• x é negativo se for uma compressão

• x é positivo se for uma dilatação

Oscilador harmónico

↳ sistema que, quando deslocado de sua posição de equilíbrio, sofre uma força restauradora F proporcional ao deslocamento:

$\vec{F} = -k.\vec{x}$, em que k representa a constante elástica

x é o deslocamento

• se F for a única força a atuar no sistema, ele é denominado oscilador harmónico simples (repete-se em intervalos regulares)

Apresenta amplitude e frequência constantes

• Caso haja tbm. uma força de amortecimento proporcional à velocidade, o oscilador harmónico é descrito como oscilador armotecido

• Se houver uma força externa, dependente do tempo, a atuar no sistema, o oscilador harmónico, é dito forçado.

Oscilador harmónico simples

Consiste num sistema que contém uma massa, sobre a qual atua uma força $\vec{F}$, que empurra a massa em direção ao ponto $\vec{x}=0$ de referência (posição inicial /de equilíbrio) e que depende apenas da posição, da massa e da constante k.

Segundo a 2ª lei de Newton: $F = -k.x$

⇓ (ver próxima página)

$$\Downarrow$$

$$m . \ddot{x} = - K . x$$

Seja $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0}$$

Integrando esta equação (e após algumas igualdades), teremos a solução geral para x:

$$\boxed{x(t) = A . \cos(\omega . t + \varphi)}$$

, sendo A = amplitude (m)

φ = fase inicial (rad)

ω = velocidade angular (rad/s)

Nota:

Para o oscilador vertical sob a ação da gravidade teremos

$$F = - K . (x - \underbrace{x_0}_{\text{posição de equilíbrio}}) + m . g$$

Do mesmo modo poderíamos escrever:

$$\boxed{x(t) = A . \operatorname{sen}(\omega . t + \varphi)}$$ → é a que considerada pelo professor

, no entanto φ está deslocado $\frac{\pi}{2}$ em relação à equação anterior

A frequência das oscilações será dada pela seguinte forma: $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{K}{m}}$

O período, o tempo para uma única oscilação, é obtido da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

• O período e a frequência são determinados pelo valor da <u>massa</u> e pela constante da força K, Porto Editora

- Se m aumenta, então T aumenta (pois a inércia aumenta).
- Se K aumenta, então T diminui

(*) enquanto a amplitude e a fase são determinadas pelas condições iniciais.

(*) • Se o comprimento inicial da mola aumenta, o período T aumenta

—n—

Oscilador harmónico amortecido

As oscilações harmónicas simples ocorrem em sistemas conservativos, no entanto, na prática existe sempre dissipação de energia (decaimento na amplitude de oscilação ao longo do tempo).

A resistência de um fluido, como o ar, ao deslocamento de um obstáculo, é proporcional à velocidade (para velocidades suficientemente pequenas), o que se aplica a pequenas oscilações.

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, dizemos que o oscilador e o seu movimento são amortecidos.

Em vários sistemas, a força de atrito F_a pode ser modelada como sendo proporcional à velocidade $\dot{x}$ do objeto: $F_a = -b.\dot{x}$, onde b é uma constante de amortecimento.

Assim, pela Segunda Lei de Newton:

$$F = -b.\dot{x} - K.x \Leftrightarrow m.\ddot{x} = -b.\dot{x} - K.x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m.\ddot{x} + b.\dot{x} + K.x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Dessa forma, a equação de um oscilador amortecido pode ser reescrita:

$$\gamma = \frac{1}{2.\tau} = \frac{b}{2.m}$$

tempo de relaxação

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \cdot \dot{x} + \omega_o^2 \cdot x = 0}$$

, sendo γ = coeficiente de amortecimento

ω_o = velocidade angular do osc. harmônico

A solução desta equação é dada pela amplitude em função do tempo, e pode ser escrita como:

$$\boxed{x(t) = A \cdot e^{-\gamma . t} \cdot \text{sen}\,(\omega . t + \varphi)}$$

A velocidade angular, ω, do oscilador harmônico amortecido depende da frequência natural e é dada por:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_o^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\underbrace{\omega_o^2}_{\left(=\frac{k}{m}\right)} - \gamma^2}$$

Em termos de energia, para um oscilador não amortecido, esta é constante. Se o oscilador é amortecido, a energia mecânica não é constante e diminui com o tempo.

