UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Optimización I

Luis Rojo-González
luis.rojo.g@usach.cl
Departamento de ingeniería industrial,
Universidad de Santiago, Chile

Ingeniería civil industrial

Problema 1

Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de, al menos, uno de tres nuevos modelos de juguetes para su posible inclusión en la próxima campaña de navidad. La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirán los juguetes. El número de horas que se necesita para producir cada juguete en cada planta, el costo de instalación de cada planta y la utilidad de cada juguete se presenta a continuación:

	Juguete 1	Juguete 2	Juguete 3	Costo instalación (MM$)	Disponibilidad (horas/día)
Planta 1	5	4	6	25,000	500
Planta 2	4	2	2	35,000	600
Planta 3	3	3	2	30,000	630
Utilidad	10	15	13		

Modele el problema tal que se maximice la utilidad.

Problema 1

Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de, al menos, uno de tres nuevos modelos de juguetes para su posible inclusión en la próxima campaña de navidad. La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirán los juguetes. El número de horas que se necesita para producir cada juguete en cada planta, el costo de instalación de cada planta y la utilidad de cada juguete se presenta a continuación:

Conjuntos:
I ≔ Juguetes, $i = \{1, 2, 3\}$; J ≔ planta,$j = \{1, 2, 3\}$
Parámetros:
$a_{i,j}$ ≔ números de horas para producir un juguete $i \in I$ en planta $j \in J$.
c_j ≔ costo de instalación de planta $j \in J$.
d_j ≔ disponibilidad de horas en planta $j \in J$.
u_i ≔ Utilidad de juguete $i \in I$.
Variables:
$x_{i,j}$ ≔ Unidades diarias de juguete $i \in I$ a producir en planta $j \in J$.
y_j ≔ 1, si se instala planta $j \in J$.
z_i ≔ 1, si se produce el juguete $i \in I$.

Problema 1

Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de, al menos, uno de tres nuevos modelos de juguetes para su posible inclusión en la próxima campaña de navidad. La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirán los juguetes.

$$\max z := \sum_{i \in I} u_i x_i - \sum_{j \in J} c_j y_j \qquad (1)$$

$$s.a. \quad \sum_{i \in I} z_i \geq 1 \qquad (2)$$

$$x_i \leq M z_i, \qquad \forall i \in I \qquad (3)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = 1 \qquad (4)$$

$$\sum_{i \in I} a_{i,j} x_i \leq d_j + M(1 - y_j), \qquad \forall j \in J \qquad (5)$$

