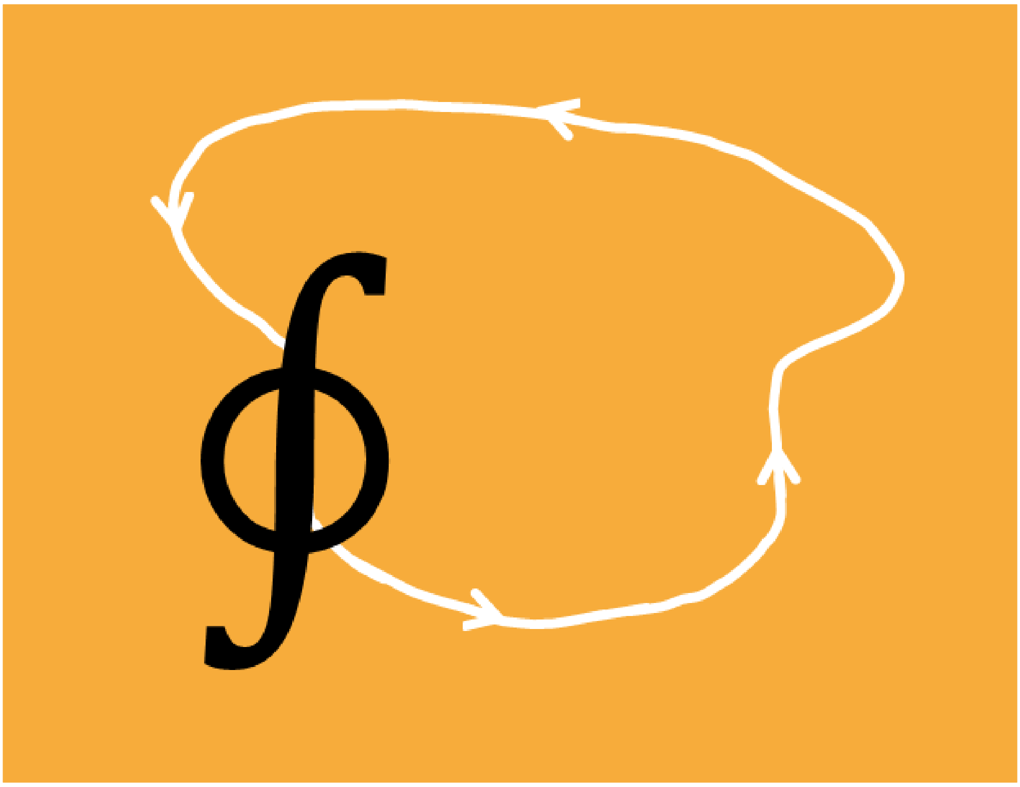
- RESUMÃO -

INTEGRAIS DE LINHA

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



Responde Aí

www.respondeai.com.br

Integrais de Linha – Caso Escalar

O conceito de integral de linha é bem parecido com o da integral unidimensional, que já estamos cansados de ver. Escrever $\int_a^b f(x)dx$ significa que estamos "somando" os valores de $f(x)$ ao longo de um comprimento do eixo x (no caso, de a a b), certo?

Quando esse comprimento unidimensional vira uma curva C no espaço, nós temos uma integral de linha. Como estamos falando agora de três dimensões, a função escalar a ser integrada é do tipo $f(x, y, z)$.

Calculamos as integrais de linha com a seguinte fórmula:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$$

Onde: $\vec{\sigma}\,(t)$ é a parametrização da curva C, $a \leq t \leq b$ é o intervalo do parâmetro t e $f(x(t), y(t), z(t))$ é o campo escalar $f(x, y, z)$ escrito em função da parametrização.

