UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Introducción

El análisis de sensibilidad es una actividad (casi) obligatoria cuando se está trabajando con cualquier tipo de modelamiento, sobretodo al trabajar con métodos cuantitativos pues estos, al estar basados en abstracciones de la realidad, depende de lo que el observador es capaz de entender.

En este sentido, el análisis de sensibilidad responde a preguntas del tipo **¿Qué pasa si?**. En general, hay muchos tipos de análisis de sensibilidad, desde cambiar las condiciones que se están modelando, hasta cambiar la magnitud de algún parámetro de interés como reducir el tiempo total que se tiene para completar una tarea (restricción de recurso). De esta manera, este análisis es realizado luego de ya tener una solución óptima (para efectos de comparación), por lo que es también llamado análisis post-optimal o análisis ex post.

Por otro lado, en la literatura especializada, existe un concepto que hace referencia al análisis de sensibilidad cuando el modelo formulado es utilizado en *condiciones extremas*, este concepto en cuestión es *optimización robusta*. Es importante notar que este es uno de los posibles significados para optimización robusta, es decir, este también se usa para otros fines.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Problema

Considere una pequeña empresa que produce dos tipos de pintura x_1 y x_2. El proceso de producción requiere tres materias primas M_1, M_2, M_3. La siguiente tabla identifica los requerimiento de cada producto:

Producto	M_1 (ton)	M_2 (ton)	M_3 (ton)	Precio venta ($/u)
x_1	0.4	-	0.6	40
x_2	0.5	0.2	0.3	30
Disponibilidad (ton)	20	5	21	

$$\begin{aligned} \max z &:= 40x_1 + 30x_2 \\ s.a. \quad & 0.4x_1 + 0.5x_2 \leq 20 \\ & 0.2x_2 \leq 5 \\ & 0.6x_1 + 0.3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & 0 & -20/9 \\ -2/3 & 1 & 4/9 \\ -5/3 & 0 & 25/9 \end{pmatrix}$$

$$b^T = (20, 5, 21) \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Óptimo:

$$x_B = \{x_2, h_2, x_1\} \quad c_B = (30, 0, 40) \quad c_B B^{-1} R = (400/9, 100/3)$$

$$x_R = \{h_3, h_1\} \quad c_R = (0, 0) \quad c_R - c_B B^{-1} R = (-400/9, -100/3)$$

Análisis de sensibilidad

En este curso se revisarán cinco tipos de cambios a analizar bajo el esquema de sensibilidad:

1. Cambio en la disponibilidad del recurso, Δb.
2. Cambio en el vector de costos, Δc.
3. Incorporación de nuevas variables, x_{nueva}.
4. Modificación de un coeficiente de la matriz de restricciones, $a'_{i,j} \in A$.
5. Introducción de nuevas restricciones.

Análisis de sensibilidad
1. Cambio en la disponibilidad del recurso, Δb_i.

El nuevo vector de recursos, en la base optimal, está dado por $b' = b + B^{-1}\Delta b$; mientras que el nuevo valor optimal está dado por $z' = z + c_B B^{-1}\Delta b$.

Suponga que la disponibilidad de la materia prima M_1 ha aumentado en una unidad, es decir, $\Delta b = (1,0,0)^T$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & 0 & -20/9 \\ -2/3 & 1 & 4/9 \\ -5/3 & 0 & 25/9 \end{pmatrix} \quad b^T = (20, 5, 21)$$

$$b' = b + B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10/3 & 0 & -20/9 \\ -2/3 & 1 & 4/9 \\ -5/3 & 0 & 25/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/3 \\ 1/3 \\ 70/3 \end{pmatrix}$$

$$z' = z + c_B B^{-1}\Delta b = 1600 + (30, 0, 40) \begin{pmatrix} 10/3 & 0 & -20/9 \\ -2/3 & 1 & 4/9 \\ -5/3 & 0 & 25/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4900/3$$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Análisis de sensibilidad
2. Cambio en el vector de costos, Δc_j.

