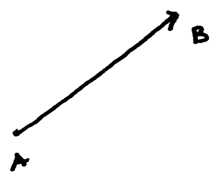
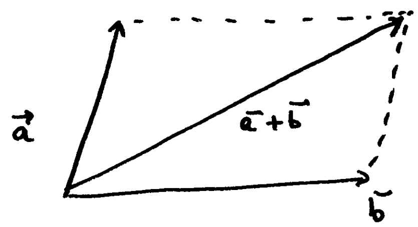
1. Vectores

1. Vectores e deslocamentos

1. Um deslocamento é uma entidade que possui uma magnitude, uma direcção e um sentido. Realizar dois deslocamentos seguidos é equivalente a realizar um único deslocamento soma:





Esta operação tem um significado geométrico óbvio (regra do paralelogramo) e é (evidentemente) comutativa. [certifique-se disso].

Usando a regra do paralelogramo pode verificar que

$$\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c$$

pelo que a propriedade soma de deslocamentos é associativa.

Se invertermos o sentido de um deslocamento andamos um sentido inverso. Se somarmos o inverso a um deslocamento ficamos no mesmo. (elemento neutro face à adição). Então o conjunto dos deslocamentos possui um elemento neutro e elementos inversos, $\vec c^{-1}$
($\vec c^{-1} + \vec c$ = ficar no mesmo)

Podemos alterar a <u>magnitude</u> de um deslocamento multiplicando-o por um escalar: obtemos o deslocamento

$a\vec{A}$ (produto por um escalar)

Evidentemente que

$$a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B} \quad \text{(distributividade)}$$

$$(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A} \quad \text{distributividade face à soma de escalares.}$$

$$(ab)\vec{A} = a(b\vec{A}) \quad \text{associatividade face ao produto de escalares.}$$

$$1\vec{A} = \vec{A} \rightarrow \text{Elemento neutro face ao produto por escalares.}$$

Este conjunto de propriedades (axiomas) verificadas pelos deslocamentos definem a identidade de um espaço vectorial. Um deslocamento é um vector.

Mas um vector não é um "deslocamento": é uma qualquer entidade que verifica este conjunto de axiomas.

2. Vectores de base e dimensão do espaço vectorial

Um vector é linearmente dependente de outro se puder ser obtido deste através da multiplicação de um escalar.

A dimensão de um espaço vectorial é igual ao número de vectores linearmente independentes entre si que é possível construir nesse espaço. Esse conjunto de vectores constitui uma base completa desse espaço significando isso que qualquer elemento pode ser obtido como uma combinação linear de elementos da base. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3$$

$a_i \equiv$ componentes do vector $\vec{a}$ na base $\{\hat{e}_i\}$.

Decorre dos axiomas anteriores que a soma de vectores pode ser obtida somando ordenadamente as componentes

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\,\hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\hat{e}_3$$

(numa qualquer base)

Definimos uma base cartesiana (em $\mathbb{R}^3$, por simplicidade) como

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$ e

vectores unitários mutuamente perpendiculares.

A norma de um vector numa base cartesiana é obtida como:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \text{(Pitágoras)}$$

3. Operações de multiplicação de vectores.

(Por simplicidade, consideremos $\mathbb{R}^3$ e uma base cartesiana.)

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$$

3.1. Produto tensorial

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

(não é obviamente um vector)

Este "objecto" é um tensor de 2ª ordem (dois índices) que pode ser representado, numa certa base, por uma matriz. Um vector tem apenas um índice e pode ser designado por tensor de 1ª ordem. Um escalar não tem nenhum índice e é ∴ um tensor de ordem zero.

Com este produto podemos construir "tensores" de ordem n

3.2 - Produto vectorial

Podemos definir uma operação de multiplicação de vectores que dá origem a algo parecido com um vector? Bem:

$\vec{a} \otimes \vec{b}$ pode ser representado, numa certa base, como uma matriz e pode $\therefore$ ser decomposto numa componente simétrica e numa componente anti-simétrica:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & \frac{1}{2}(a_x b_y + a_y b_x) & \frac{1}{2}(a_x b_z + a_z b_x) \\ \cdot & a_y b_y & \frac{1}{2}(a_y b_z + b_y a_z) \\ \cdot & \cdot & a_z b_z \end{bmatrix}_S +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x) & \frac{1}{2}(a_x b_z - a_z b_x) \\ & 0 & \frac{1}{2}(a_y b_z - b_y a_z \\ & & 0 \end{bmatrix}_{AS}$$

(verifique que obtém a matriz da página anterior

Repare que a parte anti-simétrica tem apenas 3 componentes independentes (como os vectores originais)

Podemos definir essas componentes como:

$$c_z = \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$+c_y = \frac{1}{2}(a_z b_x - a_x b_z) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & c_z & -c_y \\ & 0 & +c_x \\ & & 0 \end{bmatrix}_{AS}$$

$$c_x = \frac{1}{2}(a_y b_z - a_z b_y)$$

Ou, de forma compacta:

$$c_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \qquad \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{(Levi-Civita.)}} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ circula} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ anticirc} \\ 0 & \text{Noutros casos.} \end{cases}$$

Estas três componentes definem uma entidade que é designada por produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Repare que, decorre destas definições que:

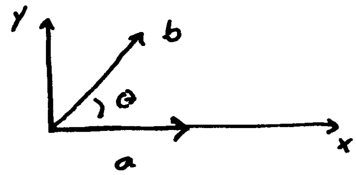
$$\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

O que representa esta entidade?