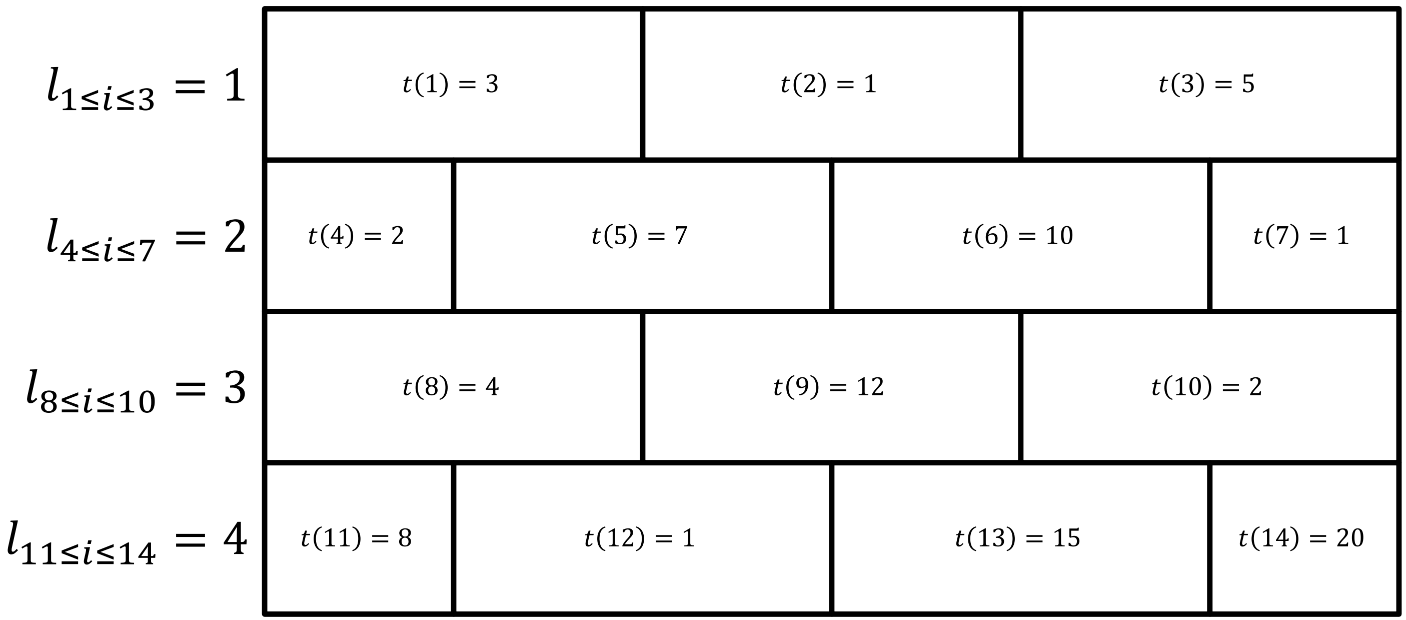
$$x_j \in Z_+, y_j \in \{0,1\} \forall j \in J, z_i \in \{0,1\} \forall i \in I \qquad (6)$$

Problema 2

En la mina ha habido un derrumbe y hay personas atrapadas. Gracias al equipo de ingeniería, se ha podido mapear el terreno identificando ciertas rocas que podrían ser extraídas para poder hacer el rescate. El mapa del terreno a explotar es como sigue, donde también aparecen los tiempos asociados de extraer tal roca. Es importante notar que para sacar una roca es necesario sacar las dos anteriores, es decir, si saco la roca 6 debo sacar tanto la 2 como la 3. Formule un modelo de optimización tal que permita seleccionar las rocas a extraer para rescatas a las personas lo antes posible!!

$l_{1\leq i\leq 3} = 1$	$t(1) = 3$	$t(2) = 1$	$t(3) = 5$	
$l_{4\leq i\leq 7} = 2$	$t(4) = 2$	$t(5) = 7$	$t(6) = 10$	$t(7) = 1$
$l_{8\leq i\leq 10} = 3$	$t(8) = 4$	$t(9) = 12$	$t(10) = 2$	
$l_{11\leq i\leq 14} = 4$	$t(11) = 8$	$t(12) = 1$	$t(13) = 15$	$t(14) = 20$

Problema 2



Conjuntos:

I := Rocas, $i = \{1, \ldots, 14\}$

Parámetros:

t_i := Tiempo para extraer roca $i \in I$.

l_i := Nivel en el que se encuentra la roca $i \in I$.

Variables:

x_i := 1, si se extrae roca $i \in I$.

Por que quiero rescatarlos lo antes posible!

$$\min \sum_{i\in I} t_i x_i$$

Problema 2

$l_{1 \leq i \leq 3} = 1$	$t(1) = 3$	$t(2) = 1$	$t(3) = 5$	
$l_{4 \leq i \leq 7} = 2$	$t(4) = 2$	$t(5) = 7$	$t(6) = 10$	$t(7) = 1$
$l_{8 \leq i \leq 10} = 3$	$t(8) = 4$	$t(9) = 12$	$t(10) = 2$	
$l_{11 \leq i \leq 14} = 4$	$t(11) = 8$	$t(12) = 1$	$t(13) = 15$	$t(14) = 20$

Rocas del nivel 2

$$x_4 \leq x_1$$
$$2x_5 \leq x_1 + x_2$$
$$2x_6 \leq x_2 + x_3$$
$$x_7 \leq x_3$$

Rocas del nivel 3

$$2x_8 \leq x_4 + x_5$$
$$2x_9 \leq x_5 + x_6$$
$$2x_{10} \leq x_6 + x_7$$

Rocas del nivel 4

$$x_{11} \leq x_8$$
$$2x_{12} \leq x_8 + x_9$$
$$2x_{13} \leq x_9 + x_{10}$$
$$x_{14} \leq x_{10}$$

Salida!!

