UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González

luis.rojo.g@usach.cl

Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Método de las 2 fases

El método simplex requiere de una solución básica factible (SBF). Hasta ahora, hemos visto problemas que consideran restricciones de desigualdades $\leq$ en donde es fácil obtener una SBF (el vector nulo); sin embargo, en problemas donde existen restricciones de desigualdades $\geq$ y/o $=$, no es posible obtener una SBF.

En particular, hay dos métodos que permiten obtener una SBF:

- Gran M (Big M).
- 2 fases.

En este curso, nos concentraremos en el método de las 2 fases y su procedimiento asociado a través del simplex en su versión matricial.

Método de las 2 fases

Considere el problema de programación línea en su forma estándar:

$$\begin{aligned} \max z &:= C^T x \\ sa. \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, se construye:

$$\begin{aligned} \min w &:= \sum_i y_i \\ sa. \quad Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Este método considera una nueva función objetivo con una variable $y_i \geq 0$, la cual se despeja desde las restricciones. Además, considerar que, en el óptimo, $w^* = 0$, es decir, $y_i = 0, \forall i$ (Fase 1). Mientras que, una vez se haya obtenido esta solución, se elimina y_i (pues tienen valor nulo), y se trabaja con las variables originales manteniendo la base óptima de la Fase 1 (Fase 2).

Método de las 2 fases

Algunas consideraciones asociadas al método de las 2 fases:

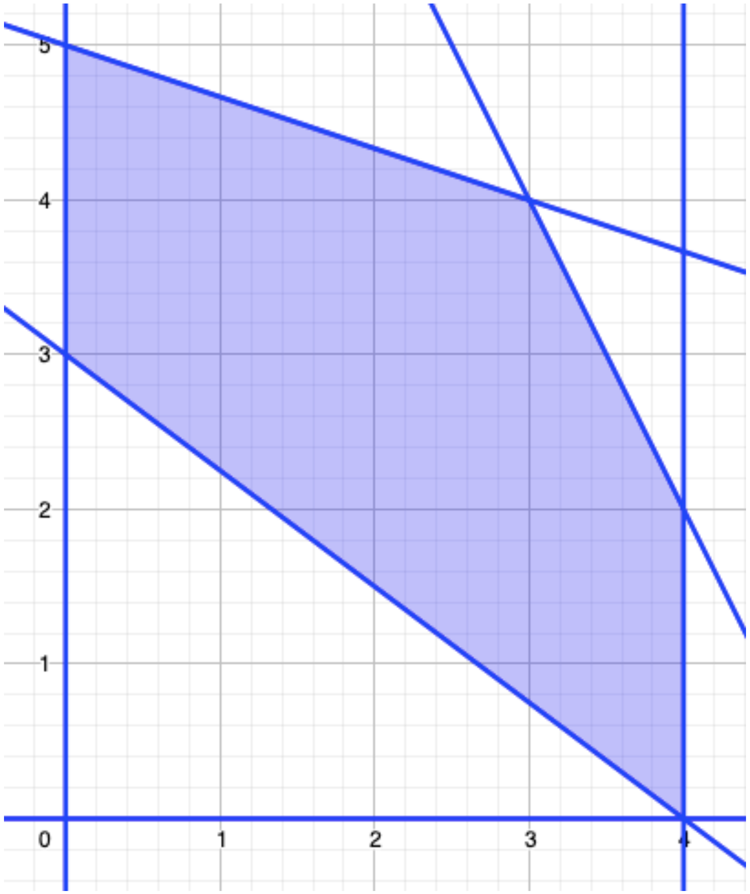
- Es conveniente guardar la fila de los costos reducidos (precios sombra) de la función objetivo original a modo de disminuir la cantidad de iteraciones en la Fase 2.
- En caso de que la solución óptima de la Fase 1 sea positiva, es decir, $w^* = 0$, el problema de programación lineal bajo estudio es infactible (no tiene solución).

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Método de las 2 fases

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Es fácil ver que el vector nulo no puede ser considerado como solución básica factible porque no pertenece al espacio delimitado por el conjunto de restricciones (politopo convexo).

Por lo tanto, se ha de recurrir a un método para encontrar una solución básica factible y, luego, utilizar el método simplex.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Método de las 2 fases

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - s_1 + y_1 &= 12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1, y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1: Se debe despejar la variable artificial generada, en particular esta se encuentra en la tercera restricción y corresponde a $y_1 = 12 - 3\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_1$. Entonces, la función a minimizar está dada por

Cuidado!!!

