Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre II Año 2017

Profesor: Iván Derpich, Óscar C. Vásquez
Fecha: 2 de octubre 2017

Nombre Alumno: ____

	Puntaje
Pregunta 1:	
Pregunta 2:	
Pregunta 3.	
Puntaje Total:	

Problema 1.- (100 puntos)

Considere un conjunto J de n actividades. Cada actividad $j \in J$ posee un tiempo de duración $p_j \in N$, un peso $w_j \in Q$ y un tiempo de vencimiento común $d \in N$. La máquina puede procesar varios trabajos, pero solo puede trabajar un trabajo a la vez de principio a fin, es decir, la máquina no puede realizar dos o más trabajos al mismo tiempo, ni puede interrumpir un trabajo para comenzar otro. Sea $w_j| C_j - d|$ la penalización por adelanto-tardanza ponderada de la actividad $j \in N$, donde C_j es el tiempo de finalización de la actividad $j \in N$. El objetivo del problema es minimizar la máxima suma total de las penalizaciones ponderadas de las actividades.

Modele el problema distinguiendo parámetros (10 puntos), variables (20 puntos), función objetivo (20 puntos) y restricciones, describiéndolas (50 puntos)

Pauta Problema 1

Parámetros

J: Conjunto de n actividades.

$p_j \in N$: tiempo de duración de la actividad $j \in J$

$w_j \ \in Q$: peso de de la actividad $j \in J$

$d \in N$: tiempo común de vencimiento

Variables

x_{ij} , $i, j \in J$ variable binaria que toma el valor 1 si la actividad i es realizada ante que la actividad $j \neq i$ y 0 en otro caso

C_j $j \in J$, tiempo de finalización de la actividad j

P_j $j \in J$, Penalización adelanto de la actividad j

Z, Variable auxiliar para representar la máxima suma de penalizaciones ponderada en las máquinas.

Objetivo

$$[\text{MIN}]\ Z \tag{1}$$

Restricciones

$$1 \leq x_{ij} + x_{jk} + (1 - x_{ik}) \leq 2 \quad \forall i, j, k \in J \tag{2}$$

$$\sum_{i \in J} x_{ij}\, p_i + p_j = C_j \quad \forall j \in J \tag{3}$$

$$P_j \geq C_j - d \quad \forall j \in J \tag{4}$$

$$P_j \geq d - C_j \quad \forall j \in J \tag{5}$$

$$Z \geq P_j \quad \forall j \in J \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ , Z, P_j, C_j \geq 0\ , \forall\ i, j \in J, \tag{7}$$

El objetivo (1) corresponde a minimizar la suma total de las tardanzas ponderadas de las actividades. El conjunto de restricciones (2) verifica el orden entre las actividades, el conjunto de restricciones (3) definen el tiempo de finalización de las actividades y el conjunto de restricciones (4) y (5) define la penalización de la actividad. El conjunto de restricciones (6) definen la máxima penalización de las actividades. Por último el conjunto de restricciones (7) fijan la naturaleza del dominio de las variables.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre II Año 2017

Nombre Alumno: ______________________________________

Problema 2.- (100 puntos)

Problema 2a (30 puntos). Considere el siguiente problema

$$[\text{MAX}]\ Z = -4\, x_1 + x_2 + 5x_3$$

Sujeto a

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq\ 10$$

$$\text{-}5x_1 + 9x_2 + x_3 \leq 20$$

$$\text{-}x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Considerando que el problema anterior es el "problema primal", presente el problema dual, resuelva y luego, incorporare una o más restricciones en el problema dual tal que tenga infinitas soluciones, verificándolo.

Problema 2b (50 puntos). Demuestre que el problema

$$[\text{MAX}] \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} c_i x_i \qquad (1)$$

Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \quad \forall j$ (2)

$$a_{ij}, b_j, c_i \in N, \forall i, j \text{ constantes } \ x_i \geq 0\ , \forall i \text{ variables} \qquad (3)$$

Tiene una solución óptima como punto extremo. Asuma que el problema admite por lo menos una solución factible.

Problema 2 c. (20 puntos) Muestre a través de un ejemplo que si un problema de programación lineal admite por lo menos una solución factible, a lo menos una solución óptima es definida por un punto extremo.

