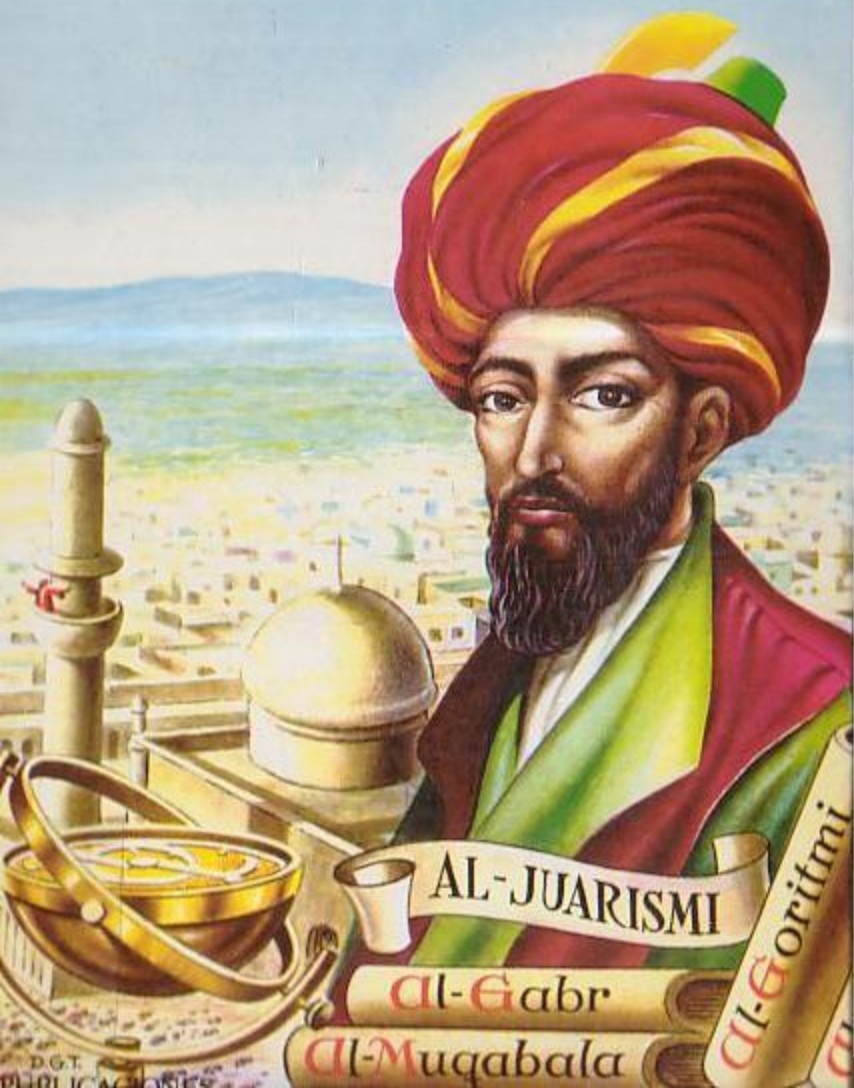


ALGEBRA

A. BALDOR





CONCEPTO DE NÚMERO EN LOS PUEBLOS PRIMITIVOS (25,000-5,000 A. C.) Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo. Haciendo marcas en los troncos de los árboles lograban, estos primeros pueblos, la medición del tiem-

po y el conteo del número de animales que poseían; así surgió la Aritmética. El origen del Álgebra es posterior. Pasaron cientos de siglos para que el hombre alcanzara un concepto abstracto del número, base indispensable para la formación de la ciencia algebraica.

PRELIMINARES

- 1 **ÁLGEBRA** es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.
- 2 **CARACTER DEL ÁLGEBRA Y SU DIFERENCIA CON LA ARITMÉTICA**

El concepto de la cantidad en Álgebra es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética las cantidades se representan por números y éstos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un solo valor: veinte; para expresar un valor mayor o menor que éste habrá que escribir un número distinto de 20.

En Álgebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, a representa el valor que nosotros le asignemos, y por tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

- 3 **NOTACIÓN ALGEBRAICA**

Los símbolos usados en Álgebra para representar las cantidades son los números y las letras.

Los **números** se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas.

Las **letras** se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

Las **cantidades conocidas** se expresan por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, \dots

Las **cantidades desconocidas** se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z .

Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas; por ejemplo: a', a'', a''' , que se leen a prima, a segunda, a tercera, o también por medio de subíndices; por ejemplo: a_1, a_2, a_3 , que se leen a subuno, a subdos, a subtres.

4 FORMULAS

Consecuencia de la generalización que implica la representación de las cantidades por medio de letras son las **fórmulas algebraicas**.

Fórmula algebraica es la representación, por medio de letras, de una regla o de un principio general.

Así, la Geometría enseña que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura; luego, llamando A al área del rectángulo, b a la base y h a la altura, la fórmula

$$A = b \times h$$

representará de un modo general el área de cualquier rectángulo, pues el área de un rectángulo dado se obtendrá con sólo sustituir b y h en la fórmula anterior por sus valores en el caso dado. Así, si la base de un rectángulo es 3 m. y su altura 2 m., su área será:

$$A = b \times h = 3 \text{ m.} \times 2 \text{ m.} = 6 \text{ m.}^2.$$

El área de otro rectángulo cuya base fuera 8 m. y su altura $3\frac{1}{2}$ m. sería:

$$A = b \times h = 8 \text{ m.} \times 3\frac{1}{2} \text{ m.} = 28 \text{ m.}^2. ()$$

5 SIGNOS DEL ALGEBRA

Los signos empleados en Algebra son de tres clases: Signos de Operación, Signos de Relación y Signos de Agrupación.

6 SIGNOS DE OPERACION

En Algebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en Aritmética: Suma, Resta, Multiplicación, División, Elevación a Potencias y Extracción de Raíces, que se indican con los signos siguientes:

El **Signo de la Suma** es $+$, que se lee **más**. Así $a + b$ se lee "a más b".

() En el Cap. XVIII, página 270, se estudia ampliamente todo lo relacionado con las fórmulas algebraicas.

El **Signo de la Resta** es $-$, que se lee **menos**. Así, $a - b$ se lee "a menos b".

El **Signo de la Multiplicación** es \times , que se lee **multiplicado por**. Así, $a \times b$ se lee "a multiplicado por b".

En lugar del signo \times suele emplearse un **punto** entre los factores y también se indica la multiplicación colocando los factores entre paréntesis. Así, $a.b$ y $(a)(b)$ equivalen a $a \times b$.

Entre factores literales o entre un factor numérico y uno literal el signo de multiplicación suele omitirse. Así abc equivale a $a \times b \times c$; $5xy$ equivale a $5 \times x \times y$.

El **Signo de la División** es \div , que se lee **dividido entre**. Así, $a \div b$ se lee "a dividido entre b". También se indica la división separando el dividendo y el divisor por una raya horizontal. Así, $\frac{m}{n}$ equivale a $m \div n$.

El **Signo de la Elevación a Potencia** es el exponente, que es un número pequeño colocado arriba y a la derecha de una cantidad, el cual indica las veces que dicha cantidad, llamada base, se toma como factor. Así,

$$a^3 = aaa; b^4 = bbbb$$

Cuando una letra **no tiene exponente**, su exponente es la **unidad**. Así, a equivale a a^1 ; $m \times n$ equivale a $m^1 n^1$.

El **Signo de Raíz** es $\sqrt{\quad}$, llamado **signo radical**, y bajo este signo se coloca la cantidad a la cual se le extrae la raíz. Así, \sqrt{a} equivale a raíz cuadrada de a , o sea, la cantidad que elevada al cuadrado reproduce la cantidad a ; $\sqrt[3]{b}$ equivale a raíz cúbica de b , o sea la cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad b .

7 COEFICIENTE

En el producto de dos factores, cualquiera de los factores es llamado **coeficiente** del otro factor.

Así, en el producto $3a$ el factor 3 es coeficiente del factor a e indica que el factor a se toma como sumando tres veces, o sea $3a = a + a + a$; en el producto $5b$, el factor 5 es coeficiente de b e indica que $5b = b + b + b + b + b$. Estos son **coeficientes numéricos**.

En el producto ab , el factor a es coeficiente del factor b , e indica que el factor b se toma como sumando a veces, o sea $ab = b + b + b + b \dots a$ veces. Este es un **coeficiente literal**.

En el producto de más de dos factores, uno o varios de ellos son el coeficiente de los restantes. Así, en el producto $abcd$, a es el coeficiente de bcd ; ab es el coeficiente de cd ; abc es el coeficiente de d .

Cuando una cantidad **no tiene coeficiente numérico**, su coeficiente es la **unidad**. Así, b equivale a $1b$; abc equivale a $1abc$.

8 SIGNOS DE RELACION

Se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades. Los principales son:

=, que se lee **igual a**. Así, $a = b$ se lee "a igual a b".

>, que se lee **mayor que**. Así, $x + y > m$ se lee "x + y mayor que m".

<, que se lee **menor que**. Así, $a < b + c$ se lee "a menor que b + c".

9 SIGNOS DE AGRUPACION

Los signos de agrupación son: el **paréntesis ordinario** (), el **paréntesis angular o corchete** [], las **llaves** { } y la **barra o vínculo** —.

Estos signos indican que la operación colocada entre ellos debe efectuarse primero. Así, $(a + b)c$ indica que el resultado de la suma de a y b debe multiplicarse por c; $[a - b]m$ indica que la diferencia entre a y b debe multiplicarse por m; $\{a + b\} \div \{c - d\}$ indica que la suma de a y b debe dividirse entre la diferencia de c y d.

10 MODO DE RESOLVER LOS PROBLEMAS EN ARITMETICA Y EN ALGEBRA

Exponemos a continuación un ejemplo para hacer notar la diferencia entre el método aritmético y el algebraico en la resolución de problemas, fundado este último en la notación algebraica y en la generalización que ésta implica.

Las edades de A y B suman 48 años. Si la edad de B es 5 veces la edad de A, ¿qué edad tiene cada uno?

METODO ARITMETICO

Edad de A más edad de B = 48 años.

Como la edad de B es 5 veces la de A, tendremos:

Edad de A más 5 veces la edad de A = 48 años.

O sea, 6 veces la edad de A = 48 años;

luego,

Edad de A = 8 años. R.

Edad de B = 8 años \times 5 = 40 años. R.

METODO ALGEBRAICO

Como la edad de A es una cantidad desconocida la represento por x.

Sea x = edad de A.

Entonces $5x$ = edad de B.

Como ambas edades suman 48 años, tendremos:

$x + 5x = 48$ años;

o sea, $6x = 48$ años.

Si 6 veces x equivale a 48 años, x valdrá la sexta parte de 48 años,

o sea

$x = 8$ años, edad de A. R.

Entonces

$5x = 8$ años \times 5 = 40 años, edad de B. R.

11 CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

En Algebra, cuando se estudian cantidades que pueden tomarse en dos sentidos opuestos o que son de condición o de modo de ser opuestos, se expresa el sentido, condición o modo de ser (valor relativo) de la cantidad por medio de los signos + y -, anteponiendo el signo + a las cantidades tomadas en un sentido determinado (cantidades positivas) y anteponiendo el signo - a las cantidades tomadas en sentido opuesto al anterior (cantidades negativas).

Así, el haber se designa con el signo + y las deudas con el signo -. Para expresar que una persona tiene \$100 de haber, diremos que tiene + \$100, y para expresar que debe \$100, diremos que tiene - \$100.

Los grados sobre cero del termómetro se designan con el signo + y los grados bajo cero con el signo -. Así, para indicar que el termómetro marca 10° sobre cero escribiremos +10° y para indicar que marca 8° bajo cero escribiremos -8°.

El camino recorrido a la derecha o hacia arriba de un punto se designa con el signo + y el camino recorrido a la izquierda o hacia abajo de un punto se representa con el signo -. Así, si hemos recorrido 200 m. a la derecha de un punto dado, diremos que hemos recorrido +200 m., y si recorremos 300 m. a la izquierda de un punto escribiremos -300 m.

El tiempo transcurrido después de Cristo se considera positivo y el tiempo transcurrido antes de Cristo, negativo. Así, +150 años significa 150 años D. C. y -78 años significa 78 años A. C.

En un poste introducido en el suelo, representamos con el signo + la porción que se halla del suelo hacia arriba y con el signo - la porción que se halla del suelo hacia abajo. Así, para expresar que la longitud del poste que se halla del suelo hacia arriba mide 15 m., escribiremos +15 m., y si la porción introducida en el suelo es de 8 m., escribiremos -8 m.

La latitud norte se designa con el signo + y la latitud sur con el signo -; la longitud este se considera positiva y la longitud oeste, negativa. Por lo tanto, un punto de la Tierra cuya situación geográfica sea: +45° de longitud y -15° de latitud se hallará a 45° al este del primer meridiano y a 15° bajo el Ecuador.

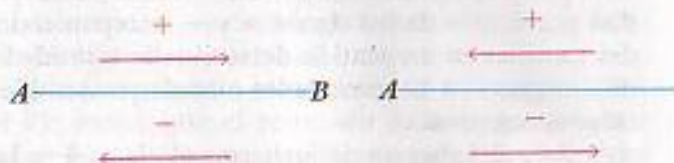
12 ELECCION DEL SENTIDO POSITIVO

La fijación del sentido positivo en cantidades que pueden tomarse en dos sentidos opuestos es arbitraria, depende de nuestra voluntad; es decir,

que podemos tomar como sentido positivo el que queramos; pero una vez fijado el sentido positivo, el sentido opuesto a éste será el negativo.

Así, si tomamos como sentido positivo el camino recorrido a la derecha de un punto, el camino recorrido a la izquierda de ese punto será negativo, pero nada nos impide tomar como positivo el camino recorrido a la izquierda del punto y entonces el camino recorrido a la derecha del punto sería negativo.

Así, si sobre el segmento AB tomamos como positivo el sentido de A hacia B , el sentido de B hacia A sería negativo, pero si fijamos como sentido positivo de B hacia A , el sentido de A hacia B sería negativo.



No obstante, en la práctica se aceptan generalmente los sentidos positivos de que se trató en el número anterior.

13 CERO es la ausencia de cantidad. Así, representar el estado económico de una persona por 0 equivale a decir que no tiene haber ni deudas.

Las cantidades positivas son mayores que 0 y las negativas menores que 0. Así, $+3$ es una cantidad que es tres unidades mayor que 0; $+5$ es una cantidad que es cinco unidades mayor que 0, mientras que -3 es una cantidad que es tres unidades menor que 0 y -5 es una cantidad que es cinco unidades menor que 0.

De dos cantidades positivas, es mayor la de mayor valor absoluto; así, $+5$ es mayor que $+3$, mientras que de dos cantidades negativas es mayor la de menor valor absoluto: -3 es mayor que -5 ; -9 es menor que -4 .

EJERCICIOS SOBRE CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

1) Un hombre cobra \$130. Paga una deuda de \$80 y luego hace compras por valor de \$95. ¿Cuánto tiene?

Teniendo \$130, pagó \$80; luego, se quedó con \$50. Después hace un gasto de \$95 y como sólo tiene \$50 incurre en una deuda de \$45. Por lo tanto, tiene actualmente $-\$45$. R.

EJERCICIO 1

- Pedro debía 60 bolívares y recibió 320. Expresar su estado económico.
- Un hombre que tenía 1170 sucres hizo una compra por valor de 1515. Expresar su estado económico.
- Tenía \$200. Cobré \$56 y pagué deudas por \$189. ¿Cuánto tengo?

- Compro ropas por valor de 665 soles y alimentos por 1178. Si después recibo 2280, ¿cuál es mi estado económico?
- Tenía \$20. Pagué \$15 que debía, después cobré \$40 y luego hice gastos por \$75. ¿Cuánto tengo?
- Enrique hace una compra por \$67; después recibe \$72; luego hace otra compra por \$16 y después recibe \$2. Expresar su estado económico.
- Después de recibir 200 colones hago tres gastos por 78, 81 y 93. Recibo entonces 41 y luego hago un nuevo gasto por 59. ¿Cuánto tengo?
- Pedro tenía tres deudas de \$45, \$66 y \$79 respectivamente. Entonces recibe \$200 y hace un gasto de \$10. ¿Cuánto tiene?

2) A las 6 a. m. el termómetro marca -4° . A las 9 a. m. ha subido 7° y desde esta hora hasta las 5 p. m. ha bajado 11° . Expresar la temperatura a las 5 p. m.

A las 6 a. m. marca -4° . Como a las 9 a. m. ha subido 7° , contamos siete divisiones de la escala desde -4° hacia arriba y tendremos 3° sobre cero ($+3^\circ$); como desde esta hora hasta las 5 p. m. ha bajado 11° , contando 11 divisiones de la escala desde $+3^\circ$ hacia abajo llegaremos a -8° . Luego, a las 5 p. m. la temperatura es de -8° . R.

