T-1 incertezas

Média e incerteza

O ficheiro Excel *Média e Incerteza* contém duas folhas de cálculo. Na folha denominada Gaussiana aparece um conjunto de 120 dados simulados (não experimentais) que obedecem a uma distribuição normal ou gaussiana. Foram gerados com uma fórmula que aparece num retângulo, mas depois foram passados para valores numéricos para não estarem sempre a mudar.

Vocês podem verificar no gráfico “Distribuição normal, 120 pontos” que cerca de dois terços dos pontos se encontram a uma distância do valor médio inferior ao desvio padrão. Na realidade, isso acontece a 80 dos 120 pontos. Podem ainda verifica que o histograma tem uma forma que, muito grosseiramente com seria de esperar com apenas 120 pontos, lembra uma gaussiana.

Estes 120 pontos têm média 90.6 e desvio padrão 11.3.

Estes 120 pontos foram divididos em seis grupos de 20 pontos, e estão apresentados no gráfico “6 distribuições normais, 20 pontos”. É exatamente o mesmo gráfico anterior, apenas com um aspeto diferente. Cada grupo de 20 pontos tem uma média um desvio padrão. A média das médias dá os mesmos 90.6, como seria de esperar: (Σi(xi))/120 = (Σj(Σi(xi,j))/20)/6. Mas a dispersão das seis médias em torno da “média das médias”, é muito menor, como podem ver no gráfico “6 médias de 20 pontos”. Isso coincide com o simulador de médias que viram na teórica. O desvio padrão das médias de 20 pontos é raíz(20) = 4.47 vezes menor do que o desvio padrão dos pontos de partida.

Consideremos o primeiro conjunto de vinte pontos. O valor médio é 90.6 e o desvio padrão dos pontos de partida é 10.8. Notem que este valor, 10.8, dá uma ideia da dispersão em torno da média que apresentam os vinte pontos. Contudo, a média é muito mais estável e, se tivéssemos várias médias para comparar (neste caso temos mais cinco), veríamos que o seu desvio padrão é raíz(20) vezes menor, o que dá 2.4.

Consideremos agora que tudo o que tínhamos eram apenas os vinte primeiros pontos. Calculávamos a média, 90.6 e o desvio padrão dos pontos, 10.8. Depois dividíamos este desvio padrão por raíz(20) e obtínhamos 2.4, o desvio padrão da média (isto é, a dispersão que as médias teriam se tivéssemos repetido a experiência). Como apresentaríamos o resultado? Bem, começamos com a incerteza na incerteza (no desvio padrão da média). Com apenas 20 pontos, a incerteza é significativa e dificilmente justificaria 2 algarismos. Reduzir 2.4 para 2 ou para 3 é preferível (neste caso 3 é preferível a 2). O número de casa decimais da média deve coincidir com o número de casas decimais da incerteza. Ficaria 91 ± 3 (91 ± 2 era perfeitamente aceitável).

Frequência dos batimentos cardíacos

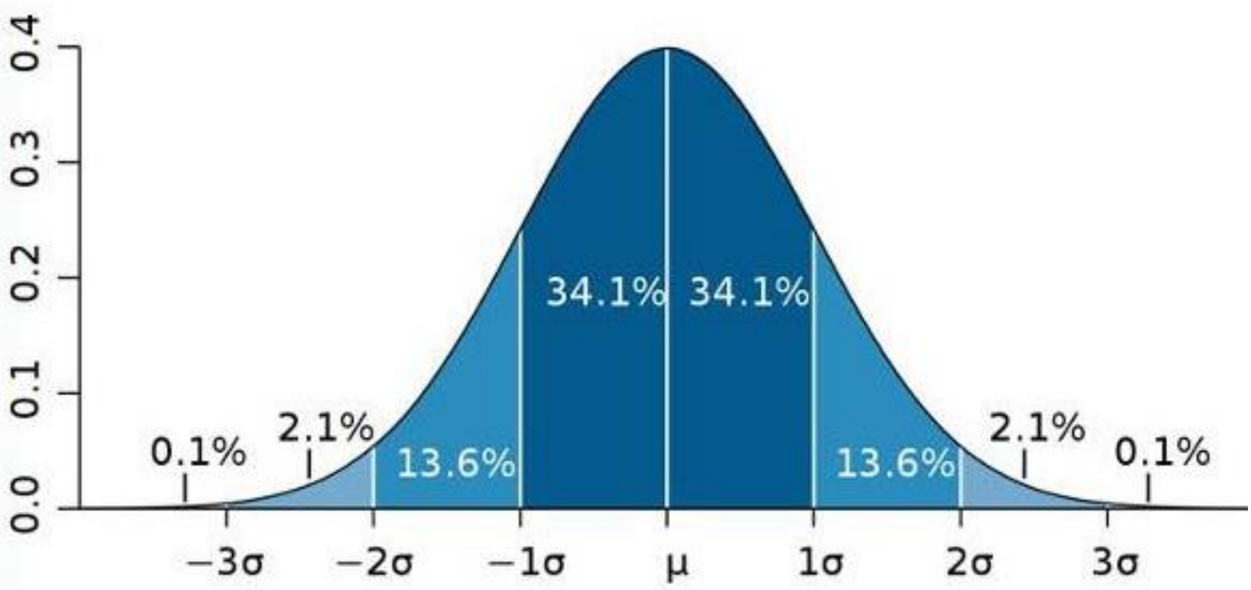
A folha Excel Dados T1, no gráfico “Dados de todos os alunos – ordenados por aluno” mostra os dados que consegui obter para a posição em pé. Os padrões neste gráfico mostram perfeitamente que a distribuição não é totalmente aleatória e, em particular, não é gaussiana.

Se alterarmos a ordem de forma aleatória podemos ficar com o gráfico “Dados de todos os alunos – ordem aleatória”. Mesmo neste caso podemos ver que a distribuição não é simétrica, com mais “picos” para cima do que para baixo. De igual forma, o histograma tem uma segunda bossa mais à direita da principal, a qual parece ter uma distribuição próxima de um retângulo.

A média e o desvio padrão de todos os pontos é 91.2 e 11.6, valores similares aos da simulação anterior. Considerando, por exemplo, que apenas disponhamos dos primeiros 20 pontos, obteríamos a média 90.3 e o desvio padrão dos vinte pontos 12.4, donde deduziríamos um desvio padrão para a média de 2.8. A dispersão dos valores das médias deu 4.0, uma dispersão bem maior do que no caso da gaussiana. Moral da história: usem com cautela as equações deduzidas para a distribuição normal em distribuições que o não são.

Passando agora à comparação, para a mesma pessoa, da frequência dos batimentos cardíacos deitado e em pé, o habitual é comparar a diferença entre as médias em unidades de desvio padrão.

Admitindo que o modelo de uma distribuição gaussiana não foge demasiado à realidade, se a diferença for superior a, digamos, três desvios padrão, então é bastante provável que as duas médias sejam distintas. Se a distância entre as duas médias for superior, a probabilidade de se tratarem de médias de grandezas distintas aumenta consideravelmente.



Consideremos este exemplo:

Em pé (dez valores experimentais):

- Média: 76.7
- Desvio padrão da amostra: 3.4
- Desvio padrão da média: 1.1

Deitado (dez valores experimentais):

- Média: 71.4
- Desvio padrão da amostra: 2.7
- Desvio padrão da média: 0.9

A diferença entre as médias (5.3) corresponde a 4.7 desvios padrões a média em pé (o maior dos dois desvios padrão).

Isso significa que há uma muito forte probabilidade de as frequências serem distintas e a diferença não ser apenas devida a flutuações estatísticas.

Medição de pi

Considerem o seguinte conjunto de dados experimentais (a castanho).

Perímetro			Diâmetro			
valor	inc.abs.	inc.rel.	valor	inc.abs.	inc.rel.	Pi_exp
19.1	0.05	0.26%	6	0.05	0.83%	3.183
37.5	0.05	0.13%	12.1	0.05	0.41%	3.099
160	0.05	0.03%	50.5	0.05	0.10%	3.168
40.2	0.05	0.12%	12.7	0.05	0.39%	3.165
84	0.05	0.06%	25.8	0.05	0.19%	3.256

Se acreditarmos na estimativa da incerteza dos pontos experimentais, então o terceiro ponto que tem uma incerteza perto de dez vezes inferior ao primeiro devia ter um peso muito superior, algures entre 50 e 100 vezes superior. Os outros pontos teriam pesos intermédios.

Mas a maior parte de vocês não seguiu esse caminho. Embora todos (ou quase todos) tenham registado essa estimativa da incerteza, depois "esqueceram-na" e fizeram um tratamento estatístico dos valores de Pi_exp. Neste caso daria:

- Média: 3.174
- Desvio padrão da amostra: 0.056
- Desvio padrão da média: 0.025

Neste caso há dois tipos de teste que podemos fazer aos nossos valores experimentais. Um, mais óbvio, consiste em comparar o valor por nós obtido (Pi_média = 3.17 ± 0.03) com o valor exato π = 3.14159… e comparar a diferença com o desvio padrão da média: são aproximadamente iguais. Isto sugere que é muito provável que a diferença se deva a variações estatísticas. Já se a diferença fosse várias vezes superior ao desvio padrão, isso poderia indicar a presença de erros sistemáticos não detetados e corrigidos.

O segundo teste consistiria em comparar a estimativa da incerteza obtida por meios estatísticos (que se baseou na dispersão dos valores de Pi_exp para estimar essa incerteza) com a incerteza que obteríamos propagando as incertezas dos valores iniciais, perímetro e diâmetro, indicados pelo grupo que realizou a experiência:

Pi_exp	incerteza
3.183	0.0044
3.099	0.0011
3.168	0.0001
3.165	0.0010
3.256	0.0002

Como se pode ver comparando com a incerteza obtida pelo método estatístico, estas são entre 7 e mais de 100 vezes menores. Isto mostra que as incertezas estimadas para os comprimentos do perímetro e do diâmetro foram demasiado otimistas. Por exemplo, se compararem o terceiro valor com pi, a diferença é mais de 400 vezes o desvio padrão!!!

Para mais detalhes e esclarecimento de dúvidas, perguntem nas aulas laboratoriais.