OBS: Se você não se lembra muito bem de como parametrizar curvas, dá uma olhada na revisão que fizemos no final do resumo! =)

Comprimento de arco

O camprimento de uma curva C é:

$$L = \int_C ds = \int_a^b ||\vec{\sigma}'(t)||\, dt$$

Massa de um fio

Sendo δ sua densidade, a massa do fio C é:

$$M = \int_C \delta(x, y, z)ds = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t))||\vec{\sigma}'(t)||\, dt$$

Passo a passo

Integrais de linha – caso escalar

1. Parametrizar a curva $\vec{\sigma}(t)$ (encontrando o intervalo $a \leq t \leq b$);
2. Calcular $\vec{\sigma}'(t)$;
3. Tirar o módulo desse vetor $\|\vec{\sigma}'(t)\|$;
4. Aplicar a fórmula que demos lá em cima, trazendo os valores encontrados dos passos anteriores e lembrando de escrever o campo escalar $f(x, y, z)$ nas variáveis da parametrização;
5. Fazer o produto escalar $f(x(t), y(t), z(t)). \|\vec{\sigma}'(t)\|$;
6. Resolver a integral!

Integrais de Linha – Caso Vetorial

Nós podemos também calcular a integral de linha de um campo vetorial $F(x, y, z)$ em uma curva C. Neste caso, a fórmula fica um pouquinho diferente:

$$\int_C F.dr = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)dt$$

Onde: $\vec{\sigma}\ (t)$ é a parametrização da curva C, $a \leq t \leq b$ é o intervalo do parâmetro t e $F(x(t), y(t), z(t))$ é o campo vetorial $F(x, y, z)$ escrito em função da parametrização.

Hora do Bizú

Podemos escrever função vetorial F de duas formas na integral:

$$\int_C F.dr = \int_C (F_1, F_2, F_3).dr = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz$$

Fica atento para não confundir as componentes da função vetorial F!

Trabalho

O trabalho de um campo F em uma curva C é:

$$W = \int_C F.dr$$

O passo a passo é bem parecido com o do caso escalar:

Passo a passo

Integrais de linha – caso vetorial

1. Parametrizar a curva $\vec{\sigma}(t)$ (encontrando o intervalo $a \leq t \leq b$);
2. Calcular $\vec{\sigma}'(t)$;
3. Aplicar a fórmula que demos lá em cima, trazendo os valores encontrados dos passos anteriores e lembrando de escrever o campo vetorial $F(x, y, z)$ nas variáveis da parametrização;
4. Fazer o produto escalar $F(x(t), y(t), z(t)).\vec{\sigma}'(t)$;
5. Resolver a integral!

Teorema de Green

Basicamente, o Teorema de Green é um recurso que temos para "fugir" das integrais de linha (vetoriais) quando é muito complicado calcular pela definição.

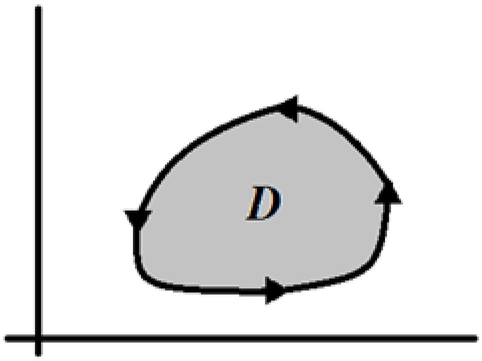
Esse teorema nos diz o seguinte:

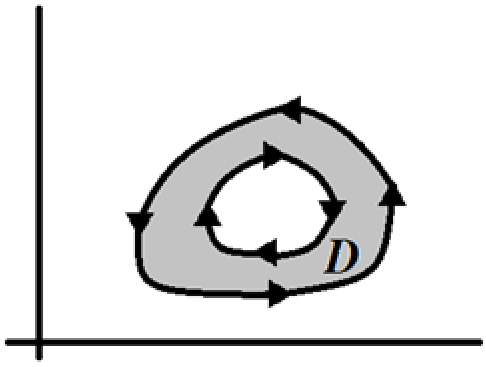
Sendo D uma região **fechada** no plano xy, que possui fronteira ∂D **orientada positivamente**, percorrida apenas uma vez, onde $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ é um campo vetorial que possui derivadas de 1ª ordem contínuas em D, então:

$$\oint_{\partial D} \vec{F}.dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

Importante: o campo F deve estar **definido** em toda a região D!

