UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Simplex matricial

Considere el modelo de optimización en su forma general

$$\begin{aligned} \max z &:= c^T x \\ st.\, Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &A_{m\times m} \mid Rang(A) = m \\ &x = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

Notar que el modelo de optimización se encuentra en su forma estándar, por lo que la matriz de variables puede ser separada como $A = [B, R]$ y $x = [x_B, x_R]^T$, entonces

$[B, R][x_B, x_R]^T = b = Bx_B + Rx_R \to x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$, donde x_B representa las variables básicas (las cuales tienen valor, recordar lado izquierda en simplex tabla).

Además, $z_B = -c_B B^{-1} b$ y $\bar{c} = c - c_B B^{-1} A = (\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_n})$, donde $\bar{c}$ representa los costos reducidos (precios sombra). Sin embargo, recordar que $\overline{c_i} = 0, \forall i \in B$ (variables básicas) y $\bar{c} = c_R - c_B B^{-1} R \leq 0$ (variables no básicas, en caso de maximización).

Un ejemplo (mesas y sillas)

Forma (estándar) modelo matemático

$$\max z := 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a:

$$x_1 + 3x_2 + h_1 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + h_2 = 10$$
$$x_1 + h_3 = 4$$
$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

Iteración 0:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	1	3	1	0	0	15
h_2	2	1	0	1	0	10
h_3	1	0	0	0	1	4
$-z$	3	2	0	0	0	0

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Un ejemplo (mesas y sillas)

Iteración 0:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	1	3	1	0	0	15
h_2	2	1	0	1	0	10
h_3	1	0	0	0	1	4
$-z$	3	2	0	0	0	0

x_B	h_1	h_2	h_3
x_R	x_1	x_2	

$\downarrow$

x_B	h_1	h_2	x_1
x_R	h_3	x_2	

Iteración 1:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	0	3	1	0	-1	11
h_2	0	1	0	1	-2	2
x_1	1	0	0	0	1	4
$-z$	0	2	0	0	-3	-12

	x_1	x_2
R	1	3
	2	1
	1	0
c_R	3	2

	h_1	h_2	h_3
B	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
c_B	0	0	0

b
15
10
4

B^{-1}

1	0	0
0	1	0
0	0	1

	x_1	x_2
$B^{-1}R$	1	3
	2	1
	1	0

$B^{-1}b$	15
	10
	4

	x_1	x_2
$c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	0	0
$c_R - c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	3	2

	Valor	Variable
Entrada	3	x_1

Criterio	h_1	15
	h_2	5
	h_3	4

	Valor	Variable
Salida	4	h_3

Un ejemplo (mesas y sillas)

Iteración 0:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	1	3	1	0	0	15
h_2	2	1	0	1	0	10
h_3	1	0	0	0	1	4
$-z$	3	2	0	0	0	0

x_B	h_1	h_2	x_1
x_R	h_3	x_2	

$\downarrow$

x_B	h_1	x_2	x_1
x_R	h_3	h_2	

Iteración 2:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	0	0	1	-3	5	5
x_2	0	1	0	1	-2	2
x_1	1	0	0	0	1	4
$-z$	0	0	0	-2	1	-16

R	h_3	x_2
	0	3
	0	1
	1	0
c_R	0	2

B	h_1	h_2	x_1
	1	0	1
	0	1	2
	0	0	1
c_B	0	0	3

b
15
10
4

B^{-1}		
1	0	-1
0	1	-2
0	0	1

$B^{-1}R$	
h_3	x_2
-1	3
-2	1
1	0

$B^{-1}b$
11
2
4

	h_3	x_2
$c_B B^{-1} R$	3	0
$c_R - c_B B^{-1} R$	-3	2

	Valor	Variable
Entrada	2	x_2

Criterio		
	h_1	3.67
	h_2	2
	x_1	inf

	Valor	Variable
Salida	2	h_2

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Un ejemplo (mesas y sillas)

Iteración 0:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	1	3	1	0	0	15
h_2	2	1	0	1	0	10
h_3	1	0	0	0	1	4
$-z$	3	2	0	0	0	0

x_B	h_1	x_2	x_1
x_R	h_3	h_2	

$\downarrow$

x_B	h_3	x_2	x_1
x_R	h_1	h_2	

Iteración 3:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	0	0	0.2	-0.6	1	1
x_2	0	1	0.4	-0.2	0	4
x_1	1	0	-0.2	0.6	0	3
$-z$	0	0	-0.2	-1.4	0	-17

