Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I
PEP I Semestre I Año 2016

Profesor: Iván Derpich - Óscar C. Vásquez
Fecha: 30 de mayo 2016

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3.	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos)

Sea un conjunto J de n anuncios televisivos y una tanda comercial de duración d. Tal que cada anuncio j posee un tiempo de duración $p_j \in N$ y una disposición a pagar por cada punto de rating $w_j \in Q$. Con el fin de modelar el nivel de audiencia, se considera una función de rating continua no monótona convexa $f(t)$ para $0 \leq t \leq d = \sum_j p_j$, estrictamente decreciente en $t \in [0, c]$ y estrictamente creciente en $t \in (c, d]$. Sin pérdida de generalidad, se asume $f(c) = 0$ para un $c \in (0, d)$ y valor de d hace sentido, ya que una tanda comercial no posee espacios vacíos y la asunción de convexidad de la función de rating sigue la conducta de la audiencia televisiva, que tiende a ser más alta al comienzo y al final de las tandas comerciales que en el medio. El objetivo del canal es definir una secuencia S para maximizar los ingresos totales producto de la emisión de los anuncios televisivos en una tanda comercial:

$$F(S) := \sum_j w_j \int_{c_j - p_j}^{c_j} f(t)dt,$$

Donde $[Cj - pj, Cj)$ es el intervalo de tiempo de emisión del anuncio j en la tanda comercial. Note que toda secuencia S está definida por tres conjuntos de anuncios: $J_1 = \{j \in J,\ c_j \leq c\}$,$J_2 = \{j \in J,\ c_j - p_j \leq c\ , c < c_j\}$ y $J_3 = \{j \in J, c \leq c_j - p_j\}$. Donde al menos uno de estos conjuntos es no vacío.

Por otro lado, se sabe que en una secuencia optima S^*, los anuncios en J_1 están ordenados por disposición a pagar por punto de rating no creciente y los anuncios en J_3 estan ordenados por disposición a pagar por punto de rating no decreciente. Lo anterior es conocido como propiedades de dominancia.

Por conveniencia, se asume que los anuncios televisivos se encuentran indexados de forma que $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ y se definen las constantes $c_{jt}\ , j \in J, t \in \mathcal{T}_j$ como la contribución del anuncio j en el total de ingresos cuando es secuenciado iniciando en el intervalo de tiempo t que es pre calculado $c_{jt} = w_j \int_t^{t+p_j} f(t)dt \quad \forall j \in \text{J} \ \ \forall t \in \mathcal{T}_j$

Modele el problema distinguiendo parámetros (10 puntos), variables (20 puntos), función objetivo (20 puntos) y restricciones incorporando las propiedades de dominancia (50 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1

Parámetros

c_{jt} , $j \in J, t \in \mathcal{T}_j$, la contribución del anuncio j en el total de ingresos cuando es secuenciado iniciando en el intervalo de tiempo t que es pre calculado $c_{jt} = w_j \int_t^{t+p_j} f(t)dt \quad \forall j \in \mathrm{J} \ \forall t \in \mathcal{T}_j$

Variables

x_{jt} , $j \in J, t \in \mathcal{T}_j$ las variable binaria que toma el valor 1 si el anuncio j es secuenciado iniciando en el intervalo de tiempo t y 0 en otro caso

Función Objetivo

$$maximizar \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}_j} c_{jt} x_{jt} \tag{1}$$

Restricciones

$$\sum_{t \in \mathcal{T}_j} x_{jt} = 1 \quad \forall j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t' = [\max\{0, t - p_j + 1\}, \min\{d - p_j, t\}]} x_{jt'} = 1 \quad \forall t \in [0, d-1] \tag{3}$$

$$\sum_{t \in [p_i, c - p_j]} t \cdot x_{jt} \geq \sum_{t \in [0, c - p_i - p_j]} t \cdot x_{it} + p_i \quad \forall i < j \tag{4}$$

$$\sum_{t \in [c + p_j, d - p_j]} t \cdot x_{it} \geq \sum_{t \in [c, d - p_i - p_j]} t \cdot x_{jt} + p_j \quad \forall i < j \tag{5}$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \ \forall j \in J, t \in \mathcal{T}_j \tag{6}$$

El objetivo (1) corresponde a maximizar el total de los ingresos causados por la secuenciación de todos los anuncios televisivos en la tanda comercial. El conjunto de restricciones (2) fuerza a cada anuncio a ser secuenciado una vez, el conjunto de restricciones (3) impone que en cada intervalo de tiempo un anuncio sea secuenciado, los conjuntos de restricciones (4) y (5) hacen uso de las propiedades de dominancias, y por último el conjunto de restricciones (6) fijan el dominio de las variables.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Considere el siguiente problema:

Min $W=-24 Y1+ 7Y2 +12 Y3$

s.a.

