

Aula de Hoje

- **Resolução de Problemas de Programação Linear:**
 - **Introdução ao Método Simplex**
 - **Método Simplex: forma tabular**

Introdução ao Método Simplex

Método Simplex: introdução

- Sabe-se que para encontrar a solução ótima de um problema de Programação Linear basta procurarmos entre os **vértices**.
- Entretanto a quantidade de vértices de um problema prático é de $C_{n,m}$ onde m é o numero de restrições e n é o número de variáveis.
- Por exemplo se tiver um problema com $m=50$ e $n=100$ variáveis tem-se: $C_{100,50} = 100!/50!(100-50)! \cong 1 \times 10^{29}$
- Isso torna **inviável** a enumeração de todos os vértices existentes de um problema de tamanho moderado
- O método Simplex consiste num procedimento **eficiente** para a busca da solução ótima entre os vértices.

Método Simplex: introdução

• **Exemplo:** Uma Indústria de confecção produz camisas de manga longa e de manga curta. Os recursos disponíveis são de 1200 reais para compra de tecido e as máquinas permitem 40 horas de produção por semana. Após uma pesquisa de mercado decidiu-se que a produção total não pode exceder de 800 unidades. Além disso, o número de unidades produzidas de camisa manga longa não pode exceder o número de unidades produzidas de camisa manga curta em mais de 450 unidades. Sabe-se que, cada camisa manga longa requer 2 reais de tecido e 3 minutos de produção e cada camisa manga curta requer 1 real de tecido e 4 minutos de produção. O departamento de finanças tem a informação de que cada camisa manga longa dá um lucro de 8 reais e cada camisa manga curta dá um lucro de 5 reais. O gerente da indústria deseja saber qual o melhor esquema de produção de forma a respeitar as restrições e maximizar o lucro.

Método Simplex: introdução

- Modelo de Programação Linear

Max $8X_1 + 5X_2$ (lucro semanal)

Sujeito a:

$2X_1 + 1X_2 \leq 1200$ (Quantidade de tecido)

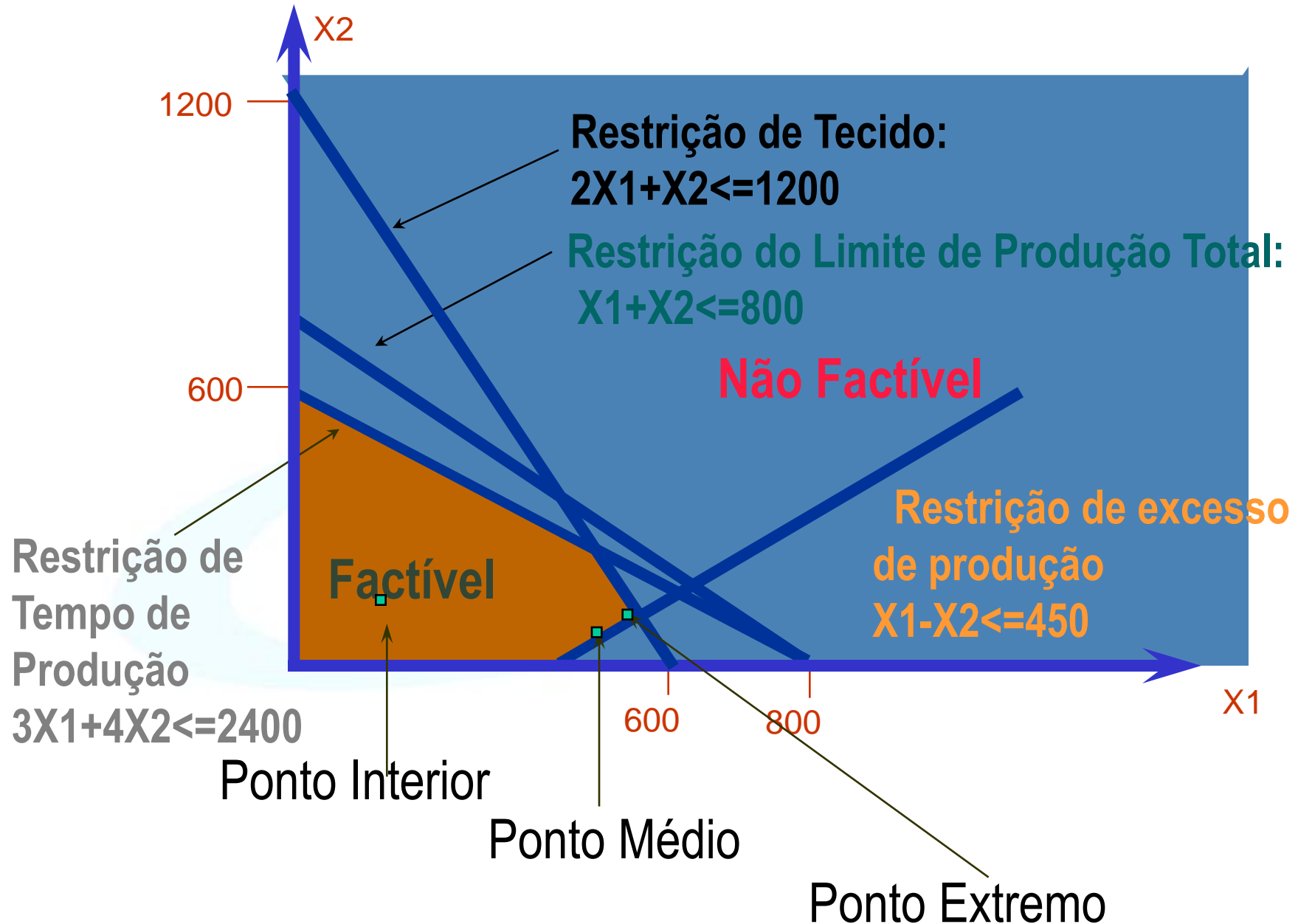
$3X_1 + 4X_2 \leq 2400$ (Tempo de produção)

$X_1 + X_2 \leq 800$ (Limite produção total)

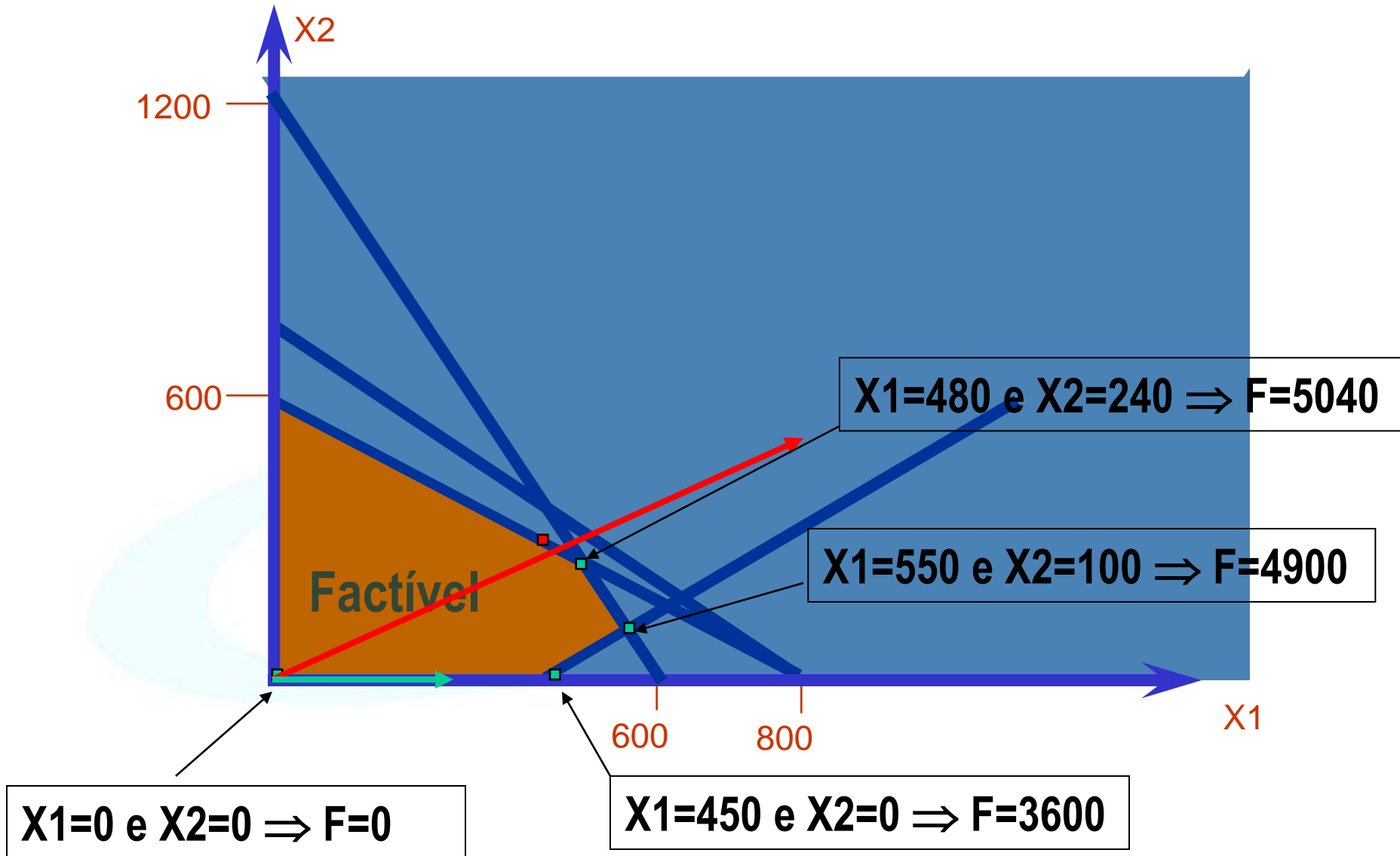
$X_1 - X_2 \leq 450$ (Produção em excesso)

$X_j \geq 0, j = 1, 2.$ (Resultados positivos)

Método Simplex: introdução



Método Simplex: introdução



Método Simplex: introdução

- **Pergunta:** Como aplicar a solução gráfica para resolver o seguinte problema?

$$\text{maximizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \quad (I)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100 \end{aligned} \quad (II)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (III)$$

- **Resposta:** Não é possível resolver graficamente!
- É possível obter uma solução com um método analítico, por exemplo, pelo **método simplex**

Método Simplex: introdução

- Características dos problemas de Programação Linear que permitem a solução pelo método Simplex.
 - A região factível/viável deve ser convexa.
 - Um conjunto é convexo quando toda combinação convexa de dois elementos dele pertence a ele.
 - Uma combinação convexa de dois elementos, x_1 e x_2 é um terceiro elemento y tal que: $y = a.x_1 + (1-a)x_2$ onde $0 \leq a \leq 1$.
 - Assim, um conjunto é convexo quando: dados $x_1 \in S$, $x_2 \in S$ e $y = a.x_1 + (1-a)x_2$ onde $0 \leq a \leq 1$ então $y \in S$.
 - **Graficamente:** dados dois pontos factíveis quaisquer, sempre existirá um segmento de reta ligando estes dois pontos, de forma que, este segmento está totalmente contido na região de factibilidade.

Método Simplex: introdução

- Preparativos para a aplicação do método simplex:
 - Se o conjunto de possibilidades fosse formado por igualdades seria mais fácil resolver o sistema que o forma.
 - Para tanto é possível utilizar algumas operações que permitem transformar modelos de programação linear em outros modelos equivalentes. Por exemplo:
 - um problema de minimização, pode ser resolvido pela maximização do negativo da função objetivo.
 - restrições de \geq podem ser multiplicadas por -1 para se tornarem restrições de \leq .
 - restrições de \geq ou de \leq podem ser colocadas nas forma de igualdade adicionando-se **variáveis de folga** .
 - variáveis que possam assumir qualquer valor e não apenas valores positivos podem ser substituídas pela diferença de duas variáveis positivas
- Vejamos tais transformações com maiores detalhes

Transformação de problemas em formas equivalentes

- Restrições de desigualdade :

- Caso as restrições, forem apresentadas como inequações, ao invés de equações, podemos converter para forma de igualdade com o auxílio de novas variáveis. Vejamos:

- Imaginemos determinada restrição i na forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (ex : 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 7)$$

- Se somarmos ao primeiro termo uma variável x_k ($k \geq n+1$), sendo $x_k \geq 0$, poderíamos escrever então, a igualdade:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i \quad (ex : 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 7, x_4 \geq 0)$$

sem alterar o significado da restrição.

Transformação de problemas em formas equivalentes

- Restrições de desigualdade (continuação):

- Analogamente, se a restrição fosse da forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (ex : 3x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 7)$$

bastaria que subtraíssemos uma variável x_k ($k \geq n+1$), do primeiro termo para transformar a inequação em igualdade, sendo $x_k \geq 0$.

Observação:

- Essas variáveis adicionais, chamadas de ***variáveis de folga***, são muito úteis, pois deixam todas as restrições em forma de igualdade mantendo-se as condições de não-negatividade
- As variáveis de folga aumentam o grau de liberdade do sistema (infinitas soluções)

Transformação de problemas em formas equivalentes

- Variáveis Livres:

Caso as variáveis x_i das restrições sejam livres de sinal, ou seja, não tenham restrições de não-negatividade, basta fazermos a substituição de variáveis no problema:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0.$$

- Função objetivo (maximizar ou minimizar):

Caso a função objetivo esteja na forma de maximização (minimização), basta substituímos pela minimização (maximização) do negativo da função. Ou seja:

- maximizar $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \approx$ minimizar $-f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2$

- minimizar $f(x_1, x_2) = 5x_1 - 8x_2 \approx$ maximizar $-f(x_1, x_2) = -5x_1 + 8x_2$

Exemplo

- Escrever o Problema de Otimização Linear abaixo na **forma padrão**

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad (I)$$

sujeito a:

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \quad (II)$$

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (III)$$

Resposta:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (I)$$

sujeito a:

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \quad (II)$$

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \quad (III)$$

Variáveis Básicas e não Básicas

Considere-se o sistema $Ax = b$, com m equações lineares e n variáveis uma solução básica é obtida fazendo

- $n - m$ variáveis iguais a 0 (**variáveis não básicas**)
- resolvendo o sistema para as restantes variáveis, que são chamadas as **variáveis básicas**.

Exemplo: determinar todas as soluções básicas para o sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 & & = & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Variáveis Básica : x_1 e x_3 sendo $x_1 = 3$ e $x_3 = 1$

Variável não Básica: x_2 , sendo $x_2 = 0$;

Soluções Viáveis/Admissíveis

- Definição: a toda a solução básica do problema na forma padrão na qual todas as variáveis são não-negativas chama-se **solução básica admissível**.
- Teorema 1: A região admissível de qualquer problema de programação linear (PL) é um conjunto **convexo**. Se o PL tem uma solução única, deverá haver um ponto extremo da região admissível que é ótimo.
- Teorema 2: Para qualquer PL, há um único ponto extremo da região admissível correspondendo a cada solução básica admissível. Há pelo menos uma solução básica admissível correspondendo a cada ponto extremo da região admissível.
- Definição: soluções básicas admissíveis adjacentes: para um PL com m restrições, duas soluções básicas dizem-se adjacentes se os seus conjuntos de variáveis básicas têm $m-1$ variáveis em comum.

Passos Básicos do Método Simplex

- i. Achar uma solução básica inicial.
- ii. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o passo iii.
- iii. Determinar a variável não básica que deve entrar na base (solução básica).
- iv. Determinar a variável básica que deve sair da base.
- v. Achar a nova solução básica e voltar ao passo ii.

Método Simplex: forma tabular

Exemplo

- Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2).
- Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina
- Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina
- A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
- Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente

Exemplo

$$\textit{Max} \quad L = 4x_1 + x_2$$

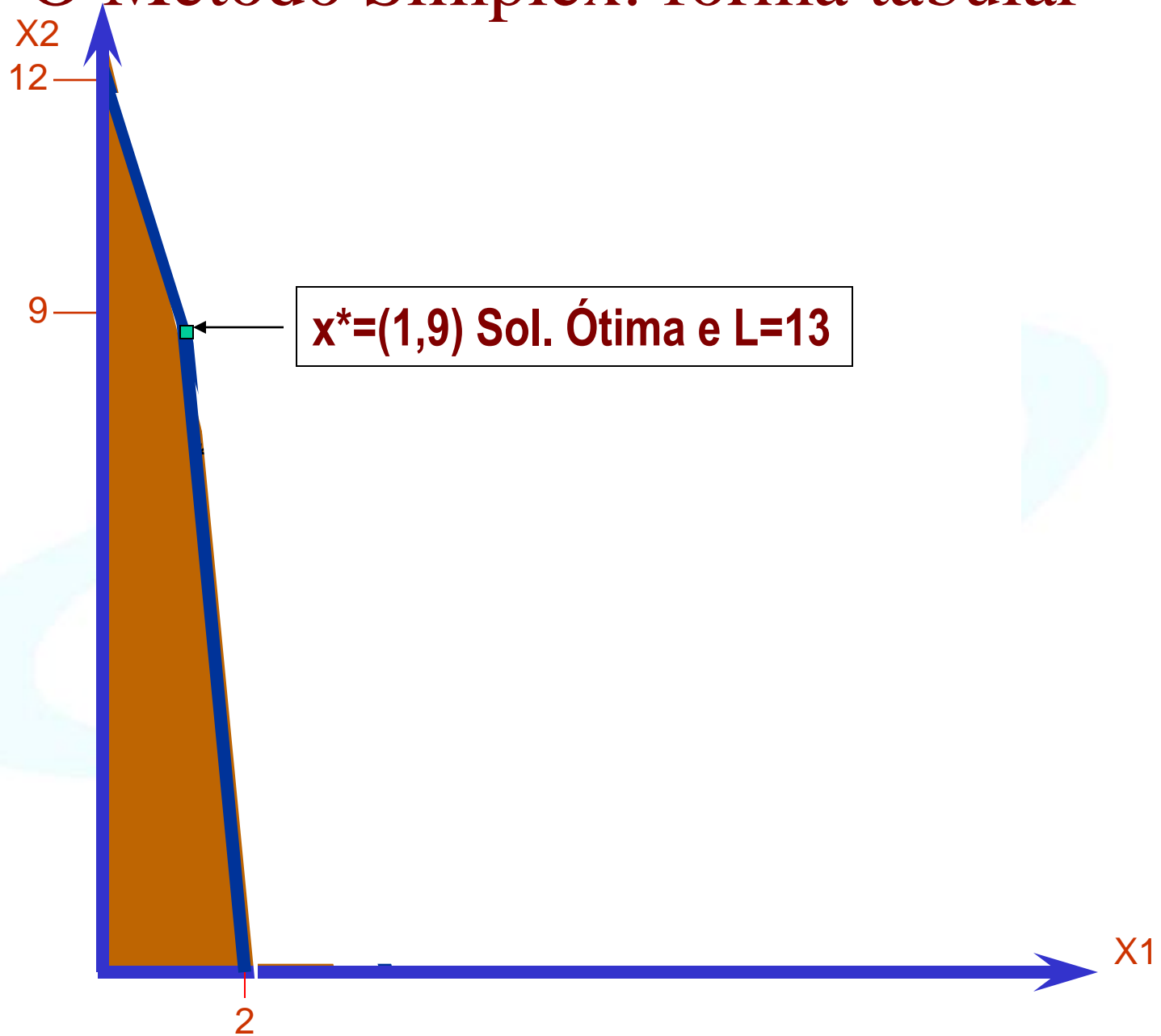
Sujeito a:

$$\textit{H.H.} \quad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$\textit{H.M.} \quad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

- Vejamos como resolver este exemplo na forma tabular:
- O primeiro passo consiste em deixar o modelo na forma padrão, ou seja, deve-se acrescentar duas variáveis de folga:

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 12$$

- Além disso tem-se que:

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

- Como se a função objetivo fosse uma das restrições originais, porém não é necessário nenhuma variável de folga, pois já esta na forma de igualdade
- L passa a ser vista como uma variável básica adicional e permanente

O Método Simplex: forma tabular

- Forma-se então um sistema de equações lineares com dois graus de liberdade (para quaisquer duas variáveis podem ser escolhidos valores arbitrários):

$$L - 4x_1 - x_2 = 0$$

$$9x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 12$$

- O método simplex usa o valor zero para esses valores arbitrários

O Método Simplex: forma tabular

- Uma solução imediata e que muitas vezes está disponível é a solução onde todas as variáveis originais são nulas e as de folga são iguais aos limites dos recursos (lado direito).
- Esta solução é conhecida como solução trivial.

$$\begin{array}{rcll} L & -4x_1 & -x_2 & = 0 & L=0 \\ & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & = 18 & x_3=18 \\ & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 = 12 & x_4=12 \end{array}$$

solução

- Observe que, neste caso, $x_1=0$, $x_2=0$ e o lucro $L=0$

O Método Simplex: forma tabular

- As variáveis que são diferentes de zero são ditas estarem na base ou são chamadas de **variáveis básicas**

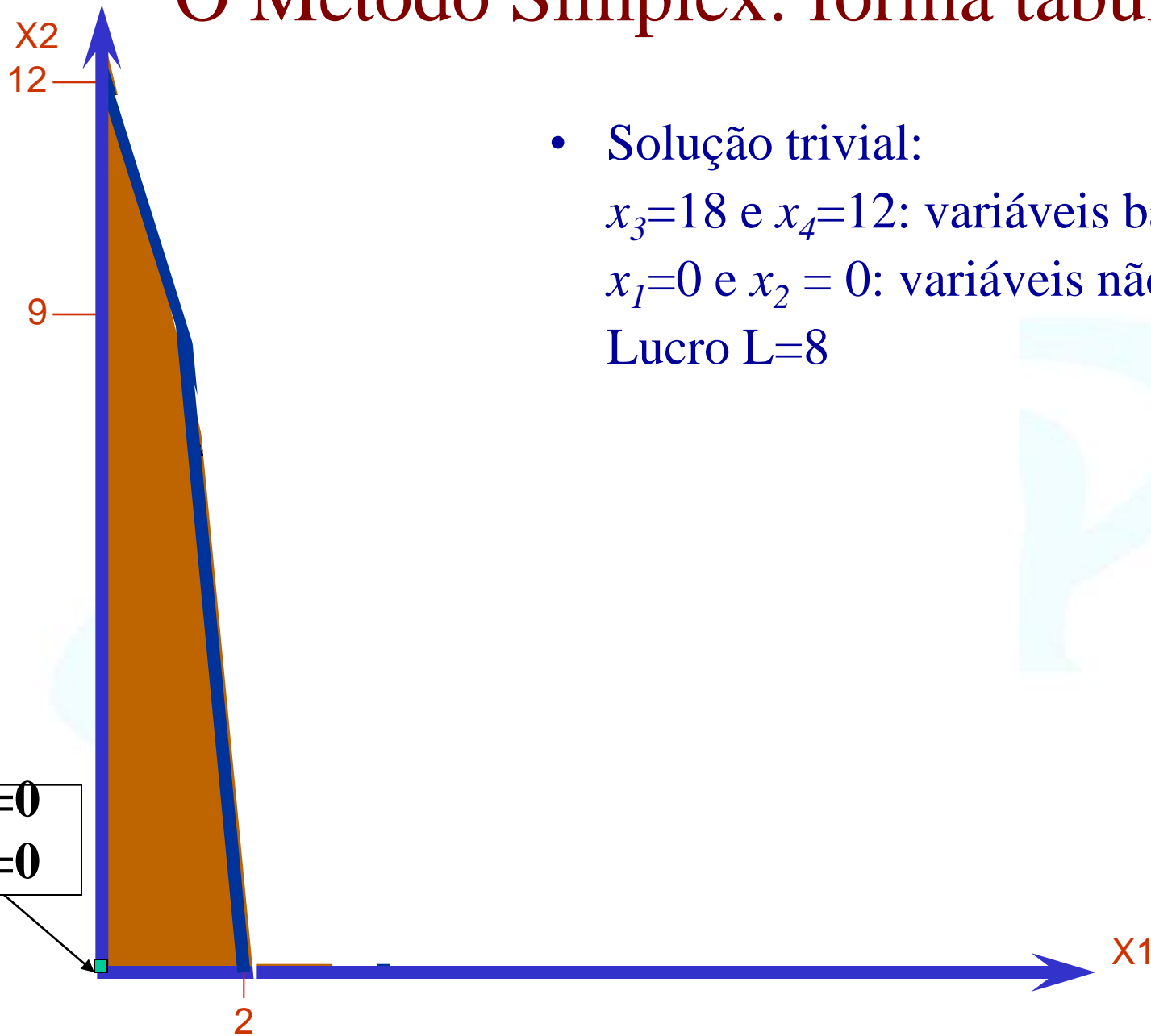
x_3 e x_4 são variáveis básicas

- As que são iguais a zero são conhecidas como **variáveis não básicas** ou variáveis que estão fora da base.

x_1 e x_2 são variáveis não básicas

- A solução resultante é chamada de **solução básica** e, se todas as variáveis básicas forem não-negativas tem-se uma **solução básica factível**
- Graficamente, uma **solução básica factível** é equivalente a um **vértice factível**

O Método Simplex: forma tabular



- Solução trivial:
 $x_3=18$ e $x_4=12$: variáveis básicas.
 $x_1=0$ e $x_2=0$: variáveis não básicas.
Lucro $L=8$

O Método Simplex: forma tabular

- Para resolver o problema devemos resolver as seguintes perguntas:
- Qual o objetivo?
- Como se deve modificar os valores das variáveis de acordo com o objetivo?
- Lembre-se você tem dois graus de liberdade, ou seja, pode escolher os valores de até duas variáveis.
- Que variável fará seu lucro aumentar mais?
- Vejamos a seguir como responder tais perguntas:

O Método Simplex: forma tabular

- Observando o objetivo:

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

- pode-se ver claramente que x_1 (atualmente nula, portanto não básica) aumentaria mais rapidamente o lucro se fosse posta na base (valor diferente de zero).
- Como o objetivo é maximizar o lucro o ideal seria aumentar x_1 até o infinito.
- Entretanto todas as outras restrições devem ser ainda satisfeitas na presença do máximo valor que x_1 possa alcançar.

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{l} L \quad -4x_1 \quad -x_2 \quad \quad \quad = \quad 0 \\ \hline \quad 9x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad = \quad 18 \quad 18 \div 9 = 2 \\ \hline \quad 3x_1 \quad +x_2 \quad \quad \quad +x_4 = \quad 12 \quad 12 \div 3 = 4 \end{array}$$

- Como deseja-se aumentar x_1 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições:
 - Na primeira restrição o limite de x_1 é **2**.
 - Na segunda restrição o limite de x_1 é **4**.
- Como não se pode romper nenhuma das restrições, x_1 deve ser no máximo 2.
- Como ficam as demais variáveis?

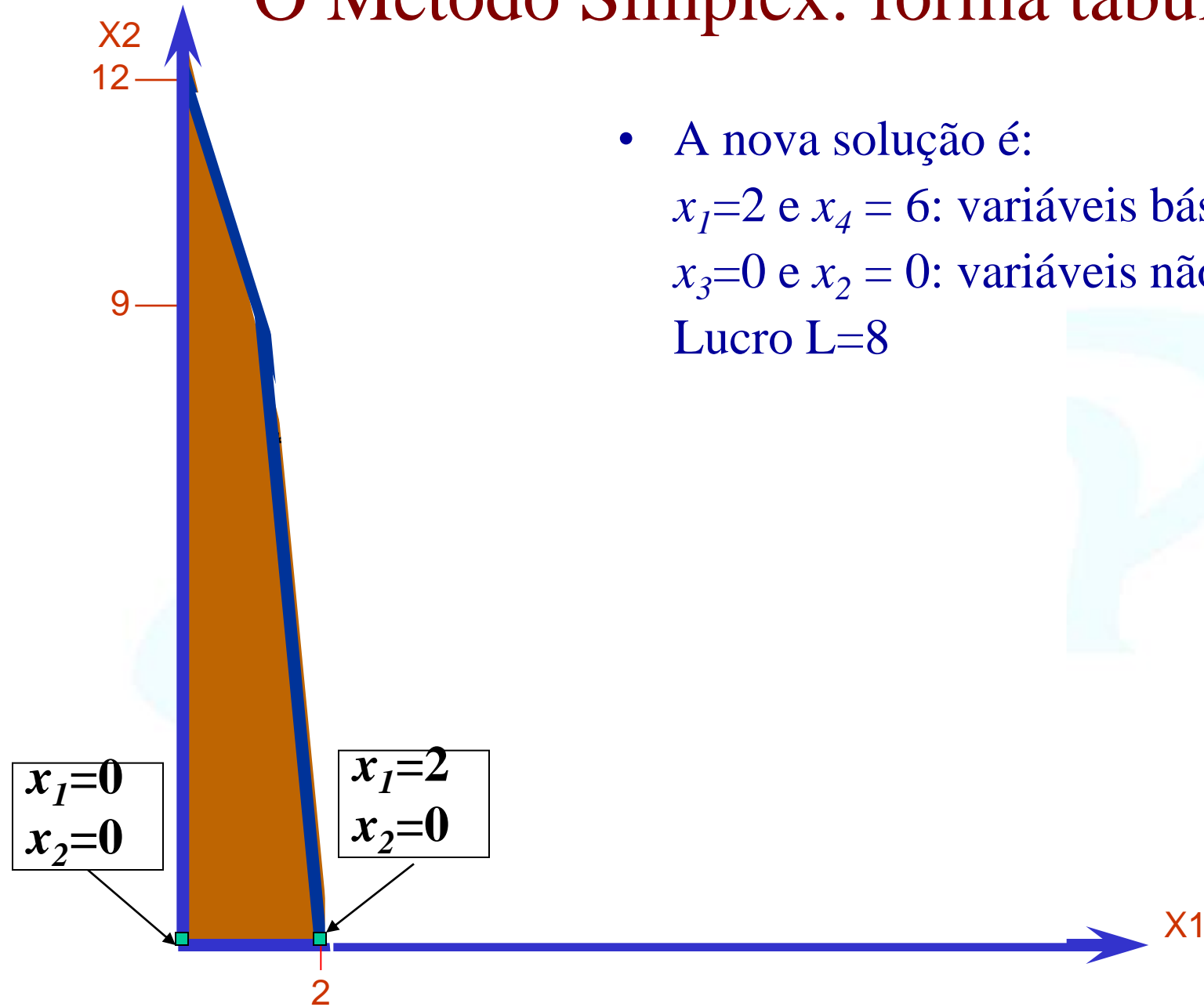
O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclcl} L & -4x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ & \boxed{9x_1} & + x_2 & + x_3 & = & 18 & 2 \\ & 3x_1 & + x_2 & & + x_4 & = & 12 \end{array}$$

- O limite de x_1 ocorre na linha da primeira restrição.
- Quando x_1 atingir o valor de 2:
 - x_3 deverá ser **nula** para atender a restrição.
 - x_4 que era 12 deverá ser igual a 6 dado que 6 unidades da segunda restrição serão consumidas por x_1 com valor 2.
- Desta forma **x_1 entrou na base e x_3 saiu.**

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
 $x_1=2$ e $x_4=6$: variáveis básicas.
 $x_3=0$ e $x_2=0$: variáveis não básicas.
Lucro $L=8$



O Método Simplex: forma tabular

- Escalonando (pivotando) o sistema.

$$\begin{array}{rcll} L & -4x_1 & -x_2 & = 0 \\ & \boxed{9x_1 + x_2 + x_3} & = 18 & \div 9 \\ & 3x_1 + x_2 & + x_4 = 12 \end{array}$$

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se dividir toda equação, na linha de entrada, por 9.

$$\begin{array}{rcll} L & -4x_1 & -x_2 & = 0 \\ & x_1 + \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{9}x_3 & = 2 \\ & 3x_1 + x_2 & + x_4 = 12 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 L & -4x_1 & -x_2 & = & 0 \\
 4 \times & x_1 & + \frac{1}{9}x_2 & + \frac{1}{9}x_3 & = & 2 \\
 & 3x_1 & + x_2 & & + x_4 & = & 12
 \end{array}$$

- Multiplicando a nova linha de x_1 por 4 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 L & -\frac{5}{9}x_2 & + \frac{4}{9}x_3 & = & 8 \\
 & x_1 & + \frac{1}{9}x_2 & + \frac{1}{9}x_3 & = & 2 \\
 & 3x_1 & + x_2 & & + x_4 & = & 12
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclcl}
 L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
 -3 \times & \boxed{x_1} & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & = 2 \\
 & \boxed{3x_1} & +x_2 & & +x_4 = 12
 \end{array}$$

- Multiplicando a nova linha de x_1 por -3 e somando com a outra linha, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{rclcl}
 L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
 x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & \boxed{+\frac{2}{3}x_2} & \boxed{-\frac{1}{3}x_3} & +x_4 & = 6
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclclcl} L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\ x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\ & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = & 6 \end{array}$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$L = \frac{5}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 + 8$$

- Claramente se x_2 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

$$L \quad -\frac{5}{9}x_2 \quad +\frac{4}{9}x_3 \quad = \quad 8$$

x_1	$+\frac{1}{9}x_2$	$+\frac{1}{9}x_3$	$= 2$	$2 \div 1/9$
	$+\frac{2}{3}x_2$	$-\frac{1}{3}x_3$	$+x_4 = 6$	$6 \div 2/3$

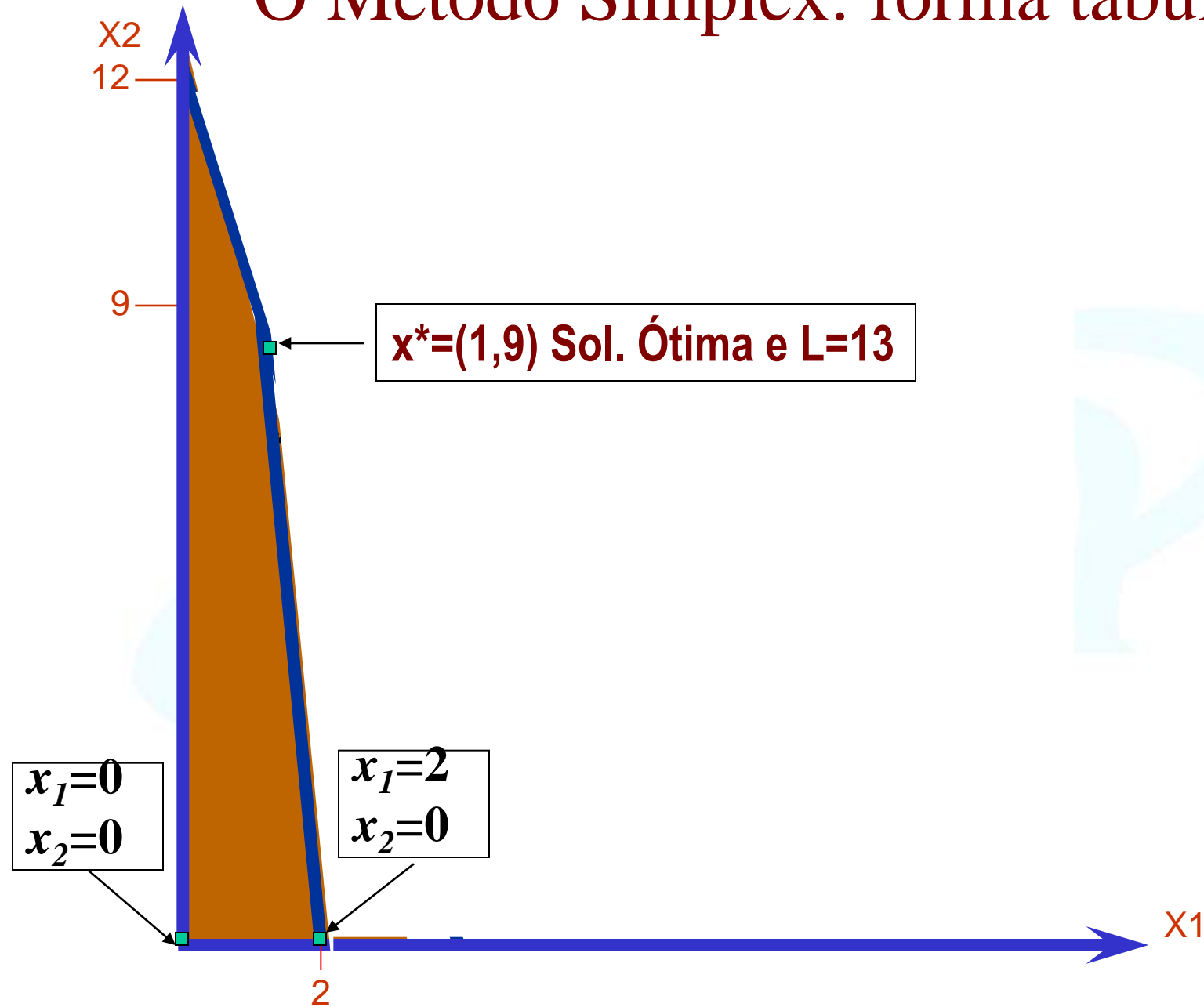
- Deseja-se então aumentar ao máximo o valor de x_2 sem romper nenhuma das restrições.
- Isto pode feito como antes.
 - Na primeira restrição x_2 pode ser aumentada até **18**
 - Na segunda restrição x_2 pode ser aumentada até **9**
- Como as duas restrições devem ser atendidas, x_2 entrará na linha onde x_4 é a VB.

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclclcl} L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & = & 2 \\ & & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = 6 \end{array}$$

- A nova solução será:
 - $x_2 = 9$ e $x_1 = 1$: variáveis básicas;
 - $x_4 = 0$ e $x_3 = 0$: variáveis não básicas;
 - Lucro $L = 13$.
- Claramente a solução é melhor que a anterior
- Para decidir se existe alguma variável NB que aumentaria o lucro deve-se colocar o sistema novamente no formato inicial, com relação as variáveis básicas e não básicas.

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$L \quad -\frac{5}{9}x_2 \quad +\frac{4}{9}x_3 \quad = \quad 8$$

$$x_1 \quad +\frac{1}{9}x_2 \quad +\frac{1}{9}x_3 \quad = \quad 2$$

$$\boxed{+\frac{2}{3}x_2 \quad -\frac{1}{3}x_3 \quad +x_4 \quad = \quad 6}$$

- Através de operações elementares deve-se colocar a variável x_2 com coeficiente 1 na linha onde ela entrou e zero nas demais.
- Multiplique a linha onde x_2 entrou por $3/2$ para fazer seu coeficiente unitário.

$$x_2 \quad -\frac{1}{2}x_3 \quad +\frac{3}{2}x_4 \quad = \quad 9$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclcl}
 L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & = 8 \\
 x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9
 \end{array}$$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por $-1/9$ e some com a linha da primeira restrição.

$$\begin{array}{rclcl}
 L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & = 8 \\
 x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 1 \\
 & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

L	$-\frac{5}{9}x_2$	$+\frac{4}{9}x_3$	$= 8$
x_1		$+\frac{1}{6}x_3$	$-\frac{1}{6}x_4 = 1$
	x_2	$-\frac{1}{2}x_3$	$+\frac{3}{2}x_4 = 9$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por $5/9$ e some com a linha do lucro.

$$\begin{array}{rclcl}
 L & & +\frac{1}{6}x_3 & +\frac{5}{6}x_4 & = 13 \\
 x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 1 \\
 x_2 & & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclcl} L & +\frac{1}{6}x_3 & +\frac{5}{6}x_4 & = & 13 \\ x_1 & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = & 1 \\ x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9 \end{array}$$

- Note que agora **nenhuma** variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá o algoritmo Simplex.
- Utilizando-se os quadros os passos ficaram mais fáceis de serem implementados.

O Método Simplex: forma tabular

- Utilizando-se de quadros os passos ficam mais fáceis de serem implementados, pois é possível expor os sistemas de uma maneira mais adequada.
- A seguinte forma foi escolhida como a mais conveniente:

Variáveis: básicas e não-básicas					Termo Independente
Função Objetivo	x1	x2	x3	x4	
L	-4	-1	0	0	0
Variáveis básicas { x3	9	1	1	0	18
x4	3	1	0	1	12

- Estes quadros são conhecidos como **quadro simplex**, este particularmente é o quadro simplex inicial para o exemplo anterior.

O Método Simplex: forma tabular

Variável x_1 entra na base (maior acréscimo)

Variável x_3 sai da base (limita)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	
L	-4	-1	0	0	0
x_3	9	1	1	0	18
x_4	3	1	0	1	12

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da linha Pivô:** divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1

Base	x1	x2	x3	x4	
L	-4	-1	0	0	0
<i>Lin1=Lin1÷9</i>	1	1/9	1/9	0	2
x4	3	1	0	1	12

- **Construção da coluna Pivô:** zerar os coeficientes das outras linhas na coluna relativa ao elemento pivô

Base	x1	x2	x3	x4	
<i>Lin1=4xLin2+Lin1</i>	0	- 5/9	4/9	0	8
x3	1	1/9	1/9	0	2
<i>Lin2=-3xLin2+Lin2</i>	0	2/3	- 1/3	1	6

O Método Simplex: forma tabular

- Como x_1 entrou na base e x_3 saiu tem-se a nova tabela

Variável x_2 entra na base (maior acréscimo)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
L	0	- 5/9	4/9	0	8
x_1	1	1/9	1/9	0	2
x_4	0	2/3	- 1/3	1	6

Variável x_4 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da linha Pivô:** divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1

Lin2=Lin2 x 3÷2

	x1	x2	x3	x4	
L	0	- 5/9	4/9	0	8
x1	1	1/9	1/9	0	2
x4	0	1	- 1/2	3/2	9

- **Construção da coluna Pivô:** zerar os coeficientes das outras linhas na coluna relativa ao elemento pivô

Lin1=5÷9xLin3+Lin1
Lin1=-1÷9xLin3+Lin1

	x1	x2	x3	x4	
L	0	0	1/6	5/6	13
x1	1	0	1/6	-1/6	1
x4	0	1	- 1/2	3/2	9

O Método Simplex: forma tabular

- Como x_2 entrou na base e x_4 saiu tem-se a nova tabela

	x_1	x_2	x_3	x_4	
L	0	0	$1/6$	$5/6$	13
x_1	1	0	$1/6$	$-1/6$	1
x_2	0	1	$-1/2$	$3/2$	9

- Note que agora **nenhuma** variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.

O Método Simplex: forma tabular

- Idéia Básica do método Simplex (novamente):
 - O sistema de equações é resolvido repetidamente para uma sequencia de soluções básicas factíveis. Cada uma melhor que a sua predecessora
 - Isso é feito, até que seja alcançada uma solução básica factível ótima (graficamente corresponde a um vértice ótimo)
 - Cada nova solução básica é obtida de sua predecessora:
“transformando uma variável não-básica em básica (**variável entrando**) e transformando uma variável básica em não-básica (**variável saindo**)”
 - Duas soluções básicas factíveis que diferem apenas por uma única troca de variáveis básicas e não-básicas são chamadas **adjacentes**
 - Uma solução básica (vértice) é dita ótima quando **nenhuma** das soluções básicas **adjacentes** (vértices adjacentes) é melhor que ela

• Exercício: Resolva o seguinte problema usando a forma tabular do método simplex. Faça uma primeira resolução utilizando sistemas e uma segunda utilizando a forma de tabelas. Isso facilitará o entendimento das tabelas!

Uma Indústria de confecção produz camisas de manga longa e de manga curta. Os recursos disponíveis são de 1200 reais para compra de tecido e as máquinas permitem 40 horas de produção por semana. Após uma pesquisa de mercado decidiu-se que a produção total não pode exceder de 800 unidades. Além disso, o número de unidades produzidas de camisa manga longa não pode exceder o número de unidades produzidas de camisa manga curta em mais de 450 unidades. Sabe-se que, cada camisa manga longa requer 2 reais de tecido e 3 minutos de produção e cada camisa manga curta requer 1 real de tecido e 4 minutos de produção. O departamento de finanças tem a informação de que cada camisa manga longa dá um lucro de 8 reais e cada camisa manga curta dá um lucro de 5 reais. O gerente da indústria deseja saber qual o melhor esquema de produção de forma a respeitar as restrições e maximizar o lucro.

O Método Simplex: forma tabular

- Vejamos como resolver este exemplo na forma tabular:
 - O primeiro passo consiste em deixar o modelo na forma adequada, ou seja, deve-se acrescentar as variáveis de folga:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \quad (\text{lucro semanal})$$

Sujeito a:

$$2X_1 + 1X_2 + X_3 = 1200 \quad (\text{Quantidade de tecido})$$

$$3X_1 + 4X_2 + X_4 = 2400 \quad (\text{Tempo de produção})$$

$$X_1 + X_2 + X_5 = 800 \quad (\text{Limite produção total})$$

$$X_1 - X_2 + X_6 = 450 \quad (\text{Produção em excesso})$$

$$X_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \quad (\text{Resultados positivos})$$

O Método Simplex: forma tabular

- Reescrevendo o problema em forma de sistema tem-se:

$$Z - 8X_1 - 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 0 \text{ (lucro semanal)}$$

$$2X_1 + 1X_2 + X_3 = 1200 \text{ (Quantidade de tecido)}$$

$$3X_1 + 4X_2 + X_4 = 2400 \text{ (Tempo de produção)}$$

$$X_1 + X_2 + X_5 = 800 \text{ (Limite produção total)}$$

$$X_1 - X_2 + X_6 = 450 \text{ (Produção em excesso)}$$

- Observe que este sistema tem quatro graus de liberdade:

O Método Simplex: forma tabular

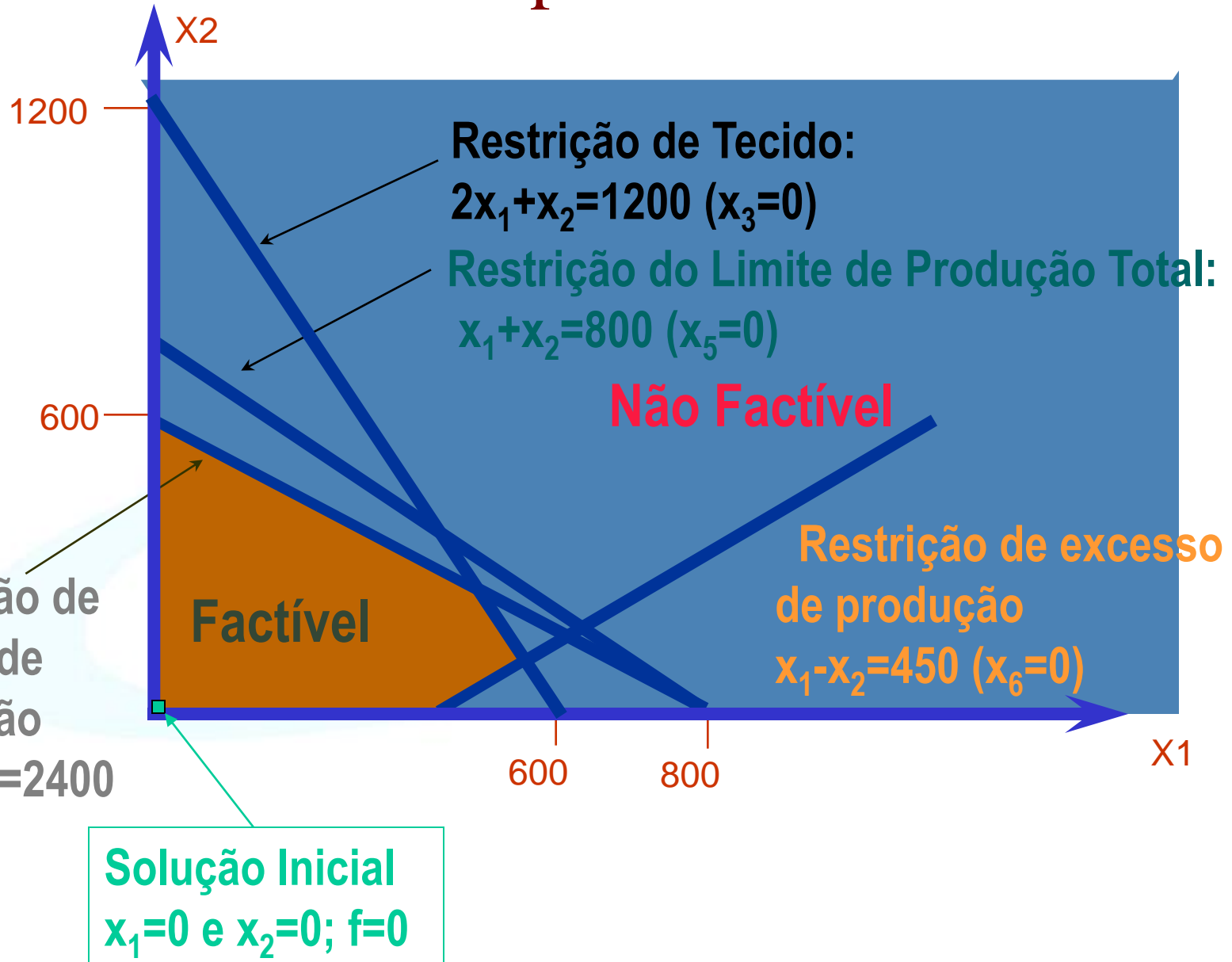
- Iniciamos com a solução trivial onde todas as variáveis originais são nulas e as de folga são iguais aos limites dos recursos

$$\begin{array}{rcll} Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = & 0 & f=0 \\ 2x_1 + 1x_2 + x_3 & = & 1200 & x_3 = 1200 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 2400 & x_4 = 2400 \\ x_1 + x_2 + x_5 & = & 800 & x_5 = 800 \\ x_1 - x_2 + x_6 & = & 450 & x_6 = 450 \end{array}$$

- A solução inicial é:

- $x_3 = 1200$; $x_4 = 2400$; $x_5 = 800$; $x_6 = 450$ variáveis básicas;
- $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$; variáveis não básicas;
- Lucro $f=0$;

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

- Observando o objetivo:

$$Z = 8 x_1 + 5 x_2 + 0 x_3 + 0 x_4 + 0 x_5 + 0 x_6 \Rightarrow$$

$$Z - 8 x_1 - 5 x_2 + 0 x_3 + 0 x_4 + 0 x_5 + 0 x_6 = 0$$

- pode-se ver claramente que x_1 (atualmente nula, portanto não básica) aumentaria mais rapidamente o lucro se fosse posta na base (valor diferente de zero).
- Como o objetivo é maximizar o lucro o ideal seria aumentar x_1 até o infinito.
- Entretanto todas as outras restrições devem ser ainda satisfeitas na presença do máximo valor que x_1 possa alcançar.

O Método Simplex: forma tabular

$$Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

Valor Máximo

$2x_1 + 1x_2 + x_3$	$= 1200$	$x_1=600$
$3x_1 + 4x_2 + x_4$	$= 2400$	$x_1=800$
$x_1 + x_2 + x_5$	$= 800$	$x_1=800$
$x_1 - x_2 + x_6$	$= 450$	$x_1=450$

- Como deseja-se aumentar x_1 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
 - Na quarta restrição o limite de x_1 é **450**.
- Como não se pode romper nenhuma das restrições, x_1 deve ser no máximo 450.
- Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 1200$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 2400$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$

$$x_1 - x_2 + x_6 = 450$$

• Quando x_1 atingir o valor de 450 (considerando que x_2 deve se manter fora da base, ou seja, $x_2=0$):

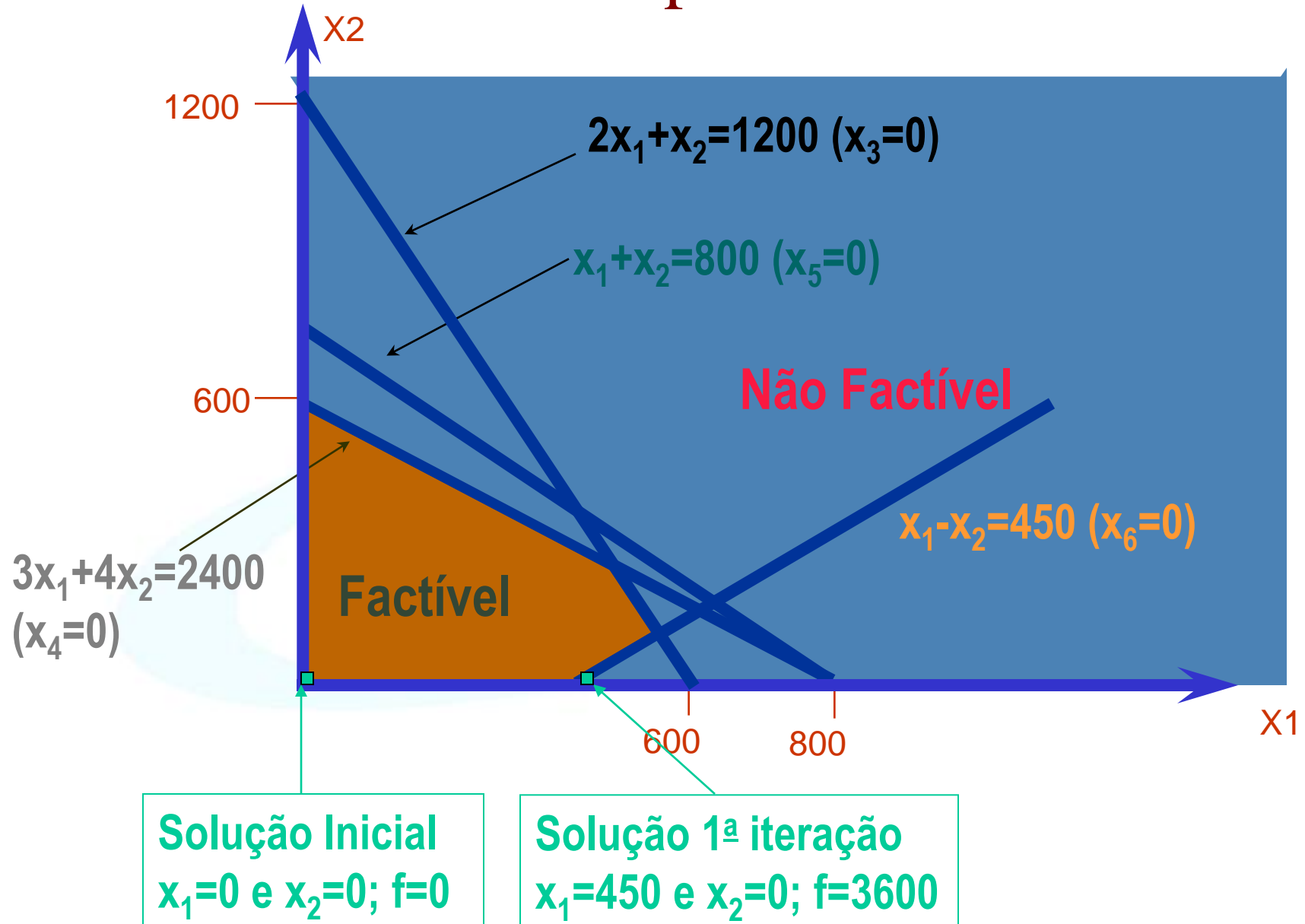
- x_3 deverá ser 300 para atender a restrição.
- x_4 deverá ser 1050 para atender a restrição.
- x_5 deverá ser 350 para atender a restrição.
- x_6 deverá ser 0 para atender a restrição.

Desta forma x_1 entrou na base e x_6 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
 - $x_1=450$; $x_3=300$; $x_4=1050$; $x_5=350$ variáveis básicas.
 - $x_6=0$ e $x_2 = 0$; variáveis não básicas.
 - Lucro $f=3600$;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_1 , deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_6).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcll} Z - 8x_1 - 5x_2 & & & = 0 \\ 2x_1 + 1x_2 + x_3 & & & = 1200 \\ 3x_1 + 4x_2 & + x_4 & & = 2400 \\ x_1 + & x_2 & + x_5 & = 800 \\ x_1 - & x_2 & + x_6 & = 450 \end{array}$$

- Como o coeficiente de x_1 já é igual a um, não é necessário fazer nada
- Resta agora zerar os coeficientes de x_1 nas outras restrições usando a restrição 4 como pivô

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z - 8x_1 - 5x_2 & & = 0 \\
 2x_1 + 1x_2 + x_3 & & = 1200 \\
 3x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 2400 \\
 x_1 & + x_2 & + x_5 = 800 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450 \quad \times 8
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 4 por 8 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 Z & -13x_2 & + 8x_6 = 3600 \\
 2x_1 + 1x_2 + x_3 & & = 1200 \\
 3x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 2400 \\
 x_1 & + x_2 & + x_5 = 800 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

Z		-13 x_2		+ 8 x_6 = 3600
	2 x_1	+ 1 x_2	+ x_3	= 1200
	3 x_1	+ 4 x_2	+ x_4	= 2400
	x_1	+ x_2	+ x_5	= 800
	x_1	- x_2	+ x_6	= 450 x (-2)

- Multiplicando a restrição 4 por -2 e somando com a restrição 1, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

Z		-13 x_2		+ 8 x_6 = 3600
		+ 3 x_2	+ x_3	- 2 x_6 = 300
	3 x_1	+ 4 x_2	+ x_4	= 2400
	x_1	+ x_2	+ x_5	= 800
	x_1	- x_2	+ x_6	= 450

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Z} & -13 x_2 & + 8 x_6 & = 3600 \\
 & + 3 x_2 + x_3 & - 2 x_6 & = 300 \\
 3 x_1 + 4 x_2 & + x_4 & & = 2400 \\
 x_1 + x_2 & & + x_5 & = 800 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 & = 450 \quad \times (-3)
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 4 por -3 e somando com a restrição 2, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Z} & -13 x_2 & + 8 x_6 & = 3600 \\
 & + 3 x_2 + x_3 & - 2 x_6 & = 300 \\
 + 7 x_2 & + x_4 & - 3 x_6 & = 1050 \\
 x_1 + x_2 & & + x_5 & = 800 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 & = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rclcl}
 Z & -13 x_2 & & + 8 x_6 & = 3600 \\
 & + 3 x_2 + x_3 & & - 2 x_6 & = 300 \\
 & + 7 x_2 & + x_4 & - 3 x_6 & = 1050 \\
 \hline
 & x_1 + x_2 & & + x_5 & = 800 \\
 & x_1 - x_2 & & + x_6 & = 450 \quad \times (-1)
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 4 por -1 e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{rclcl}
 Z & + & -13 x_2 & & + 8 x_6 = 3600 \\
 & & + 3 x_2 + x_3 & & - 2 x_6 = 300 \\
 & & + 7 x_2 & + x_4 & - 3 x_6 = 1050 \\
 \hline
 & & + 2 x_2 & & + x_5 - x_6 = 350 \\
 & x_1 - x_2 & & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & -13 x_2 & + 8 x_6 = 3600 \\
 & + 3 x_2 + x_3 & - 2 x_6 = 300 \\
 & + 7 x_2 & + x_4 - 3 x_6 = 1050 \\
 & + 2 x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 & x_1 - x_2 & + x_6 = 450
 \end{array}$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$Z = + 13 x_2 - 8 x_6 + 3600$$

- Claramente se x_2 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

Z	$-13 x_2 \qquad \qquad \qquad + 8 x_6 = 3600$				Valor Máximo
	$+ 3 x_2$	$+ x_3$	$- 2 x_6$	$= 300$	$x_2=100$
	$+ 7 x_2$	$+ x_4$	$- 3 x_6$	$= 1050$	$x_2=150$
	$+ 2 x_2$	$+ x_5$	$- x_6$	$= 350$	$x_2=175$
	$x_1 - x_2$		$+ x_6$	$= 450$	$x_2=-450$

- Como deseja-se aumentar x_2 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
 - Na primeira restrição o limite de x_2 é **100**.
- Como não se pode romper nenhuma das restrições x_2 deve ser no máximo 100
- Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

Z	-13 x_2		+ 8 x_6 = 3600
	+ 3 x_2 + x_3		- 2 x_6 = 300
	+ 7 x_2	+ x_4	- 3 x_6 = 1050
	+ 2 x_2	+ x_5 - x_6	= 350
	x_1 - x_2		+ x_6 = 450

• Quando x_2 atingir o valor de 100 (considerando que x_6 deve se manter fora da base, ou seja, $x_6=0$):

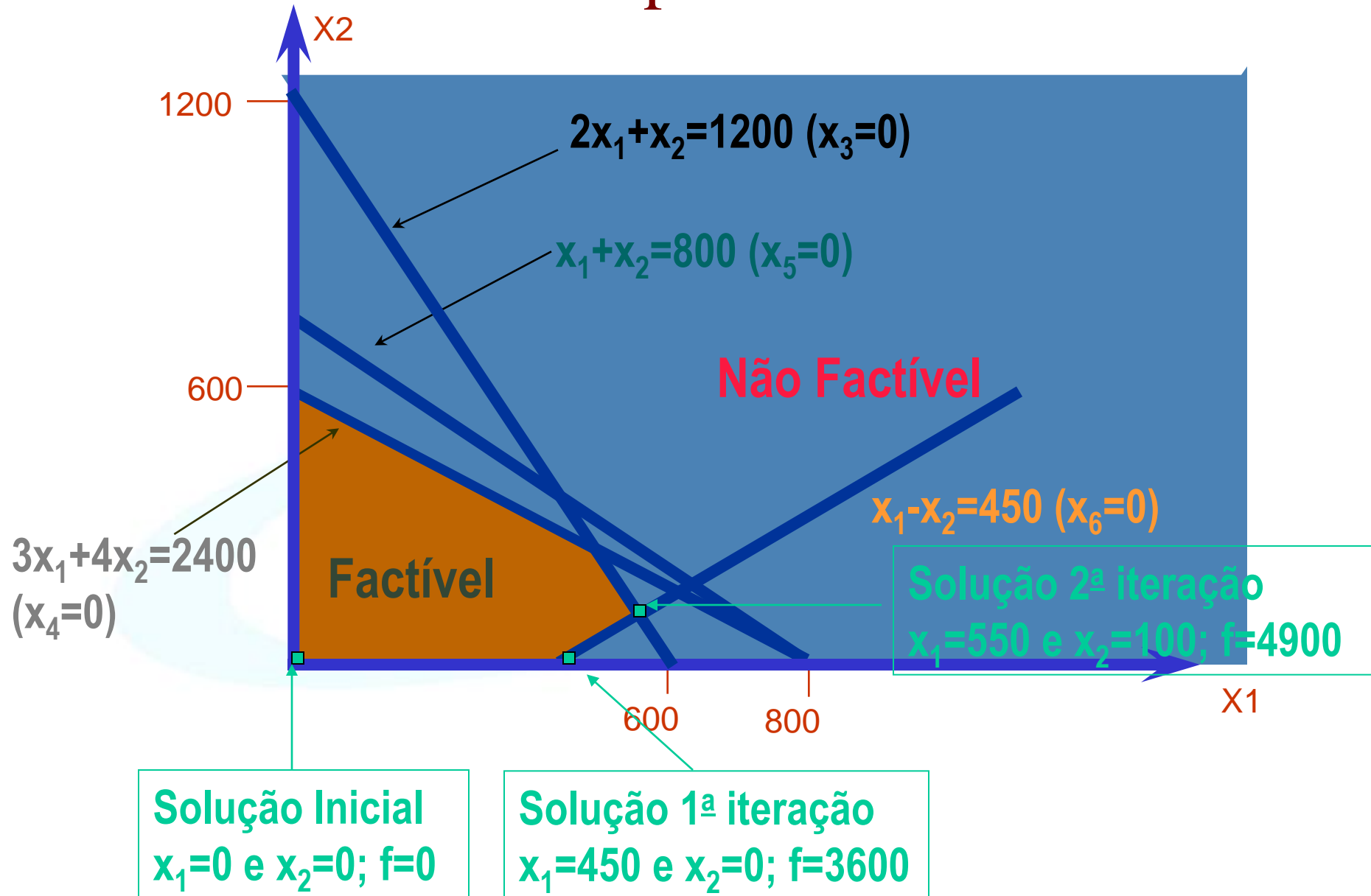
- x_3 deverá ser 0 para atender a restrição.
- x_4 deverá ser 350 para atender a restrição.
- x_5 deverá ser 150 para atender a restrição.
- x_1 deverá ser 550 para atender a restrição.

Desta forma x_2 entrou na base e x_3 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
 - $x_1=550$; $x_2=100$; $x_4=350$; $x_5=150$ variáveis básicas.
 - $x_6=0$ e $x_3 = 0$; variáveis não básicas.
 - Lucro $f=4900$;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_2 , deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_3).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Z} & -13x_2 & + 8x_6 = 3600 \\
 \hline
 & + 3x_2 + x_3 & - 2x_6 = 300 \quad \div 3 \\
 & + 7x_2 & + x_4 - 3x_6 = 1050 \\
 & + 2x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se dividir toda equação, na linha de entrada, por 3.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Z} & -13x_2 & + 8x_6 = 3600 \\
 \hline
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3x_6 = 100 \\
 & + 7x_2 & + x_4 - 3x_6 = 1050 \\
 & + 2x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

Z	-13 x_2		+ 8 x_6 = 3600
	+ x_2 + 1/3 x_3		- 2/3 x_6 = 100
	+ 7 x_2	+ x_4	- 3 x_6 = 1050
	+ 2 x_2	+ x_5 - x_6	= 350
x_1	- x_2		+ x_6 = 450

- Multiplicando a restrição 1 por 13 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

Z	+13/3 x_3		-2/3 x_6 = 4900
	+ x_2 + 1/3 x_3		- 2/3 x_6 = 100
	+ 7 x_2	+ x_4	- 3 x_6 = 1050
	+ 2 x_2	+ x_5 - x_6	= 350
x_1	- x_2		+ x_6 = 450

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +13/3x_3 & -2/3 x_6 = 4900 \\
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3 x_6 = 100 \\
 & + 7 x_2 & + x_4 - 3 x_6 = 1050 \\
 & + 2 x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 1 por -7 e somando com a restrição 2, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +13/3x_3 & -2/3 x_6 = 4900 \\
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3 x_6 = 100 \\
 & - 7/3x_3 + x_4 & +5/3 x_6 = 350 \\
 & + 2 x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +13/3x_3 & -2/3 x_6 = 4900 \\
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3 x_6 = 100 \\
 & - 7/3x_3 + x_4 & +5/3 x_6 = 350 \\
 \hline
 & + 2 x_2 & + x_5 - x_6 = 350 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 1 por -2 e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +13/3x_3 & -2/3 x_6 = 4900 \\
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3 x_6 = 100 \\
 & - 7/3x_3 + x_4 & +5/3 x_6 = 350 \\
 \hline
 & - 2/3x_3 & + x_5 + 1/3 x_6 = 150 \\
 x_1 - x_2 & & + x_6 = 450
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

Z		+13/3x ₃	-2/3 x ₆ = 4900
	+ x ₂	+ 1/3x ₃	- 2/3 x ₆ = 100
		- 7/3x ₃ + x ₄	+5/3 x ₆ = 350
		- 2/3x ₃	+ x ₅ +1/3 x ₆ = 150
	x ₁ - x ₂		+ x ₆ = 450

- Multiplicando a restrição 1 por 1 e somando com a restrição 4, zera-se o coeficiente de x₂ naquela linha.

Z		+13/3x ₃	-2/3 x ₆ = 4900
	+ x ₂	+ 1/3x ₃	- 2/3 x ₆ = 100
		- 7/3x ₃ + x ₄	+5/3 x ₆ = 350
		- 2/3x ₃	+ x ₅ +1/3 x ₆ = 150
	x ₁	+1/3x ₃	+1/3 x ₆ = 550

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +13/3x_3 & -2/3 x_6 = 4900 \\
 & + x_2 + 1/3x_3 & - 2/3 x_6 = 100 \\
 & - 7/3x_3 + x_4 & +5/3 x_6 = 350 \\
 & - 2/3x_3 & + x_5 +1/3 x_6 = 150 \\
 x_1 & +1/3x_3 & +1/3 x_6 = 550
 \end{array}$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$Z = -13/3 x_3 + 2/3 x_6 + 4900$$

- Claramente se x_6 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

Z	$+13/3x_3$		$-2/3 x_6 = 4900$	Valor Máximo
	$+ x_2 + 1/3x_3$		$- 2/3 x_6 = 100$	$x_6 = -150$
	$- 7/3x_3 + x_4$		$+5/3 x_6 = 350$	$x_6 = 210$
	$- 2/3x_3$	$+ x_5$	$+1/3 x_6 = 150$	$x_6 = 450$
x_1	$+1/3x_3$		$+1/3 x_6 = 550$	$x_6 = 1650$

- Como deseja-se aumentar x_6 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
 - Na segunda restrição o limite de x_6 é **210**.
- Como não se pode romper nenhuma das restrições x_6 deve ser no máximo 210
- Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$Z \quad \quad \quad +13/3x_3 \quad \quad \quad - 2/3 x_6 = 4900$$

$$\quad + x_2 + 1/3x_3 \quad \quad \quad - 2/3 x_6 = 100$$

$$\quad \quad \quad - 7/3x_3 + x_4 \quad \quad \quad +5/3 x_6 = 350$$

$$\quad \quad \quad - 2/3x_3 \quad \quad + x_5 \quad +1/3 x_6 = 150$$

$$x_1 \quad \quad \quad +1/3x_3 \quad \quad \quad +1/3 x_6 = 550$$

• Quando x_6 atingir o valor de 210 (considerando que x_3 deve se manter fora da base, ou seja, $x_3=0$):

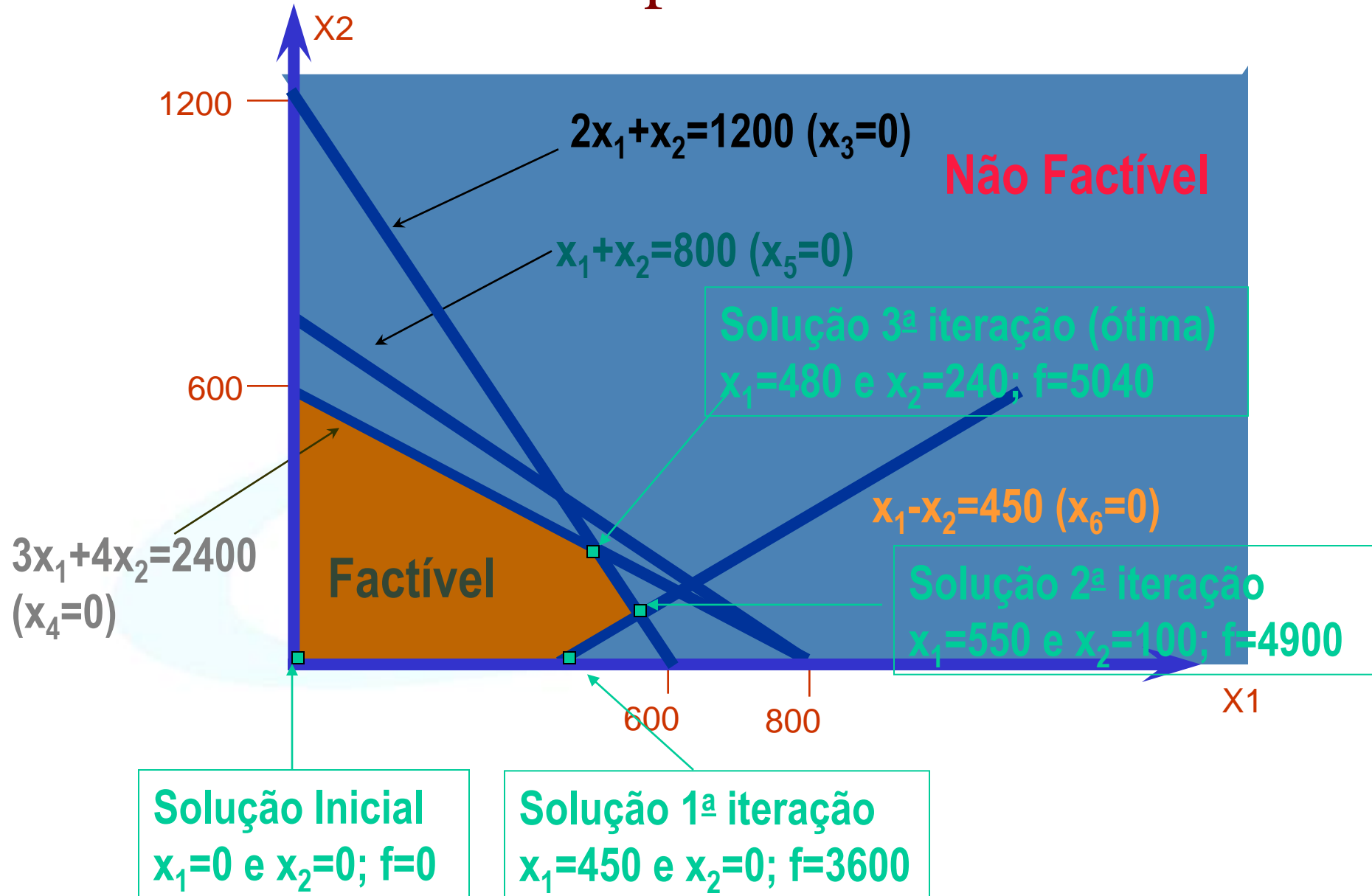
- x_2 deverá ser **240** para atender a restrição.
- x_4 deverá ser **0** para atender a restrição.
- x_5 deverá ser **80** para atender a restrição.
- x_1 deverá ser **480** para atender a restrição.

Desta forma x_6 entrou na base e x_4 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
 - $x_1=480$; $x_2=240$; $x_5=80$; $x_6=210$ variáveis básicas.
 - $x_3=0$ e $x_4=0$; variáveis não básicas.
 - Lucro $Z=5040$;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_6 , deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_4).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$Z \quad +13/3x_3 \quad - 2/3 x_6 = 4900$$

$$+ x_2 + 1/3x_3 \quad - 2/3 x_6 = 100$$

$$- 7/3x_3 + x_4 \quad +5/3 x_6 = 350$$

$$- 2/3x_3 \quad + x_5 \quad +1/3 x_6 = 150$$

$$x_1 \quad +1/3x_3 \quad +1/3 x_6 = 550$$

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se multiplicar toda equação, na linha de entrada, por 3/5.

$$Z \quad +13/3x_3 \quad - 2/3 x_6 = 4900$$

$$+ x_2 + 1/3x_3 \quad - 2/3 x_6 = 100$$

$$-21/15x_3 + 3/5x_4 \quad + x_6 = 210$$

$$- 2/3x_3 \quad + x_5 \quad +1/3 x_6 = 150$$

$$x_1 \quad +1/3x_3 \quad +1/3 x_6 = 550$$

x 3/5

O Método Simplex: forma tabular

Z	+13/3x ₃	- 2/3 x ₆	= 4900
	+ x ₂ + 1/3x ₃	- 2/3 x ₆	= 100
	-21/15x ₃ +3/5x ₄	+ x ₆	= 210
	- 2/3x ₃	+ x ₅ +1/3 x ₆	= 150
x ₁	+1/3x ₃	+1/3 x ₆	= 550

- Multiplicando a restrição 2 por 2/3 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x₆ naquela linha.

Z	+153/45x ₃ +2/5x ₄	= 5040
	+ x ₂ + 1/3x ₃	- 2/3 x ₆ = 100
	-21/15x ₃ +3/5x ₄	+ x ₆ = 210
	- 2/3x ₃	+ x ₅ +1/3 x ₆ = 150
x ₁	+1/3x ₃	+1/3 x ₆ = 550

O Método Simplex: forma tabular

$$Z \quad +153/45x_3 + 2/5x_4 \quad = 5040$$

$$+ x_2 + 1/3x_3 \quad - 2/3 x_6 = 100$$

$$-21/15x_3 + 3/5x_4 \quad + x_6 = 210$$

$$- 2/3x_3 \quad + x_5 \quad + 1/3 x_6 = 150$$

$$x_1 \quad +1/3x_3 \quad + 1/3 x_6 = 550$$

- Multiplicando a restrição 2 por 2/3 e somando com a restrição 1, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$Z \quad +153/45x_3 + 2/5x_4 \quad = 5040$$

$$+ x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 \quad = 420$$

$$-21/15x_3 + 3/5x_4 \quad + x_6 = 210$$

$$- 2/3x_3 \quad + x_5 \quad + 1/3 x_6 = 150$$

$$x_1 \quad +1/3x_3 \quad + 1/3 x_6 = 550$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +153/45x_3 + 2/5x_4 & = 5040 \\
 + x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 & & = 420 \\
 -21/15x_3 + 3/5x_4 & + x_6 & = 210 \\
 -2/3x_3 & + x_5 + 1/3 x_6 & = 150 \\
 x_1 & + 1/3x_3 & + 1/3 x_6 = 550
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 2 por $-1/3$ e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +153/45x_3 + 2/5x_4 & = 5040 \\
 + x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 & & = 420 \\
 -21/15x_3 + 3/5x_4 & + x_6 & = 210 \\
 -3/15x_3 - 1/5x_4 + x_5 & & = 150 \\
 x_1 & + 1/3x_3 & + 1/3 x_6 = 550
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +153/45x_3 + 2/5x_4 & = 5040 \\
 & + x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 & = 420 \\
 & -21/15x_3 + 3/5x_4 & + x_6 = 210 \\
 & - 3/15x_3 - 1/5x_4 + x_5 & = 150 \\
 \hline
 x_1 & +1/3x_3 & +1/3 x_6 = 550
 \end{array}$$

- Multiplicando a restrição 2 por $-1/3$ e somando com a restrição 4, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$\begin{array}{rcl}
 Z & +153/45x_3 + 2/5x_4 & = 5040 \\
 & + x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 & = 420 \\
 & -21/15x_3 + 3/5x_4 & + x_6 = 210 \\
 & - 3/15x_3 - 1/5x_4 + x_5 & = 150 \\
 \hline
 x_1 & +12/15x_3 - 1/5x_4 & = 480
 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{rcl} Z & +153/45x_3 + 2/5x_4 & = 5040 \\ & + x_2 - 9/15x_3 + 2/5x_4 & = 420 \\ & -21/15x_3 + 3/5x_4 + x_6 & = 210 \\ & - 3/15x_3 - 1/5x_4 + x_5 & = 150 \\ x_1 & +12/15x_3 - 1/5x_4 & = 480 \end{array}$$

- Note que agora **nenhuma** variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.
- Utilizando-se os quadros os passos ficaram mais fáceis de serem implementados

O Método Simplex: forma tabular

- A seguinte forma foi escolhida como a mais conveniente para se expor o método.

Termo
Independente ↓

Variáveis: básicas e não-básicas

Função
Objetivo ↘

Variáveis
básicas {

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	0	1200
x4	3	4	0	1	0	0	2400
x5	1	1	0	0	1	0	800
x6	1	-1	0	0	0	1	450

- Estes quadros são conhecidos como **quadro simplex**, este particularmente é o **quadro simplex inicial**.

O Método Simplex: forma tabular

Variável x_1 entra na base (maior acréscimo)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x_3	2	1	1	0	0	0	1200
x_4	3	4	0	1	0	0	2400
x_5	1	1	0	0	1	0	800
x_6	1	-1	0	0	0	1	450

Variável x_6 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da linha Pivô: como o valor do pivô já é igual a 1, nada tem que ser feito**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	0	1200
x4	3	4	0	1	0	0	2400
x5	1	1	0	0	1	0	800
x6	1	-1	0	0	0	1	450

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da coluna Pivô: zerar os coeficientes das outras linhas na coluna do elemento pivô**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
<i>Lin4=8 x Lin4+Lin4</i>	Z	0	-13	0	0	0	3600
<i>Lin1=-2 x Lin4+Lin1</i>	x3	0	3	1	0	-2	300
<i>Lin2=-3 x Lin4+Lin2</i>	x4	0	7	0	1	-3	1050
<i>Lin3=-1 x Lin4+Lin3</i>	x5	0	2	0	0	-1	350
	x1	1	-1	0	0	0	450

O Método Simplex: forma tabular

- Como x_1 entrou na base e x_6 saiu tem-se a nova tabela

Variável x_2 entra na base (maior acréscimo)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	0	-13	0	0	0	8	3600
x_3	0	3	1	0	0	-2	300
x_4	0	7	0	1	0	-3	1050
x_5	0	2	0	0	1	-1	350
x_1	1	-1	0	0	0	1	450

Variável x_3 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

Lin1=-Lin1/3

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	0	-13	0	0	0	8	3600
x3	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
x4	0	7	0	1	0	-3	1050
x5	0	2	0	0	1	-1	350
x1	1	-1	0	0	0	1	450

O Método Simplex: forma tabular

- Contrução da coluna Pivô: zerar os coeficientes das outras linhas na coluna do elemento pivô

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	
$Lin1=13xLin1+Lin1$	L	0	0	13/3	0	0	-2/3	4900
	x2	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
$Lin2=-7xLin1+Lin2$	x4	0	0	-7/3	1	0	5/3	350
$Lin3=-2xLin1+Lin3$	x5	0	0	-2/3	0	1	1/3	150
$Lin4=1xLin1+Lin4$	x1	1	0	1/3	0	0	1/3	550

O Método Simplex: forma tabular

- Como x_2 entrou na base e x_3 saiu tem-se a nova tabela

Variável x_6 entra na base (maior acréscimo)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
L	0	0	$13/3$	0	0	$-2/3$	4900
x_2	0	1	$1/3$	0	0	$-2/3$	100
x_4	0	0	$-7/3$	1	0	$5/3$	350
x_5	0	0	$-2/3$	0	1	$1/3$	150
x_1	1	0	$1/3$	0	0	$1/3$	550

Variável x_4 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
L	0	0	$13/3$	0	0	$-2/3$	4900
x2	0	1	$1/3$	0	0	$-2/3$	100
x4	0	0	$-21/15$	$3/5$	0	1	210
x5	0	0	$-2/3$	0	1	$1/3$	150
x1	1	0	$1/3$	0	0	$1/3$	550

Lin2=Lin2 x 3/5

O Método Simplex: forma tabular

- **Construção da coluna Pivô: zerar os coeficientes das outras linhas na coluna do elemento pivô**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
<i>Lin3=2/3xLin2+Lin1</i>	Z	0	0	153/45	2/5	0	5040
<i>Lin1=2/3xLin2+Lin1</i>	x2	0	1	-9/15	2/5	0	420
	x6	0	0	-21/15	3/5	1	210
<i>Lin3=-1/3xLin2+Lin3</i>	x5	0	0	-3/15	-1/5	1	150
<i>Lin4=-1/3xLin2+Lin4</i>	x1	1	0	12/15	-1/5	0	480

O Método Simplex: forma tabular

- Como x_6 entrou na base e x_4 saiu tem-se a nova tabela

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	0	0	153/45	2/5	0	0	5040
x2	0	1	-9/15	2/5	0	0	420
x6	0	0	-21/15	3/5	0	1	210
x5	0	0	-3/15	-1/5	1	0	150
x1	1	0	12/15	-1/5	0	0	480

- Note que agora **nenhuma** variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.

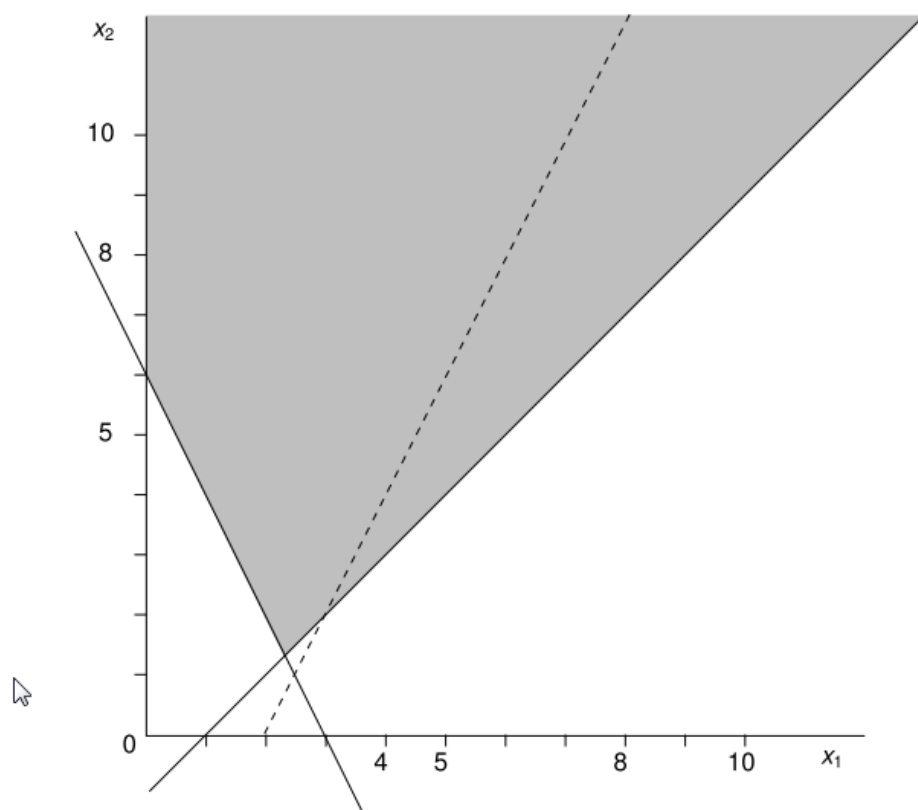
Casos especiais

- Caso de **soluções ótimas múltiplas**:
 - há uma variável não básica com coeficiente 0 na linha 0 do quadro ótimo
 - essa variável pode entrar na base (saindo outra) sem que o objetivo seja alterado.
- Caso de **problemas ilimitados**:
 - num passo do algoritmo há uma variável não básica que pode ser aumentada (de zero para um valor positivo)
 - quando essa variável entra na base, não há nenhuma restrição que a limite
 - em problemas de maximização: uma variável tem coeficiente negativo na linha da função objetivo, e coeficientes não positivos em todas as restrições.

Problemas ilimitados

Resolva graficamente:

$$\begin{array}{ll} \max z = & 2x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Ferramenta interativa do método simplex:

- http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/simplex_intro/index.html