R	h_3	h_2
	0	0
	0	1
	1	0
c_R	0	0

B	h_1	x_2	x_1
	1	3	1
	0	1	2
	0	0	1
c_B	0	2	3

b
15
10
4

B^{-1}

1	-3	5
0	1	-2
0	0	1

$B^{-1}R$	h_3	h_2
	5	-3
	-2	1
	1	0

$B^{-1}b$

5
2
4

	h_3	h_2
$c_B B^{-1}R$	-1	2
$c_R - c_B B^{-1}R$	1	-2

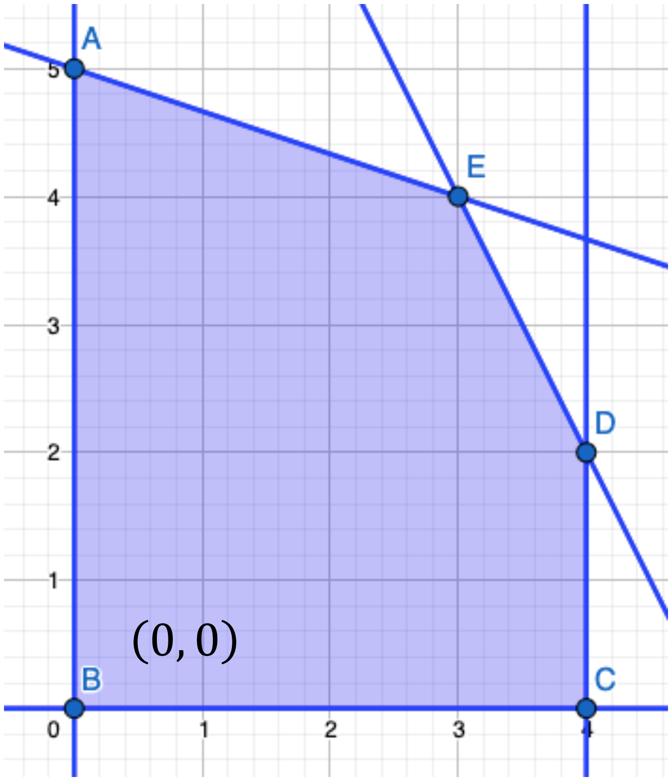
	Valor	Variable
Entrada	1	h_3

Criterio	h_1	1
	x_2	-1
	x_1	4

	Valor	Variable
Salida	1	h_1

¿Cómo funciona el método simplex?

Lo que hace el método simplex es iterar de tal manera que en cada iteración se obtenga un vértice (punto extremo) del politopo convexo (convex hull). Veamos el ejemplo (mesas y sillas):

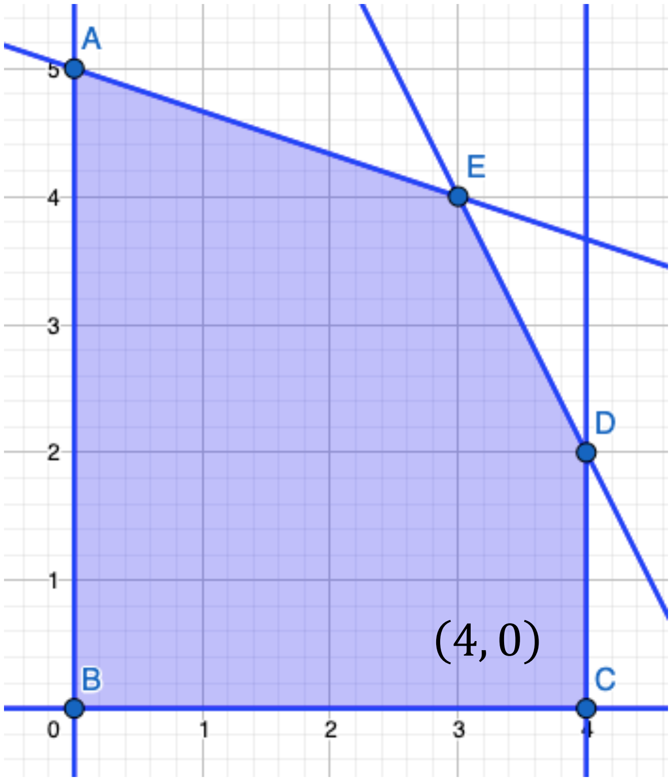


Iteración 0:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	1	3	1	0	0	15
h_2	2	1	0	1	0	10
h_3	1	0	0	0	1	4
$-z$	3	2	0	0	0	0

¿Cómo funciona el método simplex?