Ahora se trabaja con un problema de minimización.

$$\begin{aligned} \min \mathrm{w} &:= y_1 = 12 - 3\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_1 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\ x_1 + h_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - s_1 + y_1 &= 12 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1, y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Notar que la función objetivo corresponde a la suma de estas variables artificiales ($\sum_i y_i$).

Método de las 2 fases
Fase 1

$\max z := 3x_1 + 2x_2$

$\min \mathrm{w} := y_1 = 12 - 3\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_1$

$$
\begin{aligned}
sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15\\
2x_1 + x_2 + h_2 &= 10\\
x_1 + h_3 &= 4\\
3x_1 + 4x_2 - s_1 + y_1 &= 12\\
x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1, y_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Iteración 0:

x_B	h_1	h_2	h_3	y_1
x_R	x_1	x_2	s_1	

$\longrightarrow$

x_B	h_1	h_2	h_3	x_2
x_R	x_1	y_1	s_1	

R	1	3	0
	2	1	0
	1	0	0
	3	4	-1
c_R	-3	-4	1
c_R	3	2	0

B	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1
c_B	0	0	0	0
c_B	0	0	0	0

b
15
10
4
12

$c_B B^{-1} R$	0	0	0
$c_R - c_B B^{-1} R$	-3	-4	1
$c_B B^{-1} R$	0	0	0
$c_R - c_B B^{-1} R$	3	2	0

B^{-1}	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1

$B^{-1}R$	1	3	0
	2	1	0
	1	0	0
	3	4	-1

$B^{-1}b$	15
	10
	4
	12

w^*	12
z	0

	Valor	Variable
Entrada	-4	x_2

Criterio	h_1	5
	h_2	10
	h_3	-10000
	y_1	3

	Valor	Variable
Salida	3	y_1

Método de las 2 fases
Fase 1

$\max z \coloneqq 3x_1 + 2x_2$

$\min \mathrm{w} \coloneqq y_1 = 12 - 3\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_1$

$$
\begin{aligned}
sa.\quad & x_1 + 3x_2 + h_1 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + h_2 = 10 \\
& x_1 + h_3 = 4 \\
& 3x_1 + 4x_2 - s_1 + y_1 = 12 \\
& x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1, y_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Iteración 1:

x_B	h_1	h_2	h_3	x_2
x_R	x_1	y_1	s_1	

R			
	1	0	0
	2	0	0
	1	0	0
	3	1	-1
c_R	-3	0	1
c_R	3	0	0

B				
	1	0	0	3
	0	1	0	1
	0	0	1	0
	0	0	0	4
c_B	0	0	0	-4
c_B	0	0	0	2

b
15
10
4
12

$c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	-3	-1	1
$c_R - c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	0	1	0
$c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	1.5	0.5	-0.5
$c_R - c_{\mathrm{B}}B^{-1}R$	1.5	-0.5	0.5

w^*	0
$-z$	-6

Parar?	Si
Infactible?	No

B^{-1}			
1	0	0	-0.75
0	1	0	-0.25
0	0	1	0
0	0	0	0.25

$B^{-1}R$		
-1.25	-0.75	0.75
1.25	-0.25	0.25
1	0	0
0.75	0.25	-0.25

$B^{-1}b$
6
7
4
3

Método de las 2 fases
Fase 1

$\max z := 3x_1 + 2x_2$
$\min \mathrm{w} := y_1 = 12 - 3\mathrm{x}_1 - 4\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_1 = 0$
$sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 = 15$
$2x_1 + x_2 + h_2 = 10$
$x_1 + h_3 = 4$
$3x_1 + 4x_2 - s_1 + y_1 = 12$
$x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1, y_1 \geq 0$

Iteración 1:

x_B	h_1	h_2	h_3	x_2
x_R	x_1	y_1	s_1	

B^{-1}

1	0	0	-0.75
0	1	0	-0.25
0	0	1	0
0	0	0	0.25

$B^{-1}R$

-1.25	-0.75	0.75
1.25	-0.25	0.25
1	0	0
0.75	0.25	-0.25

$B^{-1}b$

6
7
4
3

$c_B B^{-1}R$	-3	-1	1
$c_R - c_B B^{-1}R$	0	1	0
$c_B B^{-1}R$	1.5	0.5	-0.5
$c_R - c_B B^{-1}R$	1.5	-0.5	0.5