EJERCICIO 2

- A las 9 a. m. el termómetro marca $+12^\circ$ y de esta hora a las 8 p. m. ha bajado 15° . Expresar la temperatura a las 8 p. m.
- A las 6 a. m. el termómetro marca -3° . A las 10 a. m. la temperatura es 8° más alta y desde esta hora hasta las 9 p. m. ha bajado 6° . Expresar la temperatura a las 9 p. m.
- A las 1 p. m. el termómetro marca $+15^\circ$ y a las 10 p. m. marca -3° . ¿Cuántos grados ha bajado la temperatura?
- A las 3 a. m. el termómetro marca -8° y al mediodía $+5^\circ$. ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?
- A las 8 a. m. el termómetro marca -4° ; a las 9 a. m. ha subido 7° ; a las 4 p. m. ha subido 2° más y a las 11 p. m. ha bajado 11° . Expresar la temperatura a las 11 p. m.
- A las 6 a. m. el termómetro marca -8° . De las 6 a. m. a las 11 a. m. sube a razón de 4° por hora. Expresar la temperatura a las 7 a. m., a las 8 a. m. y a las 11 a. m.
- A las 8 a. m. el termómetro marca -1° . De las 8 a. m. a las 11 a. m. baja a razón de 2° por hora y de 11 a. m. a 2 p. m. sube a razón de 3° por hora. Expresar la temperatura a las 10 a. m., a las 11 a. m., a las 12 a. m. y a las 2 p. m.
- El día 10 de diciembre un barco se halla a 56° al oeste del primer meridiano. Del día 10 al 18 recorre 7° hacia el este. Expresar su longitud este día.
- El día primero de febrero la situación de un barco es: 71° de longitud oeste y 15° de latitud sur. Del día primero al 26 ha recorrido 5° hacia el este y su latitud es entonces de 5° más al sur. Expresar su situación el día 26.

10. El día 5 de mayo la situación de un viajero es 18° de longitud este y 65° de latitud norte. Del día 5 al 31 ha recorrido 3° hacia el este y se ha acercado 4° al Ecuador. Expresar su situación el día 31.
11. Una ciudad fundada el año 75 A.C. fue destruida 135 años después. Expresar la fecha de su destrucción.

3) Un móvil recorre 40 m. en línea recta a la derecha de un punto A y luego retrocede en la misma dirección a razón de 15 m. por segundo. Expresar a qué distancia se halla del punto A al cabo del 1° , 2° , 3° y 4° segundo.

El móvil ha recorrido 40 m. a la derecha del punto A; luego, su posición es + 40 m., tomando como positivo el sentido de izquierda a derecha.

Entonces empieza a moverse de la derecha hacia la izquierda (sentido negativo) a razón de 15 m. por segundo; luego, en el primer segundo se acerca 15 m. al punto A y como estaba a 40 m. de ese punto, se halla a $40 - 15 = 25$ m. a la derecha de A; luego, su posición es + 25 m. R.

En el 2° segundo se acerca otros 15 m. al punto A; luego, se hallará a $25 - 15 = 10$ m. a la derecha de A; su posición ahora es + 10 m. R.

En el 3° segundo recorre otros 15 m. hacia A, y como estaba a 10 m. a la derecha de A, habrá llegado al punto A (con 10 m.) y recorrido 5 m. a la izquierda de A, es decir, $10 - 15 = -5$ m. Su posición ahora es -5 m. R.

En el 4° segundo recorre otros 15 m. más hacia la izquierda y como ya estaba a 5 m. a la izquierda de A, se hallará al cabo del 4° segundo a 20 m. a la izquierda de A, o sea $-5 - 15 = -20$ m.; luego, su posición ahora es -20 m. R.

■ EJERCICIO 3

(SENTIDO POSITIVO: DE IZQUIERDA A DERECHA Y DE ABAJO A ARRIBA).

1. Expresar que un móvil se halla a 32 m. a la derecha del punto A; a 16 m. a la izquierda de A.
2. Expresar que la parte de un poste que sobresale del suelo es 10 m. y tiene enterrados 4 m.
3. Después de caminar 50 m. a la derecha del punto A recorro 85 m. en sentido contrario. ¿A qué distancia me hallo ahora de A?
4. Si corro a la izquierda del punto B a razón de 6 m. por segundo, ¿a qué distancia de B me hallaré al cabo de 11 segs.?
5. Dos corredores parten del punto A en sentidos opuestos. El que corre hacia la izquierda de A va a 8 m. por seg. y el que corre hacia la derecha va a 9 m. por seg. Expresar sus distancias del punto A al cabo de 6 seg.
6. Partiendo de la línea de salida hacia la derecha un corredor da dos vueltas a una pista de 400 m. de longitud. Si yo parto del mismo punto y doy 3 vueltas a la pista en sentido contrario, ¿qué distancia hemos recorrido?
7. Un poste de 40 pies de longitud tenía 15 pies sobre el suelo. Días después se introdujeron 3 pies más. Expresar la parte que sobresale y la enterrada.

8. Un móvil recorre 55 m. a la derecha del punto A y luego en la misma dirección retrocede 52 m. ¿A qué distancia se halla de A?
9. Un móvil recorre 32 m. a la izquierda del punto A y luego retrocede en la misma dirección 15 m. ¿A qué distancia se halla de A?
10. Un móvil recorre 35 m. a la derecha de B y luego retrocede en la misma dirección 47 m. ¿A qué distancia se halla de B?
11. Un móvil recorre 39 m. a la izquierda de M y luego retrocede en la misma dirección 56 m. ¿A qué distancia se halla de M?
12. A partir del punto B una persona recorre 90 m. a la derecha y retrocede, en la misma dirección, primero 58 m. y luego 36 m. ¿A qué distancia se halla de B?
13. Un móvil recorre 72 m. a la derecha de A y entonces empieza a retroceder en la misma dirección, a razón de 30 m. por seg. Expresar su distancia del punto A al cabo del 1° , 2° , 3° y 4° seg.
14. Un auto recorre 120 Km. a la izquierda del punto M y luego retrocede a razón de 60 Km. por hora. ¿A qué distancia se halla del punto M al cabo de la 1° , 2° , 3° y 4° hora?

14 VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

Valor absoluto de una cantidad es el número que representa la cantidad prescindiendo del signo o sentido de la cantidad, y valor relativo es el sentido de la cantidad, representado por el signo.

Así, el valor absoluto de +\$8 es \$8, y el valor relativo haber, expresado por el signo +; el valor absoluto de -\$20 es \$20, y el valor relativo deuda, expresado por el signo -.

Las cantidades $+7^\circ$ y -7° tienen el mismo valor absoluto, pero su valor relativo es opuesto, pues el primero expresa grados sobre cero y el segundo bajo cero; -8° y -11° tienen el mismo valor relativo (grados bajo cero) y distinto valor absoluto.

El valor absoluto de una cantidad algebraica cualquiera se representa colocando el número que corresponda a dicho valor entre dos líneas verticales. Así, el valor absoluto de +8 se representa $|8|$.

15 CANTIDADES ARITMETICAS Y ALGEBRAICAS

De lo expuesto anteriormente se deduce la diferencia entre cantidades aritméticas y algebraicas.

Cantidades aritméticas son las que expresan solamente el valor absoluto de las cantidades representado por los números, pero no nos dicen el sentido o valor relativo de las cantidades.

Así, cuando en Aritmética escribimos que una persona tiene \$5, tenemos solamente la idea del valor absoluto \$5 de esta cantidad, pero con esto no sabemos si la persona tiene \$5 de haber o de deuda. Escribiendo que el termómetro marca 8° , no sabemos si son sobre cero o bajo cero.

Cantidades algebraicas son las que expresan el valor absoluto de las cantidades y además su sentido o valor relativo por medio del signo.

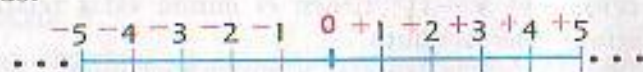
Así, escribiendo que una persona tiene +\$5 expresamos el valor absoluto \$5 y el sentido o valor relativo (haber) expresado por el signo +; escribiendo -\$8 expresamos el valor absoluto \$8 y el sentido o valor relativo (deuda) expresado por el signo -; escribiendo que el termómetro marca +8° tenemos el valor absoluto 8° y el valor relativo (sobre cero) expresado por el signo +, y escribiendo -9° tenemos el valor absoluto 9° y el valor relativo (bajo cero) expresado por el signo -.

Los signos + y - tienen en Algebra dos aplicaciones: una, indicar las operaciones de suma y resta, y otra, indicar el sentido o condición de las cantidades.

Esta doble aplicación se distingue porque cuando los signos + o - tienen la significación de suma o resta, van entre términos o expresiones incluidas en paréntesis, como por ejemplo en $(+8) + (-4)$ y en $(-7) - (+6)$. Cuando van precediendo a un término, ya sea literal o numérico, expresan el sentido positivo o negativo, como por ejemplo en $-a$, $+b$, $+7$, -8 .

16 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SERIE ALGEBRAICA DE LOS NUMEROS

Teniendo en cuenta que el 0 en Algebra es la ausencia de la cantidad, que las cantidades positivas son mayores que 0 y las negativas menores que 0, y que las distancias medidas hacia la derecha o hacia arriba de un punto se consideran positivas y hacia la izquierda o hacia abajo de un punto negativas, la serie algebraica de los números se puede representar de este modo:



NOMENCLATURA ALGEBRAICA

17 EXPRESION ALGEBRAICA es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos

$$a, 5x, \sqrt{4a}, [a+b]c, \frac{(5x-3y)a}{x^2}$$

18 TERMINO es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo + o -. Así, a , $3b$, $2xy$, $\frac{4a}{3x}$ son términos.

Los elementos de un término son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Por el signo, son términos positivos los que van precedidos del signo + y negativos los que van precedidos del signo -. Así, $+a$, $+8x$, $+9ab$ son términos positivos y $-x$, $-5bc$ y $-\frac{3a}{2b}$ son términos negativos.

El signo + suele omitirse delante de los términos positivos. Así, a equivale a $+a$; $3ab$ equivale a $+3ab$.

Por tanto, cuando un término no va precedido de ningún signo es positivo.

El coeficiente, como se dijo antes, es uno cualquiera, generalmente el primero, de los factores del término. Así, en el término $5a$ el coeficiente es 5; en $-3a^2x^3$ el coeficiente es -3.

La parte literal la constituyen las letras que haya en el término. Así, en $5xy$ la parte literal es xy ; en $\frac{3x^3y^4}{2ab}$ la parte literal es $\frac{x^3y^4}{ab}$.

19 EL GRADO DE UN TERMINO puede ser de dos clases: absoluto y con relación a una letra.

Grado absoluto de un término es la suma de los exponentes de sus factores literales. Así, el término $4a$ es de primer grado porque el exponente del factor literal a es 1; el término ab es de segundo grado porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $1+1=2$; el término a^2b es de tercer grado porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $2+1=3$; $5a^4b^3c^2$ es de noveno grado porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $4+3+2=9$.

El grado de un término con relación a una letra es el exponente de dicha letra. Así el término bx^3 es de primer grado con relación a b y de tercer grado con relación a x ; $4x^2y^4$ es de segundo grado con relación a x y de cuarto grado con relación a y .

20 CLASES DE TERMINOS

Término entero es el que no tiene denominador literal como $5a$, $6a^4b^3$, $\frac{2a}{5}$.

Término fraccionario es el que tiene denominador literal como $\frac{3a}{b}$.

Término racional es el que no tiene radical, como los ejemplos anteriores, e irracional el que tiene radical, como \sqrt{ab} , $\frac{3b}{\sqrt[3]{2a}}$.

Términos homogéneos son los que tienen el mismo grado absoluto. Así, $4x^2y$ y $6x^2y^3$ son homogéneos porque ambos son de quinto grado absoluto.

Términos heterogéneos son los de distinto grado absoluto, como $5a$, que es de primer grado, y $3a^2$, que es de segundo grado.

EJERCICIO 4

1. Digase qué clase de términos son los siguientes atendiendo al signo, a si tienen o no denominador y a si tienen o no radical:

$$5a^2, -4a^2b, \frac{2a}{3}, -\frac{5b^2}{6}, \sqrt{a}, -\sqrt[3]{5b^2}, \frac{\sqrt{a}}{6}, -\frac{4a^2b^3}{\sqrt{6a}}$$

2. Digase el grado absoluto de los términos siguientes:

$$5a, -6a^2b, a^2b^2, -5a^2b^4c, 8x^2y^2, 4m^2n^3, -xyz^5$$

3. Digase el grado de los términos siguientes respecto a cada uno de sus factores literales:

$$-a^2b^2, -5x^4y^3, 6a^2bx^3, -4abcy^2, 10m^2n^3b^4c^5$$

4. De los términos siguientes escoger cuatro que sean homogéneos y tres heterogéneos:

$$-4a^2b^2, 6ab^3, -x^5, 6x^4y, -2a^2x^4, -ab^3, 4abcx^2, -2ac$$

5. Escribir tres términos enteros; dos fraccionarios; dos positivos, enteros y racionales; tres negativos, fraccionarios e irracionales.

6. Escribir un término de cada uno de los grados absolutos siguientes: de tercer grado, de quinto grado, de undécimo grado, de décimo quinto grado, de vigésimo grado.

7. Escribir un término de dos factores literales que sea de cuarto grado con relación a la x ; otro de cuatro factores literales que sea de séptimo grado con relación a la y ; otro de cinco factores literales que sea de décimo grado con relación a la b .

CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- 21 **MONOMIO** es una expresión algebraica que consta de un solo término, como

$$3a, -5b, \frac{x^2y}{4a^2}$$

- 22 **POLINOMIO** es una expresión algebraica que consta de más de un término, como $a + b$, $a + x - y$, $x^3 + 2x^2 + x + 7$.

Binomio es un polinomio que consta de dos términos, como:

$$a + b, x - y, \frac{a^2}{3} - \frac{5mx^4}{6b^2}$$

Trinomio es un polinomio que consta de tres términos, como

$$a + b + c, x^2 - 5x + 6, 5x^2 - 6y^3 + \frac{a^2}{3}$$

- 23 **EL GRADO** de un polinomio puede ser absoluto y con relación a una letra.

Grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el último, de primer grado; luego, el grado absoluto del polinomio es el cuarto.

Grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de sexto grado con relación a la a y de cuarto grado con relación a la x .

EJERCICIO 5

1. Digase el grado absoluto de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + x^2 + x$.

c) $a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4$.

b) $5a - 3a^2 + 4a^4 - 6$.

d) $x^5 - 6x^4y^3 - 4a^2b + x^2y^4 - 3y^6$.

2. Digase el grado de los siguientes polinomios con relación a cada una de sus letras:

a) $a^3 + a^2 - ab^3$.

c) $6a^4b^7 - 4a^2x + ab^3 - 5a^3b^8x^6$.

b) $x^4 + 4x^3 - 6x^2y^4 - 4xy^5$.

d) $m^4n^2 - mn^3 + mx^4y^3 - x^8 + y^{15} - m^{11}$.

24 CLASES DE POLINOMIOS

Un polinomio es **entero** cuando ninguno de sus términos tiene denominador literal como $x^2 + 5x - 6$; $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5}$; **fraccionario** cuando alguno

de sus términos tiene letras en el denominador como $\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c} - 8$; **racional** cuando no contiene radicales, como en los ejemplos anteriores; **irrational** cuando contiene radical, como $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{abc}$; **homogéneo** cuando todos sus términos son del mismo grado absoluto, como $4a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + b^3$, y **heterogéneo** cuando sus términos no son del mismo grado, como $x^3 + x^2 + x - 6$.

Polinomio completo con relación a una letra es el que contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ es completo respecto de la x , porque contiene todos los exponentes sucesivos de la x desde el más alto 5, hasta el más bajo 1, o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ es completo respecto de a y b .

Polinomio ordenado con respecto a una letra es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida, llamada **letra ordenatriz**, van aumentando o disminuyendo.

Así, el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ está ordenado en orden descendente con relación a la letra ordenatriz x ; el polinomio $a^5 - 2a^4b + 6a^3b^2 - 5a^2b^3 + 3ab^4 - b^5$ está ordenado en orden descendente respecto de la letra ordenatriz a y en orden ascendente respecto de la letra ordenatriz b .

- 25 **Ordenar un polinomio** es escribir sus términos de modo que los exponentes de una letra escogida como letra ordenatriz queden en orden descendente o ascendente. Así, ordenar el polinomio $-5x^5 + x^6 - 3x + x^4 - x^2 + 6$ en orden descendente con relación a x será escribir $x^6 + x^4 - 5x^5 - x^2 - 3x + 6$.

