(c)	4.16 ± 0.04	4.21 ± 0.03	
(d)	4.16 ± 0.04	4.23 ± 0.03	
(e)	4.16 ± 0.04	4.27 ± 0.03	
(f)	4.16 ± 0.04	4.27 ± 0.04	

Nota: Tendo em conta as FDP, mesmo situações como as medições dos tempos de reação pelos grupos A e C podem não ser incompatíveis. Em estatística chama-se teste de hipóteses ao método que permite determinar a probabilidade de as duas medições concordarem.