Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP II Semestre I Año 2016

Profesor:
Fecha:

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3:	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos):

Una empresa importadora desea planificar sus órdenes de compra a China por un solo productor para los siguientes "n" períodos, sabiendo que la demanda para cada uno de dichos periodos D(t) es conocida. El precio al que se vende dicho producto en China depende de la cantidad solicitada producto de los impuestos de importación, así si la compra es menor a "k" unidades el precio es "P_1" mientras que sí compra "k" o más unidades el precio es "P_2" donde "$P_2<P_1$". Por otra parte, existe un costo fijo en cada periodo por mantener unidades en inventario "CFinv", no se permiten quiebres de stock y el tiempo de entrega de los productos es asumido instantáneo.

Plantee el **problema de programación lineal** que minimice el costo total y cumpla con todas las condiciones. Recuerde seguir la siguiente estructura: parámetros (10 puntos), variables (30 puntos), función objetivo (20 puntos) y restricciones (40 puntos).

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1.

Parámetros (10 puntos)
P_1 = Costo de comprar menos de k productos al importador
P_2 = Costo de comprar k o más productos al importador.
D(t) = Demanda en el periodo t; t = 1,..,n
CFinv = Costo de mantener unidades en inventario.
M:= Número muy grande

Variables de decisión (30 ptos):

X_1(t) = Unidades del producto solicitado al precio P_1 en el periodo t = 1,..,n
X_2(t) = Unidades del producto solicitado al precio P_2 en el periodo t = 1,..,n
Y_1(t) = 1 si se compran productos al precio P_1 en el periodo t = 1,..,n, 0 en otro caso
Y_2(t) = 1 si se compran productos al precio P_2 en el periodo t = 1,..,n, 0 en otro caso.
S(t) = Unidades en inventario al final del periodo t.
IN(t)= 1 si hay unidades en inventario al final del periodo , 0 en otro caso

Función Objetivo (20 ptos):

$$\min z = \sum_t P_1 * X_1(t) + P_2 * X_2(t) + CFinv * IN(t)$$

Restricciones (40 puntos)

$$S(t) = S(t-1) + X_1(t) + X_2(t) - D(t)$$
$$S(t-1) + X_1(t) + X_2(t) \geq D(t)$$
$$S(t) \leq M * IN(t)$$
$$Y_1(t) + Y_2(t) \leq 1$$
$$X_1(t) \leq K * Y_1(t)$$
$$X_2(t) \leq M * Y_2(t)$$
$$X_2(t) \geq K * Y_2(t)$$
$$X_1(t),\ X_2(t), S(t) \geq 0$$
$$Y_1(t),\ Y_2(t), IN(t) \in \{0,1\}$$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Considerando el siguiente problema

Min Z= 10 x_1 + 14 x2

s.a:

$4x_1 + 2 x_2 \leq 26$

$15x_1 + 27x_2 \leq 123$

$x_{1,}$ x_2 entero.

Resuelva

a) Grafique la solución del modelo con variables positivas reales (30 puntos)

b) Encuentre la solución del modelo. (60 puntos)

c) Grafique las solución del modelo (10 puntos)

Solución Problema 2:

a):

i) $2x_1 + x_2 = 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 = 41$

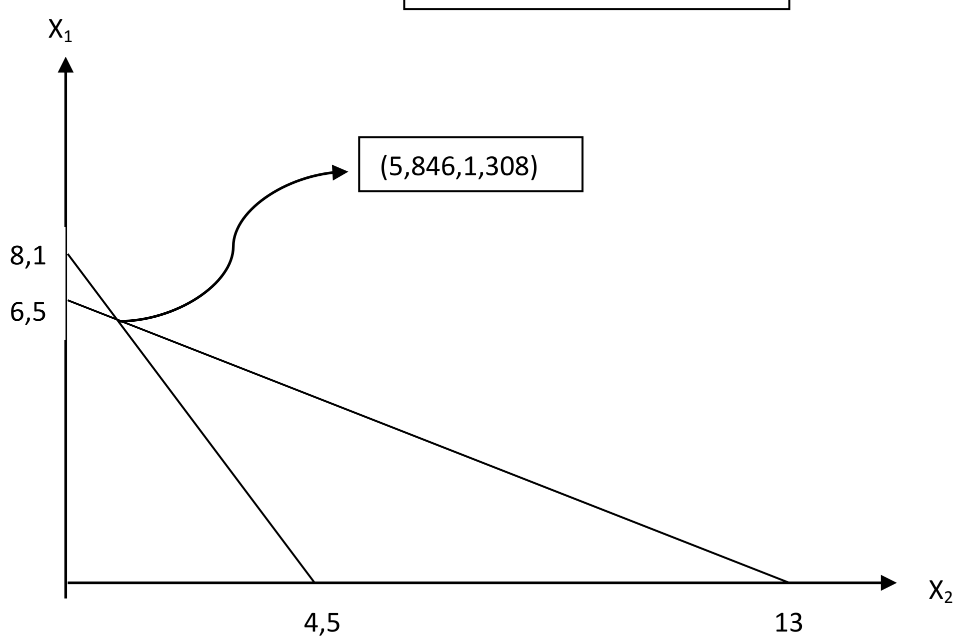
Solución:

