Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre II Año 2018

Profesor: Iván Derpich - Óscar C. Vásquez

Fecha: 19 de Noviembre 2018

Nombre Alumno: ____

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3.	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos)

Sea un conjunto J de n objetivos de aprendizaje en la materia de matemática. Se sabe teroricamente que cada objetivo de aprendizaje j posee un conjunto de objetivos de aprendizaje predecesores P_j y objetivos de aprendizaje sucesores S_j. Sea Q_j el conjunto de preguntas que permite abordar un objetivo de aprendizaje especifico j.

Por conveniencia, se denota $q(1)$ si la respuesta la pregunta q es correcta y $q(0)$ otro caso. Asuma que existe una gran cantidad de datos disponibles, tal que, es posible estimar la probabilidad condicionada $P(q(1)|r(1))$ -esto es la probabilidad de contestar bien la pregunta q dado que contesto bien la pregunta r -, donde $q \in Q_j$ y $r \in Q_k$ con $k \in S_j$.

a) Considere el problema de maximizar la suma de las probilidades condicionadas, sujeto a que a lo más un objetivo de aprendizaje es sucesor o predecesor de un único obejtivo de aprendizaje y la probabilidad condicionada entre los objetivos de aprendizaje sea mayor a 0,67.

Modele el problema distinguiendo parámetros (5 puntos), variables (10 puntos), función objetivo (5 puntos) y restricciones (20 puntos).

b) Considere el problema de maximizar el minimo probabilidades condicionadas, sujeto a que un objetivo de aprendizaje tiene lo más un objetivo de aprendizaje sucesor y un objetivo de aprendizaje predecesor; y que a lo más un objetivo de aprendizaje es sucesor o predecesor de un par de objetivos de aprendizaje.

Modele el problema distinguiendo parámetros (5 puntos), variables (10 puntos), función objetivo (15 puntos) y restricciones (30 puntos).

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 1

Conjuntos:

J: conjunto de objetivos de aprendizaje en la materia de matemática.

P_j: conjunto de objetivos de aprendizaje predecesores del objetivo de aprendizaje $j \in J$

S_j: conjunto de objetivos de aprendizaje sucesores de del objetivo de aprendizaje $j \in J$

Q_j: conjunto de preguntas que permite abordar un objetivo de aprendizaje especifico $j \in J$.

Parámetros

$P(q(1)|r(1))$: probabilidad condicionada de que la pregunta q sea contestada de forma correcta, denotada por $q(1)$, dado que la pregunta r sea contestada de forma correcta, denotada por $r(1)$, donde $q \in Q_j$ y $r \in Q_k$ con $k \in S_j$ y $j \in J$.

Variables:

x_{jk} , $j, k \in J, j \neq k$ variable binaria que toma el valor 1 si la pregunta p asociada al objetivo de aprendizaje j es predecesor de la pregunta p' asociada al objetivo de aprendizaje k ∈S_j y 0 en otro caso.

Modelo 1

Función Objetivo

$$maximizar \sum_{j \in J} \sum_{q \in Q_j} \sum_{r \in Q_k,, k \in S_j} P(q(1)|r(1)) x_{jk} \tag{1.1}$$

Restricciones

$$\sum_{k \in S_j} x_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \tag{2.1}$$

$$\sum_{k \in P_j} x_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \tag{3.1}$$

$$\sum_{q \in Q_j} \sum_{r \in Q_k,, k \in S_j} P(q(1)|r(1)) x_{jk} \geq \frac{0,65}{|Q_j|} \ \forall j, k, j \in J, k \in S_j \tag{4.1}$$

$$x_{jk} \in \{0,1\} \ \forall j, k \in J, j \neq k \tag{5.1}$$

El objetivo (1.1) corresponde a maximizar la suma de las probilidades condicionadas. El conjunto de restricciones (2.1) y (3.1) verifica que a lo más un objetivo de aprendizaje es sucesor o predecesor de un único obejtivo de aprendizaje, respectivamente. El conjunto de restricciones (4.1) impone que la probabilidad condicionada entre los objetivos de aprendizaje sea mayor a 0,67, y por último el conjunto de restricciones (5.1) fijan el dominio de las variables.

