Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PAA Semestre I Año 2016

Profesores: Iván Derpich, Óscar C. Vásquez

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3:	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos): Resuelva uno de los dos siguientes problemas

a) Considere el siguiente problema de programación lineal no entera Max Z= 4x2^2-x1^3+10x2^2-x2^4

Sujeto a x1+x2 ≤3, x1,x2 enteros positivos.

Formule un modelo de programación entera mixta donde 6 variables binarias y1j e y2j (con j=1,2,3) tiene la siguiente interpretación

yij=1 si xi=j, 0 de otra manera.

b) Considere el siguiente modelo matemático

Max f1 (x1,x2) + f2(x1,x2)

Sujeto a

i.- Que al menos una de estas desigualdades se cumple.

2 x1 +x2 ≤6; 7 x1 +15 x2 ≤80; x1 +3x2 ≤77

ii.- O bien x1≤10 o x2≤ 20

iii.- |x1-x2|=0 o 10 o 20

iv. X1,X2≥0

en donde

f1(x1,x2) = 15 +x2 +x1 si x1≥0, 0 en otro caso ; f2(x1,x2) = 5 +3x2 +2x1 si x2≥0, 0 en otro caso

Formule el problema de programación lineal entera mixta.

-

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1

a) Max Z= $\sum_j$ (10 j^2 j^3)Y1j+(4 j^2-j^4) Y2j

Y11+Y12+Y13≤1

Y21+Y22+Y23≤1

Y11+Y12+Y22≤2

Y11+Y21+Y22≤2

Y13+Y31≤1

Yij binario para todo i.j (i=1,2; j=1,2,3)

b) Max a + b

2 x1 +x2 ≤6+ Y1M

7 x1 +15 x2 ≤80 + Y2M

x1 +3x2 ≤77 +Y3M

Y1+Y2+Y3≤2

X1≤10 + W M

X2≤20 + (1-W)M

x1=x2+10 R

-2 ≤R ≤2

a≤f1(x1,x2) = 15 +x2 +x1

a≤x1M

b≤f2(x1,x2) = 5 +3x2 +2x1

b≤X2M

W, Y1, Y2, Y3 binario

R entero

M valor muy grande

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Una empresa puede producir 4 productos denotados por P1 P2 P3 y P4. Cada producto debe ser procesado en casa uno de las maquinas. El tiempo de proceso (en horas por unidad producida) son dado en la siguiente tabla.

	P1	P2	P3	P4
Máquina 1	3	4	8	6
Máquina 2	6	2	5	8

400 horas estas disponibles en cada máquina. Los ingresos marginales son 4, 6, 10 y 9 euro por unidad de P1, P2, P3 y P4 producido, respectivamente; bajo es supuesto que todo lo producido es vendido.

El resultado del modelamiento del problema anterior es el siguiente.

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
	0.75	1	2	1.5	0.25		
	4.5	0	1	5	-0.5		200
-Z	-0.5						-600

a) Complete la tabla óptima sin utilizar simplex. Indicando la cantidad de P1 P2 P3 P4 que debe ser producida para maximizar el beneficio. La solución es única ¿por qué?(40 p)
b) Asuma que 20 unidades de P3 han sido producidas por error. ¿En cuánto decrece el beneficio? (10p)
c) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P1 sin cambiar la base óptima? (10p)
d) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P2 sin cambiar la base óptima? (10 p)
e) ¿Cuál es el valor marginal de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1? (10 p)
f) ¿Cuál es el rango que puede variar el capacidad de la máquina 1 sin cambiar la base optima? (10 p)
g) La gerencia está considerando la producción de un nuevo producto P5, el cual requiere 2 horas de la máquina 1 y 10 horas de la máquina 2. ¿Cuál es el mínimo ingreso necesario para que este nuevo producto salga al mercado?

