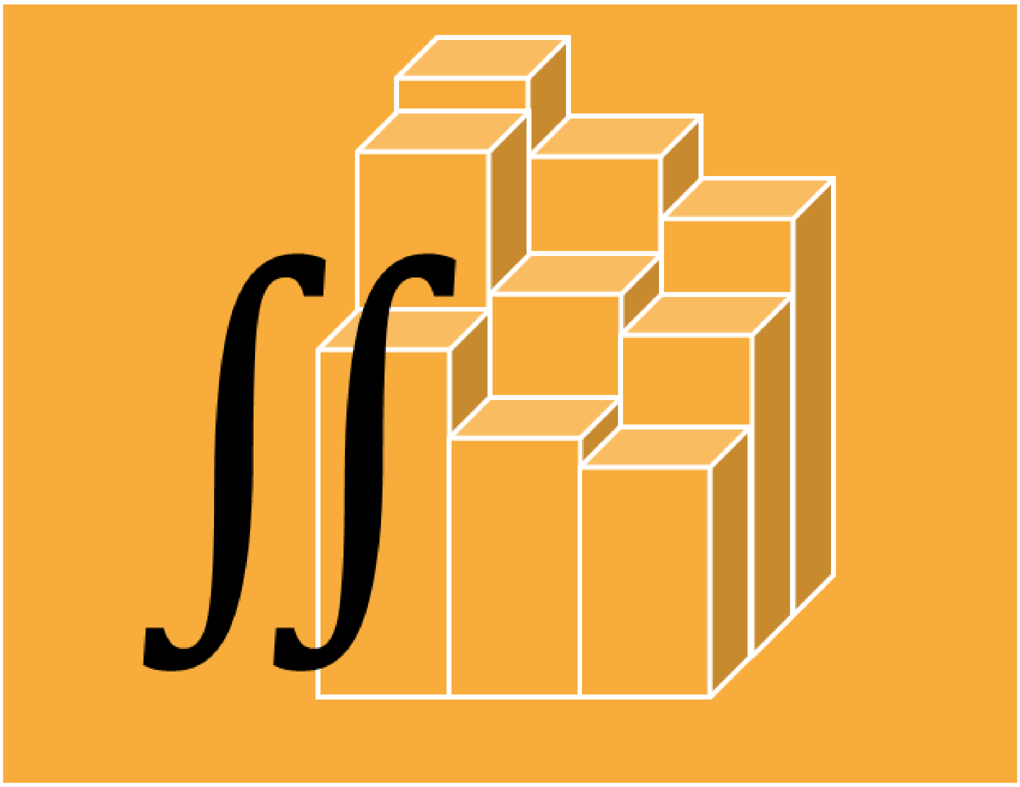
- RESUMÃO -
INTEGRAIS MÚLTIPLAS

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



Responde Aí

www.respondeai.com.br

Integrais Duplas

Da mesma forma que, nas integrais simples, “somamos” os valores de uma função $f(x)$ em comprimentos dx, nas integrais duplas, fazemos o mesmo para funções $f(x,y)$ em uma área: $dA = dxdy$.

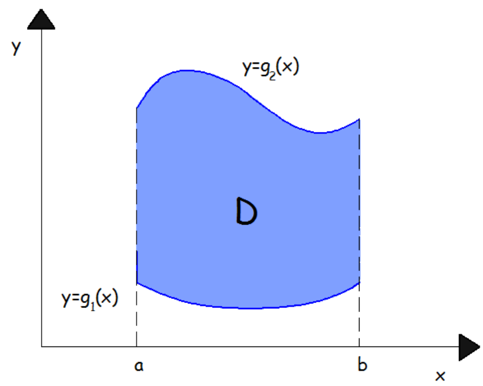
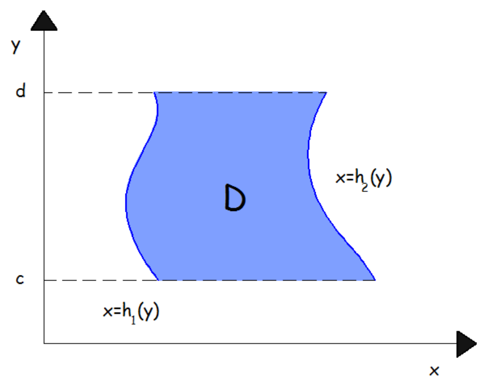
O intervalo de integração passa a ser uma região (área) de integração. Aqui, usamos o **Teorema de Fubini**. Sendo a região de integração um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

Assim, calculamos separadamente as integrais em x e y. Se liga!! Começamos sempre resolvendo a **integral de dentro**!

