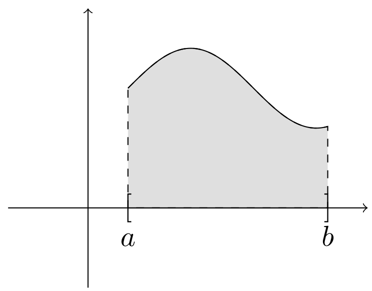
# Integrais



## Introdução

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva (i.e. $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$).

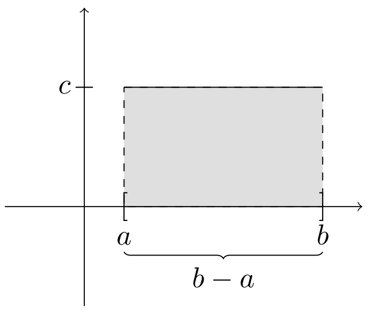
Qual a área limitada pelo gráfico de $f$ e o eixo dos $xx$?






## Introdução

1) $f$ constante, $f(x) = c$

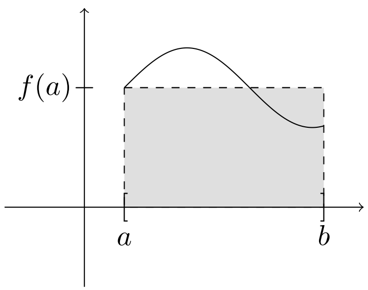



área $= c \cdot (b - a)$



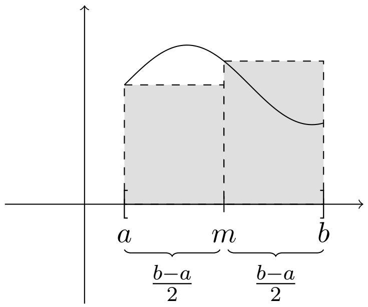
## Introdução

2) Caso geral




1ª aproximação $= f(a) \cdot (b - a)$

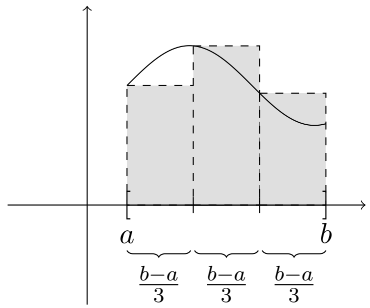
# Introdução




$$\begin{aligned}
2^{\text{a}} \text{ aproximação} &= f(a)\cdot(m-a)+f(m)\cdot(b-m)\\
&= f(a)\cdot\tfrac{b-a}{2}+f(m)\cdot\tfrac{b-a}{2}\\
&= f(a)\cdot\tfrac{b-a}{2}+f(a+\tfrac{b-a}{2})\cdot\tfrac{b-a}{2}
\end{aligned}$$



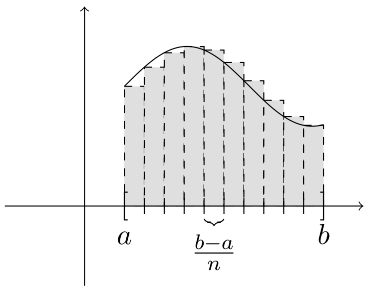
# Introdução




$$3^{\text{a}} \text{ aproximação} = f(a)\cdot\tfrac{b-a}{3}+f(a+\tfrac{b-a}{3})\cdot\tfrac{b-a}{3}+f(a+2\tfrac{b-a}{3})\cdot\tfrac{b-a}{3}$$



# Introdução




$n$-ésima aproximação - “$n$-ésima soma de Riemann de $f$"

$$\begin{aligned}
s_n &= f(a)\tfrac{b-a}{n}+f(a+\tfrac{b-a}{n})\tfrac{b-a}{n}+f(a+2\tfrac{b-a}{n})\tfrac{b-a}{n}\\
&\quad +\ldots+f(a+(n-1)\tfrac{b-a}{n})\tfrac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

$$\text{área} = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$$



# Somatório

Sejam $(a_n)_{n\geq q}$ uma sucessão e $l,k\in\mathbb{N}$ tais que $q\leq l\leq k$. Definimos

$$\sum_{i=l}^{k} a_i = a_l + a_{l+1}+\cdots+a_k.$$

Assim, por exemplo,

$$\sum_{i=3}^{7}\frac{1}{i} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}.$$

## Integral de Riemann

### Teorema

*Seja $f$ contínua em $[a,b]$. Então a sucessão $(s_n)_{n\geq 1}$ de termo geral*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot \tfrac{b-a}{n}) \cdot \tfrac{b-a}{n}$$

*é convergente.*

### Definição

Seja $f$ contínua em $[a,b]$. O *integral (de Riemann)* de $f$ é o número real

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot \tfrac{b-a}{n}) \cdot \tfrac{b-a}{n}.$$



## Integral de Riemann

### Exemplo

Para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b c dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot \tfrac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (c \cdot \tfrac{b-a}{n} + \cdots + c \cdot \tfrac{b-a}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} c \cdot n \cdot \tfrac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} c \cdot (b-a) \\
&= c \cdot (b-a).
\end{aligned}$$

### Nota

Define-se também a noção de função *integrável* e o integral para estas funções. Toda a função contínua num intervalo $[a,b]$ é integrável.



## Integral de Riemann

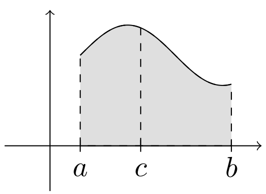
Sejam $f$ contínua num intervalo $I$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Definimos

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

### Proposição

*Sejam $f$ contínua num intervalo $I$ e $a, b, c \in I$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

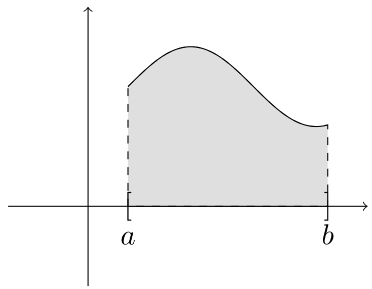





## Interpretação geométrica do integral

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

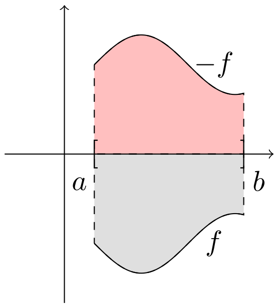
### $f$ positiva




$\int_a^b f(x)\, dx =$ área limitada pelo gráfico de $f$ e o eixo dos $xx$

## Interpretação geométrica do integral

### $f$ negativa




$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\tfrac{b-a}{n})\tfrac{b-a}{n} = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} -f(a+i\tfrac{b-a}{n})\tfrac{b-a}{n}$$

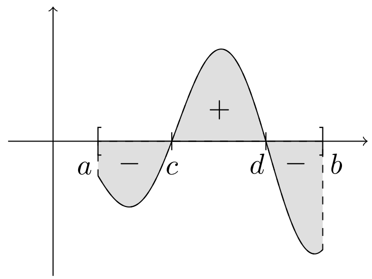
$= -\int_a^b -f(x)\,dx = -$área limitada pelo gráfico de $-f$ e o eixo dos $xx$

$= -$área limitada pelo gráfico de $f$ e o eixo dos $xx$



## Interpretação geométrica do integral

### Caso geral




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ soma das áreas delimitas pelo gráfico de $f$ por cima do eixo dos $xx$ $-$ soma das áreas delimitas pelo gráfico de $f$ por baixo do eixo dos $xx$



## Teorema fundamental do Cálculo

*Sejam $f$ contínua num intervalo $I$ e $a, b \in I$. Então*

(i) *a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*é uma primitiva de $f$;*

(ii) *para qualquer primitiva $G$ de $f$,*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração de (ii) a partir de (i) : Seja $G$ uma primitiva de $f$. Por (i), existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Logo $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt + C - (\int_a^a f(t)\,dt + C) = \int_a^b f(t)\,dt.$



## Teorema fundamental do Cálculo

### Exemplo

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

### Notação

Para uma função $F$ e $a, b \in \mathrm{D}_F$ escrevemos também $[F(x)]_a^b$ em vez de $F(b) - F(a)$. Do mesmo modo exprimimos a parte (ii) do Teorema fundamental do Cálculo escrevendo

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b.$$

## Linearidade do integral

1. Sejam $f$ e $g$ contínuas em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Sejam $f$ contínua em $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$



## Funções de classe $C^n$

Seja $n \geq 1$ um número natural. Uma função $f : D \to E$ diz-se de *classe* $C^n$ se for derivável até a ordem $n$ e se a $n$-ésima derivada de $f$ for contínua. Uma função $f : D \to E$ diz-se de *classe* $C^\infty$ se admitir derivadas de todas as ordens.



## Integração por partes

Sejam $f$ e $g$ de classe $C^1$ em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$



## Exemplo

Pretende-se determinar $\int_0^\pi \cos x \operatorname{sh} x\, dx$. As funções $\operatorname{sen}$ e $\operatorname{ch}$ são de classe $C^\infty$ em $\mathbb{R}$ e então de classe $C^1$ em $[0,\pi]$. Fazendo as duas integrações por partes possíveis obtemos

$$\int_0^\pi \cos x \operatorname{sh} x\, dx = [\operatorname{sen} x \operatorname{sh} x]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{ch} x\, dx$$

e

$$\int_0^\pi \cos x \operatorname{sh} x\, dx = [\cos x \operatorname{ch} x]_0^\pi + \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{ch} x\, dx.$$

Logo

$$2 \cdot \int_0^\pi \cos x \operatorname{sh} x\, dx = [\operatorname{sen} x \operatorname{sh} x]_0^\pi + [\cos x \operatorname{ch} x]_0^\pi\,.$$

## Exemplo

Portanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{sh}\, x \, dx &= \tfrac{1}{2}\left([\mathrm{sen}\, x \,\mathrm{sh}\, x]_0^{\pi} + [\cos x \,\mathrm{ch}\, x]_0^{\pi}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sh}\,\pi - \mathrm{sen}\,0\,\mathrm{sh}\,0\\ &\quad +\cos\pi\,\mathrm{ch}\,\pi - \cos 0\,\mathrm{ch}\,0)\\ &= \tfrac{1}{2}(-\mathrm{ch}\,\pi - 1)\\ &= -\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\pi + 1).\end{aligned}$$



## Integração por substituição ou mudança de variáveis

Sejam $f$ contínua em $[a,b]$, $I$ um intervalo, $g : I \to [a,b]$ de classe $C^1$ e $\alpha, \beta \in I$ tais que $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

### Exemplo

Pretende-se calcular $\int_{-1}^{1} \mathrm{arcsen}\, x \, dx$. A função $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definida por $g(t) = \mathrm{sen}\, t$ é de classe $C^1$ e temos $g(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $g(\frac{\pi}{2}) = 1$. Podemos então fazer a substituição

$$x = \mathrm{sen}\, t, \quad dx = \cos t \, dt.$$



## Exemplo

Temos

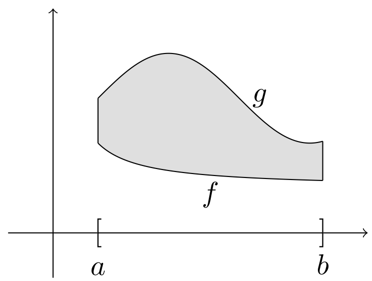
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{arcsen}\, x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{arcsen}\,(\mathrm{sen}\, t) \cos t \, dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt\\ &= [t\,\mathrm{sen}\, t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\, t \, dt\\ &= [t\,\mathrm{sen}\, t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} + 0 - 0\\ &= 0.\end{aligned}$$



## Áreas

Seja $A$ um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ $(= \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\})$ para o qual existem duas funções contínuas $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \le g(x)$ para todo o $x \in [a,b]$ e

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}.$$




Define-se a *área* de $A$ por

$$\text{área}(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

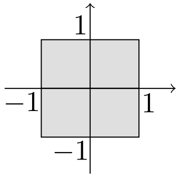
## Exemplo

Pretende-se calcular a área do conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$




Portanto

$$\text{área}(A) = \int_{-1}^{1} 1-(-1)dx = \int_{-1}^{1} 2dx = [2x]_{-1}^{1} = 2-2(-1) = 4.$$