Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre II Año 2016

Profesor: Iván Derpich, Óscar C. Vásquez
Fecha: 17 de octubre 2016

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3.	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos)

Sea un conjunto J de n actividades, cada actividad j posee un tiempo de duración $p_j \in N$, una peso $w_j \in Q$ y un tiempo de vencimiento común $d \in N$. Sea $w_j\ max\ \{0, C_j - d\}$ la tardanza ponderada de la actividad $j \in N$, donde C_j es el tiempo de finalización de la actividad $j \in N$. Considere que se tiene una máquina la cual no puede realizar más de una actividad al mismo tiempo. El objetivo del problema es minimizar la suma total de las tardanzas ponderadas de las actividades.

Modele el problema distinguiendo parámetros (10 puntos), variables (20 puntos), función objetivo (20 puntos) y restricciones, describiéndolas (50 puntos)

Pauta Problema 1

Parámetros

J: Conjunto de n actividades.

$p_j \in N$: tiempo de duración de la actividad $j \in J$

$w_j \ \in Q$: peso de de la actividad $j \in J$

$d \in N$: tiempo común de vencimiento

Variables

x_{ij} , $i, j \in J$ variable binaria que toma el valor 1 si la actividad i es realizada ante que la actividad $j \neq i$ y 0 en otro caso

C_j $j \in J$, tiempo de finalización de la actividad j

T_j $j \in J$, Tardanza de la actividad j

Función Objetivo

$$[\text{MIN}] \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j T_j \tag{1}$$

Restricciones

$$1 \leq x_{ij} + x_{jk} + (1 - x_{ik}) \leq 2 \quad \forall i, j, k \in J \tag{2}$$

$$\sum_{i \in J} x_{ij}\, p_i + p_j = C_j \quad \forall j \in J \tag{3}$$

$$T_j \geq C_j - d \quad \forall j \in J \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ , T_j, C_j \geq 0 \ , \forall\ i, j \in J, \tag{5}$$

El objetivo (1) corresponde a minimizar la suma total de las tardanzas ponderadas de las actividades. El conjunto de restricciones (2) verifica el orden entre las actividades, el conjunto de restricciones (3) definen el tiempo de finalización de las actividades y el conjunto de restricciones (4) define la tardanza de la actividad. Por último el conjunto de restricciones (5) fijan la naturaleza del dominio de las variables.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Nombre Alumno: ____________________________________

Problema 2.- (100 puntos)

Problema 2a (50 puntos). Demuestre que el problema

$$[\text{MIN}] \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D_i \quad \forall i \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = O_j \quad \forall j \qquad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \,, \forall\, i, j \qquad (5)$$

Es equivalente al problema.

$$[\text{MAX}] \sum_{i=1}^{n} u_i D_i + \sum_{j=1}^{n} v_j O_j \qquad (6)$$

Sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j \qquad (7)$$

$$u_i, v_j <> 0 \,, \forall\, i, j \qquad (8)$$

Utilice para la demostración las propiedades de dualidad fuerte y débil, y el teorema de holgura complementaria.

Problema 2b (30 puntos). Considere el siguiente problema

$$[\text{MIN}]\ 4\, x_1 + 15 x_2 + 10 x_3 \qquad (1)$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \qquad (2)$$

$$+3x_2 + x_3 \geq 2 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (4)$$

Considerando que el problema anterior es el “problema primal”, presente el problema dual, para luego, incorporando una o más restricciones de modelo que la solución del problema dual sea degenerada: Que sucede con el tablaux de simplex.

Problema 2 c. (20 puntos) Muestre a través de un ejemplo la propiedad de dualidad fuerte y débil.

Pauta Pregunta 2a:

Reescribiendo el problema

$$[\mathrm{MIN}]\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq D_i \quad \forall i \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq D_i \quad \forall i \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq O_j \quad \forall j \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq O_j \quad \forall j \qquad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0\,, \forall\, i,j \qquad (5)$$

La propiedad de dualidad fuerte y débil, más el teorema de holgura complementaria permite describir el problema tal que, el problema dual es:

$$[MAX]\ \sum_{i=1}^{n}(u_i{}' + u_i{}'')D_i + \sum_{j=1}^{n}(v_j' + v_j{}'')O_j \qquad (6)$$

Sujeto a

$$u_i' \geq 0 \quad \forall i \qquad (7)$$

$$u_i'' \leq 0 \quad \forall i \qquad (8)$$

$$v_j' \geq 0 \quad \forall j \qquad (9)$$

$$v_j'' \leq 0 \quad \forall j \qquad (10)$$

$$(u_i{}' + u_i{}'') \quad + \left(v_j' + v_j''\right) \leq c_{ij} \quad \forall ij \qquad (11)$$

Haciendo el cambio de variable $u_i = u_i' + u_i{}''$ para todo i y, $v_j = u_j' + u_j{}''$ para todo j, se obtiene el resultado.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Pregunta 2b: El problema dual es:

$$[\text{MAX}]\ \text{z} = 3y_1 + 2y_2$$

Sujeto a

$$y_1 \leq 4 \tag{1}$$

$$y_1 + 3y_2 \leq 15 \tag{2}$$

$$2y_1 + y_2 \leq 10 \tag{3}$$

$$y_{1,}y_2 \geq 0 \tag{4}$$

Estandarizando

$$[\text{MAX}]\ \text{z} = 3y_1 + 2y_2$$

Sujeto a

$$y_1 + \text{H}_1 = 4 \tag{1}$$

$$y_1 + 3y_2 + \text{H}_2 = 15 \tag{2}$$

$$2y_1 + y_2 + \text{H}_3 = 10 \tag{3}$$

$$H_1, H_2, H_3, y_{1,}y_2 \geq 0 \tag{4}$$

Luego de tres iteraciones o método grafico (las iteraciones las pueden encontrar en los apuntes de clase dado que el problema es idéntico al de las diapositivas del curso). El tablero óptimo es

y_1	1	0	0	-1/5	3/5	3
H_1	0	1	0	2/5	-3/5	1
y_2	0	0	1	1/5	1/5	4
z	0	0	0	-1/5	-7/5	-17

Por lo tanto una recta que degenera el problema es cualquiera que pase por el óptimo, tal como

$$y_1 + 2y_2 \leq 11 \tag{3}$$

Con esta nueva restricción el método simplex podría obtener el valor optimo a partir de una solución factible del problema inicial.

Pauta Pregunta 2c:

(Considere el problema primal (podría ser cualquiera) $[MAX]z = x_1$ sujeto a $0 \leq\ x_1 \leq\ 2$

El problema dual asociado es $[MIN]w = 2\pi_1$ sujeto a $\pi_1 \geq 1$

Claramente $x_1 *= 2, z *= \ 2$ y $\pi_1 *= 1, w *= \ 2$ con lo cual se muestra la propiedad de dualidad fuerte

Para la propiedad de dualidad débil, basa considerar $\pi_1 = 2$ y tenemos $w = \ 4 \geq z = 1$ con $x_1 = 1$.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Nombre Alumno: ______________________________________

Problema 3. (100 puntos):

Díaz-Núñez y Vásquez Corporation, empresa de alta tecnología, la cual produce tres productos A, B y C. Cada producto A utiliza 1 unidad de materia 1, 1 unidad de materia prima 2 y 1 unidad de materia prima 3. Cada producto B utiliza, 2 unidades de materia prima 2 y 1 unidad de materia prima 1. Finalmente, cada producto C utiliza 2 unidades de materia prima 3 y 1 unidad de materia prima 2. Las materias primas disponibles son de 500 unidades para las materias primas 1 y 3; y 1000 unidades para la materia prima 2. Se sabe que la utilidad por cada producto A, B y C es de 2, 3 y 4 mil unidades monetarias, respectivamente. Por otro lado, se sabe que por cada unidad de producto B, es liberada 1 unidad de toxina al ambiente (el resto de productos no emite toxinas), cantidad de toxina que no puede superar las 100 unidades. El objetivo es maximizar la utilidad.

Donde parte del tableux óptimo con las variables de holgura incorporadas es

	A	B	C	H1	H2	H3	H4	
-Z	0	0	0	-1	-1	0	-3	

a) Desde el tableux anterior, ,
   i. Describa el modelo del problema y estandarícelo (5 puntos)
   ii. Determine los valores que faltan sin realizar ningún método, solo utilizando teoremas. (20 puntos)
   iii. Explique brevemente porqué sabemos que es óptimo (5 puntos)
b) ¿Cuál es el rango que puede variar la cantidad de materia prima 2 de modo que no se siga produciendo los mismos productos que da la solución óptima? (25 puntos)
c) La unidad de inteligencia propone incorporar un producto de alta tecnología en el mercado, que utiliza 1 unidad de materia prima 2, 1 unidad de materia prima 3 y 2 litros de materia prima 1. ¿Cuánto de ser el valor mínimo de utilidad que debe tener el nuevo producto para ser considerada como parte de la producción? (25 puntos)
d) Suponga que la utilidad del producto A es solo estimado. ¿Para qué valores de utilidad de A se sigue produciendo los mismo productos que se obtiene en la solución óptima? (20 puntos)

Pauta Problema 3

a) i. El Modelo es	Estandarizando queda.
[MAX] 2A+3B+4C	A+B+H1= 500
A+B ≤ 500	A+2B+C +H2 =1000
A+2B+C ≤ 1000	A + +2C +H3 = 500
A + +2C ≤ 500	B+ H4 =100
B≤100	A,B,C, H1, H2, H3,H4≥0
A,B,C≥0	

Donde A, B y C son la cantidad de productos A, B y C producida.

a) Ii.El tableux óptimo es

VB	A	B	C	H1	H2	H3	H4	LB
A	1	0	0	**1**	**0**	0	**-1**	400
B	0	1	0	**-1**	**½**	0	**1**	100
C	0	0	1	**-3**	**0**	0	**3**	400
H3	0	0	0	**1**	**0**	1	**-1**	**-700**
-Z	0	0	0	-1	-1	0	-3	-2700

De los costos reducidos igual cero, se obtiene las columnas en rojo. De los costos reducidos de las variables de holgura se tiene que las restricciones 1,2 y 4 son saturadas y entonces: H1=0, H2=0, H4=0, Así.

A + B =500, B=500-A

A+ 2B + C=1000, A+2(500-A)+C=1000, C=A

B=100, A=400, C=400

Z= 2A+3B+4C= 2*400+3*100+4*400=2.700

Para la primera restricción, tenemos

A+B+H1=500, pero B+H4=100 y entonces B=100-H4

Asi A+B+H1=A+100-**H4+H1**=500, con lo cual se completa la primera fila de la variable A en el tableux

Para la segunda restricción tenemos

A+ 2B + C+H2=1000, pero del resultado anterior tenemos A=400-H1+H4, además A=C, luego tenemos

A+2B+C+H2=2A+2B+H2 =2 (400-H1+H4)+2B+H2=1000, Asi 800-2H1+2H4+2B+H2=1000, y entonces B-**H1+H2/2+H4**=200, con lo cual se completa la segunda fila de la variable B.

Para la tercera restricción tenemos

A+2C+H3=500, con A=C, y A+100**-H4+H1**=500, tenemos

3*(400-H1+H4)+H3=500, y asi H3-**3H1+3H4**=-700, con lo cual se completa la tercera fila de la variable C.

Por otro lado

A+2C+H3=3C+3H1-3H4-700=500, y asi C**+H1-H4**=400, con lo cual se completa la cuarta fila de la variable H3.

Pero al obtener el valor de H3, tenemos que

A+2C+H3= 500, esto implica que **H3=-700**

a) **.iii Dado que H3=-700, la solución es infactible y el tableux no es optimal.**

2.- La solución óptima es (aplicando simplex dual o resolvendo el problema por algún otro método)

VB	A	B	C	H1	H2	H3	H4	LB
B	0	1	0	0	0	0	1	100
C	1/2	0	1	0	0	1/2	0	250
H1	1	0	0	1	0	0	-1	400
H2	1/2	0	0	0	1	-1/2	-2	550
-Z	0	0	0	0	0	-2	-3	-1300

Note que la solución tiene infinitas soluciones.

b) Considerando las matrices anteriores, verificamos con un Δ en la restricción asociada a la materia prima 2.
c) B^{-1}=

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{vmatrix}$$

$b' = b + B^{-1}\Delta b < 0$

$b = (100\ 250\ 400\ 550)^t + (0\ \Delta\ 0\ 0)^t < 0$

Así si el valor de $\Delta < -250$ cambia la base y entonces no se sigue produciendo los mismo productos que la solución óptima.

d) Consideramos las matrices anteriores, la matriz coeficientes técnicos del nuevo producto

A_n=

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

y verificamos

C_n- cb B^{-1}*A_n >0

Donde
cb= (2 3 4 0)

Asi C_n- (2 3 4 0) (0 ½ 2 ½)^t

Y por lo tanto si tenemos C_n>19/2 implicara cambio de base y la consideración del nuevo producto

e) Sea C_A el nuevo costo de producto A,. Dado el tableux óptimo de nuestro problema , la producción de los productos será la misma (la misma base) si tenemos.

C_A= (2+x)- cb B^{-1}*A_e <0
=(2 3 4 0) (0 ½ 1 ½)^t

C_A= 2+x-11/2<0

No puede disminuir en más de 3,5 ya que si lo hace cambiará la base.