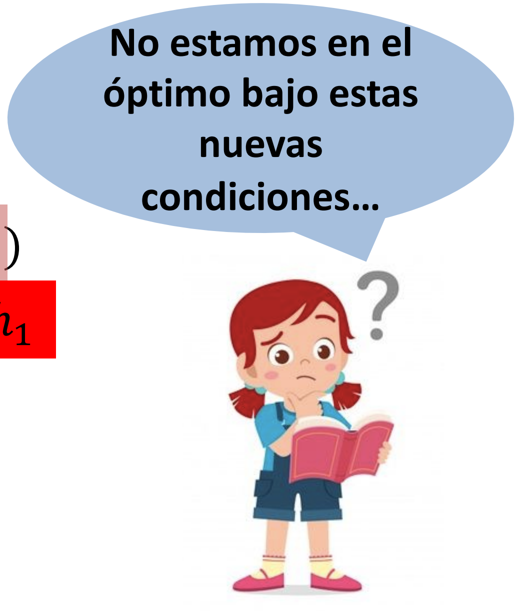
Recordar que el vector de costos está dado por $c = (c_B, c_R)$, por lo que si el nuevo vector se define como $c' = (c_B + \Delta c_B, c_R + \Delta c_R)$, entonces los costos reducidos asociados están dados por $(c_R - c_B B^{-1} R) + (\Delta c_R - \Delta c_B B^{-1} R)$, y $z' = (c_B + \Delta c_B) B^{-1} b = z + \Delta c_B B^{-1} b$.

Suponga que ahora el precio del producto 1 es de 65 \$/u, es decir, $\Delta c_B = (0, 0, 25)^T$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & 0 & -20/9 \\ -2/3 & 1 & 4/9 \\ -5/3 & 0 & 25/9 \end{pmatrix} \qquad b^T = (20, 5, 21)$$

$$(c_R - c_B B^{-1} R) + (\Delta c_R - \Delta c_B B^{-1} R) = (-1025/9, \overset{\geq 0}{25/3})$$

entra h_1



Iterando…

$x_B = \{h_1, h_2, x_1\}$ $\quad c_B = (0, 0, 65)$

$x_R = \{h_3, x_2\}$ $\quad c_R = (0, 30)$

$c_B B^{-1} R = (325/3, 65/2)$

$c_R - c_B B^{-1} R = (-325/3, -25/10)$ $\qquad z' = 2275$

Análisis de sensibilidad
3. Incorporación de nuevas variables, x_{nueva}.

Cuando existen estos cambios, lo que sucede es que se agrega una variable que no pertenece a la base óptima, es decir, la matriz R y el vector c_R sufren cambios.

Suponga que se está discutiendo un nuevo producto, x_3, el cual tendría un precio de venta de 25 y consume 0.4, 0.4 y 0.2 toneladas de M_1, M_2, M_3, respectivamente.

$x_B = \{x_2, h_2, x_1\}$ $c_B = (30, 0, 40)$ $b^T = (20, 5, 21)$

$x_R = \{h_3, h_1, x_3\}$ $c_R = (0, 0, 25)$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$c_B B^{-1} R = (400/9, 100/3, 200/9)$ ≥ 0

$c_R - c_B B^{-1} R = (-400/9, -100/3, 25/9)$

entra x_3

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 2/5 \\ 1 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

No estamos en el óptimo bajo estas nuevas condiciones…

Iterando…

$x_B = \{x_2, x_3, x_1\}$ $c_B = (30, 25, 40)$ $c_B B^{-1} R = (50, 25, 25/2)$

$x_R = \{h_3, h_1, h_2\}$ $c_R = (0, 0, 0)$ $c_R - c_B B^{-1} R = (-50, -25, -25/2)$ $z' = 1612.5$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Análisis de sensibilidad
4. Modificación de un coeficiente, $a'_{i,j} \in A$.