O teorema não serve só para regiões retangulares, podemos usá-lo para uma região D qualquer. Aí os limites de integração de dentro vão ser funções e os de fora, números.

Para facilitar, separamos as regiões em dois tipos: I ou II, vamos ver como elas são.

Regiões do Tipo I	**Regiões do Tipo II**
➢ Limitadas em y por funções (em cima e embaixo temos curvas) ➢ Limitades em x por por números (na esquerda e na direita temos retas verticais)  	➢ Limitadas em x por funções (na esquerda e na direita temos curvas) ➢ Limitades em y por por números (em cima e embaixo temos retas horizontais) 
Temos $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ e $a \leq x \leq b$, na integral: $$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$	Temos $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ e $\leq y \leq d$, na integral: $$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

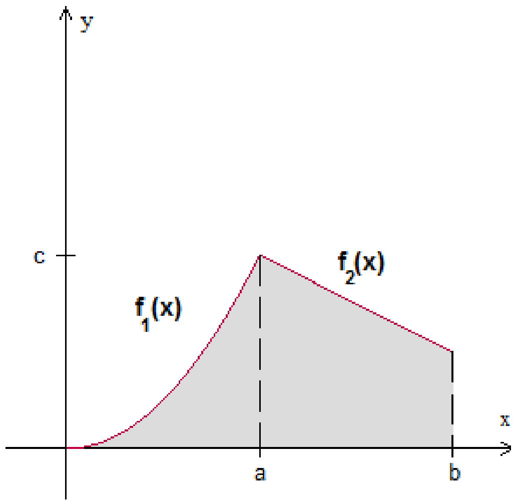
Percebeu que a primeira tinha $dydx$ e a segunda $dxdy$, né? Aqui vai o bizu...

Hora do Bizu

O intervalo que é função sempre fica dentro e os diferenciais devem estar na ordem dos intervalos!

Ok, mas e se a região não se encaixa em nenhum desses dois tipos? Aí você chora.

Mentira! Nesse caso, você provavelmente vai ter que dividir sua região em duas partes! Como assim? Dá uma olhada na região abaixo:



Não dá para escrever como tipo I nem II, né? Mas se a gente dividir a região em duas (em $x = a$), podemos escrever cada uma das partes como tipo I: para D_1 $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq f_1(x)$ e para D_2 $a < x \leq b$ e $0 \leq y \leq f_2(x)$. Beleza?

Passo a passo

Mudança na ordem de integração

1. Ver que não dá para integrar em y, mas em x fica mais fácil (ou vice-versa);
2. Fazer um esboço da região de integração;
3. Trocar o jeito de escrever a região (tipo I vira II e vice-versa);
4. Reescrever a integral com os diferenciais invertidos e com os novos intervalos;
5. Integrar!

Área

Calculamos a área de uma região D assim:

$$A = \iint_D dxdy$$

Mudança de Variáveis

Muitas vezes, a saída de uma questão de integral dupla é mudar as variáveis das integrais, procurando deixá-las mais fáceis de calcular.

Hora do Bizú

Fazemos mudança de variáveis quando encontramos:

- Termos repetidos na função a ser integrada
- Termos repetidos nas funções que limitam a região de integração
- Termos complicados dentro de senos, cossenos, raízes, etc.

Para fazer uma mudança de variáveis em integrais duplas, usamos essa fórmula aqui:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_Q f(u,v)|J|dudv$$

Para isso, temos que calcular o **Jacobiano** da mudança, que vai ser

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial y}{\partial u}$$

Repare que o termo que acrescentamos à integral é o **módulo do Jacobiano**, portanto, $|J|$. Perceba também que, além de reescrevermos a função a ser integrada nas novas variáveis, também temos que achar a *nova região de integração*.

