UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

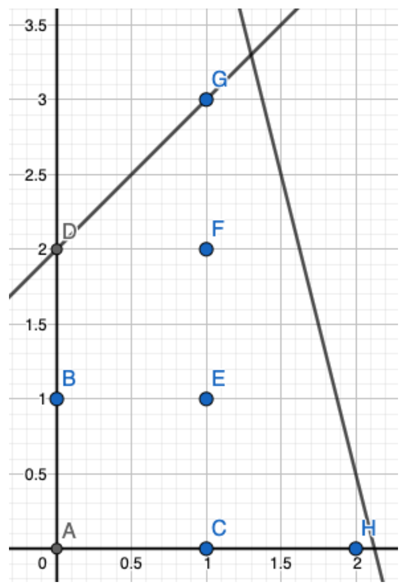
Ingeniería civil industrial

Introducción

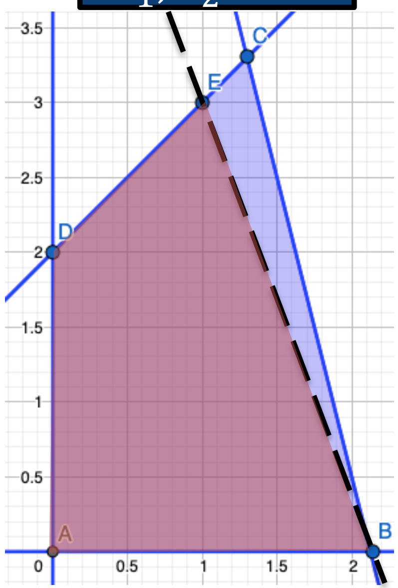
Considere el problema de programación entera dado por

$$\begin{aligned} \max z &:= 5.5x_1 + 2.1x_2 \\ s.a. \quad -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 &\leq 17 \\ x_1, x_2 &\in Z_+ \end{aligned}$$

La solución del problema relajado está dado por el vector $(x_1^*, x_2^*) = (1.3, 3.3)$ con un valor objetivo $z^* = 14.08$.



$x_1, x_2 \geq 0$



Desigualdades de Chvátal

Considere un poliedro $P \coloneqq \{x \in R^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Dados $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ y $C \coloneqq \{1, \dots, n\} \setminus B$, sea $S \coloneqq P \cap \left\{x : x_j \in Z, j \in B\right\}$. Cualquier desigualdad de Chvátal para este sistema es de la forma

$$(uA - v)x \leq \lfloor ub \rfloor,$$

donde $u \in R_+^m$, $v \in R_+^n$, $(uA_B - v_B) \in Z^B$ y $uA_C - v_C = 0$. Sea $\alpha \coloneqq uA, \beta \coloneqq ub$. Claramente, $v_j = \alpha_j \geq 0, \forall j \in C$, y $v_j \geq \alpha_j - \left\lfloor \alpha_j \right\rfloor, \forall j \in B$. Esto nos lleva a que las desigualdades relevantes de Chvátal son de la forma

$$\sum_{i \in B} \lfloor uA \rfloor x_j \leq \lfloor ub \rfloor, \qquad \forall u \in R_+^m : uA_C \geq 0$$

Cortes fraccionales de Gomory

Este método forma parte de los métodos de plano cortante. En particular, este método está basado en los llamados cortes fraccionales, y aplica a los problemas de programación lineal enteros (es decir, donde todas las variables deben ser enteras).

Dada una matriz racional $A_{m\times n}$ y un vector racional $b \in R^n$, considerar $P := \{x \in R^n_+ : Ax = b\}$ y $S := P \cap Z^n$. Además, sea $c \in R^n$, y el problema de programación lineal entera $\max\{c^T x : x \in S\}$. Considere B la base óptima del problema de programación lineal entera relajado $\max\{c^T x : x \in P\}$, y $R := \{1, \dots, n\} \setminus B$. El tablero asociado a B es de la forma

$$x_i + \sum_{j\in R} \bar{a}_{i,j} x_j = \bar{b}_i, \qquad i \in B$$

La solución óptima del problema relajado está dado por $x_i^* = \bar{b}_i, i \in B, x_j^* = 0, j \in R$. Si x^* es entero, entonces este es solución del problema original. En otro caso, existe algún $h \in B$ tal que $\bar{b}_h \notin Z$.