$-18 Y1-7Y2+4Y3 \geq 2$

$12 Y1-7Y2+4Y3 \geq 1$

$Y1 \leq 0$

$Y2,Y3 \geq 0$

Se pide

a) Resolver este problema a través de un método que considere variables auxiliares, identificando el problema estandarizado (33 puntos).
b) Escribir el problema dual y resolver a partir del resultado del primal encontrado (33 puntos).
c) Resolver el problema dual con un nuevo método basado en simplex, el cual alterna el criterio de entrada, ingresando el mayor costo reducido positivo en la iteración impar y el segundo mayor costo reducido positivo en la iteración par, si este existe (34 puntos.)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 2:

a) Modelo Estandarizado

Max Z=-24 Y1'- 7Y2 -12 Y3

s.a.

18 Y1'-7Y2+4Y3 -S1=2

-12 Y1'-7Y2+4Y3 –S2=1

Y1+Y1'=0

Y1',Y2,Y3≥0

Considerando variables auxiliares se tiene:

Max Z=-24 Y1'- 7Y2 -12 Y3- M (A1+A2)

s.a.

18 Y1'-7Y2+4Y3 -S1+A1=2

-12 Y1'-7Y2+4Y3 –S2+A2=1

Y1',Y2,Y3≥0

Note que aquí solo es considerado Y1' para efectos de simplificar el cálculo, utilizando la restricción Y1+Y1'=0 solo al obtener el valor óptimo de Y1'.

Por dos fases o por gran M se tiene:

La solución óptima es Y1'=1/30, Y2=0, Y3=7/20 , y entonces y1=-1/30

b) El problema dual es:

Max Z=2 X1+ X2

s.a.

-18 X1+ 12 X2 ≥ -24

-7X1-7X2 ≤7

4X1+4X2 ≤12

X1,X2≥0

Estandarizando tenemos:

Max Z=2 X1+ X2

s.a.

18 X1-12 X2 +H1=24

-7X1-7X2 +H2=7

4X1+4X2 +H3=12

X1,X2≥0

Utilizando

Dualidad Fuerte:

2X1*+ X2*=5.

Holgura complementaria:

18 X1*-12 X2*=24.

4X1*+4X2* =12.

Esto implica: X1*=2, X2*=1. Con esta información y la interpretación de simplex matricial tenemos que el simplex tabular en la iteración donde encuentra la solución óptima es:

VB	X1	X2	H1	H2	H3	
X1	1	0	1/30	0	1/10	2
H2	0	0	0	1	7/4	28
X2	0	1	-1/30	0	3/20	1
-Z	0	0	-1/30	0	-7/20	-5

Problema 3. (100 puntos):

a: Se tiene m puestos de trabajo y n trabajadores candidatos (m < n). Cada trabajo debe ser realizado por solo un candidato trabajador y un trabajador candidato puede realizar a lo más un trabajo. Cada trabajador i tiene una tiempo de realización del trabajo j t_{ij} . Todos los trabajos deben ser realizados. El objetivo es minimizar el tiempo total de trabajo realizado.

Plantee el **problema de programación lineal.** Recuerde seguir la siguiente estructura: parámetros (5 puntos), variables (15 puntos), función objetivo (10 puntos) y restricciones (20 puntos).

b. Un empresario tiene n instrumentos de inversión en las bolsas de comercio de tres ciudades de latinoamerica: Santiago, Buenos Aires y Sao Paulo. Las bolsas de comercio reflejan la estabilidad económica del país, por lo que el mismo instrumento de inversión tiene un retorno (porcentaje de ganancia) diferente en cada ciudad. Para cada instrumento de inversión usted tiene una limitante de dinero. Considere que usted es adverso al riesgo y desea maximizar la mínima ganancia de sus inversiones en las bolsas de comercio.

Plantee el **problema de programación lineal.** Recuerde seguir la siguiente estructura: parámetros (5 puntos), variables (15 puntos), función objetivo (10 puntos) y restricciones (20 puntos).

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 3.

a.- Parámetros (5 puntos)
t_{ij} = tiempo de realización para el candidato i del trabajo j; i= 1,…,n j=1,…, m

Variables de decisión (15 ptos):
X_{ij}=1 si el candidato i realiza el trabajo j; i= 1,…,n j=1,…, m

Función Objetivo (10 ptos):

$$\min z = \sum_i \sum_j X_{ij} t_{ij}$$

Restricciones (20 puntos)

$$\sum_i X_{ij} = 1 \ \forall j$$

$$\sum_j X_{ij} \leq 1 \ \forall i$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

b.- Parámetros (5 puntos)
t_{ij} = tasa de retorno del instrumento i en la ciudad j; i= 1,…,n j=1 (Stgo),2 (Sampa), 3(Baires)
c_{ij} = cantidad máxima para invertir del instrumento i en la ciudad j; i= 1,…,n j=1 (Stgo),2 (Sampa), 3(Baires)

Variables de decisión (15 ptos):
X_{ij}= Dinero a invertir del instrumento i en la ciudad j; i= 1,…,n j=1 (Stgo),2 (Sampa), 3(Baires)
Z= Variable auxiliar para representar la mínima ganancia entre todas las ciudades

Función Objetivo (10 ptos):

$$\max Z$$

Restricciones (20 puntos)

$$\sum_i X_{ij}(1 + t_{ij}) \ \geq Z \ \forall j$$

$$\sum_j X_{ij} \leq c_{ij} \ \forall i$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$