Programação Linear - Método Simplex

1 Método Simplex

1.1. Solução exata para os modelos de Programação Linear

O modelo de Programação Linear (PL) reduz um sistema real a um conjunto de equações ou inequações em que se pretende otimizar uma função objetivo. O conjunto de equações deve ser, em princípio, um conjunto indeterminado, de forma que o número de soluções ditas "viáveis" é infinito. Mesmo sabendo que alguma solução ótima (se existir) será encontrada em um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, a sua determinação não é uma tarefa fácil. Infelizmente, esse número de pontos extremos ou vértices pode ser muito grande, um número exponencial, em relação às variáveis. As dificuldades que deverão ser vencidas para encontrar a melhor solução possível para um sistema indeterminado de equações lineares, segundo um critério qualquer, são:

- ✓ Como obter soluções básicas factíveis do sistema de equações.
- ✓ Como evitar o teste de todas as soluções básicas factíveis possíveis para garantir a otimização do sistema.

É nesse contexto que o **algoritmo simplex** destaca-se como uma das grandes contribuições à Programação Matemática desse século. Trata-se de um algoritmo geral extremamente eficiente para a solução de sistemas lineares e, adaptável ao cálculo computacional (apesar de algumas dificuldades clássicas), e cuja compreensão funcional embasará vários outros modelos. O estudo desse algoritmo é indispensável para o profissional que deseja dominar as técnicas quantitativas de análise e solução de problemas em um contexto razoavelmente avançado.

Será visto a técnica utilizada para achar, algebricamente, a solução ótima de um modelo de programação linear. O processo que realiza tal tarefa tem o nome de **Método Simplex**.

1.2. Teoremas fundamentais

Teorema 1: O conjunto de todas as soluções compatíveis (ou viáveis ou factíveis) do modelo de programação linear é um conjunto convexo.

Teorema 2: Toda solução básica factível do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis, isto é, do conjunto convexo C do Teorema 1.

Teorema 3: a) se a função objetivo possui um máximo (ou mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 1.

b) se a função objetivo assume um máximo (ou mínimo) em mais de um ponto extremo, então ele assume o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

(Veja a demonstração destes teoremas em PUCCINI, A. L., Introdução à Programação Linear. Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1972).

1.3. O Método Simplex

O método Simplex é um procedimento iterativo que fornece a solução de qualquer PPL (Problema de Programação Linear) em um número finito de iterações. Indica também se o problema tem solução ilimitada, se não tem solução ou se possui infinitas soluções.

Para que o método Simplex possa ser iniciado é necessário que uma solução básica factível esteja disponível. O método verifica se a presente solução é ótima. Se for o procedimento termina. Caso contrário um dos pontos extremos adjacentes ao ponto extremo atual fornece um valor melhor para a função objetivo. É feita a mudança do ponto extremo atual para o ponto extremo adjacente que forneça o maior ganho com relação à função objetivo (ou seja, que mais aumente o valor da função objetivo, se o problema for de maximização, ou que mais diminua o valor da função objetivo, se o problema for de minimização). No novo ponto extremo testa-se a otimalidade da solução e repete-se o que havia sido feito. O processo termina quando, estando em um ponto extremo, todos os pontos extremos a ele adjacentes fornecerem valores piores para a função objetivo.

Algebricamente um ponto extremo adjacente é uma solução básica factível com todas as variáveis básicas da solução anterior, com exceção de apenas uma delas. Achar, portanto, a nova solução básica factível (ponto extremo adjacente) exige a escolha de uma variável básica para sair da base atual, tornando-se não-básica, e conseqüentemente a escolha de uma variável não-básica para entrar na base em sua substituição. O método simplex consiste nos seguintes passos:

Passos:

i. Determinar uma solução básica factível inicial;

ii. Verificar se a solução atual é ótima. Se for pare. Caso contrário siga para o passo iii;

iii. Determinar a variável não-básica que deverá entrar na base;

iv. Determinar a variável básica que deverá sair da base;

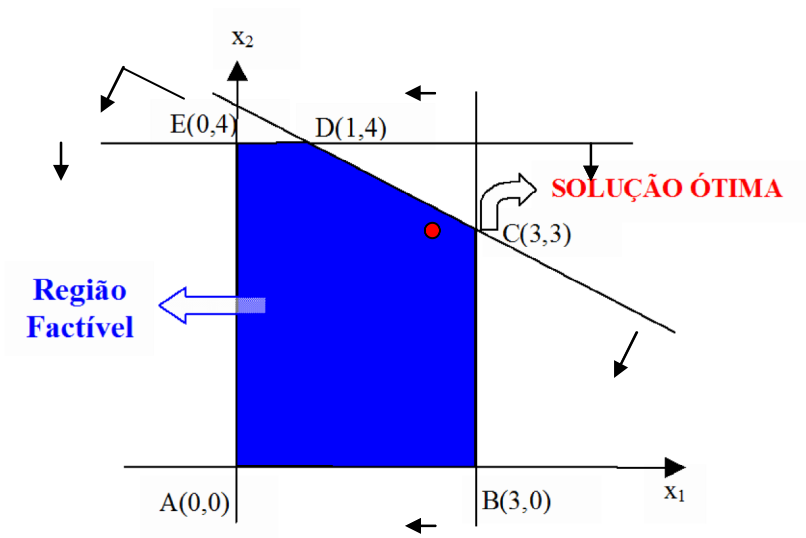
v. Determinar a nova solução básica factível, e voltar para o passo ii.