Eliminar

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	y_1	b
h_1	-1.25	0	0.75	1	0	0	-0.75	6
h_2	1.25	0	0.25	0	1	0	-0.25	7
h_3	1	0	0	0	0	1	0	4
x_2	0.75	1	-0.25	0	0	0	0.25	3
w	0	0	0	0	0	0	1	0
$-z$	1.5	0	0.5	0	0	0	-0.5	-6

Eliminar

Método de las 2 fases
Fase 1 (Observaciones)

La última iteración de la Fase 1 entrega el siguiente problema de programación lineal en su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\max z &:= 1.5x_1 + 0.5s_1 \\
sa. \quad -1.25x_1 + 0.75s_1 + h_1 &= 6 \\
1.25x_1 + 0.25s_1 + h_2 &= 7 \\
x_1 + h_3 &= 4 \\
0.75x_1 - 0.25s_1 &= 3 \\
x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, s_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Como se tiene un sistema de ecuaciones, se puede reescribir utilizando $s_1 = 3x_1 + 4x_2 - 12$ y reemplazando en las otras restricciones tal que el modelo a trabajar queda como sigue:

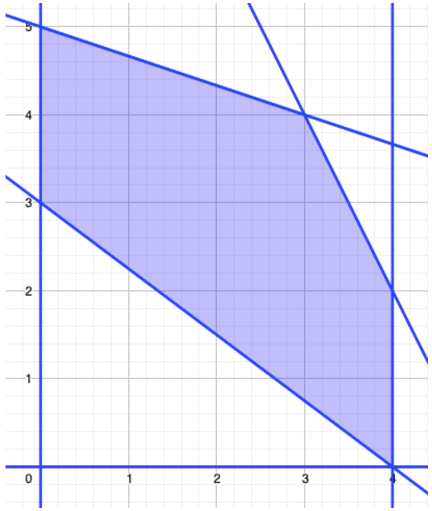
$$
\begin{aligned}
\max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\
sa. \quad x_1 + 3x_2 + h_1 &= 15 \\
2x_1 + x_2 + h_2 &= 10 \\
x_1 + h_3 &= 4 \\
x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Entonces, es fácil ver que **este problema de programación lineal corresponde a la forma estándar del modelo original con una distinta función objetivo y sin la restricción de $\geq$.**

Método de las 2 fases
Fase 1 (Observaciones)

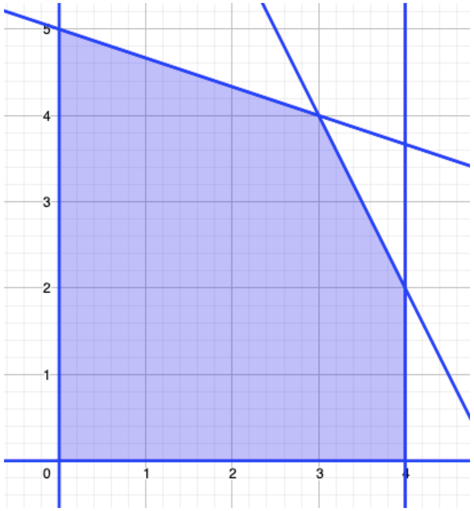
El problema de programación lineal original es:

$$\begin{aligned} \max z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



El problema de programación lineal de la Fase 1 es:

$$\begin{aligned} max\, z &:= 3x_1 + 2x_2 \\ sa. \quad x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$



Método de las 2 fases
Fase 2

Iteración 1:

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	-1.25	0	0.75	1	0	0	6
h_2	1.25	0	0.25	0	1	0	7
h_3	1	0	0	0	0	1	4
x_2	0.75	1	-0.25	0	0	0	3
$-z$	1.5	0	0.5	0	0	0	-6

x_B	h_1	h_2	h_3	x_2
x_R	x_1	s_1		

$\downarrow$

x_B	h_1	h_2	x_1	x_2
x_R	h_3	s_1		

Iteración 2:

VB	x_1		x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	0	0	0.75	1	0	1.25	0	11
h_2	0	0	0.25	0	1	-1.25	0	2
x_1	1	0	0	0	0	1	0	4
x_2	0	1	-0.25	0	0	-0.75	1	0
$-z$	0	0	0.5	0	0	-1.5	0	-12

R

	-1.25	0.75
	1.25	0.25
	1	0
	0.75	-0.25
c_R	1.5	0.5

B

	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1
c_B	0	0	0	0

b

6
7
4
3

B^{-1}

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$B^{-1}R$

-1.25	0.75
1.25	0.25
1	0
0.75	-0.25

$B^{-1}b$

6
7
4
3

$c_B B^{-1} R$	0	0
$c_R - c_B B^{-1} R$	1.5	0.5

	Valor	Variable
Entrada	1.5	x_1

Criterio	h_1	-4.8
	h_2	5.6
	h_3	4
	x_2	4

	Valor	Variable
Salida	4	h_3

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Método de las 2 fases
Fase 2

