Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

POR Semestre I Año 2015

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3:	
Puntaje Total:	

Profesor: Óscar C. Vásquez
Fecha: 20 de Julio 2015

Nombre Alumno: ____________________________________

Problema 1.- (100 puntos)

Jorge Luis Sampaoli Moya con mira en la Copa Confederaciones que se jugara el 2017 en Rusia pretende elegir la formación titular para la selección Chilena. Para esto ha calificado la capacidad ofensiva, defensiva, velocidad, técnica y precisión; según la siguiente clasificación: 1=Bajo, 2=Medio, 3=Alto.

Nombre	Posición	Ofensiva	Defensiva	Velocidad	Técnica	Precisión
Jugador 01	Arquero	1	3	2	3	2
Jugador 02	Arquero	1	3	2	2	3
Jugador 03	Arquero	1	3	3	2	2
Jugador 04	Defensa	3	3	1	2	2
Jugador 05	Defensa	2	3	2	1	3
Jugador 06	Defensa	1	2	2	3	1
Jugador 07	Defensa	2	3	1	2	3
Jugador 08	Defensa	1	2	3	3	2
Jugador 09	Defensa	1	2	3	1	2
Jugador 10	Mediocampista	2	3	3	2	1
Jugador 11	Mediocampista	3	2	3	1	2
Jugador 12	Mediocampista	1	2	2	3	1
Jugador 13	Mediocampista	2	1	3	3	2
Jugador 14	Mediocampista	2	3	2	1	3
Jugador 15	Mediocampista	3	3	1	2	2
Jugador 16	Mediocampista	1	2	2	3	2
Jugador 17	Mediocampista	1	1	3	2	3
Jugador 18	Mediocampista	3	3	1	2	1
Jugador 19	Delantero	3	1	2	2	2
Jugador 20	Delantero	3	2	1	3	2
Jugador 21	Delantero	2	1	2	2	3
Jugador 22	Delantero	2	2	3	1	2
Jugador 23	Delantero	3	1	2	3	2

Para la formación el técnico pretende jugar con 1 arquero, 4 defensas, 3 mediocampistas y 3 delanteros; además su capacidad defensiva promedio entre mediocampistas, defensa y arquero debe ser superior a 2, el mediocampo debe poseer una velocidad promedio mayor a 2.2, la precisión de sus delanteros en promedio debe superar el 2.3 y la suma de la técnica de los jugadores en cancha deberá ser como mínimo de 22. Por último el equipo debe contar con un jugador que pueda ser capitán del equipo, por esto debe estar en cancha por lo menos uno de los siguientes jugadores: jugador 01, jugador 08, jugador 15, jugador 21; y un jugador que pueda patear tiros libres por lo que debe estar en cancha por lo menos uno de los siguientes jugadores: jugador 05, jugador 10, jugador 17, jugador 22, jugador 23.

Plantear un problema de programación lineal entera que maximice la capacidad ofensiva, considerando parámetros (10 ptos), variables de decisión (20 ptos), función objetivo (20 ptos) y restricciones (50 ptos)

(Nota: el número de jugadores en cancha debe ser 11)

Pauta Problema 1

Parámetros:

C_{ij}: puntuación de jugador i (i=1,…,23) en la capacidad j (j=1, ofensiva; j=2, defensiva; j=3, velocidad; j=4, técnica; j=5, precisión).

Variables:

X_i: 1 si el jugador i es titular, 0 en otro caso.

Función objetivo:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{23} X_i C_{i1}$$

Restricciones:

$$\sum_{1}^{23} X_i = 11$$

$$\sum_{1}^{3} X_i = 1$$

$$\sum_{4}^{9} X_i = 4$$

$$\sum_{10}^{18} X_i = 3$$

$$\sum_{19}^{23} X_i = 3$$

$$\sum_{1}^{19} X_i C_{i2} \geq 2 * 8$$

$$\sum_{10}^{18} X_i C_{i3} \geq 2{,}2 * 3$$

$$\sum_{19}^{23} X_i C_{i5} \geq 2{,}3 * 3$$

$$\sum_{1}^{23} X_i C_{i4} \geq 22$$

$$\sum_{10}^{18} X_i C_{i3} \geq 2{,}2 * 3$$

$$X_1 + X_8 + X_{15} + X_{21} \geq 1$$

$$X_5 + X_{10} + X_{17} + X_{22} + X_{23} \geq 1$$

$$X_i \in \{0{,}1\}$$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Una empresa puede producir 4 productos denotados por P1 P2 P3 y P4. Cada producto debe ser procesado en casa uno de las maquinas. El tiempo de proceso (en horas por unidad producida) son dado en la siguiente tabla.

	P1	P2	P3	P4
Máquina 1	3	4	8	6
Máquina 2	6	2	5	8

400 horas estas disponibles en cada máquina. Los ingresos marginales son 4, 6, 10 y 9 euro por unidad de P1, P2, P3 y P4 producido, respectivamente; bajo es supuesto que todo lo producido es vendido.

El resultado del modelamiento del problema anterior es el siguiente.

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
	0.75	1	2	1.5	0.25		
	4.5	0	1	5	-0.5		200
-Z	-0.5						-600

a) Complete la tabla óptima sin utilizar simplex. Indicando la cantidad de P1 P2 P3 P4 que debe ser producida para maximizar el beneficio. La solución es única ¿por qué?(40 p)
b) Asuma que 20 unidades de P3 han sido producidas por error. ¿En cuánto decrece el beneficio? (10p)
c) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P1 sin cambiar la base óptima? (10p)
d) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P2 sin cambiar la base óptima? (10 p)
e) ¿Cuál es el valor marginal de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1? (10 p)
f) ¿Cuál es el rango que puede variar el capacidad de la máquina 1 sin cambiar la base optima? (10 p)
g) La gerencia está considerando la producción de un nuevo producto P5, el cual requiere 2 horas de la máquina 1 y 10 horas de la máquina 2. ¿Cuál es el mínimo ingreso necesario para que este nuevo producto salga al mercado?