Modelo 2

Sea S^{j} el conjunto de objetivos de aprendizaje donde el objetivo de aprendizaje j ∈ J es sucesor y P^j el conjunto de objetivos de aprendizaje donde el objetivo de aprendizaje j ∈ J es predecesor. Por conveniencia, definimos Z una variable auxiliar

Función Objetivo

$$\text{maximizar Z} \tag{1.2}$$

Restricciones

$$\sum_{k \in \mathrm{S}_j} x_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \tag{2.2}$$

$$\sum_{k \in \mathrm{P}_j} x_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \tag{3.2}$$

$$\sum_{k \in P^j} x_{kj} \leq 2 \quad \forall j \in J \tag{3.2}$$

$$\sum_{k \in S^j} x_{jk} \leq 2 \quad \forall j \in J \tag{4.2}$$

$$\sum_{q \in Q_j, j \in \mathrm{J}} \sum_{r \in \, Q_k,, k \in \mathrm{S_j}} P(q(1)|r(1)) x_{jk} \leq \mathrm{Z} \ \ \forall j,k,j \in J, k \in S_j \tag{5.2}$$

$$x_{jk} \in \{0,1\} \ \ \forall j,k \in J, j \neq k \tag{6.2}$$

El objetivo (1.2) corresponde a maximizar el minimo probabilidades condicionadas. El conjunto de restricciones (2.2) y (3.2) verifica que a lo más un objetivo de aprendizaje es sucesor o predecesor de un único obejtivo de aprendizaje, respectivamente. El conjunto de restricciones (4.2) y (5.2) que a lo más un objetivo de aprendizaje es sucesor o predecesor de un par de objetivos de aprendizaje, y por último el conjunto de restricciones (6.2) fijan el dominio de las variables.

Problema 2.- (100 puntos)

Considere el siguiente problema:

$Min\ W = 20x_1 + 5x_2 - 21x_3$

Sujeto a:

R1) $0{,}4x_1 - 0{,}6x_3 \geq 40$

R2) $-0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 \leq -30$

$x_1, x_2, -x_3 \geq 0.$

a) Resuelva el modelo utilizando algún método que utilize variables artificiales. (30 puntos)
b) Obtenga el modelo dual y resuelva este a partir de la solución obtenida del problema primal. (30 puntos)
c) Suponga el valor del coeficiente de la variable x_1 en la funcion objetivo se incrementa en 1. ¿Cúal es la solución óptima? ¿cambian las variables básicas de la solución? (20 puntos)
d) Suponga que el valor de recurso asociado a la restriccion R1) se incrementa en 25. ¿Cúal es la solución óptima? ¿cambian las variables básicas de la solución? (20 puntos).

Pauta Problema 2:

a) Modelo Estandarizado

$Max\ Z = -20x_1 - 5x_2 - 21x'_3$

Sujeto a:

R1) $0{,}4x_1 + 0{,}6x_3' - S_1 = 40$

R2) $0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3' - S_2 = 30$

R3) $x'_3 = -x_3$

$x_1, x_2, x_3' \geq 0.$

Considerando variables auxiliares se tiene:

$Max\ Z = -20x_1 - 5x_2 - 21x_3' - M(A_1 + A_2)$

Sujeto a:

R1) $0{,}4x_1 + 0{,}6x_3' - S_1 + A_1 = 40$

R2) $0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3' - S_2 + A_2 = 30$

R3) $x'_3 = -x_3$

$x_1, x_2, x_3'\ , A_1, A_2 \geq\ 0.$

Note que aquí solo es considerado x_3'para efectos de simplificar el cálculo, utilizando la restricción $x_3' - x_3$=0 solo al obtener el valor óptimo de x_3'.

Por dos fases o por gran M se tiene:

La solución óptima es $\boldsymbol{Z = -1600, x_1 = 100/3, x_2 = 0, x_3' = 400/9}$, y entonces $\boldsymbol{x_3 = -400/9}$

b) El problema dual es:

Min W =40 y1+ 30 y2

s.a.

R1) 0,4 y1+ 0,5 y2 ≥ -20

R2) 0,2 y2 ≥ -5

R3) 0,6 y1+ 0,3 y2 ≥ -21

y1,y2≤ 0

Utilizando

Dualidad Fuerte:

40 y1*+ 30*y2=-1600

.