Cortes fraccionales de Gomory

Entonces, utilizando la desigualdad de Chvátal en la fila h se tiene

$$x_h + \sum_{j \in R} \lfloor \bar{a}_{h,j} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_h \rfloor \rightarrow x_h + \sum_{j \in R} \lfloor \bar{a}_{h,j} \rfloor x_j + x_{n+1} = \lfloor \bar{b}_h \rfloor$$

Finalmente, si se resta esta fila h dada por $x_h + \sum_{j \in R} \bar{a}_{h,j} = \bar{b}_h$ de la ecuación anterior, se obtiene el corte fraccional de Gomory

$$\sum_{j \in R} -f_j x_j + x_{n+1} = -f_0$$

donde $f_j \coloneqq \bar{a}_{h,j} - \lfloor \bar{a}_{h,j} \rfloor$ y $f_0 \coloneqq \bar{b}_h - \lfloor \bar{b}_h \rfloor$.

Cortes fraccionales de Gomory
Ejemplo

$$\max 5.5x_1 + 2.1x_2$$
$$s.a. \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x_1, x_2 \in Z_+ \quad \boxed{x_1, x_2 \geq 0}$$

La base solución está dada por $x_B = (x_2, x_1) = (3.3, 1.3)$ y $x_R = (h_2, h_1)$.

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$(0.8 - \lfloor 0.8 \rfloor)h_1 + (0.1 - \lfloor 0.1 \rfloor)h_2 \geq 3.3 - \lfloor 3.3 \rfloor \to 0.8h_1 + 0.1h_2 \geq 0.3$$
$$(-0.2 - \lfloor -0.2 \rfloor)h_1 + (0.1 - \lfloor 0.1 \rfloor)h_2 \geq 1.3 - \lfloor 1.3 \rfloor \to 0.8h_1 + 0.1h_2 \geq 0.3$$

luego, como $h_1 = 2 + x_1 - x_2$ y $h_2 = 17 - 8x_1 - 2x_2$ se tiene que, dado que las dos desigualades anterior son la misma, el corte fraccional de Gomory es $x_2 \leq 3$.

Al resolver este problema con el corte fraccional de Gomory se tiene que $x^* = (1.375, 3)$ y $z^* = 13.8625$, por lo que se debe repetir este procedimiento hasta que el vector solución sea entero.

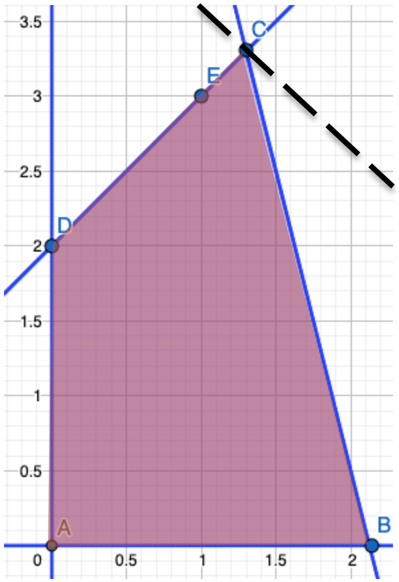
Nota: El siguiente corte fraccional de Gomory es $x_1 + x_2 \leq 4$

Dominancia

Entonces, se trata de encontrar un corte y añadirlo sin más?

La respuesta es: **DEPENDE!**

Esto puesto que una restricción puede definir el politopo convexo o no dado que puede existir una restricción más fuerte que defina este politopo.



Dominancia

Ideas:

1. La desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ es válida para un poliedro $P \subseteq R^n$, si $P \subseteq \{x \in R^n : \pi x \leq \pi_0\}$.
2. Esta desigualda es una cara, $F \subseteq P$, si existe una desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ válidad para P tal que $F \coloneqq \{x \in P : \pi x \leq \pi_0\}$.

Entonces… ¿cómo se comparan las desigualdades?

Dadas dos desigualdades $\pi x \leq \pi_0$ y $\gamma x \leq \gamma_0$ válidas para el poliedro P.

- Estas son equivalentes si $\exists \lambda > 0 : (\gamma, \gamma_0) = \lambda(\pi, \pi_0)$.
- Si $\exists \lambda > 0$ tal que $\gamma > \lambda\pi \wedge \gamma_0 \leq \lambda\pi_0$, se dice que $\gamma x \leq \gamma_0$ *domina a* (es más fuerte que) $\pi x \leq \pi_0$. Esto quiere decir que cualquier punto x que satisface $\gamma x \leq \gamma_0$ también satisface $\pi x \leq \pi_0$.

