Funcões vectoriais de várias variáveis
(matéria relativa à folha 4 de exercícios)

Definição: Seja $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ uma função, sendo $n, m \in \mathbb{N}$. Dizemos que f é uma função vectorial de n variáveis.

Note-se que

$$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

tem m funções componentes $f_1, \ldots, f_m$. Estas funções são funções escalares de várias variáveis (do tipo das que temos estado a estudar).

Analogamente ao que foi feito para funções escalares, podemos definir a derivada direccional de uma função f num ponto $x_0 \in \mathcal{U}$, sendo $\mathcal{U}$ o domínio de f.

Definição: Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ uma função, $n, m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathcal{U}$ e $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ um vector de $\mathbb{R}^n$. Chamamos derivada direccional de f em x_0, segundo a direcção $\vec{v}$ ao

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0)}{h} = f'(x_0; \vec{v}),$$

se este limite existir e for finito.

Observação: Deveria ter falado um pouco sobre limites de funções vectoriais, antes de definir derivada direccional. Aqui fica a informação:

De ora em diante, se nada for dito em contrário, f designará uma função de n variáveis, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}$, em que $\mathcal{U} = D_f$ é um conjunto aberto, e f tem m funções componentes, $f_1, \ldots, f_m$, $m \in \mathbb{N}$.

É fácil mostrar que, dado $x_0 \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe e é finito} \iff \begin{cases} \lim_{x \to x_0} f_i(x) \text{ existe e é finito}, \\ \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Para além disso,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f_1(x), \dots, f_m(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \to x_0} f_m(x)\right)$$

Assim, é claro que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{v}) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f_1(x_0 + h\vec{v}) - f_1(x_0)}{h}, \dots, \frac{f_m(x_0 + h\vec{v}) - f_m(x_0)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x_0 + h\vec{v}) - f_1(x_0)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{f_m(x_0 + h\vec{v}) - f_m(x_0)}{h} \right)$$

$$= \left(f_1'(x_0; \vec{v}), \dots, f_m'(x_0; \vec{v}) \right)$$

Exemplos

① $f(x, y, z) = (e^x yz, \cos(x - y + z))$

Notem que $Df = \mathbb{R}^3$ e f tem duas funções componentes, $f_1(x, y, z) = e^x yz$ e $f_2(x, y, z) = \cos(x - y + z)$.

Vou calcular $f'((1, \pi, 1); (1, 2, 3))$ pela definição (neste momento só podemos usar a definição).

Queremos calcular o

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((1, \pi, 1) + h(1, 2, 3)) - f(1, \pi, 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h, \pi + 2h, 1 + 3h) - f(1, \pi, 1)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{e^{1+h}(\pi+2h)(1+3h) - e}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+h-\pi-2h+1+3h) - \cos(2-\pi)}{h} \right)$$

Vou calcular os dois limites separadamente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h}(\pi+2h)(1+3h)-e}{h} = \frac{0}{0}$$ (podemos usar a Regra de l'Hôpital)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h}(\pi+2h)(1+3h) + e^{1+h}\cdot 2\cdot(1+3h) + e^{1+h}(\pi+2h)\cdot 3}{1}$$

$$= e\cdot\pi + e\cdot 2 + e\cdot\pi\cdot 3 = (4\pi+2)e$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2-\pi+2h) - \cos(2-\pi)}{h} = \frac{0}{0}$$ e, aplicando a R. l'Hôpital,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(2-\pi+2h)}{1} = -2\,\mathrm{sen}(2-\pi)$$

~~Gotão~~

$$f'((1,\pi,1);(1,2,3)) = \left((4\pi+2)e, -2\,\mathrm{sen}(2-\pi)\right)$$

<u>Observação</u>: Seja $\vec{e}_i$ o i-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$, isto é, $\vec{e}_i = (e_{i1}, \dots, e_{in})$, sendo $e_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $e_{ii} = 1$.

Calculemos

$$f'(x_0; \vec{e}_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{e}_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right),$$

ou seja, a derivada parcial de f em ordem a x_i é o vector das derivadas parciais em ordem a x_i das m funções componentes da função f.

Se quisermos recolher toda a informação sobre as derivadas parciais de f, temos de a colocar numa matriz.

