Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

Semestre II Año 2015

Profesor: Óscar C. Vásquez
Fecha: 30 de noviembre de 2015

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos):

Mayorista → **Minorista** → Demanda

Una empresa minorista dedicada a la venta de un solo producto desea planificar sus órdenes de compra al mayorista para los siguientes "n" períodos sabiendo que la demanda de dichos periodos "d(t)" es conocida. Un dato importante es que el precio al que vende dicho producto el mayorista depende de la cantidad solicitada, si la compra es menor a "k" unidades el precio es "P_1" en cambio sí compra "k" o más unidades el precio es "P_2" donde "$P_2<P_1$". Por otra parte, existe un costo por mantener unidades en inventario "Cinv" por unidad, no se permiten quiebres de stock y el tiempo de entrega de los productos es instantáneo.

Plantee el **problema de programación lineal** que minimice el costo total y cumpla con todas las condiciones. Recuerde seguir la siguiente estructura: parámetros (10 puntos), variables (30 puntos), función objetivo (20 puntos) y restricciones (40 puntos).

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1.

Parámetros (10 puntos)
P_1 = Costo de comprar menos de k productos al mayorista.
P_2 = Costo de comprar k o más productos al mayorista.
D(t) = Demanda en el periodo t; t = 1,..,n
Cinv = Costo unitario de mantener unidades en inventario.

Variables de decisión (30 ptos):

$X_1(t)$ = Unidades del producto solicitado al precio P_1 en el periodo t = 1,..,n
$X_2(t)$ = Unidades del producto solicitado al precio P_2 en el periodo t = 1,..,n
$Y_1(t)$ = 1 si se compran productos al precio P_1 en el periodo t = 1,..,n, 0 en otro caso
$Y_2(t)$ = 1 si se compran productos al precio P_2 en el periodo t = 1,..,n, 0 en otro caso.
S(t) = Unidades en inventario al final del periodo t.

Función Objetivo (20 ptos):

$$\min z = \sum_t P_1 * X_1(t) + P_2 * X_2(t) + Cinv * S(t)$$

Restricciones (40 puntos)

$S(t) = S(t-1) + X_1(t) + X_2(t) - D(t)$
$S(t-1) + X_1(t) + X_2(t) \geq D(t)$
$Y_1(t) + Y_2(t) \leq 1$
$X_1(t) \leq K * Y_1(t)$
$X_2(t) \leq M * Y_2(t)$
$X_2(t) \geq K * Y_2(t)$
$X_1(t),\ X_2(t), S(t) \geq 0$
$Y_1(t),\ Y_2(t) \in \{0,1\}$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Considere el siguiente problema:

Max $Z= w1\ x1 + w2\ x2 + w3\ x3 + w4\ x4 + w5\ x5 + \ldots + wn\ xn$

s.a.

$p1\ x1 + p2\ x2 + p3\ x3 + p4\ x4 + p5\ x5 + \ldots pn\ xn \leq b1$

$xi \geq 0$ para todo $i=1,\ldots,n$

$w1/p1 > w2/p2 > \ldots > wn/pn$

a.- Resuelva el problema (40 puntos).

Considere el siguiente problema.

Max $Z = 6\ x1 + 4\ x2$

$x1, x2, h1, h2, h3, s1, a1 \geq 0$

Y el siguiente tablero:

VB	**x1**	**x2**	**h1**	**h2**	**h3**	**s1**	**a1**	
h1	1	0	1	0	0	0	0	4
h2	1	3	0	1	0	0	0	15
h3	2	1	0	0	1	0	0	10
a1	3	4	0	0	0	-1	1	α

b.- Formule el problema y determine el intervalo de $\alpha \geq 0$ para el cual donde el problema se vuelve factible y determine su solución óptima. (40 puntos)

c .-Seleccione un α fuera del intervalo y muestre que el problema es infactible (20 puntos)

Solución Problema 2.

a. Consideramos el problema dual

D) Min D= b1 y1

s.a.

pi Y1 ≥ wi para todo i, i =1,...,n

y1≥0.

Este problema tiene solo una restricción saturada, definida por y1= max_i {wi/pi}, el cual es igual a w1/p1 por definición.

Asi tenemos que la solución óptima del cual es D*=b1 w1/p1 y por teo de dualidad fuerte sabemos que D*=Z*.

Al aplicar el teorema de holgura complementaria sabemos que (piy1*-wi)xi*=0, y entonces sabemos que xi* =0 para todo i=2,…,n, y para x1* tenemos que Z*= x1*w1= b1 w1 /p1 y entonces, x1*= b1/p1.

b.- El problema se define como

P) Max Z= 6 x1 + 4 x2

s.a

R1) x1+h1=4

R2) x1+3x2+h2=15

R3) 2x1+x2+h3=10

R4) 3x1+2x2-s1+a1= α

x1, x2, h1, h2, h3, s1, a1, α ≥0

Resolviendo el problema sin R4) tenemos que la solución óptima es x1*=3, x2*=4 z*= 34. Donde la restricciones R2) y R3) son saturadas. Para que el problema continúe siendo factible el valor de α no puede ser mayor a 34, dado que la restricción tiene la misma pendiente que la función objetivo. Así el intervalo para es α [0,34].

c.- Acá la respuesta es cualquier ejemplo que considere un valor α > 34 y que: 1) la aplicar el método de Gran M, el valor de la variable auxiliar en la solución óptima sea diferente a cero o, 2) que para el método de 2 fases, la primera fase de un valor en la función objetivo mayor a cero.

