As Leis de Newton: (1687) [Principia Mathematica]

i) $\vec{p} = m\vec{v}$ permanece constante se a partícula não for actuada por qualquer força

(Galileu)

ii) A taxa de variação temporal de $\vec{p}$ é proporcional à força que actua no corpo:

$$\vec{F} = K \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(Se m = const., $\rightarrow \vec{F} = K m \vec{a}$

Obs.: podemos escolher um sistema de unidades de força de tal forma que $K=1$. Logo, podemos considerar, sem perda de generalidade que $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Obs.: Acha que i) é uma lei independente de ii)?

iii) Quando dois corpos interagem

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

(esta última lei não é universal: electrodinâmica por exemplo)

[Podíamos acabar o curso aqui: é só aplicar isto para resolver problemas; Bom trabalho e boa sorte]

<u>Definição:</u> Um referencial inercial é aquele no qual a 1ª lei é verificada. Isto é: aquele que verifica a condição de uma partícula livre se mover com velocidade constante

<u>Observação:</u> A definição de força e de referencial inercial parece algo ambíguo; não?

<u>Observação:</u> Uma das consequências da 3ª lei é a conservação do momento linear num sistema isolado de forças externas; duas partículas:

$$\frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv 0 \Rightarrow 3^{a} \text{ lei.}$$

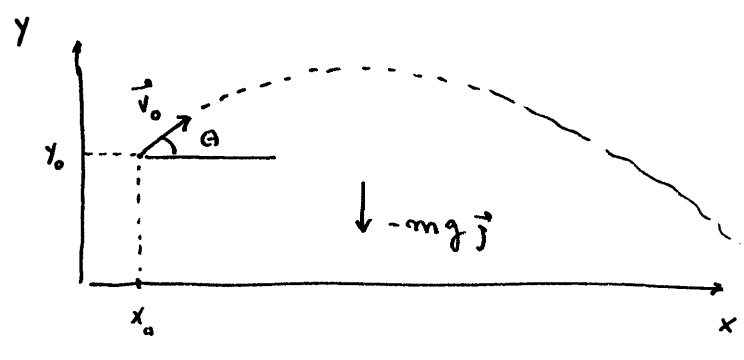
<u>Observação:</u> $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow [\vec{F}] = MLT^{-2}$

2. Alguns exemplos simples:

2.1. $\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$; $m\vec{v} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{const.} = \vec{v}_0$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

2.2. Projéctil num campo gravítico uniforme (trajectória)



$$m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\right] = -mg\,\vec{j}$$

2 eq. escalares :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 & \Longleftrightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg & \Longrightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(t) = V_0\cos\theta \\ V_y(t) = -gt + V_0\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = V_0\cos\theta\cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\theta\, t + y_0 \end{cases}$$

Que trajectória?

Podemos eliminar o parametro t :

$$\frac{x-x_0}{V_0\cos\theta} = \frac{x-x_0}{V_{0x}} = t$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_0}{V_{0x}}\right)^2 + V_{0y}\left(\frac{x-x_0}{V_{0x}}\right) + y_0$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}\left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0\right) + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x - \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x_0 + y_0$$

$$y(x) - y_0 = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}\left[x^2 + x_0^2 - 2xx_0 - \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g}(x-x_0)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}\left[(x-x_0)^2 - \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g}(x-x_0)\right]$$

$$y(x) - y_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}\frac{V_{0x}^2V_{0y}^2}{g^2} = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}\left[(x-x_0)^2 - \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g}(x-x_0) + \frac{V_{0x}^2V_{0y}^2}{g^2}\right]$$

$$Y(x) - \left(Y_0 + \frac{V_{oy}^2}{2g}\right) = -\frac{g}{2V_{ox}^2}\left[x - x_0 - \frac{V_{ox}V_{oy}}{g}\right]^2$$

equação de uma parábola com um máximo em (x_1, y_1)

$$x_1 = x_0 + \frac{V_{ox}V_{oy}}{g}$$

$$Y_1 = Y_0 + \frac{V_{oy}^2}{2g}$$

- A altura máxima $h = Y_1 - Y_0 \equiv \dfrac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