Lo que hace el método simplex es iterar de tal manera que en cada iteración se obtenga un vértice (punto extremo) del politopo convexo (convex hull). Veamos el ejemplo (mesas y sillas):

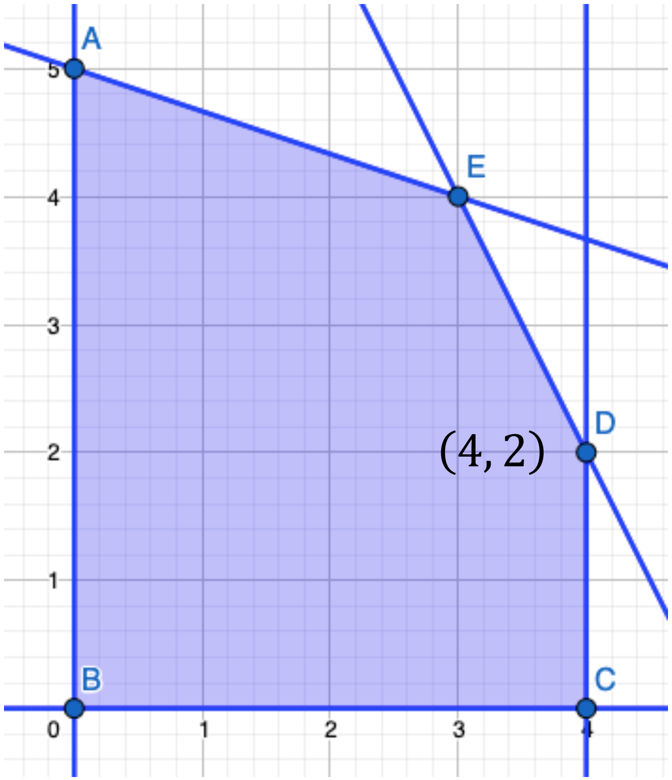


Iteración 1:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	**LD**
h_1	0	3	1	0	-1	11
h_2	0	1	0	1	-2	2
x_1	1	0	0	0	1	4
$-z$	0	2	0	0	-3	-12

¿Cómo funciona el método simplex?

Lo que hace el método simplex es iterar de tal manera que en cada iteración se obtenga un vértice (punto extremo) del politopo convexo (convex hull). Veamos el ejemplo (mesas y sillas):

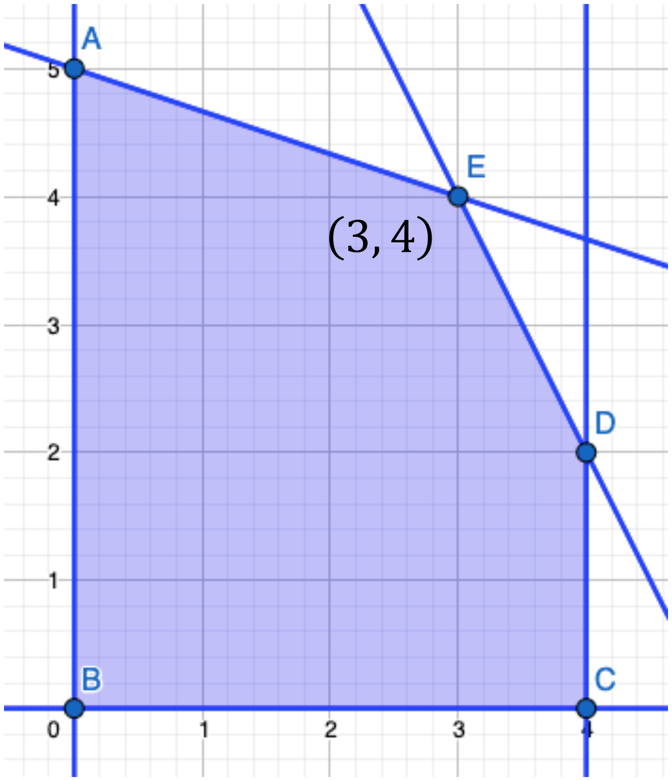


Iteración 2:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	0	0	1	-3	5	5
x_2	0	1	0	1	-2	2
x_1	1	0	0	0	1	4
$-z$	0	0	0	-2	1	-16

¿Cómo funciona el método simplex?