Dominancia
Ejemplo

Sea el problema de programación línea entera dado por

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ s.a.\quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in Z_+ \end{aligned}$$

La base solución del problema relajado está dada por $x_B = \{x_2, h_2, x_1\}$ y $x_R = \{h_1, h_3\}$

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 \\ -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, B^{-1}b = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 1/2 \\ 11/4 \end{pmatrix}$$

Los cortes fraccionales de Gomory están dados por

- $(3/2 - \lfloor 3/2 \rfloor)h_1 + (-1/4 - \lfloor -1/4 \rfloor)h_3 \geq 9/4 - \lfloor 9/4 \rfloor \rightarrow 1/2\, h_1 + 3/4\, h_3 \geq 1/4$ por lo que $5x_1 + 2x_2 \leq 18$.
- $(-2 - \lfloor -2 \rfloor)h_1 + (1/2 - \lfloor 1/2 \rfloor)h_3 \geq 1/2 - \lfloor 1/2 \rfloor \rightarrow 1/2\, h_3 \geq 1/2$ por lo que $6x_1 + 2x_2 \leq 20$.
- $(-1/2 - \lfloor -1/2 \rfloor)h_1 + (1/4 - \lfloor 1/4 \rfloor)h_3 \geq 11/4 - \lfloor 11/4 \rfloor \rightarrow 1/2\, h_1 + 1/4\, h_3 \geq 3/4$ por lo que $2x_1 + x_2 \leq 7$.

Dominancia
Ejemplo

Los cortes fraccionales de Gomory están dados por

- $5x_1 + 2x_2 \leq 18.$ (1)
- $6x_1 + 2x_2 \leq 20.$ (2)
- $2x_1 + x_2 \leq 7.$ (3)

entonces, la dominancia está dada por

- (1) domina a (2)? $(5,2) > \lambda(6,2) \wedge 18 \leq \lambda 20 \to \left(\lambda < \frac{5}{6}\right) \cap \left(\lambda \geq \frac{9}{10}\right) = \emptyset$ →NO!
- (2) domina a (1)? $(6,2) > \lambda(5,2) \wedge 20 \leq \lambda 18 \to (\lambda < 1) \cap \left(\lambda \geq \frac{10}{9}\right) = \emptyset$ →NO!
- (1) domina a (3)? $(5,2) > \lambda(2,1) \wedge 18 \leq \lambda 7 \to (\lambda < 2) \cap \left(\lambda \geq \frac{18}{7}\right) = \emptyset$ →NO!
- (3) domina a (1)? $(2,1) > \lambda(5,2) \wedge 7 \leq \lambda 18 \to \left(\lambda < \frac{2}{5}\right) \cap \left(\lambda \geq \frac{7}{18}\right) \neq \emptyset$ →SÍ!
- (3) domina a (2)? $(2,1) > \lambda(6,2) \wedge 7 \leq \lambda 20 \to \left(\lambda < \frac{1}{3}\right) \cap \left(\lambda \geq \frac{7}{20}\right) = \emptyset$ →NO!

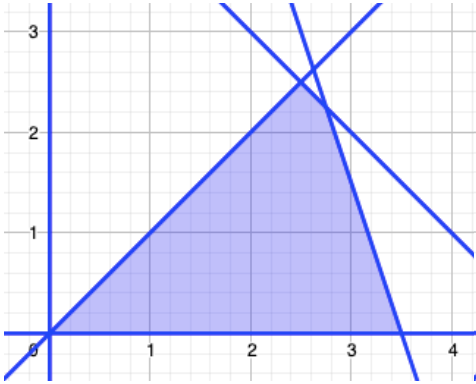
Por lo tanto, hemos de agregar los cortes número (2) y (3).

Dominancia
Ejemplo

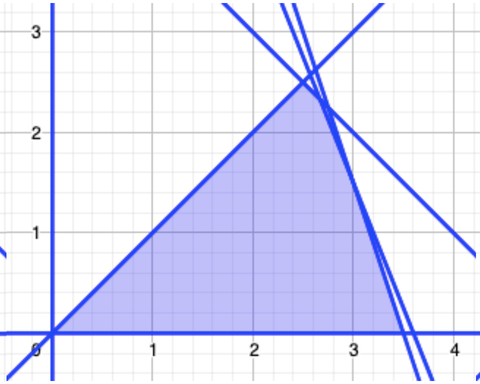
Los cortes fraccionales de Gomory están dados por

- $5x_1 + 2x_2 \leq 18.$ (1), $6x_1 + 2x_2 \leq 20.$ (2), $2x_1 + x_2 \leq 7.$ (3)