Iteración 1:

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	-1.25	0	0.75	1	0	0	6
h_2	1.25	0	0.25	0	1	0	7
h_3	1	0	0	0	0	1	4
x_2	0.75	1	-0.25	0	0	0	3
$-z$	1.5	0	0.5	0	0	0	-6

x_B	h_1	h_2	x_1	x_2
x_R	h_3	s_1		

x_B	h_1	s_1	x_1	x_2
x_R	h_3	h_2		

Iteración 3:

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	0	0	0	1	-3	5	5
s_1	0	0	1	0	4	-5	8
x_1	1	0	0	0	0	1	4
x_2	0	1	0	0	1	-2	2
$-z$	0	0	0	0	-2	1	-16

R

	0	0.75
	0	0.25
	1	0
	0	-0.25
c_R	0	0.5

B

	1	0	-1.25	0
	0	1	1.25	0
	0	0	1	0
	0	0	0.75	1
c_B	0	0	1.5	0

b

6
7
4
3

B^{-1}

1	0	1.25	0
0	1	-1.25	0
0	0	1	0
0	0	-0.75	1

$B^{-1}R$

1.25	0.75
-1.25	0.25
1	0
-0.75	-0.25

$B^{-1}b$

11
2
4
0

$c_B B^{-1} R$	1.5	0
$c_R - c_B B^{-1} R$	-1.5	0.5

	Valor	Variable
Entrada	0.5	s_1

Criterio	h_1	14.67
	h_2	8
	x_1	inf
	x_2	0

	Valor	Variable
Salida	8	h_2

Método de las 2 fases
Fase 2

Iteración 1:

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	-1.25	0	0.75	1	0	0	6
h_2	1.25	0	0.25	0	1	0	7
h_3	1	0	0	0	0	1	4
x_2	0.75	1	-0.25	0	0	0	3
$-z$	1.5	0	0.5	0	0	0	-6

x_B	h_1	s_1	x_1	x_2
x_R	h_3	h_2		

$\downarrow$

x_B	h_3	s_1	x_1	x_2
x_R	h_1	h_2		

Iteración 4:

VB	x_1	x_2	s_1	h_1	h_2	h_3	b
h_1	0	0	0	0.2	-0.6	1	1
s_1	0	0	1	1	1	0	13
x_1	1	0	0	-0.2	0.6	0	3
x_2	0	1	0	0.4	-0.2	0	4
$-z$	0	0	0	-0.2	-1.4	0	-17

R		
	0	0
	0	1
	1	0
	0	0
c_R	0	0

B				
	1	0.75	-1.25	0
	0	0.25	1.25	0
	0	0	1	0
	0	-0.25	0.75	1
c_B	0	0.5	1.5	0

b
6
7
4
3

B^{-1}				
	1	-3	5	0
	0	4	-5	0
	0	0	1	0
	0	1	-2	1

$B^{-1}R$		
	5	-3
	-5	4
	1	0
	-2	1

$B^{-1}b$	
	5
	8
	4
	2

$c_B B^{-1} R$	-1	2
$c_R - c_B B^{-1} R$	1	-2

	Valor	Variable
Entrada	1	h_3

Criterio		
	h_1	1
	s_1	-1.6
	x_1	4
	x_2	-1

	Valor	Variable
Salida	1	h_1

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Tarea

Instrucciones: Modifique el archivo Excel entregado con la implementación del método simplex en su versión matricial para resolver el problema visto en clase aplicando el método de las dos fases.

Considere que puede modificarlo a placer, pero siempre siguiendo el esquema de iteración y no replicar las matrices varias veces para lograr su objetivo, es decir, si se construyen 4 tablas o matrices simplex (en este caso en particular del ejercicio) el desarrollo no será considerado válido.

El desarrollo de la tarea es individual y tiene como plazo el día lunes siguiente a esta clase hasta las 09:30 a.m.

Basta con subir el archivo Excel directamente al repositorio correspondiente disponible en Google Drive. Este archivo **debe** tener por nombre <u>"Tarea 1 – 2 fases"</u>.

Es importante tener en cuenta que en caso de no cumplir tanto con el plazo de entrega o con el nombre del archivo, esta no será considerada válida.