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1$$

ó $=$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Problema 3

Considere el problema de localización dado por

$$\begin{aligned}
\max \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{i,j}y_{i,j} - \sum_{j\in N} f_j x_j \\
s.a. \quad \sum_{j\in N} y_{i,j} = 1, \qquad & \forall i \in M \\
y_{i,j} \le x_j, \qquad & \forall i \in M, j \in N \\
x \in \{0,1\}^n, y \in \{0,1\}^m
\end{aligned}$$

Utilice la relajación lagrangiana para obtener el óptimo de este problema.

Es claro ver que una relajación está dada por

$$\begin{aligned}
z_{LR}(\lambda) &:= \max_{\substack{y_{i,j}\le x_j \\ x\in\{0,1\}^n, y\in\{0,1\}^m, \lambda\in R}} \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{i,j}y_{i,j} - \sum_{j\in N} f_j x_j + \sum_{i\in M}\left(1-\sum_{j\in N} y_{i,j}\right)\lambda_i \\
&:= \max_{\substack{y_{i,j}\le x_j \\ x\in\{0,1\}^n, y\{0,1\}^m, \lambda\in R}} \sum_{i\in M}\sum_{j\in N}(c_{i,j}-\lambda_i)y_{i,j} - \sum_{j\in N} f_j x_j + \sum_{i\in M}\lambda_i
\end{aligned}$$

Problema 3

Es claro ver que una relajación está dada por

$$z_{LR}(\lambda) := \max_{\substack{y_{i,j} \leq x_j \\ x\in\{0,1\}^n, y\in\{0,1\}^m, \lambda\in R}} \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{i,j} y_{i,j} - \sum_{j\in N} f_j x_j + \sum_{i\in M}\left(1 - \sum_{j\in N} y_{i,j}\right)\lambda_i$$

$$:= \max_{\substack{y_{i,j} \leq x_j \\ x\in\{0,1\}^n, y\{0,1\}^m, \lambda\in R}} \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} (c_{i,j} - \lambda_i) y_{i,j} - \sum_{j\in N} f_j x_j + \sum_{i\in M} \lambda_i$$

Entonces, al ser un problema de maximización se tiene que las variables $y_{i,j}$ y x_j están dadas por:

$$y_{i,j}(\lambda) = \begin{cases} 1, si\ c_{i,j} - \lambda_i > 0\ y \sum_{l} (c_{l,j} - \lambda_l)^+ > f_j \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$x_j(\lambda) = \begin{cases} 1, si \sum_{l} (c_{l,j} - \lambda_l)^+ > f_j \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\boxed{z_{LR}^* = \sum_{j\in N}\left(\sum_{i\in M} (c_{i,j} - \lambda_i)^+ - f_j\right)^+ + \sum_{i\in M} \lambda_i}$$

Tarea

Instrucciones: Implemente (Excel, AMPL ó GAMS) el Problema 1 de esta presentación y entregue una respuesta de no más de media plana en una hoja tamaño carta, incluya la solución como una tabla indicando las variables y cómo le diría a alguien que no sabe leer este tipo de resultados lo que debe hacer, es decir, i) cuánto ganará, ii) qué planta debe instalar y, iii) cuánto debe ser el volumen de producción de cada juguete.

Adjunto su solución en la plataforma uvirtual en fecha y hora indicadas.

Es importante tener en cuenta que en caso de no cumplir tanto con el plazo de entrega esta no será considerada válida.