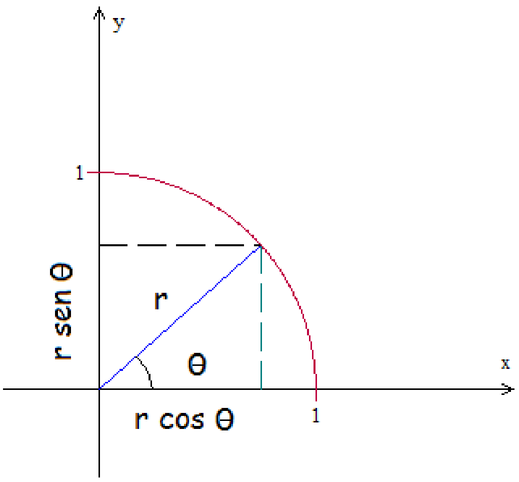
Passo a passo

Mudança de variáveis

1. Chamar os termos complicados e/ou que se repetem de u e v;
2. Calcular o Jabobiano da mudança;
3. Encontrar a nova região de integração no plano uv, fazendo a mudança nas funções do plano xy;
4. Reescrever a integral com os intervalos da nova região – **não esquecer o Jacobiano**;
5. Integrar!

Coordenadas Polares

Para escrever um ponto em coordenadas polares precisamos de duas informações: sua distância até a origem, que chamamos de r, e o ângulo θ que o segmento r faz com o eixo x. No desenho fica mais fácil entender:



A mudança que fazemos e o seu respectivo Jacobiano são:

$$x = r\ cos\ \theta$$

$$y = r\ sen\ \theta$$

$$|J| = r$$

Hora do Bizú

Pense em coordenadas polares quandoa região de integração tiver circunferências/elipses e quando a função a ser integrada tiver termos x^2 e y^2.

Passo a passo

Coordenadas polares

1. Ver que a boa é fazer a mudança polar;
2. Fazer um esboço da região e encontrar os intervalos de r e θ (se preciso, substituir a mudança polar nas equações que limitam a região);
3. Reescrever a integral, fazendo a mudança polar na função a ser integrada, trazendo os intervalos de r e θ e trocando $dxdy$ por $r\,dr d\theta$;
4. Integrar!

Temos duas formas especiais de coordenadas polares que usamos de vez em quando:

Coordenadas elípticas

Usamos quando:

- A região tem uma elipse do tipo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- A função integrada tem um termo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

A mudança é a seguinte:

$$x = a\,r\cos\theta$$

$$y = b\,r\,sen\,\theta$$

$$|J| = a\,b\,r$$

Coordenadas polares deslocadas

Usamos quando:

- A região tem uma circunferência com centro (c, d) do tipo

$$(x-c)^2+(y-d)^2 = raio^2$$

A mudança é a seguinte:

$$x = r\cos\theta + c$$

$$y = b\,r\,sen\,\theta + d$$

$$|J| = r$$

Cuidado que isso nem sempre facilita a questão, faz com calma e qualquer coisa usa a coordenada polar normal mesmo!

Integrais Triplas

Da mesma forma que temos integrais simples (para funções do tipo $f(x)$) e integrais duplas (para funções $f(x,y)$), temos as integrais triplas, para funções $f(x,y,z)$.

Aqui, não temos mais um intervalo de integração ou uma região plana, como vimos nas integrais simples e duplas, mas sim um volume. Ou seja, integramos a função em um volumes $dV = dxdydz$.

O **Teorema de Fubini** continua valendo! Sendo P um paralelepípedo $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$:

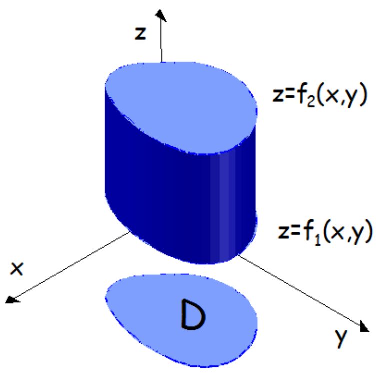
$$\iiint_P f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

Da mesma forma que fizemos nas integrais duplas, sempre resolvemos as triplas começando pelas integrais de dentro!