Lo que hace el método simplex es iterar de tal manera que en cada iteración se obtenga un vértice (punto extremo) del politopo convexo (convex hull). Veamos el ejemplo (mesas y sillas):



Iteración 3:

VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_1	0	0	0.2	-0.6	1	1
x_2	0	1	0.4	-0.2	0	4
x_1	1	0	-0.2	0.6	0	3
$-z$	0	0	-0.2	-1.4	0	-17

Definiciones y supuestos

1. Problema de programación lineal (PPL):
    - Función objetivo lineal.
    - Restricciones lineales en las variables.
2. Politopo convexo (convex hull), recordar el teorema de Bolzano-Weiertrass.
3. Puntos extremos (extreme points): intersección de restricciones.
4. Tipos de soluciones:
    - Infactible: El politopo convexo es un conjunto vacío.
    - No acotada: El politopo es no-convexo, es decir, es no cerrado.
    - Infinitas: Existen distintas combinaciones lineales que definen un mismo valor de la función objetivo dadas las restricciones impuestas.
    - Degenerada: Esto implica que existe una restricción, al menos, que es redundante, es decir hay otra(s) que restringe(n) más el politopo convexo, pero que aún así se intersectan y forman un punto extremo. Esto se aprecia cuando, al hacer ejecutar el criterio del mínimo para decidir qué variable sale de la base, existe un empate entre valores (para el cual la elección es arbitraria).

Restricciones activas e inactivas

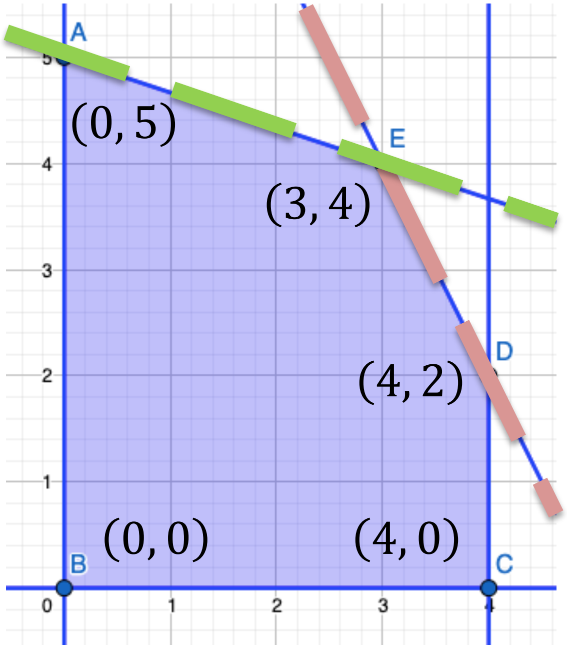
Hasta ahora, se ha visto que para utilizar el método simplex se requieren ciertas variables artificiales que son de ayuda para conformar un sistema de ecuaciones. Estas variables artificiales, de holgura o de exceso, son variables no-negativas que dependiendo si son cero o no tienen una distinta interpretación. Esto es:

1. Cuando la variable de holgura o de exceso tenga un valor de cero se dice que la restricción en la que está presenta es activa.
2. Cuando esta variable tiene un valor positivo, se dice que la restricción respectiva es inactiva.

Restricciones activas e inactivas

$$\max z \coloneqq 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + h_2 = 10$$
$$x_1 + h_3 = 4$$
$$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

En el problema de las mesas y las sillas, tenemos que $h_1 = h_2 = 0$ y que $h_3 = 1$. Esto quiere decir que $x_1 + 3x_2 = 15$ y que $\boxed{2x_1 + x_2 = 10}$, además; sabemos que el vector solución es $(x_1, x_2) = (3{,}4)$.



VB	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
h_3	0	0	1/5	-3/5	1	1
x_2	0	1	2/5	-1/5	0	4
x_1	1	0	-1/5	3/5	0	3
$-z$	0	0	-1/5	-7/5	0	-17

Por lo tanto, podemos ver que una restricción es activa si el vector solución pertenece a tal restricción (*está sobre ella*).