17/6/2022
recurso

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

FIS
ENGFIS

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine uma base do espaço linear das soluções da equação diferencial homogénea
$$\ddddot{x} - x = 0\,.$$

e^t $\quad e^{-t}$ $\quad \cos t$ $\quad \sin t$

2. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

$$x(t) = (1-t)\, e^t$$

3. *(1 valor)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} - x = e^{-t}\,.$$

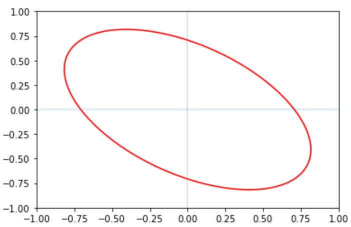
$$x(t) = -\frac{1}{2}\, t\, e^{-t}$$

4. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por
$$T(x,y) = (x - iy, x + iy)\,.$$
Determine o operador adjunto T^* e a composição TT^*.

$T^*(x,y) = (x+y, ix - iy)$ $\qquad TT^*(x,y) = (2x, 2y)$

5. *(1 valor)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana
$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0$$

É uma elipse, pois nas variáveis $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$ a equação é
$$3X^2 + Y^2 = 1$$



6. *(1 valor)* Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} .$$

Os valores próprios são $\pm\sqrt{5}$. Vetores próprios são $\mathbf{v}_\pm = \left(2, -i(1 \pm \sqrt{5})\right)$, respetivamente

7. *(1 valor)* Dê uma definição do grupo $\mathbf{SO}(2)$ e determine a forma de uma sua matriz genérica.

$\mathbf{SO}(2)$ é o grupo das matrizes reais 2×2 tais que $A^\top A = AA^\top = I$ e $\det A = 1$. Uma matriz genérica de $\mathbf{SO}(2)$ é

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

onde θ é um número real.

8. *(1 valor)* Calcule o grupo a um parâmetro e^{tA} gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & -q + p \\ \dot{p} = & -q - p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (3, 2)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\,(3\cos t + 2\sin t) \\ e^{-t}\,(2\cos t - 3\sin t) \end{pmatrix}$$

10. *(1 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{cases} \dot{q} = & -q + p \\ \dot{p} = & -q - p + \sin(t) \end{cases}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

11. *(1 valor)* Os semi-eixos principais do elipsoide $4x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 1$ são

○ $1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{5}$ ○ $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ ○ 3 e 5

12. *(1 valor)* Existe um operador $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ que seja unitário e hemi-hermítico.

○ Verdadeiro ○ Falso

13. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada arbitrária, então $P = A^*A$ é uma matriz hermítica com valores próprios não negativos.

○ Verdadeiro ○ Falso

14. *(1 valor)* Uma matriz complexa $n \times n$ é unitária se

◯ $A^* = -A$ ◯ $A^*A = AA^*$ ◯ $A^*A = I$

15. *(1 valor)* Existe uma matriz ortogonal O tal que

$$O^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◯ Verdadeiro ◯ Falso

16. *(1 valor)* Se existe uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$ formada por vetores próprios do operador $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ então o operador L é

◯ hermítico ◯ normal ◯ unitário

17. *(1 valor)* Se H é uma matriz quadrada hermítica então e^H é unitária.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

18. *(1 valor)* Toda matriz $A \in \mathbf{SO}(2)$ admite um vetor próprio com valor próprio $\lambda = 1$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

19. *(1 valor)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo linear especial $\mathbf{SL}_3(\mathbb{R})$ é

◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 simétricas.

◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 com traço nulo.

◯ o espaço linear das matrizes reais 3×3 anti-simétricas.

20. *(1 valor)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = & x + y \\ \dot{y} = & 2x + y \end{cases}$$

A origem é

◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável.