UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Motivación

Considere el problema de programación lineal dado por (ejemplo de 2 fases)

$$
\begin{aligned}
\max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\
sa. \qquad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
2x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1 &\leq 4 \\
3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Con nuestro conocimiento actual, el camino que deberíamos seguir es utilizar el método de las 2 fases tal que se agreguen variables artificiales para encontrar una solución básica factible inicial. Sin embargo, esto, en ciertos casos, sería ineficiente dado que podríamos resolver el dual del problema y, luego, aplicar el teorema de holgura complementaria.

Aún así, esto probablemente no sea lo más conveniente, o quizás sí…

Simplex dual

En particular, hasta el momento se ha visto que en las iteraciones del método simplex el lado derecho (LD ó b) siempre ha entregado valores positivos. No obstante, existen casos en los cuales esto puede no ser así y, dependiendo del dominio de las restricciones, una iteración podría entregar un resultado infactible.

Proposición: Sea $P \coloneqq \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $D \coloneqq \{u: u^T A \geq c, u \geq 0\}$, suponer que $P \neq \emptyset$. Entonces, $\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ (problema primal) es no acotado si y sólo si $D = \emptyset$. Equivalentemente, $\max\{c^T x: x \in \mathrm{P}\}$ es infactible si y sólo si existe un vector $\bar{y}$ tal que $A\bar{y} \leq 0$ y $\mathrm{c}^T \bar{y} > 0$.

Para recuperar factibilidad (recordando el Lemma de Farkas), se puede utilizar un método alternativo en un espacio de coordenadas distinto al bajo estudio. En este sentido, es posible utilizar el problema dual asociado para, de acuerdo a la proposición anterior, recuperar factibilidad.

Nota: Si el problema dual es infactible, entonces el primal es no acotado. De la misma manera, si el primal es infactible, el dual es no acotado.

Simplex dual

En tales casos, el método recibe el nombre de simplex dual. Y trabaja de la siguiente manera:

<u>Criterio de salida</u>:

1. Se observa la parte derecha de la tabla, los recursos, y se selecciona el más negativo para que abandone la base.
2. Se elige un valor negativo para devolverle factibilidad al problema y el mayor de ellos para favorecer la rapidez de la convergencia.

<u>Criterio de entrada</u>:

La variable que entra se elige entre las variables no básicas del problema de acuerdo a

$$\min\left\{\left|\frac{c_j}{r_j}\right| : r_j \leq 0\right\}$$

Nota: Recordar que en el problema dual, el vector de costos se convierte en el vector de recursos.

Simplex dual

Considere el problema de programación lineal dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\times(-1)$

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ -3x_1 - 4x_2 + h_4 &= -12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 0:

$x_B = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ $c_B = (0,0,0,0)$ $b^T = (15, 10, 4, -12)$

$x_R = \{x_1, x_2\}$ $c_R = (3,2)$

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

h_4 sale

$$c_B B^{-1} R = (0,0)$$

$$c_R - c_B B^{-1} R = (3,2)$$

$$\min\left\{\left|\frac{3}{-3}\right|, \left|\frac{2}{-4}\right|\right\} = \frac{1}{2} = x_2$$ entra

Simplex dual

Considere el problema de programación lineal dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\times(-1)$

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ -3x_1 - 4x_2 + h_4 &= -12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 1:

$$x_B = \{h_1, h_2, h_3, x_2\} \quad c_B = (0,0,0,2) \quad b^T = (15, 10, 4, -12)$$

$$x_R = \{x_1, h_4\} \quad c_R = (3, 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1.25 & 0.75 \\ 1.25 & 0.25 \\ 1 & 0 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} R = (1.5, -0.5)$$

$$c_R - c_B B^{-1} R = (1.5, 0.5)$$

x_1 entra

$$\min\left\{\frac{6}{-1.25}, \frac{7}{1.25}, \frac{4}{1}, \frac{3}{0.75}\right\} = 4 = \{h_3, x_2\}$$

h_3 sale

Simplex dual

Considere el problema de programación lineal dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\times(-1)} \quad \begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad & x_1 + 3x_2 + h_1 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + h_2 = 10 \\ & x_1 + h_3 = 4 \\ & -3x_1 - 4x_2 + h_4 = -12 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 2:

$$x_B = \{h_1, h_2, x_1, x_2\} \quad c_B = (0,0,3,2) \quad b^T = (15,10,4,-12)$$

$$x_R = \{h_3, h_4\} \quad c_R = (0,0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ -1.25 & 0.25 \\ 1 & 0 \\ -0.75 & -0.25 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} R = (1.5, -0.5)$$

$$c_R - c_B B^{-1} R = (-1.5, 0.5)$$

h_4 entra

$$\min\left\{\frac{11}{0.75}, \frac{2}{0.25}, \frac{4}{0}, \frac{0}{-0.25}\right\} = 8 = h_2$$

sale

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Simplex dual

Considere el problema de programación lineal dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\times(-1)$

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ -3x_1 - 4x_2 + h_4 &= -12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 3:

$x_B = \{h_1, h_4, x_1, x_2\}$ $\quad c_B = (0, 0,3, 2)$ $\quad b^T = (15, 10, 4, -12)$

$x_R = \{h_3, h_2\}$ $\quad c_R = (0, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} R = (-1, 2)$$

$$c_R - c_B B^{-1} R = (1, -2)$$

h_3 entra

$$\min\left\{\frac{5}{5}, \frac{8}{-5}, \frac{4}{1}, \frac{2}{-2}\right\} = 1 = h_1$$

sale

Simplex dual

Considere el problema de programación lineal dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\times(-1)$

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ -3x_1 - 4x_2 + h_4 &= -12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 4:

$x_B = \{h_3, h_4, x_1, x_2\}$ $\quad c_B = (0,0,3,2)$ $\quad b^T = (15,10,4,-12)$

$x_R = \{h_1, h_2\}$ $\quad c_R = (0,0)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}R = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.6 \\ 1 & 1 \\ -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$c_B B^{-1} R = (0.2, 1.4)$

$c_R - c_B B^{-1} R = (-0.2, -1.4)$

$c_B B^{-1} b = 17 \quad x_1 = 3, x_2 = 4, h_3 = 1, h_4 = 13$

Tarea

Instrucciones: Obtenga el intervalo al cual pertenece α tal que el siguiente problema de programación lineal sea factible.

$$
\begin{aligned}
\max z &\coloneqq 6x_1 + 4x_2 \\
s.a. \quad x_1 &\leq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
2x_1 + x_2 &\leq 10 \\
3x_1 + 2x_2 &\geq \alpha \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

El desarrollo de la tarea es individual y tiene como plazo el día martes siguiente a esta clase hasta las 11:20 a.m.

Basta con subir una foto del desarrollo directamente al repositorio correspondiente disponible en campus virtual.

Es importante tener en cuenta que en caso de no cumplir tanto con el plazo de entrega esta no será considerada válida.