Pauta Pregunta 2

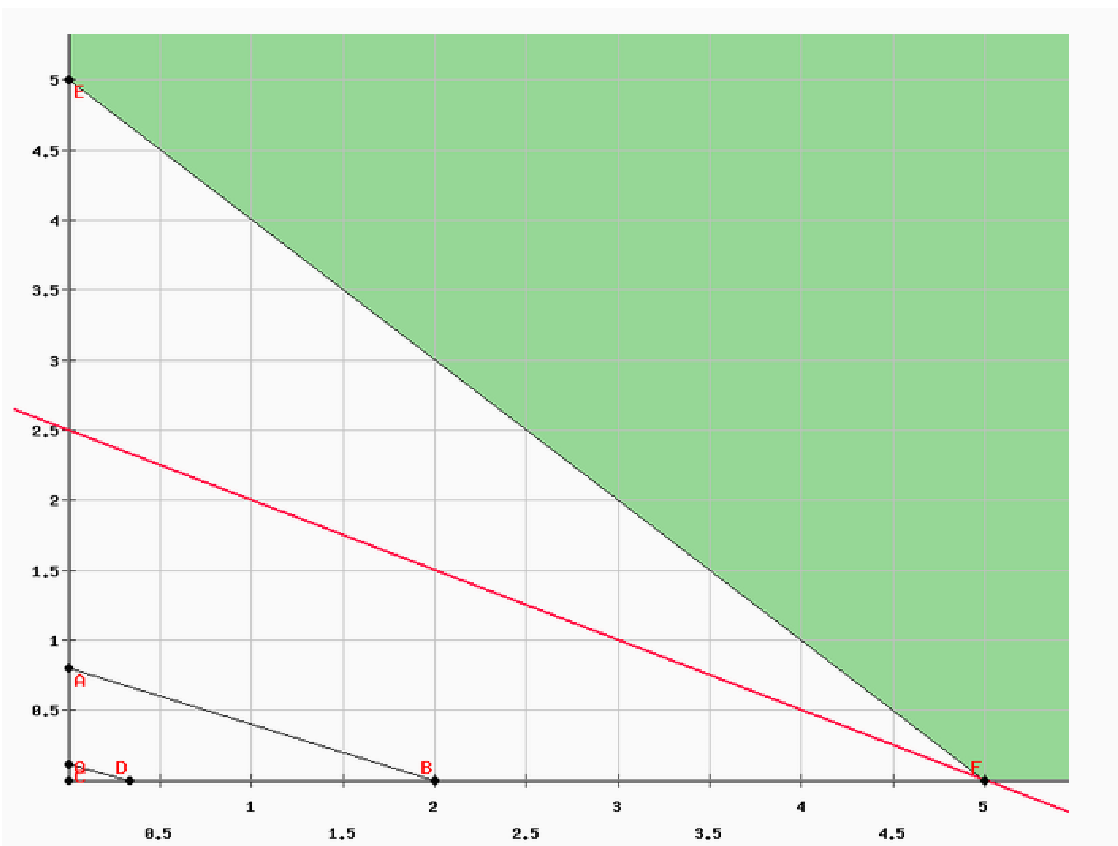
a) El problema dual es:

$$[\mathrm{MIN}]\ Z = 10y_1 + 20y_2$$

Sujeto a

$$-2y_1 - 5y_2 \leq -4$$
$$3y_1 + 9y_2 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 \geq 5 \qquad (1)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Por método gráfico es fácil ver que solo la restricción (1) domina todas las otras restricciones con lo cual la solución óptima es $y_1 = 5$ tal como muestra la figura



Para obtener un problema con infinitas soluciones basta con definir la siguiente restricción

$y_1 + 2y_2 \geq 5$, con lo cual la recta mapea la función objetivo y cualquier punto que satisfaga en iguala esta restricción tiene el mismo valor objetivo.

b) La prueba es por contradicción. Considerando el problema definido b) y asumiendo que existe una solución factible del problema, reescribimos este tal que

$$[\mathrm{MAX}] \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Sujeto a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + H\_j \leq b_j \quad \forall j$

$$a_{ij}, b_j, c_i \in N, \forall i, j \text{ constantes } H_j, x_i \geq 0\,, \forall i \forall_j \text{ variables}$$

Sin pérdida de generalidad asumimos m restricciones $m \leq n$ y así una solución extrema es definida por un subconjunto de m variables de un total de $n + m$ (estas incluyes las x's y las H's).