$Z = 5 * 5,846 + 7 * 1,308$

$Z = 38,386$

$x_1 = 5,846$

$x_2 = 1,308$



b): Utilizando la solución anterior tenemos.

P_0 :

$Z = 38,396$

$x_1 = 5,846$

$x_2 = 1,308$

P_1 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

Tenemos:

$x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 1,77$

Minimizamos escogemos el menor

Solución:

$Z = 5 * 5 + 7 * 1,77$

$Z = 37,39$

$x_1 = 5$

$x_2 = 1,77$

P_3 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \leq 1$

Tenemos:

$x_1 \leq 6$

$x_1 \leq 6{,}4$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 5 + 7 * 1$

Z = 32 (Candidato a óptimo)

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

P_4 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 1$

Tenemos:

$x_1 \leq 4{,}6$

$x_1 \leq 5{,}5$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 4{,}6 + 7 * 2$

$Z = 37$

$x_1 = 4{,}6$

$x_2 = 2$

P_5 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 1$

v) $x_1 \leq 5$

Tenemos:

$x_2 \leq 5$

$x_2 \leq 2{,}3$

$x_2 \geq 2$

Escogemos primera intersección

Solución:

$Z = 5 * 4 + 7 * 2$

$Z = 36{,}1$

$x_1 = 4$

$x_2 = 2{,}3$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

P_6 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 1$

v) $x_1 \geq 5$

Tenemos:

$x_2 \leq 1{,}7$

$x_2 \leq 3$

$x_2 \geq 2$

Solución:

Infactible

P_7 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \leq 2$

vi) $x_1 \leq 4$

Tenemos:

$x_1 \leq 4$

$x_1 \leq 4{,}6$

$x_1 \leq 5{,}5$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 4 + 7 * 2$

$Z = 34$

$x_1 = 4$

$x_2 = 2$

P_8 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \geq 3$

vi) $x_1 \leq 4$

Tenemos:

$x_1 \leq 2{,}8$

$x_1 \leq 4$

$x_1 \leq 5$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 2{,}8 + 7 * 3$

$Z = 35$

$x_1 = 2{,}8$

$x_2 = 3$

P_9 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \geq 3$

vi) $x_1 \leq 4$

vii) $x_1 \leq 2$

Tenemos:

$x_2 \geq 2$

$x_2 \geq 3$

$x_2 \leq 3,4$

$x_2 \leq 9$

Solución:

$Z = 5 * 2 + 7 * 3,4$

$Z = 33,8$

$x_1 = 2$

$x_2 = 3,4$

P_{10} :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \geq 3$

vi) $x_1 \leq 4$

vii) $x_1 \geq 3$

Tenemos:

$x_2 \geq 2$

$x_2 \geq 2,8$

$x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 7$

Solución:

Infactible

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

P_{11} :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \geq 3$

vi) $x_1 \leq 4$

vii) $x_1 \leq 2$

viii) $x_2 \leq 3$

Tenemos:

$x_1 \leq 2$

$x_1 \leq 2,8$

$x_1 \leq 4$

$x_1 \leq 5$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 2 + 7 * 3$

Z = 31 (Candidato a óptimo)

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

P_{12} :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \leq 5$

iv) $x_2 \geq 2$

v) $x_2 \geq 3$

vi) $x_1 \leq 4$

vii) $x_1 \leq 2$

viii) $x_2 \geq 4$

Tenemos:

$x_1 \leq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

$x_1 \leq 4,5$

$x_1 \leq 5$

Solución:

$Z = 5 * 1 + 7 * 4$

Z = 33 (Candidato a óptimo)

$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

P_2 :

$Z = 5 * x_1 + 7 * x_2$

i) $2x_1 + x_2 \leq 13$

Tenemos:

$x_2 \leq 1$

$x_2 \leq 3,44$

Minimizamos escogemos el menor

Solución:

$Z = 5 * 1 + 7 * 4$

Z = 37 (Óptimo)