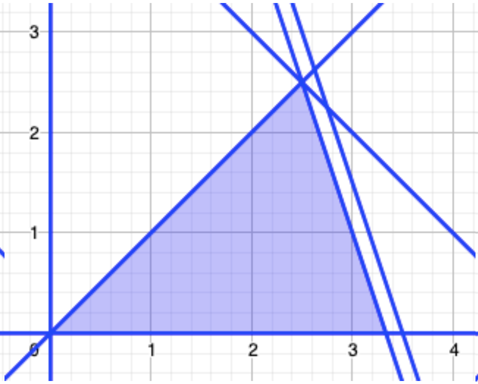
Original



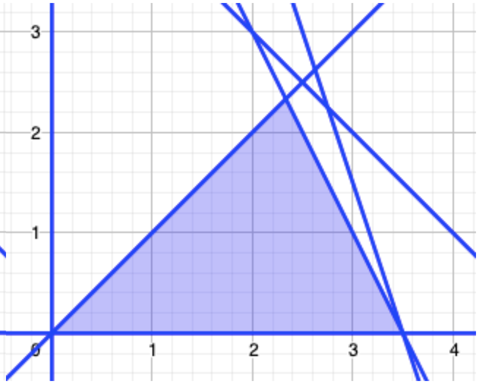
$5x_1 + 2x_2 \leq 18$



$6x_1 + 2x_2 \leq 20$

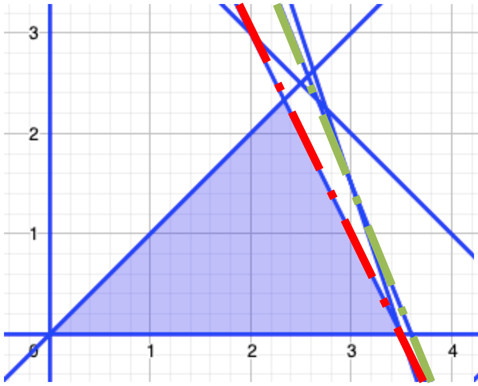


$2x_1 + x_2 \leq 7$

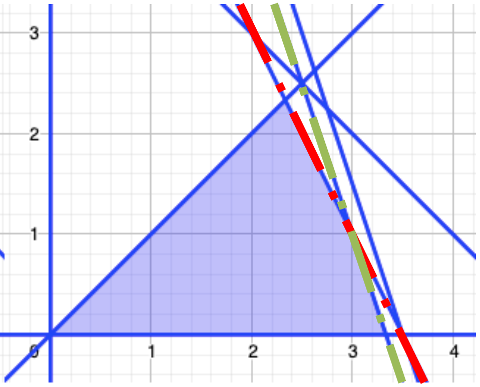


$$x^* = (2.75, 2.3)$$
$$z^* = 7.75$$

(1)+(3)



(2)+(3)



$$x^* = (3, 1)$$
$$z^* = 7$$

Extensión de B&B, Branch-and-Cut

Si bien el algoritmo B&B es la base para la resolución de problemas de programación lineal entera (y mixta), ciertos métodos de *aceleración* pueden ser incluidos cada vez que se ramifica una variable.

Cuando se incorporan planos de corte, como los cortes fraccionales de Gomory, este algoritmo pase a ser llamado Branch-and-Cut.

Lo que hacen los Solver comerciales, tales como Cplex o Gurobi, es aplicar distintos métodos en cada ramificación, incluyendo penalizaciones para encontrar incumbentes, entre otros varios métodos.

```
        Nodes                                         Cuts/
   Node  Left     Objective  IInf  Best Integer    Best Bound    ItCnt     Gap

      0     0   183803.7621   668                 183803.7621       22
*     0+    0                       282832.8495   183803.7621             35.01%
      0     0   183803.7621   748   282832.8495      Cuts: 85    23727    35.01%
*     0+    0                       275900.2047   183803.7621             33.38%
      0     0   183803.7621   714   275900.2047      Cuts: 67    36316    33.38%
*     0+    0                       258666.6293   183803.7621             28.94%
      0     0   183803.7621   608   258666.6293      Cuts: 36    52811    28.94%
*     0+    0                       246557.8255   183803.7621             25.45%
*     0+    0                       243369.6650   183803.7621             24.48%
```

```
Clique cuts applied:  72
Zero-half cuts applied:  38
Gomory fractional cuts applied:  1

Root node processing (before b&c):
  Real time             =  231.15 sec. (99870.04 ticks)
Parallel b&c, 32 threads:
  Real time             = 6969.22 sec. (2459102.45 ticks)
  Sync time (average)   = 2718.15 sec.
  Wait time (average)   = 2718.35 sec.
```