Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre I Año 2015

Profesor: Óscar C. Vásquez
Fecha: 20 de abril 2015

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3:	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos)

Se tiene n trabajos y n máquinas. Cada trabajo *i* debe ser procesado por solo una máquina durante un tiempo p_i a partir de un tiempo r_i en el cual está disponible. Las máquinas pueden procesar varios trabajos, pero solo pueden trabajar un trabajo a la vez de principio a fin, es decir, la máquina no puede realizar dos o más trabajos al mismo tiempo, ni puede interrumpir un trabajo para comenzar otro. Asimismo, las máquinas solo pueden trabajar por un tiempo *w*. El objetivo es minimizar el número de máquinas a utilizar, realizando todos los trabajos

a) Modele el problema, distinguiendo parámetros, variables, función objetivo, restricciones (75 puntos)
b) Determine el valor mínimo que debe tomar *w* para que el problema tenga una solución factible, es decir, que todos los trabajos puedan ser realizados. (10 puntos)
c) Determine el valor mínimo de *w* a partir del cual la restricción de capacidad de las máquinas no será saturada, es decir, la capacidad de la máquina no afecta el problema. (10 puntos)
d) Explique brevemente si es posible que el problema sea infactible debido a que el número de máquinas es menor a *n*. (5 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1

a) **Parámetros** (5 puntos)

r_i: Tiempo desde el cual es trabajo i está disponible

p_i: Tiempo de procesamiento del trabajo i

Variables de Decisión (10 puntos)

X_i := 1 si la máquina i es utilizada, 0 en otro caso

Y_{ij} := 1 el trabajo i es realizado por la maquina j, 0 en otro caso

z_{ij} := 1 el trabajo i es realizado antes que el trabajo j , 0 en otro caso

Función Objetivo (5 puntos)

Min $\sum_i x_i$

Restricciones

$\sum_j y_{ij}=1$ para todo i (el trabajo es realizado por solo una maquina) (10 puntos)

$\sum_j p_i y_{ij} \leq w$ para todo j (la máquina no puede pasar la cantidad de trabajo w) (10 puntos)

$r_i+p_i-r_j \leq N\,(1-z_{ij})$ para todo i,j , i≠j (verifica si una actividad *i* va antes que la actividad *j*) (15 puntos)

$y_{ik}+y_{jk} \leq 1+z_{ij}+z_{ji}$ para todo i>j, j, k (20 puntos) (verifica que solo si actividad *i* va antes que la actividad *j,* ambas pueden ser realizadas en la misma máquina)

y_{ij}, x_i variable binaria, para todo i, j (5 puntos)

b) El valor mínimo de w debe ser el máximo valor de p_i, de este modo uno puede asegurar que una solución factible al problema es la asignación de una trabajo a una máquina.

c) El valor de w debe ser mayor al máximo valor r_i+p_i. Esto es porque este valor representa el mayor valor donde una máquina podría terminar, y en el peor de los casos esta máquina estaría cargada desde cero.

d) Sí, es posible que el problema sea infactible ya que el número de máquinas por w, puede ser menos a la suma de los tiempos de proceso p_i y entonces no hay una solución que permita realizar todo los trabajos. Un simple ejemplo es suponer que para todo trabajo $r_i=0$ y $p_i=w$, en este caso no existe una solución factible con un numero de máquinas menos a *n.*

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal (P1)

Min Z = -c1 x1+ c2 x2- c3 x3

s.a.

a11 x1 -a12 x2 +a13 x3 ≤ b1

a21 x1 - a22 x2 +a23 x3 ≤ b2

a31 x1 -a32 x2 + a33 x3 ≤ b3

-a41 x1+a42 x2 - a43 x3 ≥ -b4

x1≥0, x2≤0, x3<>0

cj.,bj >0, para todo j=1,2,3,4.

aij>0, para todo i=1,2,3,4; j=1,2,3 .