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Pregunta 2.

a) Formulando el problema tenemos

Primal

Max 4 P1 + 6 P2 + 10 P3 + 9 P4
St.
3 P1 + 4 P2 +8 P3 + 6 P4 ≤400
6 P2 + 2 P2 + 5 P3 + 8 P4 ≤400
P1,P2,P3, P4≥ 0

Dual

Min 400 L1 + 400 L2
St.
3 L1 + 6 L2 ≥4
4 L1 + 2 L2 ≥6
8 L1 + 5 L2 ≥10
6 L1 + 8 L2 ≥ 9
L1,L2 ≥ 0

Estandarizando los problemas resolviendo a través de holgura complementaria completamos la tabla óptima y tenemos

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
P2	0.75	1	2	1.5	0.25	**0**	**100**
H2	4.5	0	1	5	-0.5	**1**	200
-Z	-0.5	**0**	**-2**	**0**	**-1.5**	**0**	-600

Así, tenemos que P2=100, variable básica y P1=P3=P4=0 no básica. El resultado es 600 el cual maximiza el ingreso, dada las restricciones.
Asimismo, se observa que una variable no básica tiene costo reducido cero, lo cual implica que la solución óptima no es única ya que puede ser variable básica P4.

b) El costo reducido de P3 es -2. Así, el efecto de producir 20 unidades de P3 por error es 20*-2=-40.
c) Sea 4+ Δ el ingreso marginal por P1. El costo reducido restante al final del tablero permanece negativo si $-0.5+\Delta \leq 0$, lo cual implica $\Delta \leq 0.5$. Por lo tanto, mientras es ingreso marginal por P1 sea menor que 4.5, las variables basicas del problema óptimo permanece igual.
d) Sea 6+Δ el ingreso marginal por P2. Dado que P2 es básica, debemos ver el impacto que tendría este incremento sobre todas las variables no básica, esto es:
   el vector cB es ahora Cb =(6+Δ , 0) con ΔCb =(Δ , 0)
   C= (-0.5 0 -2 0 -1.5 0); ΔC=(0 Δ 0 0 0 0 0);
   Actualizando los valores tenemos
   $C' = C + \Delta C - \Delta Cb * B^{-1} * A$
   C'=(-0.5, 0, -2, 0,-1.5, 0)-(0.75, 0, 2, 1.5, 0.25, 0) $\Delta \leq 0$, se mantiene la base**.** Por lo tanto**,** si el valor del ingreso por P2 es 6 o más la base no cambia.
e) El valor marginal de de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1es su precio sombra L1= 1.5.
f) Al incrementar b1=400 a 400 + Δ, tenemos que $b' = b + B^{-1} * \Delta b = (100+0.25\Delta, 200-0.5\Delta)^t \geq 0$ no cambia la base y por lo tanto $-400 \leq \Delta \leq 400$ y así el recurso puede ir desde 0 a 800 sin cambiar la base.

g) Para producir P5 se debe por lo menos contrarrestar el efecto que provocaría en el valor óptimo, es decir el uso de los recursos L1* (2 P5) + L2* (10 P5)= 1.5 (2 P5) + 0 (10 P5) =3 P5. Por lo tanto, si se sea producir P5 el ingreso que genera desde ser a lo menos 3.

Problema 3.- (100 puntos)

En UK se votó recientemente el BREXIT, ganando la opción de salir de la UE. Ante la incertidumbre de lo que pueda ocurrir, el primer ministro británico “Blinda” a recursos estatales A, B, C; negociando con dos grandes país Francia y Alemania la venta de acciones de estos recursos de forma de rescatar en algo su valor. Cada uno de estos países paga por cada acción un valor el cual genera pérdidas en miles de euros por cada acción vendida asociada a cada recurso, mientras que por otro lado cada país tiene una cantidad máxima de compra de acciones

Perdida por venta de una acción (miles de euros)	FRANCIA	ALEMANIA	**Acciones por recurso**
Recurso A	14	30	13
Recurso B	13	29	10
Recurso C	26	24	8
Capacidad de compra acciones	15	7	

El recurso C es un recurso que se deprecia rápidamente, por lo que de no ser vendido por cada 0,5 acciones se pierden 4,5 miles de euros. El resto de las acciones se espera se mantenga estable. Resuelva el problema de minimizar la pérdida del gobierno de UK.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 3:

Reescribiendo el problema tenemos

	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad
FRANCIA	14	13	26	15
ALEMANIA	30	29	24	7
Pais F	0	0	9	9
Demanda	13	10	8	