Supongamos que existe una solución que no es punto extremo: A) si la solución es definida por menos de m variables el sistema de ecuaciones definido no tendría solución, lo cual contradice el hipótesis de factibilidad problema. B) si la solución es definida por más de m variables, entonces el sistema de ecuaciones tiene una variable que puede ser escrita como combinación lineal, así uno podría modificar el valor de una variable función de aquellas que la definen como combinación lineal incrementando el valor objetivo, lo cual contradice el supuesto de optimalidad

c) Considere el problema $[MAX]\ y_1$ sujeto a $2y_1 \leq 4$, y entonces la restricción se puede escribir como $2y_1 + H_1 = 4$, en este caso la solución debe tener una variable con valor, y si tuviera $H_1 \neq 0$, siempre se podría incrementar y_1 tal que la función objetivo tuviese un valor mayor.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento Ingeniería Industrial

Optimización I

PEP I Semestre II Año 2017

Nombre Alumno: ____

Problema 3. (100 puntos):

Considere el siguiente problema (P1) .

$$\begin{aligned} &[MIN] \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 \\ &2\,y_1 + \ 2\,y_2 \geq c_1 = 2 \\ &2\,y_1 \ + \ y_2 \ \ \geq c_2 = 4 \\ &b_1 = 8, b_2 = 6, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema (P1) y su problema dual, construyendo el tablero óptimo de este modelo **(20 ptos)**.

Analize la nueva solución óptima del problema (P1) obtenida al pasar de $c_2 = 4$ a $c_2{}' = 8$ **(20 ptos)**.

Analice la nueva solución óptima del problema (P1) obtenida al incorporar una nueva variable y_3 con $a_{31} = 6$, $a_{23} = 2$ y $b_3 = 12$ **(40 ptos)**.

Analice la nueva solución óptima del problema (P1) obtenida al pasar de b_1 =8 a $b_1{}' = 9$ **(20 ptos)**.

a)

Modelo Dual

[MAX] $2x_1 + 4x_2$

Sujeto a

$$2\,x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$2\,x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0\,,$$

Modelo dual estandarizado

[MAX] $2x_1 + 4x_2$

Sujeto a

$$2\,x_1 + 2x_2 + H_1 = 8$$
$$2\,x_1 + x_2 + H_2 = 6$$
$$H_1, H_2, x_1, x_2 \geq 0\,,$$

Así, el tablero óptimo es del problema dual es:

	x_1	x_2	H_1	H_2	
x_2	1	1	1/2	0	4
H_2	1	0	-1/2	1	2
-Z	-2	0	-2	0	-16

Mientras que la solución del óptimo en el problema primal es

	y_1	y_2	A_1	A_2	
y_1	1	1/2	0	-1/2	2
A_1	0	-1	1	-1	2
W	0	-4	0	-2	-16

El cual puede ser obtenido aplicando el Teorema de holgura complementaria y los de Dualidad Fuerte y Débil.

Para abordar las preguntas b), c) y d) se puede utilizar tanto la solución obtenida del primal como del dual. En este caso se presenta la solución obtenida desde el problema primal.

b) La variable x_2 es una variable básica, y entonces afectará al vector de coeficientes de variables básicas, el vector era $C_b = (4, 0)$ y ahora $C_b{}' = C_b + \Delta C_b = (8, 0)$.

Actualizando los valores tenemos

C'= C- Δ C- Δ Cb *B^{-1}*A

C'=(-4,0,-6,0)≤0, **se mantiene la base**. Entonces el nuevo valor objetivo es $(C_b + \Delta C_b) * b = 32$, con el nuevo tablero óptimo dual:

	x_1	x_2	H_1	H_2	
x_2	1	1	1/2	0	4
H_2	1	0	-1/2	1	2
-Z	-4	0	-6	0	-32

con lo cual el problema dual queda de la siguiente forma

	y_1	y_2	A_1	A_2	
y_1	1	1/2	0	-1/2	4
A_1	0	-1	1	-1	6
W	0	-4	0	-2	-32

c) Al incrementar $b_1 = 8\ a\ 9$, tenemos que b'=b+B^{-1}*Δb=(4/5 26/5)^t por lo tanto el problema continua siendo factible, y el nuevo valor de la función objetivo será: Z' =Z+ΔZ*= 18.

Con un nuevo tablero óptimo dual igual a:

	x_1	x_2	H_1	H_2	
x_2	1	1	1/2	0	9/2
H_2	1	0	-1/2	1	3/2
-Z	-2	0	-2	0	-18

con lo cual el problema dual queda de la siguiente forma

	y_1	y_2	A_1	A_2	
y_1	1	1/2	0	-1/2	2
A_1	0	-1	1	-1	2
W	0	-9/2	0	-3/2	-18

d) En el caso base tenemos $x_1 = 0\ y\ x_2 *= 4$, luego evaluamos en la nueva restricción

A incorporar $6\ x_1 + 2x_2 \leq 12$. Al sustituir vemos que $6x_1 * +2x_2 *= 8 \leq 12$, y por lo tanto la nueva restricción no modifica la solución óptima del dual y por ende no modifica la solución óptima del caso base del primal.