Ok, mas e aquela parte de a fronteira C estar orientada positivamente? Uma fronteira está orientada positivamente quando, "andando" sobre ela, nós vemos a região D à nossa esquerda. Temos dois exemplos disso aqui:





Hora do Bizu

Pense em usar Green quando:

- O campo vetorial tiver uma expressão bizarra
- A curva for difícil de parametrizar
- Você não conseguir resolver a integral de linha pela definição
- A questão não der a equação da curva

E se o problema não dá a equação da curva?

Nesse caso, a questão vai te dar área de D e o termo $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$ com certeza vai ser um número.

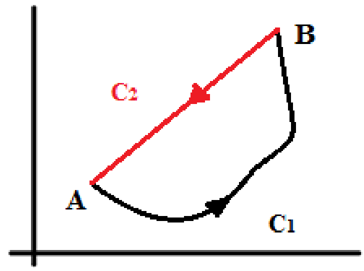
Aplicando Green:

$$\oint_{\partial D} F.dr = \iint_D n\, dxdy = n \iint_D dxdy$$

$$\oint_{\partial D} F.dr = n\,(\acute{A}rea\ D)$$

E se a curva for aberta?

Se você achar que a boa é usar Green, feche essa curva dada C_1 com uma curva C_2 (que simplifique a questão, pode ser uma reta):

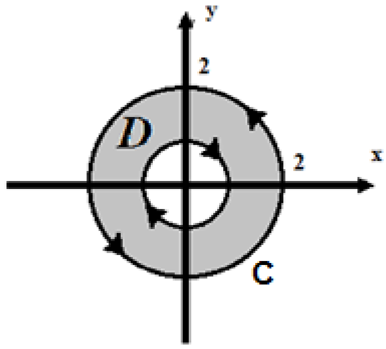


$$\int_{C_1} \vec{F} dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy - \int_{C_2} \vec{F} dr$$

E se F tem uma singularidade dentro de C?

Quando F não está definido em algum ponto dentro C, isolamos esse ponto com uma curva auxiliar γ antes de aplicar Green.

Ex: $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2x\right), C: x^2 + y^2 = 4$. Temos que isolar a origem:



$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy - \oint_\gamma F.dr$$

Passo a passo

Teorema de Green

1. Ver que a integral de linha em C_1 é difícil de resolver pela definição e calcular o termo $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$;
2. Definir qual é a fronteira ∂D e a região D (é bom fazer um esboço). Se a curva não estiver fechada, fechar; se algum ponto não estiver definido, isolar ele com uma curva auxiliar C_2;
3. Aplicar o teorema, prestando atenção à orientação da curva;
4. Escrever a região D matematicamente (se for preciso, usar coordenadas polares) e montar as integrais iteradas;
5. Resolver a integral dupla;
6. Se a fronteira for composta por mais de uma curva, resolver a integral de linha na curva auxiliar C_2 pela definição;
7. Encontrar a integral em C_1.

Campos Conservativos

Quando a integral de linha de um campo vetorial F independe do caminho, esse campo é chamado de conservativo e podemos definir o que chamamos de **função potencial** f, para a qual:

$$\vec{F} = \nabla f$$

Ou seja, o campo vetorial $\vec{F} = (F_1, F_2)$ é igual ao gradiente da função potencial f, logo:

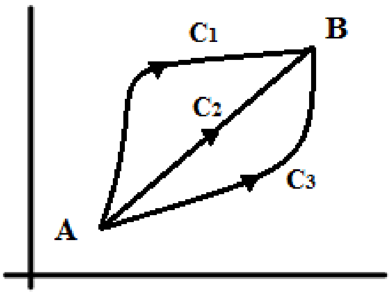
$$(F_1, F_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f = \int F_1 dx = \int F_2 dy$$

Integrando a equação $\vec{F} = \nabla f$ em ambos os lados ao longo de uma curva C, temos:

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

Isso mostra que a integral de linha de um campo conservativo em uma curva C só depende dos valores da função potencial nos seus pontos inicial A e final B, isto é, tanto faz o caminho:



Um campo conservativo tem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \\ \vec{F} = \nabla \mathrm{f} \\ \int_C \vec{F} \cdot dr = f(B) - f(A) \\ \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot dr = 0 \end{cases}$$

Essa última nos diz que a integral de linha em uma curva fechada é igual a zero, o que faz muito sentido, já que voltamos ao mesmo ponto do início.

