Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PAA Semestre I Año 2015

Profesor: Óscar C. Vásquez
Fecha: 21 de septiembre 2015

Nombre Alumno: ______________________________________

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3:	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos): Resuelva uno de los dos siguientes problemas

a) Considere el siguiente problema de programación lineal no entera Max Z= 4x2^2-x1^3+10x2^2-x2^4

Sujeto a x1+x2 ≤3, x1,x2 enteros positivos.

Formule un modelo de programación entera mixta donde 6 variables binarias y1j e y2j (con j=1,2,3) tiene la siguiente interpretación

yij=1 si xi=j, 0 de otra manera.

b) Considere el siguiente modelo matemático

Max f1 (x1,x2) + f2(x1,x2)

Sujeto a

i.- Que al menos una de estas desigualdades se cumple.

2 x1 +x2 ≤6; 7 x1 +15 x2 ≤80; x1 +3x2 ≤77

ii.- O bien x1≤10 o x2≤ 20

iii.- |x1-x2|=0 o 10 o 20

iv. X1,X2≥0

en donde

f1(x1,x2) = 15 +x2 +x1 si x1≥0, 0 en otro caso ; f2(x1,x2) = 5 +3x2 +2x1 si x2≥0, 0 en otro caso

Formule el problema de programación lineal entera mixta.

-

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1

a) Max Z= $\sum_j$ (10 j^2 j^3)Y1j+(4 j^2-j^4) Y2j

Y11+Y12+Y13≤1

Y21+Y22+Y23≤1

Y11+Y12+Y22≤2

Y11+Y21+Y22≤2

Y13+Y31≤1

Yij binario para todo i.j (i=1,2; j=1,2,3)

b) Max a + b

2 x1 +x2 ≤6+ Y1M

7 x1 +15 x2 ≤80 + Y2M

x1 +3x2 ≤77 +Y3M

Y1+Y2+Y3≤2

X1≤10 + W M

X2≤20 + (1-W)M

x1=x2+10 R

-2 ≤R ≤2

a≤f1(x1,x2) = 15 +x2 +x1

a≤x1M

b≤f2(x1,x2) = 5 +3x2 +2x1

b≤X2M

W, Y1, Y2, Y3 binario

R entero

M valor muy grande

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 2.- (100 puntos)

Una empresa puede producir 4 productos denotados por P1 P2 P3 y P4. Cada producto debe ser procesado en casa uno de las maquinas. El tiempo de proceso (en horas por unidad producida) son dado en la siguiente tabla.

	P1	P2	P3	P4
Máquina 1	3	4	8	6
Máquina 2	6	2	5	8

400 horas estas disponibles en cada máquina. Los ingresos marginales son 4, 6, 10 y 9 euro por unidad de P1, P2, P3 y P4 producido, respectivamente; bajo es supuesto que todo lo producido es vendido.

El resultado del modelamiento del problema anterior es el siguiente.

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
	0.75	1	2	1.5	0.25		
	4.5	0	1	5	-0.5		200
-Z	-0.5						-600

a) Complete la tabla óptima sin utilizar simplex. Indicando la cantidad de P1 P2 P3 P4 que debe ser producida para maximizar el beneficio. La solución es única ¿por qué?(40 p)
b) Asuma que 20 unidades de P3 han sido producidas por error. ¿En cuánto decrece el beneficio? (10p)
c) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P1 sin cambiar la base óptima? (10p)
d) ¿En qué rango puede variar el ingreso marginal por unidad de P2 sin cambiar la base óptima? (10 p)
e) ¿Cuál es el valor marginal de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1? (10 p)
f) ¿Cuál es el rango que puede variar el capacidad de la máquina 1 sin cambiar la base optima? (10 p)
g) La gerencia está considerando la producción de un nuevo producto P5, el cual requiere 2 horas de la máquina 1 y 10 horas de la máquina 2. ¿Cuál es el mínimo ingreso necesario para que este nuevo producto salga al mercado?

