

NomeNº

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.

1. (2 valores) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \quad \text{e} \quad F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad \text{e} \quad F'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

2. (2 valores) Determine uma equação da reta tangente à curva paramétrica $x = t^2$ e $y = t^3$ quando $t = 5$.

$$y = 125 + \frac{15}{2}(x - 25).$$

3. (2 valores) Uma janela em forma de retângulo com um semicírculo em cima deve ter um perímetro de 4 metros. Determine a área máxima da janela.

$$\frac{8}{\pi + 4} \simeq 1.12.$$

4. (2 valores) Calcule uma (apenas uma) das seguintes primitivas

$$\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx \quad \int (x + 2) e^x dx$$

$$\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx = \frac{1}{4} \arctan(x^4) \quad \int (x + 2) e^x dx = (x + 1)e^x$$

5. (2 valores) Calcule um (apenas um) dos seguintes integrais

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad \int_1^3 \log(x^3) dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad \int_1^3 \log(x^3) dx = 9 \log 3 - 6$$

6. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = 2 - x$ com condição inicial $x(0) = 1$.

$$x(t) = 2 - e^{-t}$$

7. (2 valores) Esboce e calcule o volume do sólido de revolução obtido por uma rotação em torno ao eixo y da região do plano x - y limitada pelos gráficos das funções $y = \sin(x)$ e $y = x$, no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$.

$$\text{Volume} = 2\pi \int_0^{\pi/2} x(x - \sin x) dx = \frac{\pi^4}{12} - 2\pi \simeq 1.83.$$

8. (2 valores) Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi} = 0.$$

9. (2 valores) Determine e justifique a convergência ou a divergência do integral impróprio

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2 + 2} dx$$

O integral impróprio converge, pois $\frac{3}{x^2+2} \leq \frac{3}{x^2}$ se $x \geq 1$, e o integral impróprio

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = 1$$

converge.

10. (2 valores) Teste a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2 + 2}$$

A série é convergente, pois é uma série alternada.