UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Optimización I

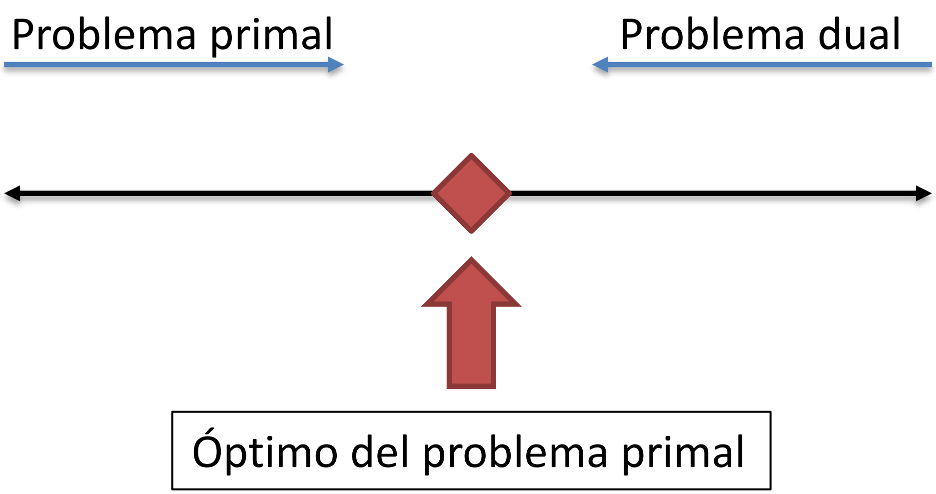
Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Introducción

La programación lineal (LP) es el problema de maximizar/minimizar una función lineal sujeto a un número finito de restricciones lineales. Dada una matriz $A \in R^{m \times n}$ y los vectores $c \in R^n$, $b \in R^m$, el *dual* del problema de programación lineal dado por $\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ (llamado *primal*) es el problema dado por $\min\{u^T b: u^T A \geq c, u \geq 0\}$.

Antes de continuar con la formalización de los anterior y su obtención, hemos de ilustrar qué representa tanto el problema primal como el dual:



Existen dos posibles escenarios:

1. ***Dualidad fuerte***: Que el valor óptimo del problema primal coincida con la del problema dual ($c^T x^* = {u^*}^T b$).
2. ***Dualidad débil***: Que el valor óptimo del problema dual sea mayor al del problema primal ($c^T x^* < {u^*}^T b$)

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ s.a. \quad & g_i(x) \leq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \qquad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

donde todas las funciones son diferenciables.

Se dice que el punto $x^* \in R^n$, junto con los vectores de multiplicadores $u^* \in R^m$ y $v^* \in R^p$, verifican las condiciones KKT para el problema de programación lineal si

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

Regularidad

$$\begin{aligned} g_i(x^*) \leq 0, &\qquad \forall i = 1, \dots, m \\ h_j(x^*) = 0, &\qquad \forall i = 1, \dots, p \\ u_i^* \geq 0, &\qquad \forall i = 1, \dots, m \\ u_i^* g_i(x^*) = 0, &\qquad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Holgura complementaria

La función dual – Relajación lagrangiana

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ s.a. \quad & g_i(x) \leq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \qquad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

donde todas las funciones son diferenciables. La función lagrangiana está dada por:

$$L(x, u, v,) = \min f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j(x)$$

Notar que la función lagrangiana, al ser una relajación del problema original, representa una cota inferior del problema de programación lineal original (o cota superior si el problema fuera de maximización).

Teorema: Sea z^* el valor óptimo cuya función dual es $t(u, v)$. Entonces, para todo $u \in R_+^m$ y $v \in R^p$, se tiene que $t(u, v) \leq z^*$.

Entonces, la pregunta ahora es cuál es la mejor de estas cotas. Resulta fácil darse cuenta que la idea es elegir aquella cota más cercana al óptimo del problema original, por lo que debemos maximizar esta función dual. Esto es $t(u, v) = \max_{\substack{u \in R_+^m \\ v \in R^p}} L(x, u, v)$.