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Pregunta 2.

a) Formulando el problema tenemos

Primal

Max 4 P1 + 6 P2 + 10 P3 + 9 P4
St.
3 P1 + 4 P2 +8 P3 + 6 P4 ≤400
6 P2 + 2 P2 + 5 P3 + 8 P4 ≤400
P1,P2,P3, P4≥ 0

Dual

Min 400 L1 + 400 L2
St.
3 L1 + 6 L2 ≥4
4 L1 + 2 L2 ≥6
8 L1 + 5 L2 ≥10
6 L1 + 8 L2 ≥ 9
L1,L2 ≥ 0

Estandarizando los problemas resolviendo a través de holgura complementaria completamos la tabla óptima y tenemos

	P1	P2	P3	P4	H1	H2	LD
P2	0.75	1	2	1.5	0.25	**0**	**100**
H2	4.5	0	1	5	-0.5	**1**	200
-Z	-0.5	**0**	**-2**	**0**	**-1.5**	**0**	-600

Así, tenemos que P2=100, variable básica y P1=P3=P4=0 no básica. El resultado es 600 el cual maximiza el ingreso, dada las restricciones.
Asimismo, se observa que una variable no básica tiene costo reducido cero, lo cual implica que la solución óptima no es única ya que puede ser variable básica P4.

b) El costo reducido de P3 es -2. Así, el efecto de producir 20 unidades de P3 por error es 20*-2=-40.
c) Sea 4+ Δ el ingreso marginal por P1. El costo reducido restante al final del tablero permanece negativo si -0.5+Δ≤0, lo cual implica Δ≤0.5. Por lo tanto, mientras es ingreso marginal por P1 sea menor que 4.5, las variables basicas del problema óptimo permanece igual.
d) Sea 6+Δ el ingreso marginal por P2. Dado que P2 es básica, debemos ver el impacto que tendría este incremento sobre todas las variables no básica, esto es:
   el vector cB es ahora Cb =(6+Δ , 0) con ΔCb =(Δ , 0)
   C= (-0.5 0 -2 0 -1.5 0); ΔC=(0 Δ 0 0 0 0 0);
   Actualizando los valores tenemos
   $C' = C + \Delta C - \Delta Cb * B^{-1} * A$
   C'=(-0.5, 0, -2, 0,-1.5, 0)-(0.75, 0, 2, 1.5, 0.25, 0) Δ ≤0, se mantiene la base**.** Por lo tanto**,** si el valor del ingreso por P2 es 6 o más la base no cambia.
e) El valor marginal de de incrementar la capacidad de producción de la máquina 1es su precio sombra L1= 1.5.
f) Al incrementar b1=400 a 400 + Δ, tenemos que $b' = b + B^{-1} * \Delta b = (100+0.25\Delta, 200-0.5\Delta)^t \geq 0$ no cambia la base y por lo tanto -400≤ Δ ≤ 400 y así el recurso puede ir desde 0 a 800 sin cambiar la base.

g) Para producir P5 se debe por lo menos contrarrestar el efecto que provocaría en el valor óptimo, es decir el uso de los recursos L1* (2 P5) + L2* (10 P5)= 1.5 (2 P5) + 0 (10 P5) =3 P5. Por lo tanto, si se sea producir P5 el ingreso que genera desde ser a lo menos 3.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 3.- (100 puntos)

En la Región Metropolitana, El intendente de Santiago debe negociar con dos empresas de recolección de residuos sólidos de modo de asegurar el Aseo y Ornato de las comunas, en particular de Santiago Centro, San Miguel y La Reina.

Los costos por tonelada en miles de pesos, las demandas y las capacidades en toneladas asociadas a recolección de residuos por una empresa recolectora desde cada comuna son los siguientes:

	Recolector 1	Recolector 2	**Demanda**
Santiago Centro	14	30	13
San Miguel	13	29	10
La Reina	26	24	8
Capacidad	15	7	

La Reina es donde vive “La Presi” y otras personalidades de gobierno. Por esto, esta comuna tiene prioridad en la satisfacción de su demanda, hecho que se hace notar con un costo asociado por residuos no recolectado el cual asciende a 18 mil pesos por 2 toneladas. El resto de las comunas esta prioridad no existe.

