Resolução de equações diferenciais do tipo

$$(1)\quad \begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

$f: I \to \mathbb{R}$ contínua

$g: J \to \mathbb{R}$ com derivada contínua

I, J intervalos de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $b \in J$

① $g(b) = 0$

Então a função $y: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b$ resolve (1), uma vez que

$y'(x) = (b)' = 0$ e $f(x)g(y(x)) = f(x)g(b) = 0$ e $y(a) = b$

② $g(b) \neq 0$

Escrevemos a equação na forma

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Então

$$\int_a^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$$

pelo que

$$\int_a^x (B(y(t)))'\,dt = \int_a^x (A(t))'\,dt$$

e, integrando, obtemos

$$B(y(x)) - B(y(a)) = A(x) - A(a)$$

Assim

$$\boxed{B(y(x)) = A(x) + B(b)}$$

Sejam • $A(x)$ uma primitiva de $f(x)$ (i.e., $A'(x) = f(x)$)

• $B(y)$ uma primitiva de $\frac{1}{g(y)}$ (i.e. $B'(y) = \frac{1}{g(y)}$)

Notem que

$$(B(y(t)))' = B'(y(t))y'(t) = \frac{y'(t)}{g(y(t))}$$

Podemos escolher a primitiva de f de modo que $A(a) = 0$, para simplificar

e, se a função B for invertível, temos

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + B(b)),$$

sendo a solução pesquisada esta função com domínio o maior intervalo de $\mathbb{R}$, contido em I, ao qual pertença o ponto a.

Exemplo

(1) $\begin{cases} (xy^2+x)+(y-x^2y)y'=0 \\ y(1/2)=1 \end{cases}$

- Vamos reescrever esta equação do seguinte modo

$$(xy^2+x)+(y-x^2y)y'=0 \iff y'=\frac{-x(y^2+1)}{y(1-x^2)} \iff y'=\frac{-x}{1-x^2}\quad\frac{y^2+1}{y}$$

$$f:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{x}{1-x^2}$$

porque queremos que $1/2 \in Df$
(Df tem de ser um intervalo)

$$g:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \frac{y^2+1}{y}$$

porque queremos que $1 \in Dg$
(Dg tem de ser um intervalo

Como a função g não se anula, consideramos a equação

$$\frac{y'}{\frac{y^2+1}{y}} = -\frac{x}{1-x^2} \iff \frac{y'y}{y^2+1} = -\frac{x}{1-x^2}$$

Então

$$\int_{1/2}^{x} \frac{y'(t)\,y(t)}{y^2(t)+1}\,dt = -\int_{1/2}^{x} \frac{t}{1-t^2}\,dt$$

$$\left[\cancel{\tfrac{1}{2}}\ \ln\left(y^2(t)+1\right)\right]_{1/2}^{x} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\left[\ln(1-t^2)\right]_{1/2}^{x}$$

Notem que $1-t^2>0$

$$\ln(y^2(x)+1) - \ln(2) = \ln(1-x^2) - \ln\frac{3}{4}$$

$$\ln(y^2(x)+1) = \ln(1-x^2) + \ln\left(2\cdot\frac{4}{3}\right)$$

pelo que

$$y^2(x)+1 = (1-x^2)\,\frac{8}{3}$$

$$y^2(x) = \frac{5}{3} - \frac{8}{3}x^2$$

Determinação de Dy

$$Dy = \{x \in]-1,1[\,:\, 5-8x^2>0\}$$
$$= \{x \in]-1,1[\,:\, x \in]-\sqrt{\tfrac{5}{8}},\sqrt{\tfrac{5}{8}}[$$

e então $y = \sqrt{\frac{5}{3}-\frac{8}{3}x^2}$ (porque $y(1/2)=1>0$)

$$y:]-\sqrt{\tfrac{5}{8}},\sqrt{\tfrac{5}{8}}[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{5-8x^2}{3}}$$