Dualidad

En este sentido, para la obtención del problema dual existen una serie de teoremas que se han de revisar en orden de establecer esta relación y, además, garantizar que existe un solución para ambos problemas.

Teorema (Lema de Farkas):

- Un sistema de desigualdades lineales $Ax \leq b$ es infactible si y sólo si el sistema $u^T A = 0, u^T b < 0, u \geq 0$ es factible.
- El sistema de ecuaciones $Ax = b$, $x \geq 0$ es infactible si y sólo si $u^T b \leq 0$ para cada u tal que $u^T A \leq 0$.

Teorema (Dualidad de la programación lineal): Dada una matriz $A \in R^{m \times n}$ y los vectores $c \in R^n$, $b \in R^m$, sea $P \coloneqq \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $D \coloneqq \{u: u^T A \geq c, u \geq 0\}$. Si tanto P como D son conjuntos no vacíos, entonces

$$\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\} \leq \min\{u^T b: u^T A \geq c, u \geq 0\}$$

además, existe $x^* \in P$ e $y^* \in D$ tal que $c^T x^* \leq {u^*}^T b$.

Dualidad

Teorema (Holgura complementaria): Dada una matriz $A \in R^{m\times n}$ y los vectores $c \in R^n$, $b \in R^m$, sea $P \coloneqq \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $D \coloneqq \{u: u^T A \leq c, u \geq 0\}$. Dados $x^* \in P$ y u^* soluciones optimales para el problema primal $\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y dual $\min\{u^T b: u^T A \geq c, u \geq 0\}$, respectivamente; si y sólo si se satisface que

$$u_i^*\left(a^i x^* - b_i\right) = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

Proposición: Sea $P \coloneqq \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $D \coloneqq \{u: u^T A \geq c, u \geq 0\}$, suponer que $P \neq \emptyset$. Entonces, $\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ (problema primal) es no acotado si y sólo si $D = \emptyset$. Equivalentemente, $\max\{c^T x: x \in \mathrm{P}\}$ es infactible y sólo si existe un vector $\bar{y}$ tal que $A\bar{y} \leq 0$ y $\mathrm{c}^T \bar{y} > 0$.

Condición de Slater: Supongamos que el conjunto de restricciones es convexo, es decir, h_j son funciones lineales afines y g_i son funciones convexas. Si se satisface que $\exists x^* \in R^n: g_i(x^*) < 0, \forall i = 1, \dots, m, h_j(x^*) = 0, \forall j = 1, \dots, p;$ entonces, todo punto factible es regular.

Ejemplo

Obtenga el problema dual del siguiente ejercicio a través de la relajación lagrangiana.

$$
\begin{aligned}
\max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La relajación lagrangiana, L, está dada por

$$
\begin{aligned}
L &= \max_{x\geq 0, u\geq 0} 3x_1 + 2x_2 + u_1(15 - x_1 - 3x_2) + u_2(10 - 2x_1 - x_2) + u_3(4 - x_1) \\
&= \max_{x\geq 0, u\geq 0} x_1(3 - u_1 - 2u_2 - u_3) + x_2(2 - 3u_1 - u_2) + (15u_1 + 10u_2 + 4u_3)
\end{aligned}
$$

luego, la función dual se define como $t(\cdot) = \min_{x\geq 0} L$, es decir, se tiene el problema

$$
\min_{u\geq 0} \left(15u_1 + 10u_2 + 4u_3 + \max_{x\geq 0} \left(x_1(3 - u_1 - 2u_2 - u_3) + x_2(2 - 3u_1 - u_2)\right)\right)
$$

De esto, podemos ver que el mínimo de la función depende de la parte de maximización, y como $x \geq 0$ se tiene que $3 - u_1 - 2u_2 - u_3 \leq 0$ y$2 - 3u_1 - u_2 \leq 0$.

Ejemplo

$$\min_{u\geq 0}\left(15u_1+10u_2+4u_3+\max_{x\geq 0}\left(x_1(3-u_1-2u_2-u_3)+x_2(2-3u_1-u_2)\right)\right)$$

De esto, podemos ver que el mínimo de la función depende de la parte de maximización, y como $x \geq 0$ se tiene que $3-u_1-2u_2-u_3 \leq 0$ y $2-3u_1-u_2 \leq 0$.

Por lo tanto, el problema puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\begin{array}{ll} & \min 15u_1+10u_2+4u_3 \\ s.a. & u_1+2u_2+u_3 \geq 3 \\ & 3u_1+u_2 \geq 2 \\ & u_1,u_2,u_3 \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} &\min 15u_1 + 10u_2 + 4u_3 \\ &s.a. \quad u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 3 \\ &\qquad\quad 3u_1 + u_2 \geq 2 \\ &\qquad\quad u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este problema está dada por $u^* = (0.2, 1.4, 0)$ y un óptimo de 17.

Primal

$$\begin{aligned} &\max z \coloneqq 3x_1 + 2x_2 \\ &s.a. \quad x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ &\qquad\quad 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ &\qquad\quad x_1 \leq 4 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema (Holgura complementaria): Dada una matriz $A \in R^{m\times n}$ y los vectores $c \in R^n$, $b \in R^m$, sea $P \coloneqq \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $D \coloneqq \{u: u^T A \leq c, u \geq 0\}$. Dados $x^* \in P$ y u^* soluciones optimales para el problema primal $\max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ y dual $\min\{u^T b: u^T A \geq c, u \geq 0\}$, respectivamente; si y sólo si se satisface que

$$u_i^*\left(a^i x^* - b_i\right) = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

Entonces, se tiene que

$$0.2(x_1 + 3x_2 - 15) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 - 15 = 0$$
$$1.4(2x_1 + x_2 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - 10 = 0$$

$x^* = (3, 4) \quad z^* = 17$ Existe dualidad fuerte!

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Relación problema primal - dual

De acuerdo a lo visto anteriormente, se tiene la siguiente relación:

Problema primal:

$$\begin{aligned} \max z &:= c^T x \\ s.a. \quad Ax &\le b \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Problema dual:

$$\begin{aligned} \min w &:= u^T b \\ s.a. \quad A^T u &\ge c \\ u &\ge 0 \end{aligned}$$

En esta relación, es importante notar que si la matriz $A \in R^{m\times n}$, esto implica que el problema primal tiene n variables y m restricciones, lo que implica que el problema dual tiene n restricciones y m variables.

	Primal	**Dual**
Función objetivo	**Maximización**	**Minimización**
Restricciones	$\le$	$\ge$
	$\ge$	$\le$
	$=$	$\neq$
Variables	$\ge$	$\ge$
	$\le$	$\le$
	$\neq$	$=$

Ejercicio

Obtenga el problema dual de los siguientes problemas de programación lineal:

a)

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ s.a. \quad & 5x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \begin{aligned} \min w &:= 2u_1 + u_2 - u_3 \\ s.a. \quad & 5u_1 + u_2 - u_3 \geq 3 \\ & -u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ & u_1 - 4u_2 + 3u_3 \leq -5 \\ & u_1 \leq 0, u_2 \neq 0, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \min z &:= 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 \\ s.a. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 \neq 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 \geq 9 \\ & x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \begin{aligned} \max w &:= 3u_1 + 9u_2 \\ s.a. \quad & u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 5 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 1 \\ & -u_1 + u_3 \leq 2 \\ & u_2 + 5u_3 \leq -6 \\ & u_1 \neq 0, u_2 \geq 0, u_3 = 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \max z &:= x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - 5x_2 \geq 10 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, \geq 0 \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \begin{aligned} \min w &:= u_1 + 10u_2 + 4u_3 \\ s.a. \quad & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 1 \\ & -u_1 - 5u_2 + 3u_3 \geq 1 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$