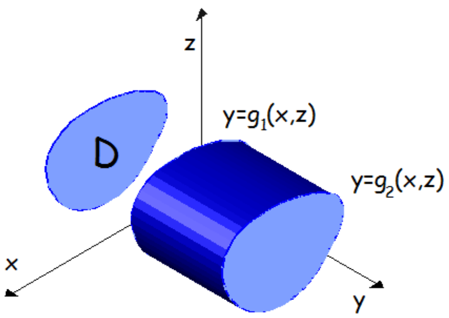
E, novamente, esse teorema vale para regiões quaisquer, em que os intervalos das integrais de dentro são funções em vez de números.

Podemos dividir as regiões de integração em três tipos.

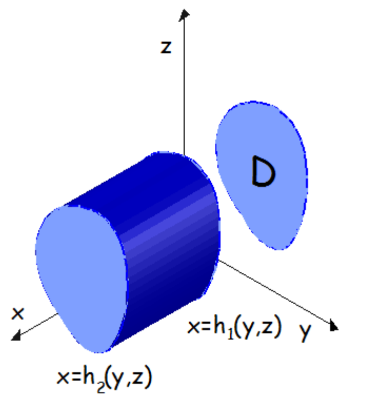
<table>
<tr><th>Regiões do Tipo I</th><th>Regiões do Tipo II</th><th>Regiões do Tipo III</th></tr>
<tr>
<td>Limitadas em z por superfícies e no plano xy por uma área D.



</td>
<td>Limitadas em y por superfícies e no plano xz por uma área D.



</td>
<td>Limitadas em x por superfícies e no plano yz por uma área D.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Temos $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$ e $(x,y) \in D$, a integral fica:
$$\iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$</td>
<td>Temos $g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)$ e $(x,z) \in D$, a integral fica:
$$\iint_D \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z))} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$</td>
<td>Temos $h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)$ e $(y,z) \in D$, a integral fica:
$$\iint_D \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$</td>
</tr>
</table>

Para resolver essas integrais, escrevemos uma integral simples em uma variável e uma integral dupla no plano das variáveis que sobrarem. Aí, resolvemos essa integral dupla da forma que já sabemos!

Passo a passo

Integrais triplas

1. Fazer um esboço da região;
2. Ver se a boa é escrever como tipo I, II, ou III e escrever uma das variáveis entre duas superfícies, chamando a projeção no plano "tal" de D;
3. Montar a integral tripla como uma dupla em D, mais uma simples na variável que sobrou;
4. Resolver a integral simples;
5. Descobrir quem é D e achar os intervalos da integral dupla;
6. Resolver a integral dupla.

Nas questões de integrais triplas, você pode precisar usar isso aqui:

Volume

O volume de uma região W é dado por:

$$V = \iiint_W dxdydz$$

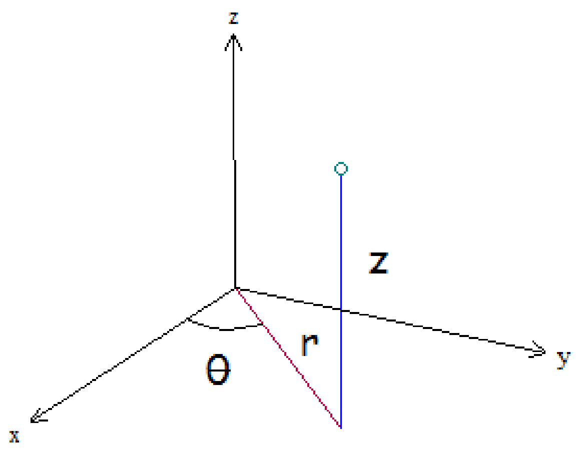
Massa

Sendo δ sua densidade, a massa de W é dada por:

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dxdydz$$

Coordenadas Cilíndricas

Para escrever um ponto em coordenadas cilíndricas, escrevemos sua projeção no plano xy em coordenadas polares (r e θ são os mesmos que você já conhece) e sua coordenada z continua a mesma:



Em resumo, é isso aqui:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$z = z$$

$$|J| = r$$

Importante: se z for uma função de x e y (por exemplo, $z = x + y$) fazendo a mudança cilíndrica, temos $z = r(\cos\theta + sen\,\theta)$.