Passo a passo

Campos conservativos – função potencial

1. Ver que não é muito simples resolver a integral de linha pela definição e achar $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$;

2. Como o campo é conservativo, definimos uma função potencial f e calculamos as integrais

$$\int F_1 dx = f + P(y)$$

$$\int F_2 dy = f + Q(x)$$

3. Comparamos os resultados e descobrimos quem são as constantes de integração $P(y)$ e $Q(x)$ e a função potencial f;

4. Descobrimos quem são os pontos inicial e final da curva e aplicamos $\int_C \vec{F} \cdot dr = f(B) - f(A)$.

Hora do Bizú

Às vezes, vemos que o campo é conservativo, mas não conseguimos calcular uma função potencial. Nesses casos, podemos lembrar que a integral de linha independe do caminho e simplesmente escolhemos uma outra curva mais simples que tenha os mesmos pontos inicial e final da curva da questão.

Campos conservativos no $\mathbb{R}^3$

Vamos definir o rotacional de um campo F como:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Os campos conservativos tem rotacional igual a $(0,0,0)$!

Veja que última componente do rotacional é $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, por isso, no caso especial em que F só tem componentes x e y (pertence ao $\mathbb{R}^2$), só calculamos esse termo- as outras compomentes do rotacional sempre são zero.

Mas quando a curva não é plana (o campo pertence ao $\mathbb{R}^3$), calculamos o rotacional por esse determinante para ver se o campo é conservativo. Caso seja, podemos calcular a função potencial da mesma forma que já vimos!

Relembrando Parametrização de Curvas...

Bom, já deu pra perceber que vamos ter que trabalhar com parametrização de curvas o tempo todo nessa matéria, né? Então é uma boa dar uma revisada nisso.

Primeiro: o que é parametrizar uma curva? É escrever cada uma de suas variáveis (x, y, z) em função de *uma variável*, ou seja, x, y, θ, t, etc. Uma curva tem infinitas parametrizações, cabe a nós escolhermos a que torna o problema mais simples.

- Isolar uma variável: é a forma mais básica de parametrizar. você isola uma variável e escolhe a outra como parâmetro.

Ex: a parábola $y = x^2$ pode ser parametrizada como $\gamma(x) = (x, x^2)$.

- Circunferências, elipses: a boa, em geral, é usar coordenadas polares.

Ex: a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ pode ser parametrizada fazendo $r = 2$ nas coordenadas polares: $\gamma(\theta) = (2\cos\theta\,, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Ex: a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ pode ser parametrizada como $\gamma(\theta) = (3\cos\theta\,, 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$ (os coeficientes da elipse vão para as coordenadas).

Ex: quando temos uma circunferência deslocada da origem, como $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, as coordenadas do centro são somadas na parametrização: $\gamma(\theta) = (\cos\theta + 1, \mathrm{sen}\,\theta - 2)$.

OBS: todas essas "alterações" que fizemos nas coordenadas polares são para "cancelar" esses coeficientes nas equações das curvas e nos levar à identidade $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ quando fazemos a mudança polar.

- Segmento de reta entre dois pontos:

Digamos que você queira parametrizar o segmento que vai do ponto $(2{,}5)$ ao $(3{,}8)$. Você pode achar a equação da reta que liga esses pontos, parametrizar ela e tal, mas vamos te dar um truque mais rápido aqui.

É o método "$vetor \times t + ponto$".

1. Ache um vetor paralelo a esse segmento, fazendo $ponto\ final - inicial = (3{,}8) - (2{,}5) = (1{,}3)$;
2. Multiplique esse vetor pelo parâmetro t e some um ponto pelo qual o segmento passe: $\gamma(t) = (1{,}3)t + (2{,}5) = (t+2, 3t+5)$;
3. Descubra o intervalo de t, pode testar os pontos na parametrização. No caso, temos $0 \le t \le 1$. Pronto!