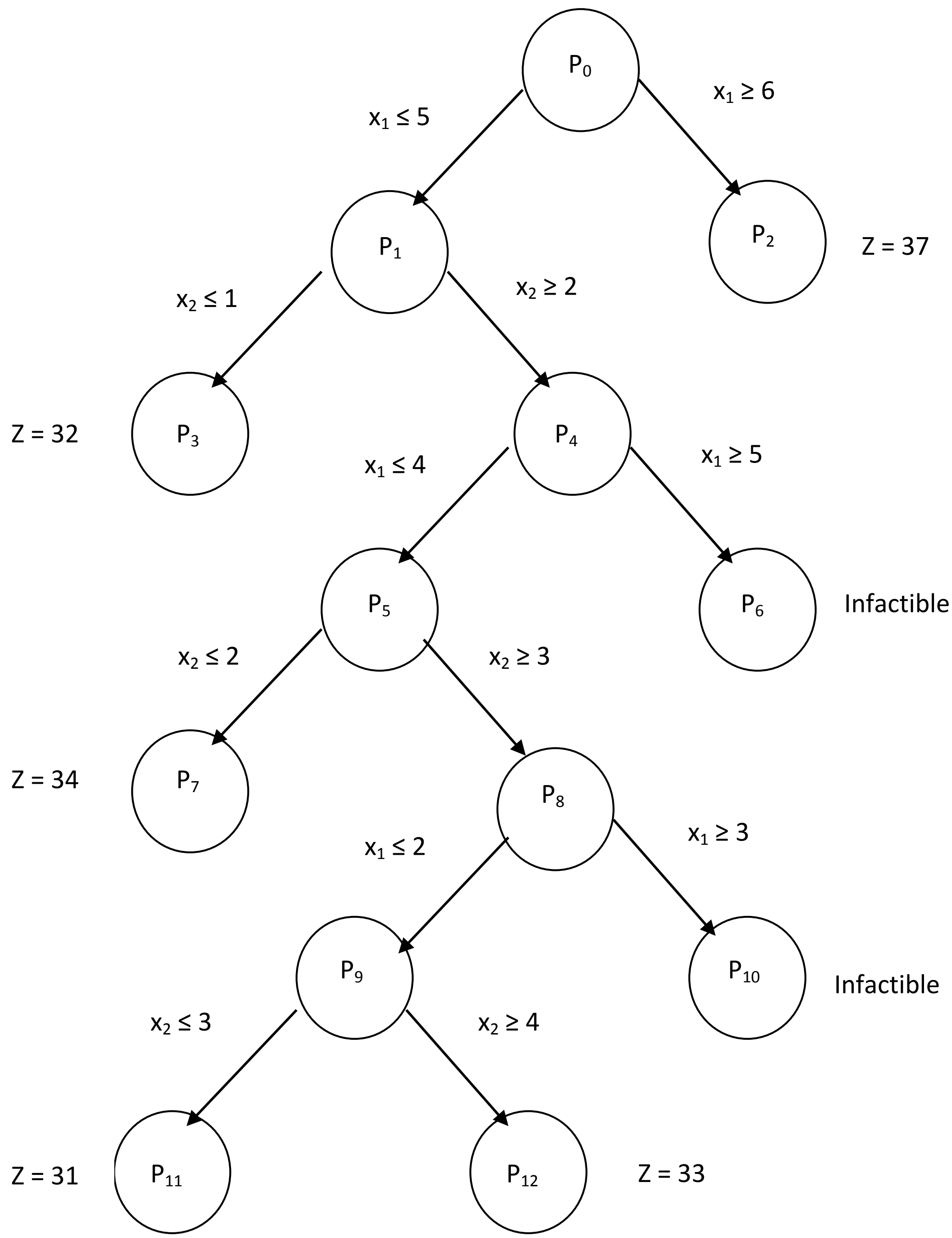
$x_1 = 6$

$x_2 = 1$

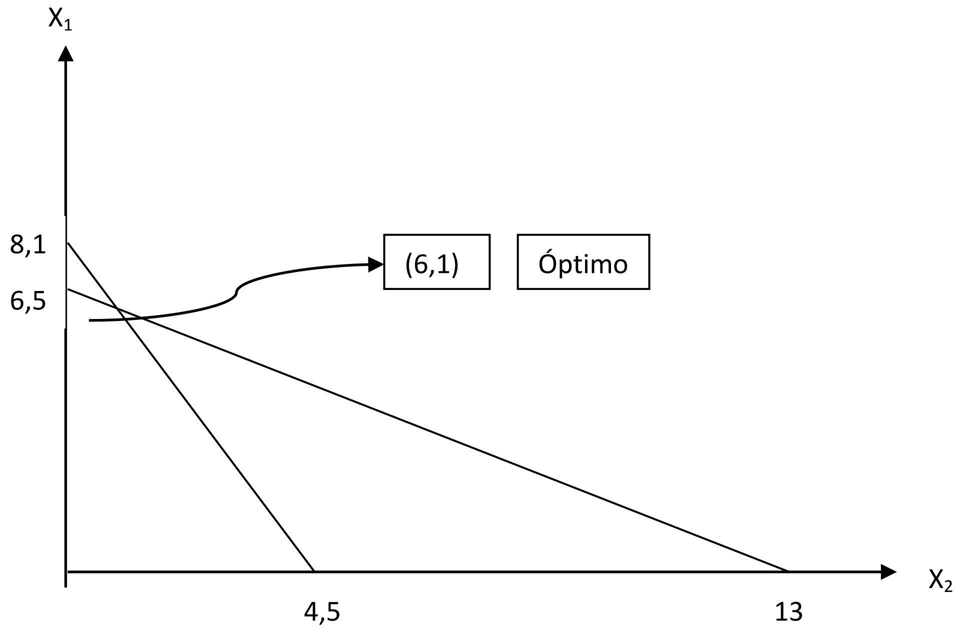
ii) $5x_1 + 9x_2 \leq 41$

iii) $x_1 \geq 6$

Asi el arbol queda de la siguiente forma:



Pauta c:



Problema 3

La siguiente tabla presenta los costos marginales que posee una empresa al enviar una unidad de producto a la cuidad columna *j* desde el puerto fila *i* . El objetivo es minimizar el costo total. Note que el costo marginal de dejar en stock una unidad de producto en el puerto 1 es 4 y en el puerto 2 es 3. El puerto 3 no tiene costo de stock.

Costos marginales	Ciudad 1	Cuidad 2	Productos en oferta
Puerto 1	3	11	10
Puerto 2	5	9	20
Puerto 3	18	7	20
Productos demandados	24	16	

Con una solución considerando que en el Puerto 3 quedan 10 productos en stock:

Productos	Ciudad 1	Cuidad 2
Puerto 1	10	0
Puerto 2	14	6
Puerto 3	0	10

a) ¿Es esta una solución factible del problema del problema balanceado? Explique (20 puntos)
b) ¿Es esta una solución óptima del problema? Explique. Si su respuesta es no, resuelva. (80 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Solución Problema 3

a) Considerando el problema de transporte balanceado

Min ∑∑XijCij

∑Xij=d_j para toda ciudad j

∑Xij=o_i para toda oferta i

Xij≥0, para todo i,j

Donde, Xij es la cantidad de unidades de carga desde el puerto fila *i* hasta la ciudad j, d_i y o_j las cantidades asociadas como demandada y ofrecida por la cuidad i y puerto j, respectivamente; y Cij el costo marginal de trasladar una cantidad desde el puerto i hacia la ciudad j.