Ordenar el polinomio $x^4y - 7x^2y^3 - 5x^6 + 6xy^4 + y^5 - x^3y^2$ en orden ascendente con relación a x será escribirlo:

$$y^5 + 6xy^4 - 7x^2y^3 - x^3y^2 + x^4y - 5x^6$$

26 Término independiente de un polinomio con relación a una letra es el término que no tiene dicha letra.

Así, en el polinomio $a^3 - a^2 + 3a - 5$ el término independiente con relación a la a es 5 porque no tiene a ; en $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 9x + 20$ el término independiente es 20; en $a^3 - a^2b + 3ab^2 + b^3$ el término independiente con relación a la a es b^3 , y el término independiente con relación a la b es a^3 . El término independiente con relación a una letra puede considerarse que tiene esa letra con exponente cero, porque como se verá más adelante, toda cantidad elevada a cero equivale a 1.

Así, en el primer ejemplo anterior, -5 equivale a $-5a^0$, y en el último ejemplo, b^3 equivale a a^0b^3 .

EJERCICIO 6

1. Atendiendo a si tienen o no denominador literal y a si tienen o no radical, dígame de qué clase son los polinomios siguientes:

a) $a^3 + 2a^2 - 3a$, c) $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2c + \sqrt{d}$.

b) $\frac{a^4}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a$, d) $4a + \frac{\sqrt{a}}{2} - 6b + 4$.

2. Escribir un polinomio de tercer grado absoluto; de quinto grado absoluto; de octavo grado absoluto; de décimoquinto grado absoluto.

3. Escribir un trinomio de segundo grado respecto de la x ; un polinomio de quinto grado respecto de la a ; un polinomio de noveno grado respecto de la m .

4. De los siguientes polinomios:

a) $3a^2b + 4a^3 - 5b^3$, d) $4a - 5b + 6c^2 - 8d^3 - 6$,
b) $a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3$, e) $y^5 - ay^4 + a^2y^3 - a^3y^2 - a^4y + y^5$,
c) $x^2 - bx^4 + abx^3 + ab^2x^2$, f) $-6a^2b^4 - 5a^4b + 8a^2b^3 - b^7$.

escoger dos que sean homogéneos y dos heterogéneos.

5. De los siguientes polinomios:

a) $a^4 - a^2 + a - a^3$, d) $m^3 - m^4 + m^3 - m + 5$,
b) $5x^4 - 8x^2 + x - 6$, e) $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y$,
c) $x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - y^4$.

digase cuáles son completos y respecto de cuáles letras.

6. Escribir tres polinomios homogéneos de tercer grado absoluto; cuatro de quinto grado absoluto; dos polinomios completos.

7. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden descendente:

a) $m^2 + 6m - m^3 + m^4$,
b) $6ax^2 - 5a^3 + 2a^2x + x^3$,
c) $-a^2b^3 + a^4b + a^3b^2 - ab^4$,
d) $a^4 - 5a + 6a^3 - 9a^2 + 6$,
e) $-x^5y^2 + x^{10} + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$,
f) $-3m^{15}n^2 + 4m^{12}n^3 - 8m^6n^5 - 10m^3n^6 + n^7 - 7m^9n^4 + m^{18}n$.

8. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden ascendente:

a) $a^2 - 5a^3 + 6a$, d) $a^2b^4 + a^4b^3 - a^3b^2 + a^5b + b^5$,
b) $x - 5x^3 + 6x^2 + 9x^4$, e) $y^{12} - x^5y^6 + x^{12}y^4 - x^3y^{10}$,
c) $2y^4 + 4y^5 - 6y + 2y^2 + 5y^3$.

27 TERMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes.

Ejemplos

$$2a \text{ y } a; -2b \text{ y } 8b; -5a^2b^2 \text{ y } -8a^2b^2; x^{m+1} \text{ y } 3x^{m+1}.$$

Los términos $4ab$ y $-6a^2b$ no son semejantes, porque aunque tienen iguales letras, éstas no tienen los mismos exponentes, ya que la a del primero tiene de exponente 1 y la a del segundo tiene de exponente 2.

Los términos $-bx^4$ y ab^4 no son semejantes, porque aunque tienen los mismos exponentes, las letras no son iguales.

28 REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

En la reducción de términos semejantes pueden ocurrir los tres casos siguientes:

1) Reducción de dos o más términos semejantes del mismo signo.

REGLA

Se suman los coeficientes, poniendo delante de esta suma el mismo signo que tienen todos y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

(1) $3a + 2a = 5a$. R.

(2) $-5b - 7b = -12b$. R.

(3) $-a^2 - 9a^2 = -10a^2$. R.

(4) $3a^{x-2} + 5a^{x-2} = 8a^{x-2}$. R.

(5) $-4a^{m+1} - 7a^{m+1} = -11a^{m+1}$. R.

(6) $\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ab = \frac{7}{6}ab$. R.

(7) $-\frac{1}{3}xy - \frac{2}{5}xy = -\frac{11}{15}xy$. R.

(8) $5x + x + 2x = 8x$. R.

(9) $-m - 3m - 6m - 5m = -15m$.

(10) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}x^2y = \frac{7}{12}x^2y$. R.

EJERCICIO 7

Reducir:

1. $x + 2x$.

2. $8a + 9a$.

3. $11b + 9b$.

4. $-b - 5b$.

5. $-8m - m$.

6. $-9m - 7m$.

7. $4a^x + 5a^x$.

8. $6a^{x+1} + 8a^{x+1}$.

9. $-m^{x+1} - 5m^{x+1}$.

10. $-3a^{x-2} - a^{x-2}$.

11. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$.

12. $\frac{3}{5}ab + \frac{1}{10}ab$.

13. $\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}xy$.

14. $-\frac{1}{5}xy - \frac{4}{5}xy$.

15. $-\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{6}a^2b$.

16. $-a - \frac{7}{8}a$.

17. $8a+9a+6a$.
 18. $15x+20x+x$.
 19. $-7m-8m-9m$.
 20. $-a^2b-a^2b-3a^2b$.
 21. $a^3+3a^3+8a^3$.
 22. $-5a^{x+1}-3a^{x+1}-5a^{x+1}$.
 23. $a+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a$.
 24. $-x-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x$.
 25. $\frac{1}{5}ax+\frac{3}{10}ax+ax$.
 26. $-\frac{3}{4}a^2x-\frac{5}{6}a^2x-a^2x$.
 27. $11a+8a+9a+11a$.
 28. $m^{x+1}+3m^{x+1}+4m^{x+1}+6m^{x+1}$.
 29. $-x^2y-8x^2y-9x^2y-20x^2y$.
 30. $-3a^m-5a^m-6a^m-9a^m$.
 31. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+a$.
 32. $\frac{2}{5}ax+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{10}ax+\frac{1}{30}ax$.
 33. $0.5m+0.6m+0.7m+0.8m$.
 34. $-\frac{1}{7}ab-\frac{1}{14}ab-\frac{1}{28}ab-ab$.
 35. $-\frac{2}{3}x^2y-\frac{1}{6}x^2y-\frac{1}{9}x^2y-\frac{1}{12}x^2y$.
 36. $ab^2+ab^2+7ab^2+9ab^2+21ab^2$.
 37. $-m-m-8m-7m-3m$.
 38. $-x^a+1-8x^a+1-4x^a+1-5x^a+1-x^a+1$.
 39. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a+\frac{1}{6}a$.
 40. $-\frac{1}{3}ab-\frac{1}{6}ab-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{12}ab-\frac{1}{6}ab$.

2) Reducción de dos términos semejantes de distinto signo.

REGLA

Se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

- (1) $2a-3a=-a$. R.
 (2) $18x-11x=7x$. R.
 (3) $-20ab+11ab=-9ab$. R.
 (4) $-8a^x+13a^x=5a^x$. R.
 (5) $25a^{x+1}-54a^{x+1}=-29a^{x+1}$. R.
 (6) $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}a=-\frac{1}{6}a$. R.
 (7) $-\frac{8}{7}a^2b+a^2b=-\frac{1}{7}a^2b$. R.
 (8) $-\frac{5}{6}a^{x+1}+\frac{8}{4}a^{x+1}=-\frac{1}{12}a^{x+1}$. R.

De la regla anterior se deduce que dos términos semejantes de iguales coeficientes y de signo contrario se anulan.

Así:

$$-8ab+8ab=0. \text{ R.}$$

$$\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{3}x^2y=0. \text{ R.}$$

EJERCICIO 8

Reducir:

1. $8a-6a$.
 2. $6a-8a$.
 3. $9ab-15ab$.
 4. $15ab-9ab$.
 5. $2a-2a$.
 6. $-7b+7b$.
 7. $-14xy+32xy$.
 8. $-25x^2y+32x^2y$.
 9. $40x^3y-51x^3y$.
 10. $-m^2n+6m^2n$.
 11. $-15xy+40xy$.
 12. $55a^3b^2-81a^3b^2$.

13. $-x^2y+x^2y$.
 14. $-9ab^2+9ab^2$.
 15. $7x^2y-7x^2y$.
 16. $-101mn+118mn$.
 17. $502ab-405ab$.
 18. $-1024x+1018x$.
 19. $-15ab+15ab$.
 20. $\frac{1}{2}a-\frac{8}{4}a$.
 21. $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}a$.
 22. $\frac{5}{6}a^2b-\frac{5}{12}a^2b$.
 23. $-\frac{4}{7}x^2y+\frac{9}{14}x^2y$.
 24. $\frac{3}{8}am-\frac{5}{4}am$.
 25. $-am+\frac{8}{5}am$.
 26. $\frac{5}{6}mn-\frac{7}{8}mn$.
 27. $-a^2b+\frac{3}{12}a^2b$.
 28. $3.4a^4b^3-5.6a^4b^3$.
 29. $-1.2yz+3.4yz$.
 30. $4a^x-2a^x$.
 31. $-8a^{x+1}+8a^{x+1}$.
 32. $25m^{x-1}-32m^{x-1}$.
 33. $-x^{a+1}+x^{a+1}$.
 34. $-\frac{1}{4}a^{m-2}+\frac{1}{2}a^{m-2}$.
 35. $\frac{5}{6}a^{m+1}-\frac{7}{12}a^{m+1}$.
 36. $4a^2-\frac{1}{3}a^2$.
 37. $-5mn+\frac{3}{4}mn$.
 38. $8a^x+2b^{x+3}-25a^{x+2}b^{x+3}$.
 39. $-\frac{7}{8}a^mb^n+a^mb^n$.
 40. $0.85mxy-\frac{1}{2}mxy$.

3) Reducción de más de dos términos semejantes de signos distintos.

REGLA

Se reducen a un solo término todos los positivos, se reducen a un solo término todos los negativos y a los dos resultados obtenidos se aplica la regla del caso anterior.

Ejemplos

- (1) Reducir $5a-8a+a-6a+21a$.

Reduciendo los positivos: $5a+a+21a=27a$.

Reduciendo los negativos: $-8a-6a=-14a$.

Aplicando a estos resultados obtenidos, $27a$ y $-14a$, la regla del caso anterior, se tiene: $27a-14a=13a$. R.

Esta reducción también suele hacerse término a término, de esta manera:

$5a-8a=-3a$; $-3a+a=-2a$; $-2a-6a=-8a$; $-8a+21a=13a$. R.

- (2) Reducir $-\frac{2}{5}bx^2+\frac{1}{5}bx^2+\frac{3}{4}bx^2-4bx^2+bx^2$.

Reduciendo los positivos: $\frac{1}{5}bx^2+\frac{3}{4}bx^2+bx^2=\frac{39}{20}bx^2$.

Reduciendo los negativos: $-\frac{2}{5}bx^2-4bx^2=-\frac{22}{5}bx^2$.

Tendremos: $\frac{39}{20}bx^2-\frac{22}{5}bx^2=-\frac{40}{20}bx^2$. R.

EJERCICIO 9

Reducir:

1. $9a-3a+5a$.
 2. $-8x+9x-x$.
 3. $12mn-23mn-5mn$.
 4. $-x+19x-18x$.
 5. $19m-10m+6m$.
 6. $-11ab-15ab+26ab$.
 7. $-5a^3+9a^3-35a^3$.
 8. $-24a^{x+2}-15a^{x+2}+39a^{x+2}$.
 9. $\frac{2}{3}y+\frac{1}{5}y-y$.
 10. $-\frac{3}{5}m+\frac{1}{4}m$.

11. $\frac{8}{9}a^2b + \frac{1}{4}a^2b - a^2b$.
 12. $-a + 8a + 9a - 15a$.
 13. $7ab - 11ab + 20ab - 31ab$.
 14. $25x^2 - 50x^2 + 11x^2 + 14x^2$.
 15. $-xy - 8xy - 19xy + 40xy$.
 16. $7ab + 21ab - ab - 80ab$.
 17. $-25xy^2 + 11xy^2 + 60xy^2 - 82xy^2$.
 18. $-72ax + 87ax - 101ax + 243ax$.
 19. $-82bx - 71bx - 53bx + 206bx$.
 20. $105a^3 - 464a^3 + 58a^3 + 301a^3$.
 21. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x$.
 22. $\frac{1}{3}y - \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}y - \frac{1}{12}y$.
 23. $\frac{3}{5}a^2b - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{3}a^2b - a^2b$.
 24. $-\frac{5}{9}ab^2 - \frac{1}{6}ab^2 + ab^2 - \frac{8}{9}ab^2$.
 25. $-a + 8a - 11a + 15a - 75a$.
 26. $-7c + 21c + 14c - 30c + 82c$.
 27. $-mn + 14mn - 31mn - mn + 20mn$.
 28. $a^2y - 7a^2y - 93a^2y + 51a^2y + 48a^2y$.
 29. $-a + a - a + a - 3a + 6a$.
 30. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}x - x$.
 31. $-2x + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x + x - \frac{5}{6}x$.
 32. $7a^2 - 30a^2 - 41a^2 - 9a^2 + 73a^2$.
 33. $-a^{x+1} + 7a^{x+1} - 11a^{x+1} - 20a^{x+1} + 26a^{x+1}$.
 34. $a + 6a - 20a + 150a - 80a + 31a$.
 35. $-9b - 11b - 17b - 81b - b + 110b$.
 36. $-a^2b + 15a^2b + a^2b - 85a^2b - 131a^2b + 39a^2b$.
 37. $84m^2x - 501m^2x - 604m^2x - 715m^2x + 231m^2x + 165m^2x$.
 38. $\frac{5}{9}a^3b^2 + \frac{2}{3}a^3b^2 - \frac{1}{4}a^3b^2 - \frac{5}{9}a^3b^2 + 4a^3b^2$.
 39. $40a - 81a + 130a + 41a - 83a - 91a + 16a$.
 40. $-21ab + 52ab - 60ab + 84ab - 31ab - ab - 23ab$.

29 REDUCCION DE UN POLINOMIO QUE CONTENGA TERMINOS SEMEJANTES DE DIVERSAS CLASES

Ejemplos

- (1) Reducir el polinomio $5a - 6b + 8c + 9a - 20c - b + 6b - c$.

Se reducen por separado los de cada clase:

$$5a + 9a = 14a.$$

$$-6b - b + 6b = -b.$$

$$8c - 20c - c = -13c.$$

Tendremos: $14a - b - 13c$. R.

- (2) Reducir el polinomio:

$$8a^3b^2 + 4a^4b^3 + 6a^5b^2 - a^3b^2 - 9a^4b^3 - 15 - 5ab^5 + 8 - 6ab^5.$$

Se reducen por separado los de cada clase:

$$4a^4b^3 - 9a^4b^3 = -5a^4b^3.$$

$$8a^3b^2 + 6a^3b^2 - a^3b^2 = 13a^3b^2.$$

$$-5ab^5 - 6ab^5 = -11ab^5.$$

$$-15 + 8 = -7.$$

Tendremos: $-5a^4b^3 + 13a^3b^2 - 11ab^5 - 7$. R.