Holgura complementaria:

0,4 y1+-0,5 y2*=-20.

0,6 y1*+0,3y2*=-21.

Esto implica: y1*=-25, y2*=-20. .

c) Para realizar el analisis de sensibilidad , reescribimos el problema estandarizandolo y tenemos el problema equivalente siguiente.

Max B=40 T1+ 30 T2

s.a.

R1) 0,4 T1+0,5T2+H1=20

R2) 0,2 T2 +H2= 5

R3) 0,6 T1+ 0,3 T2+H3=21

T1=-y1, T2=-y2

T1,T2≥0

Con este modelo y los valores optimales obtenidos, tenemos que el simplex tabular en la iteración donde encuentra la solución óptima es:

VB	T1	T2	H1	H2	H3	
T2	0	1	10/3	0	-20/9	20
H2	0	0	-2/3	1	4/9	1
T1	1	0	-5/3	0	25/9	25
-B	0	0	-100/3	0	-400/9	-1600

Y procedemos a resolver la pregunta ¿Cúal es la solución óptima? ¿cambian las variables básicas de la solución? **al incrementar** valor del coeficiente de la variable x_1 en la funcion objetivo se incrementa en 1. Aca notamos que el incremento antes mencioando es equivalente en el problema estandarizado del dual a incrementar el recurso de la primera restricción en una unidad.

Asi obtenemos que la solución optima pasa de 1600 a 4900/3, T1 de 20 a 70/3, H2 de 1 a 1/3 y T1 de 25 a 70/3. No cambiando las variables básicas de la solución (solo sus valores)

El desarrollo de la solución está en las diapositivas del curso, "cambio en recursos" , primer ejemplo.

d) Utilizando el tablero obtenido de la pregunta c) y notando que que el incremento en 25 en la primera restricción del problema original es equivalnte a aumentar 25 en el coefiecinte de la primera variable del el problema estandarizado del dual.

Asi obtenemos que la soluciòn optima pasa de 1600 a 2275, T1 de 35, H2 de 1 a 5 y H1 de 0 a 6; con lo cual si cambia la base de la solución ópitma.

El desarrollo de la solución está en las diapositivas del curso, "cambio en costos", segundo ejemplo.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Problema 3. (100 puntos):

Considere el siguiente problema:

Max Z= $p1\ y1 + p2\ y2 + p3y3 + p4\ y4 + p5\ y5 + \ldots pn\ yn$

s.a.

$w1\ y1 + w2\ y2 + w3\ y3 + w4\ y4 + w5\ y5 + \ldots . + wn\ yn \leq b$

$b \geq 0$, $wi \geq 0$, $pi \geq 0$ para todo i=1,….,n; wi, pi, b constantes

$yi \geq 0$ para todo i=1,….,n; yi variable

a.- Demuestre que el problema propuesto es equivalente a un problema de Min Max (50 puntos)

b.- Resuelva el problema. (50 puntos)

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Pauta Problema 3:

a) Consideramos el problema dual

Min D= b x

s.a.

wi x ≥ pi para todo i, i =1,...,n

x≥0.

El intervalo (∞, $\max_i$ {pi/wi}] define el espacio de soluciones factible para la variable x, esto es el valor de la variable x donde todas las restricciones del problema son respectadas. Asi, el problema es redefinido como

Min D= b x

s.a.

∞>x ≥$\max_i$ {pi/wi}

Por lo tanto, el problema es equivalente a Min Max {b p1/w1, b p2/w2, …,b pn/wn}

b) Las restricciones del problema dual tiene solo una restricción saturada, definida por x= $\max_i$ {pi/wi}. Así, tenemos que el valor de la función objetivo de la solución óptima es D*=b $\max_i$ {pi/wi} y por la propiedad de dualidad fuerte sabemos que el valor de función objetivo de la solución óptima del problema primal Z* es igual al valor de función objetivo de la solución óptima del problema dual D*, esto es Z*= D*.

Al aplicar el teorema de holgura complementaria sabemos que (wix1*-pi)yi*=0, y entonces sabemos que yi* =0 para todo i ≠arg $\max_i$ {pi/wi} y para i* =arg $\max_i$ {pi/wi}, yi* tenemos que Z*= pi* yi*= D*= b pi*/wi* entonces,yi*= b/wi*.