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Pregunta 2.

a) Formulando el problema tenemos

Primal

Max 4 P1 + 6 P2 + 10 P3 + 9 P4
St.
3 P1 + 4 P2 +8 P3 + 6 P4 ≤400
6 P2 + 2 P2 + 5 P3 + 8 P4 ≤400
P1,P2,P3, P4≥ 0

Dual

Min 400 L1 + 400 L2
St.
3 L1 + 6 L2 ≥4
4 L1 + 2 L2 ≥6
8 L1 + 5 L2 ≥10
6 L1 + 8 L2 ≥ 9
L1,L2 ≥ 0

Estandarizando los problemas resolviendo a través de holgura complementaria completamos la tabla óptima y tenemos

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
P2	0.75	1	2	1.5	0.25	**0**	**100**
H2	4.5	0	1	5	-0.5	**1**	200
-Z	-0.5	**0**	**-2**	**0**	**-1.5**	**0**	-600

Así, tenemos que P2=100, variable básica y P1=P3=P4=0 no básica. El resultado es 600 el cual maximiza el ingreso, dada las restricciones.

Asimismo, se observa que una variable no básica tiene costo reducido cero, lo cual implica que la solución óptima no es única ya que puede ser variable básica P4.

b) El costo reducido de P3 es -2. Así, el efecto de producir 20 unidades de P3 por error es 20*-2=-40.
c) Sea 4+ Δ el ingreso marginal por P1. El costo reducido restante al final del tablero permanece negativo si -0.5+Δ≤0, lo cual implica Δ≤0.5. Por lo tanto, mientras es ingreso marginal por P1 sea menor que 4.5, las variables basicas del problema óptimo permanece igual.
d) Sea 6+Δ el ingreso marginal por P2. Dado que P2 es básica, debemos ver el impacto que tendría este incremento sobre todas las variables no básica, esto es:
 el vector cB es ahora Cb =(6+Δ , 0) con ΔCb =(Δ , 0)
 C= (-0.5 0 -2 0 -1.5 0); ΔC=(0 Δ 0 0 0 0 0);
 Actualizando los valores tenemos
 $C' = C + \Delta C - \Delta Cb * B^{-1} * A$
 C'=(-0.5, 0, -2, 0,-1.5, 0)-(0.75, 0, 2, 1.5, 0.25, 0) $\Delta \leq 0$, se mantiene la base**.** Por lo tanto**,** si el valor del ingreso por P2 es 6 o más la base no cambia.
e) El valor marginal de de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1es su precio sombra L1= 1.5.

f) Al incrementar b1=400 a 400 + Δ, tenemos que $b' = b + B^{-1} * \Delta b = (100+0.25\Delta, 200-0.5\Delta)^t \geq 0$ no cambia la base y por lo tanto $-400 \leq \Delta \leq 400$ y así el recurso puede ir desde 0 a 800 sin cambiar la base.

g) Para producir P5 se debe por lo menos contrarrestar el efecto que provocaría en el valor óptimo, es decir el uso de los recursos L1* (2 P5) + L2* (10 P5)= 1.5 (2 P5) + 0 (10 P5) =3 P5. Por lo tanto, si se sea producir P5 el ingreso que genera desde ser a lo menos 3.

Problema 3 (100 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal mixta:

Min $z=5\ x_2 - 8\ x_1$

sujeto a

$2x_1-2x_2\leq 12$

$9/5x_1-x_2 \leq 9$

$x_1\geq 0$

$x_2\leq 0$

$x_1,x_2 \in Z$

a) Ilustre las soluciones factibles en un gráfico (40 ptos)
b) Resuelva el problema utilizando ramificación y acotamiento, utilizando cualquier método (i.e, simplex tabular, dual, método gráfico) de resolución para los subproblemas donde la variables son continuas. (60 ptos)

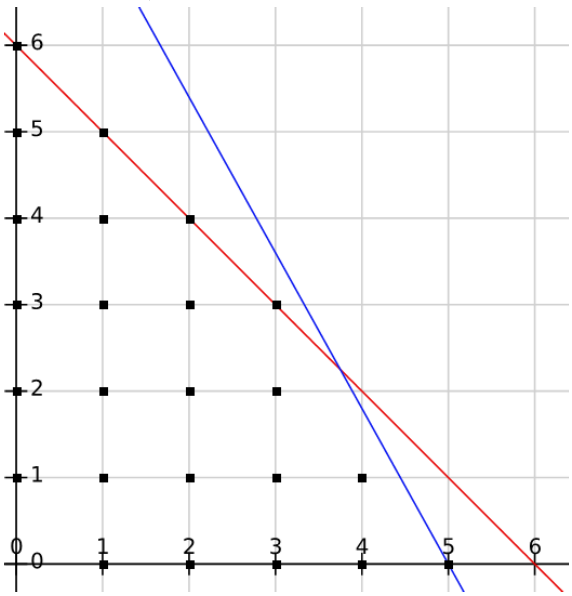
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta problema 3.

a.- Reformulando el problema, reemplazando x_2=-y e x_1=x, tenemos:

Max z=8 x+5 y
sujeto a
x+y≤ 6
9x+5y ≤ 45
x, y≥ 0
x, y ϵ Z

Graficando,



La línea roja representa la recta y=x-6, mientras la línea azul representa la recta y=45/5-9/5 x.

Las soluciones factibles del problema son aquellas combinaciones de puntos enteros que se encuentran dentro del espacio delimitados por las restricciones.

b El árbol generado es el siguiente: