Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial

Optimización I
Ingeniería Civil Industrial, 1er Semestre 2021
PEP 2

Profesor: Luis Rojo-González **Fecha:** 26 de junio, 2021
Ayudante: Franco Pardo

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -7x_1 - 2x_2 && (1)\\
s.a. \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 && (2)\\
& 5x_1 + x_2 \leq 20 && (3)\\
& 2x_1 + 2x_2 \geq 7 && (4)\\
& x_1, x_2 \in Z_+ && (5)
\end{aligned}$$

1. (75 puntos) Suponga que una vez hemos resuelto la relajación linal de este problema, en el algoritmo Branch-and-Bound hemos decidido ramificar en la variable x_2. Complete el árbol ramificando siempre hacie la derecha ($\geq$). Además, indique claramente el criterio de eliminación utilizado cada vez que elimine un subproblema. ¿Cuál es el valor óptimo del problema? ¿Cuál es una solución óptima del problema?

2. (25 puntos) A partir de la solución óptima de la relajación lineal (LP) del problema, genera tantos cortes fraccionales de Gomory como sean posibles. Expresa dichos cortes en términos de las variables originales. Estudia la dominancia y resuelve nuevamente añadiendo aquellos cortes convenientes. Indica cuál es la incumbente tras este proceso. ¿Has obtenido la solución óptima?.

Solución

1. Si se ramifica $x_2 \geq 4$ el problema es infactible, por lo que al ramificar en dirección de $x_2 \leq 3$, la solución está dada por $x_B = (x_1, h_3, h_1, x_2) = (17/5, 29/5, 7/5, 3)$ y $\overline{c}_j = (\overline{c}_{h_2}, \overline{c}_{h_4}) = (3/5, 7/5)$ y $B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 8/5 & 2/5 \\ -11/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $z_1 = 29$. Es posible ver que tras esta ramificación, la única variable no entera corresponde a x_1, por lo que se procede a ramificar en $x_1 \geq 4$, en donde se obtiene que $B^{-1}b = (4, 1, 8, 0, 0)^T$ tal que $z_4 = 28$ el cual es una solución entera. Luego, al ramificar por $x_1 \leq 3$ se tiene que la solución no es entera y tiene un valor de $z_3 = 28$, por lo que al seguir esta rama se encontrara una solución peor a la actual; así se poda dada la incumbente encontrada.

2. El óptimo de la relajación lineal entrega que $x_B = (x_1, x_2, h_3) = (36/11, 40/11, 75/11)$ y $\overline{c}_j = (\overline{c}_{h_1}, \overline{c}_{h_2}) = (3/11, 16/11)$ y $B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1/11 & 2/11 \\ 5/11 & 1/11 \\ 8/11 & 6/11 \end{pmatrix}$. Así, los cortes de Gomory corresponden a $(10/11)x_1 + (2/11)h_2 \geq 3/11$, $(5/11)x_1 + (1/11)h_2 \geq 7/11$ y $(8/11)x_1 + (6/11)h_2 \geq 3/11$, por lo que como $h_1 = 4 + x_1 - 2x_2$ y $h_2 = 20 - 5x_1 - x_2$ se tiene que $x_2 \leq 7/2$, $x_2 \leq 3$ y $x_1 + x_2 \leq 13/2$. Es claro ver que de los dos primeros cortes se debe incluir $x_2 \leq 3$ (pues $7/2 = 3.5 \geq 3$), en donde al resolver este problema se obtiene que $x^* = (17/5, 3) \notin Z_+$, por lo que no es la solución óptima del problema.