Imaginemos dois vectores (sem perda de generalidade):

$$\vec{a} = a\,\vec{i}$$

$$\vec{b} = b(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 0 & 0 \\ b\cos\theta & b\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = ab\sin\theta\,\vec{k}$$

- $\vec{c}$ ≡ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e a sua magnitude $|\vec{c}| = ab\sin\theta$

(Evidentemente, $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (anti-comuta))

- $ab\sin\theta$ é a área do paralelogramo definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$

- O sentido de $\vec{c}$ é dado pela regra da mão direita. (Rodando $\vec{a}$ para $\vec{b}$).

Note que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem "deslocamentos" $\vec{c}$ não é um "deslocamento". Com efeito se invertermos a base ($\vec{i}\to-\vec{i}$, $\vec{j}\to-\vec{j}$ etc.), as componentes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ invertem o sinal (como bons deslocamentos ou vectores) mas as componentes de $\vec{c}$ mantêm o sinal.

<u>$\vec{c}$ é um pseudo-vector.</u>

3.3 - Produto escalar de vectores

Partindo de $\vec{a} \otimes \vec{b}$ podemos definir uma contracção de índices que consiste em ~~fazer~~ impor multiplicar as componentes análogas dos vectores e somar sobre todas as componentes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_j \, \delta_{ij} \qquad \text{(atenção: índices repetidos} \Rightarrow \text{soma)}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

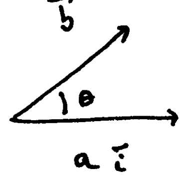
Obtemos um número (um escalar)

Esta operação é obviamente comutativa e distributiva sobre a adição.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

O que significa $\vec{a} \cdot \vec{b}$?



$$\vec{a} = a\,\vec{i}$$

$$\vec{b} = b\,(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

Por exemplo, imaginemos que queremos encontrar o ângulo entre dois vectores:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \right)$$

Ou calcular a norma de um vector

$$\cos(0^\circ) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{|a|^2} = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}$$

3.4 . Triplo produto escalar

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + $$
$$+ a_z(b_x c_y - b_y c_x) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Pode verificar que:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

3.5 - Triplo produto vectorial:

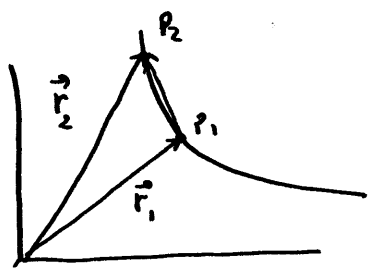
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(mostre isto)

TPC: Prove também que: • $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

• $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

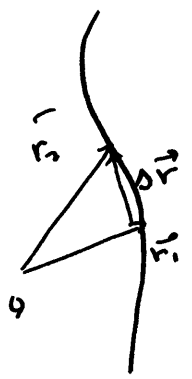
4 - Derivadas de um vector



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$t \to$ parametro geométrico para determinar a trajectória da partícula : $\vec{r}(t)$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \qquad ; \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$



$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$$

Como $\vec{r}$ é um vector, $\dot{\vec{r}}$ é um vector, (embora impar sob inversão temporal).

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$, visto que $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\hat{k}$ são independentes do tempo.

Em geral, contudo, os vectores de base podem variar de ponto para ponto e $\therefore$ se a partícula se mover, variar com o tempo.

Consideremos este caso:

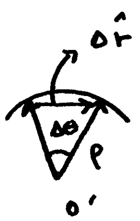
Consideremos, sem perda de generalidade:

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \quad ; \quad \frac{d\hat{r}}{dt} = ?$$

Localmente a trajectória pode ser aproximada por um arco (infinitesimal) de circunferência. (centrado em O')

Então:



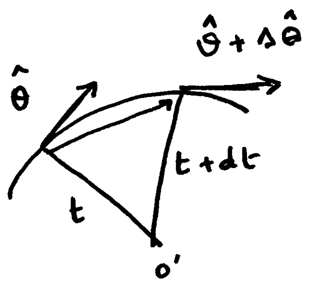
$$\Delta\hat{r} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{r}|\,\Delta\theta}{|\vec{r}|}\,\hat{\theta}$$

$$\frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\hat{\theta}$$

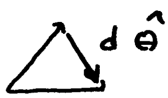
i.e.:

$$\boxed{\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}}$$

Procedendo de forma análoga se tem que $\dfrac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\hat{r}$



$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\hat{\theta}+\Delta\hat{\theta}) - \hat{\theta}}{\Delta t}$$



$$\rightarrow \boxed{\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\hat{r}}$$

Consequentemente, no plano: (coordenadas polares)

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}}$$

Podemos prosseguir e definir

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}\right] =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{r} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\theta} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{r} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta}$$

$$= \left[\quad \cdots \quad\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}}$$

Exemplo: movimento circular:

$$\vec{r}(t) = r\,\hat{r}(t)$$

com a restrição de $r = \text{const.}$

As expressões anteriores conduzem a:

$$\vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = r\omega \hat{\theta}$$

$$(|\vec{v}| = r\omega)$$

$$\vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \hat{r} + r\alpha \hat{\theta} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

aceleração angular.

Em particular, no movimento circular uniforme ($\alpha = 0$):

$$\vec{a} = -r\omega^2 \hat{r}$$

há uma aceleração Radial. central

Claro que podemos escolher outro sistema de coordenadas

Por exemplo, coordenadas cartesianas: (ω = const.)

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\, \hat{x} + r\sin(\omega t)\, \hat{y}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega \sin(\omega t)\, \hat{x} + \omega r \cos(\omega t)\, \hat{y} = \vec{v}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{r^2\omega^2 \left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]} = r\omega \qquad \text{(como acima)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega^2 \cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 r \sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$= -r\omega^2 \hat{r} \quad \text{(como acima)}$$

5. Uma descrição independente da escolha das coordenadas.

A descrição de um sistema físico deve ser independente da escolha arbitrária de coordenadas

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_i \hat{e}_i$$

Seja agora $\{\hat{e}'_i\}$ outra base que se obtém da primeira por uma transformação linear:

$$e'_j = S_{ij}\, e_i \qquad \text{(índices mudos)}$$

$$\vec{r} = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3$$

As componentes nas duas bases podem-se obter uma da outra:

$$x'_i = S^{-1}_{ij}\, x_j$$

Podemos restringir-nos a transformações de coordenadas que preservem o comprimento de vectores (e ângulos) (a norma, ou o produto interno)

Escrevamos, neste caso $S^{-1}_{ij} \equiv L_{ij}$ de tal forma que

$$x'_i = L_{ij}\, x_j \qquad (*)$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$\downarrow$$

$$\vec{u}\, L^T L\, \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow \quad L^T L = E \Rightarrow (\det L)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det L = \pm 1$$

[Se as componentes forem complexo temos $L^{\dagger} L = E$]

Isto é:

$$L_{ik}\, L_{jk} = \delta_{ij}$$

$$L_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$$

Consideremos $\mathbb{R}^3$: as componentes de um vector (três quantidades x_i) numa certa base transformam-se sob $\hat{L}$ como $(*)$. Esta regra de transformação pode aliás ser tomada como uma definição equivalente de "vector".

Com esta nova definição devemos distinguir dois tipos de entidades: vectores e pseudo-vectores. Vejamos

Seja $\bar{\bar{A}}$ uma matriz 3x3 (para ser concreto) Real.

$$|\bar{\bar{A}}| \; : \qquad |\bar{\bar{A}}|\, \varepsilon_{lmn} = A_{li}\, A_{mj}\, A_{nk}\, \varepsilon_{ijk}$$

(ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita a que já aludimos)

~~Exemplos:~~ Então:

$$|A| = A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}\, \varepsilon_{ijk}$$

(Verifique isto com $\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; veja como obtem o usual expansão de Laplace)

Seja agora $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{L}}$ a matriz que representa uma transformação ortogonal de coordenadas:

$$|\bar{\bar{L}}|\, \varepsilon'_{lmn} = L_{li}\, L_{mj}\, L_{nk}\, \varepsilon_{ijk}$$

$|\bar{\bar{L}}| = \pm 1 \;\rightarrow\; \varepsilon'_{lmn} = |L|\, L_{li}\, L_{mj}\, L_{nk}\, \varepsilon_{ijk}$

Usemos esta transformação para o caso do produto vectorial de dois vectores:

$$\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow a'_i = \varepsilon'_{ijk}\, b'_j\, c'_k = \cancel{L_{il} L_{jm} L_{kn} \varepsilon_{lmn}}$$

$$= \left(|L|\, L_{il}\, L_{jm}\, L_{kn}\, \varepsilon_{lmn}\right)\underbrace{\left(L_{jp}\, b_b\right)\left(L_{kp}\, c_p\right)}_{\text{vectores}}$$

$$a'_i = |L|\, L_{il}\, \varepsilon_{lmn}\, \delta_{mp}\, \delta_{nq}\, b_p\, c_q$$

$$= |L|\, L_{il}\, \varepsilon_{lmn}\, b_m\, c_n$$

$$a'_i = |L|\, L_{il}\, a_l \qquad (**)$$

(esta relação de transformação é equivalente a (*) sse $\det L = 1$ mas <u>não é</u> se $\det L = -1$. O produto vectorial de dois vectores não é ∴ um vector mas um "pseudo-vector", ou uma "densidade vectorial"

□