a) Determine el problema dual y luego, el dual estandarícelo (10 puntos)
b) Considere el problema (P1) reemplazando la restricción x3<>0 por la restricción x3≥0, y asumiendo c3=0. En este nuevo problema denominado (P2), Dado los valores de los parámetros
    I. ¿Porque se podría determinar el valor de x3*? (10 puntos)
    II. ¿Cómo podría cambiar ese valor a partir de los parámetros ai3, i=1,2,3? (10 puntos)
c) En el problema denominado (P2) definido anteriormente, considere a11=2*a21=2*a12=a13=a23, 3*a21=a22=a33=a43, a32=a41=0, 2c1=3c2, 3b1=2b2.
    i. Muestre la última iteración que realizaría el método simplex, sabiendo que en la solución óptima solo las dos primeras restricciones son activas. (50 puntos)
    ii. Dado a) ¿Cuál es el valor de b3 si la solución es degenerada? (10 puntos)
    iii. Dado a) ¿A partir de qué valor b4 la restricción 4 es saturada? (10 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta problema 2. El problema Dual es:

a) Max W = b1 y1+ b2 y2 + b3 y3- b4 y4

s.a.

$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 - a_{41} y_4 \leq -c_1$

$-a_{12} y_1 - a_{22} y_2 - a_{32} y_3 + a_{42} y_4 \geq c_2$

$a_{13} y_1 - a_{23} y_2 + a_{33} y_3 - a_{43} y_4 = -c_3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0,\ y_4 < 0$

$c_j, b_j > 0$, para todo j=1,2,3,4.

$a_{ij} > 0$, para todo i=1,2,3,4; j=1,2,3 .

Estandarizado es:

Max W = b1 y1+ b2 y2 + b3 y3- b4 y4

s.a.

$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 + a_{41} y_4' + H_1 = c_1$

$-a_{12} y_1 - a_{22} y_2 - a_{32} y_3 - a_{42} y_4' - S_1 = c_2$

$a_{13} y_1 - a_{23} y_2 + a_{33} y_3 + a_{43} y_4' = c_3$

$y_4 - y_4' = 0$

$y_1, y_2, y_3, y_4' \geq 0,$

$c_j, b_j > 0$, para todo j=1,2,3,4.

$a_{ij} > 0$, para todo i=1,2,3,4; j=1,2,3.

b) Nuestro nuevo problema P2 queda como sigue

Min Z = $-c_1 x_1 + c_2 x_2$

s.a.

$a_{11} x_1 - a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$

$a_{21} x_1 - a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2$

$a_{31} x_1 - a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leq b_3$

$-a_{41} x_1 + a_{42} x_2 - a_{43} x_3 \geq -b_4$

$x1, X3 \geq 0$, $x2 \leq 0$

$cj, bj > 0$, para todo $j=1,2,3,4$.

$aij > 0$, para todo $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3$.

i . Dado que la cantidad de x3 no aporta a la función objetivo, y dado que los ai3 's son positivos, si el valor de x3 es mayor a cero, entonces el valor de los recursos que puedo asignar a las otras variables x1y x2 que si intervienen en la función objetivo disminuye. Por lo tanto, uno puedo asegurar que en la solución óptima del problema P2, $x3^*=0$.

ii. Por la misma razón si ahora los parámetros ai3 's son negativos, si el valor de x3 es mayor a cero, entonces el valor de los recursos que puedo asignar a las otras variables x1y x2 que si intervienen en la función objetivo aumenta, y en la práctica la solución será menos infinito, ya que x3 puede crecer infinitamente sin costo para la función objetivo. Una mezcla d ai3 positivos y negativos puede brindar un valor x3* entre cero e infinito.

c) Dado lo anterior, el problema P2 es equivalente otro problema P3

$\text{Max } Z = c1\, x1 + c2\, x2'$

s.a.

$a11\, x1 + a12\, x2' \leq b1$

$a21\, x1 + a22\, x2' \leq b2$

$a31\, x1 + a32\, x2' \leq b3$

$a41\, x1 + a42\, x2' \leq b4$

$x1, x2' \geq 0$, $x2 = -x2'$, $x3 = 0$

i.- Ahora, si la solución es dada por las dos primeras restricciones saturadas, esto implica que

$a11\, x1 + a12\, x2' = b1$

$a21\, x1 + a22\, x2' = b2$

Lo anterior, puede rescribirse como

$2\, a11\, x1 + 2\, a12\, x2' = 2b1$

$2\, a21\, x1 + 2\, a22\, x2' = 2\, b2$

Reemplazando

$a11=2*a21=2*a12=a13=a23$, $3*a21=a22=a33=a43$, $a32=a41=0$, $2c1=3c2$, $3b1=2b2$.

