Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial

Optimización I
Ingeniería Civil Industrial, 2do Semestre 2020
PEP 1

Profesor: Luis Rojo-González **Fecha:** 23 de noviembre de 2020
Ayudante: Franco Pardo

Pregunta 1 (100 puntos)

Una compañía telefónica desea instalar antenas de comunicaciones para dotar de servicio a diversas localidades en las que existe demanda. Las posibles ubicaciones para las antenas son las propias localidades, pero teniendo en cuenta que el radio de cobertura de las antenas es de 11 km. una antena situada en una localidad dotaría asimismo de servicio a todas las localidades cuya distancia a la localidad en la que se sitúa la antena no supere los 11 km. El grafo adjunto representa la topología de la zona de estudio. Los nodos se corresponden con las localidades y los valores sobre las aristas representan las distancias entre ellas. Cuando no existe un arco conectando directamente dos localidades, su distancia es la del camino mínimo en el grafo entre ellas (p. ej. La distancia entre A y E es 21 que se corresponde con el camino A-D-E).

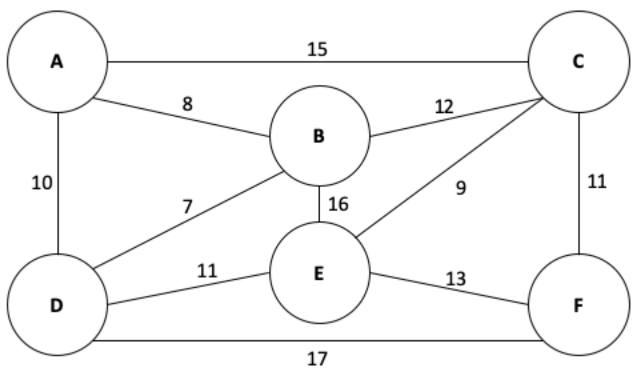

Figure 1: Topología de la zona de estudio.

(100 puntos) Formula el problema anterior de tal manera de entregar servicio a todas las localidades de la zona.

Solución Considere el conjunto $\mathcal{J}$ de localidades. Sea R_j el conjunto de localidades que recibirían el servicio si se instala una antena en la localidad $j \in \mathcal{J}$. Entonces se tiene: $R_A = \{A, B, D\}$, $R_B = \{A, B, D\}$, $R_C = \{C, E, F\}$, $R_D = \{A, B, D, E\}$, $R_E = \{C, D, E\}$, $R_F = \{C, F\}$. De esta manera, considerando y_j igual a 1 si se instala una antena en la localidad $j \in \mathcal{J}$, 0 en otro caso. La formulación es[1]

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} y_j & \\
s.a. \quad & \sum_{j \in R_i} y_j \geq 1 & \forall i \in \mathcal{J} \\
& y_j \in \{0, 1\} & \forall j \in \mathcal{J}
\end{aligned}
$$

[1]Nota: Si el modelo se expresa de forma extensiva también será considerado correcto.

Pregunta 2 (100 puntos)

Considera el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
min \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 && (1)\\
s.a. \quad & 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 10 && (2)\\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 && (3)\\
& x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, 4 && (4)
\end{aligned}
$$

Considere la relajación lagrangiana resultante de incorporar a la función objetivo la restricción (2).

1. (80 puntos) Estudie la solución de los subproblemas para los distintos valores de $u \geq 0$.
2. (20 puntos) ¿Cuál es la solución óptima del dual?

Solución

1. Se tiene que, para $u \geq 0$

$$
\begin{aligned}
L(u) = \quad & 10u + min\left((2-7u)x_1 + (2-6u)x_2 + (1-4u)x_3 + (1-5u)x_4\right) && (5)\\
s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 && (6)\\
& x \in \{0, 1\}^4 && (7)
\end{aligned}
$$

entonces, dado que se requiere que exactamente dos variables tomen el valor 1 y que el problema es de minimización, es claro ver que son aquellas dos variables con menor aporte a la función objetivo las que se deben considerar. Luego, primero se deben conocer los puntos de quiebre