- (3) Reducir el polinomio:

$$\frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3y + 3x^4 - y^4 + \frac{6}{9}y^4 - 0.3x^4 - \frac{3}{5}x^3y - 6 + x^3y - 14 + 2\frac{1}{8}y^4.$$

Tendremos: $\frac{2}{5}x^4 + 3x^4 - 0.3x^4 = 3\frac{1}{10}x^4.$

$$x^3y - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{5}x^3y = -\frac{1}{10}x^3y.$$

$$2\frac{1}{8}y^4 + \frac{6}{9}y^4 - y^4 = 2\frac{1}{8}y^4.$$

$$-6 - 14 = -20.$$

$$3\frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{10}x^3y + 2\frac{1}{8}y^4 - 20. \text{ R.}$$

EJERCICIO 10

Reducir los polinomios siguientes:

- $7a - 9b + 6a - 4b$.
- $a + b - c - b - c + 2c - a$.
- $5x - 11y - 9 + 20x - 1 - y$.
- $-6m + 8n + 5 - m - n - 6m - 11$.
- $-a + b + 2b - 2c + 3a + 2c - 3b$.
- $-81x + 19y - 30z + 6y + 80x + x - 25y$.
- $15a^2 - 6ab - 8a^2 + 20 - 5ab - 31 + a^2 - ab$.
- $-3a + 4b - 6a + 81b - 114b + 81a - a - b$.
- $-71a^3b - 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 - 45a^3b + 18a^3b$.
- $-a + b - c + 8 + 2a + 2b - 19 - 2c - 3a - 3 - 3b + 3c$.
- $m^2 + 71mn - 14m^2 - 65mn + m^3 - m^2 - 115m^2 + 6m^3$.
- $x^4y - x^3y^2 + x^2y - 8x^4y - x^2y - 10 + x^2y^2 - 7x^3y^2 - 9 + 21x^4y - y^3 + 50$.
- $5a^{x+1} - 3b^{x+2} - 8c^{x+3} - 5a^{x+1} - 50 + 4b^{x+2} - 65 - b^{x+2} + 90 + c^{x+3} + 7c^{x+3}$.
- $a^{m+2} - x^{n+5} - 5 + 8 - 3a^{m+2} + 5x^{n+5} - 6 + a^{m+2} - 5x^{m+2}$.
- $0.3a + 0.4b + 0.5c - 0.6a - 0.7b - 0.9c + 3a - 3b - 3c$.
- $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + 2a - 3b - \frac{8}{4}a - \frac{1}{6}b + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$.
- $\frac{3}{5}m^2 - 2mn + \frac{1}{10}m^2 - \frac{1}{3}mn + 2mn - 2m^2$.
- $-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{5}{6}b^2 + 2\frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{1}{6}b^2 - \frac{1}{5}b^2 - 2ab$.
- $0.4x^2y + 31 + \frac{3}{8}xy^2 - 0.6y^3 - \frac{2}{5}x^2y - 0.2xy^2 + \frac{1}{4}y^3 - 6$.
- $\frac{3}{25}a^{m-1} - \frac{7}{50}b^{n-2} + \frac{3}{5}a^{m-1} - \frac{1}{25}b^{n-2} - 0.2a^{m-1} + \frac{1}{5}b^{n-2}$.

VALOR NUMERICO

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

30 VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES SIMPLES

Ejemplos

- (1) Hallar el valor numérico de $5ab$ para $a=1$, $b=2$.
Sustituimos la a por su valor 1, y la b por 2, y tendremos:

$$5ab = 5 \times 1 \times 2 = 10. \text{ R.}$$

- (2) Valor numérico de $a^2b^3c^4$ para $a=2$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$.

$$a^2b^3c^4 = 2^2 \times 3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \times 27 \times \frac{1}{16} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}. \text{ R.}$$

- (3) Valor numérico de $3ac\sqrt{2ab}$ para $a=2$, $b=9$, $c=\frac{1}{3}$.

$$3ac\sqrt{2ab} = 3 \times 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{2 \times 2 \times 9} = 2 \times \sqrt{36} = 2 \times 6 = 12. \text{ R.}$$

- (4) Valor numérico de $\frac{4a^2b^3}{5cd}$ para $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=2$, $d=3$.

$$\frac{4a^2b^3}{5cd} = \frac{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3}{5 \times 2 \times 3} = \frac{4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{27}}{30} = \frac{1/27}{30} = \frac{1}{810}. \text{ R.}$$

EJERCICIO 11

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=1, \quad b=2, \quad c=3, \quad m=\frac{1}{2}, \quad n=\frac{1}{3}, \quad p=\frac{1}{4}.$$

- | | | | |
|----------------------------|---------------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $3ab.$ | 7. $m^2n^3p^4.$ | 13. $\frac{5b^2m^2}{np}.$ | 16. $\frac{24mn}{2\sqrt{n^2p^2}}.$ |
| 2. $5a^2b^3c.$ | 8. $\frac{5}{9}a^{b-1}m^{c-2}.$ | 14. $\frac{3b^3}{\frac{2}{3}c^2}.$ | 17. $\frac{3\sqrt[3]{64b^3c^2}}{2m}.$ |
| 3. $b^2mn.$ | 9. $\sqrt{2bc^2}.$ | 15. $\frac{2m}{\sqrt{n^2}}.$ | 18. $\frac{3\sqrt{apb^2}}{\frac{2}{3}\sqrt[3]{125bm}}.$ |
| 4. $24m^2n^3p.$ | 10. $4m\sqrt[4]{12bc^2}.$ | | |
| 5. $\frac{2}{3}a^4b^2m^3.$ | 11. $mn\sqrt[4]{8a^4b^3}.$ | | |
| 6. $\frac{1}{12}c^3p^2m.$ | 12. $\frac{4a}{3bc}.$ | | |

31 VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES COMPUESTAS

Ejemplos

- (1) Hallar el valor numérico de $a^2 - 5ab + 3b^3$ para $a=3$, $b=4$.
 $a^2 - 5ab + 3b^3 = 3^2 - 5 \times 3 \times 4 + 3 \times 4^3 = 9 - 60 + 192 = 141. \text{ R.}$

- (2) Valor numérico de $\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax}$ para $a=2$, $b=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{6}$.

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax} = \frac{3 \times 2^2}{4} - \frac{5 \times 2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} + \frac{\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{6}} = 3 - \frac{10}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 - 30 + 3 = -24. \text{ R.}$$

EJERCICIO 12

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=3, \quad b=4, \quad c=\frac{1}{2}, \quad d=\frac{1}{2}, \quad m=6, \quad n=\frac{1}{4}.$$

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $a^2 - 2ab + b^2.$ | 7. $\frac{ab}{n} + \frac{ac}{d} - \frac{bd}{m}.$ | 13. $\frac{a+b}{c} - \frac{b+m}{d}.$ |
| 2. $c^2 + 2cd + d^2.$ | 8. $\sqrt{b} + \sqrt{n} + \sqrt{6m}.$ | 14. $\frac{b-a}{n} + \frac{m-b}{d} + 5a.$ |
| 3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}.$ | 9. $c\sqrt{3a} - d\sqrt{16b^2} + n\sqrt{8d}.$ | 15. $\frac{12c-a}{2b} - \frac{16n-a}{m} + \frac{1}{d}.$ |
| 4. $\frac{c}{d} - \frac{m}{n} + 2.$ | 10. $\frac{m^6}{d^6}.$ | 16. $\sqrt{4b} + \frac{\sqrt{3a}}{3} - \frac{\sqrt{6m}}{6}.$ |
| 5. $\frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} + \frac{m^2}{6}.$ | 11. $\frac{3c^2}{4} + \frac{4n^2}{m}.$ | 17. $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{2d}}{2} - \frac{\sqrt{3c} + \sqrt{8d}}{4}.$ |
| 6. $\frac{8}{5}c - \frac{1}{2}b + 2d.$ | 12. $\frac{4d^2}{2} + \frac{16n^2}{2} - 1.$ | 18. $\frac{2\sqrt{a^2b^2}}{3} + \frac{3\sqrt{2+d^2}}{4} - a.$ |

- (3) Valor numérico de $2(2a-b)(x^2+y) - (a^2+b)(b-a)$ para

$$a=2, \quad b=3, \quad x=4, \quad y=\frac{1}{2}.$$

Las operaciones indicadas dentro de los paréntesis deben efectuarse antes que ninguna otra, así:

$$2(2a-b) = 2 \times (2 \times 2 - 3) = 2 \times (4 - 3) = 2 \times 1 = 2.$$

$$x^2 + y = 4^2 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}.$$

$$a^2 + b = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

$$b - a = 3 - 2 = 1.$$

Tendremos:

$$2(2a-b)(x^2+y) - (a^2+b)(b-a) = 2 \times 16\frac{1}{2} - 7 \times 1 = 2 \times \frac{33}{2} - 7 = 33 - 7 = 26.$$

EJERCICIO 13

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=1, \quad b=2, \quad c=3, \quad d=4, \quad m=\frac{1}{2}, \quad n=\frac{2}{3}, \quad p=\frac{1}{4}, \quad x=0.$$

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|--|
| 1. $(a+b)c-d.$ | 5. $(4m+8p)(a^2+b^2)(6n-d).$ | 9. $\left(\frac{8m}{9n} + \frac{16p}{b}\right)a.$ |
| 2. $(a+b)(b-a).$ | 6. $(c-b)(d-c)(b-a)(m-p).$ | 10. $\frac{x+m(a^3+d^3-c^3)}{4(m+p)} + \frac{a^2+b^2}{c^2}.$ |
| 3. $(b-m)(c-n)+4a^2.$ | 7. $b^2(c+d)-a^2(m+n)+2x.$ | 11. $\frac{4(m+p)}{a} + \frac{a^2+b^2}{c^2}.$ |
| 4. $(2m+3n)(4p+b^2).$ | 8. $2mx+6(b^2+c^2)-4d^2.$ | |

$$\begin{aligned}
 & (2m+3n+4p)(8p+6n-4m)(9n+20p). \\
 & c^2(m+n)-d^2(m+p)+b^2(n+p). \\
 & \left(\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{a} + \frac{2}{\sqrt{d}}\right)m. \\
 & (4p+2b)(18n-24p)+2(8m+2)(40p+a). \\
 & \frac{a+\frac{d}{b}}{d-b} \times \frac{5+\frac{2}{m^2}}{p^2}. \\
 & (a+b)\sqrt{c^2+8b}-m\sqrt{n}. \\
 & \left(\frac{\sqrt{a+c}}{2} + \frac{\sqrt{6n}}{b}\right) + (c+d)\sqrt{p}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. & 3(c-b)\sqrt{32m}-2(d-a)\sqrt{16p}-\frac{2}{n}. \\
 20. & \frac{\sqrt{6abc}}{2\sqrt{8b}} + \frac{\sqrt{3mn}}{2(b-a)} - \frac{cdnp}{abc}. \\
 21. & \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + 3(a+b)(2a+3b). \\
 22. & b^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^2. \\
 23. & (2m+3n)(4p+2c)-4m^2n^2. \\
 24. & \frac{b^2-\frac{c}{3}}{2ab-m} - \frac{n}{b-m}.
 \end{aligned}$$

32 EJERCICIOS SOBRE NOTACION ALGEBRAICA

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, pueden hacerse las mismas operaciones que con los números aritméticos. Como la representación de cantidades por medio de símbolos o letras suele ofrecer dificultades a los alumnos, ofrecemos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplos

- (1) Escribese la suma del cuadrado de a con el cubo de b .
 $a^2 + b^3$. R.
- (2) Un hombre tenía \$ a ; después recibió \$ B y después pagó una cuenta de \$ c . ¿Cuánto le queda?
 Teniendo \$ a recibió \$ B luego tenía \$ $(a+B)$. Si entonces gasta \$ c le quedan \$ $(a+B-c)$. R.
- (3) Compré 3 libros a \$ a cada uno; 6 sombreros a \$ b cada uno y m trajes a \$ x cada uno. ¿Cuánto he gastado?
 3 libros a \$ a importan \$ $3a$.
 6 sombreros a \$ b importan \$ $6b$.
 m trajes a \$ x importan \$ mx .
 Luego el gasto total ha sido de \$ $(3a+6b+mx)$. R.
- (4) Compró x libros iguales por \$ m . ¿Cuánto me ha costado cada uno?
 Cada libro ha costado \$ $\frac{m}{x}$. R.
- (5) Tenía \$ 9 y gasté \$ x . ¿Cuánto me queda?
 Me quedan \$ $(9-x)$. R.

EJERCICIO 14

1. Escribese la suma de a , b y m .
2. Escribese la suma del cuadrado de m , el cubo de b y la cuarta potencia de x .

3. Siendo a un número entero, escribanse los dos números enteros consecutivos posteriores a a .
4. Siendo x un número entero, escribanse los dos números consecutivos anteriores a x .
5. Siendo y un número entero par, escribanse los tres números pares consecutivos posteriores a y .
6. Pedro tenía \$ a , cobró \$ x y le regalaron \$ m . ¿Cuánto tiene Pedro?
7. Escribese la diferencia entre m y n .
8. Debía x bolívares y pagué 6. ¿Cuánto debo ahora?
9. De una jornada de x Km. ya se han recorrido m Km. ¿Cuánto falta por andar?
10. Recibo \$ x y después \$ a . Si gasto \$ m , ¿cuánto me queda?
11. Tengo que recorrer m Km. El lunes ando a Km., el martes b Km. y el miércoles c Km. ¿Cuánto me falta por andar?
12. Al vender una casa en \$ n gano \$ 300 . ¿Cuánto me costó la casa?
13. Si han transcurrido x días de un año, ¿cuántos días faltan por transcurrir?
14. Si un sombrero cuesta \$ a , ¿cuánto importarán 8 sombreros; 15 sombreros; m sombreros?
15. Escribese la suma del duplo de a con el triplo de b y la mitad de c .
16. Expresar la superficie de una sala rectangular que mide a m. de largo y b m. de ancho.
17. Una extensión rectangular de 23 m. de largo mide n m. de ancho. Expresar su superficie.
18. ¿Cuál será la superficie de un cuadrado de x m. de lado?
19. Si un sombrero cuesta \$ a y un traje \$ b , ¿cuánto importarán 3 sombreros y 6 trajes? ¿ x sombreros y m trajes?
20. Escribese el producto de $a+b$ por $x+y$.
21. Vendo $(x+6)$ trajes a \$ 8 cada uno. ¿Cuánto importa la venta?
22. Compró $(a-8)$ caballos a $(x+4)$ bolívares cada uno. ¿Cuánto importa la compra?
23. Si x lápices cuestan 75 sucres; ¿cuánto cuesta un lápiz?
24. Si por \$ a compro m kilos de azúcar, ¿cuánto importa un kilo?
25. Se compran $(n-1)$ caballos por 3000 colones. ¿Cuánto importa cada caballo?
26. Compré a sombreros por x soles. ¿A cómo habría salido cada sombrero si hubiera comprado 3 menos por el mismo precio?
27. La superficie de un campo rectangular es m m.² y el largo mide 14 m. Expresar el ancho.
28. Si un tren ha recorrido $x+1$ Km. en a horas, ¿cuál es su velocidad por hora?
29. Tenía \$ a y cobré \$ b . Si el dinero que tengo lo empleo todo en comprar $(m-2)$ libros, ¿a cómo sale cada libro?
30. En el piso bajo de un hotel hay x habitaciones. En el segundo piso hay doble número de habitaciones que en el primero; en el tercero la mitad de las que hay en el primero. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?
31. Pedro tiene a sucres; Juan tiene la tercera parte de lo de Pedro; Enrique la cuarta parte del duplo de lo de Pedro. La suma de lo que tienen los tres es menor que 1000 sucres. ¿Cuánto falta a esta suma para ser igual a 1000 sucres?

NOTAS SOBRE EL CONCEPTO DE NUMERO

El concepto de número natural (véase Aritmética Teórico-Práctica, 33), que satisface las exigencias de la Aritmética elemental no responde a la generalización y abstracción características de la operatoria algebraica.

En Álgebra se desarrolla un cálculo de validez general aplicable a cualquier tipo especial de número. Conviene pues, considerar cómo se ha ampliado el campo de los números por la introducción de nuevos entes, que satisfacen las leyes que regulan las operaciones fundamentales, ya que, como veremos más adelante, el número natural (1) no nos sirve para efectuar la resta y la división en todos los casos. Baste por el momento, dado el nivel matemático que alcanzaremos a lo largo de este texto, explicar cómo se ha llegado al concepto de número real.

Para hacer más comprensible la ampliación del campo de los números, adoptaremos un doble criterio. Por un lado, un criterio histórico que nos haga conocer la gradual aparición de las distintas clases de números; por otro, un criterio intuitivo que nos ponga de manifiesto cómo ciertas necesidades materiales han obligado a los matemáticos a introducir nuevos entes numéricos. Este doble criterio, justificable por la índole didáctica de este libro, permitirá al principiante alcanzar una comprensión clara del concepto formal (abstracto) de los números reales.

EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO FRACCIONARIO

Mucho antes de que los griegos (Eudoxio, Euclides, Apolonio, etc.) realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios (según muestran las tablillas cuneiformes que datan de 2000-1800 A.C.) y los egipcios (como se ve en el papiro de Rhind) conocían las fracciones.

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen, el peso, etc., llevó al hombre a introducir los números fraccionarios.

Cuando tomamos una unidad cualquiera, por ejemplo, la vara, para medir una magnitud continua (magnitud escalar o lineal), puede ocurrir una de estas dos cosas: que la unidad esté contenida un número entero de veces, o que no esté contenida un número entero de veces. (2) En el primer caso, representamos el resultado de la medición con un número entero. En el segundo caso, tendremos que fraccionar la unidad elegida en dos, en tres, o en cuatro partes iguales; de este modo, hallaremos una fracción de la unidad que esté contenida en la magnitud que tratamos de medir. El resultado de esta última medición lo expresamos con un par de números enteros, distintos de cero, llamados respectivamente numerador y denominador. El denominador nos dará el número de partes en que hemos dividido la unidad, y el numerador, el número de subunidades contenidas en la magnitud que acabamos de medir. Surgen de este modo los números fraccionarios. Son números fraccionarios $1/2$, $1/3$, $3/5$, etc.

(1) P. L. G. Dirichlet (alemán, 1805-1859), ha sostenido que no es necesariamente indispensable ampliar el concepto de número natural, ya que —según él— cualquier principio de la más alta matemática puede demostrarse por medio de los números naturales.

(2) En la práctica y hablando con rigor, ninguna medida resulta exacta, en razón de lo imperfecto de nuestros instrumentos de medida y de nuestros sentidos.

Podemos decir también, que son números fraccionarios los que nos permiten expresar el cociente de una división inexacta, o lo que es lo mismo, una división en la cual el dividendo no es múltiplo del divisor.

Como se ve, en oposición a los números fraccionarios tenemos los números enteros, que podemos definir como aquellos que expresan el cociente de una división exacta, como por ejemplo, 1, 2, 3, etc.

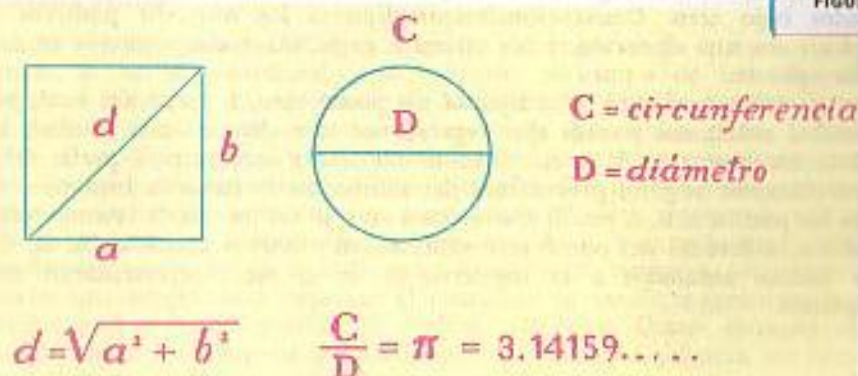
$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 5} \\ 0 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{) 4} \\ 0 \ 2 \end{array} \quad 6 \div 2 = 3.$$

EL NUMERO RACIONAL Y EL NUMERO IRRACIONAL

Siguiendo el orden histórico que nos hemos trazado, vamos a ver ahora cuándo y cómo surgieron los números irracionales.

Es indudable que fueron los griegos quienes conocieron primero los números irracionales. Los historiadores de la matemática, están de acuerdo en atribuir a Pitágoras de Samos (540 A.C.), el descubrimiento de estos números, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Más tarde, Teodoro de Cirene (400 A.C.), matemático de la escuela pitagórica, demostró geoméricamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc., son irracionales. Euclides (300 A.C.), estudió en el Libro X de sus "Elementos", ciertas magnitudes que al ser medidas no encontramos ningún número entero ni fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman incommensurables, y los números que se originan al medir tales magnitudes se llaman irracionales. (3) Ejemplos de tales magnitudes son la relación del lado de un cuadrado con la diagonal del mismo, que se expresa con el número irracional $\sqrt{a^2 + b^2}$; y la relación de la circunferencia, al diámetro que se expresa con la letra $\pi = 3.141592 \dots$

FIGURA 1



(3) Al exponer sistemáticamente los números irracionales, Euclides los llamó asymmetros, y a los racionales los llamó symmetros, palabras que significan sin medida y con medida. Para señalar el hecho de que estos números (los irracionales) no tenían expresión los designaba con la voz alopos. Boecio (475-554 D.C.), al traducir empleó commensurabilis e incommensurabilis. Sin embargo, Gerardo de Cremona (1114-1187), en una traducción de un comentario árabe sobre Euclides, utilizó erróneamente rationalis e irrationalis, al tomar logos y alopos como razón y no en la acepción de palabra (verbum), usada por Euclides. Este error se difundió a lo largo de toda la Edad Media, prevaleciendo en nuestros días el nombre de números irracionales.

Como consecuencia de la introducción de los números irracionales, consideramos racionales el conjunto de los números fraccionarios y el conjunto de los números enteros. Definimos el número racional como aquel número que puede expresarse como cociente de dos enteros. Y el número irracional como aquel número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros.

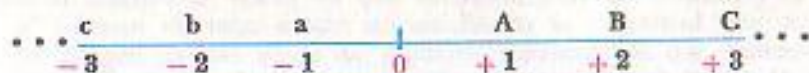
Llamamos número reales al conjunto de los números racionales e irracionales.

LOS NUMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Los números negativos no fueron conocidos por los matemáticos de la antigüedad, salvo en el caso de Diofanto (siglo III D.C.), que en su Aritmética, al explicar el producto de dos diferencias, introduce un número con signo $+$. En el siglo VI, los hindúes Brahmagupta y Bháskara usan los números negativos de un modo práctico, sin llegar a dar una definición de ellos. Durante la Edad Media y el Renacimiento los matemáticos rehuyeron usar los números negativos, y fue Newton el primero en comprender la verdadera naturaleza de estos números. Posteriormente Harriot (1560-1621) introdujo los signos $+$ y $-$ para caracterizar los números positivos y negativos.

La significación de los números relativos o con signos (positivos y negativos) se comprende claramente, cuando los utilizamos para representar el resultado de medir magnitudes relativas, es decir, magnitudes cuyas cantidades pueden tomarse en sentidos opuestos, tal como sucede cuando tratamos de medir la longitud geográfica de una región determinada; o de expresar el grado de temperatura de un lugar dado. En el primer caso, podemos hablar de longitud este u oeste con respecto a un meridiano fijado arbitrariamente (Greenwich). En el segundo caso, podemos referirnos a grados sobre cero o grados bajo cero. Convencionalmente fijamos los números positivos o con signo $+$ en una dirección, y los números negativos o con signo $-$, en la dirección opuesta.

Si sobre una semirrecta fijamos un punto cero, a partir del cual, hacia la derecha, señalamos puntos que representan una determinada unidad, nos resultan los puntos A, B, C, etc. Si sobre esa misma semirrecta, a partir del punto cero (llamado origen), procedemos del mismo modo hacia la izquierda, tendremos los puntos a, b, c, etc. Si convenimos en que los puntos de la semirrecta indicados a la derecha del punto cero representan números positivos (A, B, C, etc.); los puntos señalados a la izquierda (a, b, c, etc.), representarán números negativos.



Históricamente, los números negativos surgen para hacer posible la resta en todos los casos. De este modo, la resta se convierte en una operación inversa de la suma, y se hace posible restarle a un minuendo menor un sustraendo mayor.

Los números y los símbolos literales negativos se distinguen por el signo $-$ que llevan antepuesto. Los números positivos y su representación literal llevan el signo $+$, siempre que no inicien una expresión algebraica.

El número cero. Cuando tratamos de aprehender el concepto de número natural, vemos cómo éste surge de la comparación de conjuntos equivalentes o coordinables entre sí. Por extensión llamamos conjunto al que tiene un solo elemento y que se representa por el número 1. Ahora, consideramos el número cero como expresión de un conjunto nulo o vacío, es decir, un conjunto que carece de elementos.

Por otra parte, el cero representa un elemento de separación entre los números negativos y positivos, de modo que el cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

El siguiente diagrama nos aclarará las distintas clases de números con los cuales vamos a trabajar:



LEYES FORMALES DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS REALES

Hemos visto sumariamente cómo a través del curso de la historia de las matemáticas, se ha ido ampliando sucesivamente el campo de los números, hasta llegar al concepto de número real. El camino recorrido ha sido, unas veces, el geométrico, que siempre desemboca en la Aritmética pura, formal; otras veces, el camino puro, formal ha iniciado el recorrido para desembocar en lo intuitivo, en lo geométrico. Como ejemplos del primer caso, tenemos los números irracionales, introducidos como razón de dos segmentos con el propósito de representar magnitudes incommensurables, y que hacen posible la expresión del resultado de la radicación inexacta. Y también, los números fraccionarios que surgen para expresar el resultado de medir magnitudes conmensurables, y que hacen posible la división inexacta. Como ejemplo del segundo caso, están los números negativos que aparecen por primera vez como raíces de ecuaciones, y hacen posible la resta en todos los casos, ya que cuando el minuendo es menor que el sustraendo esta operación carece de sentido cuando trabajamos con números naturales. Más tarde, estos números negativos (relativos) servirán para expresar los puntos a uno y otro lado de una recta indefinida.

Sin pretensiones de profundizar prematuramente en el campo numérico, vamos a exponer las leyes formales (esto es, que no toman en cuenta la naturaleza de los números) de la suma y de la multiplicación, ya que las demás operaciones fundamentales pueden explicarse como inversas de éstas, así, la resta,

la división, la potenciación, la logaritmación y la radicación. Conviene ir adaptando la mentalidad del principiante al carácter formal (abstracto) de estas leyes, pues ello contribuirá a la comprensión de los problemas que ulteriormente le plantearán las matemáticas superiores. Por otra parte, el conjunto de estas leyes formales constituirá una definición indirecta de los números reales y de las operaciones fundamentales. Estas leyes que no requieren demostración, pues son de aprehensión inmediata, se llaman axiomas.

IGUALDAD

- I. Axioma de identidad: $a = a$.
- II. Axioma de reciprocidad: si $a = b$, tenemos que $b = a$.
- III. Axioma de transitividad: si $a = b$ y $b = c$, tenemos que $a = c$.

SUMA O ADICION

- I. Axioma de uniformidad: la suma de dos números es siempre igual, es decir, única; así, si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $a + c = b + d$.
- II. Axioma de conmutatividad: $a + b = b + a$.
- III. Axioma de asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- IV. Axioma de identidad, o módulo de la suma: hay un número y sólo un número, el cero, de modo que $a + 0 = 0 + a = a$, para cualquier valor de a . De ahí que el cero reciba el nombre de elemento idéntico o módulo de la suma.

MULTIPLICACION

- I. Axioma de uniformidad: el producto de dos números es siempre igual, es decir, único; así si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $ac = bd$.
- II. Axioma de conmutatividad: $ab = ba$.
- III. Axioma de asociatividad: $(ab)c = a(bc)$.
- IV. Axioma de distributividad: con respecto a la suma tenemos que $a(b + c) = ab + ac$.
- V. Axioma de identidad, o módulo del producto: hay un número y sólo un número, el uno (1), de modo que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para cualquier valor de a .
- VI. Axioma de existencia del inverso: para todo número real $a \neq 0$ (a distinto de cero) corresponde un número real, y sólo uno, x , de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a , y se representa por $1/a$.

AXIOMAS DE ORDEN

- I. Tricotomía: Si tenemos dos números reales a y b sólo puede haber una relación, y sólo una, entre ambos, que $a > b$; $a = b$ o $a < b$.
- II. Monotonía de la suma: si $a > b$ tenemos que $a + c > b + c$.
- III. Monotonía de la multiplicación: si $a > b$ y $c > 0$ tenemos que $ac > bc$.

AXIOMA DE CONTINUIDAD

I. Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B , de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B , existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \leq c \leq b$, en que a es un número que está dentro del conjunto A , y b es un número que está dentro del conjunto B .

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NUMEROS RELATIVOS

SUMA DE NUMEROS RELATIVOS

En la suma o adición de números relativos podemos considerar cuatro casos: sumar dos números positivos; sumar dos números negativos; sumar un positivo con otro negativo, y sumar el cero con un número positivo o negativo.

1) Suma de dos números positivos

Regla

Para sumar dos números positivos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos de ambos números, y al resultado obtenido se le antepone el signo $+$. Así tenemos:

$$(+4) + (+2) = +6$$

Podemos representar la suma de dos números positivos del siguiente modo:

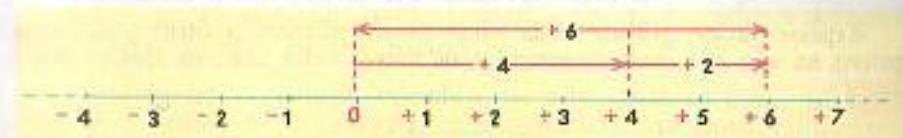


FIGURA 2

2) Suma de dos números negativos

Regla

Para sumar dos números negativos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos de ambos, y al resultado obtenido se le antepone el signo $-$. Así tenemos:

$$(-4) + (-2) = -6$$

Podemos representar la suma de dos números negativos del siguiente modo:



FIGURA 3

3) Suma de un número positivo y otro negativo

Regla

Para sumar un número positivo y un número negativo procede a hallar la diferencia aritmética de los valores absolutos de ambos números, y al resultado obtenido se le repone el signo del número mayor. Cuando los dos números tienen igual valor absoluto y signos distintos la suma es 0. Así tenemos:

$$\begin{aligned} (+6) + (-2) &= +4 \\ (-6) + (+2) &= -4 \\ (-6) + (+6) &= 0 \\ (+6) + (-6) &= 0 \end{aligned}$$

Podemos representar la suma de un número positivo y otro negativo de siguientes modos:

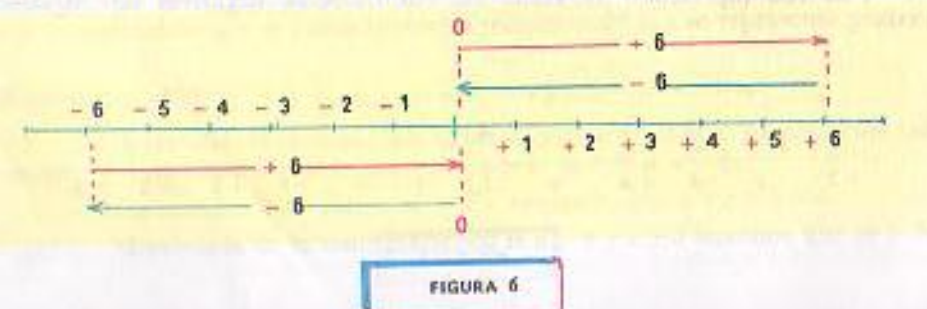
Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, en que el número positivo tiene mayor valor absoluto que el negativo:



Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, en que el número negativo tiene mayor valor absoluto que el positivo:



Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, en que el valor absoluto de ambos números es igual.



4) Suma de cero y un número positivo o negativo

Regla

La suma de cero con cualquier número positivo o negativo nos dará el mismo número positivo o negativo.

Así tenemos: \longrightarrow $(+4) + 0 = +4$
 $(-4) + 0 = -4$

En general: \longrightarrow $a + 0 = 0 + a = a$

En que a puede ser positivo, negativo o nulo.

SUSTRACCION DE NUMEROS RELATIVOS

Llamamos opuesto de un número al mismo número con signo contrario. Así, decimos que $-m$ es opuesto de $+m$. Ya vimos en un caso de la suma que:

$$(+m) + (-m) = 0$$

La sustracción es una operación inversa de la suma que consiste en hallar un número x (llamado diferencia), tal que, sumado con un número dado m , dé un resultado igual a otro número n , de modo que se verifique:

$$x + m = n \quad (1)$$

Llamando m' al opuesto de m , podemos determinar la diferencia x , sumando en ambos miembros de la igualdad (1), el número m' ; en efecto:

$$x + m + m' = n + m' \quad (2)$$

Si observamos el primer miembro de esta igualdad (2), veremos que aplicando el axioma de asociatividad tenemos: $m + m' = 0$, y como $x + 0 = x$, tendremos:

$$x = n + m' \quad (3)$$

que es lo que queríamos demostrar, es decir, que para hallar la diferencia entre n y m basta sumarle a n el opuesto de m (m'). Y como hemos visto que para hallar el opuesto de un número basta cambiarle el signo, podemos enunciar la siguiente

Regla

Para hallar la diferencia entre dos números relativos se suma al minuendo el sustraendo, cambiándole el signo.

Así:

$$\begin{aligned} (+8) - (+4) &= (+8) + (-4) = +4 \\ (+8) - (-4) &= (+8) + (+4) = +12 \\ (-8) - (+4) &= (-8) + (-4) = -12 \\ (-8) - (-4) &= (-8) + (+4) = -4 \end{aligned}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUSTRACCION DE NUMEROS RELATIVOS

Por medio de la interpretación geométrica de la sustracción de números relativos, podemos expresar la distancia, en unidades, que hay entre el punto que representa al minuendo y el punto que representa al sustraendo, así como el sentido (negativo o positivo) de esa distancia.

Para expresar la diferencia $(+4) - (-8) = +12$, tendremos:

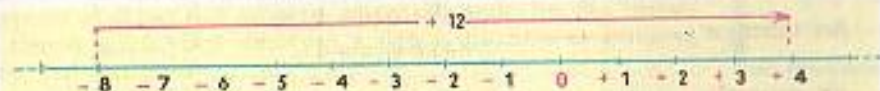


FIGURA 7

Para expresar la diferencia $(-8) - (+4) = -12$, tendremos:

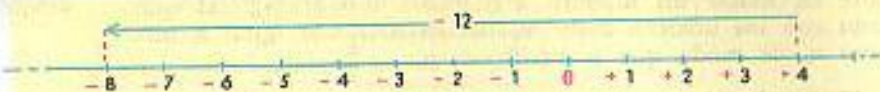


FIGURA 8

MULTIPLICACION DE NUMEROS RELATIVOS

Regla

El producto de dos números relativos se halla multiplicando los valores absolutos de ambos. El producto hallado llevará signo positivo (+), si los signos de ambos factores son iguales; llevará signo negativo (-), si los factores tienen signos distintos. Si uno de los factores es 0 el producto será 0.

Cuando operamos con símbolos literales el producto es siempre indicado, bien en la forma $a \times b$; bien en la forma $a \cdot b$; y más usualmente ab .

Así: _____

El siguiente cuadro es un medio de recordar fácilmente la ley de los signos en la multiplicación de los números relativos.

$$\begin{array}{ll} (+2)(+3) = +6 & (0)(+3) = 0 \\ (-2)(-3) = +6 & (0)(-3) = 0 \\ (+2)(-3) = -6 & 0 \cdot 0 = 0 \\ (-2)(+3) = -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} + \text{ por } + \text{ da } + & + \text{ por } - \text{ da } - \\ - \text{ por } - \text{ da } + & - \text{ por } + \text{ da } - \end{array}$$

REPRESENTACION GRAFICA DEL PRODUCTO DE DOS NUMEROS RELATIVOS

El producto de dos números relativos puede expresarse geométricamente como el área de un rectángulo cuyo largo y cuyo ancho vienen dados por ambos números. A esta área podemos atribuirle un valor positivo o negativo,

según que sus lados tengan valores de un mismo sentido o de sentidos distintos respectivamente.

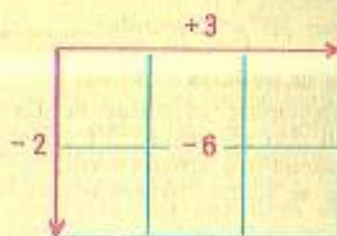
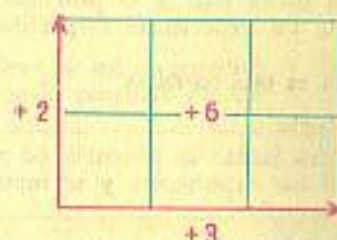


FIGURA 9

POTENCIA DE NUMEROS RELATIVOS

Llamamos potencia de un número relativo al producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Si a es un número relativo cualquiera y $n > 1$ es un número natural, tendremos la notación a^n , que se lee a elevado a la n -ésima potencia. n indica que a debe tomarse como factor n veces. Así: _____

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

En la notación $a^n = x$, llamamos potencia al producto x , base al número que tomamos como factor a , y exponente a n , que nos indica las veces que debemos tomar como factor a a . A la operación de hallar el producto x , la llamamos **potenciación** o **elevación a potencia**.

Ejemplo: _____

En este ejemplo, 4 es la base; 5 es el exponente, y 1024 es la potencia.

Regla

La potencia de un número positivo siempre es positiva. La potencia de un número negativo será positiva si el exponente es entero y par; negativa si el exponente entero es impar. Así: _____

$$\begin{array}{ll} a^2 = +A & (-a)^2 = +A \\ a^3 = +A & (-a)^3 = -A \end{array}$$

PRODUCTO DE DOS POTENCIAS DE IGUAL BASE

Regla

Para multiplicar dos potencias de igual base, se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos. Ejemplo:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(3)^2 (3)^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Regla

Para hallar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes y se mantiene la base primitiva. Ejemplo:

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$$

$$(-2^2)^3 = -2^{2 \times 3} = -2^6 = -64$$

Hay que poner especial cuidado en no confundir la potencia de una potencia, con la elevación de un número a una potencia cuyo exponente, a la vez, está afectado por otro exponente. Así, no es lo mismo $(4^2)^3$ que 4^{2^3} . Ejemplo:

$$(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6 = 4096$$

$$(4^2)^8 = 4^{2 \times 8} = 4^{16} = 65536$$

DIVISION DE NUMEROS RELATIVOS

Ya vimos, al tratar de las leyes formales de la multiplicación, que de acuerdo con el axioma VI (existencia del inverso), a todo número real $a \neq 0$, corresponde un número real, y sólo uno, x , de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a , y se representa por $1/a$.

El inverso o recíproco de un número relativo cualquiera distinto de cero tiene su mismo signo. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{El inverso de } +4 \text{ es } +\frac{1}{4} \\ \text{El inverso de } -4 \text{ es } -\frac{1}{4} \\ \text{El inverso de } -\sqrt{3} \text{ es } -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{El inverso de } +\frac{1}{2} \text{ es } +2 \end{aligned}$$

La división es una operación inversa de la multiplicación que consiste en hallar uno de los factores, conocidos el otro factor y el producto. Es decir, dado el dividendo d y el divisor d' hallar el cociente c , de modo que se verifique $d'c = d$.

Recordamos que esta operación sólo es posible si d' es distinto de cero. Aplicando el axioma de existencia del inverso, tenemos que:

$$1/d' (d'c) = 1/d' d$$

$$\text{Sabemos que: } 1/d' (d'c) = (1/d' d') c = (+1) c = c$$

$$\text{Eliminando queda: } c = 1/d' d$$

De lo cual deducimos la siguiente

Regla

Para dividir un número cualquiera d por otro número distinto de cero d' , multiplicamos d por el recíproco d' ($1/d'$). El cociente que resulte será positivo si los dos números son del mismo signo; y negativo, si son de signos contrarios.

Con el siguiente cuadro podemos recordar fácilmente la ley de los signos de la división con números relativos.

+	entre	+	da	+
-	entre	-	da	+
+	entre	-	da	-
-	entre	+	da	-

Ahora que estudiamos la división, podemos enunciar tres casos de la elevación a potencia de un número cualquiera.

1) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a la potencia 0 es igual a +1. Así:

$$a^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

2) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a un exponente negativo cualquiera $-m$ es igual al recíproco de la potencia a^m , de exponente positivo. Así:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

3) La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la potencia que dé la diferencia de ambos exponentes. Así:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

UNIFORMIDAD DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS RELATIVOS

Hemos visto en las operaciones estudiadas, a saber: suma, resta, multiplicación, potenciación y división, que se cumple en todas ellas el axioma de uniformidad. Quiere esto significar que cuando sometemos dos números relativos a cualquiera de las operaciones mencionadas, el resultado es uno, y sólo uno, es decir, único. Sin embargo, cuando extraemos la raíz cuadrada de un número positivo, tenemos un resultado doble. Pues como veremos, al estudiar la extracción de las raíces, un número positivo cualquiera siempre tiene dos raíces de grado par, una positiva y otra negativa.

$$\text{Así: } \sqrt{+a} = \pm a'$$

$$\text{porque: } (+a')^2 = (+a') (+a') = +a$$

$$\text{del mismo modo: } \sqrt{+64} = \pm 8$$

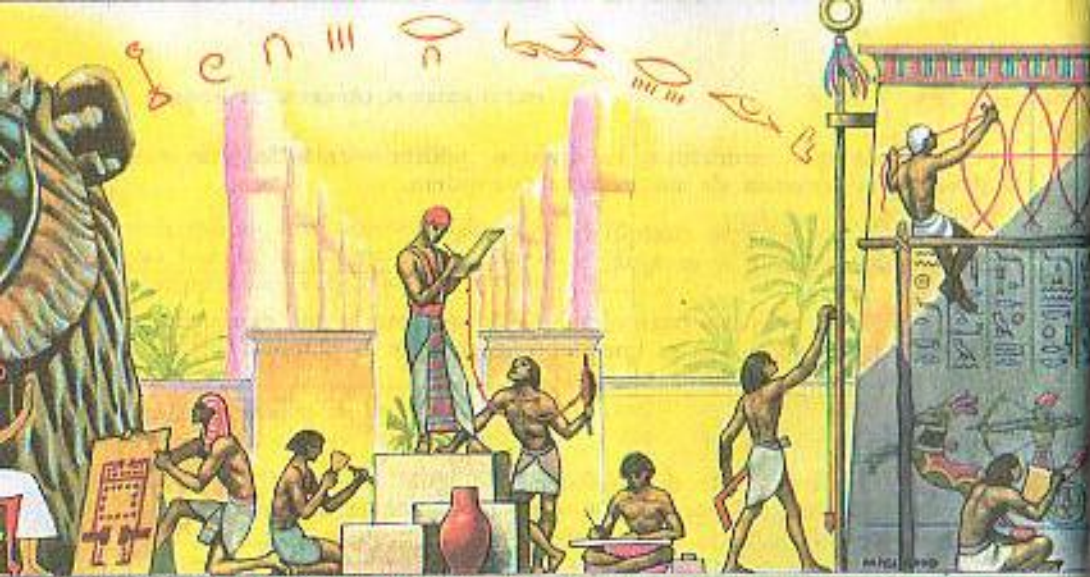
$$\text{porque: } (-a')^2 = (-a') (-a') = +a$$

$$(+8)^2 = (+8) (+8) = +64$$

$$(-8)^2 = (-8) (-8) = +64$$

POSIBILIDAD DE AMPLIAR EL CAMPO NUMERICO

Los números reales no cierran la posibilidad de ampliación del campo numérico. Tal posibilidad se mantiene abierta para la introducción de nuevos entes, siempre que tales entes cumplan las leyes formales. Dentro de los límites de este texto, el estudiante todavía se enfrentará con una nueva ampliación del campo numérico. Se trata del número complejo, que es un par de números dados en un orden determinado y que está constituido por un número real y un número imaginario. Con estos números podremos representar un punto cualquiera en el plano. En el capítulo XXXII se presentará una discusión amplia sobre estos números.



ALGEBRA EN EL ANTIGUO EGIPTO (5.000-500 A.C.)
En Egipto, maravilloso pueblo de faros y de faraones, encontramos los primeros vestigios del desarrollo de una ciencia matemática. Sus exigencias vinculadas a las periódicas inundaciones del Nilo,

los llevaron a perfeccionar la Aritmética y la Geometría. En el papiro de Rhind, debido al escriba Ahmes (1650 A.C.), el más valioso y antiguo documento matemático que existe, se presentan entre múltiples problemas, soluciones de ecuaciones de segundo grado.

CAPÍTULO

SUMA

33 LA SUMA O ADICIÓN es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma).

Así, la suma de a y b es $a+b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones algebraicas dadas: a y b .

La suma de a y $-b$ es $a-b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones dadas: a y $-b$.

34 CARACTER GENERAL DE LA SUMA ALGEBRAICA

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en Álgebra la suma es un concepto más general, pues puede significar aumento o disminución, ya que hay sumas algebraicas como la del último ejemplo, que equivale a una resta en Aritmética.

Resulta, pues, que sumar una cantidad negativa equivale a restar una cantidad positiva de igual valor absoluto.

Así, la suma de m y $-n$ es $m-n$, que equivale a restar de m el valor absoluto de $-n$ que es $|n|$.

La suma de $-2x$ y $-3y$ es $-2x-3y$, que equivale a restar de $-2x$ el valor absoluto de $-3y$ que es $|3y|$.

35 REGLA GENERAL PARA SUMAR

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

1. SUMA DE MONOMIOS

1) Sumar $5a$, $6b$ y $8c$.

Los escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como $5a=+5a$, $6b=+6b$ y $8c=+8c$ la suma será: $5a+6b+8c$.

El orden de los sumandos no altera la suma. Así, $5a+6b+8c$ es lo mismo que $5a+8c+6b$ o que $6b+8c+5a$.

Esta es la Ley Conmutativa de la suma.

2) Sumar $3a^2b$, $4ab^2$, a^2b , $7ab^2$ y $6b^3$.

Tendremos: $3a^2b+4ab^2+a^2b+7ab^2+6b^3$.

Reduciendo los términos semejantes, queda: $4a^2b+11ab^2+6b^3$.

3) Sumar $3a$ y $-2b$.

Cuando algún sumando es negativo, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma; así: $3a+(-2b)$.

La suma será: $3a-2b$. R.

4) Sumar $7a$, $-8b$, $-15a$, $9b$, $-4c$ y 8 .

Tendremos:

$7a+(-8b)+(-15a)+9b+(-4c)+8=7a-8b-15a+9b-4c+8=-8a+b-4c+8$.

5) Sumar $\frac{2}{3}a^2$, $\frac{1}{2}ab$, $-2b^2$, $-\frac{3}{4}ab$, $\frac{1}{3}a^2$, $-\frac{5}{6}b^2$.

$\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}ab+(-2b^2)+(-\frac{3}{4}ab)+\frac{1}{3}a^2+(-\frac{5}{6}b^2)$
 $=\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}ab-2b^2-\frac{3}{4}ab+\frac{1}{3}a^2-\frac{5}{6}b^2=a^2-\frac{1}{4}ab-\frac{13}{6}b^2$. R.

EJERCICIO 15

Sumar:

- | | | | |
|------------------|-------------------------------------|--|---|
| 1. m, n . | 11. $-11m, 8m$. | 18. $-\frac{1}{2}xy, -\frac{1}{2}xy$. | 24. $a, -b, 2c$. |
| 2. $m, -n$. | 12. $9ab, -15ab$. | 19. $-\frac{3}{5}abc, -\frac{2}{5}abc$. | 25. $3m, -2n, 4p$. |
| 3. $-3a, 4b$. | 13. $-xy, -9xy$. | 20. $-4x^2y, \frac{3}{5}x^2y$. | 26. $a^2, -7ab, -c$. |
| 4. $5b, -6a$. | 14. $mn, -11mn$. | 21. $\frac{5}{8}mn, -\frac{3}{4}mn$. | 27. $x^2, -3xy, -y^2$. |
| 5. $7, -6$. | 15. $\frac{1}{2}a, -\frac{2}{3}b$. | 22. a, b, c . | 28. $x^3, -x^2y, 6$. |
| 6. $-6, 9$. | 16. $\frac{3}{5}b, \frac{3}{4}c$. | 23. $a, -b, c$. | 29. $2a, -b, 3a$. |
| 7. $-2x, 3y$. | 17. $\frac{1}{3}b, \frac{2}{3}b$. | | 30. $-m, -8n, 4p$. |
| 8. $5mn, -m$. | | | 31. $-7a, 8a, -b$. |
| 9. $5a, 7a$. | | | 32. $\frac{1}{2}x, \frac{2}{3}y, -\frac{3}{4}z$. |
| 10. $-8x, -5x$. | | | |

$$\frac{a}{5}m, -m, -\frac{2}{5}mn.$$

$$a^2, 5ab, 3b^2, -a^2.$$

$$mn^2, -5m, 17mn^2, -4m.$$

$$-8x^2y, 5, -7x^3, 4x^2y.$$

$$3, 9xy, -6xy, 7y^2, -x^2.$$

$$a^2b, 5ab^2, -a^2b, -11ab^2, -7b^3.$$

$$, -8m^2n, 7mn^2, -n^3, 7m^2n.$$

$$a, \frac{2}{9}b, -\frac{1}{4}a, \frac{1}{5}b, -6.$$

$$-3b, -8c, 4b, -a, 8c.$$

$$42. m^3, -4m^2n, 5m^3, -7mn^2, -4m^2n, -5m^3.$$

$$43. 9x, -11y, -x, -6y, 4z, -6z.$$

$$44. 6a^2, -7b^2, -11, -5ab, 9a^2, -8b^2.$$

$$45. -x^2y^2, -5xy^3, -4y^4, 7xy^3, -8, x^2y^2.$$

$$46. 3a, \frac{1}{2}b, -4, -b, -\frac{1}{2}a, 6.$$

$$47. \frac{1}{2}x^2, \frac{2}{3}xy, \frac{5}{9}y^2, -\frac{1}{3}xy, \frac{3}{4}x^2, -\frac{5}{6}y^2.$$

$$48. 5a^x, -6a^{x+1}, 8a^{x+2}, a^{x+1}, 5a^{x+1}, -5a^x.$$

$$49. \frac{3}{4}x^2, -\frac{2}{3}xy, \frac{1}{9}y^2, -\frac{1}{9}xy, x^2, 5y^2.$$

$$50. \frac{3}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, -\frac{1}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, a^2b, -\frac{5}{9}ab^2.$$

Ejemplo

Sumar $8a - 3b + 5c - d$, $-2b + c - 4d$ y $-3a + 5b - c$ y probar el resultado por el valor numérico para $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

$$\begin{array}{rclcl} \text{Tendremos:} & 8a - 3b + 5c - d & = & 8 - 6 + 15 - 4 & = & 13 \\ & -2b + c - 4d & = & -4 + 3 - 16 & = & -17 \\ & -3a + 5b - c & = & -3 + 10 - 3 & = & 4 \\ \hline & 5a & + & 5c - 5d & & 5 & + & 15 - 20 & = & 0 \end{array}$$

La suma de los valores numéricos de los sumandos $13 - 17 + 4 = 0$, igual que el valor numérico de la suma que también es cero.

EJERCICIO 16

Hallar la suma de:

- $3a + 2b - c$; $2a + 3b + c$.
- $7a - 4b + 5c$; $-7a + 4b - 6c$.
- $m + n - p$; $-m - n + p$.
- $9x - 3y + 5$; $-x - y + 4$; $-5x + 4y - 9$.
- $a + b - c$; $2a + 2b - 2c$; $-3a - b + 3c$.
- $p + q + r$; $-2p - 6q + 3r$; $p + 5q - 8r$.
- $-7x - 4y + 6z$; $10x - 20y - 8z$; $-5x + 24y + 2z$.
- $-2m + 3n - 6$; $3m - 8n + 8$; $-5m + n - 10$.
- $-5a - 2b - 3c$; $7a - 3b + 5c$; $-8a + 5b - 3c$.
- $ab + bc + cd$; $-8ab - 3bc - 3cd$; $5ab + 2bc + 2cd$.
- $ax - ay - az$; $-5ax - 7ay - 6az$; $4ax + 9ay + 8az$.
- $5x - 7y + 8$; $-y + 6 - 4x$; $9 - 3x + 8y$.
- $-am + 6mn - 4s$; $6s - am - 5mn$; $-2s - 5mn + 3am$.
- $2a + 3b$; $6b - 4c$; $-a + 8c$.
- $6m - 3n$; $-4n + 5p$; $-m - 5p$.
- $2a + 3b$; $5c - 4$; $8a + 6$; $7c - 9$.
- $2x - 3y$; $5z + 9$; $6x - 4$; $3y - 5$.
- $8a + 3b - c$; $5a - b + c$; $-a - b - c$; $7a - b + 4c$.
- $7x + 2y - 4$; $9y - 6z + 5$; $-y + 3z - 6$; $-5 + 8x - 3y$.
- $-m - n - p$; $m + 2n - 5$; $3p - 6m + 4$; $2n + 5m - 8$.
- $5a^4 - 3a^m - 7a^n$; $-8a^2 + 5a^m - 9a^2$; $-11a^4 + 5a^m + 16a^n$.
- $6m^{n+1} - 7m^{n+2} - 5m^{n+3}$; $4m^{n+1} - 7m^{n+2} - m^{n+3}$; $-5m^{n+1} + 3m^{n+2} + 12m^{n+3}$.
- $8x + y + z + u$; $-3x - 4y - 2z + 3u$; $4x + 5y + 3z - 4u$; $-9x - y + z + 2u$.
- $a + b - c + d$; $a - b + c - d$; $-2a + 3b - 2c + d$; $-3a - 3b + 4c - d$.
- $5ab - 3bc + 4cd$; $2bc + 2cd - 3de$; $4bc - 2ab + 3de$; $-3bc - 6cd - ab$.
- $a - b$; $b - c$; $c + d$; $a - c$; $c - d$; $d - a$; $a - d$.

$$3) \text{ Sumar } 3x^2 - 4xy + y^2, -5xy + 6x^2 - 3y^2 \text{ y } -6y^2 - 8xy - 9x^2.$$

Si los polinomios que se suman pueden ordenarse con relación a una letra, deben ordenarse todos con relación a una misma letra antes de sumar.

Así, en este caso vamos a ordenar en orden descendente con relación a x y tendremos:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4xy + y^2 \\ 6x^2 - 5xy - 3y^2 \\ -9x^2 - 8xy - 6y^2 \\ \hline -17xy - 8y^2 \end{array}$$

II. SUMA DE POLINOMIOS

$$1) \text{ Sumar } a - b, 2a + 3b - c \text{ y } -4a + 5b.$$

La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis; así: $(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b)$.

Ahora colocamos todos los términos de estos polinomios unos a continuación de otros con sus propios signos, y tendremos:

$$a - b + 2a + 3b - c - 4a + 5b = -a + 7b - c. \quad R.$$

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columna; se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

$$\begin{array}{r} \text{Así, la suma anterior se verifica de esta manera:} \\ \begin{array}{r} a - b \\ 2a + 3b - c \\ -4a + 5b \\ \hline -a + 7b - c. \quad R. \end{array} \end{array}$$

$$2) \text{ Sumar } 3m - 2n + 4, 6n + 4p - 5, 8n - 6 \text{ y } m - n - 4p.$$

$$\begin{array}{r} \text{Tendremos:} \\ \begin{array}{r} 3m - 2n + 4 \\ 6n + 4p - 5 \\ 8n - 6 \\ m - n - 4p \\ \hline 4m + 11n - 7. \quad R. \end{array} \end{array}$$

36 PRUEBA DE LA SUMA POR EL VALOR NUMERICO

Se halla el valor numérico de los sumandos y de la suma para los mismos valores, que fijamos nosotros, de las letras. Si la operación está correcta, la suma algebraica de los valores numéricos de los sumandos debe ser igual al valor numérico de la suma.

4) Sumar

$$a^3b - b^4 + ab^3, -2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 \text{ y } 5a^3b - 4ab^3 - 6a^2b^2 - b^4 - 6.$$

Ordenando con relación a la a se tiene: $\underline{\hspace{10em}}$

$$\begin{array}{r} a^3b + ab^3 - b^4 \\ -2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 \\ 5a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 - 6 \\ 6a^3b - 8a^2b^2 + ab^3 - b^4 - 6. \end{array} \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 17

Hallar la suma de:

15. $x^3 + xy^2 + y^3; -5x^2y + x^3 - y^3; 2x^3 - 4xy^2 - 5y^3.$
16. $-7m^2n + 4n^3; m^3 + 6mn^2 - n^3; -m^3 + 7m^2n + 5n^3.$
17. $x^4 - x^2 + x; x^3 - 4x^2 + 5; 7x^2 - 4x + 6.$
18. $a^4 + a^0 + 6; a^5 - 3a^3 + 8; a^3 - a^2 - 14.$
19. $x^5 + x - 9; 3x^4 - 7x^2 + 6; -3x^3 - 4x + 5.$
20. $a^3 + a; a^2 + 5; 7a^2 + 4a; -8a^2 - 6.$
21. $x^4 - x^2y^2; -5x^3y + 6xy^3; -4xy^2 + y^4; -4x^2y^2 - 6.$
22. $xy + x^2; -7y^2 + 4xy - x^2; 5y^2 - x^2 + 6xy; -6x^2 - 4xy + y^2.$
23. $a^3 - 8ax^2 + x^3; 5a^2x - 6ax^2 - x^3; 3a^3 - 5a^2x - x^3; a^3 + 14ax^2 - x^3.$
24. $-8a^2m + 6am^2 - m^3; a^3 - 5am^2 + m^3; -4a^3 + 4a^2m - 3am^2; 7a^3m - 4am^2 - 6.$
25. $x^5 - x^3y^2 - xy^4; 2x^4y + 3x^2y^3 - y^3; 3x^3y^2 - 4xy^4 - y^5; x^5 + 5xy^4 + 2y^3.$
26. $a^5 + a^0 + a^3; a^4 + a^3 + 6; 3a^2 + 5a - 8; -a^5 - 4a^2 - 5a + 6.$
27. $a^4 - b^4; -a^3b + a^2b^2 - ab^3; -3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2; -4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4.$
28. $m^3 - n^3 + 6m^2n; -4m^2n + 5mn^2 + n^3; m^3 - n^3 + 6mn^2; -2m^3 - 2m^2n + n^3.$
29. $a^x - 3a^{x-2}; 5a^{x-1} + 6a^{x-3}; 7a^{x-1} + a^{x-4}; a^{x-1} - 13a^{x-3}.$
30. $a^{x+2} - a^x + a^{x+1}; -3a^{x+3} - a^{x-1} + a^{x-2}; -a^x + 4a^{x+2} - 5a^{x+2}; a^{x-1} - a^{x-2} + a^{x+2}.$
8. $3x + x^3; -4x^2 + 5; -x^3 + 4x^2 - 6.$
9. $x^2 - 3xy + y^2; -2y^2 + 3xy - x^2; x^2 + 3xy - y^2.$
10. $a^2 - 3ab + b^2; -5ab + a^2 - b^2; 8ab - b^2 - 2a^2.$
11. $-7x^2 + 5x - 6; 8x - 9 + 4x^2; -7x + 14 - x^2.$
12. $a^3 - 4a + 5; a^3 - 2a^2 + 6; a^2 - 7a + 4.$
13. $-x^2 + x - 6; x^3 - 7x^2 + 5; -x^3 + 8x - 5.$
14. $a^3 - b^3; 5a^2b - 4ab^2; a^3 - 7ab^2 - b^3.$

EJERCICIO 18

Hallar la suma de:

1. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}xy; \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2.$
2. $a^2 + \frac{1}{2}ab; -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2; -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2.$
3. $x^2 + \frac{2}{3}xy; -\frac{1}{6}xy + y^2; -\frac{5}{6}xy + \frac{2}{3}y^2.$
4. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2; -\frac{2}{6}xy + \frac{1}{6}y^2; \frac{1}{10}xy + \frac{1}{3}y^2.$
5. $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}b^2; \frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{6}b^3; -\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{8}b^2.$
6. $\frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{3}{4}xy; -\frac{1}{2}xy - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{8}y^2; \frac{5}{6}xy - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2.$
7. $a^3 - \frac{1}{2}ab^2 + b^3; \frac{5}{6}a^2b - \frac{3}{8}ab^2 - 2b^3; \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{6}b^3.$
8. $x^4 - x^2 + 5; \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x - 3; -\frac{3}{6}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{4}x.$
9. $\frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}mn^2 + \frac{2}{5}n^3; \frac{1}{6}m^2n + \frac{1}{8}mn^2 - \frac{5}{6}n^3; m^3 - \frac{1}{2}n - n^3.$
10. $x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4; -\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{16}y^4; -\frac{5}{6}x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4.$
11. $x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x; -3x^5 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{1}{10}x; -\frac{3}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2; -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{5}x - 4.$
12. $\frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{6}ax^2 - \frac{1}{8}x^3; -\frac{3}{7}a^2x - \frac{2}{5}ax^2 - \frac{1}{6}x^3; -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{4}ax^2.$
13. $a^0 - a^4 + a^2; \frac{3}{5}a^5 - \frac{8}{6}a^3 - \frac{1}{2}a; -\frac{5}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6; -\frac{3}{8}a - 6.$
14. $x^5 - y^5; \frac{1}{10}x^3y^2 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{1}{6}y^5; \frac{3}{5}x^4y - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{1}{6}y^5; 2x^4y - \frac{2}{5}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^5.$

EJERCICIO 19

Sumar las expresiones siguientes y hallar el valor numérico del resultado para $a = 2, b = 3, c = 10, x = 5, y = 4, m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{6}.$

1. $4x - 5y; -3x + 6y - 8; -x + y.$
2. $x^2 - 5x + 8; -x^2 + 10x - 30; -6x^2 + 5x - 50.$
3. $x^4 - y^4; -5x^2y^2 - 8 + 2x^4; -4x^4 + 7x^3y + 10xy^3.$
4. $3m - 5n + 6; -6m + 8 - 20n; -20n + 12m - 12.$
5. $nx + cn - ab; -ab + 8nx - 2cn; -ab + nx - 5.$
6. $a^3 + b^3; -3a^2b + 8ab^2 - b^3; -5a^3 - 6ab^2 + 8; 3a^2b - 2b^3.$
7. $27m^3 + 125n^3; -9m^2n + 25mn^2; -14mn^2 - 8; 11mn^2 + 10m^2n.$
8. $x^{a-1} + y^{b-2} + m^{c-4}; 2x^{a-1} - 2y^{b-2} - 2m^{c-4}; 3y^{b-2} - 2m^{c-4}.$
9. $n^{b-1} - m^{c-3} + 8; -5n^{b-1} - 3m^{c-3} + 10; 4n^{b-1} + 5m^{c-3} - 18.$
10. $x^3y - xy^3 + 5; x^4 - x^2y^2 + 5x^3y - 6; -6xy^3 + x^2y^2 + 2; -y^4 + 3xy^3 + 1.$
11. $\frac{9}{4}a^2 + \frac{2}{3}b^2; -\frac{1}{8}ab + \frac{1}{9}b^2; \frac{1}{6}ab - \frac{1}{8}b^2.$
12. $\frac{9}{17}m^3 + \frac{25}{34}n^2 - \frac{1}{4}; -15mn + \frac{1}{2}; \frac{5}{17}n^2 + \frac{7}{34}m^2 - \frac{1}{4}; -\frac{7}{34}m^2 - 30mn + 3.$
13. $\frac{1}{2}b^2m - \frac{3}{5}cn - 2; \frac{8}{4}b^2m + 6 - \frac{1}{10}cn; -\frac{1}{4}b^2m + \frac{1}{25}cn + 4; 2cn + \frac{3}{5} - \frac{1}{8}b^2m.$
14. $0.2a^3 + 0.4ab^2 - 0.5a^2b; -0.8b^3 + 0.6ab^2 - 0.3a^2b; -0.4a^3 + 6 - 0.8a^2b; 0.2a^3 + 0.9b^3 + 1.5a^2b.$

37 SUMA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

1) Sumar $\frac{1}{3}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 3, -\frac{1}{10}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{5}{7}y^3, -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 5.$

Tendremos:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2y + 2y^3 + 3 \\ -\frac{1}{10}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{5}{7}y^3 \\ \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{2}y^3 - 5 \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{7}{8}xy^2 + \frac{15}{14}y^3 - 2. \end{array} \quad \text{R.}$$



CULO EN CALDEA Y ASIRIA (5.000-500)
No ha sido sino recientemente que se ha de manifiesto la enorme contribución de los asirios y babilonios al acervo matemático de la humanidad. En tablillas descifradas hace muy poco

tiempo (1930), figuran operaciones algebraicas con ecuaciones de segundo grado y tablas de potencias que requieren un dominio de la matemática elemental, pero no supone esto que los caldeos tuvieran toda una concepción abstracta de las matemáticas.

CAPITULO II

RESTA

38 LA RESTA O SUSTRACCION es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (sustraendo), hallar el otro sumando (resta o diferencia).

Es evidente, de esta definición, que la suma del sustraendo y la diferencia tiene que ser el minuendo.

Si de a (minuendo) queremos restar b (sustraendo), la diferencia será $a - b$. En efecto: $a - b$ será la diferencia si sumada con el sustraendo b reproduce el minuendo a , y en efecto: $a - b + b = a$.

39 REGLA GENERAL PARA RESTAR

Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay.

1. RESTA DE MONOMIOS

1) De -4 restar 7 .

Escribimos el minuendo -4 con su propio signo y a continuación el sustraendo 7 con el signo cambiado y la resta será:

$$-4 - 7 = -11. \quad R.$$

En efecto: -11 es la diferencia porque sumada con el sustraendo 7 reproduce el minuendo -4 :

$$-11 + 7 = -4.$$

2) Restar $4b$ de $2a$.

Escribimos el minuendo $2a$ con su signo y a continuación el sustraendo $4b$ con el signo cambiado y la resta será:

$$2a - 4b.$$

En efecto: $2a - 4b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4b$ reproduce el minuendo:

$$2a - 4b + 4b = 2a.$$

3) Restar $4a^2b$ de $-5a^2b$.

Escribo el minuendo $-5a^2b$ y a continuación el sustraendo $4a^2b$ con el signo cambiado y tengo:

$$-5a^2b - 4a^2b = -9a^2b.$$

$-9a^2b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4a^2b$ reproduce el minuendo:

$$-9a^2b + 4a^2b = -5a^2b.$$

4) De 7 restar -4 .

Cuando el sustraendo es negativo suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la operación, de este modo distinguimos el signo $-$ que indica la resta del signo $-$ que señala el carácter negativo del sustraendo. Así:

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11.$$

El signo $-$ delante del paréntesis está para indicar la resta y este signo no tiene más objeto que decirnos, de acuerdo con la regla general para restar, que debemos cambiar el signo al sustraendo -4 . Por eso a continuación del minuendo 7 escribimos $+4$.

5) De $7x^3y^4$ restar $-8x^3y^4$.

Tendremos: $7x^3y^4 - (-8x^3y^4) = 7x^3y^4 + 8x^3y^4 = 15x^3y^4. \quad R.$

6) De $-\frac{1}{2}ab$ restar $-\frac{3}{4}ab$.