Método de Vogel

añadimos a la tabla una línea de penalización

Costos	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad	Penalización
FRANCIA	14	13	26	15	1
ALEMANIA	30	29	24	7	5
Pais F	0	0	9	9	0
Demanda	13	10	8		
Penalización	14	13	15		

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso Recurso C.
asignamos al con menor costo de Recurso C el máximo posible

asignación	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad	no asignado
FRANCIA				15	15
ALEMANIA				7	7
Pais F			8	9	1
Demanda	13	10	8		
no asignada	13	10	**0**		

Como la comuna de Recurso C asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando la Recurso C
recalculando las penalizaciones

Costos	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad	Penalización
FRANCIA	14	13	26	15	1
ALEMANIA	30	29	24	7	1
Pais F	0	0	9	9	0
Demanda	13	10	8		

Penalización	14	13	

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso Recurso A.
asignamos al con menor costo de Recurso A el máximo posible el máximo posible
***el máximo posible con los valores no asignados**

Asignación	**Recurso A**	**Recurso B**	**Recurso C**	**Capacidad**	**no asignado**
FRANCIA				15	15
ALEMANIA				7	7
Pais F	1		8	9	**0**
Demanda	13	10	8		
no asignada	12	10	**0**		

Como la Pais F asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando la Pais F
recalculando las penalizaciones

Costos	**Recurso A**	**Recurso B**	**Recurso C**	**Capacidad**	**Penalización**
FRANCIA	14	13	26	15	1
ALEMANIA	30	29	24	7	1
Pais F	0	0	9	9	
Demanda	13	10	8		
Penalización	16	16			

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso Recurso A o Recurso B
Decidiremos por Recurso B (arbitrario)
asignamos al con menor costo de Recurso B el máximo posible
***el máximo posible con los valores no asignados**

Asignación	**Recurso A**	**Recurso B**	**Recurso C**	**Capacidad**	**no asignado**
FRANCIA		10		15	5
ALEMANIA				7	7
Pais F	1		8	9	**0**
Disponible	13	10	8		
no asignada	12	**0**	**0**		

Como Recurso B asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando Recurso B

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

recalculando las penalizaciones

Costos	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad	Penalización
FRANCIA	14	13	26	15	
ALEMANIA	30	29	24	7	
Pais F	0	0	9	9	
Demanda	13	10	8		
Penalización					

Las penalizaciones no podrán ser calculadas pues solo queda 1 columna
asignamos los valores restantes

Asignación	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Capacidad	no asignado
FRANCIA	5	10	0	15	**0**
ALEMANIA	7	0	0	7	**0**
Pais F	1	0	8	9	**0**
Disponible	13	10	8		
no asignada	**0**	**0**	**0**		

Esta solución es factible pero no necesariamente optima

Calculamos los (v_i,u_j) considerando $v_1 = 0$

recuerde que$(v_i + u_j - C_{ij})X_{ij} = 0$

Para las variables no básicas calculamos $v_i + u_j - C_{ij}$

$v_i + u_j - C_{ij}$	Recurso A	Recurso B	Recurso C	v
FRANCIA			-3	0
ALEMANIA		0	15	16
Pais F		-1		-14
u	14	13	23	

Como existe un $v_i + u_j - C_{ij}$ positivo para una variable no básica
Asignamos el máximo a esta variable
Como aumentamos esta variable en 7 completamos el ciclo

asignación	Recurso A	Recurso B	Recurso C	Disponible
FRANCIA	5	10	0	15

ALEMANIA	**0**	0	**7**	7
Pais F	**8**	0	**1**	9
Disponible	13	10	8	

Calculamos los (v_i,u_j) considerando $v_1 = 0$

recuerde que($v_i + u_j - C_{ij}$)$X_{ij} = 0$

Para las variables no básicas calculamos $v_i + u_j - C_{ij}$

$v_i + u_j - C_{ij}$	**Recurso A**	**Recurso B**	**Recurso C**	**v**
FRANCIA			-3	0
ALEMANIA	-15	-15		1
Pais F		-1		-14
u	14	13	23	

Como todas las soluciones no básicas son negativas
la asignación es optima