$$
\begin{aligned}
1-5u \leq 1-4u, &\quad u \geq 0\\
2-7u \leq 2-6u, &\quad u \geq 0\\
1-5u \leq 2-7u, &\quad u \leq 1/2\\
1-4u \leq 2-7u, &\quad u \leq 1/3\\
2-6u \leq 1-4u, &\quad u \geq 1/2
\end{aligned}
$$

por lo que se tiene las transiciones

$$
\begin{aligned}
1-5u \leq 1-4u \leq 2-7u \leq 2-6u, &\quad 0 \leq u \leq 1/3\\
1-5u \leq 2-7u \leq 1-4u \leq 2-6u, &\quad 1/3 \leq u \leq 1/2\\
2-7u \leq 1-5u \leq 2-6u \leq 1-4u, &\quad 1/2 \leq u \leq 1\\
2-7u \leq 2-6u \leq 1-5u \leq 1-4u, &\quad u \geq 1
\end{aligned}
$$

y entonces, $x(u)$ esta dado por:

$$
\begin{aligned}
(0,0,1,1), &\quad 0 \leq u \leq 1/3\\
(1,0,0,1), &\quad 1/3 \leq u \leq 1\\
(1,1,0,0), &\quad u \geq 1
\end{aligned}
$$

finalmente, la solución del lagrangiano está dado por

$$\begin{aligned} 2+u, &\quad 0 \le u \le 1/3 \\ 3-2u, &\quad 1/3 \le u \le 1/2 \\ 4-3u, &\quad u \ge 1 \end{aligned}$$

2. La solución óptima es cuando $u^* = 1/3$, con lo que $L(u^*) = 7/3$.

Pregunta 3 (100 puntos)

Considere el siguiente problema

$$\begin{aligned} max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 && (8) \\ s.a. \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le 20 && (9) \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \le 90 && (10) \\ & x_i \ge 0 && (11) \end{aligned}$$

1. (10 puntos) Resuelva el problema dual y, asumiendo dualidad fuerte, obtenga la solución del problema primal.
2. (90 puntos) Desarrolle los siguientes análisis en el problema dual (notar que estos cambios están referidos al primal):
   a) (15 puntos) Cambia el primer recurso a 30.
   b) (15 puntos) Cambia el segundo recurso a 70.
   c) (15 puntos) El coeficiente de la tercera variable en la función objetivo ahora es 8.
   d) (15 puntos) El coeficiente de la segunda variable en la función objetivo ahora es 6.
   e) (15 puntos) Se introduce una nueva variable al modelo con coeficiente 10 en la función objetivo y con coeficientes 3 y 5 en la primera y segunda restricción, respectivamente.
   f) (15 puntos) Se incluye una nueva restricción: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 100$.

Solución

1. El dual está dado por

$$\begin{aligned} min \quad & 20u_1 + 90u_2 \\ s.a. \quad & -u_1 + 12u_2 \ge -5 \\ & u_1 + 4u_2 \ge 5 \\ & u_1 + 10u_2 \ge 13 \\ & u_j \ge 0 \end{aligned}$$

   en donde la solución óptima está dada por el vector $u^* = (0, 13/10)$ con un valor objetivo de 117. Luego, asumiendo dualidad fuerte, se tiene: i) $12x_1+4x_2+10x_3 = 90$, ii) $-5x_1+5x_2+13x_3 = 117$ y, iii) dado que la tercera restricción del dual está activa, entonces se sabe que $x_1 = x_2 = 0$. Entonces el vector solución del primal es $x^* = (0, 0, 9)$.

2. a) La solución no cambia.
   b) La solución no cambia.
   c) El vector solución es ahora $u^* = (3, 1/2)$ y la función objetivo tiene un valor de 105.

d) El vector solución es ahora $u^* = (4/3, 7/6)$ y la función objetivo tiene un valor de 395/3.

e) Se agrega la restricción (al dual) $3u_1 + 5u_2 \geq 10$. El vector solución es ahora $u^* = (7/5, 29/25)$ y la función objetivo tiene un valor de 132,4.

f) Se agrega $100u_3$, $2u_3$, $3u_3$, $5u_3$ a la función objetivo, restricción 1, 2 y 3, respectivamente. El vector solución es $u^* = (0, 13/10, 0)$ y la función objetivo tiene un valor de 117.