Tendremos: $-\frac{1}{2}ab - (-\frac{3}{4}ab) = -\frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}ab = \frac{1}{4}ab. \quad R.$

40 CARACTER GENERAL DE LA RESTA ALGEBRAICA

En Aritmética la resta siempre implica disminución, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, pues puede significar disminución o aumento.

Hay restas algebraicas, como las de los ejemplos 4 y 5 anteriores, en que la diferencia es mayor que el minuendo.

Los ejemplos 4, 5 y 6 nos dicen que restar una cantidad negativa equivale a sumar la misma cantidad positiva.

EJERCICIO 20

De:

1. -8	restar	5.	6. $2a$	restar	3b.	11. $-9a^2$	restar	5b ³
2. -7	"	4.	7. $3b$	"	2.	12. $-7xy$	"	$-5yz$
3. 8	"	11.	8. $4x$	"	6b.	13. $3a$	"	$4a$
4. -8	"	-11 .	9. $-5a$	"	6b.	14. $11m^2$	"	$25m$
5. -1	"	-9 .	10. $-8x$	"	-3 .	15. $-6x^2y$	"	$-x^2y$

11a ³ m ² restar	-7a ³ m ² .	22. 6a ⁿ restar	-5a ⁿ .	27. - $\frac{2}{3}$ restar	$\frac{8}{4}$.
8ab ² "	-8ab ² .	23. -45a ⁿ⁻¹ "	-60a ⁿ⁻¹ .	28. $\frac{1}{8}x^2$ "	$-\frac{2}{3}x^2$.
31x ² y "	-46x ² y.	24. 54b ²⁻¹ "	-86b ²⁻¹ .	29. $\frac{4}{5}x^2y$ "	$-\frac{6}{8}x^2y$.
84a ² b "	-84a ² b.	25. -35m ⁿ "	-60m ⁿ .	30. $-\frac{1}{8}ab^2$ "	$-\frac{8}{4}ab^2$.
3a ⁿ⁺¹ "	5b ⁿ⁺² .				
3x ⁿ⁺² "	11.	26. 5 "	$-\frac{1}{2}$.		

Restar

3 de	-2.	43. -a	de	3a.	55. 54a ⁿ⁺² de	-85a ⁿ⁺² .
1 "	7.	44. -3b	"	-4b.	56. -6a	"
5 "	-8.	45. -11x ³	"	54x ³ .	"	$\frac{1}{4}$.
4 "	5.	46. 14a ² b	"	78a ² b.	57. -5	"
7 "	-7.	47. -43a ² y	"	-54a ² y.	"	$-\frac{2}{3}$.
5 "	2a.	48. 9ab	"	-ab.	58. $\frac{8}{5}m^3$	"
b "	-3x.	49. -31x ² y	"	-31x ² y.	"	$-\frac{7}{10}m^3$.
5m "	-2n.	50. a ^x	"	-3a ^x .	59. $-\frac{11}{12}a^2b^2$	"
6a "	3b.	51. -7a ⁿ⁺¹	"	311a ⁿ⁺¹ .	"	$\frac{5}{6}a^2b^2$.
5a ⁿ "	8b.	52. 9m ^x	"	105m ^x .	60. 45a ³ b ²	"
9 "	-7a.	53. 18a ⁿ⁻¹	"	-31a ⁿ⁻¹ .	"	$-\frac{1}{9}a^3b^2$.
25 "	25ab.	54. -19m ⁿ	"	-236m ⁿ .		

II. RESTA DE POLINOMIOS

41 Cuando el sustraendo es un polinomio, hay que restar del minuendo cada uno de los términos del sustraendo, así que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos.

Ejemplos

(1) De $4x - 3y + z$ restar $2x + 5z - 6$.

La sustracción se indica incluyendo el sustraendo en un paréntesis precedido del signo -, así:

Ahora, dejamos el minuendo con sus propios signos y a continuación escribimos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos y tendremos:

Reduciendo los términos semejantes, tendremos: $2x - 3y - 4z + 6$. R.

En la práctica suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Así, la resta anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{r} 4x - 3y + z \\ - 2x \quad \quad - 5z + 6 \\ \hline 2x - 3y - 4z + 6. \text{ R.} \end{array}$$

PRUEBA

La diferencia sumada con el sustraendo debe dar el minuendo.

En el ejemplo anterior, sumando la diferencia $2x - 3y - 4z + 6$, con el sustraendo $2x + 5z - 6$, tendremos:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y - 4z + 6 \\ 2x \quad \quad + 5z - 6 \\ \hline 4x - 3y + z \quad \text{(minuendo).} \end{array}$$

(2) Restar $-4a^5b - ab^5 + 6a^3b^3 - a^2b^4 - 3b^6$ de $8a^4b^2 + a^6 - 4a^2b^4 + 6ab^5$.

Al escribir el sustraendo, con sus signos cambiados, debajo del minuendo, deben ordenarse ambos con relación a una misma letra.

Así, en este caso, ordenando en orden descendente con relación a la a tendremos:

$$\begin{array}{r} a^6 \quad \quad + 8a^4b^2 \quad \quad - 4a^2b^4 + 6ab^5 \\ + 4a^5b \quad \quad - 6a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + 3b^6 \\ \hline a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6 \end{array}$$

La diferencia sumada con el sustraendo, debe darnos el minuendo:

$$\begin{array}{r} a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6 \\ - 4a^5b \quad \quad + 6a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - 3b^6 \\ \hline a^6 \quad \quad + 8a^4b^2 \quad \quad - 4a^2b^4 + 6ab^5 \quad \text{(minuendo)} \end{array}$$

(3) Restar $-8a^2x + 6 - 5ax^2 - x^3$ de $7a^3 + 8a^2x + 7ax^2 - 4$ y probar el resultado por el valor numérico.

Efectuemos la resta ordenando con relación a la x :

$$\begin{array}{r} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \quad - 6 \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10. \end{array}$$

La prueba del valor numérico se efectúa hallando el valor numérico del minuendo, del sustraendo con los signos cambiados y de la diferencia para un mismo valor de las letras (el valor de cada letra lo escogemos nosotros). Reduciendo el valor numérico de minuendo y sustraendo con el signo cambiado, debe darnos el valor numérico de la diferencia.

Así, en el ejemplo anterior para $a=1$, $x=2$, tendremos:

$$\begin{array}{r} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 = 28 + 16 + 7 - 4 = 47 \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \quad - 6 = 8 + 20 + 16 \quad - 6 = 48 \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10 = 8 + 48 + 32 + 7 - 10 = 95 \end{array}$$

EJERCICIO 21

De:

- $a+b$ restar $a-b$.
- $2x-3y$ restar $-x+2y$.
- $8a+b$ restar $-3a+4$.
- x^3-3x restar $-5x+6$.
- a^3-a^2b restar $7a^2b+9ab^2$.
- $x-y+z$ restar $x-y+z$.
- $x+y-z$ restar $-x-y+z$.
- x^2+y^2-3xy restar $-y^2+3x^2-4xy$.
- x^3-x^2+6 restar $5x^2-4x+6$.
- y^2+6y^3-8 restar $2y^4-3y^2+6y$.
- a^3-6ab^2+9a restar $15a^2b-8a+5$.
- $x^4+9xy^3-11y^4$ restar $-8x^4y-6x^2y^2+20y^4$.
- $a+b+c-d$ restar $-a-b+c-d$.
- $ab+2ac-3cd-5de$ restar $-4ac+8ab-5cd+5d$.
- $x^3-9x+6x^2-19$ restar $-11x^2+21x-43+6x^3$.
- $y^3-9y^3+6y^2-31$ restar $-11y^4+31y^3-8y^2-19y$.

- $5m^3-9n^3+6m^2n-8mn^2$ restar $14mn^2-21m^2n+5m^3-18$.
- $4x^3y-19xy^3+y^4-6x^2y^2$ restar $-x^4-51xy^3+32x^2y^2-25x^3y$.
- $m^4+m^4n^2-9m^2n^4+19$ restar $-13m^3n^5+16mn^6-30m^2n^4-61$.
- $-a^5b+6a^3b^3-18ab^5+42$ restar $-8a^6+9b^6-11a^4b^2-11a^2b^4$.

21. $1-x^2+x^4-x^6+3x-6x^5$ restar $-x^0+8x^4-30x^2+15x-24$.
 22. $-6x^2y^3+8x^3-23x^4y+80x^2y^2-18$ restar $-y^5+9xy^4+80-21x^3y^2-51x^4y$.
 23. $m^0-8m^4n^2+21m^2n^4+8-6mn^5$ restar $-23m^5n+14m^3n^3-24mn^5+8n^4-14$.
 24. $x^7-8x+16x^5-23x^2-15$ restar $-8x^0+25x^4-30x^3+51x-18$.
 25. $9a^6-15a^4b^2+31a^2b^4-b^6+14$ restar $25a^3b-15a^4b^2+53a^3b^3-9ab^5+3b^0$.
 26. $a^4+a^{4+1}-a^{4+2}$ restar $5a^5-6a^{4+1}-a^{4+2}$.
 27. $m^0-m^6-1+3m^{5-2}$ restar $3m^{4+1}-4m^3+5m^{1-2}+8m^{6-2}$.
 28. $a^{m+4}-7a^{m+2}-8a^{m+6}+6a^{m-1}$ restar $-5a^{m+3}-14a^{m+2}-11a^{m+1}-8a^{m-1}$.
 29. $x^{3+2}-7x^4+9x^{3-1}+25x^{2-2}$ restar $-11x^{6+1}+19x^6+45x^{5-1}+60x^{6-5}$.
 30. $m^{n+1}-6m^{n-2}+8m^{n-3}-19m^{n-6}$ restar $8m^n+5m^{n-2}+6m^{n-3}+m^{n-4}+9m^{n-5}$.

EJERCICIO 22

Restar:

- $-b$ de $b-a$.
 $-y$ de $2x+3y$.
 $-5a+b$ de $-7a+5$.
 x^2-5x de $-x^2+6$.
 x^5-xy^2 de x^2y+5xy^2 .
 $5a^2b-8a^3$ de $7a^2b+5ab^2$.
 $-b+2c$ de $-a+2b-3c$.
 $m-n+p$ de $-3n+4m+5p$.
 $-x+y-z$ de $x+3y-6z$.
 $3a^2+ab-6b^2$ de $-5b^2+8ab+a^2$.

11. m^2-n^2-3mn de $-5m^2-n^2+6mn$.
 12. $-x^3-x+6$ de $-8x^2+5x-4$.
 13. m^3+14m^2+9 de $14m^2-8n+16$.
 14. $ab-bc+6cd$ de $8ab+5bc+6cd$.
 15. $25a^2b-8ab^2-b^3$ de $a^3-9a^2b-b^3$.
 16. xy^2-6y^3+4 de $6x^3-8x^2y-6xy^2$.
 17. $m^2+7n-8c+d$ de $m^2-9n+11c+14$.
 18. $7a^3b+5ab^3-8a^2b^2+b^4$ de $5a^4+9a^3b-40ab^3+6b^4$.
 19. $6x^3-9x+6x^2-7$ de $x^5-8x^4+25x^2+15$.
 20. $x^5-x^2y^3+6xy^4+25y^5$ de $-3xy^4-8x^2y^2-19y^5+18$.

21. $25x+25x^3-18x^2-11x^3-46$ de $x^3-6x^4+8x^2-9+15x$.
 22. $8a^4b+a^3b^2-15a^2b^3-45ab^4-8$ de $a^3-26a^3b^2+8ab^4-b^5+6$.
 23. $23y^3+8y^4-15y^5-8y-5$ de $y^0+y^3+y^2+9$.
 24. $7x^7+5x^6-23x^3+51x+36$ de $x^5-x^0+3x^4-5x^2-9$.
 25. $y^7-60x^4y^3+90x^3y^4-50xy^5-x^2y^5$ de $x^7-3x^2y^2+35x^4y^3-8x^2y^5+60$.
 26. $a^{x+2}-5a^{x+1}-6a^x$ de $a^{x+3}-8a^{x+1}-5$.
 27. $8a^{n-1}+5a^{n-2}+7a^n+a^{n-3}$ de $-8a^n+16a^{n-4}+15a^{n-2}+a^{n-3}$.
 28. $31x^{n+1}-9x^{n+2}-x^{n+4}-18x^{n-1}$ de $15x^{n+3}+5x^{n+2}-6x^n+41x^{n-1}$.
 29. $12a^{m-2}-5a^{m-1}-a^m-8a^{m-4}$ de $9a^{m-1}-21a^{m-2}+26a^{m-3}+14a^{m-6}$.
 30. $-m^{x+4}-6m^{x+1}-23m^{x+2}-m^{x-1}$ de $-15m^{x+3}+50m^{x+1}-14m^x-6m^{x-3}+8m^{x-2}$.

(4) De 1 restar x^2+x+5 .

$$\begin{array}{r} 1 \\ -5-x-x^2 \\ \hline -4-x-x^2 \end{array} \text{ R.}$$

El sustraendo x^2+x+5 sumado con la diferencia $-4-x-x^2$ nos da el minuendo:

$$\begin{array}{r} x^2+x+5 \\ -x^2-x-4 \\ \hline 1 \end{array} \text{ (minuendo).}$$

(5) Restar $9ab^3-11a^3b+8a^2b^2-b^4$ de a^4-1 .
 Tendremos:

$$\begin{array}{r} a^4 \\ 11a^3b-8a^2b^2-9ab^3+b^4 \\ \hline a^4+11a^3b-8a^2b^2-9ab^3+b^4-1 \end{array} \text{ R.}$$

EJERCICIO 23

De:

1. 1 restar $a-1$.
 2. 0 restar $a-8$.
 3. -9 restar $3a+a^2-5$.
 4. 16 restar $5xy-x^2+16$.
 5. 1 restar $a^3-a^2b+ab^2$.
 6. x^3 restar $-x^3-8x^2y-6xy^2$.

7. a^5 restar $-8a^2b+6ab^2-b^3$.
 8. y^4 restar $-5x^2y+7x^2y^2-8xy^3$.
 9. m^4 restar $a^5m-a^4+7a^2m^2-18am^3+5m^4$.
 10. 16 restar $b-a+c+d-14$.
 11. x^2-1 restar $xy+y^2$.
 12. a^3+6 restar $5a^2b-8ab^2+b^3$.
 13. Restar $-5x^2y+17xy^2-5$ de x^5+y^5 .
 14. Restar $9x^3y-15xy^3-8x^2y^2$ de x^4-1 .
 15. Restar $-11a^4b+2a^2b^3+8a^3b^2-4ab^4$ de a^5+b^5 .
 16. Restar $5x^4-25x$ de x^4+x^2+50 .
 17. Restar $9y^5+17y^4-y^3+18y^2$ de y^5+y-41 .
 18. Restar $-15a^5b+17a^3b^3-14ab^5-b^6$ de $a^6+9a^4b^2+a^2b^4$.
 19. Restar $-x^5+5x-34$ de x^4+x^3-11x .
 20. Restar $m^2n+7mn^2-3n^3$ de m^3-1 .

42 RESTA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

(1) De $\frac{3}{5}x^3$ restar $-\frac{1}{2}x^5-\frac{2}{3}xy^2+\frac{5}{4}x^2y-\frac{1}{2}y^4$.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5}x^3 \\ -\frac{1}{2}x^5-\frac{2}{3}xy^2+\frac{5}{4}x^2y-\frac{1}{2}y^4 \\ \hline \frac{11}{10}x^3-\frac{2}{3}xy^2+\frac{5}{4}x^2y+\frac{1}{2}y^4 \end{array} \text{ R.}$$

(2) Restar $-4a^3b^3-\frac{1}{10}ab+\frac{2}{3}a^2b^2-9$ de $-\frac{3}{5}ab+\frac{1}{6}a^2b^2-8$.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} -\frac{3}{5}ab+\frac{1}{6}a^2b^2-8 \\ 4a^3b^3-\frac{2}{3}a^2b^2+\frac{1}{10}ab+9 \\ \hline 4a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{2}ab+1 \end{array} \text{ R.}$$

EJERCICIO 24

De:

1. $\frac{1}{2}a^2$ restar $-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{2}{5}b^2$.
 2. 15 restar $\frac{4}{5}xy+\frac{2}{3}yz-\frac{8}{9}$.
 3. $\frac{8}{9}bc$ restar $-\frac{8}{4}ab+\frac{1}{6}bc-\frac{2}{9}cd$.
 4. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a+\frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$.
 5. $\frac{5}{9}x^2-\frac{3}{8}y^2$ restar $\frac{5}{7}xy+\frac{1}{10}y^2-\frac{3}{11}$.
 6. $\frac{6}{8}m^3+\frac{2}{9}n^3$ restar $-\frac{1}{2}m^2n+\frac{3}{8}mn^2-\frac{1}{9}$.