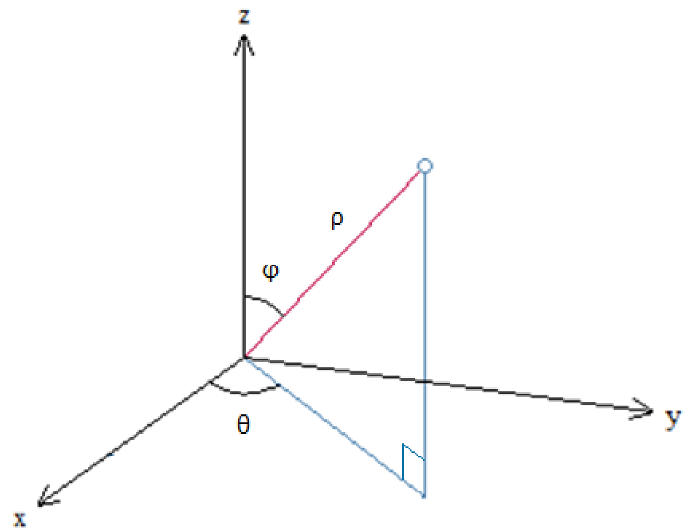
Hora do Bizu

Usamos essa mudança de variáveis quando a região envolve cilindros, cones, paraboloides. Em geral, quando temos simetria em relação ao eixo z e a projeção fica bem escrita em coordenadas polares.

Coordenadas Esféricas

Para escrever um ponto em coordenadas esféricas, precisamos de três informações: sua distância até a origem ρ, o ângulo θ que a projeção de ρ no plano xy faz com o eixo x e o ângulo φ que ρ faz com a parte positiva do eixo z.

Na figura fica mais fácil de entender:



Para fazer a mudança para coordenadas esféricas, usamos as seguintes equações:

$$x = \rho\, sen\, \varphi\, cos\, \theta$$

$$y = \rho\, sen\, \varphi\, sen\, \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$|J| = \rho^2 sen\varphi$$

Hora do Bizu

Fazemos essa mudança de variáveis quando a região de integração envolve esferas, cones, elipsoides. Em geral, quando temos simetria em relação à origem.

Se você estiver na dúvida entre mudança polar ou cilíndrica, tenta a cilíndrica primeiro!

Vamos ver agora um caso especial de coordenadas esféricas:

Coordenadas "elipsóidicas"

Usamos quando

- A região é limitada por um elipsoide do tipo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- A função integrada tem um termo do tipo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

A mudança é a seguinte:

$$x = a\,\rho\, sen\,\varphi\, cos\,\theta$$

$$y = b\,\rho\, sen\,\varphi\, sen\,\theta$$

$$z = c\,\rho\cos\varphi$$

$$|J| = abc\,\rho^2 sen\varphi$$

Passo a passo

Mudança cilíndrica/esférica

1. Fazer um esboço da região;
2. Ver qual mudança é melhor e achar os intervalos de ρ, θ e φ ou r, θ e z. Para isso, faça a mudança de variáveis nas equações das superfícies que limitam a região;
3. Reescrever a integral com os novos intervalos (do passo anterior), fazendo a mudança na função a ser integrada e trocando $dxdydz$ por $\rho^2 sen\varphi\, d\rho d\theta d\varphi$ ou $r\, drd\theta dz$ (dependendo da mudança);
4. Resolver as três integrais, começando pela de dentro!

Relembrando as Principais Superfícies...

Bom, já deu pra perceber que temos que trabalhar com superfícies o tempo todo resolvendo questões de integrais triplas. Por isso, fizemos aqui um resumo das principais superfícies que aparecem nesse tipo de questão, para você saber reconhecer quando vir:

- Cones: $z^2 = ax^2 + by^2$;
- Cilindros: $ax^2 + by^2 = 1$ (cilindro elíptico); $y = ax^2$ (cilindro de parábola);
- Paraboloides elípticos: $z = ax^2 + by^2$;
- Hiperboloides de uma folha: $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$;

OBS: o eixo de simetria é sempre aquela variável que "falta" na equação ou aquela com sinal diferente. Aqui, escrevemos essas superfícies com eixo de simetria z.

- Esferas: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (quando os coeficientes são diferentes de 1, temos um elipsoide);

OBS: no nosso resumo, as superfícies estão centradas na origem, mas também podemos encontrar algo do tipo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Isso é uma esfera com centro deslocado (a, b, c). O mesmo raciocínio vale para as outras superfícies!

- Planos: $ax + by + cz + d = 0$ (todas as variáveis são elevadas a "1").