Se tiene

2 a11 x1 +a11 x2’ = 2 b1

a11 x1 + 2 (3*a21) x2’ = a11 x1 + 3 (2*a21) x2’ = a11 x1 + 3*(a11) x2’ = 2 b2

Así, despejando x2’ se tiene

x2’*= (4 b2-2 b1)/ (5*a11)=4 b1/(5*a11)

Reemplazando en la primera restricción se tiene x1’* se tiene x1*= 3 b1/ (5*a11)

Así el tableux óptimo es (incluidas las variables de holgura de la estandarización)

VB	X1	X2	H1	H2	H3	H4	B
X1	1	0			0	0	3 b1/ (5*a11)
X2’	0	1			0	0	4 b1/(5*a11)
H3	0	0			1	0	b3-a31 3 b1/ (5*a11)-a32 4 b1/(5*a11)
H4	0	0			0	1	b4-a41 3 b1/ (5*a11)-a42 4 b1/(5*a11)
-Z	0	0	y1*	y2*	0	0	-c1 3 b1/ (5*a11)-c2 4 b1/(5*a11)

Los valores vienen: La forma canónica de las variables que básicas y el reemplazo de ellas en el problema estandarizado determinan los valores en rojo.

Para obtener el resto utilizamos el problema dual de P3.

Min W= b1 y1+b2 y2+b3 y3 +b4 y4

s.a.

a11 y1+ a21 y2 + a31 y3 + a41 y4 ≥ c1

a12 y1+ a22 y2 + a32 y3 + a42 y4 ≥ c2

y1,y2,y3,y4≥0

Utilizando el teorema de holgura complementaria tenemos y la solución óptima del problema primal tenemos.

y4*, y3* =0

a11 y1*+ a21 y2* =c1, y1*=(c1-a21y2*)/a11

a12 y1*+ a22 y2* =c2 , y2*=(c2-a12 Y1*)/a22= (c2 -(c1-a21y2*)/a11)/a22

Y asi y1*=(c1-a21 [(c2 -(c1-a21y2*)/a11)/a22])/a11

El resto del tableux se obtiene de al obtener la forma canónica de las variables básicas.

ii.- Si la solución es degenerada entonces habrá otra restricción de que también se intersecta en el valor óptimo. Así, considerando a32 igual a cero basta que a31 sea igual a a31 x1*= a31 3 b1/ (5*a11)= b3

iii.- Si la restricción 4 es saturada es equivalente a decir que la restricción será la que determine el valor de la solución y por ende, considerando a41=0 y el valor de x2'* es suficiente decir a42*x2'*= a42*4 b1/(5*a11) ≥ b4

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 3.- (100 puntos)

LeaderPrice, marca propia del supermercado LiDL en Europa, debe determinar la producción de tres tipos de quesos: EDEM (E) COMTE (C) y BRIE (B). Para ellos cuneta con 500 litros de leche, 1000 litros de agua y 500 litros de enzima lactosa coagulante. Cada pieza de EDEM utiliza 1 litro de leche, 1 de agua y 1 de enzima. Una pieza de COMTE utiliza 2 litro de agua, 1 libro de leche, mientras una pieza de BRIE utiliza un litro de agua y un litro de enzima lactosa coagulante. El ingreso por cada pieza vendida de EDEM, COMTE y BRIE es 2, 3 y 4 unidades monetarias respectivamente y existe una clausula sobre el BRIE que no puede superar las 100 piezas. El objetivo es maximizar el ingreso.