- O alcance é : $2(x_1 - x_0)$ (o projéctil retorna a altura de lançamento ao fim de ~~(...)~~ percorrer $2(x_1-x_0)$)
  R

$$R = 2(x_1 - x_0) = \frac{2V_{ox}V_{oy}}{g} = \frac{2V_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta$$

<u>Observação</u> : qual o ângulo de lançamento que maximiza R? (*)

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g}\cos 2\theta \cdot 2 \equiv 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$

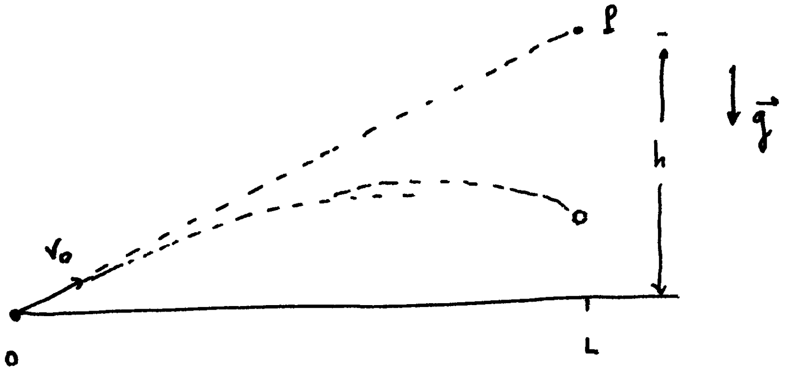
$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

<u>Observação</u>: qual o ângulo de lançamento que maximiza Y_1 ? *

$$\frac{\partial Y_1}{\partial\theta} = \frac{V_0^2\, 2\sin\theta\cos\theta}{g} = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow Y_1 - Y_0 = 0 \\ \theta = \pi/2 \rightarrow Y_1 - Y_0 = \dfrac{V_0^2}{2g} \end{cases}$$

(*) a $V_0 = \text{const}$.

2.3 - Problema 2 do Cap. 3 do Berkeley



Um projectil é disparado (P pertence à recta gerada por $\vec{v}_0$) num instante $t=0$. Nesse mesmo instante P é largado e cai sob acção da gravidade. Prove que a colisão ocorrerá independentemente de $|\vec{v}_0|$.

$Y_{bala}(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$ $\qquad x_0 = L$

$X_{bala}(t) = v_0 \cos\theta\, t$ $\qquad Y_0 = h - \frac{1}{2} g t^2$

Colisão $\Rightarrow$ $\exists\, t = t^*$:

$$\begin{cases} v_0 \cos\theta\, t^* = L \\ v_0 \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} \cancel{g} t^{*2} = h - \frac{1}{2} \cancel{g} t^{*2} \end{cases} \qquad \begin{cases} t^* = \dfrac{L}{v_0 \cos\theta} \\ \dfrac{\cancel{v_0} \operatorname{tg}\theta}{\cancel{v_0}} = \dfrac{h}{L} \end{cases}$$

θ é independente de $|\vec{v}_0|$

$\square$

2.4. Lei de Newton da gravitação

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2} \hat{r}$$

Caso da Terra (superfície) (objecto massa m)

$$|\vec{F}| = m' g = G \frac{M_T m}{R_T^2} \Rightarrow g = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{m}{m'}$$

m' = massa inercial do objecto

m = carga gravitacional do objecto

Experimentalmente $m = m'$; Nesse caso $g = G \frac{M_T}{r^2}$ não é constante (ao contrário do que admitimos antes)

<u>Observações:</u> Experimentalmente observa-se que os corpos caem com a mesma aceleração sob acção da gravidade.

$$m_i(1)\, a(1) = G \frac{M_T\, m_g(1)}{R_T^2}$$

$$m_i(2)\, a(2) = G \frac{M_T\, m_g(2)}{R_T^2}$$

$$\frac{m_i(1)}{m_g(1)} = \frac{m_i(2)}{m_g(2)} \frac{a(2)}{a(1)}$$

Como $a(2) = a(1) \Rightarrow m_i$ e m_g diferem quando muito de uma constante. Essa constante pode ser incorporada em G mediante uma adequada escolha de coordenadas, e $m_i \equiv m_g$.