Resuelva el problema de minimizar el costo total del transporte.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 3:

Reescribiendo el problema tenemos

	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad
Recolector 1	14	13	26	15
Recolector 2	30	29	24	7
Recolector F	0	0	9	9
Demanda	13	10	8	

Método de Vogel

añadimos a la tabla una línea de penalización

Costos	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	Penalización
Recolector 1	14	13	26	15	1
Recolector 2	30	29	24	7	5
Recolector F	0	0	9	9	0
Demanda	13	10	8		
Penalización	14	13	15		

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso La Reina.
asignamos al con menor costo de La Reina el máximo posible

asignación	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	no asignado
Recolector 1				15	15
Recolector 2				7	7
Recolector F			8	9	1
Demanda	13	10	8		
no asignada	13	10	**0**		

Como la comuna de La Reina asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando la comuna de La Reina
recalculando las penalizaciones

Costos	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	Penalización
Recolector 1	14	13	26	15	1
Recolector 2	30	29	24	7	1
Recolector F	0	0	9	9	0
Demanda	13	10	8		

Penalización	14	13	

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso Santiago Centro.
asignamos al con menor costo de Santiago Centro el máximo posible el máximo posible
***el máximo posible con los valores no asignados**

Asignación	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	no asignado
Recolector 1				15	15
Recolector 2				7	7
Recolector F	1		8	9	**0**
Demanda	13	10	8		
no asignada	12	10	**0**		

Como la Empresa F asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando la Empresa F
recalculando las penalizaciones

Costos	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	Penalización
Recolector 1	14	13	26	15	1
Recolector 2	30	29	24	7	1
Recolector F	0	0	9	9	
Demanda	13	10	8		
Penalización	16	16			

Seleccionamos la con mayor penalización en este caso Santiago Centro o San Miguel
Decidiremos por San Miguel (arbitrario)
asignamos al con menor costo de San Miguel el máximo posible
***el máximo posible con los valores no asignados**

Asignación	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	no asignado
Recolector 1		10		15	5
Recolector 2				7	7
Recolector F	1		8	9	**0**
Disponible	13	10	8		
no asignada	12	**0**	**0**		

Como la comuna de San Miguel asigno el máximo posible
reescribimos la tabla de penalizaciones tachando la comuna de San Miguel

recalculando las penalizaciones

Costos	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	Penalización
Recolector 1	14	13	26	15	
Recolector 2	30	29	24	7	
Recolector F	0	0	9	9	
Demanda	13	10	8		
Penalización					

Las penalizaciones no podrán ser calculadas pues solo queda 1 columna
asignamos los valores restantes

Asignación	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Capacidad	no asignado
Recolector 1	5	10	0	15	**0**
Recolector 2	7	0	0	7	**0**
Recolector F	1	0	8	9	**0**
Disponible	13	10	8		
no asignada	**0**	**0**	**0**		

Esta solución es factible pero no necesariamente optima

Calculamos los (v_i,u_j) considerando $v_1 = 0$

recuerde que($v_i + u_j - C_{ij}$)$X_{ij} = 0$

Para las variables no básicas calculamos $v_i + u_j - C_{ij}$

$v_i + u_j - C_{ij}$	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	v
Recolector 1			-3	0
Recolector 2		0	15	16
Recolector F		-1		-14
u	14	13	23	

Como existe un $v_i + u_j - C_{ij}$ positivo para una variable no básica
Asignamos el máximo a esta variable
Como aumentamos esta variable en 7 completamos el ciclo

asignación	Santiago Centro	San Miguel	La Reina	Disponible
Recolector 1	5	10	0	15

Recolector 2	**0**	0	**7**	7
Recolector F	**8**	0	**1**	9
Disponible	13	10	8	

Calculamos los (v_i,u_j) considerando $v_1 = 0$

recuerde que$(v_i + u_j - C_{ij})X_{ij} = 0$

Para las variables no básicas calculamos $v_i + u_j - C_{ij}$

$v_i + u_j - C_{ij}$	**Santiago Centro**	**San Miguel**	**La Reina**	**v**
Recolector 1			-3	0
Recolector 2	-15	-15		1
Recolector F		-1		-14
u	14	13	23	

Como todas las soluciones no básicas son negativas
la asignación es optima