MAX $Z= 2E + 3C + 4B$

$E + C \leq 500$

$E + 2C + B \leq 1000$

$E + 2B \leq 500$

$B \leq 100$

$E,C,B \geq 0$

Donde parte del tableux óptimo con las variables de holgura incorporadas es

	E	C	B	H1	H2	H3	H4	
-Z	0	0	0	-1	-1	0	-3	

a) Desde el tableux anterior,
   i. Determine los valores que faltan sin realizar ningún método, solo utilizando teoremas. (25 puntos)
   ii. Explique brevemente porqué sabemos que es óptimo (5 puntos)
b) Suponga que el ingreso de EDEM es solo estimado. ¿Para qué valores de ingreso del EDEM, se sigue produciendo los mismos quesos que da la solución óptima? (20 puntos)
c) ¿Cuál es el rango que puede variar la cantidad disponible de agua de modo que no se siga produciendo los mismos quesos que da la solución óptima? (25 puntos)
d) Suponga que puede incorporar una nueva pieza de queso en el mercado, que utiliza 1 litro de agua, 1 litro de enzima lactosa coagulante y 2 litros de leche. ¿Cuánto de ser el valor mínimo de ingreso que debe tener la nueva pieza de queso para ser considerada como parte de la producción? (25 puntos)

Pauta Problema 3

a) i. El tableux óptimo es

VB	E	C	B	H1	H2	H3	H4	B
E	1	0	0	2	-1	0	1	100
C	0	1	0	-1	1	0	-1	400
B	0	0	1	0	0	0	1	100
H3	0	0	0	-2	1	1	-3	200
-Z	0	0	0	-1	-1	0	-3	1800

De los valores de las variables de holgura se tiene que las restricciones 1,2 y 4 son saturadas y entonces:

E + C =500, C=500-E

E + 2C + B=1000, E+2(500-E)+B=1000, B=E

B=100, E=100, C=400

Z= 2 E + 3 C+ 4 B=1800

E + 2B+H3=500, H3=200.

Del problema estandarizando, incluidas las variables de holgura, tenemos.

E + C +H1=500, (fila 1)

E + 2C + B+H2=1000, (fila 2)

E + 2B+H3=500, (fila 3)

B +H4=100, (fila 4)

Dado lo anterior, el resto del tableux se obtiene al obtener la forma canónica de las variables básicas.

Para obtener los valores en fila de E de tablero nosotros tenemos

2 Fila 1 –Fila 1+ Fila 4, lo cual nos da los coeficientes asociados a las variables no básicas.

2 E+ 2C+H1- (E+2C+B+H2)-(B+H4)=2*500-1000+100

E –H2+H4=100, E=100-2H1+H2-H4

Para obtener los valores en fila de C de tablero nosotros tenemos

Fila 2 – Fila 1 – Fila 4.

E + 2C + B+H2- (E + C +H1)- (B +H4)=1000-500-100

C+H2-H1-H4=400, C=400+H1-H2+H4

Para obtener los valores en fila de H3 de tablero nosotros tenemos

Fila 3 - Fila 2-Fila 4 y remplazando C

E + 2B+H3 –(E + 2C + B+H2)- B -H4=

H3-2C-H2-H4 =500-1000-100

H3-2(400+H1-H2+H4)-H2-H4=-600

H3-800-2H1+2H2-2H4-H2-H4=600

H3=200+2H1-H2+3H4

Para el valor de B, simplemente escribimos B=100 – H4, (fila 4)

ii. El tableux es óptimo debido a que todos los costos reducidos son negativos de las variables que no son básicas, es decir, si se incorpora una de estas las variables no básicas a la base de la solución, el valor objetivo disminuiría.

b) Sea Ce el nuevo costo de Edem,. Dado el tableux óptimo de nuestro problema , la producción de queso será la misma (la misma base) si tenemos.

C_e= (2+x)- cb B^{-1}*A_e <0

Donde
cb= (2 3 4 0)

$$B^{-1}= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_e= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B^{-1} * A_e =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C_e = 2+x-2<0$

No puede aumentar ya que si aumenta cambiará la base.

c) Considerando las mismas matrices anteriores, verificamos con un Δ en la restricción asociada a la leche

$b' = b + B^{-1}\Delta b < 0$

$b = (100\ 400\ 100\ 200)^t + (2\Delta - \Delta\ \ 0\ -2\ \Delta)^t < 0$

Así si el valor de $100<\Delta$ cambia la base y entonces no se sigue produciendo los mismo quesos que la solución óptima.

d) Consideramos las matrices anteriores, la matriz coeficientes técnicos del nuevo queso

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y verificamos

$C_n - cb\ B^{-1} * A_n > 0$

Donde el costo del nuevo queso será C_n

Asi, tenemos $C_n>3$ implica cambio de base y la consideración del nuevo queso