Problema 3.- (100 puntos)

Considere el siguiente problema

P) min w =100 y1 + 60 y2 + 50 y3
s.a
y1+ y2 + y3≥1
4y1+2y2 + y3≥3
y1, y2, y3 ≥ 0

a. Obtenga el dual del problema P) y obtenga el tablero óptimo del dual asumiendo que en el óptimo la base está formada por las variables x1, x2 y x5, en donde se han asignado las variables x3, x4 y x5 como holgura de las restricciones según el orden definido al transponer la matriz A del primal. (25 puntos)
b. Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones caso por caso. (25 puntos)
c. Realice un análisis de sensibilidad para el vector de coeficientes de la función objetivo caso por caso (25 puntos)
d. Suponga que se evalúa la posibilidad de fabricar un nuevo producto X_{nuevo} de modo que el problema queda descrito como
máx z = x1 + 3x2 + X_{nuevo}
s.a
x1 + 4x2 + 5X_{nuevo}≤ 100
x1 + 2x2 + 3X_{nuevo} ≤ 60
x1 + x2 + 2X_{nuevo} ≤ 50
x1, x2, X_{nuevo} ≥ 0

¿Sigue siendo óptima la base de la solución anteriormente planteada? (25 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 3:

a.- El problema dual es definido como

D) máx z = x1 + 3x2

s.a

x1 + 4x2 ≤ 100

x1 + 2x2 ≤ 60

x1 + x2 ≤ 50

x1, x2≥ 0

Estandarizado queda :

máx z = x1 + 3x2

s.a

x1 + 4x2 + x3 = 100

x1 + 2x2 +x4 = 60

x1 + x2 + x5 =50

x1, x2, x3, x4, x5 ≥ 0

y utilizando la información dada se tiene el tablero óptimo

	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	1	0	-1	2	0	20
X2	0	1	½	-1/2	0	20
X5	0	0	1/2	-3/2	1	10
-Z	0	0	-1/2	-1/2	0	-80

Donde

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{*-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y

$$c_B^* = -(1{,}3\ ,0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$$

b.- Ante variaciones de b, solo tenemos que verificar factibilidad:

$$B^{*-1} * b = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq\ 0$$

Al analizar la variación de la disponibilidad de un recurso dejando los otros constantes.

Para b_1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{b}_1 + 120 \\ \frac{\mathrm{b}_1}{2} - 30 \\ \frac{\mathrm{b}_1}{2} - 40 \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces, la inecuación vectorial no entrega 3 inecuaciones escalares que finalmente imponen que:

$$80 \leq b_1 \leq 120$$

Para b_2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ \mathrm{b}_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 + 2b_2 \\ 50 - \dfrac{\mathrm{b}_2}{2} \\ 50 - \dfrac{3\mathrm{b}_2}{2} + 500 \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces, la inecuación vectorial nos entrega 3 inecuaciones escalares que finalmente imponen que:

Para b_3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ \mathrm{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 + 120 \\ 50 - 30 \\ 50 - 90 + b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces, la inecuación vectorial nos entrega sólo una inecuación con dependencia de b_3, la que nos dice que:

$$b_3 \leq 40$$

b- En este caso, solo nos preocuparemos de la condición de optimalidad:

Para c_1: x_1 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\begin{aligned} (\hat{c}_3, \hat{c}_4) &= (c_{3,}c_4) - (c_1\ , c_2\ , c_5)B^{-1} * R \\ &= (0{,}0) - (-c_1\ , -3\ , 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0{,}0) - (-c_1\ , -3\ , 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= -(c_1 - \frac{3}{2}, -2c_1 + \frac{3}{2}) \geq (0{,}0) \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{3}{4} \leq c_1 \ \leq \frac{3}{2}$$

Para c_2: x_2 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\begin{aligned} (\hat{c}_3, \hat{c}_4) &= (c_{3,}c_4) - (c_1\ , c_2\ , c_5)B^{-1} * R \\ &= (0{,}0) - (-1, -c_2\ \ , 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0{,}0) - (-1\ , -c_2\ \ , 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= -(1 - \frac{c_2}{2}, -2 + \frac{c_2}{2}) \geq (0{,}0) \end{aligned}$$

Entonces

$$2 \leq c_2 \ \leq 4$$

Obs: Análisis para c_3, c_4, c_5no tienen sentido para este problema pues las variables asociadas son las de holgura.

d-

$$\begin{aligned} (\hat{c}_{nuevo}, \hat{c}_3, \hat{c}_4) &= (-1{,}0{,}0)(-1, -3{,}0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \geq (0{,}0) \end{aligned}$$

Por lo tanto la base sigue siendo óptima