Dado que la demanda total es 40 y la oferta es 50, entonces se debe agregar una demanda ficticia de 10 con los costos asociados. De este modo la tabla queda

Ingreso marginales esperados	Ciudad 1	Cuidad 2	Ciudad Ficticia	
Puerto 1	3	11	4 **(costo stock)**	10
Puerto 2	5	9	3 **(costo stock)**	20
Puerto 3	18	7	0	20
	24	16	10	

Así, la solución corresponde a una solución factible, dado que respecta todas las restricciones del modelo, satisface la demanda y la oferta, siendo el stock del puerto 3 igual a 10.

Productos	Ciudad 1	Cuidad 2	Ciudad Ficticia
Puerto 1	10	0	0
Puerto 2	14	6	0
Puerto 3	0	10	**10 (en stock)**

b) Para probar la optimalidad de la solución entregada, primero ya sabemos que es factible, dado el punto anterior y luego, analizamos las variables básicas (en negrita)

	v 1	v 2	v 3
u 1	**3**	11	0
u 2	**5**	**9**	3
u 3	18	**7**	**0**

Así

u1+ v1 = 3; u1 =0 → v1=3 u2+v2 =9; u2=2 → v2=7 u3+ v3=0; u3=0; v3=0

$u2 + v1 = 5$; $v1 = 3 \rightarrow u2 = 2$ $u3 + v2 = 7$; $v2 = 7 \rightarrow u3 = 0$

y entonces para las no básicas tenemos.

$u3 + v1 - 18 = 0 + 3 - 18 = -15 \leq 0$

$u1 + v2 - 11 = 0 + 7 - 11 = -4 \leq 0$

$u1 + v3 - 0 = 0 + 0 - 4 = -4 \leq 0$

$u2 + v3 - 0 = 2 + 0 - 3 = -1 \leq 0$

Con lo cual la solución entregada es óptima.