1.3.1. Solução algébrica

Consideremos o seguinte modelo de PL:

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Pela representação gráfica temos:



Solução ótima: $x_1 = 3,\ x_2 = 3$ e $z = 21$

Com a introdução das variáveis de folga $x_{3,}$ x_4 e x_5 obtém-se:

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a} \quad \begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 3 \\ \quad x_2 \quad + x_4 \quad = 4 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Quando todas as restrições forem do tipo menor ou igual $(\leq)$ e os b_i não-negativos, como é o caso do modelo (1), sempre se terá uma base óbvia, formada pelas variáveis de folga.

Diz-se que o sistema de equações (2) está na forma canônica porque apresenta as seguintes características:

a) Todas as variáveis são não-negativas;

b) Todos os b_i são não-negativos;

c) Tem uma base óbvia.

Quando um sistema de equações apresenta apenas as características a) e b) acima, diz-se que ela está na forma padrão.

Assim, o sistema (2) apresenta uma solução básica factível óbvia, com os seguintes valores para as variáveis:

Variáveis não básicas: $x_1 = x_2 = 0$

Variáveis básicas: $x_3 = 3$

$x_4 = 4$

$x_5 = 9$

Como o sistema (2) está na forma canônica o passo i do método simplex já foi alcançado. A solução básica factível óbvia deste sistema corresponde ao vértice *A* (0,0) do trapézio *ABCDE*.

O próximo passo (passo ii) do método consiste em verificar se a solução é ótima. O valor da função objetivo $(z = 5x_1 + 2x_2)$ é zero, pois $x_1 = x_2 = 0$. Qualquer uma dessas variáveis não-básicas que entrar na base assumirá algum valor positivo, o que fará com que o valor da função objetivo aumente. Portanto, a solução ótima ainda não foi alcançada.

Como a solução ainda não é a ótima, é preciso saber qual variável não-básica (x_1 ou x_2) deve entrar na base. O método simplex determina que a variável x_1 deve entrar na base, pois é a que possui o maior coeficiente na função objetivo. Este critério de entrada na base visa crescer o valor da função objetivo o mais rapidamente possível.

Para determinar qual variável deverá sair da base, é preciso colocar todas as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas. De (2) tem-se:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_1 && \Rightarrow x_1 \leq 3 \\ x_4 &= 4 - x_2 && \\ x_5 &= 9 - x_1 - 2x_2 && \Rightarrow x_1 \leq 9 \end{aligned} \qquad (3)$$

Pode-se agora saber como x_1 influencia os valores das variáveis básicas x_3, x_4 e x_5. Lembre-se que x_2 continuará fora da base com valor nulo. De (3) conclui-se que quando x_1 entrar na base assumindo algum valor positivo, as variáveis x_3 e x_5 diminuirão de valor e a variável x_4 ficará inalterada. Deseja-se aumentar tanto quanto possível o valor de x_1, respeitando, entretanto, as restrições de não-negatividade das variáveis. Sai da base, desta forma, aquela variável que mais rapidamente se anular com o crescimento de x_1. A variável x_3, portanto, sai da base.

A nova base será então formada pelas variáveis x_1, x_4 e x_5. É necessário atualizar o sistema (2) para outra forma canônica, de tal forma que a nova base seja formada por essas variáveis. Para isto, basta multiplicar a primeira equação de (2) por (-1) e somá-la à terceira equação, obtendo:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad\quad &= 3 \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 4 \\ 2x_2 - x_3 \quad + x_5 &= 6 \end{aligned} \qquad (4)$$

A solução básica compatível óbvia de (4) é a seguinte:

Variáveis não básicas: $x_2 = x_3 = 0$

Variáveis básicas: $x_1 = 3$

$x_4 = 4$

$x_5 = 6$

Esta solução corresponde ao vértice B (3,0) do trapézio, adjacente ao vértice A (0,0).

É necessário agora testar se a solução é ótima. Isto não pode ser feito com a função objetivo $z = 5x_1 + 2x_2$, pois:

- ✓ não se pode avaliar a influencia da variável não-básica x_3 no comportamento da função objetivo;
- ✓ não se pode afirmar que a função objetivo aumentará de valor com a entrada de x_2 na base, pois a variável x_1 poderá diminuir de valor, mesmo permanecendo na base.

Deve-se obter a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas. Sabe-se por (4) que x_1=3 − x_3, então:

$$z = 5x_1 + 2x_2 = 5(3 - x_3) + 2x_2 = 15 + 2x_2 - 5x_3$$

Agora pode-se afirmar que a presente solução ainda não é ótima, pois se x_2 entrar na base aumentará o valor da função objetivo. A variável x_3 não deve entrar na base, pois se tal fato ocorrer, o valor de z será decrementado.

Visto que x_2 é a variável a entrar na base, deve-se colocar as variáveis básicas em função das não-básicas para determinar qual variável sairá da base. De (4) obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_3 & & \\ x_4 &= 4 - x_2 & \Rightarrow\ & x_2 \le 4 \\ x_5 &= 6 - 2x_2 + x_3 & \Rightarrow\ & x_2 \le 3 \end{aligned} \tag{5}$$

A variável x_5, sendo a que se anula mais rapidamente com o crescimento de x_2, é que deve sair da base.

Deve-se agora transforma o sistema (4) para uma nova forma canônica de tal forma que a nova base seja formada pelas variáveis x_1, x_2 e x_4. Para isso, é necessário: a) dividir a terceira equação de (4) por 2; b) multiplicar a terceira equação de (4) por (-1/2) e somá-la a segunda equação, obtendo:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 &= 1 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad + \frac{1}{2}x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{6}$$

De (6) tem-se a seguinte solução básica factível:

Variáveis não básicas: $x_3 = x_5 = 0$

Variáveis básicas: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_4 = 1$

Esta solução corresponde ao ponto extremo C (3,3) adjacente a B (3,0), do conjunto de soluções compatíveis de (1).

Deve-se colocar a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas, para determinar se a presente solução é ótima. De (6) obtém-se que $x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$, o qual fornece:

$$z = 15 + 2x_2 - 5x_3 = 15 + 2\left(3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right) - 5x_3 = 21 - 4x_3 - x_5 \ .$$

O valor da função objetivo em C(3,3) pode ser calculado de 2 formas:

a) $z^* = 5x_1^* + 2x_2^* = 21$

b) $z^* = 21 - 4x_3^* - x_5^*$ (como x_3^* e x_5^* valem 0, $z^* = 21$)

Assim, pode-se afirmar que esta é a solução ótima, pois se x_3 ou x_5 entrarem na base o valor da função objetivo será decrementado.

Com os novos conceitos que foram introduzidos pode-se reescrever os cinco passos do método simplex, para o caso de maximização, da maneira apresentada a seguir.

<u>Método Simplex (para maximização)</u>

i. Achar uma solução básica factível óbvia (forma canônica inicial).
ii. Colocar a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas. Se todos os coeficientes dessas variáveis forem negativos (ou nulos) a presente solução é ótima. Caso contrário siga para o passo iii.
iii. Colocar na base a variável não-básica que tiver maior coeficiente positivo na função objetivo do passo ii.
iv. Tirar da base a variável não-básica que se anula mais rapidamente, quando a variável que entrar for aumentada de valor.
v. Achar uma outra forma canônica para o sistema de equações, levando em consideração os passos iii e iv. Voltar ao passo ii.

1.3.2. Solução usando quadros

A utilização de quadros para a aplicação do método simplex em modelos de PL visa apenas simplificar os cálculos do item anterior.

Inicialmente vamos escrever o sistema (2) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z - 5x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 3 \\ x_2 \qquad + x_4 \quad &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \end{aligned} \qquad (7)$$

Pode-se representar o sistema (7) da maneira esquemática abaixo:

↓

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-5	-2	0	0	0	0	(0)
x_3	0	1	0	1	0	0	3	(1)
x_4	0	0	1	0	1	0	4	(2)
x_5	0	1	2	0	0	1	9	(3)

→ (8)

Note que os coeficientes da função objetivo na linha (0) de (7) sofreram inversão de sinais. Como os coeficientes de $x_{3,}$ x_4 e x_5 na linha (0) de (7) são nulos, a função objetivo já se encontra em função das variáveis não-básicas x_1 e x_2. Pode-se então afirmar que a presente solução não é ótima, e que a variável a entrar na base é x_1.

Para determinação da variável que sai da base, podemos obter as relações (3) a partir de (8) e repetir o raciocínio do item anterior. Pela análise feita nas relações (3) pode-se concluir que nas linhas (1), (2) e (3) de (8) só interessam:

- ✓ os coeficientes do vetor independente b;
- ✓ os coeficientes de x_1 que forem positivos.

O valor máximo que x_1 pode assumir sem tornar negativa nenhuma outra variável, será obtido pelas relações entre os coeficientes acima mencionados, ou seja:

$$\text{linha (1): } x_1 \leq \frac{3}{1} \qquad \text{e} \qquad \text{linha (3): } x_1 \leq \frac{9}{1}.$$

A variável x_1 tomará então o valor 3 e deverá sair da base a variável que está associada à linha (1), ou seja, x_3.

Visto que entra x_1 no lugar de x_3, o próximo quadro deverá apresentar a seguinte base:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
Base	1	0			0	0		(0)	
x_1	0	1			0	0		(1)	(9)
x_4	0	0			1	0		(2)	
x_5	0	0			0	1		(3)	

Observe na tabela acima que os coeficientes na função objetivo de $x_{1,}$ x_4 e x_5 foram colocados iguais a zero, pois é necessário tê-la em termos das variáveis não-básicas.

Ainda, é preciso completar o quadro anterior (9) a partir do quadro (8). Apenas as colunas de x_1 são diferentes nesses dois quadros. Tem-se de transformar a coluna de x_1 do quadro (8) para a desejada no quadro (9). É claro que, para não se alterar as equações, deve-se aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas com a coluna de x_1. A linha (1) será a linha pivô das transformações por ser a linha associada à variável que sai da base. Para se terminar o quadro (9) são necessárias as seguintes operações no quadro (8):

- ✓ repetir as linhas (1) e (2);
- ✓ multiplicar a linha (1) por (-1) e somá-la a linha (3);
- ✓ multiplicar a linha (1) por 5 e somá-la a linha (0).

Assim,

			↓						
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
Base	1	0	-2	5	0	0	15	(0)	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	(1)	(10)
x_4	0	0	1	0	1	0	4	(2)	
x_5	0	0	2	-1	0	1	6	(3) →	

Da linha (0) de (10) tem-se que $z = 15 + 2x_2 - 5x_3$ que coincide com a relação obtida anteriormente.

Pelo coeficiente -2 na linha (0) de (10) pode-se afirmar que a solução ainda não é a ótima. A variável que entra na base é x_2.

Do quadro (10) obtém-se:

$$\text{linha (2): } x_2 \le \frac{4}{1} \qquad \text{e} \qquad \text{linha (3): } x_2 \le \frac{6}{2}.$$

Deve-se sair da base a variável associada com a linha (3), ou seja, x_5. As seguintes operações devem ser realizadas no quadro (10):

- ✓ dividir a linha (3) por 2;
- ✓ multiplicar a linha (3) por -1/2 e somá-la à linha (2);
- ✓ repetir a linha (1);
- ✓ somar a linha (3) à linha (0).

Assim,

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
Base	1	0	0	4	0	1	21	(0)	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	(1)	(11)
x_4	0	0	0	1/2	1	-1/2	1	(2)	
x_2	0	0	1	-1/2	0	1/2	3	(3)	

A presente solução é a ótima, pois não existe nenhum coeficiente negativo na linha (0) do quadro (11). A função objetiva será $z = 21 - 4x_3 - x_5$ que coincide com a relação obtida anteriormente. Portanto, $x_1^* = 3,\ x_4^* = 1,\ x_2^* = 3$ e $z^* = 21$.

Procedimento do método Simplex (problemas de maximização)

Passo 1 Introduzir as variáveis de folga; uma para desigualdade.

Passo 2 Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na primeira linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada.

Passo 3 Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero as variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga.

Passo 4 Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não-básica que oferece a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, que tem maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isto quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.

Passo 5 Para escolher a variável que deve sair da base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a. dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.
b. o menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não-básica.

Passo 6 Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.

Passo 7 Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

***Exemplo*:** Usando o algoritmo Simplex, resolva o seguinte problema:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 \le 4 \\ x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Solução</u>:

Primeira iteração

Passo 1:

1. Introduzindo as variáveis de folga...

$$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 4 \\ \quad x_2 \quad + x_4 \quad = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

2. Montagem da matriz (ou quadro) de cálculos...

	z	x_1	x_2 $\downarrow$	x_3	x_4	x_5	b		
Base	1	-3	-5	0	0	0	0	(0)	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	(1)	
x_4	0	0	1	0	1	0	6	(2)	$\rightarrow$
x_5	0	3	2	0	0	1	18	(3)	

3. Escolha da solução básica factível inicial...

   Variáveis básicas:

   1ª. linha: $x_3 = 4$

   2ª. linha: $x_4 = 6$

   3ª. linha: $x_5 = 18$

   Variáveis não-básicas:

   $$x_1 = x_2 = 0$$

   Função objetivo: $z = 0$

Passo 2:

4. Escolha da variável que deve entrar na base...

   x_2 pois tem o maior coeficiente na última linha (-5), (maior contribuição por unidade)

Passo 3**:**

5. Definição da variável que deve sair da base...

   Tomando-se a coluna de trabalho e efetuando-se a divisão dos elementos da coluna b pelos elementos da coluna x_2, observamos que o menor quociente ocorre na segunda linha, ou seja, para a variável x_4.

Passo 4:

6. Transformação da matriz...

   Neste passo, deverão ser realizadas as operações elementares com as linhas da matriz, de forma que a coluna de x_2 venha a se tornar um vetor identidade, com o elemento 1 na segunda linha.

   1ª. operação: substituir L_3 por L_3+(-2)L_2 , ou seja, $L_3 = -2L_2 + L_3$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-3	-5	0	0	0	0	(0)
x_3	0	1	0	1	0	0	4	(1)
x_4	0	0	1	0	1	0	6	(2)
x_5	0	3	0	0	-2	1	6	(3)

   2ª. operação: substituir L_0 por L_0 + 5L_2, ou seja, $L_0 = 5L_2 + L_0$

↓

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
Base	1	-3	0	0	5	0	30	(0)	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	(1)	
x_2	0	0	1	0	1	0	6	(2)	
x_5	0	3	0	0	-2	1	6	(3)	→

Passo 5:

Portanto a nova solução obtida é:

Variáveis básicas: 1ª. linha: $x_3 = 4$

2ª. linha: $x_2 = 6$

3ª. linha: $x_5 = 6$

Variáveis não básicas:

$$x_1 = x_4 = 0$$

Função objetivo: $z = 30$

Segunda iteração

Passo 2:

7. Escolha da nova variável que deve entrar na base...

   x_1 pois é a única que tem coeficiente negativo na última linha (-3)

Passo 3:

8. Definição da nova variável que deve sair da base...

   Tomando-se a coluna de trabalho e efetuando-se a divisão dos elementos da coluna b pelos elementos da coluna x_1, observamos que o menor quociente ocorre na terceira linha, ou seja, para a variável x_5.

Passo 4:

9. Transformação da matriz...

   Neste passo, devemos encontrar o vetor identidade para a variável x_1, com o elemento 1 na terceira linha.

   1ª. operação: substituir L_3 por $L_3 \div 3$, ou seja, $L_3 = \frac{1}{3} L_3$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-3	0	0	5	0	30	(0)
x_3	0	1	0	1	0	0	4	(1)
x_2	0	0	1	0	1	0	6	(2)
x_5	0	1	0	0	-2/3	1/3	2	(3)

2ª. operação: substituir L_1 por L_1 + (-1)L_3, ou seja, $L_1 = (-1) L_3 + L_1$

3ª. operação: substituir L_0 por L_0 +3L_3, ou seja, $L_0 = 3L_3 + L_0$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	0	0	3	1	36	(0)
x_3	0	0	0	1	2/3	-1/3	2	(1)
x_2	0	0	1	0	1	0	6	(2)
x_1	0	1	0	0	-2/3	1/3	2	(3)

Passo 5:

Portanto a nova solução obtida é:

Variáveis básicas

1ª. linha: $x_3 = 2$

2ª. linha: $x_2 = 6$

3ª. linha: $x_1 = 2$

Variáveis não-básicas

$x_4 = x_5 = 0$

Função objetivo

$z = 36$

Ao procurarmos a próxima variável que deve entrar na base, verificamos que todos os coeficientes da linha (0) são positivos ou nulos, o que significa que qualquer aumento no valor das variáveis não básicas faria diminuir o valor de *z*. Logo, podemos concluir que a solução encontrada é ótima.

Para completar este estudo, verifique graficamente este resultado.

1.4. Casos especiais no Simplex

Na modelagem de um problema de programação linear, algumas situações específicas podem ocorrer, o que pode levar a casos em uma forma matemática diferente da apresentada até o momento. Entretanto, alguns artifícios matemáticos ajudam a reduzir o modelo obtido à forma padrão estudada.

1.4.1. Problema de Minimização

a) A minimização de uma função $z(x)$ é matematicamente análoga à maximização da negativa desta função $(-z(x))$, ou seja, Min $z(x)$ = Max $(-z(x))$.

***Exemplo*:**

Minimizar $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

é equivalente a

maximizar $z' = - c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n$

com $z' = - z$.

Essa é uma das formas de se resolver os problemas de minimização utilizando o mesmo algoritmo.

b) Mudar o teste pra saber se a solução é ótima e o critério de entrada na base.

A variável que entra na base passa a ser aquela que tem o maior valor *positivo* na linha z transformada (ou seja, aquela linha que corresponde à função objetivo transformada). Caso todas tenham coeficientes negativos ou nulos, a solução obtida é ótima.

1.4.2. Empate no critério de entrada da variável não-básica

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A única implicação envolvida é que pode-se escolher um caminho mais longo ou mais curto para chegar à solução ótima.

1.4.3. Empate no critério de saída da variável básica

Quando houver empate na escolha da variável que sai da base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente, só que agora teremos uma solução básica degenerada, isto é, uma variável que vai entrar na base com um valor igual a zero.

Exemplo:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Colocando as variáveis de folga obtém-se:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

↓

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-5	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	→
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	4	3	0	0	1	12	

A variável que deve entrar na base é x_1. Para escolher a variável que sai da base deve-se fazer:

linha (1): $x_1 \le \frac{3}{1}$ linha (3): $x_1 \le \frac{12}{4}$

Nos dois casos tem-se que $x_1 \le 3$. Escolhe-se arbitrariamente x_3 para sair da base. O novo quadro será:

	z	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	-2	5	0	0	15	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	0	3	-4	0	1	0	→

Note que a variável básica x_5 do quadro acima é nula. Isso sempre acorrerá quando houver um empate na saída. Aconteceu, nesse caso, de x_3 e x_5 se anularem ao mesmo tempo para o valor de $x_1 = 3$. Assim, a variável que ficar na base também se anulará. Quando isto ocorrer diz-se que a solução básica factível é degenerada.

O próximo quadro será:

	z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
Base	1	0	0	7/3	0	2/3	15
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3
x_4^*	0	0	0	4/3	1	-1/3	4
x_2^*	0	0	1	-4/3	0	1/3	0

Pelo quadro acima temos a seguinte solução ótima:

$$z = 15 \text{ e } x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 4,\ x_5 = 0$$

Se tivéssemos escolhido na ocasião do empate x_5, para sair da base, teríamos o seguinte quadro:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
Base	1	0	7/4	0	0	5/4	15
x_3^*	0	0	-3/4	1	0	-1/4	3
x_4^*	0	0	1	0	1	0	4
x_1^*	0	1	3/4	0	0	1/4	0

Deve-se ressaltar que no segundo caso conseguiu-se chegar à solução ótima com uma iteração a menos.

1.4.4. Soluções múltiplas

O método simplex é capaz de acusar a ocorrência deste tipo de solução.

Exemplo:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a } \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Colocando as variáveis de folga obtém-se:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.a } \begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 3 \\ \quad x_2 \quad + x_4 \quad = 4 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	z	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-1	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	4	→
x_5	0	1	2	0	0	1	9	

A variável que deve entrar na base é x_2. Para escolher a variável que sai da base deve-se fazer:

linha (2): $x_4 \leq 4$ linha (3):$x_2 \leq 9/2 = 4{,}5$

	z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-1	0	0	2	0	8	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	
x_2	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	1	0	0	-2	1	1	→

A variável que é candidata a entrar na base é x_1. Para escolher a variável que sai da base deve-se fazer:

linha (1): $x_1 \leq 3$ linha (3): $x_5 \leq 1$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
Base	1	0	0	0	0	1	9
x_3^*	0	0	0	1	2	-1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	4
x_1^*	0	1	0	0	-2	1	1

Assim, temos a seguinte solução ótima:

$$z = 9 \text{ e } x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$$

Observe que o coeficiente da variável não-básica x_4 na função objetivo é nulo. A função objetivo é $z = 9 - 0x_4 - x_5$. A variável x_4 pode entrar na base, assumindo qualquer valor, que a função objetivo ficará com seu valor inalterado.

Fazendo x_4 entrar na base, obtém-se:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
Base	1	0	0	0	0	1	9
x_4^*	0	0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2^*	0	0	1	-1/2	0	1/2	3
x_1^*	0	1	0	1	0	10	3

Observe no quadro acima que o coeficiente de x_3 na função objetivo é nulo, logo se x_3 entrar na base deve-se retornar ao quadro anterior.

1.4.5. Variável livre

Se alguma variável do modelo não possuir a condição de não-negatividade, podemos substituí-la pela diferença de duas outras variáveis não negativas, pois um número qualquer sempre pode ser escrito como a diferença de dois números positivos.

Exemplo:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{S.a } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ livre}, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$, com $x_2^{'} \geq 0$ e $x_2^{''} \geq 0$ e substituindo no modelo anterior, teremos o modelo equivalente:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2^{'} - 2x_2^{''} + x_3$$

$$\text{S.a } \begin{cases} x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2^{'} - 3x_2^{''} \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.4.6. Solução ilimitada

Isto ocorre quando a variável que entra na base não possui em sua coluna nenhum coeficiente positivo. Os programas de computador, neste caso, apresentam a última solução básica antes que a solução se torne ilimitada.

1.5. Solução básica factível inicial

Para se iniciar o método Simplex é necessário que o sistema se encontre na forma canônica, ou seja, que o mesmo apresente uma solução básica factível óbvia. Com todas as restrições do tipo ≤ e todos os $b_i \geq 0$ sempre existirá uma base inicial óbvia formada pelas variáveis de folga. Mas em alguns casos a base inicial não é óbvia.

Casos óbvios:

Uma desigualdade em uma direção (≤ ou ≥) pode ser mudada para uma desigualdade na direção oposta pela multiplicação de ambos os lados da desigualdade por (-1).

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \underset{\text{variáveis de folga}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Uma base imediata é formada pelas variáveis x_3 e x_4 com solução $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$ e $x_4 = 1$.

2. $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \geq -4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \underset{\text{variáveis de folga}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - x_3 \qquad = -4 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

Neste caso, a base formada pelas variáveis x_3 e x_4 também é uma base factível.

<u>Casos não óbvios:</u>

1. $\begin{matrix} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{matrix}$ e $b \not\geq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ varáveis de folga não constituem base factível

2. $\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}$ e $b \not\geq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ em geral, não há solução básica factível óbvia

Nestes casos, devemos recorrer ao auxílio das variáveis artificiais.

1.5.1. Variáveis artificiais

Consideremos o seguinte problema de programação Linear:

$$\text{Max } z = -x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Passando a forma padrão:

$$\text{Max } z = -x_1 + 2x_2$$
$$\text{S.a} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = 1 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Este sistema não está na forma canônica, pois $x_3 \leq 0$ e $x_4 \leq 0$. A solução básica formada pelas **variáveis não-básicas:** $x_1 = x_2 = 0$ e pelas **variáveis básicas:** $x_3 = -2$, $x_4 = -1$, $x_5 = 3$ não é factível, pois x_3 e x_4 são negativas.

Não havendo solução inicial óbvia são introduzidas variáveis artificiais x_6 e x_7 nas restrições:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_6 & = & 2 \\
-x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + x_7 & = & 1 \\
x_2 \quad + x_5 & = & 3
\end{array}
$$

Agora a base formada pelas variáveis x_6, x_7 e x_5 é factível, ou seja, fornece uma solução de partida para o simplex. Porém o novo problema linear é equivalente ao problema original se as variáveis artificiais forem nulas.

1.6. Método simplex em duas fases

O processo iterativo do Método Simplex sempre exige uma solução básica inicial para se iniciar a busca da solução ótima. Nos casos vistos até o presente momento, essa solução básica era formada pelas variáveis de folga, já que as restrições eram do tipo $(\leq)$. Quando as restrições são do tipo $(=)$ ou $(\geq)$, esta solução básica inicial "natural" não existe.

Seja o exemplo abaixo:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } z = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 \\
\text{S.a } \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Como temos todas as restrições do tipo $(\geq)$, as variáveis de excesso devem ter coeficientes negativos, por serem de excesso. O problema transformado, ou seja, o problema com a inclusão das variáveis de excesso é dado por:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } z = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 \\
\text{S.a } \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
\end{array}
$$

onde x_4 e x_5 são as variáveis de excesso.

Note que, pelo processo de solução anterior, as variáveis de excesso (x_4 e x_5) passariam a ter valor negativo na solução inicial $(x_4 = -16$ e $x_6 = -12)$, o que não é permitido. Assim, a solução $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ é inviável. É necessário então encontrar uma solução viável para que o método Simplex possa ser iniciado.

Uma das maneiras de se resolver isto é a introdução de novas variáveis. Estas variáveis são chamadas de <u>variáveis artificiais</u> e estas variáveis não tem significado algum para o problema real, mas permitem a inicialização do processo de maneira automática, utilizando-se o mesmo algoritmo Simplex, já descrito. Será colocada uma variável artificial em cada restrição do modelo, ou seja:

$$\begin{aligned} &8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 \quad + x_6 \qquad = 16 \\ &4x_1 + 6x_2 \qquad\qquad - x_5 \quad + x_7 = 12 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Como se pode perceber, o problema com as restrições acima não é o mesmo problema, a não ser que as variáveis x_6 e x_7 sejam iguais a zero.

Desta forma, podemos resolver o problema em duas fases: na primeira fase, substituímos a função objetivo original por uma <u>função objetivo auxiliar</u> formada pela soma das variáveis artificiais:

$$w = x_6 + x_7 .$$

O problema então é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad w = x_6 + x_7 \\ &\text{S.a} \quad \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 \quad + x_6 \qquad = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 \qquad\qquad - x_5 \quad + x_7 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nesse momento, aplicamos o método Simplex de forma a minimizar a função objetivo auxiliar, com as restrições contendo as variáveis auxiliares. Quando a solução ótima for atingida, dois casos podem ocorrer:

1. $w = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar desprezando-se as variáveis artificiais e a função objetivo auxiliar. É o início da segunda fase do processo.
2. $w \neq 0$: neste caso, o problema original não tem solução viável o que significa que as restrições devem ser inconsistentes.

A primeira fase do problema, que consiste na minimização da função objetivo auxiliar, fornecerá uma solução factível para o problema original. A segunda fase consiste em resolver o problema original tomando como solução inicial os valores obtidos pela primeira fase para as variáveis originais do problema e as variáveis de folga ou excesso e considerando a função objetivo original do problema.

Exemplo:

Vamos resolver o problema anterior de maneira completa.

a) Solução inicial

Para resolver o problema, monta-se o quadro de forma semelhante à sistemática anterior, colocando-se a função objetivo artificial na linha (0). Como a função objetivo é de minimização a mesma deve ser transformada em uma função de maximização para que o mesmo algoritmo possa ser utilizado. Neste caso a função Min $w = x_6 + x_7$ passa a ser Max $-w = -x_6 - x_7$, que no quadro escreve-se $-w + x_6 + x_7 = 0$. O quadro do exemplo fica:

	w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
Base	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_6	0	8	4	4	-1	0	1	0	16
x_7	0	4	6	0	0	-1	0	1	12

As variáveis x_6 e x_7 devem ser eliminadas da função objetivo para que a mesma fique em termos apenas das variáveis não-básicas.

	w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
Base	-1	-4	-6	0	0	1	1	0	-12
x_6	0	8	4	4	-1	0	1	0	16
x_7	0	4	6	0	0	-1	0	1	12

↓

	w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
Base	-1	-12	-10	-4	1	1	0	0	-28	
x_6	0	8	4	4	-1	0	1	0	16	→
x_7	0	4	6	0	0	-1	0	1	12	

A seguir, aplica-se o método Simplex normalmente, usando a função objetivo auxiliar.

b) Fase 1 - Primeira iteração

Variável a entrar na base: x_1

Variável a sair da base: x_6 , pois

linha (1): $x_1 \leq \dfrac{16}{8}$ linha (2): $x_1 \leq \dfrac{12}{4}$

$\downarrow$

	w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
Base	-1	0	-4	2	-1/2	1	3/2	0	-4	
x_1	0	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2	
x_7	0	0	4	-2	1/2	-1	-1/2	1	4	$\rightarrow$

b) Fase 1 - Segunda iteração

Variável a entrar na base: x_2

Variável a sair da base: x_7 , pois

linha (1): $x_2 \leq \dfrac{2}{1/2}$ linha (2): $x_2 \leq \dfrac{4}{4}$

	w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
Base	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/16	-1/8	3/2
x_2	0	0	1	-1/2	1/8	-1/4	-1/8	1/4	1

Como o valor da função objetivo artificial (w) é zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é a solução básica inicial para a fase 2.

c) Fase 2 - quadro inicial

Substituindo no quadro a função objetivo artificial pela função objetivo original e abandonando as variáveis artificiais tem-se:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	-1	16	12	5	0	0	0
x_1	0	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/2
x_2	0	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1

(lembre-se que min $z = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 = \max(-z) = -16x_1 - 12x_2 - 5x_3 \Rightarrow -z + 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 0$)

Colocando o PL na forma canônica relativa à base formada pelas variáveis x_1 e x_2 tem-se:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	-1	0	12	-7	3	-2	-24
x_1	0	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/2
x_2	0	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1

↓

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	-1	0	0	-1	3/2	1	-36
x_1	0	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/2
x_2	0	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1

→

d) Fase 2 – primeira iteração

Variável a entrar na base: x_3

Variável a sair da base: x_1 , pois na linha (1): $x_3 \leq \dfrac{3/2}{3/4}$

linha (2): o coeficiente na coluna de x_3 é negativo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	-1	4/3	0	0	5/4	7/6	-34
x_3	0	4/3	0	1	-1/4	1/6	2
x_2	0	0	1	0	0	-1/6	2

Como os coeficientes da última linha são todos nulos ou positivos, a solução básica inicial é também a solução ótima. Assim, a solução ótima obtida é:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2 \text{ e } z = 34.$$

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. L. de, Introdução à Pesquisa Operacional – Métodos e Modelos para a Análise de Decisão. 4. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2009.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R. e YANASSE, H., Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Campus, 2007.

GOLDBARG, M. C. e LUNA, H. P., Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos. 2. ed., Rio de Janeiro: Campus, 2005.

LACHTERMACHER, G., Pesquisa Operacional na Tomada de Decisão (modelagem em Excel). 2. ed., revista e atualizada, Editora Campus, 2004.

PUCCINI, A. L., Introdução à Programação Linear. Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1972.