Dependiendo de la variable que sea vea afectada, podría cambiar la base óptima.

Suponga que, por nuevas especificaciones técnicas, ahora producir el producto x_1 se requieren 2/5, 2/5 y 1/5 de la materia prima M_1, M_2, M_3, respectivamente.

$x_B = \{x_2, h_2, x_1\}$ $c_B = (30, 0, 40)$ $b^T = (20, 5, 21)$
$x_R = \{h_3, h_1\}$ $c_R = (0, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & 2/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_B B^{-1} R = (-400, 300)$
$c_R - c_B B^{-1} R = (400, -300)$
< 0

$B^{-1} b = (220, 51, -225)^T$

sale x_1

Iterando…

$x_B = \{x_2, h_1, h_3\}$ $c_B = (30, 0, 0)$
$x_R = \{x_1, h_2\}$ $c_R = (40, 0)$

$c_B B^{-1} R = (60, 150)$
$c_R - c_B B^{-1} R = (-20, -150)$

$z' = 750$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Análisis de sensibilidad
5. Introducción de nuevas restricciones

Este cambio afecta tanto a B como a R (agrega fila(s) a las matrices); además, puede afectar o no la base óptima.

Suponga que ahora ha entrado en vigencia una ley de emisiones contaminantes, la cual permite que cada la empresa tenga una cuota máxima de 100 unidades. El proceso de producción genera 2 y 4 unidades de contaminante por cada producto x_1 y x_2, respectivamente. $(2x_1 + 4x_2 \leq 100 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 + h_4 = 100)$

$x_B = \{x_2, h_2, x_1, h_4\}$ $c_B = (30, 0, 40, 0)$ $b^T = (20, 5, 21, 100)$

$x_R = \{h_3, h_1\}$ $c_R = (0, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 0 & 3/5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = (20, 1, 25, \underbrace{-30}_{<0})^T$$

sale h_4

$c_B B^{-1} R = (400/9, 100/3)$

$c_R - c_B B^{-1} R = (-400/9, -100/3)$

Una solución infactible... simplex dual!!

Análisis de sensibilidad
5. Introducción de nuevas restricciones

Este cambio afecta tanto a B como a R (agrega fila(s) a las matrices); además, puede afectar o no la base óptima.

Suponga que ahora ha entrado en vigencia una ley de emisiones contaminantes, la cual permite que cada la empresa tenga una cuota máxima de 100 unidades. El proceso de producción genera 2 y 4 unidades de contaminante por cada producto x_1 y x_2, respectivamente. ($2x_1 + 4x_2 \leq 100 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 + h_4 = 100$)

Iterando…

$$x_B = \{x_2, h_2, x_1, h_1\} \quad c_B = (30, 0, 40, 0) \quad b^T = (20, 5, 21, 100)$$
$$x_R = \{h_3, h_4\} \quad c_R = (0, 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 0 & 3/5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = (10, 3, 30, 3)^T$$

$$c_B B^{-1} R = (500/9\,, 10/3) \qquad z' = 1500$$
$$c_R - c_B B^{-1} R = (-500/9\,, -10/3)$$

Tarea

Instrucciones: Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min z &:= 9x_1 + 15x_2 \\ s.a. \quad x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

i) Encuentre el óptimo, ii) ¿Qué ocurre con la solución si, en el dual asociado, la disponibilidad del recurso 1 aumenta en ocho unidades?, iii) ¿Qué sucede si, en el dual, u_2 utiliza cuatro unidades del segundo recurso? y, iv) ¿Cuánto puede variar el la disponibilidad del tercer recurso, en el primal, tal que se mantenga la base óptima?

El desarrollo de la tarea es individual y debe ser entregado en hora y fecha especificadas en campus virtual.

Es importante tener en cuenta que en caso de no cumplir tanto con el plazo de entrega esta no será considerada válida.