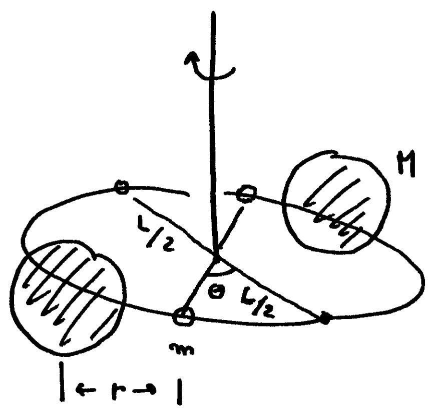
Observações: a experiência de Henri Cavendish (1797-1798) e o valor de G

Medir g é relativamente fácil (Galileu)

Medir R_T é também possível (como? ; imagine um método)

Mas M_T e G estão ligados nas expressões anteriores.

Cavendish usou uma balança de torção para estimar G:



$$K\theta = LF$$

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$K\theta = L\,\frac{GmM}{r^2}$$

(mais sobre isto noutra altura)

Sabendo g e G podemos determinar a massa da Terra:

$$M_T = g\,\frac{R_T^2}{G}$$

Com os valores obtidos:

$$G \sim 6{,}674 \times 10^{-11}\ N\,m^2\,Kg^{-2} \quad (1798)\ !!$$

Qual a densidade média da Terra? $R_T \equiv 6\,371$ Km

$M_T = 9{,}807 \quad m \cdot s^{-2}$

$R_T = 6371 \times 10^3 \; m$

$$M_T = 9{,}807 \cdot \frac{(6{,}371 \times 10^6)^2 \; (m \cdot s^{-2} \cdot m^2)}{6{,}674 \times 10^{-11} \; (N\, m^2\, Kg^{-2})}$$

$$= \frac{9{,}807 \cdot (6{,}371 \times 10^6)^2}{6{,}674 \times 10^{-11}} \quad \frac{m\, s^{-2}\, m^2}{Kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}} = [Kg]$$

$$\boxed{M_T = 5{,}972 \times 10^{24} \; Kg}$$

$\langle \rho_T \rangle = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$ etc.

2.5 - Um satélite numa órbita estacionária sobre o equador: a que altura deve estar e com que velocidade se move?

Seja m a massa do satélite. Como vimos, em coordenadas polares:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta}$$

Se $r = \text{const.} \Rightarrow \vec{v} = r\omega\,\hat{\theta}$

Se $\omega = \text{const.}$ $\quad \vec{a} = -r\omega^2\,\hat{r}$

(geoestacionário)

Logo:

$$\frac{G M_T \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\, \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{G M_T}{r^3}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ ; \quad T = 24\,h \quad \Rightarrow \quad r = 4{,}2 \times 10^7 \ m.$$

<u>Observação</u>: A que distância e com que velocidade se move a Lua?

O mesmo argumento pode ser aplicado à Lua que tem uma órbita práticamente circular em torno da Terra (mas com uma inclinação relativamente ao plano da órbita da Terra de 5°) com um período 27,322 dias (mas o mês lunar tem 29,5 dias; porquê?)

$$\left(\frac{2\pi}{T_{LUA}}\right)^{-2} \cdot G M_T = r^3_{LUA} \quad \Rightarrow \quad r = 385\ 000 \ Km$$

$$v = r\omega = 1{,}03 \ Km.s^{-1}$$

2.6 - Campo eléctrico e magnético: forças sobre partículas com carga eléctrica

cargas estáticas:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r} = K\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}$$

$$K \cong \frac{N\,m^2}{C^2}$$

carga do electrão: $e = -1{,}60210 \times 10^{-19}\,C$

(Dois electrões a uma distância de 10^{-12} cm repelem-se com uma força de 2,3 N ; confirme este resultado).

Campo eléctrico: Força por unidade de carga:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{carga de prova}}}{q}\,\vec{E}(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r})$ é um campo vectorial.

O campo eléctrico gerado por uma carga pontual em repouso na origem do sistema de coordenadas é:

$$\vec{E} = K\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r} \qquad [\vec{E}] = \frac{N}{C} \quad \left(\frac{\text{Volt}}{\text{metro}}\right)$$

Pode definir Volt desta definição?

campo magnético: $\vec{F}_{mag} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$

dimensões:

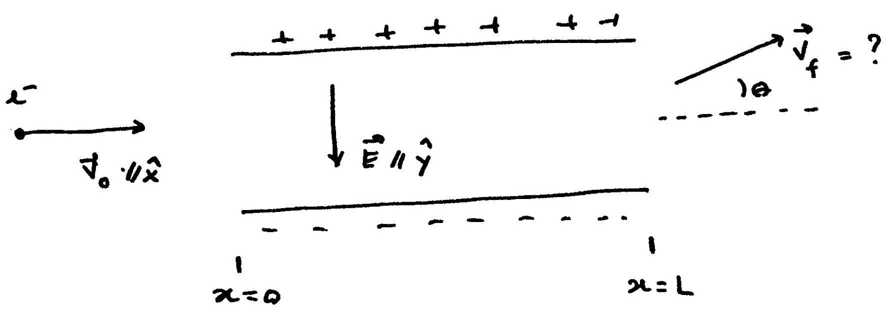
$$\text{Newton} \equiv \text{coulomb} \cdot \text{metro} \cdot s^{-1} \cdot [\vec{B}]$$

$$[\vec{B}] = \frac{N\ s}{C\ m} \equiv \text{Tesla}$$

Então:

$$\vec{F} = q\,[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$$

<u>Exemplo:</u> deflexão de um electrão num campo eléctrico transversal (uniforme e constante no tempo)



$\theta = ?$

$v_f = ?$

$$\vec{F} = -e\,\vec{E} = e\,E\,\vec{j}$$

$$x(t) = v_0\,t \Rightarrow L = v_0\,t^* \Rightarrow t^* = \frac{L}{v_0}$$

$$v_y(t) = \frac{e}{m} E\,t \Rightarrow v_{yf} = v_y(t^*) = \frac{e}{m} E \frac{L}{v_0}$$

$$v_{xf} = v_0$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e}{m} E \frac{L}{v_0^2} \quad ; \quad v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{e^2}{m^2} E^2 \frac{L^2}{v_0^2}}$$

Exemplo: partícula carregada num campo magnético uniforme.

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{B} = B\,\hat{k}$ $\quad (B \,/\!/\, zz')$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$m \frac{dv_x}{dt} = q\,(\vec{v} \wedge \vec{B})_x = q\,v_y B$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})_y = -v_x B q$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

- Podemos imediatamente ver que a norma da velocidade não se altera (é constante no tempo)

$$|\vec{v}| = \left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right)^{1/2} \Rightarrow v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = 2\,\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 2\,\frac{qB}{m}\left[v_x v_y - v_x v_y\right] = 0$$

Se se lembrar de $\sin(\omega t)$; $\cos \omega t$ tem uma boa pista:

$$\begin{cases} v_x = v \sin \omega t \\ v_y = v \cos \omega t \\ v_z = \text{const.} \end{cases}$$

Solução se $\omega = \frac{qB}{m} \equiv \omega_c$

(frequência ciclotrónica)

$\left[\, m\, a_n = m \omega_c^2 r = m \omega_c v_\perp = q B v_\perp \,\right] \leftarrow$ que significa isto?

Equações paramétricas da trajectória?

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v \sin(\omega_c t')\, dt' = -\frac{v}{\omega_c} \cos(\omega_c t')\Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{v}{\omega_c} - \frac{v}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + x_0$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_0 \cos(\omega t')\, dt' = \frac{v}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_z t$$

Isto é:

$$y(t) - y_0 = \frac{v}{\omega_0}\sin(\omega_c t)$$

$$x(t) - \left(x_0 + \frac{v}{\omega_c}\right) = \frac{v}{\omega_0}\cos(\omega_c t)$$

No plano x, y ($\perp$ a $\vec{B}$), a partícula descreve um movimento circular uniforme de raio $\frac{v}{\omega_c} = r_c$ (raio ciclotrónico); Repare que

$$B r_c \equiv \frac{v m}{q B} B \Rightarrow B r_c = \frac{m v}{q}$$

Podemos medir a velocidade das partículas medindo r_c num B conhecido, se soubermos m e q.