O cálculo da energia mecânica pode ser feito utilizando a seguinte expressão:

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\gamma . t}}$$

Porto Editora

Oscilador harmônico forçado

Até aqui consideramos apenas oscilações livres, em que o oscilador recebe uma certa energia inicial (através do seu deslocamento e velocidade iniciais) e depois é solto, evoluindo livremente. O período de oscilação é determinado pela própria natureza do oscilador, ou seja, pela sua inércia e pelas forças restauradoras que atuam sobre ele. A oscilação é amortecida pelas forças dissipativas atuantes.

Agora será estudado o efeito produzido sobre o oscilador por uma força externa periódica. O período desta força não coincidirá com o período próprio do oscilador, de modo que as oscilações por ela produzidas chamam-se oscilações forçadas.

Para manter as oscilações num sistema harmônico amortecido é preciso fornecer energia ao sistema. Diz-se então que o sistema está a ser forçado ou excitado (como as oscilações de uma pessoa sentada num baloiço sob a ação de empurrões periódicos).

A força que é atuada no sistema é uma força diretriz, de variação temporal e é da forma:

$$F_{ext} = F_0 \cdot \mathrm{sen}(w_e \cdot t) \quad ; \quad a_0 = \frac{F_0}{m}$$

, onde F_0 = módulo inicial da força (costuma ser máxima)

ω_e = frequência angular da força diretriz

A força resultante será a soma das forças diretriz periódica, restauradora elástica e de atrito. Assim, pela Segunda Lei de Newton:

$$\boxed{F_{ext.} - k.x - b.\dot{x} = m.\ddot{x}}$$ reescrita na forma

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 . x = \frac{F_{ext.}}{m}}$$

É importante! ressaltar que $\omega_e \neq \omega_0$. O oscilador oscila com a frequência da frequência aplicada (ω_e) e não com a sua frequência natural (ω_0).

A solução estacionária, que consiste em x variar periodicamente, com o mesmo período de excitação mas, eventualmente, com um desfasamento, é representada da seguinte forma:

$$\boxed{x(t) = \overbrace{\frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \frac{\omega_e^2}{\tau^2}}}}^{A} \cdot \text{sen}\left[\omega_e . t + \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega_e}{\tau}}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)}_{\varphi}\right]}$$

, sendo $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$

Energias e Potências

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$$
$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Oscilador harmónico simples

- $\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2$
- $\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} \cdot M \cdot \omega_0^2 \cdot A^2$

$K = M \cdot \omega_0^2$

- Energia total $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 = \underbrace{E = \langle E \rangle}_{\text{Energia total é uma constante do movimento}} \Leftrightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$

— // — // —

Oscilador harmónico amortecido

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2 \cdot \tau}}$$

- $\langle E_c \rangle \simeq \frac{1}{4} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq$
  $\simeq \frac{1}{4} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot t}$
- $\langle E_p \rangle \simeq \frac{1}{4} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq$
  $\simeq \frac{1}{4} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot t}$
- $\langle E_{total} \rangle \simeq \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq$
  $\simeq \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot t}$

- $\langle P_{dissipada}(t) \rangle = \frac{\langle E_{total} \rangle}{\tau}$

- Trabalho que a força de atrito realiza por unidade de tempo

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{atrito} = \langle F_{at.} \times \dot{x} \rangle = -\frac{m}{2 \cdot \tau} \times \omega_0^2 \times X_c^2 \times e^{-\frac{t}{\tau}} \; (J) = -\frac{E(t)}{\tau}$$

- Fator de qualidade de um oscilador

$$Q = 2.\pi . \frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Energia dissipada por período}} =$$

$$= 2\pi \times \frac{E}{P.T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{f}} \times \frac{E}{P} = \frac{\omega \times E}{P}$$

Para pequenas dissipações: $\langle P \rangle = + \frac{\langle E \rangle}{\tau}$ (=)

$$\Leftrightarrow Q = \omega_0 \times \tau$$

— " —

Oscilador harmónico forçado

- Calculemos a potência que é absorvida pelo oscilador. Esta potência corresponde ao trabalho realizado por unidade de tempo pela força externa (harmónica):

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2} . m . a_0^2 . \tau . \left[1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_e^2}{\frac{\omega}{\tau}} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\left(a_0 = \frac{F_0}{m} \right)$$

- Na ressonância ($\omega = \omega_0$), $\langle P \rangle_{res} = -\frac{1}{2} . m . f_{máx}^2 . \tau$

A absorção de potência reduz-se quando ω se afasta de ω_0.