<u>Definição</u>: Dada uma função $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, chamamos <u>matriz jacobiana de f em x_0</u> à matriz de m linhas e n colunas

$$J_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

m funções componentes
n variáveis

<u>Exemplo</u>: Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função, $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathcal{U}$. Então

$$J_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

é uma matriz com uma linha, que se identifica com o vector gradiente de f em x_0,

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

<u>Exemplos</u>

<u>Folha 4</u>

1 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f_1(x,y) = x$

$(x,y) \mapsto (x,y)$ $\qquad f_2(x,y) = y$

$$J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) <u>CASA</u>

c) $f(x,y) = (xye^{xy}, x \operatorname{sen} y, 5xy^2)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f_1(x,y) = xye^{xy}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = ye^{xy} + xy^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = xe^{xy} + x^2ye^{xy}$$

$f_2(x,y) = x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x\cos y$

$f_3(x,y) = 5xy^2 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 5y^2 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 10xy$

$$J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2y\,e^{xy} \\ \operatorname{sen} y & x\cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{pmatrix}$$

d) CASA e) CASA

Definição: Uma função $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diz-se de classe C^1 se f e as suas derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas.

Teorema: Se $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é uma função de classe C^1 então existe $f'(x_0; \vec{v})$, para todo o $x_0 \in \mathcal{U}$ e todo o $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Para além disso,

$$f'(x_0; \vec{v}) = J_{x_0} f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } \vec{v} = (v_1, \dots, v_n).$$

Voltemos ao exemplo da página 2

$f(x,y,z) = (e^x yz, \cos(x-y+z))$

Queremos calcular $f'((1,\pi,1);(1,2,3))$

Aqui temos $x_0 = (1,\pi,1)$ e $\vec{v} = (1,2,3)$

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} e^x yz & e^x z & e^x y \\ -\operatorname{sen}(x-y+z) & \operatorname{sen}(x-y+z) & -\operatorname{sen}(x-y+z) \end{pmatrix}$$

$$f'((1,\pi,1);(1,2,3)) = J_{(1,\pi,1)} f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi e & e & \pi e \\ -\operatorname{sen}(2-\pi) & \operatorname{sen}(2-\pi) & -\operatorname{sen}(2-\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\pi e + 2e + 3\pi e, -\operatorname{sen}(2-\pi) + 2\operatorname{sen}(2-\pi) - 3\operatorname{sen}(2-\pi))$$

$$= ((4\pi+2)e \quad -2\operatorname{sen}(2-\pi))$$

Notem que $\left((4\pi+2)e \quad -2\,\mathrm{sen}(2-\pi)\right)$ é uma matriz com 1 linha e 2 colunas, que pode ser identificada com o vector $\left((4\pi+2)e, -2\,\mathrm{sen}(2-\pi)\right)$.
Podemos, então, dizer que

$$f'((1,\pi,1);(1,2,3)) = \left((4\pi+2)e, -2\,\mathrm{sen}(2-\pi)\right)$$

Pudémos usar esta forma de calcular a derivada direccional porque

$$f_1(x,y,z) = e^{x}yz \quad \text{e} \quad f_2(x,y,z) = \cos(x-y+z)$$

são funções de classe C^1, por serem produtos ou compostas de funções com derivadas parciais de ordem qualquer, sendo, por isso, as funções e as suas derivadas parciais de 1ª ordem contínuas.

<u>Folha 4</u>
<u>Exercício</u> 1' CASA
a) Calcule $f'((1,2);(-5,7))$
b) Calcule $f'((0,0);(1,-1))$
c) Calcule $f'((x_0,y_0);(v_1,v_2))$

Vou agora voltar à Folha 3 e olhar para os exercícios que não resolvemos.

<u>Folha 3</u> - 6 a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+xy)$

Recordem que f_x é outra notação para $\frac{\partial f}{\partial x}$. Então

$$f_x = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy} = \frac{2x+y}{x^2+y^2+xy}$$

$$f_y = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy} = \frac{2y+x}{x^2+y^2+xy}$$

Então

$$x f_x + y f_y = x\,\frac{2x+y}{x^2+y^2+xy} + y\,\frac{2y+x}{x^2+y^2+xy}$$

$$= \frac{2x^2+xy+2y^2+xy}{x^2+y^2+xy} = 2\,\frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2+xy} = 2$$

6 -b) CASA

7 $g(x,t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen} x$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -e^{-t} \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-t} \cos x$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -e^{-t} \operatorname{sen} x$$

Então $\dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

8 a) CASA

b) CASA

c) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2} = \ln (x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

d) CASA

Nota: Vocês têm de treinar a calcular derivadas parciais. Daqui para a frente, as derivadas parciais vão aparecer em quase tudo.

Bom trabalho!